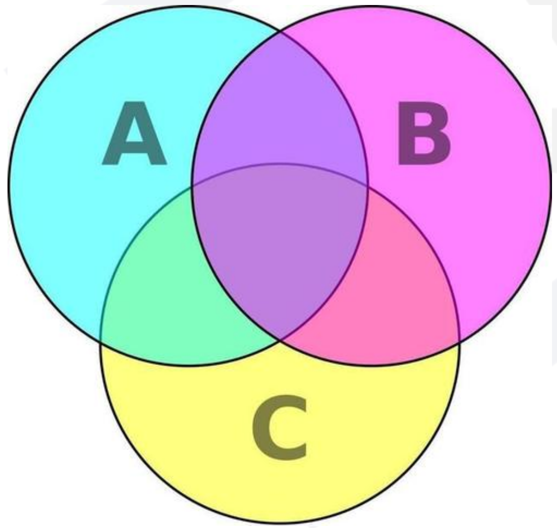
求这个图形的面积



三个圆形面积和 减去重叠的部分

先不考虑重叠的情况，把总面积算出来，在把重叠的部分排斥出去

对应到计数也是一样

容斥原理

在计数时，必须注意没有重复，没有遗漏。
为了使重叠的部分不被重复计算，人们研究出一种新的计数方法，这种方法的基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为**容斥原理**。

信息学

容斥原理

简单的题目

某班全体在暑假里都参加了体育训训练队，其中参加足球队的有25人，参加排球队的有22人，参加游泳队的有24人，足球排球都参加的有12人，足球、游泳都参加的有9人，排球、游泳都参加的有8人，足球、排球、游泳都参加的有3人，

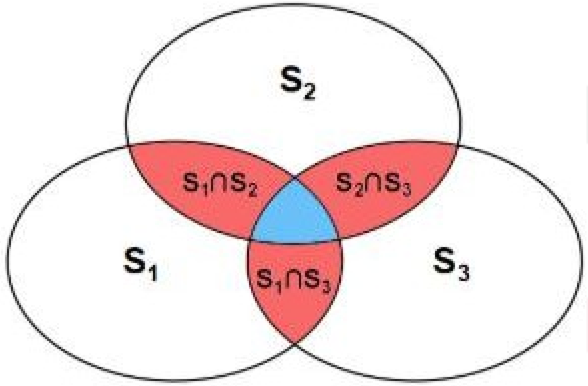
问：班上总共有多少人?

可以将问题转换为一般情况：设一个有限集合 U，集合中每个元素包含三个性质 P_1, P_2, P_3，满足 P_1 性质的元素构成集合 S_1，满足 P_2 性质的元素构成集合 S_2，满足 P_3 性质的元素构成集合 S_3，$|S|$ 表示集合中元素的数量。

已知，

$|S1| = 25, |S_2| = 22, |S_3| = 24, |S_1 \cap S_2| = 12, |S_1 \cap S_3| = 9, |S_2 \cap S_3| = 8, |S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 3$，

求 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3|$。



可以得到:

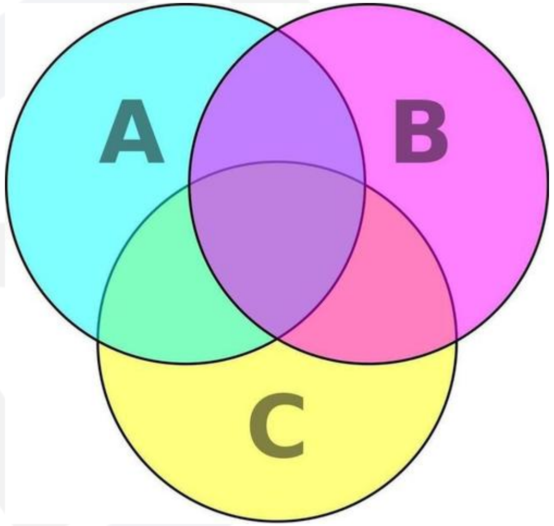
$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

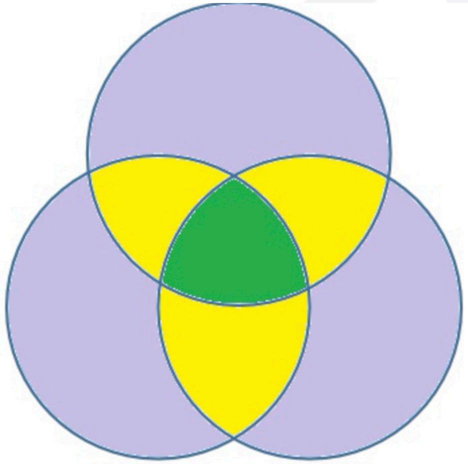
答案就是: $25 + 22 + 24 - 12 - 9 - 8 + 3 = 45$。

韦恩Venn图

西南大学附属中学
High School Affiliated to Southwest University

一种表示集合关系的图(Venn)





灰色“只满足一个条件”
黄色“只满足两个条件”
绿色“满足三个条件

容斥原理

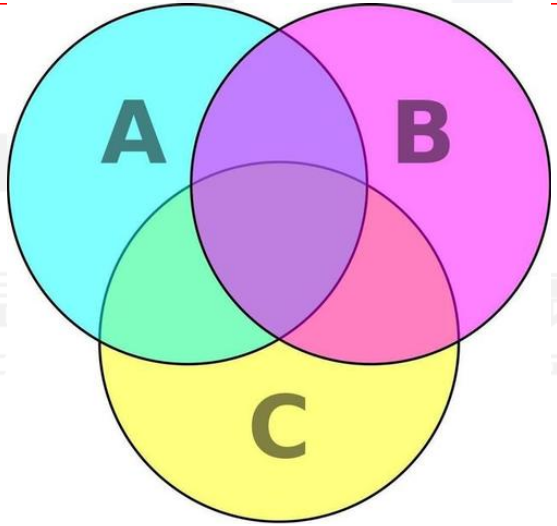
设满足性质 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的有限集合分别为 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ，$|S|$ 表示集合大小，则至少满足其中一个性质的集合 $|U|$ 的个数为：

既有Pi又有Pj属性的对象个数(其他属性不关心)

$$|\cup_{i=1}^{n} S_i| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|$$

加多了就减,减多了就加. 则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{a_i < a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right|$$



将**求并集的元素个数**转换为**求交集的元素个数**，这一步体现了**转换**的思想。

练1 网课问题

班级里的学生用电脑或手机上网课，其中，18人用电脑上课，22人用手机上课，有6人既能用电脑上课，也能用手机上课，求班级的总人数。

属性A,电脑上课,属性B手机上课

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 18 + 22 - 6 = 34$$

练2 整除问题

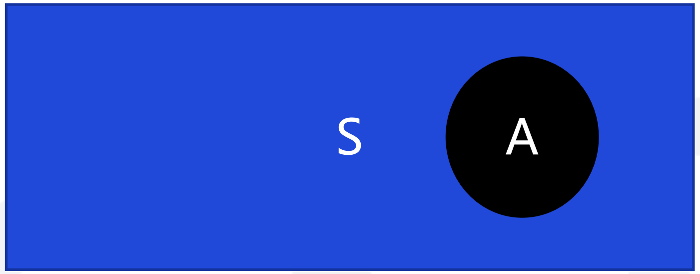
求1~100之间不能被4，6和10整除的数的个数

属性1：能被4整除　　属性2：能被6整除　　属性3：能被10整除

$$100-\left\lfloor\frac{100}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{6}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{10}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{lcm(4,6)}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{lcm(4,10)}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{lcm(6,10)}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{lcm(4,6,10)}\right\rfloor$$

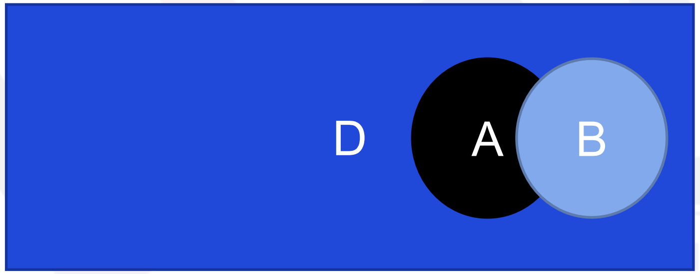
补集

对于全集U中的集合的补集,可以通过容斥原理计算



集合的补：$\bar{A} = S - A$

集合U中,集合A B的交呢?



如何求解 $|\cap_{i=1}^{n} S_i|$ ，即同时满足性质 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的元素个数。

令集合 $\bar{S}_i$ 表示集合 S_i 关于全集 U 的补集，即 $\bar{S}_i$ 为不满足性质 P_i 的元素集合。考虑到求解满足性质 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的元素个数，进一步补集转换。求不满足至少一个性质的元素数量。

不满足至少一个性质的元素数量为：$|\cup_{i=1}^{n} \bar{S}_i|$，计算方式同样使用容斥原理计算。

那么，可以得到：$|\cap_{i=1}^{n} S_i| = |U| - |\cup_{i=1}^{n} \bar{S}_i|$。

我们可以利用容斥原理，将**求解并集元素个数和求解交集元素个数的两个问题进行相互转换**。

不定方程非负整数解计数(有限制)

问题： 对于不定方程 $x_1+x_2+x_3+...+x_n=m$，给定 n 个限制 $x_i \le b_i$，求非负整数解的数量。

$x_1+x_2+x_3=5$, 有限制条件 $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 3$, $0 \le x_3 \le 3$ 求方程的整数解的个数

基于容斥分析问题:

1 全集U : 不定方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ (也就是 $x_1+x_2+x_3=5$)的非负整数解
2 元素:变量xi
3 属性: xi<bi的条件
4 目标:所有变量满足对应属性时集合的大小 $|\cap_{i=1}^{n} S_i| = |U| - |\cap_{i}^{n} \overline{S_i}|$

组合数

C_{m+n+1}^{m-1}

容斥原理展开

容斥的属性?
补集!
$x_1>2 \quad x_2>3 \quad x_3>3$

不定方程非负整数解计数(无限制)

问题一：将 n 个相同小球，放入 $m(n \geq m)$ 个不同盒子，盒子不为空的方案数。

使用插板法，在 n 个相同小球的 $n-1$ 和空隙中，插入 $m-1$ 块板子，分成 m 堆，依次放入到 m 个盒子中，方案数为：C_{n-1}^{m-1} 。

C_{n-1}^{m-1} 也是不定方程 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m=n$的正整数解的数量。

问题一：将 n 个相同小球，放入 $m(n \geq m)$ 个不同盒子，盒子可以为空的方案数。

对于每个盒子，我们都给它一个球，那么就和上一个问题一样了，可以看做有 $n+m$ 个小球，然后我们在排列完之后在每一组都删去一个小球，这样就有空盒的情况了，于是方案数为 C_{n+m-1}^{m-1} 。

对于没有限制的情况，不定方程 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=m$ ，非负整数解的数量为 C_{m+n-1}^{n-1} 。

不定方程非负整数解计数(有限制)

抽象容斥模型:

全集 U：不定方程 $x_1+x_2+x_3+...+x_n=m$ 的所有非负整数解。

性质 P_i：表示 $x_i \le b_i$ 。

设满足性质 P_i 的所有解构成集合 S_i ，题目求 $|\cap_{i=1}^{n} S_i|$ 。

不定方程非负整数解计数(有限制)

可知：$|\cap_{i=1}^{n} S_i| = |U| - |\cup_{i=1}^{n} \bar{S}_i|$，$\bar{S}_i$ 表示不满足性质 P_i 的解的数量，即 $x_i \geq b_i + 1$ 的解的数量。

$|U|$ 可以直接使用组合数求解。

$|\cup_{i=1}^{n} \bar{S}_i|$ 使用容斥原理展开，就变成若干交集运算了。

不定方程非负整数解计数

对于展开式子中的交集运算，设有 k 个集合在进行交集运算，满足 $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$，求解 $|\cap_{t=1}^{k} \bar{S_{i_t}}|$。

相当于有 k 个限制关系，$x_{i_t} \ge b_{i_t} + 1, t \in [1,k]$，即在不定方程中，有部分元素需要满足下界限制。

在不定方程右侧减去 $m - \sum_{t=1}^{k}(b_{i_t} + 1)$，那么此时就不再有限制了，可以直接使用组合数求解不定方程的解的数目。

只需要枚举 $\{\bar{S_1}, \bar{S_2}, \ldots, \bar{S_n}\}$ 的子集，即进行交集运算的集合，使用容斥原理进行计算。

枚举子集时，可以直接用二进制的方式进行枚举，枚举 $1 \sim ((1 << n) - 1)$，每一位二进制表示当前集合是否被选。

例1:[HNOI2008]硬币购物

【问题描述】

硬币购物一共有 4 种硬币。面值分别为 c_1, c_2, c_3, c_4 。

某人去商店买东西，去了 n 次，对于每次购买，他带了 d_i 枚 c_i 种硬币，想购买 s 的价值的东西。请问每次有多少种付款方法。

【输入格式】

第一行为五个整数， c_1, c_2, c_3, c_4, n 。

接下来 n 行，每行表示一次购买，包含五个整数 d_1, d_2, d_3, d_4, s 。

【输出格式】

对于每次购买，输出一行一个整数代表答案。

【数据范围】

$1 \leq c_i, d_i. s \leq 10^5, 1 \leq n \leq 1000$

例1:[HNOI2008]硬币购物

问题分析:

每一次，可以看做是多重背包。即使最优情况，时间复杂度为 $O(4ns)$。

每一次购买满足不定方程：$x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + x_3 \cdot c_3 + x_4 \cdot c_4 = s$，且满足 $x_i \le d_i, i \in [1,4]$。

题目转换为求解不定方程解的数量，使用容斥进行求解。

例1:[HNOI2008]硬币购物

问题分析:

容斥模型:

全集 U：不定方程 $x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + x_3 \cdot c_3 + x_4 \cdot c_4 = s$ 的所有非负整数解。

性质 P_i：表示 $x_i \leq d_i$ 。

设 S_i 表示满足 $x_i \leq d_i$ 的解数量，$\bar{S}_i$ 表示满足 $x_i \geq d_i + 1$ 的解数量，解的数量为 $\left|\cap_{i=1}^{4} S_i\right|$ 。

例1:[HNOI2008]硬币购物

问题分析:

$|\cap_{i=1}^4 S_i| = |U| - |\cup_{i=1}^4 \bar{S}_i|$

$|U|$ 可以通过完全背包预处理出 4 种硬币组成所有面值 s 的方案数。

$f[m]$ 表示 4 种硬币组成面值 m 的方案数。

对于每一次询问，求解 $|\cup_{i=1}^4 \bar{S}_i|$。

枚举所有子集，使用容斥原理进行计算。先用 $s - \sum((d+1)\cdot c)$ ，剩下的硬币数量就没有限制了，设 $t = s - \sum((d+1)\cdot c)$，则用 4 种硬币组成面值 t ，且没有限制的方案数为 $f[t]$ 。

时间复杂度为 $O(4s+16n)$ 。

例1:[HNOI2008]硬币购物

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int S=100010;
int c[5],d[5],n,s;
long long f[S];
main()
{
  cin>>c[1]>>c[2]>>c[3]>>c[4]>>n;
  f[0]=1;
  for(int i=1;i<=4;i++)   //完全背包
    for(int j=1;j<S;j++)
      if(j>=c[i]) f[j]+=f[j-c[i]];
  while(n--)
  {
    cin>>d[1]>>d[2]>>d[3]>>d[4]>>s;
    long long ans=f[s];
    for(int i=1;i<=15;i++)    //二进制枚举四个硬币的所有情况
    {
      int cnt=0,m=s;
      for(int k=0;k<4;k++)
        if((i>>k)&1) m-=(d[k+1]+1)*c[k+1],cnt++;
      if(m>=0)
      {
        if(cnt%2) ans-=f[m];
        else ans+=f[m];
      }
    }
    cout<<ans<<endl;
  }
  return 0;
}
```

多少个排列满足第i位不是i?　$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$

回顾:
记D_i表示i个元素的错排列数量
第一步，考虑第n个元素，把它放在某一个位置，比如位置k，一共有n-1种放法；
第二步，考虑第k个元素，这时有两种情况：
（1）把它放到位置n，那么对于除n以外的n-1个元素，由于第k个元素放到了位置n，所以剩下n-2个元素错排即可，有D_{n-2}种放法；
（2）第k个元素不放到位置n，此时k有一个不能放的位置n，这时对于这n-1个元素的错排，有D_{n-1}种放法。

容斥做法?

容斥模型：

全集 U： $1 \sim n$ 的所有排列。

性质 P_i：表示 $a_i \neq i$ 。

设 S_i 表示满足 P_i 性质的排列集合， $\bar{S}_i$ 表示不满足 P_i 性质，即 $a_i = i$ 的排列集合。

错位排列计数

题目求解 $\left|\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right|$，设 $D_n = \left|\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right|$

$D_n = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} \bar{S}_i\right|$

$|U| = n!$。

使用容斥原理，展开 $\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right|$，若有 k 个集合进行交集运算 $\left|\bigcap_{t=1}^{k} S_k\right|$，因为已经有 k 个位置满足 $a_i = i$，则方案数为 $(n-k)!$。

错位排列计数

$$D_n = n! - (\sum_{i=1}^{n} |\bar{S_i}| - \sum_{1 \le i < j \le n} |\bar{S_i} \cap \bar{S_j}| + \ldots + (-1)^{n+1} |\bar{S_1} \cap \bar{S_2} \cap \ldots \cap \bar{S_n}|)$$

$$D_n = n! - (\sum_{i=1}^{n} (n-1)! - \sum_{1 \le i < j \le n} (n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1} 0)$$

$$D_n = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)!$$

$$D_n = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!}$$

$$D_n = n! \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

例6 禁位排列

$n \times n$的棋盘上摆放n个车，互相不能攻击，方案数为$n!$。

如果有不能摆放的位置呢？

求出“至少有”$1 \sim n$个车处于禁位上的方案数，容斥原理。

（将“某个禁位上有车”看做一种属性）