若 $AX=B$ $A-m\times n$，解不唯一，如何掌握全体解?

- $AX=B$, $(B\neq 0)$ 非齐次线性方程组，$r(A)=r([AB])<n$，$n-r(A)$ 个自由变量
- 解的性质
  1. 若 Y 为 $AX=B$ 的解，X 是 $AX=0$ 的解，则 $Y+X$ 也是 $AX=B$ 的解
  2. 若 Y_1,Y_2 均为 $AX=B$ 的解，则 Y_1-Y_2 即为 $AX=0$ 的解。
- 对于 $AX=B$
  若已知 $AX=B$ 的一个解 Y 和 $AX=0$ 的基础解系，
  $X_1,X_2,\cdots,X_k$，$k=n-r(A)$, 则 $AX=B$ 的所有解即为

  $$X=Y+C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_kX_k,\ C_1,C_2,\cdots,C_k$$

  为任意常数。
- 例，求通解

  $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=-1 \\ 4x_1+x_2-3x_3+x_4=1 \end{cases}$$

- 解

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

确定自由变量 x_3,x_4，令 $x_3=x_4=0$，求 $AX=B$ 的一个解，得

$x_x=1,x_1=0$，即 $Y=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

求 $AX=0$ 的基础解系，

令 $x_3=1,x_4=0\rightarrow\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

令 $x_3=0,x_4=1\rightarrow\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

通解

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

步骤

1. $[A, B]\ to$ 阶梯阵
2. 确定自由变量
3. 令所有自由变量为 0，求得 $AX = B$ 的一个解 Y
4. 求出 $AX = 0$ 的基础解系， $X_1, X_2, \cdots, X_k$，$k = n - r(A)$
5. $AX = B$ 的通解为 $X = Y + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_kX_k$