莫比乌斯函数

莫比乌斯函数

当 N 包含相等的质因子时，$\mu(N)=0$；当 N 的所有质因子各不相等时，若 N 有偶数个质因子，$\mu(N)=1$；若 N 有奇数个质因子，$\mu(N)=-1$。

若只求一项莫比乌斯函数，则分解质因数即可。

若求 $1\sim N$ 的每一项莫比乌斯函数，可以利用**埃氏筛法**。

莫比乌斯函数

将所有 μ 值初始化为 1 ，对于筛出的每个质数 p ，令 $\mu(p)=-1$，并扫描 p 的倍数 $x=2p,3p,\dots\lfloor n/p\rfloor*p$，检查 x 能否被 p^2 整除，若能，则令 $\mu(x)=0$，否则令 $\mu(x)=-\mu(x)$ 。

质数 p 本身只有自身一个质因子，$\mu(p)=-1$。用质数 p 去筛 x ，每筛一次 $\mu(x)$ 就取反，若 x 被质数筛了偶数次，则 $\mu(x)$ 不变为 1 ，否则，$\mu(x)=-\mu(x)$ ；若 p^2 是 x 的质因子，则存在相等的质因子，$\mu(x)=0$ 。

```
//定义数组mob[N]保存莫比乌斯函数,v[N]标记是否为质数
for(int i=1;i<=n;i++)
      mob[i]=1,v[i]=0;
for(int i=2;i<=n;i++)
{
    if(v[i]) continue;    //被质数筛过，为合数
    mob[i]=-1;         //i为质数
    for(int j=2*i;j<=n;j+=i)
    {
        v[j]=i;
        if((j/i)%i==0) mob[j]=0;
        else mob[j]=mob[j]*-1;
    }
}
```

整除分块

输入 n，计算：$\sum_{i=1}^{n}\lfloor n/i \rfloor$，$1 \le n \le 10^9$。

对于 n/i，可以发现很多连续的一段区间内 n/i 的值是一样的，例如 $n=10$：

```
10/10=1 10/9=1 10/8=1 10/7=1 10/6=1
10/5=2 10/4=2
10/3=3
10/2=5
10/1=10
```

最多有 $2\sqrt{n}$ 种取值。

证明：若 $i \le \sqrt{n}$，n/i 最多有 $\sqrt{n}$ 种取值；若 $i \ge \sqrt{n}$，n/i 最多有 $\sqrt{n}$ 种取值，故最多 $2\sqrt{n}$ 种取值。

整除分块

区间 $i \in [x, n/(n/x)], 1 \le x \le n$，区间的值都是一样，为 n/x。

可以将 $1 \sim n$ 的分为 $\sqrt{n}$ 个区间，对于区间相同的值都可以统一计算，时间复杂度为 $O(\sqrt{n})$。

```
for(int l=1,r;l<=n;l=r+1)
{
    r=n/(n/l);       //区间右端点
    ans+=(r-l+1)*(n/l);
}
```

例:Zap

【题目描述】

FGD 正在破解一段密码，他需要回答很多类似的问题：对于给定的整数 a,b 和 d ，有多少正整数对 x,y，满足 $x \leq a$， $y \leq b$ ，并且 $gcd(x,y)=d$ 。作为 FGD 的同学，FGD 希望得到你的帮助。

【输入】

第一行包含一个正整数 n ，表示一共有 n 组询问。（$1 \leq n \leq 50000$）接下来 n 行，每行表示一个询问，每行三个正整数，分别为 a,b,d 。（$1 <= d <= a,b <= 50000$）

【输出】

对于每组询问，输出一个正整数，表示满足条件的整数对数。

例3:Zap

问题分析:

求多少对二元组 (x, y) 满足 $x \le a$，$y \le b$，并且 $gcd(x, y) = d$，等价于求多少对二元组 (x_1, y_1) 满足 $x_1 \le a/d$，$y_1 \le b/d$，并且 $gcd(x_1, y_1) = 1$。

因此，先在要找二元组 (x, y) 满足 $x \le a$，$y \le b$，并且 $gcd(x, y) = 1$。

如果直接找不容易找，那么那逆向思考，将 $gcd(x, y)$ 是 $2, 3, 5, \ldots$ 倍数的二元组排除，那么剩下的就是答案。

例3:Zap

问题分析:

设 $D[a,b,k]$ 表示满足 $x \le a, y \le b$，且 $gcd(x,y)$ 是 k（k 是$1 \sim min(a,b)$ 之间的质数）的倍数的二元组数量。

显然 x,y 必须是 k 的倍数，$1 \sim a$ 中 k 的倍数的个数有 a/k 个，$1 \sim b$ 中 k 的倍数有 b/k 个，所以 $D[a,b,k]=(a/k)\times(b/k)$。

总的二元组数量 $D[a,b,1]=a\times b$，那么减去 $gcd(x,y)$ 是 $2,3,5,\dots$ 倍数的二元组，这样又重复减掉了 $gcd(x,y)$ 既是 2 的倍数，又是 3 的倍数的二元组数量，需要加回来……

以此类推，可以发现 $D[a,b,i]$ 的系数就是莫比乌斯函数。

$$\boxed{ans=\sum_{i=1}^{min(a,b)}\mu(i)\times D[a,b,i]}$$

例3:Zap

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

问题分析:

但是测试组数有50000，这样做的时间复杂度是 $O(n \times min(a,b))$，会超时，需要进行优化。

使用整除分块，对于区间 $i \in [x, min(a/(a/x), b/(b/x))]$，$D[a,b,i] = (a/i) \times (b/i)$ 的值均相同，因此，可以计算出系数，统一计算，而系数可以使用莫比乌斯函数的前缀和求解。 复杂度为$O(n \times min(\sqrt{a}, \sqrt{b}))$ 。

FZOI

信息学

概率与期望

前言

讲解过程中会有很多符号

建议专门找张纸或者用TXT把符号意义记一下

预测一下

明天太阳会从东边出来

一定能实现

下周我们能返校上课

不一定能实现

啥事事件

随机事件与概率

自然界中的现象：
1 确定现象（一定条件下一定会出现） **（必然事件）**
2 随机现象（一定条件下，可能会出现多种结果中的某一种）

是研究和揭示随机现象**统计规律性**的一门数学学科

统计规律性?

扔一个6面🎲 100万万万...次（一个爆int128的数）

统计其中1 朝上的次数 占总次数**约1/6（规律）**

随机试验

扔一个骰子产生一个结果（某面向上）

（随机试验）　　　　　　　　（随机事件）

定义：

a 试验可在相同条件下重复进行。

b 试验结果可能多个，已经知道所有可能的结果。

c 每次试验的结果不能提前确定。

用E表示随机试验

例：E1 表示扔骰子，记录出现点数

扔一个骰子🎲产生一个结果（某面向上）

（随机试验） 随机试验 的结果 叫做 随机事件 （随机事件）

定义

a 随机事件是所有基本事件构成的集合（样本空间）的子集

在一次随机试验中可能发生的不能再细分的结果

表示

用大写字母A B C… 表示单位事件

¿ ¿ ¿ ¿ ¿

例：扔骰子

他的基本事件为 {1,2,3,4,5,6}

样本空间：在一次随机试验中产生的所有可能的结果构成的集合

随机事件与样本空间

扔一个骰子产生一个结果（某面向上）

(随机试验) (随机事件)

定义

a 随机事件是所有**基本事件**构成的集合（**样本空间**）的子集

表示

c 用大写字母A B C…表示随机事件

样本空间的子集,被称为随机事件
例如：结果为偶数的随机事件
的集合为{2,4,6}

例：扔骰子
他的基本事件为 S{1,2,3,4,5,6}

样本空间：在一次随机试验中
产生的所有可能的结果构成的集合

¿ ¿ ¿ ¿ ¿

样本空间中的基本事件互斥

互斥解释：至多只能发生一个，不能同时发生

易混淆：对立（互逆）：互斥+且只有2个基本事件

基于集合的事件表述与运算

直观理解：集合是一个数组，内部存储了大量数据。

这里的集合内部的元素默认为非重复

例骰子问题

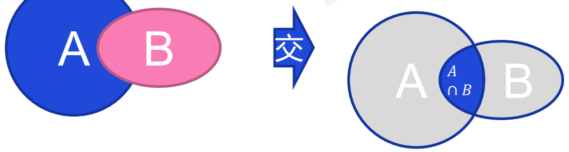
S={1,2,3,4,5,6}　「集合表达格式」集合名 = {内部元素}，集合名，{内部元素}，特别的若集合为空 { } 或 ∅

这里的S就是一个集合，他将扔骰子所有的基本事件表示出来了。

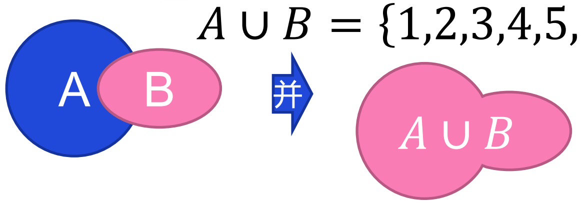
集合运算：交运算、并运算、补运算

假定集合A={1,2,3,5,4}集合B={5,3,0} （有部分元素重复）集合S={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} 能包含A B中的任意一种元素

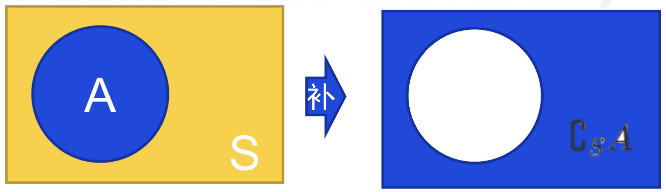
$A \cap B = \{5,3\}$



$A \cup B = \{1,2,3,4,5,0\}$



$\complement_S A = \{0,6,7,8,9,10\}$



基于集合的事件表述与运算

假定集合A={1,2,3,5,4}集合B={5,3,0} 集合S={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

交 $A \cap B = \{5,3\}$

并 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,0\}$

补 $C_S A = \{0,6,7,8,9,10\}$

集合 to 事件

事件$A_1 A_2 A_3 A_4$ ...B_1 B_2 ...C ...样本空间 Ω

事件的和：A和B事件至少有1个发生 （表述为 $A \cup B$ 或$A + B$）

事件的差：发生A而不发生B，（表述为$C_A B$或$A - B$）

事件的积：A和B事件同时发生，则称 A与B的积/交（表述为$A \cap B$ 或 AB）

事件包含：若发生A必然发生B，则称 B 包含A （表述为$A \subset B$ 或 $B \supset A$）

和、积 可以推广至多个事件。

- 事件发生: 当事件A所包含的基本事件有一个出现,称A发生了
- 必然事件:一定发生的事件
- 不可能事件:一定不发生的事件，记为Φ （空集的大写ϕ）
- 互斥事件： $AB = \phi$
- 对立事件： $AB = \phi$ 且只有A、B事件，记做 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$

啥事概率

概率:如果有一种事件到实数的映射 P()，满足:

1) 对任何事件 A，P(A)≥0
2) P(S)=1
3) **对两个互斥事件**，P(A∪B)=P(A)+P(B)

则可称 P(A)为随机事件 A 发生的概率。

上述三条称为概率公理。

3可拓展到任意个事件

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率

- **概率**，是反映**随机事件**出现的可能性大小，是一个取值为0到1的实数。

概率:如果有一种事件到实数的映射 P()，满足:

1) 对任何事件 A，P(A)≥0

2) P(S)=1

3) **对两个互斥事件**，P(A∪B)=P(A)+P(B)

则可称 P(A)为随机事件 A 发生的概率。

上述三条称为概率公理。

3可拓展到任意个事件

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

感性理解

1) 对任何事件 A， P(A)≥0

2) P (S) =1

3) 对两个互斥事件

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

事件发生的概率不能为负数

1) 对任何事件 A， P(A)≥0

2) P (S) =1

3) 对两个互斥事件

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

感性理解

一定会发生事件

eg 掷骰子一定会有某面朝上

感性理解

1) 对任何事件 A，P(A)≥0
2) P（S）=1
3) 对两个互斥事件

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

扔  1点或2点的概率

=

1点的概率 + 2点的概率

前提：事件之间互斥

- 因为随机事件在很多时候使用起来比较繁琐，于是引入了**随机变量**的概念。
  - 简单地说，随机变量是指随机事件的数量表现，把不同的随机事件映射到与之对应的数字上。
- 例如在掷两个骰子的随机试验中，设随机事件 A 为 “两个骰子获得的点数和大于 10 ”
- 设置随机变量 X 为 “两 个骰子的点数 和 ”
- 则：随机事件A 和 事件$X > 10$ 是等价的。同理，事件$X < 5$ 和 事 件 “两个骰子获得的点数和小于 5 ” 等 价 。 事件$X = 7$ 和事件 “两个骰子获得的点数和等于 7 ” 等价。

定义:

(1) 试验中所有可能出现的基本事件只有**有限**个;

(2) 试验中每个基本事件出现的可能性相等。

事件有限，概率相等。

古典概型的特点

有限性(所有可能出现的基本事件只有有限个)

等可能性(每个基本事件出现的可能性相等)

基本事件的特点

任何两个基本事件互斥

任何事件(除不可能事件)都可以表示成基本事件的和

古典概率模型 –计算

事件有限，概率相等。

P(A) = m/n

P(A) = 随机事件A包含的基本事件个数m/总基本事件个数n

事件有限，概率相等。

计算步骤：

（1）算出所有基本事件的个数n；

（2）求出事件A包含的所有基本事件数m；

（3）代入公式P(A)=m/n，求出P（A）

扔 ，随机事件A：出现偶数概率

基本事件 有6种可能n=6

A ={E2,E4,E6} m=3

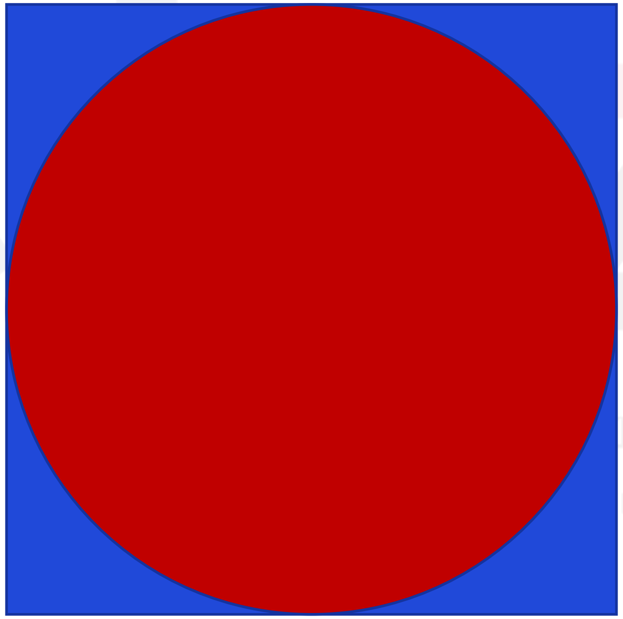
P(A) =3/6 =1/2

班上
有没有生日在同一天的同学?

反向考虑，任意两人生日不同:

$$1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}>0.98\ (n\geq 52)$$

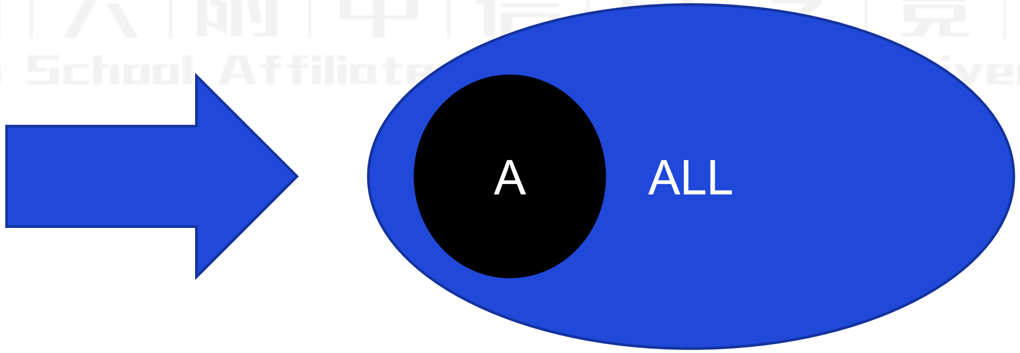
事件无限，概率相等。



事件无限，概率相等

P(A) = 构成事件A的区域长度/全部结果构成的区域长度

区域长度?
可以是体积或面积等



例

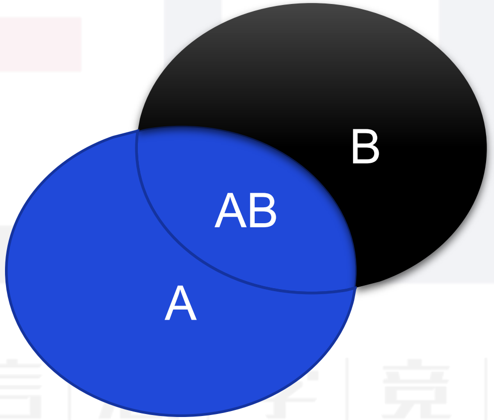
- 乔和摩进行了一次关于他们前一天夜里进行的活动的谈话。然而谈话却被监听录音机记录了下来，磁带长30分钟。联邦调查局拿到磁带并发现其中有10秒钟长的一段内容包含有他们俩犯罪的信息，然而后来发现，这段谈话的一部分被联邦调查局的一名工作人员擦掉了，该工作人员声称她完全是无意中按错了键，并从即刻起往后的所有内容都被擦掉了，试问如果这10秒钟长的谈话记录开始于**磁带记录后的半分钟**处，那么含有犯罪内容的谈话被**部分或全部**偶然擦掉的概率将是多大?

从区间中任选一点，落在前40s 的概率?

P(r) =40/(30*60) = 1/45

概率性质与应用

- P(Φ)=0
- 概率有有限可加性：若AB=Φ，则P(AUB) = P(A)+P(B)
  - 可推广到 n 个互不相容事件
- P(A)=1 - P($\bar{A}$)
  对任意两个事件A和B, 有P(B-A)=P(B)-P(AB)
  对任意两个事件A和B, 有P(AUB)=P(A)+P(B) - P(AB)
- P(AUB)像什么?



$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots\cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

例

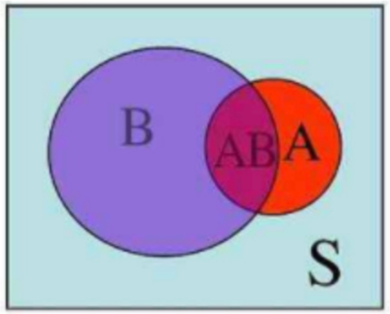
- 每次从 1,2,......,9中取一个数，连续取n次，求
- 取出的n个数的乘积能被10整除的概率

P(A) = P(取到5)
P(B) = P(取到过偶数)
求 取到5且取到过偶数
= P(AB)
= 1 – P($\bar{A}$ U $\bar{B}$)
= 1 – P($\bar{A}$) – P($\bar{B}$) + P($\bar{A}$ $\bar{B}$)
= 1 - $\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}$

感性理解：事件A已经发生的条件下 事件B发生的概率

前面的事件，会影响后面的事件发生概率

定义



$$P(AB) = \frac{S_{AB}}{S}$$

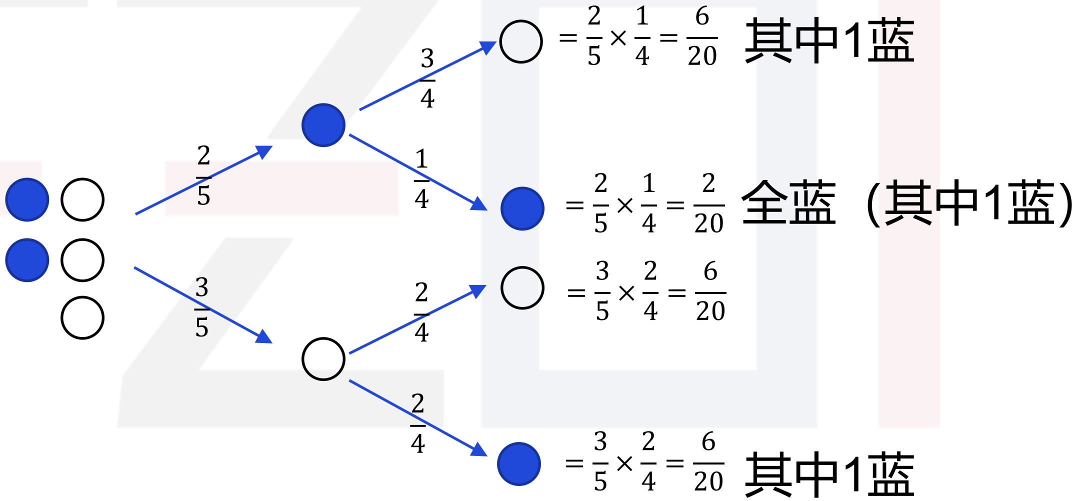
$$P(A) = \frac{S_A}{S}$$

$$P(B|A) = \frac{S_{AB}}{S_A} = \frac{\frac{S_{AB}}{S} * S}{\frac{S_A}{S} * S} = \frac{P(AB) * S}{P(A) * S} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

发生A情况下发生B的概率

条件概率-例

口袋里 5个球，2蓝，3白。取2个球。
在其中一个球是蓝球的情况下，另一个球是蓝球的概率?



$$P(A) = \text{P(其中1蓝)} = \underbrace{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}_{\text{2蓝}} + \underbrace{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}_{\text{至少一蓝}} + \underbrace{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}}_{\text{至少一蓝}} = \frac{14}{20}$$

$$P(A\cap B) = \text{P(2 蓝)} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{14}{20}} = \frac{1}{7}$$

条件概率-例2

同时扔2个，观察到正面向上的点数和为T，且T是奇数。请求出T<8的概率。

$$P(A) = \mathrm{P}(\mathrm{T} < 8) = P(T = 2,3,4,5,6,7) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36}$$

$$P(A \cap B\ ) = P(T = 3,5,7) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36}$$

$A = T < 8$

$B = T \text{ is odd}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{2}{3}$$

神奇：
事件A的无条件概率 P（A）
在给定条件 T 时的A概率 P(A|T)
不一样

假设P(A|T) >P(A) 那么我们还可以说，T促进了A发生

假设P(A|T) =P(A) 那么我们还可以说，A与T事件独立

全概率公式 (条件概率的一个拓展)

考虑这样一个情况 事件两两互斥且至少发生其中一个

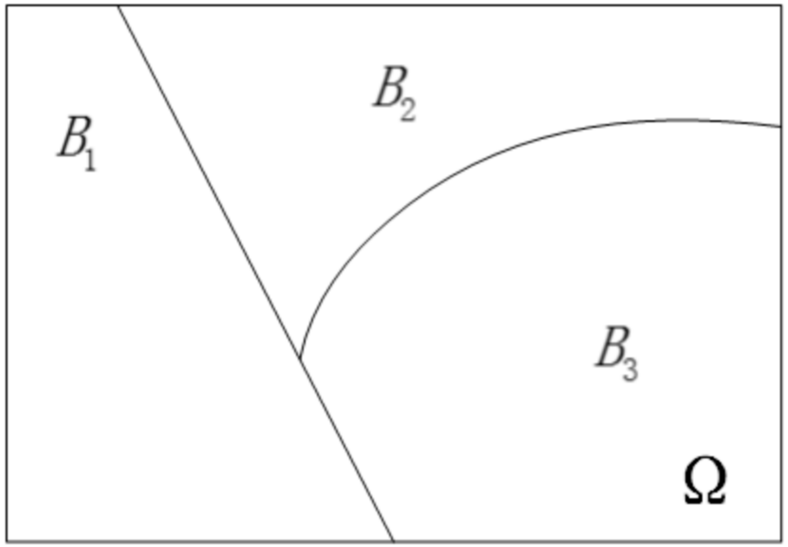


图2.事件两两互斥且每次实验至少发生其中一个

$$B_iB_j = \phi$$

$$B_1 + B_2 + B_3 ... + B_n = \Omega$$

全概率公式

引入新事件A

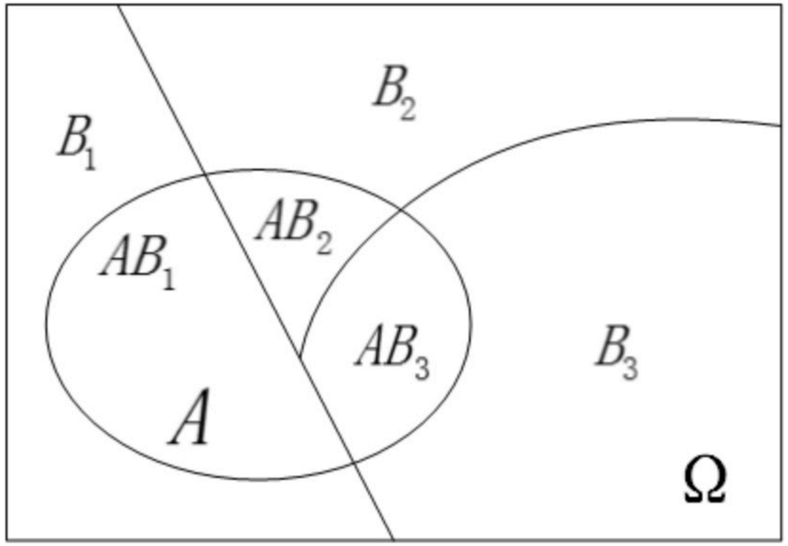


图3.引入新的事件A

$$P(A) = P(A\Omega)$$

$$P(A) = P(A\Omega) = P(AB_1 + AB_2 + AB_3 + \ldots + AB_n)$$

因为B事件互斥，所以AB事件之间也互斥，所以

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) + \ldots + P(AB_n)$$

由条件概率公式：

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)$$

最终得出：

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

感性理解：全部概率P(A) 被分解成了许多部分概率之和

全概率公式-应用

有些时候，直接计算P(A)比较困难。

但是可以围魏救赵，先计算出$P(A|B_i)$ 再计算概率P(A)

袋中有5个球，2黑，3白，依次取2球
求第二次取到黑球概率

$P(2^{nd}\text{黑}) = P(1^{st}\text{黑})P(2^{nd}\text{黑} \mid 1^{st}\text{黑}) + P(1^{st}\text{白})P(2^{nd}\text{黑} \mid 1^{st}\text{白})$

$$=\frac{2}{5} * \frac{1}{4} + \frac{3}{5} * \frac{2}{4}$$

$$=\frac{2}{5}$$

例：抓阄

一袋中有n个黑球m个白球，现不放回从袋中进行摸球，求第k次 摸到白球的概率，k=1,2,3,...,n+m。

一个直观的想法，N个人抽签，第K个人抽中白签

记 A_k表示第k次摸到白球的概率

猜测 P（A_k) = m/(n+m)

例：抓阄-证明

数学归纳法：

当k=1时：

显然P（A1）= m/（m+n）成立。

设当k = j时成立，下证明k=j+1成立：

$$P(A_{j+1}) = P(A_j)\,P(A_{j+1}|A_1) + P(\bar{A}_j)P(A_{j+1}|\bar{A}_1)$$

$$= \frac{m}{m+n} * \frac{(m-1)}{m+n-1} + \frac{n}{m+n} * \frac{m}{m+n-1} = \frac{m}{m+n}$$

$$P(A_{j+1}|\bar{A}_j) = \frac{m}{m+n-1}$$

$P(A_{j+1}|A_j)$ 表示从装有n个黑球m-1个白球中第j次摸出白球的概率

期望

- 休息10min

期望-例子1

投资项目：

赚1000元的概率为0.7
赚2000元的概率为0.2
亏8000元的概率为0.1

问：期望能拿到多少钱？

投资后只可能发生其中一种情况

那怎么预计这个项目的赚钱能力呢？

按照概率思路，假定我投资了1e8个这样的项目。

期望-例子1

投资项目：
赚1000元的概率为0.7
赚2000元的概率为0.2
亏8000元的概率为0.1

问：期望能拿到多少钱？

赚1*1e3的项目有7*1e7 个
赚2*1e3的项目有2*1e7个
赚8*1e3的项目有1*1e7个

平均每个项目赚

$$\frac{1*1e3*7*1e7\ +2*1e3+2*1e7-8*1e3*1*1e7}{1e8}=\frac{(7+4-8)*1e10}{1e8}=300$$

数学期望是
对随机事件不同结果的概率
加权平均

这个项目的期望收益
300元

期望-例子1

投资项目：

赚1000元的概率为0.7
赚2000元的概率为0.2
亏8000元的概率为0.1

问：期望能拿到多少钱?

0.7*1000 + 0.2*2000 - 0.1*8000 = 300

数学期望是对随机事件不同结果的概率加权求平均

如果 X 是一个离散的随机变量，输出值为 x1, x2, ...， 和输出值相 应的概率 为 p1, p2, ... (概率和为 1), 那么期望值：

$$E(X) = \sum_{i} x_i \times P\,(X = x_i)$$

术语解释
离散型随机变量：
在一定区间内变量取值为有限个，或数值可以一一列举出来的变量

投掷一枚骰子，X 表示掷出的点数，P(X=1)，P(X=2) … P(X=6) 均为1/6

$$E(x) = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + \cdots + 6 * \frac{1}{6} = 3.5$$

3.5 是一个多次投掷后的平均点数
尽管这个数字并不在骰子上,但它是我们的期望！

数学期望是对随机事件不同结果的概率加权求平均

- 对于任意随机变量 X 和 Y 以及常量 a 和 b，有

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

- “投掷两枚骰子的点数”
- X表示一枚骰子的点数
- $E(X)=3.5$

可以自己算算

- 两枚骰子可以表示为2X
- E(投掷两枚骰子的点数)=$E(2X)=2*E(X)=7$

数学期望是对随机事件不同结果的概率加权求平均

对于任意两个随机变量 X,Y 和 任意两个实数 a,b

E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)

利用这个性质，可以将一个变量拆分成若干个互相独立的变量，分别求这些变量的期望值，最后相加得到所求变量的值。

当两个随机变量 相互独立时，有E(XY) = E(X)E(Y)

数学期望是对随机事件不同结果的概率加权求平均

期望小结

- **数学期望**亦称为期望，期望值等，在概率论和统计学中
- **离散型随机变量**的**期望值**=(试验中每种可能结果的概率*其结果)的总和
- 期望在我们生活中有着十分广泛的应用。例如投资决策，可以通过分析总结得出可能的结果并估算出其概率，得到一个收益期望值并辅助进行。期望也许与每一个结果都不相等，但是却是我们评估一个事情好坏的一种直观的表达。
- 正因为期望在生活中有如此之多的应用，对于我们信息学奥赛也出现了不少 求解期望值的问题。

而其中大多数又均为求**离散型随机变量**的数学期望。

例：高射炮

例:高射炮向敌机发射三发炮弹，每弹击中与否相互独立且每发炮弹击中的概率均为0.3，又知敌机若中一弹，坠毁的概率为0.2，若中两弹，坠毁的概率为0.6，若中三弹，敌机必坠毁。求敌机坠毁的概率。

Ai表示敌机中弹（i表示数量=0 1 2 3） B表示坠毁

P(A1)=$C_3^1 * 0.3 * 0.7^2$

P(A2)=$C_3^2 * 0.3^2 * 0.7$

P(A3)=$C_3^3 * 0.3^3$

P(B)=P(A1)*0.2+P(A2)*0.6+P(A3)

$$\underbrace{E(B)}_{\text{坠毁期望}} = \underbrace{P(A_1) \times 0.2}_{\text{1个导弹命中概率*1个坠毁概率}} + \underbrace{P(A_2) \times 0.6}_{\text{2个导弹命中概率*2个坠毁概率}} + \underbrace{P(A_3) \times 1.0}_{\text{3个导弹命中概率*3个坠毁概率}}$$

全期望公式

$$E(B) = \underbrace{P(A_1) \times 0.2}_{\text{1个导弹命中概率*1个坠毁概率}} + \underbrace{P(A_2) \times 0.6}_{\text{2个导弹命中概率*2个坠毁概率}} + \underbrace{P(A_3) \times 1.0}_{\text{3个导弹命中概率*3个坠毁概率}}$$

坠毁期望

$$E(B) = E\{E(B|X)\} = \sum (P(X = x_i)E(B|X = x_i))$$

在X事件发生的情况下，发生B的期望
X事件可能由多个基本事件构成
统计计算 xi事件下发生事件B的概率的加权平均值就是E(B)

意义：E(B)在发生某些事的情况下（击中几个导弹？），对总体（坠毁概率？）的期望P(B)

全期望公式-证明

$$
\begin{aligned}
E(E(Y \mid X)) &= \sum_i P(X=x_i)E(Y \mid X=x_i) \\
&= \sum_i p_i \sum_k y_k \frac{p_{ik}}{p_i} \\
&= \sum_i \sum_k p_i y_k \frac{p_{ik}}{p_i} \\
&= \sum_i \sum_k y_k p_{ik} \\
&= E(Y)
\end{aligned}
$$

例-工作问题

例如，一项工作由甲一个人完成，平均需要 4 小时，而乙有 0.4 的概率来帮忙，两个人完成平均只需要 3 小时。问总体期望。

X表示人数，要么X=1要么X=2
Y表示期望时间

$E(Y) = P(X=1)E(Y|X=1) + P(X=2)E(Y|X=2)$
$=0.6*4 + 0.4*3 = 3.6$

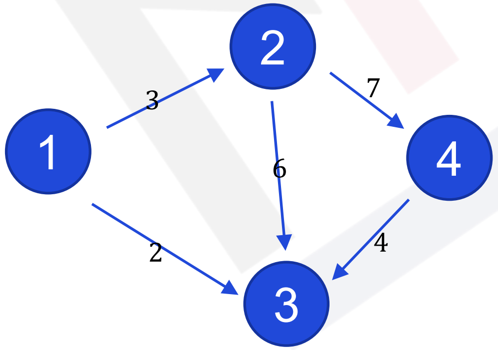
综合题目

利用DP解决问题

也就是利用递推或记忆化搜索解决问题。

想要求期望，其实就是在 根据期望定义: $E(X)=\sum(P(X=x_i)x_i)$ 求出到达某个点的期望

对于下图 求从1到3经过的边权和的期望

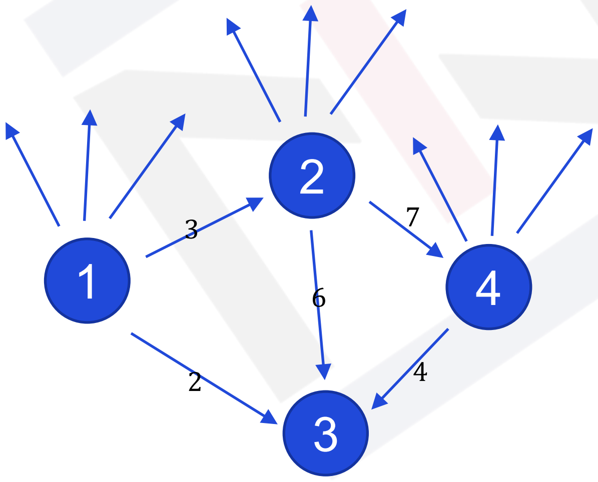


$$E(X)=\sum(P(X=x_i)x_i)$$
$$=P(1\to 3)x_1+P(1\to 2\to 3)\ x_2+P(1\to 2\to 4\to 3)x_3$$
$$=2\times\frac{1}{2}+(3+6)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(3+7+4)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=6.75$$

需要计算1个东西:
使用某个边的概率（预处理）*边权
计算方法：顺序递推求概率

利用DP解决问题

也就是利用递推或记忆化搜索解决问题。



$$E(X) = \sum(P\,(X = x_i)x_i)$$
$$= P(1 \to 3)x_1 + P(1 \to 2 \to 3)\,x_2 + P(1 \to 2 \to 4 \to 3)x_3$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} + (3+6) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (3+7+4) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 6.75$$

如果有多条无关边
但是还是得顺推求全部，
不免得麻烦了一点

由期望性质
$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

建反图
从终点开始推起点
期望怎么求？

利用DP解决问题

也就是利用递推或记忆化搜索解决问题。

基于对全概率公式与期望性质的应用。

可以先把一个权加入到当前期望中，然后再随着转移，不断乘上转移发生的概率

绿豆蛙的归宿

- 给出张 n 个点 m 条边的有向无环图，起点为 1，终点为 n，每条边都有一个长度，并且从起点出发能够到达所有的点，所有的点也都能够到达终点。绿豆蛙从起点出发，走向终点。
- 到达每一个顶点时，如果该节点有 k 条出边，绿豆蛙可以选择任意一条边离开该点，并且走向每条边的概率为 $\frac{1}{k}$ 。现在绿豆蛙想知道，从起点走到终点的所经过 的路径总长度期望是多少？

绿豆蛙的归宿

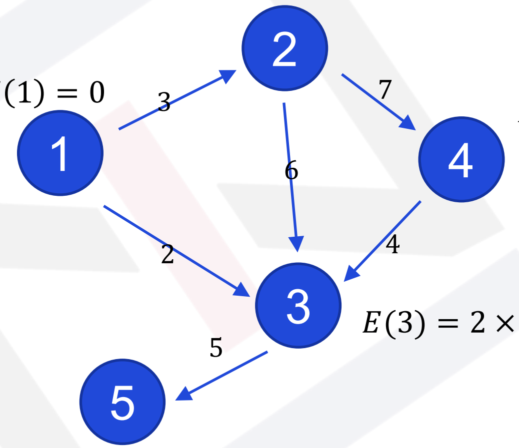
- 对于任意一条路径u，它的概率很好算
- 那么按照期望的定义，答案即为：$\sum_{u\in U} u * P(u)$
  - 其中$|u|$表示这条路径的长度，$P(u)$表示走这条路径的概率
- 但是，路径数量太多了，不可能枚举。

绿豆蛙的归宿

根据期望定义：
$E(X) = \sum(P(X = x_i)x_i)$

$E(2) = 0 \times \frac{1}{2} + \overbrace{3 \times \frac{1}{2}}^{1\to2}$

$E(1) = 0$



$E(4) = (3 + 7) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$E(3) = 2 \times \frac{1}{2} + (3 + 6) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (3 + 7 + 4) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 6.75$

$E(5) = E(3) \times 1 + 5 \times 1$

由期望性质
$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

可以边求通过边的概率边求期望。

【简单的方法：反着求期望】
从终点出发到起点例如从5出发到1
那么3->4的时候,先把边权4加入期望
然后再根据路径依次乘上各个路径的概率

举一个例子帮助理解 只考虑 5->3->4 -> 2 -> 1
f[5]=0
f[3]=f[5]+5*1
f[4]=(f[3]+4)/1
f[2]=f(f[4]+7)/2
f[1]=f(f[2]+3)/2
发现3->4的时候，加入期望的4
先后/1/2/2 正好就对应了左侧公式

绿豆蛙的归宿

- 记$dp[x]$为从x出发到终点期望路径长度。
- 如何转移?
- 假设节点x的出边有 d_1, t_1 ,⋯, d_k, t_k

$$
\begin{aligned}
E(i) &= E(\frac{1}{k}(w_1+x_1)+\frac{1}{k}(w_2+x_2)+\ldots+\frac{1}{k}(w_k+x_k)) \\
&= \frac{1}{k}(w_1+E(x_1))+\frac{1}{k}(w_2+E(x_2))\ldots+\frac{1}{k}(w_k+E(x_k)) \\
&= \frac{1}{k}(w_1+w_2+\ldots+w_k)+\frac{1}{k}(E(x_1)+E(x_2)+\ldots+E(x_k)) \\
f(i) &= \frac{1}{k}(w_1+w_2+\ldots+w_k)+\frac{1}{k}(f(s_1)+f(s_2)+\ldots+f(s_k)) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}(w_i+f(s_i))
\end{aligned}
$$

- 我们本质上是把所有的单位事件（样本点）罗列出来，把每个样本点的概率求出来，然后利用期望的定义进行计算
  - 在计算从点x出发到达点n的期望时
  - 我们先找出点x出发的所有路径，及其对应的概率（可以用乘法公式求得）
  - 如果该条路径能到达点n，则定义其权值为路径长度，否则为0 （某个不影响答案的权值）
  - 利用期望定义求出期望

- 桌面上有R 张红牌和B 张黑牌，随机打乱顺序后放在桌面上，开始一张一张地翻牌，翻到红牌得到1 元，黑牌则付出1 元。
- 可以随时停止翻牌，在最优策略下平均能得到多少钱。
- R,B<=5000

- 用f[i][j]表示剩下i张红牌和j张黑牌得钱的期望
- 决策只有2种，即翻牌与不翻牌。
- $f[i][j]=\max\{0,(f[i-1][j]+1)\times\frac{i}{i+j}+(f[i][j-1]-1)\times\frac{j}{i+j}\}$

在DP过程中，如果满足最优子结构
通常使用期望作为状态值进行转移。
而期望正好衡量一个状态的好坏
如果太差了(<0) 就直接 ji 掉比较合适。

- 用f[i][j]表示剩下i张红牌和j张黑牌得钱的期望
- 决策只有2种，即翻牌与不翻牌。
- $f[i][j] = \max\{0, (f[i-1][j]+1)\times\frac{i}{i+j} + (f[i][j-1]-1)\times\frac{j}{i+j}\}$

完整转移方程

$$f[i,j]=\begin{cases}\max\{0,(f[i-1,j]+1)*\frac{i}{i+j}+(f[i,j-1]-1)*\frac{j}{i+j}\} & i=0, j=0\\ f[i-1,j]+1 & i>0, j=0\\ 0 & i=0\end{cases}$$

那么$f[R,B]$则为所求。

- 在一张无向图上，猫聪聪要吃掉老鼠可可。每个时间，聪聪先向可可靠近一步(选择最短路上的点)，如果没吃到可可再靠近一步，然后可可随机向相邻点移动或者停留，如果他所在点i的度为d[i]，则它向相邻所有点移动和停留的概率都是1/(d[i]+1)，问聪聪吃掉可可期望时间。 N,M<=1000

预处理当聪在i 可在j 的时候，聪会走的第一条编号

怎么做?

N次广搜，p[i,j] = k

考虑走的过程：可以确定下一步

聪的位置：p[p[i,j],j] 可的位置w[i,j] 的概率为 $\frac{1}{t[i]+1}$

w[i, j]表示与顶点 i 相邻的 j 个点编号

t[i]表示顶点i 的度。

考虑状态转移过程。

移动　　不动

$$f[i,j]=\frac{\sum_{k=1}^{t[i]} f[p[p[i,j],j],w[j,k]]+f[p[p[i,j],j],j]}{t[i]+1}+1$$

整体概率　　多一步

考虑走的过程：可以确定

聪的位置：p[p[i,j],j] 可的位置w[i,j] 的概率为 $\frac{1}{t[i]+1}$

w[i, j]表示与顶点 i 相邻的 j 个点编号
t[i]表示顶点i 的度。

初始化

已经在一个点，直接吃 f[i,i] = 0
一步也可直接吃，即 p[p[i,j],j]=j 或 p[i,j] = j，则f[i,j]=1

记忆化搜索即可。

考虑走的过程：可以确定
聪的位置：p[p[i,j],j] 可的位置w[i,j] 的概率为 $\frac{1}{t[i]+1}$

w[i, j]表示与顶点 i 相邻的 j 个点编号
t[i]表示顶点i 的度。

小总结

- 在数学期望递推、dp时，我们通常把终止状态作为初值，把起始 状态作为目标，**倒着进行计算**。
- 因为在很多情况下，起始状态唯一（例如聪聪可可的起始状态）
- 终止状态很多（例如聪聪可可相遇的地方可能有多个）
- 如果正着计算，则还需要求出从起始状态到达每个终止状态的概 率，与F值相乘求和才可得到答案；
- 而若倒着计算，因为起始状态唯一，概率一定是1，输出F[起始状态]的值即可
- 但如果要求概率，就常常是**正推**

青蛙跳荷叶(NOIP2013 初赛)

有n片荷叶，初始青蛙位于n，某一时刻在k号荷叶上，下一时刻将等概率调 到1~k号荷叶上，问到1号荷叶的期望步数。

设 E(i) 从 i 跳到1号叶子上的期望次数

E(1)=0 ,
E(2)=1/2 * (E(2)+E(1))+1 ,
E(3)=1/3 * (E(3)+E(2)+E(1)) +1

所以

$$\mathbf{E}(i) = \frac{1}{i}\sum E(i) + 1 \text{ ,} (1 \le i \le \text{荷叶数} n)$$

(这其实是一系列多元一次方程组)
(高斯消元单独求解E(n)即可)

绝大多数以期望作为状态的期望问题的模型

1.递推适用于解决无环情况
2.更一般情况：使用高斯消元

复习-高斯消元

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\
2x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 = 7
\end{cases}
\xrightarrow{\text{增广矩阵}}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & -6 \\
2 & 1 & -3 & -9 \\
-1 & -1 & 2 & 7
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{消元}}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

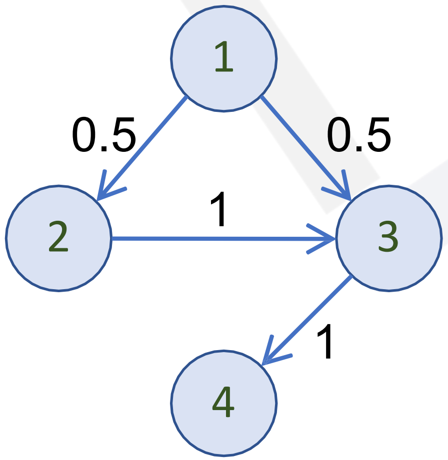
1.将某一行的数全部乘以一个相同的数A（A！ =0)
2.将某一行减去另外一行
3.将某两行的数进行交换

自由元/主元问题 （如果高斯消元没有唯一解？）
误差 与 计算问题 （ 尽量小数/大数 ）
求解顺序问题（把目标放在最后，直接求出）

引入模型

给定一有向图G=(V,E) 点带权，边带权，边权意味着通过该边转移的概率。
若从某点出发经过的边的概率和为Pi 则在该点有1-Pi的概率停止。
问，从指定顶点s开始，在某一点停止行动时所走的路径点权和的期望值?

举个例子



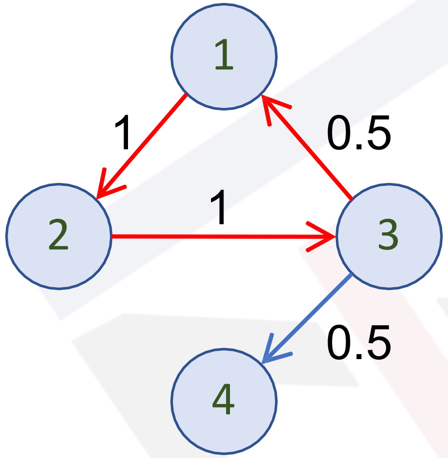
从1出发。
1->2->3->4 （点权为3）
1->3->4 （点权为2）

到达4的1st 路径为1->2->3->4 , 经过点权为3，且中间不停的概率为0.5
到达4的2nd 路径为1->3->4 , 经过点权为2，且中间不停的概率为0.5

所以E(4)=P(1234)*3 + P(134)*2 = 2.5

引入模型

再举个例子（修改了边的方向）



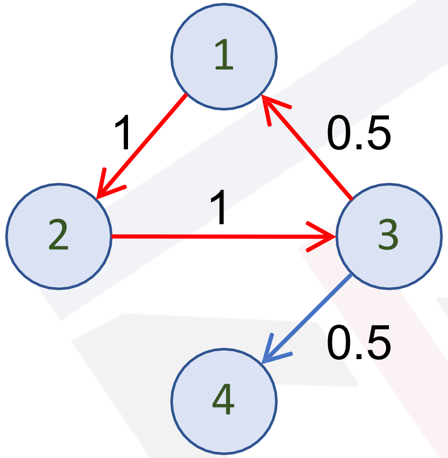
成环啦！
按照之前的走法（拓扑排序/递推）不能处理环
如何处理?

【尝试】设F[i,j] = 从顶点i出发（走j步的权和）的期望，显然 F[i,0]=Wi （自己的点权）

考虑转移：如果从i出发，通过边<i,k> 到达F[i,j] ,P[i,k] 为选择<i,k> 这条边的概率、
有公式：

$$F_{i,j} = \sum P[i,k] \times F[k,j-1] + W_i \ , \quad j > 0, \quad < i,k > \in E$$

引入模型



从k出发走j-1步期望

i点点权

走<i,k>概率

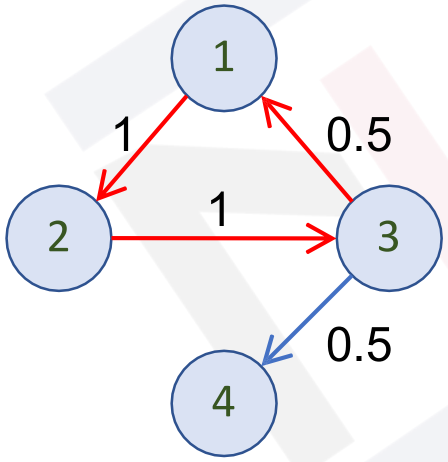
$$F_{i,j} = \sum P[i,k] \times F[k,j-1] + W_i$$

迭代法可求出满足精度要求的解，但是效率较低。
无解情况可以使用么？
（不能用，走无限步？TLE！）

【尝试2】抛弃步数思想，从每个点的期望入手

公式

$$F[i] = W_i + \sum_{<i,k>\in E} P[i,k]F[k]$$



假定求F[1]的期望

$$F[1] = W_1 + P[1,2]F[2]$$
$$F[2] = W_2 + P[2,3]F[3]$$
$$F[3] = W_3 + P[1,3]F[1] + P[3,4]F[4]$$
$$F[4] = 0 \text{ (逆推，定义为0)}$$

带入边概率与点权

$$F[1] = 1 + F[2]$$
$$F[2] = 2 + F[3]$$
$$F[3] = 1.5 + \frac{1}{2}F[1] + \frac{1}{2}F[4]$$
$$F[4] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即可求出F[1]

引入模型

如果点权移动到边上？

- 若权在边上而不在点上的话，即边(u, v)的权值为 $W_{u,v}$，那么同理方程即为 $F_i = \sum_{(i,j)\in E} P_{i,j}(F_j + W_{i,j})$。

例：First Knight（SWERC 2008 Problem B）

一个矩形区域被分成 $m*n$ 个单元编号为（1, 1)至（m, n)，左上为（1, 1)，右下为(m, n)。给出 $P_{i,j}^{(k)}$，其中 $1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$，$1\leq k\leq 4$，表示了（i, j)到（i+1, j)，(i, j+1)，(i-1, j)，(i, j-1)的概率。一个骑士在（1, 1)，按照给定概率走，每步都于之前无关，问到达（m, n)的期望步数。

题目保证对于 $i\neq m$ 或 $j\neq n$，有 $\sum_{k=1}^{4} P_{i,j}^{(k)}=1$，且 $P_{i,j}^{(1)}$ 和 $P_{i,j}^{(2)}$ 中至少一个不为 0。

且保证走出矩形的概率与 $P_{m,n}^{(k)}$ 均为 0，答案不超过 1000000。

$1\leq m, n\leq 40$。

例：First Knight（SWERC 2008 Problem B）

根据题目描述，可得到方程：

$$E_{i,j} = P_{i,j}^{(1)} E_{i+1,j} + P_{i,j}^{(2)} E_{i,j+1} + P_{i,j}^{(3)} E_{i-1,j} + P_{i,j}^{(4)} E_{i,j-1} + 1，其中\ 1 \le i \le m，1 \le j \le n。$$

但是复杂度到了O(n^3m^3)

优化见论文。（十分有趣的，太长了。。。。）

总结：概率问题特点

数学性强

问题抽象，复杂

紧扣数学定义，牢牢把握问题的本质

从特殊情况，简单情况入手

1. 题目是一个很直接的数学题，直接使用数学方法。
2. 递推，动态规划(状态之间满足拓扑序)
3. 高斯消元(状态之间不满足拓扑序)