若有解，是否唯一?

- 设方程组 $AX = B \quad A - 3\times 4$

$$[AB] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$r(A) = r([AB]) = 2 < 4$$

  - 方程组有解而不唯一，且有 $4-2$ 个自由变量

- $r(A) = r([AB]) = n$
  - 解唯一
- $r(A) = r([AB]) < n$
  - 解不唯一，且有 $n - r(A)$ 个自由变量

若不唯一，如何掌握全体（$AX = 0$)

- $AX = 0$ 齐次线性方程组 $A - m\times n \quad r(A) < n$ 有 $n - r(A)$ 个自由变量
- 解的性质
  - 若 X_1, X_2 均为 $AX = 0$ 的解，则 $C_1X_1 + C_2X_2$ (C_1, C_2 为任意常数)也是 $AX = 0$ 的解。
  - $\{X|AX = 0\}$ 中极大无关组，又称为 $AX = 0$ 的基础解系。
- 例

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- 解

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  - $r(A) = 2 < n(= 4)$ 有无穷多解，有 $4-2$ 个自由变量，选 x_3, x_4 为自由变量。
    - 令 $x_3 = 1, x_4 = 0$

$$x_2 = -2x_3 = -2$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 令 $x_4 = 1, x_3 = 0$

$$x_2 = 0, x_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 基础解系

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

- C_1, C_2 为任意常数，通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 求 $AX = 0$ 通解的步骤：
  1. 把 A 化为阶梯阵
  2. 确定 $n - r(A)$ 个自由变量
  3. 另一个自由变量为 1 ，其它自由变量为 0 解得一组解，用遍这样的方法，得到 $n - r(A)$ 组解，它们即构成基础解系
  4. 基础解系中的解分别乘上任意常数相加，既得通解