2017年秋季学期泛函分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2018.01.09 08:30-10:30 主讲教师: 黄文

1. 证明Banach不动点定理(压缩映像原理).

2. 设M是X的子集, 若对任意$f \in X^*$, 成立$f(M)$有界, 求证M有界.

3. 设X是赋范线性空间, $\{f_n\}, f \subseteq X^*$, 求证: $f_n \rightharpoonup^* f$, 当且仅当(1)$\|f_n\|$有界; (2)对任意X中的稠密子集M, $\forall x \in M$, 都有$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

4. 设$K(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i(x+y)n}$, $\sum_n |a_n|^2 < \infty$. 求证:

(1)如下T是$L^2[0,1]$上的紧算子:

$$Tu(x) := \int_0^1 K(x,t)u(t)dt.$$

(2)计算T的谱.

5. 构造$f \in (l^\infty)^*$, 使得对任意$a \in l^\infty$, 都有

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) \le f(a) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}).$$

6. 设X是Banach空间, Y是有限维空间, $f : X \to Y$是线性算子, 求证: f连续当且仅当$N(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$是闭集.

7. 设A是Hilbert空间H上的紧算子, 若A和任意紧算子B交换, 求证:$A = \lambda I$.