信息学暑期

组合计数

统计满足某些条件的物体的个数

eg：求图不同生成树的个数

答案通常都很大
所以需要%p之后输出

又是学习信（shu）息（xue）竞赛的一天

例1

有3个红球和4个蓝球，拿一个球有几种选择?

拿一个球的选择数可以分成拿红球(3)和拿蓝球(4)，所以有3+4=7

若完成一件事的方法有n 种，$a_i(1<=i<=n)$ 代表第 i 类方法的数目。
那么完成这件事共有 $s=a_1+a_2+a_3+…+a_n$种不同的方法。

加法原理

简单变通一下

若完成一件事的方法有 n 种，不满足条件A的方法有m个，
则满足条件A的方法有 **n-m** 种

Eg：求小于10000的正整数种含有数字 1 的数的个数

个位含1 十位含1 百位含1 千位含1 万位不含1

先求出不含数字1的个数 **9*9*9*9**

个位含1 十位含1 百位含1 千位不含1 万位不含1

情况太多，太麻烦

正着计算很复杂，我们就转变一下思路

总的方法数 **9999**

个位含1 十位含1 百位不含1 千位不含1 万位不含1

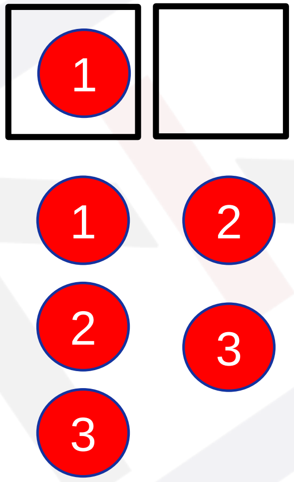
个位含1 十位不含1 百位不含1 千位不含1 万位不含1

答案 **9999-9*9*9*9=3438**

例2

有3个球，依次拿两个球有几种选择?

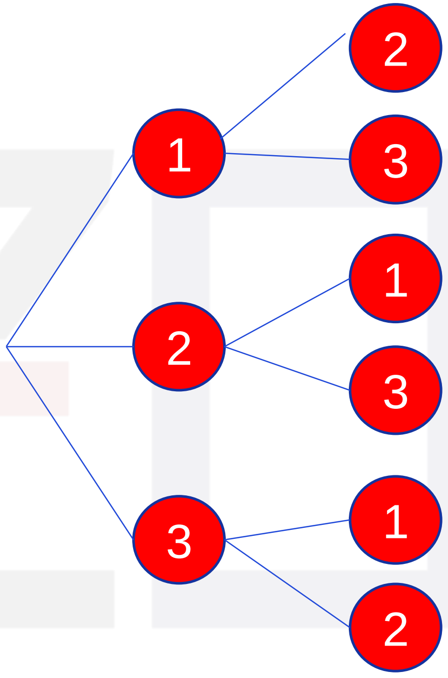
方法:



第一个位置有 3 种选择

当第一个位置选定后

第二个位置有 2 种选择



决策过程

完成一件事需要分 n 个步骤，ai(1<=i<=n) 代表第 i 个步骤的不同方法数目。

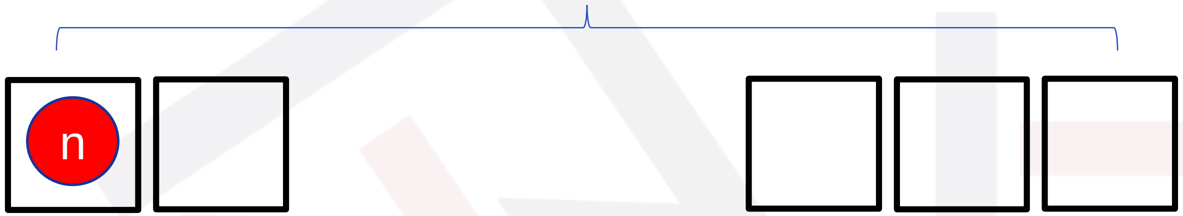
那么完成这件事共有 s=a1*a2*a3*…*an种不同的方法。

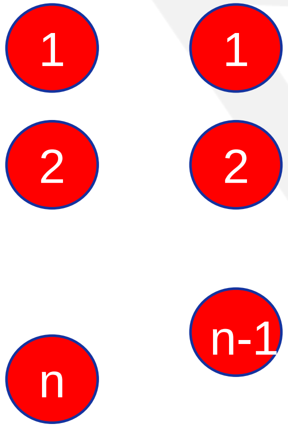
乘法原理

例3

如果从n个不同的球中,取出m个球.那么有多少种取法

M个位置





第一个位置有N种放法,
第二个位置有N-1种放法,
第三个位置有N-2种放法.
第M个过程有N-M+1种放法.

其答案为积

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

排列数

从n个元素中任取r个不同元素排成一排，称为从n中取r的排列，

顺序不同视为不同的方案，它的方案数以$A(n,r)$或A_n^r表示. 例如$A(4,2)=12$

考虑从左到右逐个确定一排r个元素的具体选择，第一个元素有n种选择，

第二个元素n-1种选择, ... ，第r个元素(n-r+1)种选择，所以

$$A(n,r)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\quad=\frac{n!}{(n-r)!}$$

取n个元素全体进行排列，称为n的全排列，排列数为n! .

从n个元素中任取r个不同元素，若**不考虑它们的顺序**时，

则称为从n中取r的组合，

它的方案数以$C(n,r)$或C_n^r或$\binom{n}{r}$表示.例如$C(4,2)=6$

组合数怎么算?

一个组合是不是已经选出来r个元素 将这r个元素进行一次全排列，就相当于直接选了r个元素排列

一个组合进行全排列后对应r!个排列，所以组合数

$$C(n,r)=\frac{A(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

平面上有三条平行直线，每条直线上分别有7, 5, 6个点，且不同直线上三个点都不在同一条直 线上。问用这些点为顶点，能组成多少个不同三角形?

一条线上一个点　　第1条线上两个点　　第2条线上两个点　　第3条线上两个点

组合数的性质

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

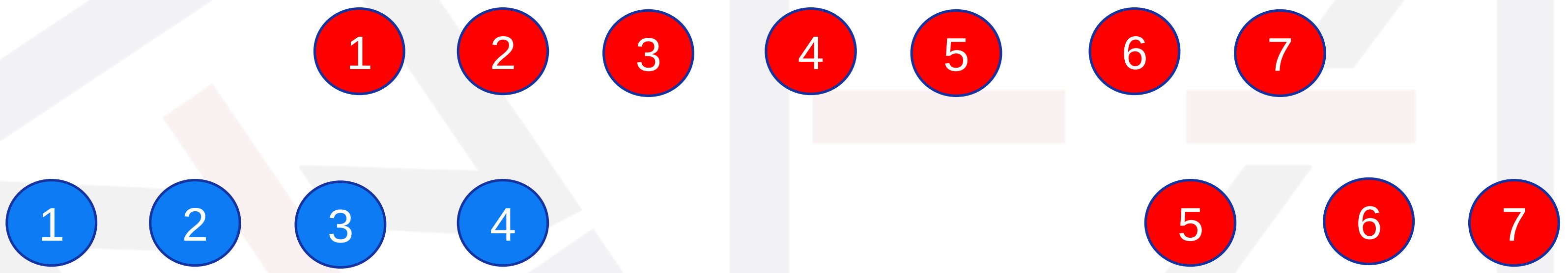
$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

组合数的性质

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$



选出 r 个作为一个组合

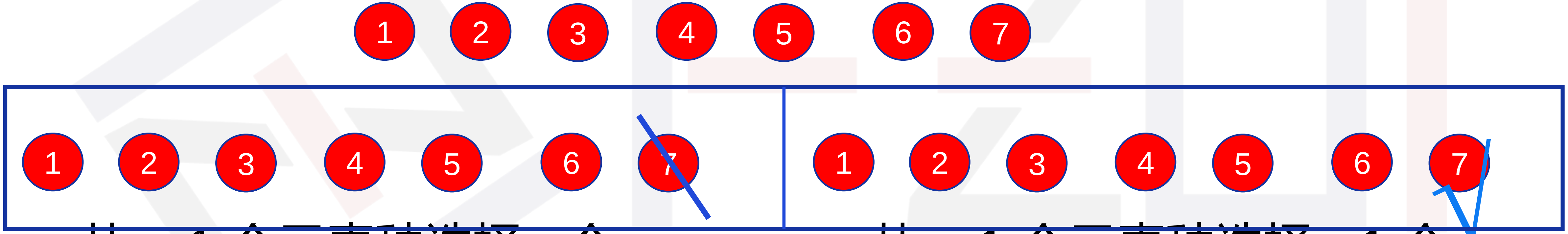
剩下的 n - r 个自动成为一个组合

两者一一对应，数量相等

组合数的性质

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

n个元素选r个的方案数可以分为选择第n个和不选第n个两类



从 n-1 个元素种选择 r 个　　　　从 n-1 个元素种选择 r-1 个

一件事的两种方法　**加法原理**

组合数的性质

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)=2^n$$

从n个元素种选取不同个数元素组成集合的方法数

$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)$

一共 n+1 种方法

加法原理

2^n

一共 n 步，每一步都有取或者不取 2 种方法

乘法原理

组合数的性质

- $C_n^k C_k^r = C_n^r C_{n-r}^{k-r}$

先从n个元素里面挑选k个，再从k个里面选出r个

先从n个里面选出r个，再在剩下没选中的里面选择k-r个

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

二项式定理

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1a+1b$
$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$
……

提系数

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

一摸一样

杨辉三角

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

在展开$(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$的过程中，对于每个$(x+y)$要么选x要么选y，所以$x^k y^{n-k}$的系数为$\binom{n}{k}$.

例题：计算系数

给定一个多项式(ax + by)^k，请求出多项式展开后x^n y^m项的系数。

输入

共一行，包含 5 个整数，分别为a，b，k，n，m，每两个整数之间用一个空格隔开。

输出

输出共 1 行，包含一个整数，表示所求的系数，这个系数可能很大，**输出对10007 取模后的结果。**

根据二项式公式，多项式展开的各项是:

$$C(k,i)\ (by)^i (ax)^{k-i} \qquad i=0,1,2,\ldots k$$

所有 $y^m x^n$的系数为 $C(k,m)\ b^m a^{k-m}$

但是组合数怎么求?

组合数的求法

最朴素的想法：直接利用公式暴力求解

$$C(n,r)=\frac{A(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

```
int Combination(int n, int m)
{
const int M = 10007;
int ans = 1;
for(int i=n; i>=(n-m+1); --i)
    ans *= i;
while(m)
    ans /= m--;
return ans % M;
}
```

试一下 n 等于多少的时候会爆掉

怎么补救?

交叉乘除，把能整除的先除

高精度

组合数的求法

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

依据该性质，我们可以用递推法求出组合数

```
onst int M = 10007;
const int MAXN = 1000;
int C[MAXN+1][MAXN+1];
void Initial()
{
    int i,j;
    for(i=0; i<=MAXN; ++i)
    {
        C[0][i] = 0;
        C[i][0] = 1;
    }
    for(i=1; i<=MAXN; ++i)
    {
        for(j=1; j<=MAXN; ++j)
            C[i][j] = (C[i-1][j] + C[i-1][j-1]) % M;
    }
}

int Combination(int n, int m)
{
    return C[n][m];
}
```

算一算复杂度

生成的复杂度为O(n^2)，
查询复杂度为O(1)

组合数的求法

$$C(n,r)=\frac{A(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n*(n-1)*\cdots*(n-r)}{r!}$$

一般而言，我们求出的组合数都不会小，题目都会要求对一个数 p 取模

如果1-n 都存在模 p 的逆元，这个时候我们可以

先计算分子 再计算分母的逆元

乘起来得到 $C(n,r) \bmod p$

算一算复杂度

```
LL Combination(LL n,LL m)
{
    if(m < 0)return 0;
    if(n < m)return 0;
    if(m > n-m) m = n-m;

    LL up = 1, down = 1;
    for(LL i = 0 ; i < m ; i ++){
        up = up * (n-i) % MOD;
        down = down * (i+1) % MOD;
    }
    return up * inv(down) % MOD;
}
```

预处理阶乘逆元

在计算阶乘的过程种，将每个 k! mod p 及其逆元分别保存在两个数组中

求组合数的时间复杂度将会变成 O(1)

$$C(n,r) \bmod p = \text{jc[n]} * \text{jc\_}inv\text{[r]} * \text{jc\_}inv\text{[n−r]}\ mod\ \ p$$

```
void init(){
    inv[0]=jc[0]=1;
    inv[1]=1;
    for(int i=1;i<MAXN;i++){
        jc[i]=jc[i-1]*i%mod;
    }
    inv[1]=1;
    for(int i=2;i<MAXN;i++){
        inv[i]=(LL)(mod-mod/i)*inv[mod%i]%mod;
    }
    inv[0]=1;
    for(int i=1;i<MAXN;i++){
        inv[i]=inv[i-1]*inv[i]%mod;
    }
```

范德蒙卷积公式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}$$

特殊情况：$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

等式左边的意义：

将m_1+m_2个元素分为两部分，枚举其中一部分选的元素数量k，另一部分选的元素数量就是n-k

Lucas定理

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

观察上述表达式，可知 n mod p 和 m mod p 一定是小于p的数，可以直接求解，

$\binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor}$ 可以继续用 Lucas 定理求解。

边界条件

```
ll Lucas(ll n, ll m, ll p) {
  if (m == 0) return 1;
  return (C(n % p, m % p, p) * Lucas(n / p, m / p, p)) % p;
}
```

小结一下

- $C(n,r) = C(n,n-r)$
- $C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$
- $C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$
- $C_n^k C_k^r = C_n^r C_{n-r}^{k-r}$

$$\Sigma_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}$$

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

一些排序的小技巧

把n表示成k个正整数的和

$n = n1+n2+...+nk$

有序拆分

表示法共有 C(n-1, k-1)种。

技巧:插板法:

想象n拆出了n个1，然后在这n个1之间有n-1个空位.

在n-1个空位中放入k-1个板子,使得板子之间的数重新组合成k个数.完成分割

所以是C(n-1,k-1)

10 个三好学生名额分配到 7 个班级，每个班级至少有一个名额，一共有( )种不同的分配方案。

插板法

C(9,6) = C(9,3) = 9*8*7/3! = 84

多重集合的定义

多重集合与一般的集合是一样的，不过不要求元素不能重复，

例如，如果一个盒子里面有3个苹果，2个梨，4个草莓

多重集的排列

全排列数为

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

选 r 个为

$$k^r$$

多重集的组合

选 r 个为

不定方程x 1 + x 2 + … + x n = r 的非负整数解的个数为

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

可以把组合问题先描述成一个不定方程，然后再将这个不定方程通过变量替换换成 求非负整数解的个数类型，最后求解。

满足i不在第i位的排列,计为Di

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

[公式解释]
记D_i表示i个元素的错排列数量
第一步，考虑第n个元素，把它放在某一个位置，比如位置k，一共有n-1种放法；
第二步，考虑第k个元素，这时有两种情况：
（1）把它放到位置n，那么对于除n以外的n-1个元素，由于第k个元素放到了位置n，所以剩下n-2个元素错排即可，有D_{n-2}种放法；
（2）第k个元素不放到位置n，此时k有一个不能放的位置n，这时对于这n-1个元素的错排，有D_{n-1}种放法。

BZOJ 4517 SDOI 2016 排列计数

圆排列

n 个人全部来围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n。

考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列

$$Q_n^n \times n = A_n^n \Longrightarrow Q_n = \frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

由此可知部分圆排列的公式

$$Q_n^r = \frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

Catalan 数列

1. 有 2n 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票，另外 n 人只有 10 元钞票，剧院无其它钞票，问有多少中方法使得只要有 10 元的人买票，售票处就有 5 元的钞票找零?
2. 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 2n 个街区去上班。如果他从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路?
3. 在圆上选择 2n 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数?
4. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数?
5. 一个栈（无穷大）的进栈序列为 1,2,3,⋯,n 有多少个不同的出栈序列?
6. n 个结点可够造多少个不同的二叉树?
7. n 个不同的数依次进栈，求不同的出栈结果的种数?

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}(n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$$

Thanks

For Your Watching

FZOI

西大附中信息学竞赛

High School Affilinted to Southwest University