中国科学技术大学

2018–2019学年泛函分析期中考试

姓名：________________ 学号：________________

要求：请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。证明的书写尽量条理清晰、简洁正确。

1. （50分）下面的说法是否正确？如果错误，请说明理由或举出相应的反例；如果正确，请给出证明.

   (a) $C[0,1]$ 在 $L^\infty[0,1]$ 中稠密.

   (b) $\left\{(x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0\right\}$ 是 ℓ^2 的闭子空间.

   (c) 若一个 Hilbert 空间中任何有界序列均有收敛子列，则这个 Hilbert 空间一定是有限维的.

   (d) 一个 Hilbert 空间可分当且仅当它有可数的正交规范基.

2. （15分）设 (X,ρ) 是一个度量空间，$\alpha > 0$. 假设 $A \subset X$ 满足对任意 $x, y \in A$ 且 $x \neq y$, 必有 $\rho(x,y) \geq \alpha$. 证明：A 是完备的.

3. （15分）设 $T : \ell^2 \to \ell^2$ 定义为

$$T(x_1, x_2, \cdots) := (x_3, x_4, \cdots).$$

   $T_n := T^n$. 设 $x \in \ell^2$ 固定. 计算：

   (a) $\{\|T_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ 的上界.

   (b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|$.

   (c) $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

4. （10分）我们知道 $C[0,1]$ 上的标准范数是上确界范数 $\|x\|_\infty := \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C[0,1]$ 上另一个范数，使得 $C[0,1]$ 完备并且满足

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n(t) \to x(t),\ \forall t \in [0,1].$$

   证明：$\|\cdot\|$ 等价于上确界范数.

5. （10分）设 X 是一个 Banach 空间，$\mathcal{L}(X)$ 是 X 上的有界线性算子的空间.

$$\mathcal{I}(X) := \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ 可逆且逆算子有界}\}.$$

   证明：$\mathcal{I}(X)$ 是 $\mathcal{L}(X)$ 中开集.