

GPS 定位算法研究*

常 青 高 晖 柳重堪 张其善

文 摘 给出卫星信号接收时刻 GPS 时的计算方法, 然后在 Gauss-Newton 法的基础上得到一个正常情况下的完整的 GPS 迭代定位算法。最后讨论只有三颗可见卫星时的处理方法。

主题词 全球定位系统 导航 矩阵 算法

1 引 言

GPS 系统(Global Positioning System)是美国国防部研制的第二代卫星导航与定位系统。它能为全球的用户提供全天候、连续、实时的高精度位置、速度和时间信息, 因此在军事、民事方面都具有重要的意义和应用价值。目前, GPS 已在飞机、水面船只和陆地车辆的导航定位系统中得到了广泛的应用。就 GPS 定位的观测量而言, 有伪距和载波相位之分。就 GPS 定位的定位方式而言, 有单点定位和差分定位之分。无论采用何种观测量和何种定位方式, 其定位模型在求解上都归结为非线性最小二乘问题, 需要迭代求解。本文首先计算了由伪距单点定位模型得到的非线性最小二乘问题的目标函数的偏导数和 Hessian 矩阵, 发现不仅目标函数的偏导数的计算非常简单, 而且目标函数的 Hessian 矩阵中的二阶导数部分很小, 可以忽略。这表明把 Gauss-Newton 方法用于 GPS 定位模型是非常有效的^[1]。然后给出卫星信号接收时刻 GPS 时的计算方法, 并在此基础上得到了一个完整的 GPS 迭代定位算法。该算法在每一步迭代中通过对信号传播时间、信号发射时刻、卫星钟差及卫星坐标的更新, 来完成导航解的更新。最后讨论只有三颗可见卫星时的处理方法。

2 伪距单点定位的数学模型

某一时刻, 接收机对卫星 j 的伪距观测方程为

$$\tilde{\rho}^j = \rho^j + c(dt - d_t^j) + d_{\text{ion}}^j + d_{\text{trop}}^j + v \quad (1)$$

其中 $\tilde{\rho}^j$ 为接收机对卫星 j 的观测伪距, $\rho^j = \sqrt{(x^j - x)^2 + (y^j - y)^2 + (z^j - z)^2}$ 为接收机与卫星 j 之间的几何距离, (x, y, z) 和 (x^j, y^j, z^j) 分别为接收机和卫星 j 在 ECEF 坐标系中的坐标, dt 和 d_t^j 分别为接收机和卫星 j 的钟偏差, d_{ion}^j 和 d_{trop}^j 分别为电离层和对流层时延引起的距离偏差, c 为光速, v 为观测噪声, $j = 1, 2, \dots, n$, 而 n 为同步观测的卫星数, $n \geq 4$ 。在式(1)中, d_t^j , d_{ion}^j 和 d_{trop}^j 可采用通用公式计算。将上述三项移至式(1)的左边, 包含未知参数 x, y, z, dt 的项留在式

(1) 的右边, 并将左边记为 $\bar{\rho}$, cdt 记为 b , 则式(1)可改写为

$$\bar{\rho} = \rho^j + b + v \quad (2)$$

式(2)便是伪距单点定位的数学模型。

3 定位算法

记

$$\begin{aligned} X &= [x, y, z, b]^T \\ f_i(X) &= \rho^i + b - \bar{\rho} \\ f(X) &= [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T \end{aligned}$$

于是求解模型(2)归结为求解如下的非线性最小二乘问题。

$$\min \{ [f(X)]^T f(X) \} \quad (3)$$

可采用 Gauss-Newton 法求解式(3), 函数 $f_j(X)$ 的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_x f_j(X) &= \left[\frac{\partial f_j}{\partial x}, \frac{\partial f_j}{\partial y}, \frac{\partial f_j}{\partial z}, \frac{\partial f_j}{\partial b} \right]^T \\ &= \left[-\frac{x^j - x}{\rho^j}, -\frac{y^j - y}{\rho^j}, -\frac{z^j - z}{\rho^j}, 1 \right]^T \\ &= [-l_j, -m_j, -n_j, 1]^T \end{aligned} \quad (4)$$

其中, l_j, m_j, n_j 为点 (x, y, z) 到点 (x^j, y^j, z^j) 的方向余弦。于是式(3)中目标函数的导数 $g(X)$ 为

$$g(X) = 2A(X)f(X) \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} A(X) &= [\nabla_x f_1(X), \nabla_x f_2(X), \dots, \nabla_x f_n(X)] \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 & \dots & -l_n \\ -m_1 & -m_2 & \dots & -m_n \\ -n_1 & -n_2 & \dots & -n_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

由于 $A(X)$ 仅由接收机到卫星的方向余弦和数 1 组成, 因此, 当把 Gauss-Newton 方法用于 GPS 定位模型时, 目标函数偏导数的计算是非常简单的。目标函数的 Hessian 矩阵 $G(X)$ 为

$$G(X) = 2A(X)[A(X)]^T + 2\sum_{j=1}^n f_j(X) \nabla_{xx}^2 f_j(X) \quad (7)$$

矩阵 $\nabla_{xx}^2 f_j(X)$ 的每一个元素都含有 $\frac{1}{\rho^j}$ 。以位于第一行第一列位置的元素为例,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} &= \frac{(\rho^j)^2 - (x^j - x)^2}{(\rho^j)^3} \\ &= \frac{1}{\rho^j} + \frac{(x^j - x)^2}{(\rho^j)^2} \cdot \frac{1}{\rho^j} \end{aligned} \quad (8)$$

其余元素也都具有类似的形式。由于 ρ^j 很大, 达到两万公里, 故矩阵 $\nabla_{xx}^2 f_j(X)$ 的每一个元素都很小。由式(7)和式(8), 并考虑到 $f_j(X)$ 与 ρ^j 之比是非常小的, 便可以看出式(7)右边第二项的每一个元数都很小, 将其忽略掉, 得到

$$G(X) \approx T(X) = 2A(X)[A(X)]^T \quad (9)$$

式(9)说明,把 Gauss-Newton 方法应用于 GPS 定位模型效果是好的。设 X_k 为 Gauss-Newton 法第 k 步迭代的结果,则第 $k+1$ 步的迭代公式为

$$X_{k+1} = X_k + s_k \quad (10)$$

其中, s_k 为在点 X_k 处的 Gauss-Newton 方向,它满足

$$T(X_k)s = -g(X_k) \quad (11)$$

假设 $A(X_k)$ 为行满秩矩阵(这在实际中通常是可以满足的),则 $T(X_k)$ 为正定对称矩阵,使用 Cholesky 分解算法,便可获得 s_k 。式(10)、(11)便是求解式(3)的迭代公式。它从一个给定的初始值 X_0 开始,当满足

$$X_{k+1} - X_k < \delta \quad (12)$$

时结束。其中 \cdot 为欧几里德距离, δ 为事先给定的解的精度。当算法启动以后,迭代的初始值 X_0 可选为上一时刻迭代的结果。

由于卫星钟差和卫星坐标的计算都要涉及到卫星信号接收时刻 GPS 时的计算,下面给出卫星信号接收时刻 GPS 时的计算方法。以 N 表示由接收机产生的时间标准 T_s 的计数,则信号接收时刻 GPS 时的计算可分为以下三个步骤:

1) 将软件开始运行后从接收机获得的 Gregorian 时间(即目前通用的阳历)换算为 GPS 星期和秒,并利用此时的 T_s 计数 N 对 $N=0$ 时的 GPS 星期数和秒数进行估计。以 y, m, d, h, m_m, s_s 代表软件开始运行后从接收机获得的 Gregorian 时间的年,月,日,时,分,秒,则从 1980 年 1 月 6 日零时至该时刻的年数为 $(y-1980)$ 。若 $(y-1980)$ 能整除 4, 且 $m \neq 2$, 则闰日数 l_d 为

$$l_d = \frac{(y-1980)}{4}$$

否则闰日数为

$$l_d = \left[\frac{(y-1980)}{4} \right] + 1$$

其中 $[\cdot]$ 表示取整数部分。于是自 1980 年 1 月 6 日零时以来的总天数 D 为

$$D = (y-1980) \times 365 + d(m-1) + d + l_d - 6$$

其中 $d(m-1)$ 表示忽略闰年后前 $(m-1)$ 个月的天数。由上式可以计算出 GPS 星期数 G_w 和秒数 G_s :

$$G_w = \left[\frac{D}{7} \right], \quad G_s = (D \% 7) \times 86400 + h_h \times 3600 + m_m \times 60 + s_s$$

其中 $D \% 7$ 表示 D 除 7 后的余数。上述算法是忽略了 UTC(世界协调时)跳秒后的一种简化算法。以 z_w, z_s 表示 $N=0$ 时的 GPS 星期数和秒数,于是 z_w, z_s 的估计算法为:

$$z_w = G_w, \quad z_s = G_s - 3600 \times T_z - N \times T_s$$

其中 T_z 表示时区。它指明了当地时间比 UTC 时间提前的小时数。若 $z_s < 0$, 令

$$z_w = z_w - 1, \quad z_s = z_s + 604800$$

若 $z_s \geq 604800$, 令

$$z_w = z_w + 1, \quad z_s = z_s - 604800$$

z_w, z_s 的计算在软件开始运行时进行,利用它们可以求得任一信号接收时刻的 GPS 星期数和秒数。

2) 利用信号接收时刻的 T_s 计数 N 计算信号接收时刻的 GPS 星期数 g_w 和秒数 g_s 。算法为: 令

$$g_w = z_w, \quad g_s = z_s + N \times T_s$$

若 $g_s < 0$, 令

$$g_w = g_w - 1, \quad g_s = g_s + 604\,800$$

若 $g_s \geq 604\,800$, 令

$$g_w = g_w + 1, \quad g_s = g_s - 604\,800$$

3) 对上一步的结果进行修正。2) 中求得的 g_w 和 g_s 实际上是接收机时间, 它与 GPS 时的关系为

$$\text{接收机时间} - \text{接收机钟偏差} = \text{GPS 时}$$

设估计的当前信号接收时刻的接收机钟偏差的星期数和秒数为 R_w 和 R_s , 接收机钟差变率为 R_r , 上一信号接收时刻对应的 T_s 计数为 N , 于是 g_w 、 g_s 的修正算法为: 令

$$g_w = g_w - R_w, \quad g_s = g_s - R_s - dT \cdot R_r$$

其中

$$dT = (N - N_0) T_s (1 - R_r)$$

若 $g_s < 0$, 令

$$g_w = g_w - 1, \quad g_s = g_s + 604\,800$$

若 $g_s \geq 604\,800$, 令

$$g_w = g_w + 1, \quad g_s = g_s - 604\,800$$

综上所述, 求 GPS 定位解的迭代步骤为:

- 1) 获得全部可见卫星的星历信息及 ρ^i 、 d_{ion}^i 、 d_{trop}^i 、 g_{sc}^i
- 2) 令 $k=0$, 卫星信号传播时间 Δt^i 的初始值 $\Delta t_0^i=0$ 。选取初始值 X_0 , 允许误差 $\delta > 0$ 。
- 3) 按式

$$g_k^i = g_s^i - \Delta t_k^i$$

计算卫星信号发射时刻的 GPS 时的秒数 g_k^i 。计算时, 若 $g_k^i < 0$, 令

$$g_k^i = g_k^i + 604\,800$$

然后以 g_k^i 计算卫星信号发射时刻的卫星坐标 q_k^i (卫星坐标 q_k^i 的计算见文献[4]~[6])。考虑到 ECEF 坐标系的旋转, 按式

$$p_k^i = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q_k^i$$

对 q_k^i 进行旋转。其中 p_k^i 为旋转后的卫星坐标, $\Theta = -\Delta t_k \dot{\Omega}$, $\dot{\Omega}$ 为 WGS-84 地球自转角速度。

4) 以 g_k^i 代入式

$$d t^i = a_{f_0}^i + a_{f_1}^i (t - t_{oc}^i) + a_{f_2}^i (t - t_{oc}^i)^2 + \delta t^i$$

计算卫星钟差 $d t^i$ 。其中 t_{oc}^i 为时钟数据参考时间, $a_{f_0}^i$, $a_{f_1}^i$, $a_{f_2}^i$ 是导航电文子帧 1 中给出的多项式系数, δt^i 为相对论校正项, 可以根据导航电文第 2、3 子帧中提供的卫星轨道参数计算。假设用户为单频 L_1 用户, 则上式应进一步修正为

$$d t^i = a_{f_0}^i + a_{f_1}^i (t - t_{oc}^i) + a_{f_2}^i (t - t_{oc}^i)^2 + \delta t^i - t_{GD}^i$$

其中 t_{oc}^j 为时延差改正, 在导航电文子帧 1 中提供给用户。计算时, 若 $g_k^j - t_{oc}^j > 302\,400$, 令

$$g_k^j - t_{oc}^j = (g_k^j - t_{oc}^j) - 604\,800$$

若 $g_k^j - t_{oc}^j < -302\,400$, 令

$$g_k^j - t_{oc}^j = (g_k^j - t_{oc}^j) + 604\,800$$

5) 以 X_k, p_k^j 计算 ρ_k^j 和 $A(X_k)$ ($\rho_k^j = [X_k]^3 - p_k^j$, $A(X_k)$ 按式(6)计算。其中 $[\cdot]^3$ 表示由向量的前三个分量组成的向量)。然后以 $\rho_k^j, cd t_k^j$ 按式

$$f_j(X_k) = \rho_k^j + b_k - \bar{\rho} = \rho_k^j + b_k - cd t_k^j + d_{ion}^j + d_{trop}^j - \bar{\rho}$$

计算 $f(X_k)$ 。

6) 按式(10)、(11)计算 X_{k+1} 。

7) 按式

$$\Delta t_{k+1}^j = \frac{[X_{k+1}]^3 - p_k^j}{c}$$

计算更新的信号传播时间 Δt_{k+1}^j 。

8) 判断是否 $|X_{k+1} - X_k| < \delta$ 。若是, 则停止迭代, X_{k+1} 即为所求。若不是, 令 $k = k + 1$, 返回步骤 3)。

如果某一时刻只有三颗可见卫星, 那么步骤 5) 中的 $A(X_k)$ 成为

$$A(X_k) = \begin{bmatrix} -l_1^k & -l_2^k & -l_3^k \\ -m_1^k & -m_2^k & -m_3^k \\ -n_1^k & -n_2^k & -n_3^k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $T(X_k)$ 为奇异矩阵。此时上面的迭代算法不能进行。解决的办法是: 假设有一颗卫星在地球中心, 那么由接收机到此卫星的方向余弦为

$$l_4^k = \frac{-x_k}{\rho_k^4}, \quad m_4^k = \frac{-y_k}{\rho_k^4}, \quad n_4^k = \frac{-z_k}{\rho_k^4}$$

其中, $\rho_k^4 = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$ 为接收机到此卫星的距离。把列向量 $[-l_4^k, -m_4^k, -n_4^k, 0]^T$ 加入到矩阵 $A(X_k)$ 中, 于是 $A(X_k)$ 成为

$$A(X_k) = \begin{bmatrix} -l_1^k & -l_2^k & -l_3^k & -l_4^k \\ -m_1^k & -m_2^k & -m_3^k & -m_4^k \\ -n_1^k & -n_2^k & -n_3^k & -n_4^k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

若 $A(X_k)[A(X_k)]^T$ 仍为奇异矩阵, 那么无法得到导航解。若 $A(X_k)[A(X_k)]^T$ 非奇异, 则把步骤 5) 中的 $f(X_k)$ 取为

$$f(X_k) = [f_1(X_k), f_2(X_k), f_3(X_k), 0]^T$$

算法便可以进行了。

4 结束语

前面从理论上对 GPS 定位算法进行了更深入的研究, 这对于我们更深入的理解 GPS 定

位的实质是有意义的。由于伪距差分定位的数学模型在形式上与伪距单点定位的数学模型是完全一样的,只是方程的常数项有所不同,因此,所提出的算法的基本原理对伪距差分定位也是适用的。另外,由于当初值离真值较近时,Gauss-Newton 算法的收敛速度很快,因此在实际使用时,可让算法迭代 2~3 次便停止,这样可使算法简化。

参 考 文 献

- 1 Fletcher R. Practical Methods of Optimization New York: Wiley, 1987.
- 2 Dailey D J, Bell B M. A Method for GPS Positioning IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System. AES- 32(3), 1996, 1148~ 1152
- 3 Noe P S, Myers K A. A Position Fixing Algorithm for the Low - Cost Receiver IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System. AES- 12(2), 1976, 295~ 297.
- 4 刘基余等. 全球定位系统原理及其应用 测绘出版社 1993
- 5 言 中, 丁子明. 卫星无线电导航 国防工业出版社 1989
- 6 周忠谟, 易军杰. GPS 卫星测量原理与应用 测绘出版社 1992

The Study of the Algorithm for GPS Positioning

Chang Qing Gao Hui Liu Zhongkan Zhang Q ishan

Abstract In this paper, the method for calculating GPS time at which the satellite signal is received is presented, and a complete iteration algorithm for GPS positioning under normal condition is obtained based on Gauss-Newton method. Finally, the solution under the condition that there are only three visible satellites is discussed.

Subject terms GPS Navigation Matrix Algorithm

[作者简介]

常 青 博士生 北京航空航天大学电子工程系通信与信息专业 100083

高 晖 博士生 北京航空航天大学电子工程系通信与信息专业 100083

柳重堪 博士生导师 教授 北京航空航天大学电子工程系通信与信息专业 100083

张其善 博士生导师 教授 北京航空航天大学电子工程系通信与信息专业 100083