信息学

状压DP

什么是状压DP

- **将状态通过适当的压缩方式使得它在DP过程中便于存储与计算。**

1. 最常见的是用一个二进制数来表示 n 个元素的情况，例如每个元素是否被选取，这种方法以集合信息为状态，故也称为集合动态规划 。
2. 另一种常见的状压 DP 是基于连通性的状压 DP （**炮兵阵地**）（**插头DP等**）

TSP(旅行商问题，求最小哈密顿回路)

- 给定一个 n 个结点的有向完全边带权图，求从 1 号点出发，经过所有点恰好一次并最终返回 1 号点的最短路径，$n \le 20$

- **搜索的时间复杂度是 O(n!)，考虑优化**
  - 注意到每个时刻，若知道哪些点已被走过和目前所在的点，就可做出下一步的决策，而决策与这些点被走过的顺序无关
  - 令 dp[i][S] 表示已经走过的点的集合是 S，当前所在点为 i 时路径长度最小值
  - 表示集合的方式:

    将 S 当作是一个 n 位二进制数，第 i 个点被走过 当且仅当 S 的二进制第 i 位是 1
  - 求解对象为dp[1][(1<<n) -1] 表示已经走过了所有点，并且回到了起点1

- **基本操作:**
  - 若 S ⊆ T，则 S 的二进制表示也小等于 T
  - 位运算的操作:与、或、非、左移、右移、取反
  - 取出二进制数第k位:x >> k&1
  - 将第k位设成1:x|= 1 << k
  - 将第k位设成0:x&=~(1 << k)
  - 枚举子集:subset = (subset − 1) & mask

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main(){
   int a = 100;
   int msk = a;
   cout<<bitset<sizeof(a)*8>(a)<<endl;
                 // 00000000000000000000000001100100


   for(int msk =a;a;a=(a-1)&msk){
      cout<<bitset<sizeof(a)*8>(a)<<endl;
   }
//   for输出结果
//   00000000000000000000000001100100
//   00000000000000000000000001100000
//   00000000000000000000000001000100
//   00000000000000000000000001000000
//   00000000000000000000000000100100
//   00000000000000000000000000100000
//   00000000000000000000000000000100
   return 0;
}
```

小结:

- 状压 DP 的特点:决策与到达当前状态的顺序无关、问题中某些关键信息维数很小
  - 将状态映射到[0, K^N – 1] 之间的一个数（k进制数）。
  - N不能太大，大概在 N<= 16 附近（读懂题目暗示)

例2 Corn Fields牧场的安排

n行m列牧场，每块都是一块土地，想种草，要求两块草地不能相邻，且有的地不能种草，有多少种情况。

N M <=12

1 有草，0无草。 对每行进行状态压缩

预处理出$g_{i,j}$表示当前状态为i时，下一行为j是否可行

请注意ij分别代表一行种草情况。

例2 Corn Fields牧场的安排

n行m列牧场，每块都是一块土地，想种草，要求两块草地不能相邻，且有的地不能种草，有多少种情况。

N M <=12

$f_{i,w}$ 表示第i行状态为w的方案数

$$f_{i,w} = (f_{i,w} + f_{i-1,k})\% MOD \qquad g_{w,k} = 1$$

初始化 $f_{1,\_} = 1$ 　　答案 $\sum_{i=0}^{tot} f[n][i]$

例3 NOI2001 炮兵阵地

P	P	H	P	H	H	P	P
P	H	P	H	P	H	P	P
P	P	P	H	H	H	P	H
H	P	H	P	P	P	P	H
H	P	P	P	P	H	P	H
H	P	P	H	P	H	H	P
H	H	H	P	P	P	P	H

怎么搞?

P 可放置炮兵，黑色为炮兵的轰炸区域
在保证安全的情况下（不在攻击范围内）
这个那个地图区域最多能摆放多少炮兵部队

例3 NOI2001 炮兵阵地

P	P	H	P	H	H	P	P
P	H	P	H	P	H	P	P
P	P	P	H	H	H	P	H
H	P	H	P	P	P	P	H
H	P	P	P	P	H	P	H
H	P	P	H	P	H	H	P
H	H	H	P	P	P	P	H

提示 决策i行时，把前两行一起搞。

$f_{i,j,k}$
表示第i行压缩后的状态为j，
第i-1行压缩后的状态为k，
最多能放置多少个炮兵

$$f_{i,j,k} = \max\{f_{i-1,k,l} + \underline{count(j)}\}$$

j-1 → j 放人数

$$f_{i,j,k} = \max\{f_{i-1,k,l} + count(j)\}$$

j-1 → j 放人数

也就是j中1的个数，i行放人数

转移的前提条件（否则就是-INF）

1. j&l = 0
2. j和k内部炮兵距离>=3 且都在平原上，且j&k==0

例3 SCOI2005 互不侵犯King

- 在N×N的棋盘里面放K个国王，使他们互不攻击，**共有多少种摆放方案？** 国王能攻击到它上下左右，以及左上左下右上右下八个 方向上附近的各一个格子，共8个格子。

- (1 <=N <=9, 0 <= K <= N * N)

$f_{i,j,k}$ 前面已经填了j个，第i行状态为k的方案数，over