

Evans PDE 第8章 习题解答 本节假设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界并保 $\partial U \in C^\infty$
任何函数均为 C^∞ (除特殊说明)

[8.1] (1) 求证: $u_k(x) = \sin(kx) \rightarrow 0$ in $L^2(0,1)$.

(2) 固定 $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$. 定义 $u_k(x) = \begin{cases} a & \text{若 } \frac{j}{k} \leq x < \frac{j+\lambda}{k} \\ b & \text{若 } \frac{j+\lambda}{k} \leq x < \frac{j+1}{k} \end{cases}$ $j=0, 1, \dots, k-1$

求证: $u_k \rightarrow \lambda a + (1-\lambda)b$ in $L^2(0,1)$

Proof: (1) 任取 $\varphi \in L^2(0,1)$, 则 $\varphi \in L^1(0,1)$.

$$\text{则 } \langle u_k, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) \sin kx \, dx$$

由 Riemann-Lebesgue 引理知, $\langle u_k, \varphi \rangle \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$

(2). 回顾一下结果.

设 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$, 且周期为 T .

$$\text{令: } u_k(x) = f(kx) \chi_{[0,1]}(x).$$

$$\text{则: } u_k \rightharpoonup \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

(见 Brezis Exercise 4.18). $\quad \text{in } L^p(0,1).$

借此, 令 $f(x) = \begin{cases} a & \text{in } [j, j+\lambda) \\ b & \text{in } [j+\lambda, j+1) \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$

$$\text{则: } u_k(x) = \begin{cases} a & \text{in } [\frac{j}{k}, \frac{j+\lambda}{k}) \\ b & \text{in } [\frac{j+\lambda}{k}, \frac{j+1}{k}) \end{cases}$$

$$u_k \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p(0,1).$$

$$\text{则: } u_k \text{ 在 } L^2 \text{ 中的弱极限为: } \int_0^1 f(x) \, dx \\ = \lambda a + (1-\lambda)b.$$

□

[8.2] 试找出 $L = L(p, z, x)$, 使得 $-\Delta u + \nabla \phi \cdot \nabla u = f$ in U
 是对应于能量泛函 $I[w] := \int_U L(Dw, w, x) dx$ 的 Euler-Lagrange
 方程 (提示: 含有指数项)

解: $-\Delta u$ 项是由于 $\frac{1}{2} |\nabla u|^2$ 得来.

能是泛函中的

f 项是来自于 $f(x) \cdot z$ 对 z 求导.

出现 $\nabla u \cdot \nabla u$, 但 Δu 前无 ϕ , 且两项异号. 可以判断
 是有类似于 $e^{-\varphi(x)}$ 的因子乘在前面:

验证: $L(p, z, x) = \frac{1}{2} e^{-\varphi(x)} \left(\frac{1}{2} |p|^2 - f(x) z \right)$.

~~$I[w]$~~ 则 Euler-Lagrange 方程为

$I[w] = \int_U L(Dw, w, x) dx$ 对应的

$$-\sum_{i=1}^n \left(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x) \right)_{x_i} + \partial_z L(\nabla u, u, x) = 0.$$

$$\Rightarrow (-\Delta u + \nabla \phi \cdot \nabla u - f(x)) e^{-\varphi(x)} = 0$$

$$\Rightarrow -\Delta u + \nabla \phi \cdot \nabla u = f \quad \text{in } U. \quad \checkmark$$

□

[8.3] 定义热方程的“椭圆正则化”为如下方程：

$$u_t - \Delta u - \varepsilon u_{tt} = 0 \quad \text{in } U_T \quad \dots (*)$$

其中 $\varepsilon > 0$. $U_T = U \times (0, T]$.

求证：(*) 是某个能量泛函 $I_\varepsilon[w] := \iint_{U_T} L_\varepsilon(\nabla w, w_t, w, x, t) dx dt$
对应的 Euler-Lagrange 方程.

证明：此处 t 应视作第 $n+1$ 个变量，即与 x 地位相等。

如果直接构造 但 $L(p, z, x)$ 中的 P_{n+1} 项应带有系数
(与 ε 有关).

$$\text{若直接构造. } L(p, z, x) = \frac{1}{2} (p_1^2 + \dots + p_n^2 + \varepsilon P_{n+1}^2) \cdot e^{-t}.$$

则在 $\partial_{P_{n+1}} L(\nabla u, u_t, u, x, t)$ 中 u_t 与 u_{tt} 的系数

均是 ε , 与原方程不符. 所以, 在产生 u_t 项时, 应

同时产生一个 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的因子 (因为是形如 $e^{-t} \cdot u_t$ 的项对 t 求导)

考虑将指项换成 $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$. 这样:

$$\begin{aligned} & \partial_t (L_{P_{n+1}}(\nabla u, u_t, u, x, t)) \\ &= \partial_t (\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \cdot u_t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left(u_{tt} - \frac{1}{\varepsilon} u_t \right) \\ &= e^{-\frac{t}{\varepsilon}} (\varepsilon u_{tt} - u_t). \end{aligned}$$

故 $L(p, z, x) = \cancel{\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} (p_1^2 + \dots + p_n^2 + \varepsilon P_{n+1}^2)}$

符合要求.

$$I_\varepsilon[w] := \iint_{U_T} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} (|\nabla_x w|^2 + \varepsilon |w_t|^2) dx dt$$

□

[8.4] 设 $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 函数.

(1) 求证: $L(p, z, x) = \eta(z) \det P$ ($P \in M^{n \times n}, z \in \mathbb{R}^n$)
是 Null Lagrangian.

(2) 若 $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^2 的, 则 $\int_U \eta(u) \det \nabla u \, dx$
仅依赖于 $u|_{\partial U}$ 的取值.

证明: (1) 直接验证定义: 对 $1 \leq k \leq n$, 有

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^n (L_{p_j^k}(P, z, x))_{x_j} + L_{z^k}(P, z, x) \\ &= - \sum_{j=1}^n (\eta \cdot (P^*)_j^k)_{x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial z^k} \cdot \det P. \quad P^* \text{ 为 } P \text{ 的伴随矩阵.} \\ &= - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial z^l} \cdot \frac{\partial z^l}{\partial x^j} (P^*)_j^k + \eta \cdot \partial_{x_j} (P^*)_j^k \right] \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial z^k} \det P. \end{aligned}$$

$\forall u \in C^\infty(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$. 取 $z = u$. $P = [\nabla u] = \left[\frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right]_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \text{则上式} &= - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \cancel{[\nabla u^*]^k_j} \\ &\quad - \eta \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} ([\nabla u^*]^k_j) + \frac{\partial \eta}{\partial u^k} \det [\nabla u] \\ &= - \underbrace{\sum_{l=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial u^l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^l}{\partial x_j} [\nabla u^*]^k_j}_{\text{利用 } AA^* = |A|I.} + 0 + \frac{\partial \eta}{\partial u^k} \det [\nabla u] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{- \sum_{l=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial u^l} \delta_k^l}_{\text{利用 } \frac{\partial \eta}{\partial u^k}} \det [\nabla u] + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial u^k}}_{\text{利用 } \frac{\partial \eta}{\partial u^k}} \det [\nabla u] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) 是 Thm 8.1.1 的直接推论.

□

[8.5] 固定 $x_0 \in \bar{U}(\partial U)$, 并选取一个函数 η 满足: $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d^2 = 1$

$$\text{令 } \deg(\vec{u}, x_0) = \int_U \eta(\vec{u}) \det[\nabla \vec{u}] \, dx.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_p, \eta \subseteq B(x_0, r). \\ \text{充分小: } B(x_0, r) \cap \bar{U}(\partial U) = \emptyset \end{array} \right.$$

为 u 关于 x_0 的度. 求证: $\deg(\vec{u}, x_0)$ 是整数.

证明: 作变量替换: $\vec{y} = \vec{u}(x)$.

$$\text{则如上积分化为 } (\ast u^{-1}\{x_0\}) \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) dy.$$

$$\text{令 } y_0 = u(x_0) = \cancel{\ast u} \cancel{\ast u^{-1}\{x_0\}}$$

① 先考虑 $[\nabla u(x)]$ 对所有 $x \in u^{-1}\{x_0\}$ 都非奇异的情况.

此时, 只要 r 充分小, $u^{-1}(B(x_0, r))$ 彼此不交.

从而作变量替换 $y = u(x)$.

$$\int_U \eta(\vec{u}) \det[\nabla \vec{u}] = \underbrace{\ast(u^{-1}\{x_0\})}_{\text{由 } w \neq 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) dy \right) \in \mathbb{Z}.$$

② Locality: 由 $\det[\nabla \vec{u}]$ 连续, 故只要 $\det[\nabla \vec{u}] \equiv 0$.
要使 $\det[\nabla \vec{u}]$ 在 x_0 不稠密

不存在球 $B \subseteq$

若 $\det[\nabla u](x_0) \neq 0$, 则 $\exists r$ 充分小, 使 $\det[\nabla u]$ 在 $B(x_0, r)$ 中没有

u 的 critical value

情况变回 ①.

若 $\det[\nabla u](x_0) = 0$

x_0 是 critical value, $y_0 \in$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{充分小}$

$|\det[\nabla u]| < \varepsilon$
in $u^{-1}(B(x_0, r))$

从而 $\deg(\vec{u}, x_0) = 0$

故 \deg 必是整数.

□

[8.6] 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是 $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $u \in C^\infty$

则 $\int_U \frac{\det D^2 u}{(\sqrt{1+|Du|^2})^3} dx$ 是 Σ 的 Gauss 曲率的积分.

求证：该表达式仅与 $Du|_{\partial U}$ 有关.

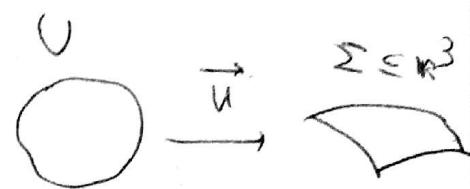
证明： 令 $\vec{v} = Du$.

$$\text{则如上积分} = \int_U \frac{\det D\vec{v}}{(1+|\vec{v}|^2)^{3/2}} dx$$

$$\text{令 } \eta(z) = \frac{1}{(1+|z|^2)^{3/2}}, \quad z \in \mathbb{R}^2 \quad \text{则上式} = \int_U \eta(\vec{v}) \frac{\det D\vec{v}}{\det D\vec{v}} dx$$

只需验证 $L(P, z, x) = \eta(z) \det P$ 是 null-Lagrangian.

便由 [8.4](2) 可得结论. 而这只要求 $\eta(z)$ 是 C^1 的即 $\bar{\eta}$,
See [8.4](1). 但这是显然的.



[8.7]: 设 $P \in M^{n \times n}$. 求证: $L(P) = \text{Tr}(P^2) - (\text{Tr} P)^2$ 是 null-Lagrangian. \square

证明. 写成分量

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P_{ik} P_{ki} - P_{ii} P_{kk}.$$

$\therefore 1 \leq i, k \leq n$.

$$\sum_{j=1}^n (L_{P_{jk}}(P))_{x_j} = 2 \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(P_{jk}) - 2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(P_{ii}).$$

$\forall u \in C^\infty(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$. 令 $P_{jk} = \partial_{x_k}(u^j)$. i.e. $P \neq u$ 时

$$\text{则上式} = 2 \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(\partial_{x_k}(u^j)) - 2 \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}(\partial_{x_i}(u^i)))$$

$= 0$ 符合 null-Lagrangian 的定义.

\square

[8.8]: 解释为何 §8.2 中的方法不适用于证明能量泛函

$$I[w] := \int_U \sqrt{1 + |\nabla w|^2} dx \quad \text{在 } \mathcal{Q} = \{w \in W^{1,q}(U) \mid w = g \text{ on } \partial U\} \text{ 上}$$

$\forall 1 \leq q < \infty$

极小化子的存在性

coercive estimate

证明: 注意到 §8.2 中的证明需要 "强制性估计"

$$I[w] \geq \gamma \|Dw\|_{L^q}^q - \gamma$$

而此处, 我们能得到的是 $I[w] \geq \|Dw\|_L + C$.

但 L' (or W') 不自反, 极小化子需序列的 W' 有界性 \Rightarrow 有弱极限
(§3.1)

[8.9] (方程组的第 2 部分) 设 $\vec{u}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 $I[\vec{u}] = \int_U L(\nabla \vec{u}, \vec{u}, x) dx$ 的一个极小化子.

$$(1) \text{ 未证: } \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial p_i^k \partial p_j^l} (\nabla u_i, u_j, x) \eta_k \eta_l \zeta_i \zeta_j \geq 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

(2). 举例: $L: M^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 非凸

$$\text{且 } \sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 L(p)}{\partial p_i^k \partial p_j^l} \eta_k \eta_l \zeta_i \zeta_j \geq 0 \quad \forall p \in M^{m \times n}, \eta \in \mathbb{R}^m, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

证明: (1). 由 u 是极小化子知, $\forall v \in C_c^\infty(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$

$$\frac{d^2}{dt^2} I[u + tv] \geq 0.$$

$$\Rightarrow \int_U L_{p_i^k p_j^l} D_i v^k D_j v^l + 2 L_{p_i^k u^l} v^l D_i v^k + L_{z^k z^l} v^k v^l \geq 0$$

特别地 (仿照课本), 令 $v(x) = \varepsilon p\left(\frac{x \cdot \zeta}{\varepsilon}\right) \eta \cdot \zeta(x)$.

$$\zeta \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m, \zeta \in C_c^\infty(U; \mathbb{R})$$

其中 $\zeta \in C_c^\infty(U)$, $p \neq \{8.1.3\}$ 中的 zig-zag 函数.

$$|p'| = 1, \text{ a.e.}$$

$$D_i v^k = p'\left(\frac{x \cdot \zeta}{\varepsilon}\right) \zeta_i \cdot \eta^k \zeta + O(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$\text{代入便有: } 0 \leq \int_U L_{P_i^k P_j^l} \xi_i \eta^k \xi_j \eta^l \zeta^2 dx \quad \forall \zeta \in C_c^\infty(U)$$

$$\therefore L_{P_i^k P_j^l} \xi_i \xi_j \eta^k \eta^l \geq 0.$$

$$(2) L(P) = \det P = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21} \quad (n=2 \text{ 时})$$

即可. 证毕

实际上 只需凸性条件对 2 个秩相差 ≤ 1 的方阵成立即可,
这称作 Legendre - Hadamard 条件.

$$[8.10] \text{ 用 §8.4.1 中的方法去证明 } \begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1} u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \quad \square$$

在 $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$ 时, $u \in H_0^1(U)$ 的存在性和唯一性
非零弱解

证明: 考虑能量泛函 $I[w] = \frac{1}{2} \int_U |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_U |w|^{q+1}$

在 $\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(U) \mid \|w\|_{L^{q+1}} = 1\}$ 上的极小化子.

. Coercivity: $\boxed{I[w]}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int_U |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{q+1} \cdot 1$.

直接 满足 强制性 条件.

假设 $\{u_m\}$ 是一个极小化序列. 则 $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}$ 有一致有界
由 Rellich - Kondrachov 定理: $u_m \rightarrow u \text{ in } H_0^1(\Omega)$
 $\Downarrow H_0^1 \hookrightarrow L^q$

不防失真即 $\xrightarrow{\text{弱收敛}} u_m \rightarrow u \text{ in } L^{q+1}(\Omega)$.

$$\therefore \|u\|_{L^{q+1}} = 1. \Rightarrow u \in \mathcal{A}.$$

$$\Rightarrow \boxed{I[u]} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I[u_m]$$

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] = \lim_{m \rightarrow \infty} I[u_m]$$

$\therefore u$ 也是极小化子.

显然(自己证明) 该极小化子即为 $\begin{cases} \Delta u = \lambda |u|^{q-1} u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ (for some $\lambda \in \mathbb{R}$)
的弱解:

$\lambda \neq 0$: 否则由极大值原理知 $u \equiv 0$, 但这与 $\|u\|_{L^{q+1}} = 1$ 矛盾.

$\therefore \tilde{u} = \lambda^{\frac{1}{q-1}} u$ 即为原方程的 H_0^1 弱解

□

[8.11] 设 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑, 且 $0 < a \leq \beta(z) \leq b$ ($z \in \mathbb{R}$).

$f \in L^2(U)$.

(1) 请通过 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u) = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的 H^1 弱解

(2) 未证弱解存在唯一性.

证明: (1). $\forall v \in H^1(U)$,

$$\left(\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial U} T v \cdot \beta(Tu) \, dS \right) = \int_U f v$$

$T: H^1(U) \rightarrow L^2(\partial U)$ 是 Sobolev 连算子.

为何? 取 $v \in C^\infty(\bar{U})$. 方程两边乘以 v .

$$\int_U -\Delta u \cdot v = \int_U f v.$$

$$\text{左边} \Rightarrow \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, dS$$

$$= \int_U \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial U} \beta(u) v \, dS.$$

β : Lipschitz, 所以按上式 H^1 弱解合理.

(2) 仿照习题 6.5 即可. 略

□

[8.12] 设 u 是面积积分 $I[w] := \int_U \sqrt{1+|\nabla w|^2} dx$ 在 $\Omega = \{w \mid w=g \text{ on } \partial U\}$
上的极小化子. 求证: u 的图像具有常平均曲率

证明: 不妨 $g=0$, 否则考虑 $r=w-g$

$$\begin{aligned} L[w] &= I[w] + \lambda J[w] \\ &= \int_U \sqrt{1+|\nabla w|^2} + \lambda w \, dx. \end{aligned}$$

对应的 Euler - Lagrange 方程为:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right) + \lambda = 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}} = \text{const} \quad \therefore \text{具有常平均曲率}$$

[8.13] (对偶变分原理) 设 $f \in L^2(U)$. 求证: □.

$$\min_{w \in H_0^1(U)} \int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \, dx = \max_{\xi \in L^2(U \rightarrow \mathbb{R}^n)} -\frac{1}{2} \int_U |\xi|^2 \, dx$$

$$\operatorname{div} \xi = f.$$

证明: $\forall \xi \in L^2(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ with $\operatorname{div} \xi = f$. 有
 $\forall w \in H_0^1(U)$.

$$\begin{aligned} &\cancel{\int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw} \\ \int_U fw &= \int_U \operatorname{div} \xi \cdot w \stackrel{\text{分部积分}}{=} - \int_U \xi \cdot \nabla w \\ &\leq \int_U \frac{1}{2} (|\nabla w|^2 + |\xi|^2) \end{aligned}$$

∴ 左 \geq 右

$$\int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \text{ 在 } w \in H_0^1(U) \text{ 处达到极小值}$$

这因为该泛函是
 convex
 coercive.

而其对应的 Euler-Lagrange 方程即为 $-\Delta w = f$.

令 $\xi = -\nabla w$, 便有 $\operatorname{div} \xi = f$.

且上面的不等式取等.

□

[8.14] (多值PDE)

$$\S 8.4.2 \text{ 的 (26) 式: } \mathcal{A} = \overline{\int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ w \in H_0^1(U) \mid w \geq h \text{ a.e. in } U \right\}$$

$u \in \mathcal{A}$ 是 $I[w] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$ 的一个解.

$$\text{则有 (26)} \quad \int_U Du \cdot D(w-u) dx \geq \int_U f(w-u) dx \quad \forall w \in \mathcal{A}$$

求证: (26) 式可以改写作 $f \in -\Delta u + \beta(u-h)$.

$$\text{其中 } \beta(z) = \begin{cases} 0 & \text{若 } z > 0 \\ (-\infty, 0], & \text{若 } z = 0 \\ \emptyset & \text{若 } z < 0 \end{cases}$$

证明: (26) 左边分部积分.

$$\text{得} \quad \int_U (-\Delta u) \cdot (w-u) dx \geq \int_U f(w-u) dx.$$

$$\text{若 } u = h \text{ 则上式化为 } \forall \tilde{w} \in H_0^1(U), \int_U -\Delta u \cdot (\underbrace{\tilde{w}-h}_{\tilde{w} \geq 0 \text{ a.e.}}) dx \geq \int_U f \tilde{w} dx$$

$$\Rightarrow -\Delta u = f + \text{一项正的 a.e.}$$

$$\Rightarrow -\Delta u + \beta(u-h) \ni f$$

若 $u > h$ a.e. 则取 $w = h$ 有

$$\int_U -\Delta u \cdot (h-u) \geq \int_U f(h-u) dx.$$

取 $w = 2u-h$.

$$\text{则 } \int_U -\Delta u \cdot (u-h) \geq \int_U f(u-h) dx$$

\Rightarrow 矛盾成立. 于是 $-\Delta u = f$ a.e. 及 $\beta = 0$

若 $u < h$ a.e. 这不可能 (与 α 之矛盾!).

□

[8.15] (Pointwise Gradient Constraint)

(1) ~~未证~~: 设 $\alpha = \{w \in H_0^1(U) \mid |\nabla w| \leq 1 \text{ a.e.}\}$, $f \in L^2(U)$.

求证: $I[w] = \int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw dx$ 的极小化子存在且唯一.
记作 u .

(2) 求证: $\int_U \nabla u \cdot \nabla(w-u) dx \geq \int_U f(w-u) dx, \forall w \in \alpha$.

证明: 由课本 P492 ~ 493 对 Thm 8.4.3, 8.4.4 的证明知,

我们只用证明 $\alpha = \{w \in H_0^1(U) \mid |\nabla w| \leq 1 \text{ a.e.}\}$

是 $H_0^1(U)$ 中的弱闭集, 其它步骤完全一致.

* 首先 α 凸显见: $\forall w_1, w_2 \in \alpha, 0 \leq \lambda \leq 1$

$$|\nabla(\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2)|$$

$$\leq \lambda |\nabla w_1| + (1-\lambda) |\nabla w_2| \leq 1 \text{ a.e.}$$

$$\text{且 } \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \in H_0^1(U).$$

由 Mazur 引理, 只用证 α 闭, 即等价于 α 弱闭.

这是显然的. 设 $\{u_n\}$ 是 α 中一个序列, 且 $u_n \rightarrow u$ in $H_0^1(U)$.

$$\text{则 } \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ in } L^2 \Rightarrow u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(U).$$

∴ 存在子列 $u_{n_k} \rightarrow u$ a.e.

差商 $D^h u_{n_k} \rightarrow D^h u$ a.e. & in $L^2(U) \Rightarrow \nabla u$ 存在且 in L^2

这说明 $u \in H_0^1(U) \Rightarrow \alpha$ 闭, 从而弱闭. □

[8.16] 设 $n \geq 3$, U 是有界开集且包含原点, 证明: $u := \frac{x}{|x|} \in H^1(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$.
 且是到 S^{n-1} 的调和映射 i.e. $u \in \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = |\nabla u|^2 u \\ \|u\|_1 = 1 \end{array} \right\}$ 在 U 的弱解.

证明: 先证 $u \in H^1(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$. 对任意 $x \neq 0$ 有:

$$u_j = \frac{x_j}{|x|} \Rightarrow \partial_i u_j = \frac{\delta_{ij} |x| - x_j \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} = \frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}$$

$$\begin{aligned} |\partial_i u_j|^2 &= \frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2\delta_{ij} x_i x_j}{|x|^4} + \frac{x_i^2 x_j^2}{|x|^6} \\ \Rightarrow |\nabla u|^2 &= \sum_{i,j=1}^n |\partial_i u_j|^2 = \frac{n}{|x|^2} - \frac{2|x|^2}{|x|^4} + \frac{|x|^4}{|x|^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \text{ 包含 } 0 \text{ 点,} & \quad = \frac{n-1}{|x|^2} \\ \text{且有界} \Rightarrow \int_U |\nabla u|^2 dx &= \int_U \frac{n-1}{|x|^2} dx < \infty \\ &\quad \uparrow \text{因 } n \geq 3. \end{aligned}$$

故 $\nabla u \in L^2$. 而 $u \in L^2$ 显见 $\therefore u \in H^1(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

再证明 u 是弱解, 即验证

$$\int_U \nabla u : \nabla \varphi dx = \int_U |\nabla u|^2 u \cdot \varphi dx$$

$\forall \varphi \in H_0^1(U \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(U \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_U \frac{n-1}{|x|^2} \cdot \sum_{i=1}^n u_i \cdot \varphi_i dx = (n-1) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{u_i \varphi_i}{|x|^2} dx \\ &= (n-1) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_U \sum_i \sum_j \partial_j u_i \cdot \partial_j \varphi_i dx \\ &= \sum_i \sum_j \int_U \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) \cdot \partial_j \varphi_i dx. \\ &= \sum_i \sum_j \int_U \frac{\delta_{ij}}{|x|} \partial_j \varphi_i dx - \sum_i \sum_j \int_U \frac{x_i x_j}{|x|^3} \partial_j \varphi_i dx. \end{aligned}$$

$\uparrow \textcircled{1}$ $\uparrow \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} = \sum_i \int_U \frac{\partial_i \varphi_i}{|x|} dx$$

分部积分

$$= - \sum_i \int_U \varphi_i \left(-\frac{x_i}{|x|^3} \right) dx = \sum_i \int_U \varphi_i \frac{x_i}{|x|^3} dx$$

$$\textcircled{2} = - \sum_i \sum_j \int_U \frac{x_i x_j}{|x|^3} \partial_j \varphi_i dx$$

分部积分

$$= \sum_i \sum_j \int_U \partial_j \left(\frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) \varphi_i dx$$

$$= \sum_i \sum_j \int_U \varphi_i \cdot \frac{(x_i + \delta_{ij} x_j) |x|^3 - x_i x_j 3|x|^2 \frac{x_j}{|x|}}{|x|^6} dx$$

$$= \sum_i \sum_j \int_U \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx + \sum_i \sum_j \int \frac{\delta_{ij} x_j \cancel{\varphi_i}}{|x|^3} dx.$$

$$- \sum_i \sum_j \int \frac{3 x_i x_j^2 \varphi_i}{|x|^5} dx.$$

$$= n \cdot \sum_i \int_U \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx + \sum_i \int \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx$$

$$- 3 \sum_i \int \frac{x_i}{|x|^3} \varphi_i dx.$$

$$= (n-2) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx.$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2} = (n-1) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx.$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{k \vec{x}}{|x|} \quad \text{是奇调和映射}$$

□

[8.17] 设 u, \hat{u} 是 Ω 上的极小值点: $I[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$
如下能成立:

$u, \hat{u} > 0 \quad \text{in } \Omega$. 未证: $u \equiv \hat{u} \quad \text{in } \Omega$

$$\text{证明: } \text{令 } w = \left(\frac{u^2 + \hat{u}^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{u^2}{u^2 + \hat{u}^2}, \quad \eta = \frac{u^2 + \hat{u}^2}{2}$$

$$\partial_i w = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2 + \hat{u}^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(\partial_i u + \partial_i \hat{u})}_{\geq 0} (u \partial_i u + \hat{u} \partial_i \hat{u})$$

$$\begin{aligned} (\partial_i w)^2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{u^2 + \hat{u}^2} \left(u^2 (\partial_i u)^2 + 4\hat{u}^2 (\partial_i \hat{u})^2 + 2u\hat{u} \partial_i u \partial_i \hat{u} \right) \\ &= \frac{u^2 + \hat{u}^2}{2} \cdot \left(\frac{u^2 (\partial_i u)^2}{(u^2 + \hat{u}^2)^2} + \frac{2u\hat{u} \partial_i u \partial_i \hat{u}}{(u^2 + \hat{u}^2)^2} + \frac{\hat{u}^2 (\partial_i \hat{u})^2}{(u^2 + \hat{u}^2)^2} \right) \\ &= \eta \left| S \cdot \frac{\partial_i u}{u} + (1-s) \frac{\partial_i \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |\nabla w|^2 = \eta \left| S \cdot \frac{\nabla u}{u} + (1-s) \frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2.$$

$$\begin{aligned} &\text{Jensen 不等式} \\ x^2 \text{ 凸} &\leq \eta \left(S \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + (1-s) \left| \frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2$$

$$\text{又知: } \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \stackrel{\text{由 Jensen 不等式}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 \right) \leq \int_{\Omega} |u|^2$$

\therefore 这表明结论成立.

由 Jensen 不等式取等条件有 $\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}}$ a.e.

$$\text{那么 } \partial_i \left(\frac{u}{\hat{u}} \right) = \frac{\partial_i u \cdot \hat{u} - \partial_i \hat{u} \cdot u}{\hat{u}^2} = \frac{\partial_i u}{u} \cdot \frac{u}{\hat{u}} - \frac{\partial_i \hat{u}}{\hat{u}} \cdot \frac{u}{\hat{u}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{\hat{u}} = \text{const.} \quad = 0 \quad \text{a.e.}$$

$$\text{而 } \int |\nabla \hat{u}|^2 = \int |\nabla u|^2 \quad \because \frac{\hat{u}}{u} = 1 \text{ a.e.} \\ \text{即 } \hat{u} = u \text{ a.e.}$$

□

[8.18]: 设 a_1, a_2 是 \bar{U} 上的正值光滑函数, 且 $a_1 \leq a_2$

设 u_1, u_2 分别为如下方程的光滑解: $\operatorname{div}(a_1 \nabla u_1) = 0$ in U ,
且 $\nabla u_2 \neq 0$ a.e.

再假设: $u_1 = u_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{on } \partial U \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

求证: $a_1 \equiv a_2$. $u_1 \equiv u_2$ in U .

证明: u_1, u_2 分别是能量泛函 $I_1[w] = \int_U a_1 |\nabla w|^2 dx$
 $I_2[w] = \int_U a_2 |\nabla w|^2 dx$
 (b) 的极值点.

$$\text{而 } \int_U a_1 |\nabla u_1|^2 dx = \int_U a_1 \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 dx$$

$$= \int_{\partial U} a_1 \cdot u_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} ds - \int_U \operatorname{div}(a_1 \nabla u_1) \cdot u_1 dx$$

$$= \int_{\partial U} a_2 \cdot u_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial n} ds - \int_U \operatorname{div}(a_2 \nabla u_2) \cdot u_2 dx$$

$$\text{依照上式} \quad \int_U a_2 |\nabla u_2|^2 dx$$

$$a_2 \geq a_1$$

$$\geq \int_U a_1 |\nabla u_2|^2 dx.$$

但由极小化性质已知 $u_1 \equiv u_2$. 从而 $a_1 \equiv a_2$ in U

□

[8.19] (波方程的动量守恒)

设 u 为非线性波方程 $\partial_t u - \Delta u + f(u) = 0$ 的解.

考虑 $\vec{x}(x, t, \tau) = (x + \tau e_k, t)$. 试用诺特定理找出动量密度 P_k .
 $w(x, t, \tau) = u(x + \tau e_k, t)$. 动量流 j_k .

$$s.t. \partial_t P_k - \operatorname{div} j_k = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

证明: 设 F 是 f 的原函数, 则该方程的 Lagrangian 为

$$\frac{1}{2} L(\nabla w_t, w; x, t) = \frac{1}{2} w_t^2 - \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + F(w) \right)$$

$$\text{即 } L(p, z, x, t) = \frac{1}{2} p_{n+1}^2 - \frac{1}{2} (p_1^2 + \dots + p_n^2) - F(z).$$

$$\vec{x}(x, t, \tau) = (x + \tau e_k, t)$$

$$\therefore \vec{v} = e_k.$$

$$w(x, t, \tau) = u(x + \tau e_k, t)$$

$$\therefore m = \partial_{x_k} u.$$

那么, 由诺特定理:

$$\sum_{i=1}^n \left(m \underbrace{\partial_{p_i} L(\nabla u, u_t; u; x, t)}_{= p_i} - L(\nabla u, u_t; u; x, t) \right)_{x_i}^{(1)} \\ + \partial_t \left(m \underbrace{\partial_{p_{n+1}} L(\nabla u, u_t; u; x, t)}_{= p_{n+1}} - L(\nabla u, u_t; u; x, t) \right)_{x_i}^{(2)} = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\partial_k u \cdot (-\partial_i u) - S_{ik} \left(\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) \right)_{x_i} \\ + \partial_t \left(\partial_k u \cdot u_t \right) = 0$$

$$\therefore P_k = \partial_k u \cdot u_t.$$

$$j_k = \partial_k u \cdot \nabla u + e_k \left(\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right)$$

$$\text{满足 } \partial_t P_k - \operatorname{div} j_k = 0. \quad 1 \leq k \leq n.$$

□

[8.20] 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是区域, $B(0, R) \subseteq U$, u 在 U 中是调和函数.

$u(0)=0$ 但 u 不恒为 0, 对 $0 < r < R$, 令 $\alpha(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u^2 dS$.

在 §8.6.2 中, 我们已有单调性公认.

$$b = \frac{2}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} u_r^2 dS.$$

$$b(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(0,r)} |\nabla u|^2 dx.$$

$$(1) \text{ 求证: } \dot{\alpha} = \frac{2}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u \cdot u_r dS = \frac{2}{r} b.$$

$$(2) \text{ 求证: } b^2 \leq \frac{r}{2} ab$$

(3) 令 $f = \frac{b}{a}$, 求证: $f \geq 0$, 这将由下证 Almgren 单调性.

$$(4) \text{ 若 } \beta = \frac{b(R)}{a(R)}, \gamma = \frac{a(R)}{R^\beta}.$$

$$\text{求证: } \frac{\dot{\alpha}}{a} \leq \frac{\beta}{r}, \text{ 从而 } a(r) \geq \gamma r^\beta. \quad (0 < r < R)$$

$$\text{证明: (1). } a(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u^2(x) dS(x). \quad \begin{array}{l} \text{令 } x = rw \\ \text{且 } w \in \partial B(0,1). \end{array} \quad \int_{\partial B(0,1)} u^2(rw) dS_w.$$

$$\Rightarrow a'(r) = \int_{\partial B(0,1)} 2u(rw) \cdot \partial_r u(rw) dS_w.$$

$$= \frac{2}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u \cdot \partial_r u \cdot dS$$

∂_r 在边界即为法向导数.

$$= \frac{2}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad \begin{array}{l} \text{应用度量} \\ \text{及} \end{array} \quad = \frac{2}{r^{n-1}} \int_{B(0,r)} |\nabla u|^2 dx \\ = \frac{2}{r} \cdot b$$

(2) 由上一问的计算过程.

$$b = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} u \cdot \partial_r u dS. \quad \begin{array}{l} \text{由 Cauchy-Schwarz 不等式} \\ \text{即得结论.} \end{array}$$

$$(3) \text{ 由 (1) 知 } b = \frac{r}{2} \dot{\alpha}$$

$$\text{从而 } b^2 \leq \frac{r}{2} ab \Rightarrow \frac{r}{2} \dot{\alpha} b \leq \frac{r}{2} ab \Rightarrow b \dot{\alpha} - \dot{\alpha} b \geq 0$$

$$\Rightarrow f = \frac{b \dot{\alpha} - \dot{\alpha} b}{\dot{\alpha}^2} \geq 0.$$

(4) 由(3)知 $f(r)$ 关于 r 递增

$$\therefore f(r) \leq f(R)$$

$$\Rightarrow \frac{b(r)}{a(r)} \leq \frac{b(R)}{a(R)}$$

$$\hat{a} = \frac{r}{R} b$$

$$\Rightarrow r \frac{\hat{a}(r)}{a(r)} \leq \frac{b(R)}{a(R)} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{代入 } \beta \text{ 的表达式} \end{matrix} \Rightarrow \frac{\hat{a}(r)}{a(r)} \leq \frac{\beta}{r}$$

$$\text{由} \frac{d}{dr} (\ln a(r)) \leq \frac{\beta}{r}$$

$$\text{而 } \ln a(r) = \ln a(R) - \int_r^R \frac{d}{dp} (\ln a(p)) dp.$$

$$\geq \ln a(R) - \int_r^R \frac{\beta}{p} dp.$$

$$= \ln a(R) - \beta \ln R + \beta \ln r$$

$$\Rightarrow \ln a(r)$$

$$\Rightarrow \overline{\ln} a(r) \geq \ln a(R) - R^{-\beta} + r^\beta$$

$$= \gamma \cdot r^\beta \quad \forall 0 < r < R$$

□