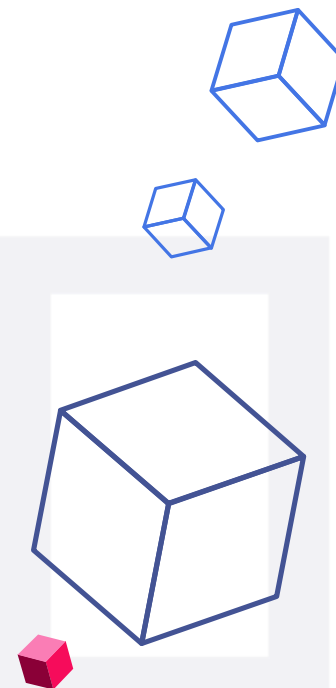


DP优化概述

PYB





动态规划



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- DP属于NOIP普及到IOI必考内容;
- 用途之广, 之灵活, 感觉都无法用言语来进行形容;

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University



优化DP的方向



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- DP的时间复杂度 = 状态数 * 每次决策的时间
- 优化状态:
- 定义不同的DP状态, 减少状态数量;
- 优化决策:
- 更快速地将决策求解出来;

西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University



常见DP优化方法



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

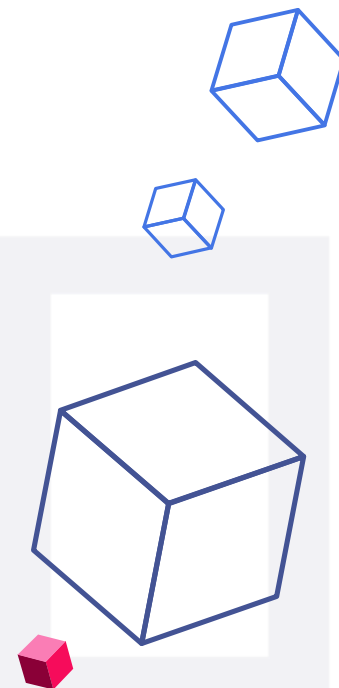
- 数据结构
- 单调队列
- 矩阵
- 凸优化（斜率优化）
- 决策单调性（四边形不等式）

已学

西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University

矩阵乘法优化

PYB





矩阵优化DP



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 转移式只有加法，清零，减法etc.，max和min运算不允许
- 转移式中关于前几位dp结果得到的系数必须是常量
- 转移次数一般超级多
- 由于转移次数多，一般都要模一个int范围内的数



典型例子



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 斐波那契数列求第n项
- $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = f_1 + f_2$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

矩阵快速幂

High School Affiliated to Southwest University



需要掌握的技巧



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 给出任意递推式，能构造矩阵；
- 利用数学式子进行优化
- 扩展：
线性递推；



| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University



Luogu P1306



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 给定 a, b , 求 $\gcd(F[a], F[b])$ $F[a]$ 为斐波那契数列的第 a 项
- 如果知道该结论本题就是裸题了:
- $\gcd(f[a], f[b]) = f[\gcd(a, b)]$
- 该结论证明:
- 引理一: $\gcd(f[a], f[a + 1]) = 1$
- 引理二: 如果 $\gcd(a, b) = 1$, 那么 $\gcd(a, b * c) = \gcd(a, c)$
- 引理三: $f[m] = f[m - n - 1] \times f[n] + f[m - n] \times f[n + 1]$



$\gcd(f[a], f[b]) = f[\gcd(a, b)]$ 证明



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- $\gcd(f[a], f[b]) = \gcd(f[a], f[b - a - 1] \times f[a] + f[b - a] \times f[a + 1])$
- 根据引理一、二可得：原式 $= \gcd(f[a], f[b - a])$
- 不停地减下去，原式 $= \gcd(f[a], f[b \% a])$
- 最终会得到： $\gcd(f[0], f[\gcd(a, b)])$
- 所以得正。



BZOJ 5118



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 求 $f[2^n]$
- 需要构造出的矩阵 A^{2^n-2} ，将矩阵构造成求矩阵的 A^{2^n}
- 可以利用费马小定理 ($a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$) 进行优化：



[NOI2020] 美食家



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 简要题意：
- 给定一张 n 个点 m 条有向边，第 i 个点的权值是 c_i ，给定一个时间 T ，经过第 j 条边需要 t_j 的时间，不允许在某一个点停留，求运行 T 秒到达1经过的点的最大权值和（每个点被到达一次可以获得一次贡献），有 k 个时刻某些点会有额外贡献 $n \leq 50, m \leq 500, T \leq 10^6, t_j \leq 5, k \leq 200$



Pkusc2021 T1



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

定义矩阵变换 $F(P) = Q$, 其中 P 和 Q 是 $n \times n$ 的矩阵且满足
 $Q_{i,j} = (\sum_{k=1}^n P_{k,j} + \sum_{k=1}^n P_{i,k}) \bmod p$. 给定 T, n, p 和 $n \times n$ 的初始矩阵
 A , 求 A 经过 T 次变换后的结果矩阵。

$$n \leq 1000, T \leq 10^9, 2 \leq p \leq 10^9 + 7, P_{i,j} < p$$

四 | 八 | 中 | 学 | 竞 | 赛
High School Affiliated to Southwest University

补充知识



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 斐波那契数列相关知识：
- 1、fib在模m后，一定存在周期性
- More:[斐波那契数列的性质 - Milkor - 博客园 \(cnblogs.com\)](http://cnblogs.com/Milkor/p/4811111.html)

| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University

习题



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 裸题：
- 斐波那契数列
- [NOI2012]随机数生成器
- 基础：
- [HNOI2011]数学作业
- [NOI2013]矩阵游戏
- Loj 10222 佳佳的Fibonacci
- [SNOI2017]礼物
- [SDOI2009]HH去散步
- [SCOI2009]迷路
- [NOI2020] 美食家
- 扩展：
- Loj 2325 小 Y 和恐怖的奴隶主
- Pku2021 T1



西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University



矩阵乘法优化图



西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- [HNOI2002]公交车路线 (矩阵优化图论)
- [SCOI2009]迷路



| 西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛 |
High School Affiliated to Southwest University