矩阵的概念

- 矩阵：长方形的数表。

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 4 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -7 & 1\end{bmatrix}$$

- 每个位置上的数称为元素
- 矩阵也可以用圆括弧表示

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 4 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -7 & 1\end{pmatrix}$$

矩阵的计算

- 矩阵相等：
  $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $B=[a_{ij}]_{s\times t}$，当 $m=s$ 且 $n=t, a_{ij}=b_{ij}$ 时，称为 $A=B$。
- 矩阵相加：矩阵规模一致，可相加。

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

  - $A+B=B+A$
  - 零阵(O)：$a_{ij}=0$ $A+O=A$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 矩阵数乘

$$\lambda A=A\lambda=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

$$4\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ 0 & 4 & -4\end{bmatrix}$$

- 矩阵相乘：

$$A=[a_{ij}]_{m\times k} \quad B=[b_{ij}]_{t\times n}$$

当 $k=t$ 时，可以相乘。

$$C=AB=[c_{ij}]_{m\times n} c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix} \ B=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} \quad A\cdot B=[1\times 1+2\times(-1)+4\times 3]=11$$

- 例, 计算 A^2, $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

- 单位阵：I 对角线为1，其余元素为0
  - $IA=AI=A$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 矩阵转置：行列交换 $A^{‘}$ 或 A^T
  - $(A+B)^T=A^T+B^T$
  - $(AB)^T=B^TA^T$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & 0\\6 & 1\end{bmatrix}$$

- 对称阵：$A^T=A$