



这是一节数学课;

需要纸和笔,请提前准备好;

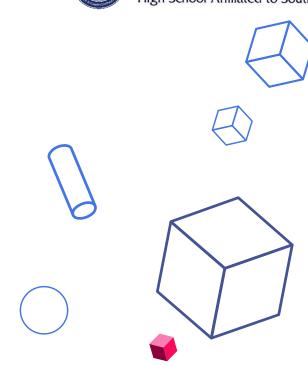
还需要脑子,更加请提前准备好;

西 大 附 中 信 息 学 竞 赛 High School Affiliated to Southwest University







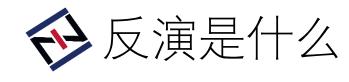




$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{(n-2)}b + \dots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 High School Affiliated to Southwest University





• 对于一个数列 $\{f_n\}$ 来说,如果我们知道另外一个数列 $\{g_n\}$,满足如下条件:

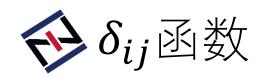
$$g_n = \sum_{i=0}^n a_{ni} f_i$$

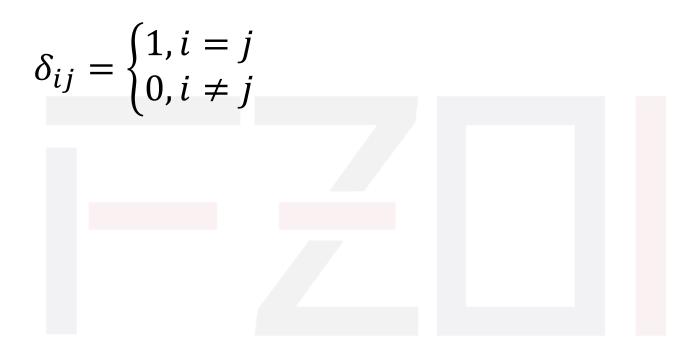
反演就是利用: g_0, g_1, \dots, g_n 来表示 f_i

$$f_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ni}g_i$$

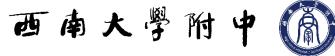








| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 High School Affiliated to Southwest University





反演满足的条件

将 g_i 带入式子得:

$$f_n = \sum_{i=0}^n b_{ni} g_i$$

$$f_n = \sum_{i=0}^n b_{ni} \sum_{j=0}^i a_{nj} f_j$$

$$f_n = \sum_{i=0}^n f_i \sum_{j=i}^i b_{nj} a_{ji}$$







反演满足的条件

将 g_i 带入式子得:

$$\begin{bmatrix} b_{n0}a_{00}f_{0} & & & & \\ b_{n1}a_{10}f_{0} & b_{n1}a_{11}f_{1} & & & \\ b_{n2}a_{20}f_{0} & b_{n2}a_{21}f_{1} & b_{n2}a_{22}f_{2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_{nn}a_{n0}f_{0} & b_{nn}a_{n1}f_{1} & \cdots & b_{nn}a_{nn}f_{n} \end{bmatrix}$$

$$(5)$$

那么,前一个求和是先**对行**进行,再将各行加起来,后一个就是先**对列**进行,再将各列加起来

$$f_n = \sum_{i \equiv 0} b_{ni} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} f_j$$

$$f_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sum_{j=i}^{\infty} b_{nj} a_{ji}$$





◆ 反演满足的条件

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} g_i$$

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} f_i \sum_{j=0}^{n} b_{nj} a_{ji}$$

反演成立的充要条件就是:

$$\sum_{j=0}^{n} b_{nj} a_{ji} = \delta_{ni}$$



基本式:

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

| 西 | 大 | 竹 | 中 | 信 | 怠 | 学 | 竞 | 赛 High School Affiliated to Southwest University



→ 二项式反演 证明

$$\sum_{j=0}^{n} b_{nj} a_{ji} = \delta_{ni}$$

• 可以表示为:

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \leftrightarrow g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

只需要证明:

$$\sum_{i=j}^{n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} = \delta(n,j)$$

这里
$$b_{ni}=(-1)^i\binom{n}{i}$$
 , $a_{ij}=(-1)^j\binom{i}{j}$





→ 二项式反演 证明

二项式系数前置知识

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{n!i!}{i!(n-i)!j!(i-j)!}$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(n-i)![(n-j)-(n-i)]!}$$

$$= \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$$
Hugh School Affiliated to Southwest University

西南大學附





$$\binom{n}{i} \binom{i}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}$$

组合推理理解:

你有一个n 元素集U, 现在对(A,B) 进行计数,其中 $B \subseteq A \subseteq U$ 且 |A| = i, |B| = j, 首先对A 计数,U 的i 子集有 $\binom{n}{i}$,然后对B 计数,A 的j 子集有 $\binom{i}{j}$

接下来换一种方式,先对 B 进行计数, B 显然是 U 的子集,有 $\binom{n}{j}$ 种方案,由于要求 $B\subseteq A$, B 中 j 个元素必须在 A 中, A 还剩下 i-j 个不确定的元素, U 还有 n-j 个可以用的元素,一共有 $\binom{n-j}{i-j}$ 种,于是就得到上面的恒等式







→ 二项式反演 证明



$$\sum_{i=j}^{n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

$$= \binom{n}{j} (-1)^{j} \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i} \binom{n-j}{n-i}$$

$$= \binom{n}{j} (-1)^{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{n-i} \binom{n-j}{i}$$

$$= \binom{n}{j} (-1)^{n+j} (1-1)^{n-j}$$

$$= \delta_{nj}$$



西南大學附



→ 二项式反演 证明

以上为二项式反演的代数证明 还有集合证明方式(容斥) 详情可见:

http://blog.miskcoo.com/2015/12/inversion-magic-binomial-inversion

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 High School Affiliated to Southwest University





→ 二项式反演 变形一

• 基本式:

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

形式-

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

证明:

 $\diamondsuit h(n) = (-1)^n g(n) 则有:$





→ 二项式反演 变形二 证明

• 变形二:

$$f_n = \sum_{i=n}^m \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^{i-n} \binom{i}{n} f_i$$

将右侧带入左侧得:

$$f_n = \sum_{j=n}^{m} \binom{i}{n} \sum_{j=i}^{m} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f_j$$

$$= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=i}^{m} (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i} f_j$$



$$= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=i}^{m} (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i} f(j)$$

$$=\sum_{j=n}^{m}f(j)\sum_{i=n}^{j}(-1)^{j-i}\binom{i}{n}\binom{j}{i}$$

$$=\sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) \sum_{i=n}^{j} \binom{j-n}{j-i} (-1)^{j-i}$$

$$=\sum_{j=n}^m \binom{j}{n} f(j) \sum_{t=0}^{j-n} \binom{j-n}{t} (-1)^t 1^{j-n-t} \quad \Leftrightarrow \mathsf{t} = \mathsf{j} - \mathsf{i}$$

$$=\sum_{i=n}^m \binom{j}{n} f(j) (1-1)^{j-n}$$

$$= \sum_{i=n}^{m} \binom{j}{n} f(j)[j=n]$$

$$= \binom{n}{n} f(n)$$

$$= f(n)$$

西南大學附

$$= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=i}^{m} (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i} f(j)$$

$$=\sum_{j=n}^m f(j)\sum_{i=n}^j (-1)^{j-i} \binom{i}{n} \binom{j}{i}$$

$$=\sum_{j=n}^{m} {j \choose n} f(j) \sum_{i=n}^{j} {j-n \choose j-i} (-1)^{j-i}$$

$$= \sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) \sum_{t=0}^{j-n} \binom{j-n}{t} (-1)^t 1^{j-n-t}$$

$$=\sum_{i=n}^{m} \binom{j}{n} f(j) (1-1)^{j-n}$$

$$= \sum_{i=n}^{m} \binom{j}{n} f(j)[j=n]$$

$$= \binom{n}{n} f(n)$$
$$= f(n)$$

左右恒等, 证毕

西南大學附中





→ 二项式反演 变形二 证明

• 变形二:

$$f_n = \sum_{i=n}^m \binom{i}{n} g_i \iff g_i = \sum_{i=n}^m (-1)^{i-n} \binom{i}{n} f_i$$

- 变形二中, i不是从0开始, 因此通用性更强;
- 证明截图来源:
- https://www.cnblogs.com/GXZlegend/p/11407185.html





反演的运用逻辑

- 显然可以得到 $g_i = F(f_i)$
- 但是 g_i 比较好求, f_i 不太好求
- 通过反演得到 $f_i = F^{-1}(g_i)$
- 然后通过 g_i 求出 f_i



₩ hdu1465不容易系列之一 [bzoj 4665]小w的喜糖

- 题意: 错排问题
- 有多少种排列方式,使得 $a_i \neq i$
- 定义 f_i 表示恰好有i个错开, g_i 表示至多有i个元素错开;
- 那么有:
- $g_i = i!$
- $g_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f_j$
- 根据二项式反演公式变形二可得: $f_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g_j$





hdu1465不容易系列之一

- 题意:错排问题
- 有多少种排列方式,使得 $a_i \neq i$
- 定义 f_i 表示恰好有i个错开, g_i 表示至多有i个元素错开;
- 根据二项式反演公式变形二可得: $f_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g_j$
- 容斥也能推出该公式;
- 该题目特点: 恰好难求, 至多好求

♠ [bzoj2839]集合计数

• 一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集(包含空集),现在要在这 2^n 个集合中取出至少一个集合,使得它们的交集的元素个数为 k ,求取法的方案数模 $10^9 + 7$ 。

• $1 \le n \le 10^6$, $0 \le k \le n$.

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竟 | 赛 High School Affiliated to Southwest University



(bzoj2839]集合计数 solution

- 恰好是不好做的,那么我们可以先转换为"钦定"
- f_i 表示我们钦定了i个元素 作为其交集的元素 的方案数;
- 那么可以列出式子:
- $\bullet f_i = \binom{n}{i} \left(2^{2^{n-i}} 1 \right)$
- 解释:
 - i个元素的选择方案有 $\binom{n}{i}$ 种;
 - 包含这i个元素的集合有 2^{n-i} 个;
 - 这些集合都可以选或者不选,但不能全部都不选



(bzoj2839]集合计数 solution

- •恰好是不好做的,那么我们可以先转换为"钦定"
- f_i 表示我们钦定了i个元素 作为其交集的元素 的方案数;
- 那么可以列出式子:
- $\bullet \ f_i = \binom{n}{i} \left(2^{2^{n-i}} 1 \right)$
- g_i 表示交集的元素恰好为i个的方案数,
- $f_i = \sum_{j=i}^n {j \choose j} g_j$
- 通过二项式反演可以得到: $g_i = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} {j \choose j} f_i$





(bzoj2839]集合计数 solution

- 题目特点:
- 恰好不好求, 钦定好求
- 钦定可以看做是至少;
- 再通过二项式反演(容斥)推理得到;





• 有n个球排成一行,你有k种颜色,要求给每一个球染色,相邻两个球颜色不可以相同,并且每种颜色至少使用一次;

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 | High School Affiliated to Southwest University





→ 球染色问题 solution

- 有n个球排成一行,你有k种颜色,要求给每一个球染色,相邻两个球颜色不可以相同,并且每种颜色至少使用一次:
- 如果没有至少使用一次答案是多少?
- $k(k-1)^{n-1}$
- 设 f_i 为恰好使用了i种颜色的方案数

$$g_k = k(k-1)^{n-1} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_i$$

通过反演可以得到:

$$f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} k(k-1)^{n-1}$$





- 先将条件放宽,得到一个比较好计算的问题;
- 再加上条件得到方程;
- 利用反演(或者容斥原理)算出答案
- 反演的本质是容斥
- 例如:

西 大 附 中 信 息 学 竞 赛 High School Affiliated to Southwest University



BZOJ-3456. 城市规划

• 题目要求求出有 n(n≤130000) 个点的有标号简单连通无向图的个 数;

- 首先可以设 f(n) 表示有 n 个点的有标号简单连通无向图的个数, g(n) 表示有n个点的有标号简单无向图的个数(也就是不要求连 通)
- $\bullet g(n) = 2^{\binom{n}{2}}$
- 因为最多只有 $\binom{n}{2}$ 条边;





● BZOJ-3456. 城市规划

- 题目要求求出有 n(n≤130000) 个点的有标号简单连通无向图的个 数;
- 又因为一个有标号简单无向图是由很多连通分量组成的,为了避 免重复计数,我们枚举点1所在的连通块大小(其余的点随便连 边,因为1号点所在连通块已经确定,其它怎么连都不会重复)

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} {n-1 \choose i-1} f(i)g(n-i)$$

(这种计数方式很常见, 比如 FZOI 3567: 【JXOI2018】游戏)





● BZOJ-3456. 城市规划

g(n)带入后得:

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} f(i) 2^{\binom{n-i}{2}}$$

两边同时除以(n-1)!

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{(i-1)!} \frac{2^{\binom{n-i}{2}}}{(n-i)!}$$

可以发现是卷积形式





BZOJ-3456. 城市规划

现在你会发现这是个卷积的形式! 定义函数 F(x), G(x), C(x)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{(n-1)!} x^n$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} rac{2^{inom{n}{2}}}{n!} x^n$$

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{2^{inom{n}{2}}}{(n-1)!}x^n$$

可以得到

$$C(x) = F(x)G(x)$$

将其放在 $\operatorname{mod} x^{n+1}$ 下

$$C(x) \equiv F(x)G(x) \pmod{x^{n+1}}$$
 $F(x) \equiv C(x)G^{-1}(x) \pmod{x^{n+1}}$



模数是特殊值,可以使用NTT 南大學附中



- bzoj 4665]小w的喜糖
- [bzoj2839]集合计数
- [bzoj3622]已经没有什么好害怕的了
- [bzoj4710]分特产
- Ex: 「BZOJ3456」城市规划



