

# 偏微分方程 (I) 课程讲义勘误

章俊彦\*

勘误时间：2025 年 12 月 26 日      勘误版本：20251211

本次修订相比 20251211 版本的改动如下。

- 第 128 页最下方,  $\text{Tr } \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(t_0, \mathbf{x}_0) \leq 0$  之前漏打了  $u$ .
- 第 129 页推论 4.1.2 的证明错误, 现已更正。
- 第 131 页定理 4.1.4 第二行, 应该是  $u, v \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ , 之前漏打了一个  $C$ .
- 第 131-132 页的方程组 (4.1.1) 第一行改为  $\partial_t u - k\Delta u + c(t, \mathbf{x})u = f(t, \mathbf{x})$ , 其中  $c \geq 0$ .
- 第 133 页命题 4.1.6 证明过程的倒数第三行 “我没得到” 改为 “我们得到”。
- 第 136 页 (原第 135 页) 习题 4.1.2(1) 应该是证明  $0 \leq u^h(t, x) \leq 1$ .
- 第 138-139 页的定理 4.2.1, 4.2.2 叙述里面  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$  应该改为  $B(\mathbf{x}_0, r) \Subset \Omega$ , 即  $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} \subset \Omega$ .
- 第 140 页增加上/下调和函数的弱极值原理的叙述 (现定理 4.2.3)。
- 第 142 页 Hopf 引理证明中, 对辅助函数  $v$  的要求 (iii) 有误, 实际上只需要  $v|_{\partial B(\mathbf{0}, r)} = 0$  即可。
- 第 142 页最下方, 增加说明如下

本小节的最后, 我们指出对算子  $\mathcal{L}u := -\Delta u + cu$  ( $c \geq 0$ ) 也有类似的极大值原理。

我们将其结论列在定理 4.3.2--定理 4.3.5, 其证明方法与  $c = 0$  的情况几乎相同, 故此处不再赘述。

- 第 145 页梯度估计证明的第四行应该为 “将内部积分转化为边界积分”。
- 第 146 页命题 4.2.10(原第 145 页命题 4.2.9) 中的假设可以改为  $u \in C(\Omega)$ , 因为本节已经假设 “ $u$  是  $\Omega$  内的调和函数, 则  $u \in C^\infty(\Omega)$ ” 成立。
- 第 150 页 (原第 149 页) 习题 4.2.6 的待证不等式右边改为  $\frac{d}{R}u(\mathbf{x}_0)$ .
- 第 149 页习题 4.2.3 增加一问。
- 第 150 页习题 4.2.11 增加提示。
- 第 162 页习题 4.3.7 的提示更正笔误。

---

\*中国科学技术大学数学科学学院. Email: yx3x@ustc.edu.cn

- 第 166 页注记 5.1.3 第二条里面改为“流体是不可压缩的是指  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ”.
- 第 172 页 (5.2.7) 式应该是“曲面积分”  $dS_{\mathbf{y}}$ .
- 第 173 页顶部应该是固定  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ , 然后第二行漏了  $dS_{\mathbf{y}}$  (如果积分区域写成  $\partial\mathbb{R}_+^d$ ), 第四行漏了因子  $\frac{2x_d}{d\alpha(d)}$ .
- 第 173 页-174 页多处  $d\mathbf{y}$  应该改成  $dS_{\mathbf{y}}$ .
- 第 175 页图片下方有两处  $\Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$  漏打了 tilde.