0706 NOIP 模拟赛 题解

T1 骰子游戏 (dice)

由于 d 很小，所以可以用二进制的六位来表示。用 64 进制构造即可，每一位都是 0 或 d。

具体的，每个骰子的六面都是 $0, d, 64d, 65d, 4096d, 4097d$，构造的值域不到 3×10^5，可以通过。

T2 彩带裁剪 (cut)

令 dp_i 表示前 i 个位置切割后的最大美丽度，枚举上一个位置并计算 mex 转移复杂度 $O(n^2)$。

发现值域很小，因此切割后的每个区间的 mex 不会超过 21。又由于 dp_i 单调不降，所以每次转移时可以枚举最后一段的 mex，然后求出能取到这个 mex 的最右的位置。这个位置可以预处理。复杂度 $O(nV)$。

T3 挑战 NPC (hamilton)

题目条件等价于选出一些边，使得每个点的出度和入度都等于 1。

考虑拆点网络流，对于原图中的点 i，建边 $S \to i, i+n \to T$（流量为 1，下同）；对于原图中的边 $a \to b$，建边 $a \to b+n$。跑一边点 S 到点 T 的最大流 f，若 $f < n$ 显然无解，否则将所选的所有原图中的边 $a \to b$ 连城若干个环即可。

~~由于出题人不会造数据，因此数据随机，使得 DLX 可以通过 80% 的数据。~~

T4 无聊的问题 (boring)

这个问题当然可以不用根号分治做，但是根号分治写起来比较简单，因此介绍一种根号分治做法。

以下复杂度分析认为 $n, q, \sum k$ 同阶。

对于 lcm 类问题，有一个套路，就是分质数考虑，因此我们先将每个数质因数分解。

想到这你可以拿到前 2 档暴力分。

然后我们把问题变为两部分：

对于大小 $\le \sqrt{V}$ 的质因数怎么做?

这个问题可以对每个质数分别考虑。

因为质数个数为 $O(\frac{\sqrt{V}}{\log V})$ 因此我们可以暴力对每个质数算贡献。

具体来说，该质数在所有 lcm 区间中该质数出现次数的 $\max$ 就是最后的贡献。

无论是线段树还是 ST 都能很好地在 $O(n\sqrt{V})$ 时间复杂度内解决该部分问题。

当然你用某年 CSP 初赛的那个 rmq 可以做到更快，但不必要。

这也是最后一档部分分做法。

对于大小 $> \sqrt{V}$ 的质因数怎么做?

这个问题可以用类 bitset 技巧完成（非 bitset）。

我们发现每个质数最多只会贡献一次，因为同一个数不可能含有两个大于 $\sqrt{V}$ 的质因数。

如果我们用一个数组 cnt 来存储每个质数的贡献次数的话，此时 cnt 的每一位只可能是 0 或 1。

因此我们考虑 bitset。

我们还是将该问题分为 2 部分:

如何取出一个区间中代表质数的 bitset? 这个问题可以用莫队，分块，猫树等多种技巧解决，但不能使用线段树，因为此时复杂度会退化。

这部分能做到 $O(n\sqrt{n})$ 或 $O(\frac{nV}{w\log V})$（$w=64$）。

对于一个 bitset 如何求值?

如果直接做这部分只能做到 $O(\frac{nV}{\log V})$，当然理论上至此你可以拿到所有的非正解部分分。

朴素的 bitset 似乎无法解决这个问题，因此我们可以对 **质数** 分块，每 16 （$O(\log V)$）个质数分成一块。

现在考虑 bitset 中到底存的是什么，实际上就是一堆的二进制数。

现在我们可以将 bitset 中每 16 个数所对应的 16 位二进制整数取出。

现在考虑如何对这个 16 位二进制数求出其对应的质数乘积，我们可以预处理出所有的 $2^{16}=65536$ 种可能，而总共有 600 左右个块，因此可以快速预处理出这个东西。

分析复杂度，假设对 **质数** 每 $O(\log V)$ 个数分一块（即上面的 16），有因为质数有总量 $O(\frac{V}{\log V})$ 的性质，因此总共会有 $O(\frac{V}{\log^2 V})$ 个块，预处理复杂度 $O(\frac{V}{\log^2 V}2^{\log V})=O(\frac{V^2}{\log^2 V})$，查询总复杂度 $O(\frac{nV}{\log^2 V})$。

至此，该问题在时间复杂度 $O(n\sqrt{n}+\frac{(n+V)V}{\log^2 V})$ 的时间复杂度内解决。