

# 2025年秋季学期偏微分方程作业四

## 极大值原理、格林函数

截止时间：2026年元月5日下课前

作业题1-9是必做题，作业题10是选做题。

作业题 1 (习题4.1.3). 设  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是单调递增函数,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域, 常数  $T > 0$ . 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u) = 0, & \text{in } \Omega_T \\ u(0, x) = \varphi(x), & t = 0, x \in \overline{\Omega} \\ u(t, x) = g(t, x), & t \geq 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中  $\varphi, g$  是给定的有界光滑函数。

- (1) 设  $f \in C^1$ , 叙述并证明微分算子  $\mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u + f(u)$  的比较原理。
- (2) 如果只假设  $f$  连续, 证明上述方程解的唯一性。(提示: 可以用能量法。)

作业题 2 (习题4.1.4). 考虑一维热方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in } [0, +\infty) \times (0, \pi), \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \ (t \geq 0).$$

- (1) 证明: 对任意  $a \in \mathbb{R}$ ,  $v(t, x) = ae^{-t} \sin x$  满足上述方程。
- (2) 若初值选取为  $u(0, x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ , 证明: 对应的解满足  $e^{-t} \leq \max_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-t}$ .

提示: (2) 可以用比较原理, 可以联想(1)中解的初值是什么。

作业题 3 (习题4.2.3, 下调和函数的弱极值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集 (未必是区域)。函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  是  $\Omega$  中的下调和函数, 即  $-\Delta u \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立。

- (1) 证明: 对任意球  $B(x, r) \Subset \Omega$ , 成立  $u(x) \leq \int_{B(x, r)} u(y) dy$ .
- (2) 证明:  $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .
- (3) 证明: 若  $v \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  是  $\Omega$  内的调和函数, 则  $|\nabla v|$  在  $\partial\Omega$  上达到最大值。

提示: (1)模仿调和函数平均值原理的证明。(2)先证明 $-\Delta u < 0$ 的情况,对一般情况考虑扰动 $u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2$ 。(3)计算 $\Delta(|\nabla v|^2)$ 并证明它非负。

作业题 4 (习题4.2.5, 选做). 设 $\Omega := B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\Delta u - 2u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g(\mathbf{x}).$$

这里 $g$ 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数, 证明: 存在常数 $C > 0$ 使得 $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C$ .

提示: 选取充分大的常数 $\lambda > 0$ , 使得 $\Delta(u^2 + \frac{\lambda}{4}|\mathbf{x}|^2) \geq 0$ .

作业题 5 (习题4.2.6). 设 $u \in C^3(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是开集 $\Omega$ 内的非负调和函数, 球 $B(\mathbf{x}_0, R) \Subset \Omega$ . 证明: 对任意 $1 \leq i \leq d$ 有 $|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d}{R} u(\mathbf{x}_0)$ .

提示:  $u \geq 0$ 表明 $u = |u|$ , 思考在模仿命题4.2.9的证明过程中如何利用这个事实得到我们想要的结论。

作业题 6 (习题4.2.8). 设 $u$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的调和函数. 证明: 若 $u$ 满足以下两条件中任一个, 则 $u$ 是常数。

(1)  $\exists$  常数  $C > 0, p > 0$  使得  $|u(\mathbf{x})| \leq C(\log(1 + |\mathbf{x}|^p) + 1) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

(2)  $\exists$  常数  $C \in \mathbb{R}, u(\mathbf{x}) \geq C \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

作业题 7 (习题4.3.5). 设 $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  ( $i = 1, 2$ )是如下方程的解

$$-\Delta u_i + c_i(\mathbf{x})u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_i|_{\partial\Omega} = g_i(\mathbf{x}).$$

若 $c_2(\mathbf{x}) \geq c_1(\mathbf{x}) \geq 0$ 和 $g_2(\mathbf{x}) \geq g_1(\mathbf{x}) \geq 0$ 恒成立, 证明:  $u_1(\mathbf{x}) \geq u_2(\mathbf{x})$ 在 $\overline{\Omega}$ 上恒成立。

提示: 先证明 $u_i \geq 0$ , 再考虑 $u_1 - u_2$ 满足的方程和边值条件。

作业题 8 (习题5.2.1). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ )是边界光滑的有界区域, 定义 $D := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\}$ 为 $\Omega$ 的直径. 记 $\Phi(\mathbf{x})$ 为Laplace方程的基本解 (见讲义上的定义3.3.1). 今固定 $\mathbf{x} \in \Omega$ , 证明:

(1) 格林函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \psi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ 是唯一的, 且满足 $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = -1$ ;

(2) 当  $d \geq 3$  时, 对任意 $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 有 $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 成立;

(3) 当  $d = 2$  时, 对任意 $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 有 $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{D}$ 成立.

提示: (1)边值为1且在有界区域 $\Omega$ 中调和的函数只能是常值函数1. (2)-(3)思考怎么用极大值原理, 本题(2)是以前的考试原题。

作业题 9 (习题5.2.3, 球上的Harnack不等式). 设 $u$ 是闭球 $\overline{B(\mathbf{0}, R)} \subset \mathbb{R}^d$ 上的非负调和函数。

(1) 结合讲义上的公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2} \frac{R - |\mathbf{x}|}{(R + |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0}) \leq u(\mathbf{x}) \leq R^{d-2} \frac{R + |\mathbf{x}|}{(R - |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0})$$

(2) 用(1)证明:  $\forall r \in (0, R)$ , 成立不等式  $\sup_{B(\mathbf{0}, r)} u \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d \inf_{B(\mathbf{0}, r)} u$ .

作业题 10 (问题4.1.1, 选做). 习题4.1.4中, 假设初值  $u(0, x) = u_0(x) \in C^1([0, \pi])$  且满足  $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ , 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得对应的解满足  $\sup_{x \in [0, \pi]} |u(t, x)| \leq C e^{-t}$ .

提示: 将  $u_0(x)$  与习题4.1.4(1)初值的常数倍相比较, 这是本题假设初值  $C^1$  的原因所在。