前缀和与差分

前缀和

对于一个给定 n 个数的序列 a ，它的前缀和序列 s ： $s[i]=\sum_{j=1}^{i}a[j]$ 。

前缀和求解方式：递推， $s[0]=0, s[i]=s[i-1]+a[i](1\le i\le n)$ 。

前缀和可以在 $O(1)$ 的时间求得区间和： $\sum_{i=l}^{r}a[i]=s[r]-s[l-1]$ 。

例如：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
序列 a	5	2	1	-4	2	-8	7	-2	6
前缀和 s	5	7	8	4	6	-2	5	3	9

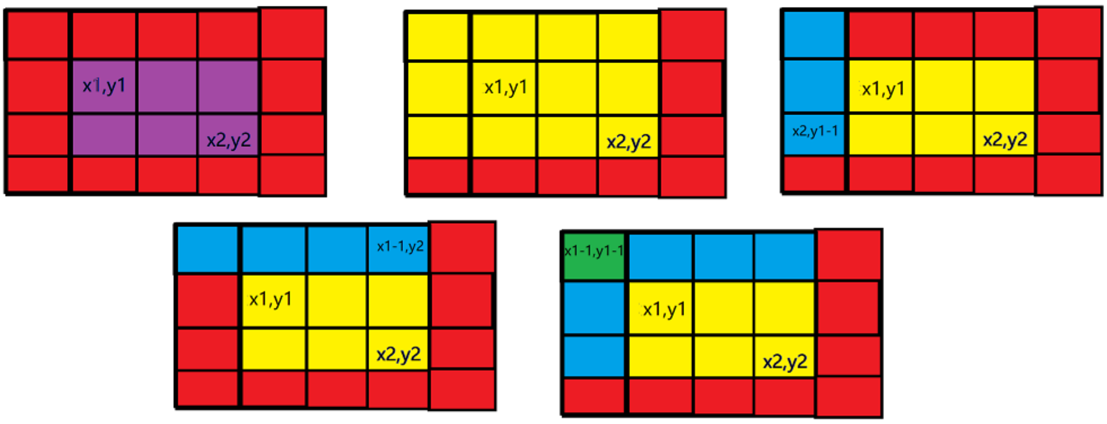
其中序列 `a[3]~a[7]` 的区间和，等于 `s[7]-s[2]=5-7=-2` 。

二维前缀和

在二维数组 a 中，可以按照同样的方式求解二维前缀和。二维前缀和 $s[i][j]$ 表示左上角为 $a[1][1]$，右下角为 $a[i][j]$ 的矩阵和。

$s[i][j]=\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{j}a[x][y]$

二维前缀和通过递推求解： $s[i][j]=s[i-1][j]+s[i][j-1]-s[i-1][j-1]+a[i][j]$ 。



对于左上角为 $a[x_1][y_1]$，右下角为 $a[x_2][y_2]$ 的矩形权值和：

黄色区域-蓝色区域+绿色区域：

$$SUM\{a[x_1][y_1]\sim a[x_2][y_2]\}=s[x_2][y_2]-s[x_2][y_1-1]-s[x_1-1][y_2]+s[x_1-1][y_1-1]$$

上面两个式子的思想其实就是**容斥原理**。

树上前缀和(了解)

设 s_i 表示节点 i 到根节点的权值综合。

若是点权，x, y 之间的路径权值和为：$s_i + s_j - s_{lca} - s_{fa[lca]}$ 。

若是边权，x, y 之间的路径权值和为：$s_i + s_j - 2s_{lca}$ 。

只要有可加可减性的信息都可以按照前缀和的方式，还可以求出**前缀积**、**前缀异或和**等等 。

差分

对于一个给定得到 n 个数的序列 a ，它的差分序列 b 定义为：

$b[1] = 1, b[i] = a[i] - a[i-1] (2 \leq i \leq n)$

对于区间 $[l, r]$ 所有元素增加 d ，差分序列，只有两个数发生了变化：
$b[l] = b[l] + d, b[r+1] = b[r+1] - d$ 。

因此，对于区间操作，可以将序列转化为差分序列，**将 1 次区间操作转化为 2 次单点操作。**

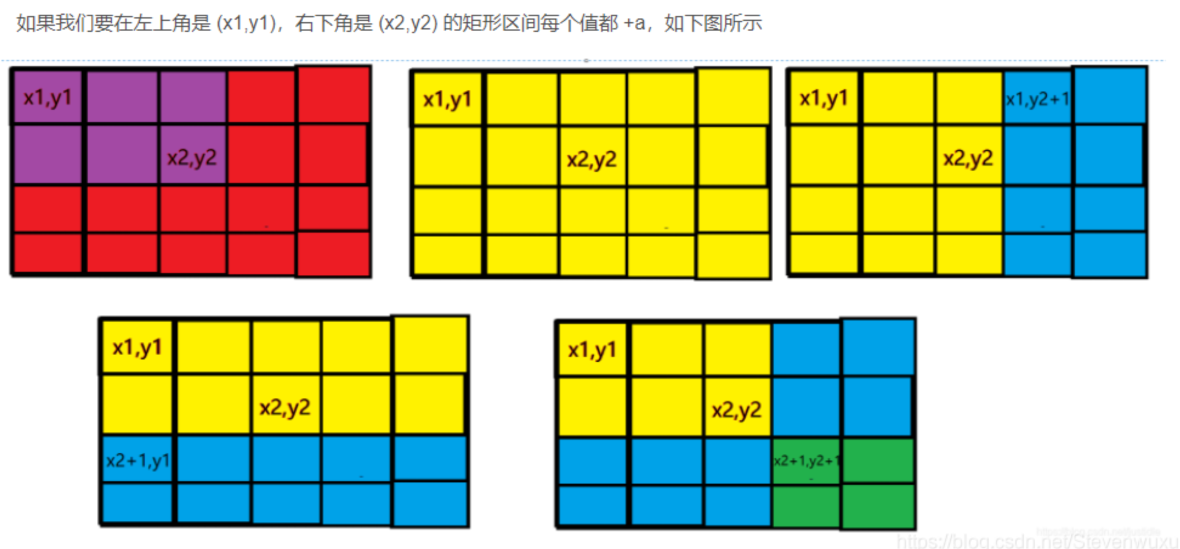
前缀和与差分是一对互逆运算，差分序列 b 的前缀和序列就是 a ，前缀和序列 s 的差分序列也是序列 a
。

例如：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
序列 a	5	2	1	-4	2	-8	7	-2	6
差分序列 b	5	-3	-1	-5	6	-10	15	-9	8

将序列列 `a[3]~a[7]` 的区间整体增加 10，其中`a[4]` 与 `a[3]`，`a[5]`与 `a[4]`，`a[6]` 与 `a[5]`，`a[7]` 与`a[6]` 之间差值不变，因此 `b[4]~b[7]` 不变，只有两个端点，`a[3]` 差值增加 10 ，`a[8]` 差值减少 10 。

二维差分



给定矩阵 a ，定义二维差分序列 b 。

在我们要的区间开始位置（x1,y1）处 +x，根据前缀和的性质，那么它影响的就是整个黄色部分，多影响了两个蓝色部分，所以在两个蓝色部分 -x 消除 +x 的影响，而两个蓝色部分重叠的绿色部分多了个 -x 的影响，所以绿色部分 +x 消除影响。所以对应的计算方法如下

总结：对于矩阵中对左上角 $a[x_1][y_1]$ ，右下角 $a[x_2][y_2]$ 的矩阵整体增加 d ，对于二维差分序列 b ，只有 4 个元素会改变：

```
b[x1][y1]+=d;
b[x2+1][y1]-=d;
b[x1][y2+1]-=d;
b[x2+1][y2+1]+=d;
```

二维差分递推式：$b[i][j]=a[i][j]-a[i-1][j]-a[i][j-1]+a[i-1][j-1]$

差分序列 b 的二维前缀和(左上角 $b[1][1]$，右下角 $b[i][j]$ 矩形) 就是 $a[i][j]$ 。