微分方程 II 学习建议：
预备知识：实分析、 泛函分析，**不需要微分方程 1**。主要是以下内容：
实分析：积分收敛定理、Holder/Young/Minkowski/Gronwall 不等式、卷积光滑子逼近、Lebesgue 微分定理。
泛函分析：Riesz 表示定理（及其推论 Lax-Milgram 定理）、紧算子的谱理论（Fredholm 二择一）、对称紧算子的谱、弱收敛的相关性质（见 Evans 附录 D）、Mazur 引理（第八章需要）。

参考书：没有、不需要。

顺序：
基本内容（普通班）
第五章（Sobolev 空间）：5.1~5.7、5.8.1（Poincare 不等式）、5.8.3（$W^{1,\infty}$=Lipschitz, 课本该定理证明出现大跳步，详见 2017 年微分方程 2 期中考试第三题）、5.9.1（H^{-1} 空间）；
第六章（二阶线性椭圆方程）：6.1、6.2（存在性定理）、5.8.2（差商极限逼近导数）、6.3（正则性）、6.4（极大值原理）、6.5.1（对称椭圆算子的谱）；
第七章（线性发展方程）：7.1（抛物方程弱解的 Galerkin 方法）、7.2.4（双曲方程有限传播速度）。

用到泛函的地方：
5.7 需要弱收敛和紧算子定义（附录 D.4+D.5 的第一条定义）
6.2.2 需要 Lax-Milgram 定理(6.2.1 讲了，需要 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理结论)
6.2.3 需要附录 D.5（紧算子的谱 Fredholm 二择一，真正用上的是 726 页最下方那个 Remark，类似线性方程组存在唯一解/齐次方程有非零解二择一）
6.5.1 需要附录 D.6（对称紧算子的谱，联想实对称方阵特征值的结论，一模一样）
7.1 节需要自反空间的 Banach-Alaoglu 定理（自反 Banach 空间中，有界序列必有弱收敛子列）

可以跳过的部分：
5.3.3 整体光滑逼近的证明（知道思路即可，先有限覆盖边界，然后用个大球盖里面）；
5.4 的延拓定理证明；
5.5 的零迹定理证明（结论在第六章一个习题用到）；
5.6.3（高阶 Sobolev 不等式）的所有证明；
6.3、7.1 的所有高阶正则性证明（数学归纳法即可）和边界正则性证明（边界附近进行局部拉直，化成上半平面的情况）；
所有 Harnack 不等式证明；
7.2 节除了最后一个定理其它全部跳过（全部照搬 7.1，但须注意双曲方程正则性结果和抛物方程不一样）。

进阶内容：
我认为，微分方程 2 这门课的目的是让学生掌握接触现代 PDE 的语言和基本方法，课程本身并不涉及过难、过于专业的例子。但是，如果一整个学期都聚焦于第 5~7 章的线性方程理论的话，即使学到了这些内容，也不知道如何能够将它们应用到实际的 PDE 问题中。所以，我们理应在课上接触更多的例子。若以 Evans 的书为为教材的话，可以抽出第 7~12 章的少部分内容进行教学。
1、 粘性法：7.3 节的 vanishing viscosity method，光滑化并塞入抛物项，构造逼近解。后用

压缩映射原理证明（这是一个证明 PDE 解的局部存在性时极其常用的套路）逼近解存在，再用一致估计造出弱极限，证明弱极限是原方程的解。注意：粘性法在椭圆方程和几何分析中是重要的。

2、 傅立叶方法：书上 7.3 节的例子并不好，可以换成证明 3D 质量临界的 Schrodinger 方程（$iu_t+\Delta u=\pm|u|^{4/3}u$）解的局部存在性（需要少量调和分析知识补充，但不是主体）。利用插值得出自由方程解 L^p 范数衰减估计，再利用 TT*方法+Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式得出 Strichartz 估计，即对方程齐次/非齐次部分的时间-空间 L^qL^r 估计，这个估计是用来确定方程解的存在于何种函数空间 X 的。之后，再将原方程化成积分方程，方程的解等价于解映射的不动点存在性，所以只需证明解映射是 X→X 的压缩映射，再利用压缩映射原理即可。而整体解存在性则需要守恒量与 scaling。

有关 Sobolev 空间的傅立叶刻画、Besov 空间等理论，最好另外学习，并且要会 Littlewood-Paley 理论才好理解。关于傅立叶刻画，可看 Folland 实分析第 9 章，或者 Bahouri 的 Fourier Analysis and Nonlinear PDE 一书的前两章（查结论）；这部分的理解，可看 Tao 的非线性色散方程一书的附录 A。

3、 变分法（第八章）：核心想法是把某个能量泛函的临界点（极小化子）等价于方程（也是该能量泛函的 Euler-Lagrange 方程）的解。

第八章前三节讨论的是基本定义与极小化子存在性、正则性，但注意正则性的估计不能推广到高阶，否则非线性的结构会被破坏（线性项求导仍是线性项，但非线性项求导之后，初始满足的限制条件可能不再满足）。第四节讨论的是某些限制条件下的极小化子，其中有一些重要的例子，例如到球面的调和映照、流体中的 Stokes 问题。

第五节则是引入了翻山定理（Mountain-Pass），去讨论 Euler-Lagrange 方程其他的解有何性质，这节的例子$-\Delta u=\pm|u|^{p-1}u$ 零边值问题在 p<临界指标(n+2)/(n-2)的情况（证明解存在）可与 9.4 节 p>(n+2)/(n-2)（证明星型域上只有 0 解）的情况放在一起学，后者是利用 8.6 节的诺特定理导出了 Derrick-Pohozaev 恒等式从而导出矛盾。这一节里面提到的 Palais-Smale 条件在 PDE 中很重要，可用于其它方程的证明中。例如 3D 质量临界的散焦 Schrodinger 方程的散射猜想证明的关键步骤就用到了它。

第八章第 6 节非常的重要，诺特定理给出了构造方程守恒律、单调量的方法。我们在一些问题的证明或解答中，经常会看见乘一项东西，分部积分之后就能构造出我们想要的守恒量、单调量。这些乘子的构造，实际上可以通过诺特定理给出：前提是你需要知道区域的移动和函数的变化。很多微分方程中有用的估计都可由诺特定理导出，例如波动方程的 Morawetz 恒等式就是由诺特定理，将波方程这个二阶方程化为一阶方程。

4、其它非变分方法（第九章）：单调量与不动点法（不止压缩映射原理，拓扑学中的 Brower 不动点定理、吉洪诺夫 Tychonoff 不动点定理）、上下解方法、移动平面法（椭圆方程）、梯度流方法（凸分析）。

5、非线性波动方程（第 12 章）Evans 避开了使用傅立叶分析，所以有一个 L4L12 估计没有证明。这套理论也可以利用傅立叶方法+Strichartz 估计完成

关于教学：我认为基本内容（线性方程弱解理论）应该在两个月之内结束（Sobolev 空间+傅立叶刻画一个月，椭圆方程半个月，抛物方程半个月）。后两个月选讲第 8~12 章的部分内容（变分法+9.4 节 4~5 周，粘性法 1 周、傅立叶方法 1~2 周）。

调和分析初学建议：
预备知识：
（1）实分析：积分收敛定理、基本的 Lp 不等式；
（2）泛函分析中的各种基本定义（只需要知道定义）；
参考书：

[1] Javier Duoandikoetxea: Fourier Analysis, GSM 19, AMS (2000);
[2] Loukas Grafakos: Classical/Modern Fourier Analysis, GTM 249/250;
[3] 苗长兴：调和分析及其在偏微分方程中的应用；
[4] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.1, 2014;
[5] Elias M. Stein: Harmonic Analysis, 1993;
[6] Elias M. Stein: 奇异积分和函数的可微性, 1971;
[7] Thomas Wolff: Lecture Notes on Harmonic Analysis, 2003.

学习顺序：
第一部分：古典调和分析（研究核心：奇异积分）
（1）傅立叶变换、H-L 极大函数（包括 Riesz-Thorin 插值、Marcinkiewicz 插值），这是后继作各类估计的基本工具。

参考：Folland 实分析的第 8、9 章相关内容，后者参考[1]的第二章；

（2）Calderon-Zygmund 奇异积分（卷积型）：Calderon-Zygmund 分解是这里最重要的技术。另外还有一些关于奇异积分逐点收敛的结果（齐次核+cδ）。

参考：[4]的第 7 章前 3 节，细节可查[6].

（3）H^1 与 BMO 空间：C-Z 奇异积分算子没有 L1, L∞这两个端点有界性，所以我们考虑修改函数空间。这部分是作为（2）的补充。但 BMO 空间在后继的学习，乃至多线性调和分析的估计中都会用到（见[4]第二卷前 2 章）。

参考：[1]的第 6、7 章。

（4）几乎正交原理——Littlewood-Paley 理论（乘子观点的奇异积分、频率空间局部化思想）

熟知卷积经过傅立叶变换后变成乘子形式，所以这部分的 Mikhlin-Hormander 乘子定理可以看作是乘子版本的 C-Z 奇异积分定理，而这在部分（流体/色散）PDE 的估计中往往比 C-Z 定理更加实用。同时，Littlewood-Paley 理论的核心想法就是“频率局部化”（|ξ|的大、小直接影响了函数的性质，需要分别估计）、“几乎正交”（Littlewood-Paley 投影只与相邻的有穷个有交），所谓“几乎”一词的含义，可参考 Stein 实分析第四章的习题 23，或者直接看 Cotlar 引理的内容。

参考：[4]的第 8.1, 8.2, 8.5, 9.1, 9.2, 9.3 节。

（5）T1 定理（非卷积型奇异积分）可以视作奇异积分部分的结束。T1 定理（及其衍生的 Tb 定理）在水波方程中也会用到。更重要的是，其证明过程中衍生出的工具，便是后来多线性调和分析中仿积（Paraproduct）、多线性乘子定理（Coifman-Meyer 定理等）的雏形。可以说，这是一个走向多线性调和分析的定理，承上启下。

参考：[1]第 9 章、[2]的第二册。

第二部分：近现代调和分析（震荡积分）
参考：[5]的第 8~10 章，没有书比这写得更好了。简要了解可以看[4]的第 4、11 章。
第一型震荡积分：衰减估计与固相法。
第二型震荡积分：傅立叶限制性估计。其来源可以看成是色散方程的解，但背后隐藏与联系的东西，却是当今调和分析四大猜想（傅立叶限制性猜想、局部光滑性猜想、Kakeya 猜想、

Bocher-Riesz 猜想）。

关于教学：
一个学期应该上完第一部分+第二部分的第一型震荡积分+Tomas-Stein 限制性估计。其中，傅立叶变换基本性质、广义函数、Lp 插值定理、H-L 极大函数的 Lp 有界性最好在高等实分析课程中完成。以便直接进入调和分析的主题内容。

关于调和分析在 PDE 中的应用：
[3]是字典型书籍，适合查结论，不适合拿来自学。
需要用到的主要是：
（1）Sobolev 空间的 Fouier 或 L-P 刻画，及其衍生的函数空间 Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间、Bourgain $X^{s,b}$ 空间。
（2）Littlewood-Paley 理论：Bernstein 不等式、仿积分解。
（3）乘子定理：Mikhlin-Hormander、Coifman-Meyer 等等。
（4）对色散方程：Strichartz 估计，这是证明 GWP+Scattering 的关键。