FZOI

信息学

倍增优化DP

复习一下

ST表

- 求解静态序列区间最大值、最小值。
- 定义 f[i][j] 表示从 a[i] 到 $a[i+2^j-1]$ 范围内的最大值。
- $f[i][j]=max(f[i][j-1],f[i+2^{j-1}][j-1])$
- 求解 f 数组，时间复杂度为O(NlogN)。
- 寻找区间[x,y] 的最大值：
  - $k=\log_2(y-x+1)$
  - $ans=max(f[x][k],f[y-2^k+1][k])$
  - 时间复杂度为O(1)

倍增求LCA

- 定义 f[i][j] 表示节点 i 向根节点走 2^j 步到达节点。
- f[i][j]=f[f[i][j-1]][j-1]
- 阶段就是节点深度
- 处理出所有节点 f 数组。时间复杂度为O(NlogN)。

- 通过 f 数组在O(logN) 求得两个节点的LCA。

DP通常用**递推**或者记忆化搜索实现。
有些时候所有状态的存储已经时空超限，
需要优化。

倍增的数学基础：
二进制拆分

我们已经接触了一些倍增优化的DP了！
比如ST，LCA

ST的预处理过程，其实就是倍增优化DP

DP过程:O(NlogN)

状态: F[i,j] 表示区间[i,i+2^j-1] 中的最大值

转移方程: F[i,j] = max(F[i, j-1] , F[i+$2^{(j-1)}$, j-1])

【step1】用“阶段”（阶段即为：区间长度）成倍增长的DP，计算出若干与2的整数次幂相关的代表状态。

ST的预处理过程，其实就是倍增优化DP

求解RMQ O(1)

$k=\log_2(y-x+1)$

$ans=max(f[x][k],f[y-2^k+1][k])$

【step1】用“阶段”（阶段即为：区间长度）成倍增长的DP，计算出若干与2的整数次幂相关的代表状态。

【step2】基于二进制划分的思想，用上一步代表状态组合成最终的答案。

案例2 倍增求LCA

定义 f[i][j] 表示节点 i 向根节点走 2^j 步到达节点。

$f[i][j]=f[\,f[i][j-1]\,][\,j-1\,]$

阶段就是节点深度

处理出所有节点 f 数组。时间复杂度为O(NlogN)。

通过 f 数组在O(logN) 求得两个节点的LCA。

摸个题-开车旅行

$1≤N≤10^5$，$1≤M≤10^4$

【例题】开车旅行 CH5701

小 A 和小 B 决定利用假期外出旅行，他们将想去的城市从 1 到 N 编号，且编号较小的城市在编号较大的城市的西边，已知各个城市的海拔高度互不相同，记城市 i 的海拔高度为 H_i，城市 i 和城市 j 之间的距离 $d[i,j]$ 恰好是这两个城市海拔高度之差的绝对值，即 $d[i,j]=|H_i-H_j|$。

旅行过程中，小 A 和小 B 轮流开车，第一天小 A 开车，之后每天轮换一次。他们计划选择一个城市 S 作为起点，一直向东行驶，并且最多行驶 X 公里就结束旅行。小 A 和小 B 的驾驶风格不同，小 B 总是沿着前进方向选择一个最近的城市作为目的地，而小 A 总是沿着前进方向选择第二近的城市作为目的地（注意：本题中如果当前城市到两个城市的距离相同，则认为离海拔低的那个城市更近）。如果其中任何一人无法按照自己的原则选择目的城市，或者到达目的地会使行驶的总距离超出 X 公里，他们就会结束旅行。

摸个题-开车旅行

$1 \le N \le 10^5$，$1 \le M \le 10^4$

在启程之前，小 A 想知道两个问题：

1. 对于一个给定的 $X = X_0$，从哪一个城市出发，小 A 开车行驶的路程总数与小 B 行驶的路程总数的比值最小（如果小 B 的行驶路程为 0，此时的比值可视为无穷大，且两个无穷大视为相等）。如果从多个城市出发，小 A 开车行驶的路程总数与小 B 行驶的路程总数的比值都最小，则输出海拔最高的那个城市。

2. 对任意给定的 $X = X_i$ 和出发城市 S_i，求出小 A 开车行驶的路程总数以及小 B 行驶的路程总数。

$1 \le N \le 10^5$，$1 \le M \le 10^4$，$-10^9 \le H_i \le 10^9$，$0 \le X_0 \le 10^9$，$1 \le S_i \le N$，$0 \le X_i \le 10^9$，数据保证 H_i 互不相同。

「NOIP2012」开车旅行

问题描述：

有1~n号城市，编号小的在编号大的西边。每个城市有一个高度H，且各不相同，任意两个城市的距离为高度差的绝对值。

现在小A和小B选择一个城市S为起点。一直向东行驶。小A和小B轮流开车，小A先开。小B会选择前进方向最近的城市作为目的地。小A选择第二近的作为目的地。(相同距离，海拔低的更近)。如果无法选择目的地或者到达目的地距离超过X，就停止旅行。

问：

1. 给定X，从哪一个城市出发小A和小B开车行驶总距离的比值最小。

2. 进行M次询问，每次给定任意X和出发城市S，问小A和小B开车行驶的总距离。

$1 \le N \le 10^5$，$1 \le M \le 10^4$

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

需要三个关键信息：所在城市，天数，A,B行驶距离

通过天数可以知道谁在开车，将天数作为阶段

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

考虑处理f

初始化： $f_{0,j,0}$

表示小a先从j开车开1天到达的终点

初始化： $f_{0,j,1}$

表示小b先从j开车开1天到达的终点

分析：

初始化需要预处理出每个城市出发的最小值ga和次小值gb

LYD告诉我们，求最小值和次小值，可以用平衡树和链表做。

下面给出链表的做法：

分析：链表维护ga[] gb[]

l[i]表示在原序列中第i个点排序后左边的点，
r[i]表示在原序列中第i个点排序后右边的点。

先不管方向，将所有城市按高度排序之后，它的最小和次小点一定在l[i],l[l[i]],r[i],r[r[i]] 的位置。

直接完成GA 和GB的求解，复杂度O(NlogN)

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

考虑处理f

初始化： $f_{0,j,0}$ 表示小a先从j开车开1天到达的终点

初始化： $f_{0,j,1}$ 表示小b先从j开车开1天到达的终点

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

考虑处理f

初始化： $\boldsymbol{f_{0,j,0} = ga_j}$

表示小a先从j开车开1天到达的终点

初始化： $\boldsymbol{f_{0,j,1} = gb_j}$

表示小b先从j开车开1天到达的终点

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

考虑处理f，要求$f_{1,j,\mathrm{k}}$ $\mathrm{k} \in \{0,1\}$**，需要从** $f_{0,j,\mathrm{k}}$ $\mathrm{k} \in \{0,1\}$ **转移过来**

当i=1时，$2^{i-1} = 1$,等价于k 先开1天，再由1-k再开一天（另一人）

所以有： $f_{1,j,\mathrm{k}} = f_{0,\, f_{0,j,k},\, 1-k}$

当i>1时，$2^{i-1} =$ 偶数 ，2^i 拆成的2个2^{i-1} 都是k在开车

所以有： $f_{i,j,\mathrm{k}} = f_{i-1,\, f_{i-1,j,k},\, k}$

喝口水
思考下

分析:

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

考虑处理f，欲求$f_{1,j,k}$ $k \in \{0,1\}$，**需要从** $f_{0,j,k}$ $k \in \{0,1\}$ **转移过来**

$$f_{i,j,k} = \begin{cases} f_{i-1,\, f_{i-1,j,k},\, 1-k} & i = 1 \\ f_{i-1,\, f_{i-1,j,k},\, k} & i > 1 \end{cases}$$

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

有了f，考虑处理da与db，和f的处理逻辑是类似的，就硬推！

设 $da[i,j,k]$ 表示从城市 j 出发，两人共行驶 2^i 天，k 先开车，小 A 行驶的路程总长度。

初值：$da[0,j,0]=\text{dist}(j,\text{ga}(j))$，$da[0,j,1]=0$。

当 $i=1$ 时，$da[1,j,k]=da[0,j,k]+da[0,f[0,j,k],1-k]$。

当 $i>1$ 时，$da[i,j,k]=da[i-1,j,k]+da[i-1,f[i-1,j,k],k]$。

Note
dist(i,j)
表示i到j的距离

分析：

注意到：当起点确定，其路径与终点即可确定。

本题重点在于求解A B开车距离，同时还需要解决终点问题

考虑设计DP

$f_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 天车，小A/B先开车，到达哪个终点

$da_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，A开车距离

$db_{i,j,0/1}$ 表示从j出发，开2^i 次车，小A/B先开车，B开车距离

有了f，考虑处理da与db，和f的处理逻辑是类似的，就硬推！

设 $db[i,j,k]$ 表示从城市 j 出发，两人共行驶 2^i 天，k 先开车，小 B 行驶的路程总长度。

初值：$db[0,j,0]=0$，$db[0,j,1]=\text{dist}(j,\text{gb}(j))$。

当 $i=1$ 时，$db[1,j,k]=db[0,j,k]+db[0,f[0,j,k],1-k]$。

当 $i>1$ 时，$db[i,j,k]=db[i-1,j,k]+db[i-1,f[i-1,j,k],k]$。

Note
dist(i,j)
表示i到j的距离

分析:

得益于倍增， 我们在O(NlogN)的时间内
完成了行驶天数为2的幂次的距离
接下来就要结合 Q1和Q2 尝试求解

Q1 给定X，找一个出发城市使得 $\frac{A走的距离}{b走的距离}$ 最小。
Q2 给m组询问，给定S和X，问不超过X时，小A和B分别的行驶距离。

通过分析，Q1和Q2抽象为操作calc(s,x)表示从s出发，最多跑x公里时 A B 的行驶的路程。

S很好处理，考虑如何凑出x → **因为路径的连续性**
所以我们需要对x二进制拆分（从大到小拆），具体来说：

分析:

1. 初始化当前城市 $p=S$，小 A、小 B 累计行驶路程 $la=0$，$lb=0$。

2. 倒序循环 $i=\log N \sim 0$。

3. 对于每个 i，若两人从 p 出发行驶 2^i 天，累计路程仍未超过 X，即 $la+lb+da[i,p,0]+db[i,p,0]\le X$，则令 $la=la+da[i,p,0]$，$lb=lb+db[i,p,0]$，$p=f[i,p,0]$。

4. 循环结束后，la 与 lb 即为所求。

Q1 给定X，找一个出发城市使得 $\frac{\text{A走的距离}}{b\text{走的距离}}$ 最小。

Q2 给m组询问，给定S和X，问不超过X时，小A和B分别的行驶距离。

Q2通过calc(s,x)直接解决

Q1?

Q1 重复做N次Q2，O((N+M)logN)

强调
倍增优化DP核心

【step1】用“阶段”（阶段即为：区间长度）成倍增长的DP，计算出若干与2的整数次幂相关的代表状态。

【step2】基于二进制划分的思想，用上一步代表状态组合成最终的答案。

难点在于设计状态和状态之间的合并！