课前提醒

本节课程所讲内容证明十分复杂，

但是用起来相当愉快，**代码很简单**

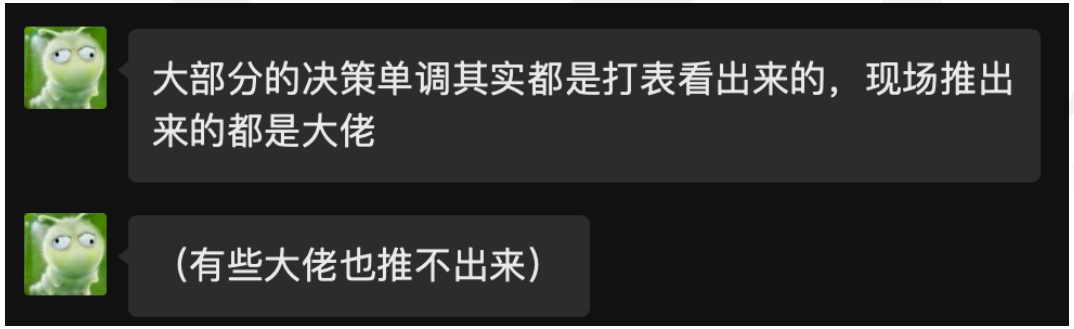
所以我们先讲应用

再带大家看一遍证明 (如果你没听明白就算了)

这个玩意儿，赛场上是没时间证明的

如果你看着数据范围，DP复杂度刚好需要削掉一个n的时候，马上打表验证单调性，运用一眼法，没问题就直接冲

——来自Tad的忠告



来自PYB的忠告

最后讲例题

信息学

四边形不等式与决策单调性

决策单调性

- 形如$f[i]=\min\limits_{0\le j\le i}\{f[j]+val(i,j)\}$的状态转移方程
- 如果$p[i]$为状态$f[i]$的决策；
- 并且$p[\ ]$在$[1,N]$上单调不减
- 则称f具有决策单调性

能干嘛?

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

- 明显，我们可以将状态转移写成：
- $f[i] = \min\limits_{p[i-1] \le j \le i} \{f[j] + val(i,j)\}$
- 但并不一定能更优;
- 例如p = {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}

能干嘛?

- 最终的目标：求解出$p[]$
- 初始值$p = \{0\}$
- 当循环到某个i的时候，可能$p = \{j_1 j_1 j_2 j_2 j_2 j_3 j_3 j_3 j_4 j_4 j_5 j_5 j_5\}$
- 其中$j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < j_5 < i$
- 当求解出$f[i]$后
- 我们需要更新p，也就是找到一个位置(这之前的决策都比i优,后面都差)
- 将该位置之后的值都换成i
- $p = \{j_1 j_1 j_2 j_2 j_2 j_3 iiiiiii\}$

维护p数组

- 直接修改效率很低
- 用队列代替p数组。
- 队列中保存若干个三元组(j, l, r)，j为决策，l, r为区间
- $p = \{j_1 j_1 j_2 j_2 j_2 j_3 j_3 j_3 j_4 j_4 j_5 j_5 j_5\}$可以表示为：
- $(j_1,1,2)(j_2, 3,5)(j_3, 6,8)(j_4, 9,10)(j_5, 11,13)$
- 当更新i的时候，从队尾开始检测：
- 发现$(j_4, 9,10)(j_5, 11,13)$都要劣一些，从队列中删去；
- $(j_3, 6,8)$左端点比i优，右端点比i差；
- 那就二分下即可；

求解$f[i]$

西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

- 直接将$p[i]$这个决策代入进去即可求解
- 但用队列维护p呢，那么需要从头到尾遍历一遍
- 时间复杂度太高；

- 队列中其实不需要保存$p[1 \sim i-1]$部分
- 因此像单调队列一样，将这部分出队
- 求解$f[i]$就只需要取队头即可

西大附中信息学竞赛
High School Affiliated to Southwest University

求解$f[i]$

对于每个$i \in [1, N]$，我们执行以下操作：

1、检查队头(j_0, l_0, r_0)，若$r_0 < i$，删除队头，否则：$l_0 = i$

2、取出队头的j，作为最优决策，计算出$f[i]$

3、插入决策i

1)取出队尾 (j_t, l_t, r_t)

2)如果对于$f[l_t]$，j_t劣于i，即$f[i] + val(i, l_t) \le f[j_t] + val(j_t, l_t)$ 删除队尾，记$pos = l_t$;

3)如果对于$f[r_t]$，j_t优于i，将(i, pos, N)插入队尾

4）如果2、3都不满足，则在 $[l_t, r_t]$中进行二分，找到 pos，将$(j_t, l_t, pos - 1)$，(i, pos, N)插入队尾

诗人小G

小G是一个出色的诗人，经常作诗自娱自乐。但是，他一直被一件事情所困扰，那就是诗的排版问题。

一首诗包含了若干个句子，对于一些连续的短句，可以将它们用空格隔开并放在一行中，注意一行中可以放的句子数目是没有限制的。小G给每首诗定义了一个行标准长度（行的长度为一行中符号的总个数），他希望排版后每行的长度都和行标准长度相差不远。显然排版时，不应改变原有的句子顺序，并且小G不允许把一个句子分在两行或者更多的行内。在满足上面两个条件的情况下，小G对于排版中的每行定义了一个不协调度, 为这行的实际长度与行标准长度差值绝对值的P次方，而一个排版的不协调度为所有行不协调度的总和。

小G最近又作了几首诗，现在请你对这首诗进行排版，使得排版后的诗尽量协调（即不协调度尽量小），并把排版的结果告诉他。

西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛
High School Affiliated to Southwest University

状态

$f\,[i]$ 表示前i句诗排版的最小不协调度

状态转移

$$f\,[i\,] = \min_{0\le j\le i}\{f\,[j]\, + \,|sum\,[i] - \,sum\,[j] + \,(i\, - \,j\, - \,1) - \,L\,|^{P}\}$$

$$val(\,j,i\,) = |sum\,[i] - \,sum\,[j] + \,(i\, - \,j\, - \,1) - \,L\,|^{P}$$

和我们说的形式相同，那就去用

为什么能用?

西南大附中信息学竞赛
High School Affiliated to Southwest University

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

一般来说:

先用$O(n^2)$的做法把$p[i]$求出来，发现符合决策单调性

题目数据需要到$O(n\ logn)$做法

那么分段打代码：

能$O(n^2)$过的就直接用$O(n^2)$算法

else：利用决策单调性，写$O(n\ logn)$

西 大 附 中 信 息 学 竞 赛
High School Affiliated to Southwest University

西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

比如区间问题：

$$f[i][j]=\min_{i\le k<j}\{f[i][k]+f[k+1][j]+w(i,j)\}$$

如果$w[i][j]$满足四边形不等式和单调性，就能用四边形不等式优化

在进行决策时只需要在$p[i,j-1]\le k\le p[i+1,j]$上讨论问题

整体时间复杂度会变成：

$O(n^2)$

西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛
High School Affiliated to Southwest University

比如石子合并

有n堆石头排成一条直线，每堆石头的个数已知，现在要将这n堆石头合并成一堆，每次合并只能合并相邻的两堆石头，代价就是新合成石头堆的石头数，现在问将这n堆石头合并成一堆，最小代价是多少?

$f[i,j]$表示将第i堆到第j堆合并为一堆的最优花费

状态转移方程：

$$f[i][j] = \min_{i \le k < j}\{f[i][k] + f[k+1][j] + w(i,j)\}$$

西大附中信息学竞赛
High School Affiliated to Southwest University

二维区间DP


```
for (i=1;i<=n;i++){
    f[i][i]=0;
    p[i][i]=i;   //p函数的初始值
}

for(int len=2;len<=n;len++){
    for(int i=1 ;i<=n-len+1;i++){
        int j=i+len-1;
        for(k=p[i][j-1];k<=p[i+1][j];k++){                  //缩小循环范围
            if(f[i][j]>f[i][k]+f[k+1][j]+w[i][j]){          //是否更优
                f[i][j]=f[i][k]+f[k+1][j]+w[i][j];
                p[i][j]=k;                                   //更新最佳分割点
            }
        }
    }
}
```

为什么可以缩小范围？

p[i][j-1]<=p[i+1][j] 一定成立嘛？

四边形不等式

定义一:

设$w(x, y)$是定义在整数集合上的二元函数。若对于定义域 上的任意整数a, b，其中有$a < b$，都有:

$$w(a,b+1)+w(a+1,b)\geq w(a,b)+w(a+1,b+1)$$

则函数w满足四边形不等式

西大附中信息学竞赛 High School Affiliated to Southwest University

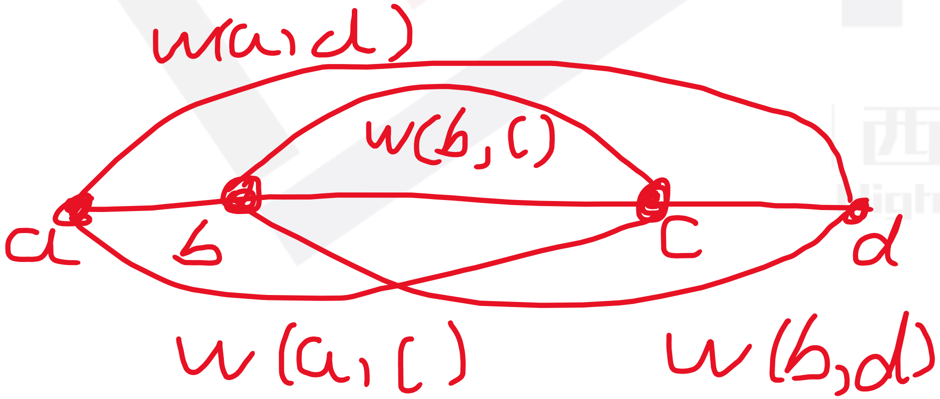
四边形不等式

定义二：

设$w(x,\ y)$是定义在整数集合上的二元函数。若对于定义域上的任意整数a, b, c, d，其中有$a \le b \le c \le d$，都有：

$$w(a,d) + w(b,c) \ge w(a,c) + w(b,d)$$

则函数w满足四边形不等式。



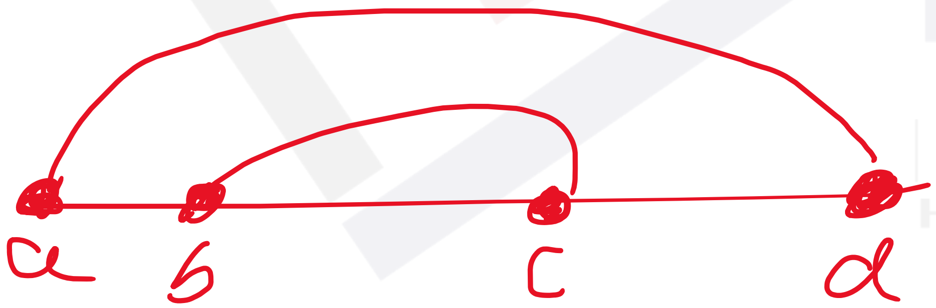
交叉小于包含

单调性

设$w(x, y)$是定义在整数集合上的二元函数。若对于定义域上的任意整数a, b, c, d，其中有$a \le b \le c \le d$，都有：

$$w(a, d) \ge w(b, c)$$

则函数w满足单调性



大区间大于小区间

四边形不等式定理

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

如果$w(i,j)$满足四边形不等式和单调性,

则用DP计算$f[][]$的复杂度为$O(n^2)$

证明会用到两个引理:

引理1: 对于$f[i][j]=\min\limits_{i\le k<j}\{f[i][k]+f[k+1][j]+\mathrm{w}(i,j)\}$

如果w满足四边形不等式和单调性,

那么f也满足四边形不等式

四边形不等式定理

证明会用到两个引理：

引理2：

记$p[i][j] = k$为$f[i][j]$最优值时的k，如果f满足四边形不等式，

那么$p[i,j-1] \leq k \leq p[i+1,j]$

这个可以直接用到优化，复杂度就是$O(n^2)$

西 | 大 | 附 | 中 | 信 | 息 | 学 | 竞 | 赛
High School Affiliated to Southwest University

四边形不等式定理

引理1证明：

数学归纳法：

https://oi-wiki.org/dp/opt/quadrangle/

储枫论文版（纯英文，有兴趣可以去看看）

结合白书给大家讲一下证明

西大附中信息学竞赛 High School Affiliated to Southwest University

定义方程：

$$\begin{cases} c(i,i)=0 \\ c(i,j)=w(i,j)+\min\{c(i,k-1)+c(k,j)\}, \quad i<k\leqslant j \end{cases} \tag{5.1}$$

前面例子中的 dp[i][j] 和这里的 $c(i,j)$ 略有不同，dp[i][j] = min{dp[i][k] + dp[k+1][j] + w[i][j]}，其中 w[i][j] 在 min() 内部。证明过程是一样的。

式(5.1)中的 w 要求满足四边形不等式和单调性，即

$$\begin{cases} w(i,j)+w(i',j')\leqslant w(i',j)+w(i,j'), \quad i\leqslant i'\leqslant j\leqslant j' \\ w(i',j)\leqslant w(i,j'), \quad [i',j]\subseteq[i,j'] \end{cases} \tag{5.2}$$

1. 证明引理 1

如果 $w(i,j)$ 满足四边形不等式和单调性，那么 $c(i,j)$ 也满足四边形不等式，即

$$c(i,j)+c(i',j')\leqslant c(i',j)+c(i,j'), \quad i\leqslant i'\leqslant j\leqslant j' \tag{5.3}$$

下面证明式(5.3)。

当 $i=i'$ 或 $j=j'$ 时，式(5.3)显然成立，下面考虑另外两个情况：$i<i'=j<j'$；$i<i'<j<j'$。

1) $i<i'=j<j'$

代入式(5.3)，得到一个"反三角形不等式"，如图 5.28 所示的三角形 ijj'，两边的和小于第 3 边。

$$c(i,j)+c(j,j')\leqslant c(i,j'), \quad i<j<j' \tag{5.4}$$

High School

现在证明式(5.4)。

假设 $c(i,j')$ 在 $k=z$ 处有最小值，即 $c(i,j')=c_z(i,j')$。这里定义 $c_k(i,j)=w(i,j)+c(i,k-1)+c(k,j)$。

有两个对称情况：$z\leqslant j$；$z\geqslant j$。

$z\leqslant j$ 时，z 为 (i,j') 区间的最优点，不是 (i,j) 区间的最优点，所以有

$$c(i,j)\leqslant c_z(i,j)=w(i,j)+c(i,z-1)+c(z,j)$$

在两边加上 $c(j,j')$，有

$$\begin{aligned} c(i,j)+c(j,j') &\leqslant w(i,j)+c(i,z-1)+c(z,j)+c(j,j') \\ &\leqslant w(i,j')+c(i,z-1)+c(z,j') \\ &=c(i,j') \end{aligned}$$

上面的推导利用了：

(1) w 的单调性，有 $w(i,j)\leqslant w(i,j')$；

(2) 式(5.4)的归纳假设：假设 $z\leqslant j\leqslant j'$ 时成立，递推出 $i<j<j'$ 时式(5.4)也成立。观察图 5.28，有 $c(z,j)+c(j,j')\leqslant c(z,j')$，它满足反三角形不等式。

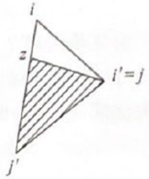


图 5.28 引理 1 证明 $(z\leqslant j)$[①]

$z\geqslant j$ 是上述 $z\leqslant j$ 的对称情况。

2) $i<i'<j<j'$

假设式(5.3)右边的小区间 $c(i',j)$ 和大区间 $c(i,j')$ 分别在 $k=y$ 和 $k=z$ 处有最小值，记为

$$c(i',j)=c_y(i',j)$$
$$c(i,j')=c_z(i,j')$$

同样有两个对称情况：$z\leqslant y$；$z\geqslant y$。

$z\leqslant y$ 时，有

$$c(i',j')\leqslant c_y(i',j')$$
$$c(i,j)\leqslant c_z(i,j)$$

将两式相加，得

$$\begin{aligned} & c(i,j)+c(i',j') \\ & \leqslant c_z(i,j)+c_y(i',j') \\ & =w(i,j)+w(i',j')+c(i,z-1)+c(z,j)+c(i',y-1)+c(y,j') \end{aligned} \tag{5.5}$$

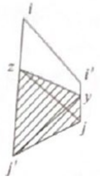
式(5.5)的进一步推导利用了：

(1) 根据 w 的四边形不等式，有 $w(i,j)+w(i',j')\leqslant w(i',j)+w(i,j')$；

(2) 根据式(5.3)的归纳假设，即假设 $z\leqslant y<j<j'$ 时成立。观察图 5.29，有 $c(z,j)+c(y,j')\leqslant c(y,j)+c(z,j')$，满足反四边形不等式。

则式(5.5)变为

$$\begin{aligned} & c(i,j)+c(i',j') \\ & \leqslant w(i',j)+w(i,j')+c(i,z-1)+c(i',y-1)+c(y,j)+c(z,j') \\ & \leqslant c_y(i',j)+c_z(i,j') \\ & =c(i',j)+c(i,j') \end{aligned}$$



$z\geqslant y$ 是 $z\leqslant y$ 的对称情况。

引理 1 证毕。

2. 证明引理 2

学
rsity

四边形不等式定理

引理2证明：

白书有点绕，用蓝书的方法和大家讲

令$p = P[i,j]$，对于任意$i < k \le p$，因为f满足四边形不等式：

$$f[i,p] + f[i+1,k] \ge f[i,k] + f[i+1,p]$$

移项目可得：

$$f[i+1,k] - f[i+1,p] \ge f[i,k] - f[i,p]$$

又因为根据p是最优的有：

$$f[i,k] + f[k+1,j] \ge f[i,p] + f[p+1,j]$$

西大附中信息学竞赛 High School Affiliated to Southwest University

$$(f[i+1,k]+f[k+1,j]+w(i+1,j))-(f[i+1,p]+f[p+1,j]+w(i+1,j))$$

$$=f[i+1,k]-f[i+1,p]+(f[k+1,j]-f[p+1,j])$$

$$\geq f[i,k]-f[i,p]+(f[k+1,j]-f[p+1,j])$$

$$=f[i,k]+f[k+1,j]-(f[i,p]+f[p+1,j])$$

$$\geq 0$$

因此，对于$f[i+1,j]$，p比任意$k<p$更优。

因此$p[i+1,j] \geq p[i,j]$

同理可证$p[i,j-1] \leq p[i,j]$

3. 证明四边形不等式定理

利用引理 2，可推论出四边形不等式定理，即用 DP 计算所有的 $c(i,j)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$。下面对这一结论进行说明。

用 DP 计算 $c(i,j)$ 时，是按 $\delta=j-i=0,1,2,\cdots,n-1$ 的间距逐步增加进行递推计算的。具体过程请回顾 5.10.1 节中求 dp[i][j] 的代码。从 $c(i,j)$ 递推到 $c(i,j+1)$ 时，只需要 $K_c(i+1,j+1)-K_c(i,j)$ 次最少限度的操作就够了。总次数是多少呢？对于一个固定的 δ，计算所有的 $c(i,j)$，$1\leqslant i\leqslant n-\delta$，$j=i+\delta$。

$i=1$ 时，$K_c(1+1,1+\delta+1)-K_c(1,\delta+1)=K_c(2,\delta+2)-K_c(1,\delta+1)$；

$i=2$ 时，$K_c(2+1,2+\delta+1)-K_c(2,\delta+2)=K_c(3,\delta+3)-K_c(2,\delta+2)$；

$i=3$ 时，$K_c(3+1,3+\delta+1)-K_c(3,\delta+3)=K_c(4,\delta+4)-K_c(3,\delta+3)$；

…

$i=n-\delta$ 时，$K_c(n-\delta+1,n-\delta+\delta+1)-K_c(n-\delta,\delta+n-\delta)=K_c(n-\delta+1,n+1)-K_c(n-\delta,n)$。

将以上式子相加，总次数为 $K_c(n-\delta+1,n+1)-K_c(1,\delta+1)<n$。

对于一个 δ，计算次数为 $O(n)$；有 n 个 δ，总计算复杂度为 $O(n^2)$。

以上证明了四边形不等式定理。

4. min()和 max()

前面讨论的都是 min()，如果是 max()，也可以进行四边形不等式优化。此时四边形不等式是“反”的，即

$$w(i,j)+w(i',j')\geqslant w(i',j)+w(i,j'),\quad i\leqslant i'\leqslant j\leqslant j'$$

定义

$$c(i,j)=w(i,j)+\max(a(i,k)+b(k,j)),\quad i\leqslant k\leqslant j$$

引理 3 若 w、a、b 都满足反四边形不等式，那么 c 也满足反四边形不等式。

引理 4 如果 a 和 b 满足反四边形不等式，那么

$$K_c(i,j)\leqslant K_c(i,j+1)\leqslant K_c(i+1,j+1),\quad i\leqslant j$$

引理 3 和引理 4 的证明与引理 1 和引理 2 的证明类似。

状态

$f[i]$ 表示前i句诗排版的最小不协调度

状态转移

$$f[i] = \min_{0\le j\le i}\{f[j] + |sum[i] - sum[j] + (i - j - 1) - L|^P\}$$

$$val(j,i) = |sum[i] - sum[j] + (i - j - 1) - L|^P$$

和我们说的形式相同，那就去用

为什么能用?

$val(j,i) = |sum[i] - sum[j] + (i - j - 1) - L|^P$ 符合四边形不等式

西南大附中信息学竞赛
High School Affiliated to Southwest University

需要证明$\forall j < i, val(j,i+1) + val(j+1,i) \geq val(j,i) + val(j+1,i+1)$

只需要证明：$val(j+1,i) - val(j+1,i+1) \geq val(j,i) - val(j,i+1)$

令$u = (sum[i] + i) - (sum[j] + j) - (L+1)$

$$v = (sum[i] + i) - (sum[j+1] + j + 1) - (L+1)$$

则原式为：$|v|^P - |v + a[i+1] + 1|^P \geq |u|^P - |u + a[i+1] + 1|^P$

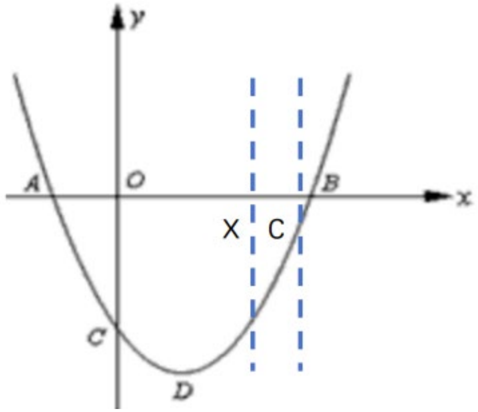
显然$u > v$。所以只需要证明$y = |x|^P - |x+c|^P$对于任意常数c，单调递减；

西大附中信息学竞赛 High School Affiliated to Southwest University

显然$u > v$。所以只需要证明$y = |x|^P - |x + c|^P$对于任意常数c，单调递减；

严格证明：
讨论$x < -c, -c \le x \le 0, x > 0$与$P$的奇偶性，加上求导可证明

感性证明：
当$P = 1$时，$y = c$，符合；
当$P \neq 1$时，x越大，$|x|^P$与$|x + c|^P$的差距就会越大，得证



附中信息学竞赛
Affiliated to Southwest University

四边形不等式的运用

西南大学附属中学 High School Affiliated to Southwest University

一般也是可以使用$O(n^3)$算法打表；

发现规律后再进行运用；

西大附中信息学竞赛 High School Affiliated to Southwest University

四边形不等式的运用

性质1：

若函数$w1\ (l,r), w2(l,r)$均满足四边形不等式（或区间包含单调性），则对于$\forall c1, c2 \ \geq\ 0$，函数$c1w1\ +\ c2w2$也满足四边形不等式（或区间包含单调性）；

性质2：

若存在函数$f(x), g(x)$使得$w\ (l,r)\ =\ f\ (r)\ -\ g(l)$，则函数$w$满足四边形不等式。当函数$f, g$单调增加时，函数$w$还满足区间包含单调 性

西 大 附 中 信 息 学 竞 赛
High School Affiliated to Southwest University

四边形不等式的运用

性质3：

设$h(x)$是一个单调增加的凸函数，若函数$w(l,r)$满足四边形不等 式并且对区间包含关系具有单调性，则复合函数$h(w(l,r))$也满足 四边形不等式和区间包含单调性。

性质4：

- 设$h(x)$是一个凸函数，若函数$w(l,r)$满足四边形不等式并且对区间包含关系具有单调性，则复合函数$h(w(l,r))$ 也满足四边形不等式。

凸函数：此处的定义为一阶导数单调增加的函数

西 大 附 中 信 息 学 竞 赛
High School Affiliated to Southwest University

有哪些用呢?

状态转移方程:

$$f[i]=\min\{f[j]+(Si-Sj+i-j-1-L)^2\}$$

令: $S'_i = S_i + i, L' = L + 1$

玩具装箱$f_i = \min\left\{f_j + \left(S'_i - S'_j - L'\right)^2\right\}$

$$val(i,j) = \left(S'_i - S'_j - L'\right)^2$$

令$f(x) = S'_x, g(x) = S'_x + L', w(i,j) = S'_i - S'_j - L' = f(i) - g(j)$

所以$w(i,j)$满足四边形不等式;

令$h(x) = x^2$,且$h(x)$显然是一个凸函数

所以$val(i,j) = h(w(l,r))$满足四边形不等式