Opencv 的 getPerspectiveTransform 方法如何获取投影转换矩阵

这里说明一下 opencv 中 getPerspectiveTransform 方法获得转换矩阵的数学原理。首先我们设置转换矩阵如下：

$M = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$因为我们要构造的这个 M 是个齐次矩阵，齐次矩阵的特点是齐次坐标乘上齐次矩阵得到新变换点，是不考虑缩放的。就是$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$是一样的。因为$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/2 \\ 4/2 \\ 2/2 \end{bmatrix}$。将齐次坐标转换成我们常见的二维坐标,就是除上让$X$和$Y$轴除以$Z$轴。齐次坐标是不考虑缩放的。所以转换矩阵$M$实际上就少一个约束，因此只需要 8 个未知量就可以，而不是 9 个。我们可以将 9 个未知数的任意一个设置个常量。一般我们都设置h_{33}为1。因此我们的矩阵就设置为如下形式：

$$M = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

那么要求出这 8 个未知量，就需要 8 个方程组。所以我们就至少需要 4 个点的坐标。每个点的坐标是$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$，每个点可以构造两个方程组。这样 4 个点就构造成 8 个方程组了。我们设置原始 4 个点的坐标为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们已知转换后应该得到的 4 个点坐标如下：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4' \\ y_4' \\ 1 \end{bmatrix}$$

转换矩阵有如下关系：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这个等式可以做一下变形：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} / z''$$

让X和Y轴上的值要除以Z轴上的值就可以确定等式关系。我们以其中一个点坐标举例，其余三点是同理的。我们选取$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix}$建立等式关系。

我们将$M\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$展开得到一下结果：

$$z_1'' = \ h_{31}x_1 + h_{32}y_1 + 1$$

$$x_1' = (h_{11}x_1 + h_{12}y_1 + h_{13})/z_1''$$

$$x_1'(h_{31}x_1 + h_{32}y_1 + 1) = h_{11}x_1 + h_{12}y_1 + h_{13}$$

$$x_1'x_1h_{31} + x_1'y_1h_{32} + x_1' = h_{11}x_1 + h_{12}y_1 + h_{13}$$

$$x_1' = h_{11}x_1 + h_{12}y_1 + h_{13} - x_1'x_1h_{31} - x_1'y_1h_{32}$$

同理也可以推导出y_1'来：

$$y_1' = (h_{21}x_1 + h_{22}y_1 + h_{23})/z_1''$$

$$y_1'(h_{31}x_1 + h_{32}y_1 + 1) = h_{21}x_1 + h_{22}y_1 + h_{23}$$

$$y_1'x_1h_{31} + y_1'y_1h_{32} + y_1' = h_{21}x_1 + h_{22}y_1 + h_{23}$$

$$y_1' = h_{21}x_1 + h_{22}y_1 + h_{23} - y_1'x_1h_{31} - y_1'y_1h_{32}$$

这样我们按照这个方式也可以把其余三个点就解出来。我们最终就可以得到 8 个方程组。我们写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -x_1'y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y_1'x_1 & -y_1'y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2'x_2 & -x_2'y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -y_2'x_2 & -y_2'y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3'x_3 & -x_3'y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -y_3'x_3 & -y_3'y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4'x_4 & -x_4'y_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -y_4'x_4 & -y_4'y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2^1 \\ x_3' \\ y_3' \\ x_4' \\ y_4' \end{bmatrix}$$