n 维向量

- 有序的若干个数称为向量。

如 $\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix}$ 称为**四维向量**

- 每个数称为分量，有几个分量就是几维向量
- **向量**实际也即是一个**列矩阵**
- 向量之间的相等、加法和数乘就是矩阵的相等、加法和数乘。

向量组的线性相关性

- 称 $3\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。
- 若 $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$ 称 β 可用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。
- 关于向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$，若存在一组不全为零的数，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k = 0$，则称向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 是线性相关的，否则称为线性无关。
- 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 线性相关等价于向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 中至少有一个向量可以用其余向量线性表出。
- 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 线性无关等价于若 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k = 0$ 必有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$
- 例 判别向量组 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$ 的线性相关性。
- 解：由定义考虑 使

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- 因此，考虑向量组的线性相关性等价于考虑相应的线性方程组是否有非零解。

极大线性无关组

- 考虑向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 希望以其中最少的部分去掌握全体，这最少的部分应满足：
  1. 这部分是线性无关的。
  2. 这组中的每个向量都能用这部分线性表出
- 满足上面条件的向量组就称为**极大线性无关组**
- 极大无关组不一定是唯一的，但极大无关组中向量个数是一定的。
- 向量组中的秩 = 极大无关组中向量的个数
- $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 变为矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k]$ 通过初等行变换得到阶梯阵
  - 若阶梯阵的非零行数 $<$ 向量个数 $\Rightarrow$ 向量组线性相关
  - 若阶梯阵的非零行数 $=$ 向量个数 $\Rightarrow$ 向量组线性无关。
  - 阶梯阵中每一行第一个非零元素所对应的向量构成极大无关enh组
  - 向量组的秩 = 矩阵的秩