

# 水题选讲

彭博

北京大学

2023.10

机器人有一个 1 到  $n$  的概率分布  $p$ ，它从  $p$  里随机抽取了一个数字  $x$ 。

你需要猜一个数字  $y$ 。如果猜对了，游戏结束。否则，你的记忆会被清除（即你不知道你之前猜了什么），而机器人会以  $c$  的概率重新抽取一个数字，以  $1 - c$  的概率维持原数字不变。

求出你在最优策略下期望需要猜几次才能结束游戏。不取模。

$$n \leq 10^5$$

给定  $n$  和  $m$  。

求出有多少个有向图，满足每个点至多只在一个环内，且有恰好  $m$  条不在任何一个环内的边。

$$n, m \leq 10^6$$

在  $n$  轮剪刀石头布的游戏里，Alice 分别出了  $A_S, A_R, A_P$  次剪刀、石头、布，Bob 出了  $B$  次，Carol 出了  $C$  次。

已知  $n$  轮游戏每一轮都是平局，求出有多少种本质不同的游戏，模 998244353。

$$n \leq 1.5 \times 10^6$$

两个人在一个  $n$  个点  $m$  条边的有向图上走路。图上有  $K$  个关键点  $p_1, \dots, p_K$ ，在  $p_i$  上有价值为  $w_i$  的宝石。

两个人轮流行动，每次沿着一条边走一步（不能不走），并取走走到的点的宝石。当所有宝石都被取走或游戏陷入循环时结束。

Alice 想要最大化 Alice 拿到的价值和减去 Bob 拿到的价值和，而 Bob 想最小化这个值。求出游戏结果。

$n \leq 30, K \leq 10$

给定  $n$  个串  $s_1, \dots, s_n$  和一个目标串  $t$ 。

初始你有一个空串，一次操作可以往后面加上某个串  $s_i$  或删除最后  $K$  个字符，问得到串  $t$  需要多少次操作。

$$\sum |s_i| \leq 10^6, \sum t_i \leq 5000, K \leq 5000, Q \leq 100$$

给定一棵以 1 为根的有根树，每个点都只能给自己的祖先投票，不能不投，也不能投给自己。

求出哪些点可以成为得票数严格最多的点。

$$n \leq 10^6$$

给定质数  $p$ ，定义一个长度为  $p-1$  的 01 序列  $s_1, \dots, s_{p-1}$ ，其中  $s_i = 1$  当且仅当  $i$  是模  $p$  的二次剩余。

给定正整数  $t$ ，求出有多少对  $i < j < k$  使得  $j - i = k - j \leq t$  且  $s_i = s_j = s_k$ 。

$p \leq 10^{12}, t \leq 10^6$



有两个数字  $a$  和  $c$  , 初始  $a = 0, c = \infty$  。

有 4 种操作:

- ① 令  $a := a + 1$  。
- ② 令  $a := a - 1$  。如果此时  $c > a$  , 令  $c := \infty$  。
- ③ 令  $c := \min(c, a)$  。
- ④ 如果  $c \leq a$  , 令  $a := c$  , 然后令  $c := \infty$  。

你需要维护  $n$  组数字  $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n$  , 每次操作都作用在一个区间上, 并支持单点查询  $a_i$  。

$n, Q \leq 5 \times 10^5$

给定长度为  $n$  的字符串  $s$ ，求出有多少个长度为  $m$  的字符串  $t$ ，使得  $s$  在  $t$  的第一次出现位置就在最后。

$$n \leq 10^5, m \leq 10^9$$

给定一个  $n$  个点  $m$  条边的带权无向图，求出其所有简单环的权值的 gcd。

$n \leq 5000, m \leq 10000$

给定一个  $n$  个点  $m$  条边的无向图  $G$  , 设其补图为  $G'$  。

对于  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  , 求出有多少对点在  $G'$  的最短路恰好为  $k$  。

$$n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5$$

对两个长度相等的序列  $a, b$  , 设  $a \cdot b = \max_i a_i + b_i$  。

给定长度为  $n$  的序列  $a$  和长度为  $n + m$  的序列  $b$  , 求出  $a$  与  $b$  的每个长度为  $n$  的子串的点积。从左往右输出, 强制在线。

保证  $a, b$  在值域范围内均匀随机。

$n, m \leq 10^6, 1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$