

2022/2023 学年第一学期

2022 级硕士研究生《矩阵论》期末大作业

院（系）_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____ 序号_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分

一. (12 分) 在线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的子空间 $V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$ (按照通常矩阵的加法和数乘) 中, 定义线性变换 $T(A) = A + A^T, \forall A \in V$.

(1) 求 T 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的基 $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 下的矩阵;

(2) 分别求 T 的值域 $R(T)$ 和核子空间 $Ker(T)$ 的基与维数;

(3) 问 $R(T) + Ker(T)$ 是否为直和? 为什么?

自觉遵守考场规则, 诚信考试, 绝不作弊

得 分

二. (8 分) 在欧式空间 $P_3[x]$ 中定义内积 $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

(1) 由基 $1, x-1, x^2-x$ 出发, 求 $P_3[x]$ 的一组标准正交基;

(2) 求 $h(x) = 2 + 2x - 5x^2$ 的长度.

得 分

三. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 求:

(1) 求 A 的不变因子和初等因子, 并求 A 的 Jordan 标准形及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$;

(2) 根据参数 a, b, c 不同取值讨论 B 的 Jordan 标准形, 并指出参数 a, b, c 取何值时, A 与 B 相似.

得 分

四. (8 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

得 分

五. (8 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

得 分

六. (12 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 e^A , $\cos(At)$, $\|A\|_F$.

得 分

七. (8 分) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$, 定义 $\|x\|_{[k]} = |x_{i_1}| + |x_{i_2}| + \dots + |x_{i_k}|$, 其中 $|x_{i_1}| \geq |x_{i_2}| \geq \dots \geq |x_{i_k}|$, $k = 1, 2, \dots, n$. i_1, i_2, \dots, i_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列.

- (1) 证明 $\|x\|_{[k]}$ 为 C^n 上的范数; (2) 说明 $\|x\|_{[k]}, \|x\|_1, \|x\|_\infty, k = 1, 2, \dots, n$ 之间的关系.

得 分

八. (12 分) 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$
 求:

- (1) 用满秩分解的方法求该线性方程组系数矩阵的加号逆 A^+ ;
- (2) 用广义逆矩阵方法判断该线性方程组是否相容?
- (3) 求该线性方程组的极小范数解或极小范数最小二乘解 (指出所求的是哪种解).

学号_____姓名_____序号_____

得 分

- 九. (20 分) (1) 结合自己的专业方向, 阐述矩阵理论在本专业方向的具体应用;
- (2) 了解并介绍矩阵理论的前沿发展动态及其在相关领域的重要应用.

学号_____姓名_____序号_____

自觉
遵守
考试
规则,
诚信
考试,
绝不
作弊

装
订
线
内
不
要
答
题

如纸张不够,可另附纸张,并填写另附_____张纸(没有填0)。