Ch 6 二阶线性椭圆方程

§6.1 弱解的定义

本章只考虑如下 Dirichlet 问题 $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$，其中 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 开.

$u:\overline{U}\to\mathbb{R}^n$.

$f:U\to\mathbb{R}$ 给定.

其中 L 具有两种形式之一：

① $Lu=-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(x)\partial_i u)+\sum_{i=1}^n b^i(x)\partial_i u+c(x)u$. （散度形式）

② $Lu=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^n b^i(x)\partial_i u+c(x)u$. （非散度形式）

Rmk：若 $a^{ij}\in C^1$，则①又可以写成②

②'：$Lu=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x)\partial_i u+c(x)u$，$\tilde{b}^i=b^i-\sum_{j=1}^n\partial_j a^{ij}$

事实上，散度形式常用于研究弱解的存在性，唯一性，正则性.

非散度形式常用于研究极大值原理

下设 $a^{ij}=a^{ji}$

Def：称微分算子 L（如上）是一致椭圆的，若 $\exists\theta>0$ s.t. $\forall\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

成立：$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2$. a.e. $x\in U$. 该条件称作一致椭圆条件

从而，一致椭圆算子 L 的最高次系数矩阵 $A=\{a_{ij}\}_{i,j}$ 特征值 $\geq\theta$.（实对称）

例如. $a^{ij}=\delta_{ij}$. $b^i=c=0$ $\Rightarrow L=-\Delta$.

下设 a^{ij}，b^i，$c\in L^\infty(U)$.，$f\in L^2(U)$.

Def：(1) 双线性形式 $B[u,v]:=\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u\cdot v+cuv\,dx$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$.

(2). 称 $u\in H_0^1(U)$ 是 (*) $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解，若 $\forall v\in H_0^1(U)$.

成立 $B[u,v]=(f,v)_{L^2}$，该式称作 (*) 的变分形式.

更一般地，考虑

(#) $\begin{cases} Lu=f^0-\sum_{i=1}^n\partial_i f^i & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ L 为①的形式 $f^i\in L^2(U)$.

令 $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f^i \in H^{-1}(U) = (H_0^1(U))^*$.

则：称 $u \in H_0^1(U)$ 是 $(*)$ 的弱解，指的是 $B[u,v] = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

$f = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i \partial_i v$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $H^{-1}(U)$ 与 $H_0^1(U)$ 的作用

Rmk：(1) 上述定义事实上都由可直接由分布理论的角度来理解，即在 D' 中，$Lu = f \iff \forall \varphi \in C_c^\infty$，$\langle Lu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$，再写成作用程的形式，并注意到 C_c^∞ dense in H_0^1 即可.

(2) 同理，$\partial U \in C^1$ 时，我们可以定义 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = g & \text{in } \partial U \end{cases}$ 的弱解，

实际上，我们只须设 $w \in H^1(U)$，$Tr\, w = g$. $\tilde{u} = u - w$ 即可

$\square$

§6.2 Lax-Milgram 定理及~~其在~~椭圆方程弱解的存在定理

Thm 6.2.1：设 H 是 Hilbert 空间，$B: H \times H \to \mathbb{R}$ 是双线性~~形~~映射.

且 $\exists \alpha, \beta > 0$，使 ① $|B[u,v]| \le \alpha \|u\| \cdot \|v\|$ (Boundedness) $\forall u, v \in H$.

② $|B[u,u]| \ge \beta \|u\|^2$ (Coercivity) 强制性 $\forall u \in H$.

则，任给定 H 上的有界线性泛函 $f: H \to \mathbb{R}$，都存在唯一 $u \in H$. 使 $B[u,v] = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in H$.

Proof：Step 1：Riesz 表示定理：

Fix $u \in H$，则 $v \mapsto B[u,v]$ 是 H 上的有界线性泛函，于是由 Riesz 表示定理，存在唯一 $w \in H$. s.t. $B[u,v] = \langle w, v\rangle \quad \forall v \in H$.

下面希望，令 $A: u \mapsto w$，去证明 $\begin{cases} A: H \to H \text{ 是有界线性算子.} \\ A \text{ 是一一映射.} \\ \operatorname{Im} A \text{ 闭 } H, \quad 0 = (\operatorname{Im} A)^\perp. \end{cases}$

Step 2：$A: H \to H$ 有界线性.

线性显见，因为 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. $u_1, u_2 \in H$.

$$\begin{aligned}\langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v\rangle &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &= \lambda_1 \langle Au_1, v\rangle + \lambda_2 \langle Au_2, v\rangle = \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ 线性

有界: $\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = B[u, Au] \underset{\uparrow}{\leq} \alpha \|u\| \cdot \|Au\|$

B[·,·] 有界性条件①

$\Rightarrow \|A\| \leq \alpha$.

Step 3: A 是 1-1 的, 且 Im A 闭

$\forall w \in \overline{\mathrm{Im}\, A}$, 取 $v_n \in H$. s.t. $w = \lim_{n\to\infty} A v_n$ in H.

由 Coercivity ②: $\forall n, p \in \mathbb{Z}_+$.

$$\beta \| v_{n+p} - v_n \|^2 \leq \left| B[v_{n+p} - v_n, v_{n+p} - v_n] \right|$$
$$= \left| \langle v_{n+p} - v_n, A(v_{n+p} - v_n) \rangle \right|$$
$$\leq \|v_{n+p} - v_n\| \cdot \|Av_{n+p} - Av_n\|$$

$\Rightarrow \|v_{n+p} - v_n\| \leq \frac{1}{\beta} \|Av_{n+p} - Av_n\| \to 0$. as $n \to \infty$.

$\Rightarrow \{v_n\}$ 为 H 中的柯西列. $\exists v^* \in H$. $v_n \to v^*$ in H.

由 A 连续 (Step 2), 有 $w = Av^* \in \mathrm{Im}\, A$ $\Rightarrow$ Im A 闭

Step 4: $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \{0\}$; 设 $w \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp$. 则 $\langle Av, w\rangle = 0$

$\Rightarrow B[v, w] = 0$

令 $v = w$ 有 $\beta \|w\|^2 \leq 0$ $\Rightarrow w = 0$

因此, A 是一个 $H \to H$ 的有界线性满射.

再由 Riesz 表示定理, $\forall v \in H$. $\exists ! w \in H$. $\langle f, v\rangle = (w, v)$

由 Step 2-4 知 $Au = w$ $(\exists u \in H)$

$\Rightarrow B[u, v] = (Au, v) = \langle w, v\rangle = \langle f, v\rangle$ $v \in H$.

Step 5: 而唯一性 若 $\tilde{u}$ 也满足. 则 $B[u - \tilde{u}, v] = 0$ $\forall v \in H$.

取 $v = u - \tilde{u}$ 即有 $u = \tilde{u}$.

□

Thm 6.2.2 (能量估计). $\exists\, \alpha, \beta > 0$ $\gamma \geq 0$ s.t.

① $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$

② $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$. $\quad \forall u, v \in H_0^1(U)$.

Proof: 直接计算即可

$$|B[u,v]| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_U |Du|\cdot|Dv|\, dx + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du|\cdot|v|\, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u|\cdot|v|\, dx.$$

$$\leq C\left(\|Du\|_2 \|Dv\|_2 + \|Du\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2\right)$$

$$\leq C\left(\|u\|_2 + \|Du\|_2\right)\left(\|v\|_2 \|Dv\|_2\right)$$

$$\leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad \text{for some } \alpha > 0.$$

$$B[u,u] = \int_U \underline{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u\, u + cu^2\, dx.$$

$$\geq \theta \int |Du|^2 - \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \int_U |Du|\cdot|u|\, dx - \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2\, dx.$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\geq} \theta \int |Du|^2 - C_1 \|Du\|_2 \cdot \|u\|_2 - C_2 \|u\|_2^2.$$

$$\overset{\text{Young}}{\geq} \theta \int |Du|^2 - C_1 \varepsilon \|Du\|_2^2 - C_1 \cdot \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_2^2 - C_2 \|u\|_2^2.$$

$$\Rightarrow (\theta - C_1 \varepsilon) \|Du\|_2^2 \leq B[u,u] + \left(C_1 \cdot \frac{1}{4\varepsilon} + C_2\right) \|u\|_2^2.$$

取 $C_1 \varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 即有: $\frac{\theta}{2} \|Du\|_2^2 \leq B[u,u] + C_3 \|u\|_2^2$

两边加上 $\frac{\theta}{2} \|u\|_2^2$ 即可

注意到，若 $\gamma>0$，则 $B[\cdot,\cdot]$ 并不符合 Lax-Milgram 定理的条件，因此，在叙述解的存在性定理时，应作出修正。

Thm 6.2.3（第一存在定理）

$\exists \gamma\geq 0$ s.t. $\forall \mu\geq\gamma$，$\forall f\in L^2(U)$，~~使得~~都有：$(**)\begin{cases} Lu+\mu u=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

存在唯一的弱解 $u\in H_0^1(U)$。

<u>Proof</u>：取 6.2.2 中的 γ，令设 $\mu\geq\gamma$，$B_\mu[u,v]:=B[u,v]+\mu(u,v)$，$\forall u,v\in H_0^1(U)$

$$L_\mu u:=Lu+\mu u$$

则 $\begin{cases} L_\mu \text{ 是 ~~关于~~ 一致椭圆的} \\ B_\mu[\cdot,\cdot] \text{ 满足 Lax-Milgram Thm 的条件} \end{cases}$

Fix $f\in L^2(U)$，$\langle f,v\rangle:=(f,v)_{L^2}$，则 $v\mapsto(f,v)$ 是 $H_0^1(U)$ 上的有界线性泛函（算子范数为 $\|f\|_{L^2}$）。

由 Lax-Milgram 定理，$\exists!\, u\in H_0^1(U)$

$$B_\mu[u,v]=\langle f,v\rangle \quad v\in H_0^1(U)\text{。}\quad u \text{ 即为 } (**) \text{ 的弱解}$$

$\square$

<u>Rmk</u>：$H_0^1\longrightarrow H^{-1}$

类似地，我们可证明，$\forall f^i\in L^2(U)$ $(0\leq i\leq n)$，

$\exists!$ 弱解 u of $\begin{cases} Lu+\mu u=f^0-\sum_1^n \partial_i f^i & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

$\square$

§6.3 Fredholm 二择一与弱解存在性.

本节只讨论 Hilbert 空间的结果，一般 Banach 空间的 Fredholm 理论，参见

Haim Brezis : Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs, chapter 6.

or 张恭庆上册 Ch 4.1 - 4.3.

6.3.1: 紧算子:

设 X、Y 是实 Banach 空间，称有界线性算子 $K: X \to Y$ 是紧算子，若 K 将 X 中任何有界集 B，映成 Y 中的列紧集 K(B).

不难证明，"这等价于"对任何 X 中的有界序列 $\{u_n\}$，$\{Ku_n\}$ 在 Y 中有收敛子列 $\{Ku_{n_j}\}$.

~~Thm~~ Prop 6.3.1 (紧算子的基本性质).

(1). 若 $x_n \rightharpoonup x$ in X，则 $Kx_n \to Kx$ in Y.

(2). 若 $K_1: X \to Y$，$K_2: Y \to Z$ 有一个是紧算子，另一个是有界线性算子，则 $K_2 \circ K_1: X \to Z$ 是紧算子

(3). 若 H 是 Hilbert 空间，则 $K: H \to H$ 是紧算子，则 $K^*: H \to H$ 也是紧算子.

Proof: (1) $x_n \rightharpoonup x$ in X. 要证: $Kx_n \to Kx =: y$ in Y.

反证: 若不然，则 $\exists \varepsilon_0 > 0$，正整数列 $\{n_k\} \to \infty$ s.t. $\|Kx_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$

~~claim: (Cor~~

Fact: (Corollary of Banach-Steinhaus Thm).

$x_n \rightharpoonup x$ 则 $\|x_n\|_X$ 有界

又因 K 紧，故存在子列 $\{n_{k_j}\}\to\infty$ s.t. $Tx_{n_{k_j}} \to$ 某个 $z \in Y$

希望: $Kx_{n_{k_j}} \rightharpoonup y$ in Y. 从而 $y = z$. (因 $Kx_{n_{k_j}} \to z$，强极限存在则必等于弱极限) $\Rightarrow Kx_{n_{k_j}} \to y$

check this: $\forall y^* \in Y^*$.

$\langle y^*, Kx_{n_{k_j}} - y \rangle = \langle K^* y^*, x_{n_{k_j}} - x \rangle \xrightarrow{x_{n_{k_j}} \rightharpoonup x} 0$ ✓

与 $\|Kx_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$ 矛盾!

(1) 完证.

(2) $X \xrightarrow{K_1} Y \xrightarrow{K_2} Z$

若 K_1 紧，则 X 中的有界序列 $\{u_n\}$ 在 Y 中有收敛子序列 $\{K_1 u_{n_k}\}$

又 K_2 连续，故 $\{(K_2\circ K_1)u_{n_k}\}$ 在 Z 中收敛 $\Rightarrow K_2\circ K_1$ 紧。

K_2 紧，则类似

(3) 设 $\{u_n\}$ 是 H 中的有界列，由 H 自反，据 Banach-Alaoglu 定理知，

存在弱收敛子列 $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in H

要证：$K^* u_{n_j} \to K^* u$

<u>check</u>: $\|K^* u_{n_j} - K^* u\|^2 = \langle K^* u_{n_j} - K^* u, K^* u_{n_j} - K^* u\rangle$

$$= \langle K(\underbrace{K^* u_{n_j} - K^* u}), u_{n_j} - u\rangle$$

由 K^* 线性，$K^* u_{n_j} \rightharpoonup K^* u$

再由 K 紧，$KK^* u_{n_j} \to KK^* u$.

$\to 0$ as $j\to\infty$

Thm 6.3.2 (Fredholm Alternative).

$K: H\to H$ 紧（H 为可分 Hilbert 空间），则

(1) $\dim N(I-K) < +\infty$，其中 $N(I-K) = \{x\in H \mid (I-K)x = 0\}$

(2) $Im(I-K)$ 闭

(3) $Im(I-K) = N(I-K^*)^{\perp}$.

(4) $N(I-K) = \{0\} \iff Im(I-K) = 0$.

(5) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)^{\perp}$.

<u>Proof</u>: (1). 反设 $\dim N(I-K) = +\infty$ 则 $N(I-K)$ 中，可以找到标准正交系 $\{u_n\}_{n\ge 1}^{+\infty}$

且 $Ku_n = u_n$. $\forall n\in\mathbb{Z}_+$

又：$m\ne n$ 时，$\|u_m - u_n\|^2 = \|u_m\|^2 - 2\underset{0}{\langle u_m, u_n\rangle} + \|u_n\|^2 = 2$.

$\Rightarrow \|Ku_n - Ku_m\| = \sqrt{2}$. $\forall m\ne n$

这与 K 的紧性矛盾（因为 $\{u_n\}_1^\infty$ 一致有界，K 紧，则 $\{Ku_n\}$ 在 H 中有收敛子列，但上式表明这不可能）

(1) 得证

(2) 设 $\{v_k\}_1^\infty \subset \mathrm{Im}(I-K)$ $v_k \to v$ (均为彬彬之)

则 $\exists \{u_k\} \subseteq N(I-K)^\perp$ s.t. $u_k - Ku_k = v_k$.

希望：在 H 中，$u_k \to u$，且 $u - Ku = v \in \mathrm{Im}(I-K)$.
逆而有

如此，我们 claim: $\exists \gamma > 0$ s.t. $\|u - Ku\| \geq \gamma \|u\|$

若 claim 对，则 $\|v_m - v_n\| \geq \gamma \|u_m - u_n\|$ $\forall m, n$ ~~正整数~~
令 $m, n \to +\infty$ 即有我们
想要的 $u_k \to u$，$u - Ku = v \in \mathrm{Im}(I-K)$
逆而

claim 证明如下：

反证．若 claim 不对，则 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ 存在 $u_k \in N(I-K)^\perp$

$$\begin{cases} \|u_k\| = 1, \\ \|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_k - Ku_k \to 0$$

但 $\{u_k\}_1^\infty$ 在 H 中一致有界，H 自反，故由 Banach-Alaoglu 定理

存在子列 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in H.

由于 K 是紧算子，所以 $Ku_{k_j} \to Ku$ in H

又 $u_k - Ku_k \to 0$

故．$u_{k_j} \to Ku = u$．$\Rightarrow u \in N(I-K) \Rightarrow \forall j.\ \langle u_{k_j}, u \rangle = 0$

令 $j \to \infty$ 有 $u = 0$．而 $\|u_{k_j}\| = 1$．这不可能．claim 成立．

于是 (2) 得证．

(3) 的成立只需注意到如下事实：

$\overline{\mathrm{Im}\, A} = N(A^*)^\perp$ $\forall$ 有界线性 $A: H \to H$.

再结合 (2)：$\mathrm{Im}(I-K)$ 闭，即可．

(4) $\Rightarrow$：先设 $N(I-K) = \{0\}$ 反设 $\mathrm{Im}(I-K) \subsetneqq H$.

则 $H_1 = (I-K)(H) \subsetneqq H$ 是 H 的真闭子空间（由 (2)）.

$H_2 = (I-K)^2(H) \subsetneqq H_1$（因 $I-K$ 是单射，这时 $N(I-K) = 0$）

$\vdots$

$H_k = (I-K)^k(H) \subsetneqq H_{k-1} \cdots\cdots \subsetneqq H$ 是 H 的真闭子空间

$\forall k \in \mathbb{Z}_+$ 选取 $u_k \in H_k$，$\|u_k\|_H = 1$．$u_k \in H_{k+1}^\perp$

则 $\forall k > l$：$Ku_k - Ku_l = u_k - u_l + (Ku_k - u_k) - (Ku_l - u_l)$

$H_{k+1} \subsetneqq H_k \subsetneqq H_{l+1} \subsetneqq H_l$．$\Rightarrow u_k, Ku_k - u_k, Ku_l - u_l \in H_{l+1}$.

但 $u_l \in H_{l+1}^\perp$，$\|u_l\| = 1$

故. $\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$. $\forall k, l \geq 1$, $k \neq l$. 但因 $\{u_k\}$ 有界，在H中必有收敛子列
弱
$\Rightarrow \{Ku_k\}$ 必有强收敛子列
K紧
不可能有 $\forall k, l \geq 1$. $k \neq l$
$\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$ 矛盾！

故. (4) $\Rightarrow$ 对.

$\Leftarrow$: 若 $H = Im(I-K)$ 由(3): $N(I-K^*) = 0$.

由Prop (3)有 K^* 紧，类似于 $\Rightarrow$ 有 $Im(I-K^*) = H$.

$\Rightarrow$ ~~但~~ $N(I-K) = R(I-K^*)^\perp = \{0\}$. $\Rightarrow$ (4)得证.

(5). 先证 $\dim N(I-K) \geq \dim Im(I-K)^\perp$. 若这成立，则由于 $\underset{N(I-K)}{\overset{\shortparallel}{Im(I-K^*)^\perp}}$

有 $\dim N(I-K^*) \geq \dim Im(I-K^*)^\perp$

$= \dim N(I-K)$

K与K^*换一下，又有反向不等式，进而(5)得证.

为此，我们用反证法：反设 $\dim N(I-K^*) < \dim Im(I-K)^\perp$.

则 $\exists$ 有界线性映射 $A: \overset{N(I-K)}{\cancel{H}} \to Im(I-K)^\perp$. 1-1但不满.

延拓：$Au = 0$ $\forall u \in N(I-K)^\perp$.

$\Rightarrow$ A是H上的有穷秩算子，进而是紧算子.

从而 A是 H上的有穷秩算子，进而是紧算子.
$\Rightarrow K+A$ 紧.

Claim: $N(I-(K+A)) = 0$.

check: 若 $u \in N(I-(K+A))$，则 $\underset{Im(I-K)}{u-Ku} = Au$ $\in Im(I-K)^\perp$.

$= 0$.

$u \in N(I-K)$ $\Rightarrow Au = 0$.

$\Rightarrow$ ~~$u \in N(I-K)$~~ $\Rightarrow$. $u = 0$. (因 A 1-1 在 $N(I-K)$上.

~~对(4)~~. 令 $\tilde{K} = K+A$，对 $\tilde{K}$ 用(4)

得 $Im(I-(K+A)) = H$. 但这不可能. 因为如果 $v \in Im(I-K)^\perp$.
但 $v \notin Im A$.
则 $u - (Ku + Au) = v$ 无解
~~(因 $Im(I-K^*)^\perp = N(I-K)$)~~
这表明 $v \notin Im(I-(K+A))$. 矛盾!

$\square$

下面来看，如何将 Fredholm 二择一用于证明第二存在定理.

Def：(1) L 的伴随算子 L^* 定义如下：设 $b^i \in C^1(\bar{U})$.

$$L^* v := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a^{ij}\partial_j v) - \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i v + \left(c - \sum_{i=1}^{n} \partial_i b^i\right) v.$$

(2). 伴随双线性形式：$B^* : H_0^1(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$

$$B^*(v, u) \longmapsto B[u, v] \qquad \forall u, v \in H_0^1(U).$$

(3) 称 $v \in H_0^1(U)$ 是伴随方程 $\begin{cases} L^* v = f & \text{in } U \\ v = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解，是指 $B^*[v, u] = (f, u)$ $\forall u \in H_0^1(U)$.

Rmk：L^* 的定义是自然的，因为形式上来看：

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^* v\rangle \quad \text{(伴随算子的定义)}$$

$$\| $$

$$\sum_{ij}\int_U a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + \sum_i \int_U b^i \partial_i u \cdot v + \int_U cuv$$

$\|$ 分部积分，边界项 vanishing.

$$= -\sum_{i,j}\int_U \partial_i(a^{ij}\partial_j v)\cdot u - \sum_i \int \partial_i(b^i v)\cdot u + \int_U cuv.$$

$$\|$$

$$\left\langle u, -\sum_{i,j} \partial_i(a^{ij}\partial_j v) - \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i v + \left(c - \sum_i \partial_i b^i\right) v \right\rangle.$$

$$\|$$

$$\langle u, L^* v\rangle.$$

由此，B^* 的定义也是自然的.

$\square$.

Thm 6.3.3 (弱解第二存在性定理).

(1). 以下两条恰好成立一条.

(α): $\forall f\in L^2(U)$, ~~存在唯一解~~ 方程 (*) $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 存在唯一的弱解 $u\in H_0^1(U)$

(β): 对齐次方程(#) $\begin{cases} Lu=0 & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$, 存在~~唯一的~~弱解 $u\neq 0$,

(2). 若 (β) 成立, 则 (#) 的弱解空间 $N\subset H_0^1(U)$ 是有穷维的, 且维数等于以下伴随方程的弱解空间 $N^*\subset H_0^1(U)$: $(\#)^*$: $\begin{cases} L^*v=0 & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$.

(3) (*) 有弱解. $\Longleftrightarrow$. $(f,v)=0$. $\forall v\in N^*$.

(α). (β)

Proof: 首先处理一些记号问题

在第一存在定理中. 取 $\mu=\nu$.

令双线性形式 $B_\nu[u,v]=B[u,v]+\nu(u,v)$.

$L_\nu u:=Lu+\nu u$

由第一存在定理, $\forall g\in L^2(U)$. $\exists!\ u\in H_0^1(U)$. s.t. $B_\nu[u,v]=\langle g,v\rangle$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

在该式成立时, 我们记 $u=L_\nu^{-1}g$

Observation: $u\in H_0^1(U)$是 (*) 的弱解.

$\Longleftrightarrow \forall v\in H_0^1(U)$, $B_\nu[u,v]=\langle \nu u+f, v\rangle$ (两边都加上νu即可)

$\Longleftrightarrow$, $u=L_\nu^{-1}(\nu u+f)$. $\Longleftrightarrow u-\nu L_\nu^{-1}u=L_\nu^{-1}f$.

令. $Ku=\nu L_\nu^{-1}u$. $h=L_\nu^{-1}f$.

则$\Longleftrightarrow (I-K)u=h$.

希望证明: $K:L^2(U)\to L^2(U)$ 是紧算子.

若能证明 $K: L^2 \longrightarrow L^2$ 紧.

则由Thm 6.3.2 (Fredholm二择一) 知: 要么

(α') $\forall h \in L^2(U)$. $(I-K)u = h$ 有唯一解 $u \in L^2(U)$. (对应 $N(I-K)=0$ 的case)

要么

(β') $u - Ku = 0$ 在 $L^2(U)$ 有非零解. (对应 $N(I-K) \neq 0$)

对 (α') case: $(\alpha') \Longleftrightarrow (\alpha)$ 有唯一弱解 $u \in H_0^1(U)$.

又: ~~(\alpha)~~ (α') 有解 $\Longleftrightarrow$ $\langle h, v\rangle = 0$ $\forall v$ satisfies $v - K^* v = 0$

而 $\langle h, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle Kf, v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, K^* v\rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, v\rangle$. 故上式 $\Longleftrightarrow \langle f, v\rangle = 0$

$v = K^* v$.

对 (β) case: ~~$N(I-K) \neq 0 \Longleftrightarrow Im(I-K) = 0$~~

$\Downarrow$

~~$N(I-K^*)^{\perp} = 0$~~

$\Downarrow$

$N(I-K) \neq 0 \Rightarrow \dim N(I-K) = \dim N(I^*-K^*)^{\perp}$

即. $\dim N = \dim N^*$.

$\square$

§6.4: 紧算子的谱(Hilbert空间). 解的第3存在定理.

本节证明如下定理:

Thm 6.4.1 (第3存在定理) 称

(1) 存在一个至多可数集 $\Sigma\subset\mathbb{R}$, 使 $\begin{cases} Lu=\lambda u+f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 有唯一弱解 $\Longleftrightarrow \lambda\notin\Sigma$. 对每个给定的 $f\in L^2(U)$.

(2). 若 $|\Sigma|=+\infty$, 则 $\Sigma=\{\lambda_k\}_1^\infty$ 是一列单不减且趋于$+\infty$的序列.

□.

在此之前, 我们证明紧算子的谱定理. (附录727页 Thm 6).

Def: 设 $A: X\to X$ 是有界线性算子. (X为Banach空间)

(1) A的预解集(resolvent set)为 $\rho(A)=\{\eta\in\mathbb{R} \mid A-\eta I$ 是一一映射且是满射$\}$.

(2). A的谱(spectrum). $\sigma(A)=\mathbb{R}-\rho(A)$

• $\eta\in\rho(A)$. 则由闭图像定理, $(A-\eta I)^{-1}: X\to X$. 是有界线性算子.

(3). 称$\eta\in\sigma(A)$为A的特征值, 若 $N(A-\eta I)\neq\{0\}$, 特征值全体记作 $\sigma_p(A)$, 又称"点谱"

(4) 若η是特征值 $w\neq 0$. $Aw=\eta w$. 则称w是特征向量.

Thm 6.4.2 (紧算子的谱) 设H为无穷维可分Hilbert空间, $K: H\to H$紧算子.

则 (1) $0\in\sigma(K)$

(2) $\sigma(K)-\{0\}=\sigma_p(K)-\{0\}$

(3) $\sigma(K)-\{0\}$是有限集 或是一个趋于0 的序列.

Proof: (1) 反证: 若 $0\notin\sigma(K)$. 则 $K: H\to H$是双射. (注意$\sigma(K)$定义)

$Id=K\circ K^{-1}$. 是一个紧算子与连续线性算子的复合 从而也是紧算子.

但 Id_H是紧算子 $\Longleftrightarrow \dim H<+\infty$ (否则, 考虑H中的单位球面B. $Id(B)=B$. ~~但B~~ Id紧则B列紧 从而$\dim H<+\infty$)

矛盾!

(2). 设$\eta\neq 0$. $\eta\in\sigma(K)$. ~~相~~ 反设 $N(K-\eta I)=\{0\}$

由Fredholm二择一, 有: $\mathrm{Im}(K-\eta I)=H$. $\Rightarrow \eta\in\rho(K)$. 与$\eta\in\sigma(K)$矛盾!

只用证

(3). 若 $\sigma(K)-\{0\}$ 不是有限集时，$\sigma(K)-\{0\}$ ~~由一列 $\eta_k \to \eta = 0$ 组成~~ 的凝聚点只有0.

设 $\{\eta_k\}_1^\infty \subset \sigma(K)-\{0\}$ 互不相同. $\eta_k \to \eta$. 下证 $\eta = 0$.

· 由 $\eta_k \in \sigma_p(K)$. 则 $\exists w_k \neq 0$. $Kw_k = \eta_k w_k$.

设 $H_k = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$ 则 $H_k \subsetneq H_{k+1} \subsetneq \cdots$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

又注意到. $(K-\eta_k I)H_k \subseteq H_{k-1}$ $(k \geq 2)$.

对每个 k. 我们取 $u_k \in H_k \cap H_{k-1}^{\perp}$ $\|u_k\| = 1$.

$k > l$ 时. 因 $H_{l-1} \subsetneq H_l \subsetneq H_{k-1} \subsetneq H_k$. 因此.

$$\left\|\frac{Ku_k}{\eta_k} - \frac{Ku_l}{\eta_l}\right\| = \left\|\frac{\overbrace{(Ku_k - \eta_k u_k)}^{\in H_{k-1}}}{\eta_k} - \frac{\overbrace{(Ku_l - \eta_l u_l)}^{\in H_{k-1}}}{\eta_l} + \underbrace{u_k}_{\in H_k \cap H_{k-1}^{\perp}} - u_l\right\| \geq 1.$$

若 $\eta \neq 0$. 则这与 K 的紧性矛盾，因 K 将有界集映成列紧集，但 $\{\frac{u_k}{\eta_k}\}_1^\infty$ 并不列紧 □

回到方程中. Thm 6.4.1 中所述的 Σ，称作 L 的谱.

Proof of 6.4.1:

$$(*)\begin{cases} Lu = \lambda u + f. & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

由 Fredholm 二择一 "$N(I-K)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I-K) = H$"

知, 给定 $f \in L^2(U)$ 时, $(*)$ 存在唯一弱解 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} Lu - \lambda u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 只有唯一弱解 $u = 0$.

现取 γ 为 Thm 6.2.2 (Lax-Milgram in H_0^1) 中的 $\gamma > 0$, 且设 $\lambda > -\gamma$,

$\Leftrightarrow \forall \gamma > 0$ given.

$(*)$ $\Leftrightarrow$ $u = L_\gamma^{-1}(\lambda+\gamma)u. \underset{\uparrow}{=} \dfrac{\gamma+\lambda}{\gamma} Ku.$ $\cdots(\#\#)$. $(\#)$. $\begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda+\gamma)u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

$Ku = \gamma L_\gamma^{-1} u$

只有唯一弱解 $u = 0$.

K 是紧算子 $: L^2(U) \to L^2(U)$.

如今. 若 $u=0$ 是 $(\#\#)$ 唯一解. 则 $\dfrac{\gamma}{\gamma+\lambda} \notin \sigma_p(K)$ (否则 该方程有非零弱解).

Recall 特征值定义.

所以. $(*)$ 有唯一弱解 (given $f \in L^2(U)$).

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\gamma+\lambda} \notin \sigma_p(K)$.

而 $\sigma_p(K)$ 要么是有限集，要么是 0 为唯一聚点.

因此 (*) 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ (given $f\in L^2(U)$). $\Leftrightarrow$ 除去可数个 λ_k. 且 $\lambda_k\to+\infty$. $\lambda\to+\infty$.

(因 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ 可能 $\to 0$) ~~$\lambda\to\infty\ (\Leftrightarrow \lambda\to\pm\infty)$~~

$\lambda>-\gamma$.

Thm 6.4.3. (逆算子有界性).

$\lambda\notin\Sigma$. 则 $\exists C>0$ s.t. $\|u\|_{L^2(U)}\le C\|f\|_{L^2(U)}$. 其中 $f\in L^2(U)$, $u\in H_0^1(U)$

是 $(*)\begin{cases} Lu=\lambda u+f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的唯一弱解.

注: C 仅与 λ, U, L 的系数有关. $\lambda\to\lambda_0\in\sigma_p(L)$ 时 $C\to\pm\infty$.

Proof: 反证 则 $\exists\{f_k\}\subset L^2(U)$, $\{u_k\}\subset H_0^1(U)$ s.t.

$$\begin{cases} Lu_k=\lambda u_k+f_k & \text{in } U \\ u_k=0 & \text{on } \partial U\end{cases} \quad (\text{weakly}).$$

$$\frac{\|u_k\|_{L^2}}{\|f_k\|_{L^2}}>k. \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+.$$ 不妨 $\|u_k\|_{L^2}=1$.

则 $f_k\to 0$ in $L^2(U)$. 由 6.2 节能量估计, u_k 为 $H_0^1(U)$ 中的一致有界序列.

由 Banach-Alaoglu 定理. 存在子列 $u_{k_j}\rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$.

又: $H_0^1(U)\hookrightarrow H^1(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)$. (U 有界)

故 $u_{k_j}\to u$ in $L^2(U)$. (紧算子将弱收敛化成强收敛).

$\Rightarrow$. u 是 $\begin{cases} Lu=\lambda u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解 $\longleftarrow$ Recall 弱解的定义 弱收敛

由 $\lambda\notin\Sigma$ 知. $u=0$.

但 $u_{k_j}\to u$ in $L^2(U)$ $\Rightarrow$ $\|u\|_{L^2(U)}=1$. 矛盾! □

§ 6.5 正则性：

设L是二阶椭圆算子，满足一致椭圆条件.

$Lu=f$ in U.

形式上看，u被求了2阶导. 如果 $f\in L^2(U) = H^0(U)$，那么按理来说 $u\in H^2(U)$

我们之前的理论只能证明到 $u\in H_0^1(U)$. 那么 u是否真的能做到 $\in H^2(U)$ 呢？

本节给出了肯定的回答.

进一步，$f\in C^\infty$，是否有 $u\in C^\infty$？在我们没有建立起上面的结论时，是无法回答该问题的.（具体证明，见Stein 泛函. Ch3. Thm 2.14，利用线性偏微分算子的基本解（parametrix）.）.

设 $Lu=-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u)+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u+cu$. 为散度形式.

$u\in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} Lu=0 & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解.

Thm 6.5.1（内部 H^2 正则性）.

设 $a^{ij}\in C^1(U)$. $b^i, c\in L^\infty(U)$. $1\le i,j\le n$. $f\in L^2(U)$.

设 $u\in H^1(U)$ 是 $Lu=f$ in U 的弱解，则 $u\in H^2_{loc}(U)$.

且 ~~对任意~~ $\forall$ 开 $V\subset\subset U$. $\|u\|_{H^2(V)}\le C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(U)})$.

证明：~~由于~~ $u\in H^1(U)$ 为 $Lu=f$ 的弱解. 则 $\forall v\in H_0^1(U)$.

$B[u,v]=(f,v)$.

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\,dx = \int_U \tilde f v\,dx,\quad \tilde f = f-\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u-cu \quad \cdots (*)$$

*由于~~旧的~~目前我们不知道 $u\in H^2(V)$ $\forall V\subset\subset U$，所以不能对 u 求二阶弱导数。

为了证明 $u\in H^2(V)$，即 $D^2u\in L^2(V)$，我们考虑估计 Du 的差商，再由差商的性质，即得 $D^2u\in L^2(V)$。在证明的过程中，会遇到分部积分，但任2个 Sobolev 函数并不一定可以分部积分（Recall：分部积分依赖于 Leibniz Rule，后者成立需要一个 C_c^∞，一个 $W^{k,p}$ 或两个都是 $W^{1,p}\cap L^\infty$）。所以我们将会引入一些光滑的截断函数来避免该问题。

· Fix 开 $V\subset\subset U$，取开集 W，$V\subset\subset W\subset\subset U$，取 $\zeta\in C^\infty$

s.t. $\begin{cases}\zeta=1 & \text{on } V\\ =0 & \text{on } \mathbb{R}^n-W\\ 0\le\zeta\le1\end{cases}$

· 设 $|h|>0$ 充分小，$\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$，取 $B[u,v]=(f,v)$ 中的 v 为：

① : $v=-D_k^{-h}(\zeta^2D_k^hu)$。 其中 $D_k^hu(x)=\dfrac{u(x+he_k)-u(x)}{h}$。

此时 (*) 式左边

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij}\partial_iu\,\partial_jv\,dx.$$

$$=-\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij}\,\partial_iu\,\partial_j\left(D_k^{-h}(\zeta^2D_k^hu)\right)dx.$$

差商的"分部积分"公式：形式上的叫法

$$\int_U u\cdot D_k^hv=-\int_U D_k^{-h}u\cdot v$$ （展开看，只是一个变量替换）

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U D_k^h(a^{ij}\partial_iu)\,\partial_j(\zeta^2D_k^hu).$$ （$v^h(x):=v(x+he_k)$）

差商与求导可交换（自证）。

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}(D_k^h\partial_iu)\partial_j(\zeta^2\cdot D_k^hu)+(D_k^ha^{ij})\partial_iu\cdot\partial_j(\zeta^2D_k^hu)\,dx.$$

$$\overset{\text{拆开了}}{=}\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}D_k^h\partial_iu\cdot\zeta^2D_k^h\partial_ju$$

$$+\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}D_k^h\partial_iu\cdot D_k^hu\cdot2\zeta\partial_j\zeta+(D_k^ha^{ij})\partial_iuD_k^h\partial_ju\,\zeta^2+(D_k^ha^{ij})\partial_iu\,D_k^hu\cdot2\zeta\partial_j\zeta\,dx$$

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij,h}\, D_k^h \partial_i u \cdot D_k^h \partial_j u \cdot \zeta^2 dx$$

$$\underset{\text{一致椭圆}}{\geq} \theta \int_U \zeta^2 \cdot |D_k^h D u|^2 dx$$

$$A_2 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij,h} (D_k^h \partial_i u)(D_k^h u)\, 2\zeta \partial_j \zeta + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u \cdot (D_k^h \partial_j u) \zeta^2$$
$$+ (D_k^h a^{ij}) \partial_i u\, (D_k^h u)\, 2\zeta \partial_j \zeta \, dx$$

$$\leq C \int_U |\zeta|\, |D_k^h D u| \cdot |D_k^h u| + \zeta\, |D_k^h D u|\, |Du| \; \cancel{\text{乘}\zeta}$$
→ Hölder + Young (带 ε)

$$+ \zeta\, |D_k^h u| \cdot |Du|\, dx$$
→ 这项用 Hölder + Young

$$\cancel{\leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h D u|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon}}$$

$$\cancel{\varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h D u|^2} \; u \, dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C \left(\|\zeta D_k^h D u\|_{L^2} \|D_k^h u\|_{L^2} + \|D_k^h D u\|_{L^2} \|Du\|_{L^2} + \|D_k^h u\|_{L^2} \|Du\|_{L^2} \right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|\zeta D_k^h D u\|_{L^2}^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|D_k^h u\|_{L^2}^2$$
$$+ \varepsilon \|\zeta D_k^h D u\|_{L^2}^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|Du\|_{L^2}^2 + \|D_k^h u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2$$

$$\leq 2\varepsilon \|\zeta D_k^h D u\|_{L^2(W)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \left(\|D_k^h u\|_{L^2(W)}^2 + \|Du\|_{L^2(W)}^2 \right)$$

~~由~~ $\cancel{A = \sum_{i,j}^{n} \int a^{ij} \partial_i u \partial_j v = \int \tilde{f} v \, dx}$

$$\cancel{\overset{\shortparallel}{A_1 + A_2}}$$

$$\therefore A = A_1 + A_2 \underset{\text{取 } \varepsilon = \frac{\theta}{4}}{\geq} \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h D u|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx \quad \cdots \text{(2)}$$

再估计 $B=\int \tilde{f} v$.

$$|B| \le C\int_U (|f|+|Du|+|u|)|v|\,dx.$$

$$\le C\,\|f+Du+u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

$$\|v\|_{L^2}^2=\int_U |v|^2dx=\int_U |D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2dx$$

$$\le C\int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2dx$$

$$=C\int_W |\zeta^2 DD_k^h u|^2 + |D\zeta^2|\cdot|D_k^h u|^2dx$$

$$\le C\int_U |Du|^2+\zeta^2|D_k^h Du|^2dx$$

$$|B| \overset{\text{Young不等式}}{\le} \varepsilon\|v\|_{L^2}^2+\frac{C}{\varepsilon}\|f+Du+u\|_{L^2}^2$$

$$\le \varepsilon\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx+\frac{C}{\varepsilon}\int_U |f|^2+u^2+|Du|^2dx.$$

令 $\varepsilon=\frac{\theta}{4}$ 有 $|B|\le \frac{\theta}{4}\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + C\int_U |f|^2+u^2+|Du|^2dx$ ……③

~~综~~ 结合②③有

$$\int_V |D_k^h Du|^2dx \le \int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \le C\int_U f^2+u^2+|Du|^2dx.$$

$\Rightarrow Du\in H^1_{loc}(U)$，$\begin{cases} u\in H^2_{loc}(U). \\ \|u\|_{H^2(V)} \le C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{H^1(U)}) \end{cases}$ …… ④

下面希望④右边的 $\|u\|_{H^1(U)}$ 能被 $\|u\|_{L^2(U)}$ 替代

注意到. $V\subset\subset W\subset\subset U$ 则 $\|u\|_{H^2(V)}\le C(\|f\|_{L^2(W)}+\|u\|_{H^1(W)})$

再取 cut-off function ζ : $\begin{cases} =1 & \text{in } W \\ \operatorname{spt}\zeta \subset U \\ 0\le \zeta \le 1 \end{cases} \quad \in C^\infty$.

令(※)中. $v=\zeta^2 u$.

即 $\sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j(\zeta^2 u)\, dx = \int_U (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu)\cdot \zeta^2 u \, dx$,

左边 $= \sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \cdot \zeta^2 \, dx + \int_U a^{ij} \partial_i u \cdot (2\zeta \partial_j \zeta)\cdot u \, dx$.

右边 $= \int \zeta^2 u \, (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu)\, dx$

$\Rightarrow$

$$\sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \cdot \zeta^2 dx.$$

$$= \int \zeta^2 u\,(f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) - \sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u\,(2\zeta \partial_j \zeta)\, u\, dx \quad \cdots (5)$$

(5) 左边 $\geq \theta \int |\zeta|^2 |Du|^2 dx$.

右边 $\le C \int |u|\cdot|f| + |u|\cdot|Du| + |u|^2$

$$\le C\left(\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|\zeta^2 Du\|_{L^2}\right) + C\|u\|_{L^2}^2$$

$$\le C\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2\right) + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\zeta^2 Du\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$

有: $\int_U |\zeta|^2 |Du|^2 dx \le C\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2\right)$.

这样. 两边加上 $\int_U |\zeta|^2 |u|^2 dx$. 有 $\|u\|_{H^1(W)} \le C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right)$.

于是待证式成立.

$\square$

接下来我们利用归纳法证明更高的正则性结果

Thm 6.5.2：设 $m\in\mathbb{N}$，$a^{ij}, b^i, c\in C^{m+1}(U)$，$f\in H^m(U)$。

$u\in H^1(U)$ 是 $Lu=f$ in U 的弱解，则 $u\in H^{m+2}_{loc}(U)$，

$$\forall V\subset\subset U,\quad \|u\|_{H^{m+2}(V)}\le C\left(\|f\|_{H^m(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)$$

证明：对 m 归纳，$m=0$ 即是 Thm 6.5.1。

设对某个 $m\in\mathbb{Z}_+$ 成立。

对 $m+1$，假设变为 $a^{ij}, b^i, c\in C^{m+2}(U)$，$f\in H^{m+1}(U)$，

u 为 $Lu=f$ in U 的 H^1 弱解。

由归纳假设知 $u\in H^{m+2}_{loc}(U)$

$$\forall W\subset\subset U\quad \|u\|_{H^{m+2}(W)}\le C\left(\|f\|_{H^m(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)$$

Fix $V\subset\subset W\subset\subset U$，设 $|\alpha|=m+1$ 是任一多重指标，

$\tilde v\in C_c^\infty(W)$，$v:=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\tilde v$。

代入 $B[u,v]=(f,v)$，

有：$\sum_{i,j}\int a^{ij}\partial_i u\,(-1)^{|\alpha|}\partial_j(D^\alpha\tilde v)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int f D^\alpha\tilde v-\sum_i b^i\partial_i u\, D^\alpha\tilde v-cu D^\alpha\tilde v$

分部积分可得，

$B[\tilde u,\tilde v]=(\tilde f,\tilde v)$　　$\tilde u=D^\alpha u\in H^1(W)$

$$\tilde f=D^\alpha f-\sum_{\substack{\beta\ne\alpha\\ \beta\le\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\Big(-\sum_{i,j=1}^n\partial_j\big(D^{\alpha-\beta}a^{ij}D^\beta\partial_i u\big)+\sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta}b^i D^\beta\partial_i u+D^{\alpha-\beta}c\cdot D^\beta u\Big).$$

$\Downarrow$ $\tilde u$ 是

$L\tilde u=\tilde f$ 的弱解（in W）

则 $\|\tilde u\|_{H^2(V)}\underset{\text{Thm 6.5.1}}{\le}C\left(\|\tilde f\|_{L^2(W)}+\|\tilde u\|_{L^2(W)}\right)$

$\le C\left(\|f\|_{H^{m+1}(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)$.

$\tilde u=D^\alpha u$，$|\alpha|=m+1$

$\Rightarrow$ $u\in H^{m+3}(V)$

$\|u\|_{H^{m+3}(V)}\lesssim\|f\|_{H^{m+1}(U)}+\|u\|_{L^2(U)}$

由Morrey嵌入知易有:

Thm 6.5.3: $a^{ij}, b^i, c\in C^\infty(U)$. $f\in C^\infty(U)$.

$u\in H^1(U)$为 $Lu=f$ in U 的弱解. 则 $u\in C^\infty(U)$.

□

下面讨论边界正则性，该相关结论证明的套路是，先证区域为 $B^\circ(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 时成立. 对一般的开区域U,通过"边界拉直"，化成 $\mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$，来得到结论. $U\to\mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 的映射是一个微分同胚，故直观上看结果应是正确的，但严格的证明却会陷入繁杂的计算中.

Thm 6.5.4 (到边 H^2 正则性)

设 $a^{ij}\in C^1(\bar U)$. $b^i, c\in L^\infty(U)$. $1\le i,j\le n$. $f\in L^2(U)$. 设 $u\in H_0^1(U)$ 是

方程 $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解, $\partial U\in C^2$. 则 $\begin{cases} u\in H^2(U). \\ \|u\|_{H^2(U)}\le C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(U)})\end{cases}$

证明: Claim $Lu=f$ a.e. in U.

claim 的成立是显然的, 因 $u\in H^2_{loc}(U)$ (by Thm 6.5.1), 及 $\forall v\in C_c^\infty(U)$ 有

$B[u,v]=(f,v)$. $\Rightarrow (Lu,v)=(f,v)$ $\forall v\in C_c^\infty(U)\Rightarrow Lu=f$ a.e.

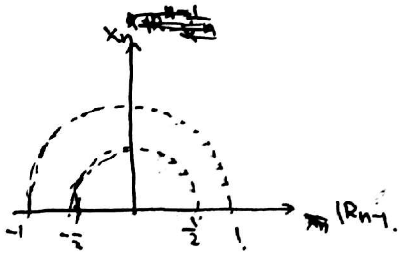
下面先证明 $U=B^\circ(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 的情况(边界拉直后).

Step 1: 设 $U=\mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$. $V=\mathring{B}(0,\frac12)\cap\mathbb{R}^n_+$.

选取 $\zeta\in C^\infty(U)$. s.t. $\zeta=1$ in $B(0,\frac12)$.

$0\le\zeta\le1$.

$\operatorname{Spt}\zeta\subseteq B(0,1)$.



u为弱解 $\Rightarrow \sum_{i,j}^n\int a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v = \int\tilde f v$. $\tilde f=f-\sum_i b^i\partial_i u-cu$ $\forall v\in H_0^1(U)$

取 $v=-D_k^h(\zeta^2 D_k^h u)$ $1\le k\le n-1$. 类似于 6.5.1 有

$$\int_V |D_k^h Du|^2\,dx\le C\int_U(|f|^2+|u|^2+|Du|^2)\,dx \qquad 1\le k\le n-1.$$

$$\Rightarrow \|\partial_i\partial_j u\|^2_{L^2(V)}\le C\left(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|u\|^2_{L^2(U)}+\|Du\|^2_{L^2}\right)\qquad \forall i+j<2n.$$

对 $u_{x_n x_n}$ 的估计:

由于 $\forall \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ 取 $\xi=e_n$ 有 $a^{nn}(x)\geq\theta$

$\therefore$ ~~θ~~ $\theta|\partial_n^2 u| \leq |a^{nn}\partial_n^2 u|$

由于 $Lu=f$ a.e.

故 $a^{nn}\partial_n^2 u = -\sum_{i+j<2n} \partial_j(a^{ij}\partial_i u)+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u + cu + f - \partial_n u\cdot \cancel{\partial_n a^{ij}}\ \partial_n a^{nn}$

$\Rightarrow |\partial_{nn}^2 u| \leq$ 上面各项绝对值相加

$\Rightarrow \|\partial_n^2 u\|_{L^2}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2)$ $\leftarrow$ Rmk: 这里应仿照6.5.1最后一步

$\Rightarrow \|u\|_{H^2(V)}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2)$ 书上没说. 因为右边有 $\|Du\|_{L^2}^2$ 不能相应的吸收掉!

Step 2: 对一般的有界开集 $U\subset\mathbb{R}^n$. $\partial U\in C^2$. 设 $x^0\in\partial U$.

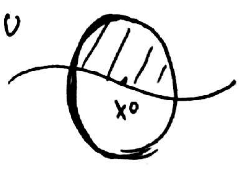
我们设 (可能要坐标变换)

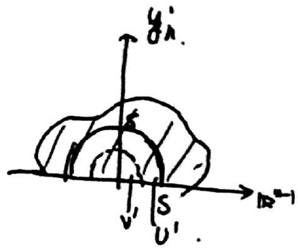
$$U\cap B(x^0,r)=\{x\in B(x^0,r) \mid x_n>\gamma(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

$r>0$, $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ C^2.

坐标变换: $y=\Phi(x)$

$x=\Psi(y)$





选取 $S>0$ 充分小 s.t. $U'=B(0,s)\cap\{y_n>0\}\subseteq\Phi(U\cap B(x^0,r))$

$V':=B(0,\frac{s}{2})\cap\{y_n>0\}$.

令 $u'(y)=u(\Psi(y))$. ($\Leftrightarrow u(x)=u'(\Phi(x))$). (后面都会证 $|\det D\Phi|=1$, $|\det D\Psi|=1$).

由于 Φ. Ψ 是微分同胚. 故. $u'\in H^1(U')$. $u'=0$ on $\partial U'\cap\{y_n=0\}$

(We omit the details) $\longrightarrow$

下面 claim: u' 是方程 $L'u'=f'$ in U' 的弱解, 其中

$f'(y)\overset{\text{def}}{=} f(\Psi(y))$.

(*) ...... $L'u':= \cancel{-\sum_{k,l=1}^n (\ \ )\partial_y}\ -\sum_{r,s=1}^n \partial_{y_s}(a'^{rs}\partial_{y_r}u')+\sum_{r=1}^n b'^r\partial_{y_r}u' + c(\Psi(y))u'(\Psi(y))$.

$\forall y\in U'$. $r,s\in\{1,2,\dots,n\}$.

证明 Claim 之前，我们解释一下为何要如此定义 L'，事实上，~~对于~~这是坐标变换的结果。

直接计算：

由于 $\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + \sum_{i=1}^n (b^i \partial_i u v + cuv)\, dx. = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U).$

作~~变量~~代换 $x = \psi(y)$. $u'(y) = u(\psi(y))$. $v(y) = v(\psi(y))$ 代入上式有：

$$\text{第一项} = \sum_{i,j=1}^n \int_{U'} \sum_{r,s=1}^n a^{ij}(\underbrace{\psi(y)}_{x}) \cdot \underbrace{\frac{\partial u'(y)}{\partial y_r} \frac{\partial \Phi^r}{\partial x_i}(\psi(y))}_{=\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ (\text{而 } u(x) = u'(\phi(x)),\ \psi(y) = x)} \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial \phi^s}{\partial x_j}(\psi(y))\, dy.$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a^{ij}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial u'}{\partial y^r}(y) \frac{\partial v'}{\partial y^s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}(\psi(y))\right)}_{=a'^{rs}} \frac{\partial u'}{\partial y^r}(s) \frac{\partial v'}{\partial y^s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a'^{rs}\, \partial_{y_r} u'\, \partial_{y_s} v'$$

$$\text{同理，第二项} = \sum_{r=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n b^i(\psi(y)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y))\right)}_{=b'^r} \frac{\partial u'}{\partial y^r} v(\psi(y))\, dy.$$

$$= \sum_{r=1}^n \int_{U'} b'^r\, \partial_{y^r} u' \cdot v' \quad dy$$

为证明 claim，我们要证的是

① L' 是满足一致椭圆条件的.

② $u(x) = u'(\phi(x))$ $v(x) = v'(\phi(x))$，是否有 $B'[u', v'] = (f', v')_{L^2(U')}$?

$$\text{其中 } B'[u', v'] = \int_{U'} \sum_{r,s} a'^{rs}\partial_{y_r} u'\, \partial_{y_s} v' + \sum_r b'^r \partial_{y^r} u' \cdot v' + c' u' v'\, dy.$$

先证②:

直接计算有:

$$B'[u',v'] = \int_{U'} \sum_{r,s} a'^{rs} \frac{\partial u'}{\partial y^r}\frac{\partial v'}{\partial y^s} + \sum_{r=1}^{n} b'^r \frac{\partial u'}{\partial y^r} v' + c'u'v' \, dy.$$

$$\overset{y=\phi(x)}{=} \sum_{r,s} \int_U a'^{rs} \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_l}(x) \frac{\partial \psi^l}{\partial y^s}(\phi(x))\, dx.$$

$$+ \sum_r \int_U b'^r \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x))\, dx + \int_U cuv\, dx.$$

$$= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}(x) \frac{\partial \psi^k}{\partial y_r}(\phi(x)) \frac{\partial \psi^l}{\partial y_s}(\phi(x))\, \partial_{x_k} u \cdot \partial_{x_l} v \cdot dx.$$

$$+ \int_U \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) + \int_U cuv\, dx.$$

~~代入 a'^{rs} b'^r 之 x~~

$$\overset{(\#)}{=} \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_{x_i} u\, \partial_{x_j} v + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_{x_i} u \cdot v + cuv\, dx$$

$$= B[u,v] = (f,v)_{L^2(U)} = (f',v')_{L^2(U')}.$$

注:最后一个等号成立,是因为 $|\det D\phi| = |\det D\psi| = 1$ (待证).

(#) 的 check ~~进而~~:

~~再证①: $\forall y \in U'$, $\xi \in \mathbb{R}^n$~~ $\phi^r(\psi(y)) = y^r$

$\sum_{r,s=}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \psi^i}{\partial y^s} = \frac{\partial y^r}{\partial y^s} = \delta_{rs}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(x). \frac{\partial \psi^k}{\partial y^s}(\phi(x)) = \delta_{rs}$$

同样 $\psi^k(\phi(x)) = x^k \Rightarrow \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} = \delta_{ki}$. #.

再证①: $\forall y \in U'$. $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$$\sum_{r,s=1}^{n} a'^{rs} \xi_r \xi_s = \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j} \xi_r \xi_s.$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \Big(\sum_{r=1}^{n} \xi_r \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}\Big) \Big(\sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}\Big)$$

$$\overset{\eta=\xi\cdot D\phi}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \eta_i \eta_j \geq \theta|\eta|^2 \underset{|\det D\phi|=1}{=} \theta|\xi|^2.$$

于是，由Step1：

$$\|u'\|_{H^2(U')} \le C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')})$$

$$\le C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

$\uparrow$

ϕ, ψ 微分同胚.（写开，即是变量替换）~~而 $\frac{\partial\psi}{\partial x}$~~

最后，只需证 $|\det D\phi| = |\det D\psi| = 1$. 事实上此为显见.

由附录 P711

$y_i = x_i =: \Phi^i(x)$,

$y_n = x_n - \gamma(x_1 \dots x_{n-1}) =: \Phi^n(x)$.

则 ~~det~~ $D\phi = \left\{\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}\right\}_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\phi = 1$.

对 ψ，同理.

$\square$

Thm 6.5.5（高阶正则性）.

(1) $m \in \mathbb{Z}_+$. $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U})$. $f \in H^m(U)$.

$u \in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解. $\partial U \in C^{m+2}$. 则

则 $\begin{cases} u \in H^{m+2}(U). \\ \|u\|_{H^{m+2}(U)} \le C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \end{cases}$

(2). $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$. $f \in C^\infty(\bar{U})$.

$u \in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解. $\partial U \in C^\infty$

则 $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Omit the proof. $\square$

§6.6. 经典解的极大值原理

本节考虑 $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^{n}b^i\partial_i u+cu$. $a^{ij}=a^{ji}$. L: 一致椭圆.

出发点: C^2函数 u 在 U 中的 x_0点达最大. $\Rightarrow$ $Du(x_0)=0$.
$D^2u(x_0)\le 0$.

弱极大值原理

Thm 6.6.1 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. $c=0$ in U.

(1). 若 $Lu\le 0$ in U, 则 $\max_{\bar U}u=\max_{\partial U}u$. ← 下解的极大值原理

(2) 若 $Lu\ge 0$ in U, 则 $\min_{\bar U}u=\min_{\partial U}u$. ← 上解的极小值原理

Proof: (1) 先设 $Lu<0$. 且. $\exists x_0\in U$. $u(x_0)=\max_{\bar U}u$

在 x_0处有 $Du(x_0)=0$. $D^2u(x_0)\le 0$;

为了导出矛盾 (因为要证的是 $x_0\in\partial U$). 我们应该设法证明 $Lu\ge 0$ at x_0.

为此, 设法将 L "对角化"

由 $A=(a^{ij}(x_0))$ 为实对称正定方阵, 知存在 $O=(O_{ij})$ (正交方阵) s.t. $OAO^T=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$

$\begin{cases} OO^T=I. \\ d_k>0. \end{cases}$

令 $y=x_0+O(x-x_0)$

$\Rightarrow x-x_0=O^T(y-x_0)$.

$\Rightarrow \partial_{x_i}u=\sum_{k=1}^{n}\partial_{y_k}u\cdot O_{ki}$.

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^{n}\partial_{y_k}\partial_{y_l}u\cdot O_{ki}O_{lj}$$

$\therefore$ 在 x_0处 $\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{y_k}\partial_{y_l}u\ O_{ki}O_{lj}$.

$$=\sum_{k=1}^{n}d_k\,\partial_{y_k}^2u\le 0.$$

$D^2u(x_0)\le 0\Rightarrow \partial_{y_k}^2u\le 0$.

于是在x_0处

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u+\sum_{i=1}^{n}b^i\partial_{x_i}u\ge 0.\quad (\text{因 } Du(x_0)=0)$$

这与 $Lu<0$ 矛盾. 因此 (1) 在 $Lu<0$ 时得证.

对一般情况（只有 $Lu\le 0$）. 令 $u^{\varepsilon}(x)=u(x)+\varepsilon e^{\lambda x_1}$ $x\in U$ $\lambda>0$ 为待定常数
$\varepsilon>0$.

· $a^{11}(x)\ge\theta$，这由一致椭圆条件. 取 $\vec{\xi}=e_1$ 即得

于是 $Lu^{\varepsilon}=\underbrace{Lu}_{\le 0}+\varepsilon L(e^{\lambda x_1})$ → 直接计算

$\le \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a^{11}+\lambda b^1)$.

$\le \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2\theta+\|\vec{b}\|_{L^\infty}\lambda)$

<0 in U. （只要 $\lambda\theta>\|\vec{b}\|_{L^\infty}$ 即可.

由之前 $Lu<0$ in Case 知.

$\max\limits_{\bar U}u^{\varepsilon}=\max\limits_{\partial U}u^{\varepsilon}$. $\varepsilon\to 0$. 由 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$ 知，$\max\limits_{\bar U}u=\max\limits_{\partial U}u$

(2). u 换成 $-u$ 即可. □

Thm 6.6.2（$C\ge 0$ 的弱极大值原理）.

设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. $C\ge 0$ in U.

(1) 若 $Lu\le 0$ in U 则 $\max\limits_{\bar U}u\le\max\limits_{\partial U}u^+$

(2) ~~进一步地~~ 类似地，若 $Lu\ge 0$ in U. 则 $\min\limits_{\bar U}u\ge-\max\limits_{\partial U}u^-$

(3) 于是. $Lu=0$ in U $\Rightarrow\max\limits_{\bar U}|u|=\max\limits_{\partial U}|u|$.

Proof：(1) 设 u 为下解（$Lu\le 0$）. $V:=\{x\in U\mid u(x)>0\}$. 则

$Ku:=Lu-cu\le -Cu\le 0$ in V.

K 符合 Thm 6.6.1(1) 的条件. 故 $\max\limits_{\bar V}u=\max\limits_{\partial V}u=\max\limits_{\partial U}u^+$. （若 $V\ne\phi$）.

若 $V=\phi$. 则结论平凡. (2) (3) 同理 □.

强极大值原理.

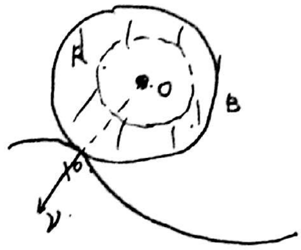
lemma (Hopf) $u\in C^2(U)\cap C^1(\bar U)$. $c=0$ in U. $Lu\le 0$ in U. 且 $\exists x^0\in\partial U$ s.t. $u(x^0)>u(x)$ $\forall x\in U$.

再假设 U 在 x^0 处满足"内球条件": $\exists$ 开球 $B\subset U$. $x^0\in\partial B$.

则

(1). $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)>0$. ν 为 B 在 x^0 处的外法向.

(2). 若 $c\ge 0$ in U. 则 加上 $u(x^0)\ge 0$ 的条件. (1) 仍对.



证明: 由. 我们只接证(2), 其证明过程中蕴含(1).

首先 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\ge 0$ 是易见的, 因为 $\forall x\in U$. $u(x^0)>u(x)$.

我们希望构造 $v(x)$ s.t. $u+\varepsilon v$ ($\varepsilon>0$) 满足 $\frac{\partial}{\partial \nu}(u+\varepsilon v)(x^0)\ge 0$.

于是 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)\ge -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)>0$.

这需要: $\frac{\partial v}{\partial \nu}<0$ at x^0. , 同时, 我们还需 $Lv\le 0$ $(u+\varepsilon v)(x_0)>(u+\varepsilon v)x$ $\forall x\in U$.

不妨 $B=B(0,r)$.

$$R:=B(0,r)-\overset{0}{B}(0,\tfrac{r}{2})$$

令 $v(x)=e^{-\lambda|x|^2}-e^{-\lambda r^2}$. 则 $\partial_i v=e^{-\lambda|x|^2}(-2\lambda x_i)$.

$$\partial_{ij}v=e^{-\lambda|x|^2}(4\lambda^2x_ix_j-2\lambda\delta_{ij}).$$

$$\Rightarrow Lv=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(4\lambda^2x_ix_j-2\lambda\delta_{ij})e^{-\lambda|x|^2}+\sum_{i=1}^n b^i(-2\lambda x_i)e^{-\lambda|x|^2}$$
$$+c(e^{-\lambda|x|^2}-e^{-\lambda r^2})$$

其中 $A=(a^{ij})_{1\le i,j\le n}$

(一致椭圆) 用在这

$$\le e^{-\lambda|x|^2}\left(-\theta|x|^2\cdot 4\lambda^2+2\lambda\,\mathrm{Tr}A-2\lambda\sum_{i=1}^n b^ix_i+c\right)$$

$\frac{r}{2}\le|x|<r$.

$$\le e^{-\lambda(\frac{r}{2})^2}\left(-\theta\left(\tfrac{r}{2}\right)^2 4\lambda^2+2\lambda\,\mathrm{Tr}A+2\lambda|b|r+c.\right)\le 0$$

做到上面的 ≤ 0, 只要 λ 充分大 (关于 λ 是二次函数. 二次项系数为负) 即可.

由于 $u(x^0)>u(x)$ $\forall x\in U$ $\therefore\exists\varepsilon>0$. s.t. $u(x^0)\ge u(x)+\varepsilon v(x)$. $\forall x\in\partial B(0,\frac{r}{2})$. (因 $v(x)$ 是一个有界函数)

且 $u(x^0)\ge u(x)+\varepsilon v(x)$. $x\in\partial B(0,r)$ (因 $v=0$ on $\partial B(0,r)$)

$L(u+\varepsilon v-u(x^0))=\underset{\le 0}{Lu}+\varepsilon\underset{\le 0}{Lv}-Lu(x^0).=-Lu(x^0)=-cu(x^0)\le 0$ in R

$\Rightarrow$ 再 $\begin{cases} \\ u+\varepsilon v-u(x^0)\le 0 \quad \text{on } \partial R.\end{cases}$

由弱极大值原理，$u+\varepsilon v-u(x^0)\le 0$ in R.

又：$u(x^0)+\varepsilon v(x^0)-u(x^0)=0$

所以，$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0)\geq 0$ （因为向外走 $u+\varepsilon v-u(x^0)\nearrow$）

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0)\underset{\uparrow}{=}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}v(x^0)=-\frac{\varepsilon}{r}Dv(x^0)\cdot x^0=2\lambda\varepsilon r e^{-\lambda r^2}>0$

径向函数在球面上的外法向导数＝径向导数

□

Hopf 引理用于证明强极值原理

Thm 6.6.3（强极值原理） 设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ $C=0$ in U.
U连通有界开集.

(1) 若 $Lu\le 0$ in U，且$\max\limits_{\bar U}u$ 在 U 内达到，则 $u=\text{const}$ in U.

(2)，$Lu\geq 0$ . . . . $\min\limits_{\bar U}u$ . . . .

只证(1)

Proof：由令 $M=\max\limits_{\bar U}u$. $C:=\{x\in U\mid u(x)=M\}$

$V:=\{x\in U\mid u(x)<M\}$

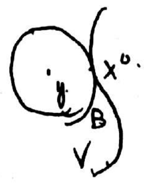
反证，

若 $\exists x$！$u(x)\neq M$ in U，则 $V\neq\phi$.

choose $y\in V$ $\mathrm{dist}(y,C)<\mathrm{dist}(y,\partial U)$.

$B:=$ 以y为中心，含于V的最大的球.

则 $\exists x^0\in C$，$x^0\in\partial B$.



由于V满足内球条件，由Hopf引理，$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)>0$. ~~矛盾~~

但 u 在 x^0 处达max.（因 $u(x^0)=M$） 故 $Du(x_0)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)=Du(x_0)\cdot\nu=0$）.

矛盾！

□

$C\geq 0$ 类似有：

Thm 6.6.4. $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. $C\geq 0$ in U. U 有界连通开

(1) 若$Lu\le 0$ in U. ~~则~~且 u在 $\bar U$ 内达最大值（非负的），则 $u=\text{const}$ in U

(2) ≥ 0 — — — — — 小 — — —

□

Harnack 不等式

Thm 6.6.5. $u\geq 0$ 是 $Lu=0$ in U 的 C^2 解. $V\subset\subset U$ 是连通集 则 $\exists C>0$ s.t.
$\sup_V u \leq C\inf_V u$.

Rmk: (1) 此处只给出 $a^{ij}\in C^\infty$, $b^i=c=0$ 的证明

(2) 更一般的参见 尊春青, 林芳华 的 椭圆方程讲义

或 Gilbarg-Trudinger 的二阶椭圆方程

(3). 更一般的证法, 会用到 John-Nirenberg 不等式 (调和分析).

Proof: 不妨 $u>0$ in U. 否则考虑 $u+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$.

令 $v=\log u$.

$Lu=0$ 即 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j u=0$. 由 $u=e^v$ 知 $\partial_i u=e^v\partial_i v$

$\partial_i\partial_j u=\partial_i(e^v\partial_j v)$

$=e^v\partial_i v\partial_j v+e^v\partial_i\partial_j v$.

$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n a^{ij}e^v(\partial_i\partial_j v+\partial_i v\partial_j v)=0$

$\Rightarrow \sum_{i,j=1} a^{ij}(\partial_i\partial_j v+\partial_i v\partial_j v)=0$ in U.

令. $w:=\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v \underset{\text{提}}{=} -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j v$.

Claim: $-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l w+\sum_{k=1}^n b^k\partial_k w\leq -\frac{\theta^2}{2}|D^2v|^2+C|Dv|^2$.

其中 $b^k:=-2\sum_{l=1}^n a^{kl}\partial_l v$ $1\leq k\leq n$.

先设 claim 正确

令 $z=\zeta^4 w$
$\zeta\in C^\infty(U)$.
$0\leq\zeta\leq 1$. $\zeta=0$ on ∂U
$=1$ in V

希望借 z 来估计 $|Dv|$ 在任何 $V\subset\subset U$ 上一致有界. (球 半径为 r.)
这样. $\forall x_1,x_2\in V$ 有 $v(x_2)-v(x_1)\leq \sup_V|Dv|\,r\leq C$.
$\Rightarrow u(x_2)\leq u(x_1)e^C$.
对一般的 $V\subset\subset U$. 用球覆盖 $\bar V$ 紧即可, 就证到了 Harnack 不等式.

设 z 在 $x_0\in U$ 处 达到最大值 则 $Dz(x_0)=0$ $\Rightarrow \forall k.\ \zeta^4\partial_k w+4\zeta^3\partial_k\zeta\, w=0$

$\Rightarrow \forall k.\ \zeta\partial_k w+4\partial_k\zeta w=0$

~~在 x_0 处 有~~:

$\partial_k z=\zeta^4\partial_l w+4\zeta^3 w\partial_k\zeta$

$\partial_k\partial_l z=\zeta^4\partial_k\partial_l w+4\zeta^3\partial_l\zeta\partial_k w+12\zeta^2\partial_l\zeta\partial_k\zeta w+4\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta w$
$+4\zeta^3\partial_k\zeta\partial_l w$

$\therefore$ $\cancel{-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l z+\sum_{k=1}^n b^k\partial_k z=\zeta^4\left(-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l w+\sum_{k=1}^n b^k\partial_k w\right)}$
$\cancel{+C\left(|D\zeta|\zeta^3|Dw|+\zeta^2|w|\right)+|Dv|\zeta^3 w}$

从而

$$-\sum_{k=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l z + \sum_{k=1}^{n} b^k \partial_k z$$

$$= -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\left(\zeta^4 \partial_k\partial_l w + \underbrace{4\zeta^3 \partial_l\zeta \partial_k w} + 12\zeta^2 \partial_l\zeta \partial_k\zeta w + \underbrace{4\zeta^3 \partial_k\partial_l\zeta w} + \underbrace{4\zeta^3 \partial_k\zeta \partial_l w}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b^k\left(\zeta^4 \partial_k w + \underbrace{4\zeta^3 \partial_k\zeta w}\right)$$

一样的.

$$= \zeta^4\left(-\sum_{k=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k \partial_k w\right)$$

$$-12\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}(\zeta^2 \partial_l\zeta \partial_k\zeta)\cdot w$$

$$-8\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}(\zeta^3 \partial_k\zeta)\partial_l w$$

$$-4\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta\, w \quad + 4\sum_{k=1}^{n} b^k \zeta^3 \partial_k\zeta w.$$

$$|b| \le C|Dv|$$

$$= \zeta^4\left(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\right) + O\left(\zeta^3|Dw| + \zeta^2|w|\right) + |Dv|\,\zeta^3 w.$$

而在 x_0 处 由 z 达到 max. 故 $\partial_k z = 0$ at x_0.

$\{\partial_k\partial_l z\}$ 负定. 又因 $\{a^{kl}\}$ 正定.

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l z \ge 0$$

$$\therefore\ 0 \le \zeta^4\left(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\right) \cancel{+O(}$$

$$+ C'\left(\zeta^3|Dw| + \zeta^2|w|\right) + |Dv|\,\zeta^3|w| \quad \cdots (*).$$

claim

$$\cancel{\le \zeta^4\left(-\frac{\theta}{2}|D^2v|^2 + C|Dv|^2\right) + C'\zeta^2|Dv|^2 + C'\zeta^4 w^2}$$

$$\cancel{+O\left(\zeta^3|Dw| + \zeta^2 w\right)}$$

$$\cancel{\Rightarrow C^0\zeta^4 w^2 \le \frac{\theta}{2}\zeta^4|D^2v|^2 \le C(\varepsilon)\zeta^2|Dv|^2 + \varepsilon\zeta^4 w^2}$$

~~因 $w = -\sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$~~ ~~上式~~

$$\cancel{+C\left(\zeta^3|Dw|^2 + \zeta^2 w\right)}.$$

$$\cancel{\Rightarrow C''\zeta^4 w^2 \le \frac{\theta}{2}\zeta^4|D^2v|^2}$$

~~$w = \sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$.~~

$$\cancel{\overset{\text{上式}}{\le} C\zeta^4|Dv|^2 + C'\zeta^2|Dv|^2 + C'\zeta^4 w^2 + O\left(\zeta^3|Dw| + \zeta^2 w\right)}$$

将claim带入(*)有:

$\zeta D v$

$$0 \le \zeta^4\left(-\frac{\theta^2}{2}|D^2 v|^2 + C|Du|^2\right) + C'\zeta^3 |Dw| + C'\zeta^2 w + \underline{\underline{\zeta^3 |Du| w}} \quad \text{at } x_0.$$

$$\Rightarrow \frac{\theta^2}{2}\zeta^4 |D^2 v|^2 \le C\zeta^4 |Du|^2 + C'\zeta^3 |Dw| + C'\zeta^2 w + \zeta^3 |Du| w \quad \text{at } x_0 \qquad \cdots(**)$$

$\Downarrow w = \sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$

$C''\zeta^4 w^2$

- $\zeta^3 |Du| w = (\zeta^2 |Dv|)(\zeta) \cdot w$

$$\underset{\text{Young}}{\le} w\left(\varepsilon\zeta^4 |Dv|^2\right) + w \cdot C(\varepsilon)\zeta^2$$

$$\underset{\theta|Dv|^2 \le w}{\le} \frac{\varepsilon}{\theta}\zeta^4 w^2 + C(\varepsilon)\, w \zeta^2 \quad (w = \sum a^{ij}\partial_j v \partial_i v)$$

- 对 $\zeta^3 |Dw|$ 项: 由 $\zeta\partial_k w + 4\partial_k\zeta \cdot w = 0$ 知. $|Dw| \le C|w|$.

故. $\zeta^3 |Dw| \lesssim \zeta^2 |w|$.

- $\zeta^4 |Dv|^2 \le \zeta^2 |Dv|^2 \le \frac{\zeta^2}{\theta} w$.

∴ 代入(**)有

$\zeta^4 w^2 \le C_1\varepsilon\zeta^4 w^2 + C_2\zeta^2 w.$ 故取 ε 小使 $C_1\varepsilon < \frac{1}{2}$

有 $\zeta^4 w^2 \le C\zeta^2 w \Rightarrow \xi = \zeta^4 w \le C\zeta^2 \le C$. at x_0.

由于 ξ 在 x_0 处达到 max. $\underset{\theta|Dv|^2 \le w = \zeta^4 w \text{ in } V}{\Rightarrow} |Dv| \le c \quad \text{in } V$.

$\zeta \equiv 1$ in V

这样我们在 claim 成立的情况下证明了结论.

下面证明 claim:

$$-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w \le -\frac{\theta^2}{2}|D^2 v|^2 + C|Dv|^2$$

直接计算. 由 $w = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\cancel{\partial_i}\partial_j v = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i v\,\partial_j v$

$$\cancel{\Rightarrow \partial_l w = -\sum_{i,j=1}^{n}\partial_l(a^{ij})\partial_i\partial_j v - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_l\partial_i\partial_j v}$$

$$\Rightarrow \partial_l w = \sum_{i,j=1}^{n}\partial_l a^{ij}(\partial_i v\,\partial_j v) + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\,\partial_l\partial_i v\,\partial_j v$$

$$\Rightarrow \partial_k\partial_l w = \boxed{\sum_{i,j=1}^{n}\partial_k\partial_l a^{ij}\,\partial_i v\,\partial_j v + 2\sum_{i,j=1}^{n}\partial_l a^{ij}\,\partial_k\partial_i v\,\partial_j v + 2\sum_{i,j=1}^{n}\partial_k a^{ij}\,\partial_l\partial_i v\,\partial_j v} \longrightarrow 记成\ R.$$

$$+\, 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_l\partial_i v\,\partial_k\partial_j v + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\,\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v.$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\,\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_k\partial_j v)$$

$$+ R.$$

$$|R| \le C\left(|Dv|^2 + |Dv||D^2 v|\right)$$

$$\underset{\text{Young}}{\le} C(\varepsilon)|Dv|^2 + \varepsilon|D^2 v|^2. \qquad \forall\varepsilon>0.$$

从而 $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w = -R - 2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_k\partial_j v)\right)$

$$= -R - 2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v) - 2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v \qquad \cdots (\#)$$

$$\cancel{\le -R - 2\theta^2|D^2 v|^2}$$

$$\cancel{L\text{-}\cdots = -R - 2\theta\sum_{\substack{k,j=1\\ i,l=1}}^{2}}$$

$$\cancel{= -R - 2\sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n} a^{il}}$$

- $\sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} a^{kl} \partial_j \partial_k v \, \partial_i \partial_l v \geq \theta^2 \sum_{i,j} |\partial_j \partial_i v|^2 = \theta^2 |Dv|^2$ (L-一致椭圆)

- $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_k \partial_i \partial_l v \, \partial_j v$

$$\cancel{= -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \sum_{i,j=1}^{n}} = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_j v \sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} \partial_i \partial_k \partial_l v$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_j v \Big(\partial_i \big(\underbrace{\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} \partial_k \partial_l v}_{w} \big) - \sum_{k,l=1}^{n} \partial_i a^{lk} \partial_k \partial_l v \Big)$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_j v \Big(\partial_i w - \sum_{k,l=1}^{n} \partial_i a^{lk} \partial_k \partial_l v \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{b^i}_{-2\sum_{j=1}^{n} a^{ij} \partial_j v} \partial_i w + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a^{ij} \partial_i a^{lk} \partial_j v \, \partial_k \partial_l v$$

故代入 (#).

有 $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} \partial_k \partial_l w \leq -R - \theta^2 |Dv|^2 - \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i w - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a^{ij} \partial_i a^{lk} \partial_j v \, \partial_k \partial_l v$.

$$\Rightarrow -\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk} \partial_k \partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k \partial_k w \leq |R| - \theta^2 |Dv|^2 + \sum_{i,j} \sum_{k,l} |a^{ij} \partial_i a^{lk} \partial_j v \, \partial_k \partial_l v|.$$

$$\leq |R| - \theta^2 |Dv|^2 + C \, |Dv| \, |D^2 v|$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon |D^2 v|^2 + C(\varepsilon) |Dv|^2 - \theta^2 |D^2 v|^2.$$

$$\overset{\varepsilon\text{充分小}}{\leq} -\frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 + C(\varepsilon) |Dv|^2$$

claim 证毕!

□.

预备知识：对称紧算子的谱与柯朗极大极小刻画

1. 对称算子. 设 H 是复 Hilbert 空间

Def：设 A 是 ~~H上的连续线性泛函~~ $H\to H$ 的有界线性算子，称 A 对称；若 $\forall x, y\in H$. $(Ax, y)=(x, Ay)$ $\forall x, y\in H$

易见. A 对称 $\Leftrightarrow A=A^*$

eg：设 $k\in L^\infty(\Omega\times\Omega)$ $k(x,y)=k(y,x)$

则 $A: u(x)\mapsto \int_\Omega k(x,y)u(y)\,d\mu(y)$. 是 $L^2(\Omega)$ 上的对称算子

□.

Prop：(1). A 对称 $\Leftrightarrow \forall x\in H$. $(Ax, x)\in\mathbb{R}$.

(2). A 对称 则 $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. 且 $\|(\lambda I-A)^{-1}x\|\le\frac{\|x\|}{|\operatorname{Im}\lambda|}$

$(\forall x\in H, \forall\lambda\in\mathbb{C}, \operatorname{Im}\lambda\ne0)$

(3). 设 $H_1\subset H$ 是闭不变子空间. A 是 H 上的对称算子. 则 $A|_{H_1}$ 是 H_1 上的对称算子.

(4). 若 A 对称. $\lambda, \lambda'\in\sigma_p(A)$. $\lambda\ne\lambda'$. 则 $N(\lambda I-A)\perp N(\lambda' I-A)$.

(5) 若 A 对称. 则 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax, x)|$.

Proof：(1). 令 $a(x,y)=(Ax,y)$. $\forall x,y\in H$.

则 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的共轭双线性泛函.

(Ax,x) 是由 a 诱导的二次型.

A 对称 $\Longleftrightarrow$ $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$, $\forall x,y\in H$.

$\Longrightarrow$ $(Ax,x)\subset\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$：若 $\underset{q(x)}{(Ax,x)}\subset\mathbb{R}$. 则 $q(x+y)=\overline{q(x+y)}$.

$\Rightarrow$ $a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}+\overline{a(y,x)}$

y 对换 iy $-a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}-\overline{a(y,x)}$. $\Rightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)}$

共 36

(2) 若A对称 ~~则 要证 A的谱是实值~~

设 $\lambda=\mu+i\nu$ $\nu\neq 0$. $\mu,\nu\in\mathbb{R}$.

则 $\|(\lambda I-A)x\|^2=\|(\mu I-A)x\|^2+|\nu|^2\|x\|^2$

$\geq |\nu|^2\|x\|^2$. $\forall x\in H$.

此外. $R(\lambda I-A)=H$.

这是因为 $R(\lambda I-A)^{\perp}=N(\bar\lambda I-A^*)=N(\bar\lambda I-A)$

$\underset{\uparrow}{=}$ ~~$N(\bar\lambda I-A$~~ 0 $(\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0)$

‖系有点谱

~~为证~~ A的谱是实值.

这因为. 设 $Ax=\lambda x$

$(Ax,x)=\lambda\|x\|^2$

$(x,Ax)=\bar\lambda\|x\|^2\Rightarrow\lambda=\bar\lambda$

进一步

我们令: $m=\inf\limits_{\substack{u\in H\\ \|u\|_H=1}}(Au,u)$

$M=\sup\limits_{\substack{u\in H\\ \|u\|_H=1}}(Su,u)$.

~~设 $\eta>M$ 则 $\forall x\in H$~~

$(\eta x-Ax,x)\geq(\eta-M)\|x\|^2$ $\forall x\in H$.

故由Lax-Milgram 定理: $\eta I-A$ 1-1 + onto $\Rightarrow\eta\in\rho(A)$.

同理. $\eta<m$ 时. $\Rightarrow\eta\in\rho(A)$ 故 $\sigma(A)\subset[m,M]$ ※.

~~(更进一步的结论)~~

(3) ✓.

(4). 设 $x\in N(\lambda I-A)$. $x'=N(\lambda' I-A)$. $\lambda\neq\lambda'$.

则 $\lambda(x,x')=(Ax,x')=(x,Ax')=\lambda'(x,x')$

$\Rightarrow$ x ~~⊥x'~~. $(x,x')=0$

(5). $C:=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$ $C\leq\|A\|$ 易见. 為证 $\geq$:

注意到. $\mathrm{Re}(Ax,y)=\frac{1}{4}\Big((A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\Big)$

$\leq\frac{C}{4}\|x+y\|^2+\frac{C}{4}\|x-y\|^2\leq C$. $\left(\substack{x,y\in H\\ \|x\|=\|y\|=1}\right)$

取 $\alpha\in\mathbb{C}$ $|\alpha|=1$.

s.t. $\alpha(Ax,y)=|(Ax,y)|$ $\Rightarrow$ $|(Ax,y)|$

$=(Ax,\bar\alpha y)$

$\leq\mathrm{Re}(Ax,\bar\alpha y)\leq C$. □.

· 在Hilbert空间上，紧对称算子的谱和算子结构在某种程度上可以与有穷维的实对称阵类比。

$\begin{cases} \text{正交变换对角化，对角元是特征值} \\ \text{二次型在 } \|x\|=1 \text{ 上的临界值} \end{cases}$

Thm 1：A是紧对称算子，则 $\exists x_0 \in H$，$\|x_0\|=1$，s.t. $\begin{cases} |(Ax_0, x_0)| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)| \\ Ax_0 = \lambda x_0, \quad |\lambda| = |(Ax_0, x_0)| \end{cases}$

Proof：设 S_1 为H的单位球面

不妨设 $\sup\limits_{x\in S_1} |(Ax,x)| = \sup\limits_{x\in S_1} (Ax,x) =: \lambda$

令 $f(x) = (Ax, x) : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

取 $\{x_n\} \subset S_1$. $f(x_n) \to \lambda$.

$\|x_n\|=1$. 故存在弱收敛子列（还记作 x_n）$x_n \rightharpoonup x_0$.

$\left.\begin{array}{l} \|x_0\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1. \\ A \text{ 紧} \end{array}\right\} \Rightarrow Ax_n \to Ax_0$

$\Rightarrow f(x_n) \to (Ax_0, x_0)$. as $n \to \infty$

$\Rightarrow (Ax_0, x_0) = \lambda$.

下证 $\|x_0\|=1$ 否则 $\|x_0\|<1$.

$(Ax_0, x_0) \le \|A\| \|x_0\|^2 = \lambda \|x_0\|^2 < \lambda$，矛盾！

于是我们证明了 $\exists x_0 \in S_1$ s.t. $(Ax_0, x_0) = \sup\limits_{x\in S_1} (Ax,x) = \lambda$.

再证 $Ax_0 = \lambda x_0$. 设t充分小，

令 $\varphi_y(t) = \dfrac{(A(x_0+ty), x_0+ty)}{(x_0+ty, x_0+ty)}$

$t=0$ 时 $\varphi_y(t)$ 达 max $\Rightarrow \varphi_y'(0)=0$. 计算即为 $\mathrm{Re}(y, Ax_0 - \lambda x_0) = 0$ $\forall y \in H$

$\Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

· 设A是H上的紧对称算子，由紧算子谱理论，$\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$

若 $\{\lambda_n\}$ 中有无穷多个不同的，则 $\lambda_n \to 0$.

如今，我们证明了 $\lambda_n \in \mathbb{R}$. 此外，我们证明"A可对角化"

Thm 2 (~~定理~~ Hilbert-Schmidt). 若 A 是 H 上的对称紧算子. 则有至多可数个非零的, 只可能以 0 为聚点的实数 $\{\lambda_i\}$, 它们是 A 的特征值. 并对应于一组标准正交基 $\{e_i\}$

s.t. $\begin{cases} x=\sum_i (x,e_i)e_i \\ Ax=\sum_i \lambda_i (x,e_i)e_i \end{cases}$

Proof: $\forall \lambda\in\sigma_p(A)-\{0\}$. 设 $N(\lambda I-A)$ 的一组标正基为 $\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m_p(\lambda)=\dim N(\lambda I-A)<\infty}$

若 $0\in\sigma_p(A)$. 则设 $N(A)$ 标正基为 $\{e_i^{(0)}\}$. (可能不可列).

令 $\{e_i\}=\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_p(A)-\{0\}} \{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)}$

$\{e_i\}:=\begin{cases}\{e_i\} & 0\notin\sigma_p(A) \\ \{e_i\}\cup\{e_i^{(0)}\} & 0\in\sigma_p(A)\end{cases}$

$M=\text{Span}\{e_i\}$. 则在 M 上, 题中表述成立

下证 $\overline{M}=H$. 反证 若 $M^\perp\neq\{0\}$ 设 $\tilde{A}=A|_{M^\perp}$

- $\tilde{A}$ 无特征值. $\Rightarrow \tilde{A}\neq 0$

但. $\|\tilde{A}\|=\sup\limits_{\substack{x\in M^\perp\\ \|x\|=1}} |(\tilde{A}x,x)|=0$. 矛盾.

□

Rmk: (1) 特征值~~全体~~的绝对值. 可以写成递降序列 $|\lambda_1|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|\geqslant|\lambda_{n+1}|\geqslant\cdots$

$\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i\otimes e_i$.

Claim. $\|A-\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i\otimes e_i\|\leq|\lambda_{n+1}|\to 0$ as $n\to\infty$

~~事实上~~: check: $\forall x\in H$. $\|Ax-\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,e_i)e_i\|$

$=\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i\|$

$=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i^2|(x,e_i)|^2\right)^{1/2}$

$\leq|\lambda_{n+1}|\cdot\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\right)^{1/2}\leq|\lambda_{n+1}|\cdot\|x\|$.

(2) 紧对称算子可对角化, 其特征值具有极值性质.

$|\lambda_n|=\sup\{|(Ax,x)| \;\; x\perp \underbrace{\text{Span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}}_{\lambda_1\sim\lambda_{n-1}\text{的特征向量}}, \|x\|=1\}$

$\lambda_1^+\geqslant\cdots\geqslant\cdots\geqslant 0$

$\geqslant\cdots\geqslant\lambda_2^-\geqslant\lambda_1^-$

Thm 3：极大极小刻画. 设 A是紧对称算子，对应有特征值 $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \cdots \geq 0 \geq \cdots \geq \lambda_2^- \geq \lambda_1^-$

则 $$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp \\ x\neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.$$

E_{n-1}是H的任一 n-1维 闭线性子空间

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp \\ x\neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.$$

pf:

只证第一条.

设 $x=\sum a_j^+ e_j^+ + \sum a_j^- e_j^-$.

则 $$\frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{\sum_j \lambda_j^+ |a_j^+|^2 + \sum_j \lambda_j^- |a_j^-|^2}{\sum_j |a_j^+|^2 + \sum_j |a_j^-|^2} =: M$$

令 $$\mu_n = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp \\ x\neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.$$

① $\lambda_n^+ \leq \mu_n$: 因为 $\forall E_{n-1}$, 在 $\mathrm{span}\{e_1^+ \cdots e_n^+\}$中, $\exists x_n \neq 0$ s.t. $x_n \perp E_{n-1}$.

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp \\ x\neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq \frac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ |a_j^+|^2}{\sum_{j=1}^n |a_j^+|^2} \geq \lambda_n^+.$$

② $\lambda_n^+ \geq \mu_n$: 取 $E_{n-1} = \mathrm{span}\{e_1^+,\dots,e_{n-1}^+\}$. $\Rightarrow \lambda_n^+ = \sup_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp \\ x\neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$.

该定理用于 14.13题 (见张恭庆泛函4.4~4.5节). $\geq \mu_n$.

□.

§6.7 椭圆算子特征值与特征函数

1. 对称椭圆算子. $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$ $a^{ij}\in C^\infty(\bar U)$.

L 满足一致椭圆条件, $a^{ij}=a^{ji}$

U 是连通集.

Thm 6.7.1: (对称椭圆算子的特征值)

(1) L 的特征值是实值的

(2) 将 L 的特征值(可重复)可写作 $\Sigma=\{\lambda_k\}_1^\infty$, $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$, $\lambda_k\to+\infty$

(3) 存在 $L^2(U)$ 的标准正交基 $\{w_k\}_1^\infty$ 其中 $w_k\in H_0^1(U)$ 是 L 关于 λ_k 的特征函数.

$$\begin{cases} Lw_k=\lambda_k w_k & \text{in } U \\ w_k=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

<u>Rmk</u>: 由正则性结论. $w_k\in C^\infty(U)$.
若 $\partial U\in C^\infty$ 则 $w_k\in C^\infty(\bar U)$

<u>Proof</u>: 设 $S=L^{-1}: L^2(U)\to L^2(U)$ ~~有界~~紧线性算子.

<u>Claim</u>: S 是对称算子.

<u>Proof of the claim</u>: 任选取 $f,g\in L^2(U)$.

$Sf=u \Rightarrow u\in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解.

$Sg=v \Rightarrow v\in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lv=g & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解

$$\Rightarrow (Sf,g)=(u,g)=B[v,u]=B[u,v]=(f,v)=(f,Sg). \quad \forall f,g\in L^2(U).$$ ☆

又: $(Sf,f)=(u,f)=B[u,u]\ge 0$ $\forall f\in L^2(U)$.

所以, 由紧对称算子的谱理论, S 的全体特征值为正实值
且特征函数构成 $L^2(U)$ 的标准正交基

而对 $\eta\ne 0$. $Sw=\eta w \iff Lw=\lambda w$ $\lambda=\frac{1}{\eta}$

于是(1)-(3)成立

□

Def：称 Thm 1 中的 λ_1 为 L 的 主特征值.

Thm 6.7.2：(λ_1 的变分原理).

(1) $\lambda_1 = \min \{ B[u,u] \mid u \in H_0^1(U),\ \|u\|_{L^2(U)} = 1 \}$

(2). 进一步地，(1) 中的 min 可以在 u 取 w_1 时达到. $w_1 \geq 0$ in U

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } U \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

(3). 若 u 是 $\overset{\in H_0^1(U)}{}$ $\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$，则 u 是 w_1 的倍数.

Rmk：(1) (3) 说明 λ_1 是单重特征值. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$

(2). Rayleigh 公式. $\lambda_1 = \min\limits_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \dfrac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(U)}}$.

Proof：

(1). • Fact：$B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|^2_{L^2} = \lambda_k$.

$B[w_k, w_l] = \lambda_k (w_k, w_l) = 0 \quad k \neq l$.

• 由 $\{w_k\}_1^\infty$ 是 $L^2(U)$ 的标正基. 于是. $\forall u \in H_0^1(U)$. $\|u\|_{L^2(U)} = 1$.

u 可以写作 $u = \sum_{k=1}^\infty d_k w_k$. $\quad d_k = (u, w_k)_{L^2}$.

$\sum_{k=1}^\infty d_k^2 = 1$

• 由上：$\left\{ \dfrac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_1^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交集，内积为 $B[\cdot,\cdot]$.

Claim：$\left\{ \dfrac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_1^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交基.

这只需证：$B[w_k, u] = 0 \ \forall k. \Rightarrow u \equiv 0$ 但此为显之

Fix k 因 $B[w_k, u] = \sum_{j=1}^\infty B[w_k, d_j w_j] = d_k \lambda_k (w_k, w_k) = 0$.

$\Rightarrow d_k = 0$ ~~$\forall k$~~.

$\Rightarrow u = 0$ #

下页

从而 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ $\mu_k=B[u,\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}]=d_k\sqrt{\lambda_k}$.

从而该级数~~为~~绝对收敛 in $H_0^1(U)$.

$\Rightarrow$. $B[u,u]=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2\lambda_k\geqslant\lambda_1$. 等号成立 $\Leftrightarrow$ $u=w_1$. 从而(1)成立.

(2). claim: 若 $u\in H_0^1(U)$. $\|u\|_{L^2(U)}=1$. 则 u 是 $\begin{cases}Lu=\lambda_1 u & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解 $\Leftrightarrow$ $B[u,u]=\lambda_1$

$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 若 $B[u,u]=\lambda_1$. 令 $d_k=(u,w_k)$

我们有 $\lambda_1=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2\lambda$.

$\| B[u,u]=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2\lambda_k$.

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_1)d_k^2=0$.

~~$\lambda_k>\lambda_1$ $(k\geqslant2)$~~

$\Rightarrow$ $d_k=0$. ~~注~~(因 $\lambda_k>\lambda_1$, $\forall k\geqslant2$).

因 λ_1 重数有限. 故. $u=\sum_{k=1}^{m}(u,w_k)w_k$. $m\in\mathbb{Z}_+$ 有限.

$Lw_k=\lambda_1 w_k$.

$\Rightarrow Lu=\sum_{k=1}^{m}(u,w_k)Lw_k=\lambda_1 u$. claim 证毕. #

下面证明: 若 $u\in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases}Lu=\lambda_1 u & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解. 且 $u\neq0$. 则

要么 $u>0$ in U 要么 $u<0$ in U.

为证该结论. 不妨设 $\|u\|_{L^2}=1$. 令 $\alpha=\int_U(u^+)^2dx$. $\beta=\int_U(u^-)^2dx$

$\alpha+\beta=1$.

由 $u^\pm\in H_0^1(U)$. $Du^+\underset{\text{a.e.}}{=}Du\chi_{\{u\geqslant0\}}$. $Du^-\underset{\text{a.e.}}{=}-Du\chi_{\{u\leqslant0\}}$

的. $B[u^+,u^-]=0$

$\lambda_1=B[u,u]=B[u^+,u^+]+B[u^-,u^-]$

$\geqslant\lambda_1\|u^+\|_{L^2}^2+\lambda_1\|u^-\|_{L^2}^2=\lambda_1(\alpha+\beta)=\lambda_1$.

故 $\geqslant$ 是 $=$ $\Rightarrow$ $B[u^\pm,u^\pm]=\lambda_1\|u^\pm\|_{L^2}^2$.

$\Rightarrow\begin{cases}Lu^\pm=\lambda_1 u^\pm & \text{in } U\\ u^\pm=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ weakly.

又由 $a^{ij}\in C^\infty$ 内正则性定理，$u^+\in C^\infty(U)$.

$\Rightarrow$ $Lu^+=\lambda_1 u^+\geq 0$ in U

$\Rightarrow$ u^+是L的上解，又由U连通 故据强极值原理有

$u^+>0$ in U or $u^+=0$ in U

#

对u^-也有此结论.

最后. 若 $u,\tilde{u}$ 均是 $\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的非平凡弱解，

则 $\int_U \tilde{u}\,dx\neq 0$.

$\Rightarrow \exists\chi\in\mathbb{R}$ $\int_U u-\chi\tilde{u}\,dx=0$. 但 $u-\chi\tilde{u}$ 又是上述方程的弱解.

由上一结论知. $u=\chi\tilde{u}$ in U

于是λ_1单 $\square$

2、非对称椭圆算子的特征值理论

设 $Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u+cu$. $a^{ij},b^i,c\in C^\infty(\bar{U})$

U有界连通集. $\partial U\in C^\infty$ $a^{ij}=a^{ji}$. $c\geq 0$ in U

这里L不再~~有~~对于其形式自伴. 但仍有一些结论成立.

我们不再给出证明:

Thm 6.7.3. (1) $\exists L$的一个实特征值λ_1. 满足λ_1 $u=0$ on ∂U 且若$\lambda\in\mathbb{C}$ 是另一特征值. 必有 $\mathrm{Re}\lambda\geq\lambda_1$.

(2). $\exists$对应于λ_1的特征函数w_1. $w_1\geq 0$ in U

(3). λ_1是单重特征值. 即 若u满足$\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解. 则u为w_1的倍数