微分方程 2 第一次习题课.

Hölder 空间的2个习题:

[例1] $k\in\mathbb{N}$, $0<r\le 1$. $C^{k,r}(\bar U)=\{u\in C^k(\bar U)\mid \|u\|_{C^{k,r}(\bar U)}:=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}[D^\alpha u]_{C^{0,r}(\bar U)}<+\infty\}$.

(1) 证明: $(C^{k,r}(\bar U), \|\cdot\|_{C^{k,r}(\bar U)})$ Banach

(2). $|||u|||_{C^{k,r}(\bar U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{C^{k,r}(\bar U)}$ $|||\cdot|||$ 与 $\|\cdot\|$ 等价, 其中 $|||u|||_{C^{k,r}(\bar U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{C^{0,r}(\bar U)}$

证明: (1) Step 1. 先验证 $\|\cdot\|_{C^{k,r}(\bar U)}$ 是范数.

① 正定性: 因 $\|\cdot\|_{C(\bar U)}$, $[\cdot]_{C^{0,r}(\bar U)}$ 分别为范数, 半范数.

故 $\forall u\in C^{k,r}(\bar U)$, $\|u\|_{C^{k,r}(\bar U)}\ge 0$.

$\|u\|_{C^{k,r}(\bar U)}=0 \Longleftrightarrow \|D^\alpha u\|_{C(\bar U)}\underset{|\alpha|\le k}{=0}$, $[D^\alpha u]_{C^{0,r}(\bar U)}\underset{|\alpha|=k}{=0}$.

$\Rightarrow u\equiv 0$ in $\bar U$ ✓.

② 齐次性, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$

$$\|\lambda u\|_{C^{k,r}(\bar U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha\lambda u\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}[D^\alpha\lambda u]_{C^{0,r}(\bar U)}$$

$$=|\lambda|(\ \cdots\cdots\ )=|\lambda|\cdot\|u\|_{C^{k,r}(\bar U)}$$

③ 三角不等式. 设 $u,v\in C^{k,r}(\bar U)$

$$\|u+v\|_{C^{k,r}(\bar U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha(u+v)\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}[D^\alpha(u+v)]_{C^{0,r}(\bar U)}$$

$$=\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha(u+v)\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}\sup_{\substack{x\ne y\\ x,y\in\bar U}}\frac{|u(x)+v(x)-u(y)-v(y)|}{|x-y|^r}$$

$$\le\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|_{C(\bar U)}$$

$$+\sum_{|\alpha|=k}\sup_{x\ne y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^r}+\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^r}\right)$$

$$\le\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}\sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^r}$$

$$+\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|_{C(\bar U)}+\sum_{|\alpha|=k}\sup_{x\ne y}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^r}=\|u\|_{C^{k,r}(\bar U)}+\|v\|_{C^{k,r}(\bar U)}$$

因此 $\|\cdot\|_{C^{k,r}(\bar U)}$ 是范数.

Step 2 $(C^{k,r}(\bar U), \|\cdot\|_{C^{k,r}(\bar U)})$ 是 Banach 空间

设 $\{u_n\}$ 为 任一此空间 Cauchy 列. 由 $C^k(\bar U)$ 完备 知. $\exists u\in C^k(\bar U)$.

s.t. u_n 收敛 u in $C^k(\bar U)$ 即 $\sup_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\bar U}|D^\alpha_{(u_n-u)}(x)|\to 0$.

为证明 $\|u_n - u\|_{C^{k,r}(\bar U)} \to 0$，我们只需证

① $u \in C^{k,r}(\bar U)$

② $[\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u]_{C^{0,r}(\bar U)} \to 0 \qquad |\alpha| = k$

③是否易知. $\forall x \neq y$ in $\bar U$

$\cancel{[\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u]_{C^{0,r}(\bar U)} = \sup_{x\neq y} \frac{\quad}{|x-y|}}$

因为 $\sup_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{C(\bar U)} \to 0$ as $n\to\infty$

$$\frac{|\partial^\alpha(u_n-u)(x) - \partial^\alpha(u_n-u)(y)|}{|x-y|^r} \rightrightarrows 0$$

as $n\to\infty$. 这由 $\partial^\alpha u_n \rightrightarrows \partial^\alpha u$ 保证!

下面证明(1). 这只用证 $[\partial^\alpha u]_{C^{0,r}(\bar U)} < +\infty$. $|\alpha| = k$.

$$\frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^r} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u_n(y)|}{|x-y|^r}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} [\partial^\alpha u_n]_{C^{0,r}(\bar U)}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \|\partial^\alpha u_n\|_{C^{0,r}(\bar U)} \underset{\uparrow}{<+\infty}$$

本柯西列必有界. □

Rmk: $(C^k(\bar U), \|\cdot\|_{C^k(\bar U)})$ Banach 的证明: $\|u\|_{C^k} = \sup_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\bar U}|\partial^\alpha u(x)|$

设 u_n 为 C^k 中 Cauchy 列.

则 $\forall |\alpha|\le k$, $\exists V_\alpha \in C(\bar U)$. $\partial^\alpha u_n \rightrightarrows V_\alpha$.

只用证. ~~$\forall\alpha$~~ $V_\alpha = \partial^\alpha V_0$.

只证 $V_{(1,0,\dots,0)} = \partial_{x_1} V_{(0,\dots,0)}$ (其余归纳法)

因. $\partial_{x_1} u_n(x) \rightrightarrows V_{(1,0,\dots,0)}(x)$.

$u_n(x) \rightrightarrows V_{(0,\dots,0)}(x)$

故在 $u_n(x) = \int_{x_1^0}^{x_1} \partial_{x_1} u_n(\xi_1, x_2,\dots,x_d)\,d\xi_1 + u_n(x_1^0, x_2,\dots,x_d)$

$$\xrightarrow{n\to\infty} V_{(0,\dots,0)}(x) = \int_{x_1^0}^{x_1} V_{(1,0,\dots,0)}(\xi_1, x_2,\dots,x_d)\,d\xi_1 + V_{(0,\dots,0)}(x_1^0, x_2,\dots,x_d).$$

□

2. 插值不等式 $0<\beta<\gamma\le 1$ 时 证明:

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar U)} \le \|u\|_{C^{0,\beta}(\bar U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(\bar U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

证明: $\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar U)} = \cancel{\sup}\ \|u\|_{C(\bar U)} + \sup\limits_{x\ne y}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$.

$$= \|u\|_{C(\bar U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{\cancel{0,1}}(\bar U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} + \sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

~~Holder~~

$$\le \|u\|_{C(\bar U)}^{1-\gamma/1-\beta}\ \|u\|_{C(\bar U)}^{\gamma-\beta/1-\beta} + \sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}}{|x-y|^{\beta\cdot\frac{1-\gamma}{1-\beta}}}\ \sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}}{|x-y|^{1\cdot\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}}$$

$\cancel{\beta}-\beta\gamma+\gamma-\cancel{\beta}$

离散Hölder

$$\le \left(\|u\|_{C(\bar U)} + \left(\sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}\right)^{\cancel{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}$$

$$\cdot\left(\|u\|_{C(\bar U)} + \sup_{x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

$\partial_{x_k}\cancel{\hat f(\xi) \Rightarrow}$

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2) \le (a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^{p'}+b_2^{p'})^{\frac{1}{p'}}}$$

(本相当于 $l^p(\mathbb{Z})$ 的Hölder不等式).

□

Hölder之间用处: ① Morrey嵌入 (5.6节).

$W^{k,p}(U)$. $U\subseteq\mathbb{R}^d$. $kp>d$时.

$W^{k,p}\hookrightarrow C^{k,\gamma}$ for some $\gamma\in(0,1)$.

② Schauder-Estimate in Elliptic Equation

弱导数：

为何定义成 $\int_U uD\phi\,dx = -\int_U \underset{\underset{Du}{\parallel}}{v}\phi\,dx \quad \forall\phi\in C_c^\infty(U)$ ？

可以将 u.v 看作 $C_c^\infty(U)$ 上的线性泛函
连续

① 为什么 Sobolev 函数 / L^p / L^1_{loc} 函数有资格作为 $C_c^\infty(U)$ 上的连续线性泛函？

设 $\varphi\in C_c^\infty$，$f\in L^1_{loc}(U)$，设 $K\subset\subset U$，$\mu(U-K)<\delta$ 充分小。

$\left|\int_U f\varphi\right| = \cancel{\int_K f\varphi + \int_{U-K} f\varphi}$

$\cancel{\le \|f\|_{L^1(K)}\|\varphi}$

$$\left|\int_{U\cap \mathrm{spt}\,\varphi} f\varphi\right| \le \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} |f\varphi| < +\infty \qquad (\|\varphi\|_\infty<+\infty,\ f\in L^1_{loc})$$

连续性：设 $\varphi_n\to\varphi$ in $C_c^\infty(U)$，(即 $\forall K\subset\subset U$，$\forall\alpha$，$\partial^\alpha\varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha\varphi$ in K)

则 $$\left|\int f\varphi_n - \int f\varphi\right| \le \int_{\mathrm{spt}\,\varphi_n\cup\mathrm{spt}\,\varphi} |f|\cdot \|\varphi_n-\varphi\|_{L^\infty} \to 0 \quad \text{as } n\to+\infty$$

② 如何刻画 $C_c^\infty(U)$ 上的全体连续线性泛函及其运算

令 $\mathcal{D}(E) = C_c^\infty(E)$，$\forall E\subset\mathbb{R}^d$，$\mathcal{D}(E)$ 称作 E 上的测试函数。

2.1：对紧集 K，$C_c^\infty(K)$ 赋予范数：$\phi\mapsto \|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}$ $\forall\alpha$ 是 Fréchet 空间

$$\varphi_n\to\varphi \text{ in } C_c^\infty(K) \overset{def}{\iff} \|\partial^\alpha\varphi_n-\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}\to 0\quad \forall\alpha.$$

2.2：对开集 U，$C_c^\infty(U) := \bigcup_{K\text{紧}\subset U} C_c^\infty(K)$

$$\varphi_n\to\varphi \text{ in } C_c^\infty(U) \overset{def}{\iff} \|\partial^\alpha\varphi_n-\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty(K)}\to 0 \quad \forall K \overset{紧}{\subset} U,\ \forall\alpha.$$

2.3：$C_c^\infty(U)$ ~~上~~ 上，全体连续线性泛函，称作 U 上的分布（广义函数），记作 $\mathcal{D}'(U)$

何谓连续线性泛函？称 T 为 $C_c^\infty(U)$ 上的连续线性泛函，是指，

"$\forall K\overset{紧}{\subset}U$，只要 $\phi_j\to\phi$ in $C_c^\infty(K)$ 就有 $T\phi_j\to T\phi$"

即 连续 $\iff$ "任一紧集上 $\phi_j\xrightarrow{\text{in } C_c^\infty}\phi$ implies $\langle T,\phi_j\rangle\to\langle T,\phi\rangle$"。

$\mathcal{D}'(U)$ 上的拓扑？ 弱*拓扑 （因为 $\mathcal{D}'(U)$ 是作为 $X=C_c^\infty(U)$ 的对偶空间 X^* 存在的）

X^* 中元素的收敛（按弱*收敛定义）。
弱*收敛指

<u>2.4</u>：哪些是分布的例子？ 定义 $=\langle f,\varphi\rangle$.

① L^1_{loc} $\quad \int_U f\varphi = \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} f\varphi \le \|\varphi\|_\infty \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} f = \|f\|_{L^1_{loc}}$ ✓

$\Downarrow$

② L^p $\quad L^p$ - 定 L^1_{loc}

③ Radon 测度 (因为是 $C_c(U)$ 的对偶)

④：$x_0\in U$，α 多重指标，映射 $T: \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ 是一个分布.

特别，$\alpha=0$ 时，T 为 x_0 处的 dirac δ_{x_0}.

⑤ Dirac (0处的)，定义 $\langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi\in C_c^\infty(U),\ x_0\in U$.

~~因此，我们在~~

下面来看如何定义分布的导数.

设 $F\in D'(U)$

定义分布导数 $\partial^\alpha F$ 为：$\forall \varphi\in C_c^\infty(U)$，$\langle \partial^\alpha F,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle F,\partial^\alpha\varphi\rangle$.

故 $\partial^\alpha F\in D'(U)$.

特别，若 F 本身是个"充分好的函数"，那么"作用"即为"积分"

($f\in L^1_{loc}$ 时，$\langle f,\varphi\rangle := \int f\varphi$).

那么由分部积分，即有 $\int \partial^\alpha F(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int F(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$.

<u>这也和我们弱导数的定义契合</u>. 因此，弱导数之所以这么定义，只是因为，本质上，它是分布意义下的导数。而分布意义下的导数，其定义就是 $\langle \partial^\alpha F,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle F,\partial^\alpha\varphi\rangle$.

□

* 关于磨光算子、恒等逼近与分布：

$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，$\int f=1$，设 $t>0$，$f_t(x)=\frac{1}{t^d}f(\frac{x}{t})$，则 $f_t\to\delta$ in D' as $t\to 0$

Proof：D' 上是弱*拓扑，故 $f_t\to\delta \iff \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，$\langle f_t,\varphi\rangle \to \langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0)$

而 $\langle f_t,\varphi\rangle = \int f_t\varphi = \int f_t(y)\varphi(y)\,dy$

$= \int f_t(y)\tilde{\varphi}(0-y)\,dy \quad (\tilde{\varphi}(x)=\varphi(-x))$.

$= (f_t * \tilde{\varphi})(0) \xrightarrow{\text{恒等逼近}} \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$

因此，我们称"$\{f_t\}_t$"为"逼近恒等"是合理的，$t\to 0$时，f_t越来越趋近于卷积下的单位元 dirac δ □

事实上，从Fourier变换(分布的)看更显然，设 $I*f=f$，作Fourier变换 $\Rightarrow \hat{I}=1 \Rightarrow I=\check{1}=\delta$.

(δ的Fourier正、反变换在分布中 $=1$)

如何计算弱导数？

对好的函数，先求强导数，再证明强导数=弱导数

一般函数，不一定求的出 explicit formula，只能估计

例如 ch6讲到椭圆方程的解的正则性 H^2 估计

① 一个小 gap. 在证明弱导数唯一性时，我们用到了如下事实

$f \in L^1_{loc}$ $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ 若 $\int f\phi = 0$. 则 $f = 0$ a.e.

<u>check</u>：设 $x \in U$. ε 充分小. $B(x,\varepsilon) \subseteq U$.

$$f(x) = \int_U f(x)\,\eta_\varepsilon(y-x)\,dy$$

$$= \int_U (f(x) - f(y))\,\eta_\varepsilon(y-x)\,dy + \underbrace{\int_U f(y)\,\eta_\varepsilon(y-x)\,dy}_{0 \text{ 由题设}}$$

$$= \int_{B(x,\varepsilon)} (f(x) - f(y))\,\eta_\varepsilon(y-x)\,dy$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} |f(x) - f(y)|\,\eta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy$$

$$\overset{\|\eta\|_{L^\infty}=1}{\le} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(x) - f(y)|\,dy$$

$$= C \cdot \underbrace{⨍_{B(x,\varepsilon)}}_{\text{积分平均}} |f(x) - f(y)|\,dy \xrightarrow{\text{Lebesgue 微分定理}} 0 \quad \text{a.e. } x \in U$$

□

② 弱导数的 Leibniz 法则不一定对.

书上：$\zeta \in C_c^\infty(U)$. $u \in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha(\zeta u) = \sum_{|\beta| \le |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$.

• 一般 $u, v \in W^{k,p}(U)$. 并不一定有如上公式.

例如：$d \ge 3$ 时. $p = 2$ 时. ~~$H^k(\mathbb{R}^d)$ 是~~ $H^1(\mathbb{R}^d)$ 不是 Banach 代数. (T21 是 if and only if. 要用仿积 调和分析)

说明 $u, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ 但可能 $uv \notin H^1(\mathbb{R}^d)$，从而 uv 连弱导数都求不了.

有一个结论如下. 要用逼近定理

$f, g \in L^\infty(U) \cap W^{1,p}(U) \Rightarrow fg \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$. 且 $\partial_i(fg) = \partial_i f \cdot g + \partial_i g \cdot f$.

如何证明: $\forall \varphi \in C_c^\infty(U)$, $\mathrm{spt}\,\varphi \subset V \subset\subset U$.

令 $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, $g^\varepsilon = \eta_\varepsilon * g$ → 为什么? 因为光滑函数成立 Leibniz's rule

先求 $\partial_i(fg)$

$$\int_U (\partial_{x_i}\varphi) f g\, dx = \int_V (\partial_i \varphi) f g\, dx \overset{①}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon (\partial_i\varphi)\, dx$$

$$\underset{\text{因光滑函数 Leibniz}}{\overset{f^\varepsilon, g^\varepsilon \in C^\infty}{=}} -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_V (\partial_i f^\varepsilon \cdot g^\varepsilon + f^\varepsilon \cdot \partial_i g^\varepsilon)\varphi\, dx$$

$$\overset{②}{=} -\int_V (\partial_i f \cdot g + f\cdot \partial_i g)\varphi\, dx$$

$$= -\int_U (\partial_i f \cdot g + f\cdot \partial_i g)\varphi\, dx$$

①② 同理, 只证①.

作差: $\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \partial_i\varphi - \int_V f g \partial_i \varphi\, dx$

$$= \int_V f^\varepsilon (g^\varepsilon - g)\partial_i\varphi + \int_V (f^\varepsilon - f) g \partial_i\varphi$$

$$\le \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \underbrace{\|f^\varepsilon \partial_i\varphi\|_{L^{p'}(V)}}_{\le \|f^\varepsilon\|_{L^\infty}\|\partial_i\varphi\|_{L^{p'}} \le \|\eta_\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty}} + \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \|\underbrace{g}_{L^\infty\text{提出去}}\partial_i\varphi\|_{L^{p'}} \to 0 \quad \text{as } \varepsilon\to 0^+.$$

□

Rmk: 何时弱导 = 强导? (a.e. 成立时) 设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$.

$p > d$ 时, $W^{1,p}_{loc}$ 可以做到 (Morrey 嵌入, §5.6.2)

Lipschitzian map ✓. (Rademacher Thm).

关于 Sobolev 函数逐点性质, 参见

Evans: Measure theory and Fine properties of Functions. Ch 4.7 in Fo.

#.

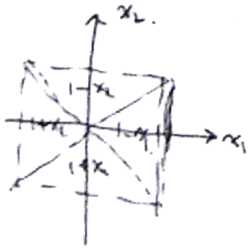
2个习题:

3. $U = (-1,1)\times(-1,1)$. 令 $u(x) = \begin{cases} 1-x_1 \\ 1+x_1 \\ 1-x_2 \\ 1+x_2 \end{cases}$

$x_1 > 0$, $|x_2| < x_1$ — D_1
$x_1 < 0$, $|x_2| < -x_1$ — D_2
$x_2 > 0$, $|x_1| < x_2$ — D_3
$x_2 < 0$, $|x_1| < -x_2$ — D_4

问: 哪些 p, 使 $u \in W^{1,p}(U)$?

证明. claim. u 的弱导数为 $v = \begin{cases} (-1,0) & \text{in } D_1 \\ (1,0) & D_2 \\ (0,-1) & D_3 \\ (0,1) & D_4 \end{cases}$



~~只证 D_1 的 case: $\partial_1 u = -1$~~

check: $\forall \varphi \in C_c^\infty(U)$.

有: $\int_U v\varphi = \sum_{i=1}^4 \int_{D_i} v\varphi$.

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{D_i} v\varphi = \int_{D_1}\underbrace{(-1,0)}_{\substack{\| \\ D(1-x_1) \\ \| \\ Du\,(u\text{的弱导数})}}\varphi + \int_{D_2}\underbrace{(1,0)}_{\substack{\| \\ \partial u}}\varphi + \int_{D_3}\underbrace{(0,-1)}_{\substack{\| \\ \partial u}}\varphi + \int_{D_4}\underbrace{(0,1)}_{\substack{\| \\ \partial u}}\varphi$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} \sum_{i=1}^{4} -\int_{D_i} u\cdot D\varphi + \int_{\partial D_i} u\varphi\cdot n_i$$

$$\overset{\sum\partial D_i\text{内部抵消},\ \varphi|_{\partial U}=0}{=} \sum_{i=1}^{4} -\int_{D_i} u\cdot D\varphi = -\int_U u\cdot D\varphi.$$

$\therefore$ v的确为u的弱导数.

易见. $\forall p\in[1,+\infty]$. $u\in W^{1,p}(U)$.

□.

4. 设 $n=1$. $u\in W^{1,p}(0,1)$ $1\le p<+\infty$.

(1) 证 $u \overset{a.e}{=}$ 某个绝对连续函数, $u'\in L^p(0,1)$.

(2). $1<p<\infty$ 时 $|u(x)-u(y)|\le |x-y|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|u'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

证明: 设 u' 为 u 的弱导数.

令 $u^*(x)=\int_0^x u'(t)\,dt$. 则 u^* 绝对连续.

$$\forall\varphi\in C_c^\infty(0,1), \int_0^1(u^*-u)\phi'\,dx = \int_0^1\int_0^x u'\,dt\cdot\phi'\,dx - \int_0^1 u\phi'\,dx.$$

$$= \int_0^1\int_t^1 \phi'(x)\,dx.\ u'(t)\,dt + \int_0^1 u'\phi\,dx.$$

$$= \int_0^1(\underbrace{\phi(1)}_{\substack{\| \\ 0}} - \phi(t))u'(t)\,dt + \int_0^1 u'\phi\,dx$$

$$= 0. \qquad \therefore u=u^*\ \text{a.e.}$$

$u'\in L^p$ 显然 (因 $u\in W^{1,p}$).

(2) 不妨设 $x<y$

$$|u(x)-u(y)| = \left|\int_0^1 1_{\{x\le t\le y\}}(t)\cdot u'(t)\,dt\right|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} |x-y|^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^y|u'|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

□.

事实上，在某一些特殊情况下，弱导数也有链式法则，实用通过之理。

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开开，$1 \le p \le +\infty$

(1) $f \in W^{1,p}(U)$. $F \in C^1(\mathbb{R})$. $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$. 则 $F(f) \in W^{1,p}(U)$.

且 $\partial_i(F(f)) = F'(f)\,\partial_i f$. $\mathcal{L}^n$- a.e. $1 \le i \le n$.

(2). $f \in W^{1,p}(U)$. 则 $f^\pm$、$|f| \in W^{1,p}(U)$. 且

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f>0\} \\ 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f \le 0\} \end{cases}$$

(3). $Df = 0$ on $\{f=0\}$ $\mathcal{L}^n$-a.e.

证明：(1) 设 $\phi \in C_c^\infty(U)$. 令 $\mathrm{Spt}\,\phi \subseteq V \subset\subset U$. $f^\varepsilon := f * \eta_\varepsilon$.

要证的是：$\int_U F(f)\partial_i\phi\, dx = -\int_U F'(f)\,\partial_i f \cdot \phi\, dx$.

左 $= \int_V F(f)\,\partial_i\phi\, dx$.

$\overset{①}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_V F(f^\varepsilon)\partial_i\phi\, dx$.

$= -\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_V F'(f^\varepsilon)\,\partial_i f^\varepsilon \cdot \phi\, dx$.

分部积分与微积分中的链式法则.

$\overset{②}{=} -\int_V F'(f)\partial_i f\,\phi\, dx. = -\int_U F'(f)\,\partial_i f \cdot \phi\, dx$.

类似证明 Leibniz法则时的插项

(2). 令. $F_\varepsilon(r) = (\sqrt{r^2+\varepsilon^2} - \varepsilon)\,\chi_{\{r \ge 0\}}$ 则 $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$.

Fix $\varepsilon > 0$

$F_\varepsilon' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

由(1) 即有 $\int_U F_\varepsilon(f)\,\partial_i\phi\, dx = -\int_U F_\varepsilon'(f)\,\partial_i f \cdot \phi\, dx$.

$\varepsilon \to 0$ 有 $\int_U f^+\,\partial_i\phi\, dx = -\int_{U\cap\{f>0\}} \partial_i f\,\phi$.

故 Df^+ 的导数得证. 又 $f^- = (-f)^+$.

$|f| = f^+ + f^-$. 剩下显然.

(3) 由(2) 立得.

□

相不同的之一：单位分解：

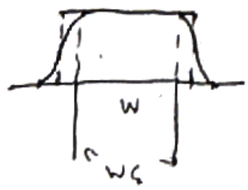
$$(\chi_W * \eta_\varepsilon)(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\,\chi_W(x-y)\,dy$$

$x\in W_\varepsilon$ 时. $\chi_W(x-y)\equiv1$ $\Rightarrow \chi_W*\eta_\varepsilon\equiv1$

~~①2~~ 1个习题.

5. U, V 开. $V\subset\subset U$ 证明：$\exists\,\zeta\in C^\infty$ s.t. $\zeta=1$ in V, 0 on ∂U.

函数 χ_W



证明：取 W, $V\subset\subset W\subset\subset U$.

则 $\zeta=\chi_W*\eta_\varepsilon$（$\varepsilon$ 足够小）即可. □

6. 欧氏空间紧集上单位分解，我们给出一个~~独立~~证明 ~~~~.

K 是紧集 有限覆盖 $\{O_k\}_1^N$ 则存在~~连续~~光滑函数 η_k, $1\le k\le n$.

使 $0\le\eta_k\le1$. $\operatorname{spt}\eta_k\subseteq O_k$. $\sum_{k=1}^N\eta_k(x)=1$ $\forall x\in K$.

且 $0\le\sum_{k=1}^N\eta_k\le1$ $\forall x\in X$.

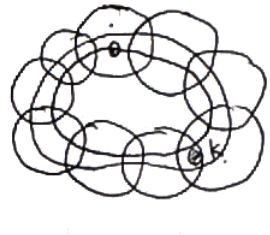
具体地构造出 利用T5的条件

Pf: ① $\forall x\in K$. 存在开球 $B(x)$（以 x 为中心的）使 $\overline{B(x)}\subseteq O_i$ ($\exists i$).

由 $\bigcup_{x\in K}B(x)\supseteq K$. 故存在有限覆盖 $\bigcup_{j=1}^M B(x_j)$. ϕ

② $\forall 1\le k\le N$. 令 $U_k=\bigcup_{\{j:B(x_j)\subseteq O_k\}}B(x_j)$.

则 $K\subseteq\bigcup_{k=1}^N U_k$.



由 T5, $\exists\,\varphi_k\in C^\infty$ $0\le\varphi_k\le1$.

$\varphi_k=1$ on $\overline{U_k}$

$\operatorname{spt}\varphi_k\subseteq O_k$.

令 $\eta_1=\varphi_1$. $\eta_2=\varphi_2(1-\varphi_1)$, ……, $\eta_N=\varphi_N(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_{N-1})$

则 $\operatorname{spt}\eta_k\subseteq O_k$. 且 $\eta_1+\cdots+\eta_N=1-(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_N)$

$=1$.

逼近定理.

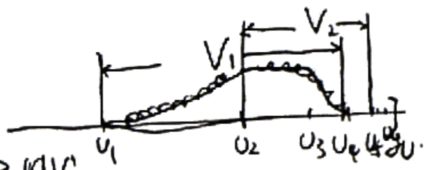
① 局部(local)逼近. $u^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$.
$\|$
$\eta_\varepsilon * u \in C^\infty(U_\varepsilon)$

② 整体内部逼近：局部逼近中，$W^{k,p}$ 收敛只能在U的紧子集上做到.
因此，用一圈圈的紧子集去逼近U.

$U_k = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \frac{1}{k}\}$

. 如何拼接起每个U_k上的光滑u？

单位分解.



$V_i = U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$

$W_i = U_{i+4} - \overline{U}_i \Supset V_i$ —— 为了腾出小空隙来光滑化.

③ 整体到边逼近.

套路：若边界 Lipschitz, U 有界 } ⇒ ∂U紧，⇒ 有限覆盖 $V_1 \dots V_N$.（不妨设是一堆球）

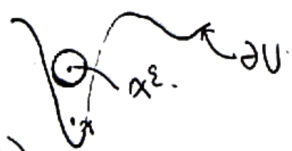
剩去. $V_1 \dots V_N$，U中剩下部分 用一个大开集 V_0 盖住.

⇒ 对 $\{V_0, V_1 \dots V_N\}$ 作 P.O.U.
与球

※ 技术上的新困难：边界处的误差，如何磨光.

把x往上挪一点，留出余地.

$x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n$
例如



为何λ较大？（$\lambda > Lip\gamma + 2$）.

否则边界会振荡厉害，ε fixed. $B(x^\varepsilon, \varepsilon)$ 可能与 U^c 有交.

如图：

因此 ∂U Lipschitz or C^1
保证了λ可以取到.

□