写在前面的话

这是一节数学课；

需要纸和笔，请提前准备好；

还需要脑子，更加请提前准备好；

二项式反演

二项式定理

$$(a+b)^n$$
$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{(n-2)}b+\cdots+\binom{n}{i}a^{n-i}b^i+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

反演是什么

- 对于一个数列$\{f_n\}$来说，如果我们知道另外一个数列$\{g_n\}$，满足如下条件:

$$g_n=\sum_{i=0}^{n} a_{ni} f_i$$

反演就是利用：$g_0, g_1, \dots, g_n$来表示f_i

$$f_n=\sum_{i=0}^{n} b_{ni} g_i$$

δ_{ij}函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

反演满足的条件

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} g_i$$

将g_i带入式子得:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} \sum_{j=0}^{i} a_{nj} f_j$$

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} f_i \sum_{j=i}^{n} b_{nj}\, a_{ji}$$

反演满足的条件

$$\begin{bmatrix} b_{n0}a_{00}f_0 & & & \\ b_{n1}a_{10}f_0 & b_{n1}a_{11}f_1 & & \\ b_{n2}a_{20}f_0 & b_{n2}a_{21}f_1 & b_{n2}a_{22}f_2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{nn}a_{n0}f_0 & b_{nn}a_{n1}f_1 & \cdots & b_{nn}a_{nn}f_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

那么，前一个求和是先**对行**进行，再将各行加起来，后一个就是先**对列**进行，再将各列加起来

将g_i带入式子得：

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} \sum_{j=0}^{n} a_{nj} f_j$$

$$f_n = \sum_{i=0} f_i \sum_{j=i} b_{nj}\, a_{ji}$$

反演满足的条件

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} g_i$$

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} f_i \sum_{j=0}^{n} b_{nj}\, a_{ji}$$

反演成立的充要条件就是：

$$\sum_{j=0}^{n} b_{nj} a_{ji} = \delta_{ni}$$

二项式反演

基本式:

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g_i \leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_i$$

二项式反演 证明

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} b_{nj}a_{ji} = \delta_{ni}}$$

- 可以表示为:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g_i \leftrightarrow g_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_i$$

只需要证明:

$$\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \delta(n,j)$$

这里$b_{ni} = (-1)^i\binom{n}{i}, a_{ij} = (-1)^j\binom{i}{j}$

二项式反演 证明

二项式系数前置知识

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{n!i!}{i!(n-i)!j!(i-j)!}$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(n-i)![(n-j)-(n-i)]!}$$

$$= \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$$

二项式反演 证明

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$$

组合推理理解:

你有一个 n 元素集 U，现在对 (A,B) 进行计数，其中 $B\subseteq A\subseteq U$ 且 $|A|=i,|B|=j$，首先对 A 计数，U 的 i 子集有 $\binom{n}{i}$，然后对 B 计数，A 的 j 子集有$\binom{i}{j}$

接下来换一种方式，先对 B 进行计数，B 显然是 U 的子集，有 $\binom{n}{j}$种方案，由于要求 $B\subseteq A$，B 中 j 个元素必须在 A 中，A 还剩下 $i-j$ 个不确定的元素，U 还有 $n-j$ 个可以用的元素，一共有 $\binom{n-j}{i-j}$种，于是就得到上面的恒等式

二项式反演 证明

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{i}{j} \\
&=\binom{n}{j}(-1)^{j}\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\binom{n-j}{n-i} \\
&=\binom{n}{j}(-1)^{j}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{n-i}\binom{n-j}{i} \\
&=\binom{n}{j}(-1)^{n+j}(1-1)^{n-j} \\
&=\delta_{nj}
\end{aligned}
$$

二项式反演 证明

以上为二项式反演的代数证明
还有集合证明方式（容斥）
详情可见:
http://blog.miskcoo.com/2015/12/inversion-magic-binomial-inversion

二项式反演 变形一

- 基本式：

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g_i \leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_i$$

形式一：

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g_i \leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$$

证明：

令$h(n)=(-1)^n g(n)$则有：

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h_i \leftrightarrow \frac{h_n}{(-1)^n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_i \leftrightarrow h_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$$

二项式反演 变形二 证明

- 变形二：

$$f_n=\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}g_i \leftrightarrow g_n=\sum_{i=n}^{m}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}f_i$$

将右侧带入左侧得：

$$f_n=\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}\sum_{j=i}^{m}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}f_j$$

$$=\sum_{i=n}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^{j-i}\binom{i}{n}\binom{j}{i}f_j$$

二项

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=i}^{m} (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i} f(j) \\
&= \sum_{j=n}^{m} f(j) \sum_{i=n}^{j} (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) \sum_{i=n}^{j} \binom{j-n}{j-i} (-1)^{j-i} \\
&= \sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) \sum_{t=0}^{j-n} \binom{j-n}{t} (-1)^{t} 1^{j-n-t} \\
&= \sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) (1-1)^{j-n} \\
&= \sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) [j=n] \\
&= \binom{n}{n} f(n) \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

使用之前的组合恒等式

令t=j-i

西南大學附中

二项

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=n}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^{j-i}\binom{i}{n}\binom{j}{i}f(j) \\
&= \sum_{j=n}^{m} f(j)\sum_{i=n}^{j}(-1)^{j-i}\binom{i}{n}\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n} f(j)\sum_{i=n}^{j}\binom{j-n}{j-i}(-1)^{j-i} \\
&= \sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n} f(j)\sum_{t=0}^{j-n}\binom{j-n}{t}(-1)^{t}1^{j-n-t} \\
&= \sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n} f(j)(1-1)^{j-n} \\
&= \sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n} f(j)[j=n] \\
&= \binom{n}{n} f(n) \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

左右恒等，证毕

二项式反演 变形二 证明

- 变形二：

$$f_n=\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}g_i \leftrightarrow g_i=\sum_{i=n}^{m}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}f_i$$

- 变形二中，i不是从0开始，因此通用性更强；

- 证明截图来源：
- https://www.cnblogs.com/GXZlegend/p/11407185.html

反演的运用逻辑

- 显然可以得到$g_i = F(f_i)$
- 但是g_i比较好求，f_i不太好求
- 通过反演得到$f_i = F^{-1}(g_i)$
- 然后通过g_i求出f_i

hdu1465不容易系列之一 [bzoj 4665]小w的喜糖

- 题意：错排问题
- 有多少种排列方式，使得$a_i \neq i$

- 定义f_i表示恰好有i个错开，g_i表示至多有i个元素错开；
- 那么有：
- $g_i = i!$
- $g_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f_j$
- 根据二项式反演公式变形二可得：$f_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g_j$

hdu1465不容易系列之一

- 题意： 错排问题
- 有多少种排列方式，使得$a_i \neq i$

- 定义f_i表示恰好有i个错开，g_i表示至多有i个元素错开；
- 根据二项式反演公式变形二可得：$f_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}g_j$
- 容斥也能推出该公式；

- 该题目特点：恰好难求，至多好求

[bzoj2839]集合计数

- 一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集（包含空集），现在要在这 2^n 个集合中取出至少一个集合，使得它们的交集的元素个数为 k，求取法的方案数模 10^9+7。

- $1 \le n \le 10^6$，$0 \le k \le n$。

[bzoj2839]集合计数 solution

- 恰好是不好做的，那么我们可以先转换为“钦定”
- f_i表示我们钦定了i个元素 作为其交集的元素 的方案数；
- 那么可以列出式子：
- $f_i = \binom{n}{i}\left(2^{2^{n-i}} - 1\right)$
- 解释：
  - i个元素的选择方案有$\binom{n}{i}$种；
  - 包含这i个元素的集合有2^{n-i}个；
  - 这些集合都可以选或者不选，但不能全部都不选

[bzoj2839]集合计数 solution

- 恰好是不好做的，那么我们可以先转换为“钦定”
- f_i表示我们钦定了i个元素 作为其交集的元素 的方案数；
- 那么可以列出式子：
- $f_i = \binom{n}{i}\left(2^{2^{n-i}} - 1\right)$
- g_i表示交集的元素恰好为i个的方案数，则：
- $f_i = \sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}g_j$
- 通过二项式反演可以得到：$g_i = \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}f_i$

[bzoj2839]集合计数 solution

- 题目特点:
- 恰好不好求，钦定好求
- 钦定可以看做是**至少**;
- 再通过二项式反演（容斥）推理得到;

球染色问题

- 有 n 个球排成一行，你有 k 种颜色，要求给每一个球染色，相邻两个球颜色不可以相同，并且每种颜色至少使用一次；

球染色问题 solution

- 有 n 个球排成一行，你有 k 种颜色，要求给每一个球染色，相邻两个球颜色不可以相同，并且每种颜色至少使用一次；

- 如果没有至少使用一次答案是多少？
- $k(k-1)^{n-1}$
- 设 f_i 为恰好使用了 i 种颜色的方案数

$$g_k = k(k-1)^{n-1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i$$

通过反演可以得到：

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} k(k-1)^{n-1}$$

整体思路总结

- 先将条件放宽，得到一个比较好计算的问题；
- 再加上条件得到方程；
- 利用反演（或者容斥原理）算出答案
- **反演的本质是容斥**
- 例如：

BZOJ-3456. 城市规划

- 题目要求求出有 n(n≤130000) 个点的有标号简单连通无向图的个数;
- 首先可以设 $f(n)$ 表示有 n 个点的有标号简单连通无向图的个数, $g(n)$ 表示有 n 个点的有标号简单无向图的个数（也就是不要求连通）
- $g(n) = 2^{\binom{n}{2}}$
- 因为最多只有$\binom{n}{2}$条边;

BZOJ-3456. 城市规划

- 题目要求求出有 n(n≤130000) 个点的有标号简单连通无向图的个数；

- 又因为一个有标号简单无向图是由很多连通分量组成的，为了避免重复计数，我们枚举点 1 所在的连通块大小（其余的点随便连边，因为 1 号点所在连通块已经确定，其它怎么连都不会重复）

$$g(n)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}f(i)g(n-i)$$

(这种计数方式很常见，比如 FZOI 3567：【JXOI2018】游戏)

BZOJ-3456. 城市规划

g(n)带入后得:

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} f(i) 2^{\binom{n-i}{2}}$$

两边同时除以$(n-1)!$

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{(i-1)!} \frac{2^{\binom{n-i}{2}}}{(n-i)!}$$

可以发现是卷积形式

BZOJ-3456. 城市规划

现在你会发现这是个卷积的形式！定义函数 $F(x), G(x), C(x)$

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{(n-1)!}x^n$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n$$

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\binom{n}{2}}}{(n-1)!}x^n$$

可以得到

$$C(x)=F(x)G(x)$$

将其放在 $\bmod x^{n+1}$ 下

$$C(x)\equiv F(x)G(x) \pmod{x^{n+1}}$$
$$F(x)\equiv C(x)G^{-1}(x) \pmod{x^{n+1}}$$

模数是特殊值，可以使用NTT

习题

- bzoj 4665]小w的喜糖
- [bzoj2839]集合计数

- [bzoj3622]已经没有什么好害怕的了
- [bzoj4710]分特产

- Ex: 「BZOJ3456」城市规划