POJ3585 Accumulation Degree

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

问题描述：

有一个树形的水系，由 n-1(n≤200000)条河道和 n 个交叉点组成，交叉点可以看作树中的结点，编号为1~n，河道则看作树上的无向边。每条河道都有一个容量，连接 x 与 y 的河道容量记为 c(x,y)，河道中单位时间流过的水量不能超过河道的容量。

有一个节点是整个水系的源头，可以不断流出水。除了源头外，树中度数为 1 的结点都是入海口，可以吸收无限多的水，称为汇点。水系从源头出发，沿着每条河道，最终流向各个汇点。每条河道的水都以单位时间固定的水量流向固定的方向。除源点和汇点外，其余各点不储存水，即流入该点的水量等于该点流出的总水量。整个水系的流量定义为源点单位时间流出的水量。问，在不超过河道容量的前提下，哪个点作为源点时，整个水系的流量最大，输出最大值。

POJ3585 Accumulation Degree

问题分析

考虑朴素的做法

枚举源点u，将节点u看作源点。

设 d[u]表示以 u 为根的子树中，u 作为源点，从 u 出发流向子树的最大流量。

- 若 v 的度数为1，则 $d[u] = \sum_{v \in son[u]} c(u, v)$。
- 若 v 的度数大于1，d[u]=min(d[v],c(u,v))，v∈son[u]。

对于子节点v，可以看作v为根的子树中的源点，显然这是一个子问题。

一次树形DP时间复杂度为O(N)，枚举N个点作为源点，时间复杂度为$O(N^2)$。

IFZOI

信息学

换根DP

POJ3585 Accumulation Degree

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

问题分析

设 f[u] 表示将u作为源点，**整个水系**的最大流量。

首先，任选一个节点作为根节点root，进行一次树形DP，求解出 d 数组。

显然有 f[root]=d[root]。

POJ3585 Accumulation Degree

问题分析：

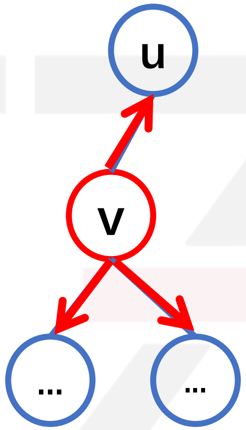
假设 f[u]已经求解出，考虑子节点 v 作为源点。

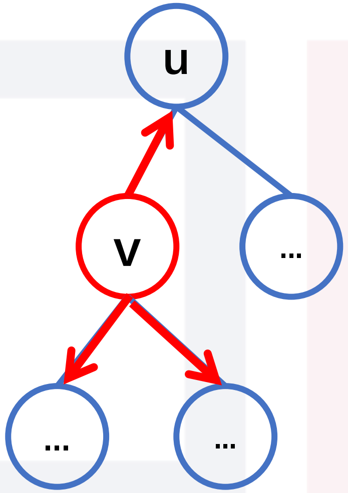
（1）若 u 的度数为1：

f[v]包含节点v流入子树的流量，即d[v]。

和流向节点 u 的流量，为 c(u,v)

则 f[v]=d[v]+c(u,v)





（2）若 u 的度数>1：

f[v]包含节点v流入子树的流量，即d[v]。

u流向v的流量min(d[v],c(u,v))，
那流向其他节点的流量就为f[u] - min(d[v],c(u,v))

和流向节点 u 的流量，为 min(f[u] - min(d[v],c(u,v)) , c(u,v))

则 f[v]=d[v]+min(f[u] - min(d[v],c(u,v)) , c(u,v))

最后的答案就是 $max_{i=1}^{n}(f[i])$。

二次扫描与换根法

这是一个 “不定根” 的树形 DP问题。

这类问题的特点就是，给定一个树形结构，需要以每个节点为根进行一系列统计。

一般通过两次扫描求解此类问题：

- 第一次扫描时，任选一个点为根结点root，在 “有根树” 上进行树形 DP ，在回溯时发生**自底向上**的状态转移。

- 第二次扫描时，从刚才选的根结点root出发，对整棵树执行一次DFS，在每次递归前进时，进行**自顶向下**的推导，计算出 “换根” 后的解。