Evans Ch7 Notes (Draft)

章俊彦
PB13001112
zhangjy9610@gmail.com.

Ch7 发展方程弱解理论
抛物

§7.0 预备知识

I. 以Banach空间为值域的函数

设 $f:[0,T]\to X$, $T>0$. X是Banach空间(赋予范数 $\|\cdot\|$).

<u>Def</u>: (1) (简单函数) $s:[0,T]\to X$ 称作简单函数, 若S有形式

$$s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i \qquad 0\le t\le T$$

其中$\{E_i\}$是$[0,T]$的Lebesgue可测子集. $u_i\in X$

(2) (强可测). $f:[0,T]\to X$ 称作强可测, 若存在简单函数列 $s_k:[0,T]\to X$, 使得 $s_k(t)\to f(t)$ a.e. $t\in[0,T]$.

(3) (弱可测) $f:[0,T]\to X$ 称作弱可测. 若 $\forall\, u^*\in X^*$, 映射

$$[0,T]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\langle u^*,f(t)\rangle$$

是Lebesgue可测的

(4) 称 $f:[0,T]\to X$ 的取值是几乎可分的, 若存在Lebesgue零测集 $N\subset[0,T]$, 使得 $\{f(t)\,|\,t\in[0,T]-N\}$ 可分(具有可数稠子集).

Thm 7.0.1 (Pettis 引理). $f:[0,T]\to X$ 强可测 $\Longleftrightarrow$ f 弱可测且取值几乎可分.

Proof 见Yosida的泛函分析

□

Def (定义积分)

(1) $S(t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(t)u_i$ 是简单函数，则 $\int_0^T s(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\cdot u_i$

(2) 对强可测函数 $f:[0,T]\to X$，称 f 可和 (summable)（可以理解为实变中的"可积"）. 是指 $\exists\{S_k\}_1^\infty$ simple. s.t.

$$\int_0^T \|S_k(t)-f(t)\|dt \to 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

(3) 若 f 可和，则 $\int_0^T f(t)dt := \lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)dt$

□.

Thm 7.0.2 (Bochner).

$f:[0,T]\to X$ 强可测，则 f 可和 $\Longleftrightarrow$ $t\mapsto \|f(t)\|$ 可和.

along. $\left\|\int_0^T f(t)dt\right\| \le \int_0^T \|f(t)\|dt$.

$$\langle u^*, \int_0^T f(t)dt\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t)\rangle dt \quad \forall u^*\in X^*$$

□

II. 时空 Sobolev 空间

Def: (1) $L^p([0,T];X) = \left\{u:[0,T]\to X \text{ 强可测} \,\middle|\, \|u\|_{L^p([0,T];X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$
$1\le p<\infty$

$L^\infty([0,T];X) = \left\{\cdots\cdots \,\middle|\, \|u\|_{L^\infty([0,T];X)} := \operatorname{esssup}_{t} \|u(t)\| < \infty\right\}$

$C([0,T];X) = \left\{u:[0,T]\to X \text{ 连续} \,\middle|\, \|u\|_{C([0,T];X)} := \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\| < \infty\right\}$

(2) $u\in L^1(0,T;X)$，称 $v\in L^1(0,T;X)$ 是 u 的弱导数，记作 $u'=v$，

若 $\int_0^T \phi'(t)u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall \phi\in C_c^\infty(0,T)$

(3) $W^{1,p}(0,T;X)=\{\, u\in L^p(0,T;X) \mid u'\in L^p(0,T;X) \,\}$.

$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \big\| \|u(t)\| + \|u'(t)\| \big\|_{L^p_t}$

Thm 7.0.3 (抽象空间中的基本运算)

$u\in W^{1,p}(0,T;X)$. $1\le p\le\infty$ 则

(1). $u\in C([0,T];X)$ (modify 一个零测集后).

(2) $u(t) = u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$. $\quad 0\le s\le t\le T$

(3). $\sup\limits_{0\le t\le T} \|u(t)\| \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

证明: 只用证(2)即可

将 u 延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R};X)$ 上. $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$.

η_ε: IR上的磨光子.

则 $(u^\varepsilon)'=\eta_\varepsilon * u'$ on $(\varepsilon, T-\varepsilon)$.

$\varepsilon\to 0$ 时: $u^\varepsilon\to u$ in $L^p(0,T;X)$

$(u^\varepsilon)'\to u$ in $L^p_{loc}(0,T;X)$.

由于 $u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(s)+\int_s^t u^{\varepsilon\prime}(\tau)\,ds$. $\quad$ a.e. $0<s<t<T$

令 $\varepsilon\to 0$. 由于 $t\mapsto\int_0^t u'(\tau)\,d\tau$ 连续 知:

$$u(t)=u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$$

□

Thm 7.0.4 (互多基本运算). $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

则 (1) $u\in C([0,T];L^2(U))$ (差一个零测集).

(2). $t\mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ 绝对连续. 且 $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$ a.e. $0\le t\le T$.

(3). $\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right)$.

证明: (1) 将 u 延拓到 $[-\sigma, T+\sigma]$ 上. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

则对 $\varepsilon,\delta>0$

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon-u^\delta,\ u^\varepsilon-u^\delta\rangle_{L^2}$$

$$= 2\langle u^{\varepsilon\prime}(t)-u^{\delta\prime}(t),\ u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\rangle_{L^2}$$

积分,

$$\Rightarrow \|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)-u^\delta(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau)-u^{\delta\prime}(\tau),\ u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

$\forall 0\le s,t\le T$ 都对.

Fix $s\in(0,T)$: $u^\varepsilon(s)\to u(s)$ in $L^2(U)$.

$$\therefore \limsup_{\varepsilon,\delta\to 0}\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 \le \lim_{\substack{\varepsilon,\delta\to 0\\ 0?}}\int_0^T \|u^{\varepsilon\prime}(\tau)-u^{\delta\prime}(\tau)\|_{H^{-1}(U)}^2 + \|u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}^2\, d\tau.$$

$\Rightarrow \{u^\varepsilon(t)\}$ 是 $C([0,T];L^2(U))$ 中的 Cauchy 列.

所以 $\exists v\in C([0,T];L^2(U))$. $u^\varepsilon(t)\to v$ in $C([0,T];L^2(U))$

又: $u^\varepsilon(t)\to u(t)$ a.e. t $\Rightarrow u=v$ a.e.

类似可得 $\|u^{\varepsilon}(t)\|_{L^2}^2 = \|u^{\varepsilon}(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau), u^{\varepsilon}(\tau)\rangle d\tau$.

令 $\varepsilon \to 0$. 由 $u = v$ a.e. 知

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau.$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 \in AC[0,1].\quad \frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = 2\langle u', u\rangle \qquad 0 \le s, t \le T$$

对上式积分 即有:

$$~~\sup \|u(t)\|~~\ T\|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2\, ds + CT\|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^2}^2 \lesssim_T \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2.$$

$\square$.

Thm 7.0.5 U 有界开. ∂U 光滑, $m \in \mathbb{N}$.

$u \in L^2(0,T;H^{m+2}(U))$, $u' \in L^2(0,T;H^m(U))$. 则有:

(1) $u \in C([0,T];H^{m+1}(U))$. (modify 一个零测集后).

(2) $\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \lesssim_{T.U.n.} \|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2})} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m)}$.

证明: 我们只证 $m=0$ 的情形. 其余的, 只需考虑 u 的导数.

此时 $u \in L^2(0,T;H^2)$, $u' \in L^2(0,T;L^2)$.

将 u 延拓为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 $L^2(0,T;H^2)$ 函数 $\bar{u}$. spt $\bar{u} \subset\subset V$.

$$\|\bar{u}\|_{H^2(V)} \le C\|u\|_{H^2(U)}$$

$$\frac{d}{dt}\|D\bar{u}\|_{L^2}^2 = 2\langle D\bar{u}', D\bar{u}\rangle = -2\langle \bar{u}', \Delta\bar{u}\rangle$$

$$\le C\left(\|\bar{u}'\|_{L^2(V)}^2 + \|\bar{u}\|_{H^2(V)}^2\right)$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^1(U)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}\right).$$

$$\Rightarrow u\in C([0,T];H^1(U))$$

□.

§7.1 二阶线性抛物方程弱解理论.

本节考虑的方程为

$$(*)\quad \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T. \\ u = 0. & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g. & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

$f: U_T\to\mathbb{R}$. $g: U\to\mathbb{R}$ 给定; $u: \overline{U_T}\to\mathbb{R}$ 是未知函数

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(a^{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u.$$

$$\text{or} = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}u + \cdots\cdots$$

L 一致抛物. $\{a^{ij}\}$ 实对称正定.

7.1.1 弱解定义:

设 $f\in L^2(U_T)$, $g\in L^2(U)$, $a^{ij}, b^i, c\in L^\infty(U_T)$.

Def: 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 是初边值问题(*)的弱解, 若成立: ① $\langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$.

② $u(0)=g$.

其中 $B[u,v;t]=\int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}v + cuv\,dx$.

$\forall u,v\in H_0^1(U)$, a.e. $t\in[0,T]$

注：① $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不再表示内积，而是对偶空间 (H^{-1}) 的元素与原先空间 (H_0^1) 的元素之间的作用.

② 定义中的 $u(0)=g$ 是有意义的 因 Thm 7.0.3 表明 $u\in C([0,T];L^2)$

□

7.1.2. 解的存在唯一性（Galerkin截断 ⇒ 能量估计 ⇒ Gronwall 不等式）.

$$(*)\begin{cases} u_t+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

Main steps:

①: 构造逼近解序列 $\{u_m\}$，满足 $\begin{cases}\text{有限维截断而来.} \\ H_0^1 \text{ 的标准基测试, 满足弱解条件.} \\ \exists!\ \text{(由ODE知识)}\end{cases}$

②: 能量估计: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 一致有界.
$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理，存在弱极限 u,v.
希望是解.

③ $u'=v$ a.e.

(u,u') 满足弱解定义.

Step 1: 构造逼近解序列:

设 $\{w_k\} \subseteq C^\infty$ 是 $\begin{cases} L^2(U) \text{ 标正基} \\ H_0^1(U) \text{ 正交基} \end{cases}$.

Fix $m \in \mathbb{Z}_+$.

• 若 $u \in H_0^1$ 是弱解，则可以展开作 $u = \sum_{k=1}^{\infty} d^k(t) w_k$.

代入弱解定义即有:
$$\langle \sum_{k=1}^{\infty} d^{k\prime}(t) w_k, w_l \rangle + B[\sum_{k=1}^{\infty} d^k(t) w_k, w_l; t] = \langle f, w_l \rangle \quad \forall l.$$

$$\Longrightarrow d^{l\prime}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{e_{kl}(t)}_{\text{系数 (常值)}} d^k(t) = f^l(t) := \langle f, w_l \rangle \quad \forall l.$$

此时，令 $u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$ 则 $d_m^{l\prime}(t) + \sum_{k=1}^{m} e_{kl} d_m^k(t) = f^l(t)$ $\quad 1 \le k, l \le m.$ $\cdots$ (#)

$f^l \in L^2([0,T])$.

$e^{kl} := B[w_k, w_l; t] = \int a^{ij} \partial_{x_i} w_k \partial_{x_j} w_l \, dx$. $\in C^\infty [0,T]$.

$\Rightarrow u \in H^1_{loc}[0,T] \subseteq C[0,T]$ (作为 t 的函数).

Claim: $u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^{m} (g, w_k) w_k$.

($\Leftrightarrow d_m^k(0) = (g, w_k)$)

Claim 由 (#) 的存在唯一性 直接得证.

即存在绝对连续的 $\vec{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ 满足 $\begin{cases} (\#) \\ \text{claim} \end{cases}$.

a.e. $t \in [0,T]$.

#

Step 2: 能量估计:

Thm 7.1.1: ∃仅依赖于 U. T. L 的常数 $C>0$ s.t.

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)} \right).$$

Proof: Fix $m \in \mathbb{Z}_+$

由 Step1: $\forall k \le m$. 有:

$$\langle u_m', w_k \rangle + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k).$$

两边乘以 $d^k(t)$, 对 k 求和有:

$$\underbrace{\langle u_m', u_m \rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2} + B[u_m; u_m; t] = (f, u_m).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u_m \partial_j u_m \, dx = (f, u_m) - \int \sum_i b^i(\partial_i u_m)\cdot u_m \, dx - \int c u_m^2 \, dx$$

L一致椭圆 $\Rightarrow$ Hölder

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta\|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon\|Du_m\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|u_m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2.$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 有:

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta\|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

Fact (Gronwall 不等式).

- η 非负. $\eta \in AC[0,T]$, 且对 a.e. t 有: $\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$. ϕ, ψ: L^1 非负 on $[0,T]$

则 $\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$. $0 \le t \le T$

在此: $\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(U)}^2$, $\xi(t) = \|f\|_{L^2}^2$.

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le Ce^{Ct}\left(\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-cs}\eta(s)\,ds\right).$$

$$\le e^{CT}\left(\|g_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le C_T\left(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right) \qquad 0\le t\le T$$

下面再估计 $\|Du_m\|_{L^2}^2$

由：$\|Du_m\|_{L^2}^2 \leqslant C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$.

对t积分：$\int_0^T \|Du_m(t)\|_{L^2}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \le C_T\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

下面再估计 $\|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$.

$\cdot\ u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k u_k \Rightarrow u_m' = \sum_{k=1}^m d_m^{k\prime}(t)\,u_k.$

先估计 $\|u_m'(t)\|_{H^{-1}}$

Fix $t\in[0,T]$.

$\forall v\in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)}\le 1$

$\langle u_m', v\rangle = \langle u_m'(t), \underbrace{v_m}\rangle$ 前m维截断.

$= B[u_m, v_m; t] + (f, v_m).$

$$\le \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|Dv_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|f\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1}.$$

因 $\|v\|_{H_0^1}\le 1$

对v取sup

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{H^{-1}}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 = \int_0^T \|u_m'(t)\|_{H^{-1}}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)$$

Step 3：弱解存在性.

Thm 7.1.2： (*) 弱解存在.

Pf： 由 Thm 7.1.1 有： $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 中一致有界

$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理 及 习题5,6 结论有

Ex5： $\left.\begin{array}{ll} u_k \rightharpoonup u & \text{in } L^2(0,T;H_0^1) \\ u_k' \rightharpoonup v & \text{in } L^2(0,T;H^{-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow v=u'$

Ex6： $\left.\begin{array}{l} H \text{ Hilbert.} \\ u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H). \\ \text{且 } \| \|u_k(t)\| \|_{L^\infty_t} \le C \quad \forall k\in \mathbb{Z}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \| \|u(t)\| \|_{L^\infty} \le C$

有： ∃子列 $u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$.

$u_{m_l}' \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$.

如今我们待证的是：

(i) ： $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \forall v\in H_0^1$

(ii)： $u(0)=g$.

Claim： $\forall v\in L^2(0,T;H_0^1(U))$. $\int_0^T \langle u',v\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt$.

check： 设 $v\in C_c^1(0,T;H_0^1(U))$. $v=\sum_{k=1}^N d^k(t) w_k$. $d^k\in C^\infty$ $1\le k\le N$.

取 $m\ge N$. 时 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k;t] = (f, w_k)$.

两边乘以 d^k ~~再积分~~ 再对k求和有

$$\langle u_m', v\rangle + B[u_m, v;t] = (f,v).$$

积分： $\int_0^T \langle u_m', v\rangle + B[u_m, v;t] = \int_0^T (f,v)\,dt$.

取 $m=m_l$. 令 $l\to\infty$. 由弱收敛的结果有:

$$\int_0^T \langle u',v\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\, dt. \quad \forall v\in L^2(0,T;H_0^1)$$

由 $C_c^1 \overset{\text{dence}}{\subset} L^2$.

<u>claim holds.</u>

~~这样: $\langle u'$~~

下证: $\forall v\in H_0^1(U)$. a.e. $t\in[0,T]$ 成立. $\langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

为此. 取 $\forall v\in H_0^1(U)$. $\eta(t)\in C^\infty[0,T]$. 则 $\eta v\in L^2(0,T;H_0^1(U))$.

$$\int_0^T \langle u',\eta v\rangle + B[u,\eta v;t]\,dt = \int_0^T (f,\eta v)\,dt.$$

$\forall\eta \Leftrightarrow \int_0^T \eta(t)\cdot\left(\langle u',v\rangle + B[u,v;t] - (f,v)\right)dt = 0$

$\Rightarrow \quad \langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ a.e. $t\in[0,T]$ 成立. $\forall v\in H_0^1(U)$.

这样 (i) 成立. $\xRightarrow{\text{Thm 7.0.4}} u\in C([0,T];H_0^1)$

再证 (ii). $u(0)=g$.

取 $v\in C^1([0,T];H_0^1)$, $v(T)=0$. 则.

$$\int_0^T \left(\langle u',v\rangle + B[u,v;t]\right)dt = \int_0^T (f,v)\,dt.$$

$$\int_0^T\langle u_m',v\rangle\, dt \overset{\text{分部积分}}{=} \langle u_m(t),v(t)\rangle - \langle u_m(0),v(0)\rangle - \int_0^T \underbrace{\cancel{\langle u_m, v'\rangle}}_{\langle \underset{H^{-1}}{v'},\ \underset{H_0^1}{u_m}\rangle}\, dt.$$

取 $m=m_l$. $l\to\infty$ 代入有: $\quad u_{m_l}(0)=g_{m_l}\xrightarrow[l]{} g$ in H_0^1

$$\int_0^T -\langle v',u\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\, dt + (g,v(0)).$$

由 $v(0)$ 任意. 同(i)有 $u(0)=g$. $\#$

Step 4：唯一性

Thm 7.1.3：(*)弱解唯一.

证：只用证 $f=g=0$ 时，只有零解（因方程是线性的）

取弱解定义中，$v=u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + B[u,u;t] = \langle u',u\rangle + B[u;u;t] = 0$$

$$\text{而 } B[u,u;t] = \int \sum a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u + \sum b^i u\,\partial_i u + cu^2\,dx$$

$$\overset{\text{同 Step 2}}{\geq} \theta\|Du\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|Du\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^2}^2 \leq C\|u(t)\|_{L^2}^2$$

由 Gronwall 不等式 及 $u(0)=0$ 知 $\|u(t)\|_{L^2}^2 = 0$，$u\equiv 0$.

$u\in C([0,T];H_0^1)$

□.

7.1.3 正则性

对(*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u(0)=g & \text{on } \partial U \end{cases}$

在下定正则性的结论之前，我们先要通过一些形式推导来预测最终的结论.

对热方程：$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,T] \\ u(0)=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(u_t-\Delta u)^2dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u\cdot u_t + (\Delta u)^2dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\nabla u_t\cdot\nabla u + (\Delta u)^2dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int|Du|^2dx + \int u_t^2 + \int|\Delta u|^2 = \int f^2dx.$$

对t积分可得:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|\Delta u|^2\,dx\,dt.$$

$$\le \int|\nabla u(0)|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dx\,dt.$$

$$\lesssim \int|\nabla g|^2\,dx+\int_0^T\int|f|^2\,dx\,dt.$$

所以，对弱解，我们预测: $g\in H_0^1$, $f\in L_t^2L_x^2$ $\Rightarrow$ $u\in L_t^2H_0^1$, $u'\in L_t^2H_x^{-1}$

$$\Longrightarrow u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$$

$$\uparrow \quad u'\in L^2(0,T;L^2)$$

观察上面的式子表示什么意思!

进一步地，~~若g再对~~ 令 $\tilde{u}=u_t$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{u}_t-\Delta\tilde{u}=\tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \tilde{u}=\tilde{g} & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad \begin{aligned}\tilde{f}&=\partial_t f.\\ \tilde{g}&=f(\cdot,0)+\Delta g\\ &=\partial_t u(\cdot,0).\end{aligned}$$

两边乘以 $\tilde{u}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{u}\cdot\partial_t\tilde{u}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2}-\tilde{u}\Delta\tilde{u}=\tilde{f}\tilde{u}$$

和 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2$ 　分部积分后会变成 $\int|\nabla\tilde{u}|^2$

对t积分　x积分

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2\,dt+\int_0^T\int|\nabla u_t|^2\,dx\,dt\lesssim\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx)$$

~~又: sup 0≤~~

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2\,dx\,dt$$

$$\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx\right)$$

但 $\sup_{0\le t\le T}\|f(\cdot,t)\|_{L^2}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}+\|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$. $\Leftarrow$ (Thm 7.0.3).

又：$-\Delta u = f - \partial_t u$

所以 $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 \, dx \le C \int f^2 + |\partial_t u|^2 \, dx$ （椭圆正则性）.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\nabla^2 u|^2 \, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 \, dx\,dt$$

$$\le C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 \, dx \right).$$

□.

由此，我们可以预测.

$g \in H^2$, $f' \in L^2(0,T;L^2) \Rightarrow$ $u \in L_t^\infty H_x^2$, $u' \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_0^1$, $u'' \in L^2(0,T;H^{-1})$. 观察上式的结论.

关于热方程，本身具有更好的光滑效应.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u_0 = g \in L^2 \end{cases}$$

由 Fourier 变换有：$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$.

$$\Rightarrow \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \| \langle \xi \rangle^s \hat{u}(t,\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$(\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \| \underbrace{(e^{-t|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s)}_{\text{有界Fourier乘子}} \hat{g} \|_{L^2}$$

Mikhlin-Hörmander 乘子定理

$$\lesssim \|g\|_{L^2}. \qquad \forall s > 0$$

对自由热方程. $g \in L^2 \Rightarrow u \in C^\infty$

□.

Thm 7.1.4（抛物方程正则性定理）

(1) 设 $g\in H_0^1(U)$，$f\in L^2(0,T;L^2(U))$. 设 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$，$u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

是 (*) $\begin{cases}\partial_t u+Lu=f & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$

那么有：$u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$. $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$

$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|g\|_{H_0^1}\right)$.

(2) 若 $g\in H^2(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2)$. $u'\in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H_0^1)$.

$u''\in L^2(0,T;H^{-1})$.

且

$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}+\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$

$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right)$.

证明：(1) 类似之前的证明可得. $\forall m\in\mathbb{Z}_+$.

(1.1) 逼近解 u_m 满足.

$(u_m',u_m')+\underline{B[u_m,u_m';t]}=(f,u_m')$.

$$\| \qquad \int_U\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m'\,dx+\int_U\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u_m u_m'+cu_mu_m'\,dx.$$

而 $\int\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m'\,dx=\int\frac{d}{dt}\left(\sum a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m\right)-\underbrace{\sum a^{ij}\partial_i u_m'\partial_j u_m}_{\text{左}}\,dx$.

从而 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$

(2).

$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \quad 1 \le k \le m$

$\Downarrow$ 对 t 求导

$(u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

$\Downarrow$ 乘以 $d_m^{k\prime}(t)$，对 k 求和.

$\forall m \in \mathbb{Z}_+$. $(u_m'', u_m') + B[u_m', u_m'; t] = (f', u_m')$.

$\Downarrow$ 令 $\widetilde{u_m} = u_m'$ 　 则 $\widetilde{u_m}(0) = u_m'(0) = -Lu_m(0) + f(0)$.

$(\widetilde{u_m}', \widetilde{u_m}) + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}; t] = (f', \widetilde{u_m})$.

2.1

由 Thm 7.1.1 (能量估计). 有:

$\sup_{0 \le t \le T} \|\widetilde{u_m}(t)\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{u_m}\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2$

$\le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\widetilde{u_m}(0)\|_{L^2}^2\right)$.

$\le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|u_m(0)\|_{H^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2\right)$.

$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\underset{u_m(0)}{g}\|_{H^2}^2\right)$ ✓

如何用 g 的 H^2 控制这项?

~~$u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U})$.~~

~~其中 … 接 … 为.~~

接 $-\Delta$ 在 $H_0^1(U)$ 中有標准正交基 $\{w_k\} \subset C^\infty(\bar{U})$. 　 $\Delta u_m = 0$ on ∂U.

~~$\because \|u_m(0)\|_{H^2(U)}^2$~~ 　 $u_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U})$.

$\int \Delta u_m(0) \Delta u_m(0) \overset{\text{多次分部}}{=} \int |D^2 u_m|^2 dx - \sum_{i,j} \int n_i \partial_i u_m \partial_j^2 u_m + n_j \partial_i u_m \partial_i \partial_j u_m \, dS$.

$$\Rightarrow \int \sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_i u_m\, \partial_j u_m'\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \underbrace{\int \sum a^{ij}\, \partial_i u_m\, \partial_j u_m\, dx}_{\substack{\| \\ A[u_m]}}.$$

因此：

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}A[u_m] = (f, u_m') - \sum_i \int b^i \partial_i u_m\, u_m'\, dx - \int c u_m u_m'$$

$$\leq C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2}\right).$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|u_m'\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 有：

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}A[u_m] \leq C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

积分可得. $\forall t\in[0,T]$.

$$\int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \underbrace{A[u_m]}_{\geq \theta\|Du_m\|^2} \leq C\left(\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 dt + A[u_m(0)]\right).$$

$$\leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2 + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2\right)$$

$\Big\downarrow$ 用Thm 7.1.1

$\|g\|_{L^2}^2 + \|Dg\|_{L^2}^2$

$$\Rightarrow \int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|Du_m(\tau)\|_{L^2}^2\, d\tau.$$

$$\leq \tilde{C}\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \cancel{\|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2} + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 dt + \sup_{0\le t\le T} \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2$$

$$\leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right).$$

令 $m\to\infty$ 即得 $\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$ 的估计. 用到了习题6.
(取子列 m_l). $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

(1.2)

余下要估计 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}$.

由于 $(u', v) + B[u, v; t] = (f, v)$ $\forall v\in H_0^1(U)$.

$B[u, v; t] = (f - u', v)$ $\forall v \in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

由椭圆方程正则性结论. $\|u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_2 + \|u'\|_{L^2})$ a.e. $0\le t\le T$

但:

$$0 \le \|\partial_i w_k\|^2_{L^2(\partial U)} \overset{\text{Ch5. Ex. 9}}{\le} C\|\underbrace{w_k}_{0}\|_{L^2(\partial U)}\|D^2 w_k\|_{L^2(\partial U)} = 0$$

$\Rightarrow \int_{\partial U}$ 项消失.

$$\Rightarrow \|\tilde u_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|\Delta \tilde u_m(0)\|^2_{L^2}$$

$$= C(\Delta\tilde u_m(0), \Delta \tilde u_m(0))$$

$$\overset{\text{两次分部积分}}{=} C(g_m, \Delta^2 \tilde u_m(0))$$

$$\overset{(u_m(0), w_k)=(g, w_k)}{=} C(g, \Delta^2\tilde u_m(0))$$

$$= C(\Delta g, \Delta\tilde u_m(0))$$

$$\le C\|\Delta g\|_{L^2}\|\Delta \tilde u_m(0)\|_{L^2}$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} C\left(\|g\|^2_{H^2} + \frac12\|\tilde u_m(0)\|^2_{H^2}\right).$$

$$\Rightarrow \|\tilde u_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|g\|^2_{H^2}$$

这样: $\sup_{0\le t\le T}\|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|u_m'\|^2_{H_0^1}\, dt \le C\left(\|f\|^2_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H^2}\right)$.

~~从而 (1) 证毕~~.

$$\xrightarrow{m=m_l\to\infty} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$$

(2-2)

下面再估计 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}$.

~~靠~~ Fact (习题9). $\exists \beta>0, \gamma\ge 0$ s.t. $\beta\|u\|^2_{H^2} \le (Lu, -\Delta u) + \gamma\|u\|^2_{L^2}$.

如今: $B[u_m, w_k] = (f - u_m', w_k)$. $\quad 1\le k\le m$.

乘以 $d_m^k\lambda_k$ 并求和, 有: $B[u_m, -\Delta u_m] = (f-u_m', -\Delta u_m)$.

$$\| \quad (Lu_m, -\Delta u_m).$$

$$\Rightarrow \beta\|u_m\|^2_{H^2} \overset{\text{Fact}}{\le} (Lu_m, -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|^2_{L^2}$$

$$= (f-u_m', -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|^2_{L^2}.$$

$$\le \|f\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \|u_m'\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\le \varepsilon\underbrace{\|\Delta u_m\|_{L^2}^2}_{\|D^2 u_m\|_{L^2}^2 \le \|u_m\|_{H^2}^2} + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2\right) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$，有：

$$\|u_m\|_{H^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

不可能 $=\infty$（椭圆正则性保证）.

对t积分.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \le C\Big(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\Big)$$

$H^1 \hookrightarrow L^\infty$ (dim=1).

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

~~对t积~~

$$\overset{(1.1)+(2.1)}{\le} C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right).$$

$m = m_l \to \infty$ 即得 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \le C(\ \cdots\cdots\ )$

回顾题6

(2.3) 余下估计 $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$，不必证明 u_m'' 情形.

$$(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$$

Fix any $v \in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$.

$$\|u_m''\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1} \le 1} |\langle u_m'', v\rangle|$$

$$\cancel{= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \left|\langle f' - B[u_m', v; t],\ v\rangle\right|}$$

$v = v^1 + v^2 \in \mathrm{Span}\{w_1 \ldots w_m\} \oplus \mathrm{Span}\{w_{m+1}, \ldots\}$

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \left|\langle f', v^1\rangle - B[u_m', v^1; t]\right| \Longrightarrow$$

$$\leq \sup_{\|w\|_{H_0^1}\leq 1}\left(\|f'\|_{L^2}\|v^1\|_{L^2}+\|u_m'\|_{H_0^1}\|v^1\|_{H_0^1}\right)$$

$$\leq \cancel{\sup}\ \|f'\|_{L^2}+\|u_m'\|_{H_0^1}$$

再用 (2.1) 有:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\leq C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|u_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}\right)$$

$$\leq C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right).$$

由引理5, 令 $m=m_l\longrightarrow+\infty$ 有

$$\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\leq C\left(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right)$$

□

更高正则性可由归纳法得出, 此处不再证明:

Thm 7.1.5 (高阶正则性)

设 $g\in H^{2m+1}(U)$, $\dfrac{d^kf}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))$.

$g_0=g\in H_0^1(U)$. $g_1=f(0)-Lg_0\in H_0^1(U),\ldots,\ g_m=\dfrac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}-Lg_{m-1}\in H_0^1(U)$.

则 $\dfrac{d^ku}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))\qquad 0\leq k\leq m+1$.

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^ku}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}$$

$$\leq C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^kf}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))}+\|g\|_{H^{2m+1}(U)}\right).$$

□

Thm 7.1.6:

$g \in C^\infty(\bar{U})$. $f \in C^\infty(\bar{U}_T)$. 且 $\forall m \in \mathbb{Z}_+$. $\begin{cases} g_0 = g \in H_0^1(U) \\ g_m = \dfrac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} - g_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases}$

则初边值问题(*)有唯一解 $u \in C^\infty(\bar{U}_T)$

□.

§7.2. 极大值原理.

本节将跳过 Harnack 不等式. 令 $Lu = -\sum_{ij} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i b^i u_{x_i} + cu$.

7.2.1 弱极大值原理.

Thm 7.2.1 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$. $c = 0$ in U_T. $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$.

(1) 若 $u_t + Lu \le 0$. in U_T. 则 $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.

(2) 若 $u_t + Lu \ge 0$ in U_T 则 $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u$.

证明: 只证(1).

先设 $u_t + Lu < 0$ in U_T.

设 $(x_0, t_0) \in \bar{U}_T$. $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$.

- 若 $0 < t_0 < T$. 则 $(x_0, t_0) \in U_T$ 内部

$\Rightarrow \partial_t u(x_0, t_0) = 0$

又: $Lu \ge 0$ at (x_0, t_0). (这与自课本6.4节 Thm 1中之证明类似)

$\Rightarrow \partial_t u + Lu \ge 0$. 与假设矛盾.

- 若 $t_0 = T$. 则 $u_t \ge 0$ at (x_0, t_0) (因 u 在 (x_0, t_0) 达最大值).

同样有 $Lu \ge 0$. 推出矛盾.

一般情况. 即 $u_t + Lu \le 0$ 令 $u^\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$. $\varepsilon > 0$.

则 $u_t^\varepsilon + Lu^\varepsilon = u_t + Lu - \varepsilon < 0$ in U_T

$\Rightarrow \max_{\bar{U}_T} u^\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. $\varepsilon \to 0$ 即得结论

□.

对 $c\ge 0$，我们也有类似的结论

$c\ge 0$ in U_T

Thm 7.2.2: (弱极大值原理. $c\ge 0$) $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar U_T)$

(1). 若 $\partial_t u+Lu\le 0$ in U_T. 则 $\max_{\bar U_T} u\le \max_{\Gamma_T} u^+$.

(2) 若 $\partial_t u+Lu\ge 0$ in U_T. 则 $\min_{\bar U_T} u\ge -\max_{\Gamma_T} u^-$

(3) $=0$ 则 $\max_{\bar U_T}|u| = \max_{\Gamma_T}|u|$

□.

Thm 7.2.3: Harnack 不等式

$u\in C_1^2(U_T)$ 满足 $u_t+Lu=0$ in U_T.
$u\ge 0$ in U_T.

$V\subset\subset U$ 连通. 则. $\forall\ 0<t_1<t_2\le T$. $\exists\, C>0$ s.t. $\sup_V u(\cdot,t_1)\le C\inf_V u(\cdot,t_2)$

□.

7.2.2. 强极大值原理.

设 $t_0\in[0,T]$, $U_{t_0}=U\times[0,t_0]$.

Thm 7.2.4 (强极大值原理). $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar U_T)$. $c=0$ in U_T. U是连通集.

(1) 若 $\partial_t u+Lu\le 0$ in U_T. u在 ~~某~~ $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar U_T$ 中的最大值.
则 u是 U_{t_0}上的常值函数.

(2). - - $\ge$ - - - - - - - - - 最小值

以上. 假设 L的系数是光滑的.

证明: 只证(1). 设 $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. v满足

$$\begin{cases}\partial_t v+Lv=0 & \text{on } W_T\\ v=u & \text{on } \bar W_T-W_T=:\partial_T\end{cases}$$

$M=\max_{\bar U_T} u$.

由弱极大值原理. $u\le v$. 令. ~~$u\le v\le M=$~~

则 $v=M$ at ~~t_0~~ (x_0,t_0).

$\tilde v:=M-v$. 则 $c=0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\partial_t\tilde v+L\tilde v=0\\ \tilde v\ge 0\end{cases}$ in W_T.

任取 $V\subset\subset W$. $x_0\in V$. V连通. $0<t<t_0$.

由Harnack不等式. $\max_V \tilde v(\cdot,t)\le C\inf_V\tilde v(\cdot,t_0)\le\tilde v(x_0,t_0)=0$

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ on $V\times\{t\}$. $\forall\, t\in(0,t_0)$.

$\forall V\subset\subset W$.

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ in W_{t_0}

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow v=M \text{ in } W_{t_0}\\ v=u \text{ on } \Delta_T\end{array}\right\} \Rightarrow u=M \text{ on } \partial W\times[0,t_0]$$

$$\left.\begin{array}{l}u=M \text{ on } \partial W\times[0,t_0]\\ \forall W\subset\subset U\end{array}\right\} \Rightarrow u=M \text{ on } U_{T_0}$$

□.

Thm 7.2.5 ($c\geq 0$ 的强极大值原理). $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c\geq 0$ in U_T.
U连通

(1) 若 $u_t+Lu\leq 0$ in U_T u 在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的(非负)最大值. 则 u 在 U_{t_0} 中是常数.

(2). · · ≥ 0 (非正)最小值.

Proof. 只证(1). $M:=\max\limits_{\bar{U}_T} u \geq 0$.

$u_t+Lu\leq 0$ in U_T.

若 $M=0$. 则由 Thm 7.2.4 即可.

若 $M>0$. 同7.2.4. 选取. $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. $K:=L-c\,Id$.

$$\begin{cases} v_t+Kv=0 & \text{in } W_T\\ v=u^+ & \text{on } \Delta_T\end{cases}$$

$0\leq v\leq M$

on $\{u\geq 0\}$. 有 $u_t+Ku\leq -cu\leq 0$.

那么由弱极大值原理. $u-v\leq 0$

$\Rightarrow v=M$ at (t_0,x_0)

同7.2.4

令 $\tilde{v}=M-v$. 则 $\partial_t\tilde{v}+K\tilde{v}=0$ 且 $\tilde{v}\geq 0$ in W_T

任取 $V\subset\subset W$ $x_0\in V$. V连通. $0<t<t_0$. 由 Harnack 不等式知.

$v=u^+=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$. 又 $M>0$. 故 $u\equiv M$ on $\partial W\times[0,t_0]$ □

§7.3 二阶双曲方程的弱解理论

$U_T := U\times(0,T]$, $T>0$. $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集.

考虑初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g,\ \partial_t u = h & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$f: U_T \to \mathbb{R}$. $g, h: U\to\mathbb{R}$ 给定.

$u: \overline{U_T} \to \mathbb{R}$ 未知.

· $Lu := -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\left(a^{ij}(x,t)\,\partial_{x_i}u\right) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\,\partial_{x_i}u + c(x,t)\,u$.

· L 满足 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$, $\forall (x,t)\in U_T$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ for some $\theta>0$.

则称 $\partial_t^2 + L$ 为一致双曲的.

· $a^{ij}=\delta_{ij}$, $b^i=c=0$, $L=-\Delta$ 则化为波方程 $\Box u=0$, $\Box = \partial_t^2-\Delta$.

7.3.1 弱解定义.

设 $\begin{cases} a^{ij}, b^i, c\in C^1(\overline{U_T}). \quad a^{ij}=a^{ji} \\ f\in L^2(U_T) \\ g\in H_0^1(U),\ h\in L^2(U). \end{cases}$

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\,\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\cdot v + c(\cdot,t)\,uv\,dx.$$

$\forall u, v\in H_0^1(U)$, $0\leq t\leq T$.

<u>Definition</u> 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ (且 $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$, $u''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$) 是 $(*)$ 的弱解, 若: ① $\langle u'', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

② $u(0)=g$. $u'(0)=h$.

<u>Rmk</u>: 事实上 $u\in C([0,T];L^2(U))$, $u'\in C([0,T];H^{-1}(U))$. 所以谈论逐点值是有意义的.

为何如此定义？

· 形式推导：分部积分即有

$$(u'', v) + B[u, v; t] = (f, v) \qquad 0 \le t \le T \quad v \in H_0^1(U)$$

$\Rightarrow$ u_{tt} 可以表示为 $u_{tt} = \underbrace{g^0}_{\text{II}} + \sum_{j=1}^n \partial_j g^j$ $= \sum_i a^{ij} \partial_i u$.

$f - \sum b^i \partial_i u - cu$.

$\Rightarrow$ 应该使 u 满足 $u'' \in H^{-1}(U)$ (a.e. $t \in [0, T]$)

□.

7.3.2 弱解存在唯一性 (Galerkin逼近).

$$(*) \begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ \partial_t u = h \quad u = g & \text{on } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

与 7.1 类似. 选取 (适当选) $-\Delta$ 的特征函数 $\{w_k\}$ 作为 $L^2(U)$ 的标准正交基, $H_0^1(U)$ 的正交基.

Fix $m \in \mathbb{Z}_+$. 取 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$.

问：如何选取 d_m^k 满足需求？

希望：
$$(\#) \begin{cases} d_m^k(0) = (g, w_k) & (\text{因 } g = \sum (g, w_k) w_k) \\ d_m^{k'}(0) = (h, w_k) & h = \sum (h, w_k) w_k. \\ (u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k). & 0 \le t \le T. \quad 1 \le k \le m. \end{cases}$$

Step 1: 构造逼近解序列

Thm 7.3.1 (逼近解序列的构造).

$\forall m \in \mathbb{Z}_+$. 存在唯一具有形式 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 的函数 u_m, 使 (#) 三式成立.

注意到.

$$B_1 = \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j} \, dx$$

$$= \int_U \sum_{i,j} \partial_t \left(a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \right) dx - \int_U \sum_{i,j} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$- \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u'_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx - \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx.$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j}(t) \, dx - C \|u_m\|^2_{H_0^1}.$$

$$|B_2| \underset{\uparrow}{\leq} C \left(\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m'\|^2_{L^2(U)} \right).$$

Cauchy-Schwartz.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx \right)$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(U)} \right).$$

$$\underset{\uparrow}{\leq} C \left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \int_U \sum_{i,j}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx + \|f\|^2_{L^2(U)} \right)$$

L一致椭圆

令 $\eta(t) = \|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx.$

$\xi(t) = \|f(t)\|^2_{L^2}.$

$$\Rightarrow \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

Proof: 设 $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$.

则 $(u_m'', w_k) = d_m^{k''}(t)$.

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{B[w_k, w_l; t]}_{= e^{kl}(t)}$$

$f^k(t) := (f(t), w_k)$.

则 (#) $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} d_m^{k''}(t) + \sum_{k=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^l(t) = f^k(t) \\ d_m^k(0) = (g, w_k) \\ d_m^{k'}(0) = (h, w_k) \end{cases}$$

由ODE存在唯一性定理即得 □.

~~7.3.2 能量估计~~

Step 2: 证明逼近解序列一致有界.

Thm 7.3.2 (能量估计) $\exists C = C(U, T, L) > 0$ s.t.

$$\sup_{0 \le t \le T} \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|_{L^2(U)} \right) + \|u_m''(t)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}$$
$$\le C \left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)} \right) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Proof: (#) 中两边乘以 $d_m^{k'}(t)$，对 k 求和可得:

$$\underbrace{(u_m'', u_m')}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2}} + B[u_m, u_m'; t] = (f, u_m'). \quad \text{a.e. } t \in [0,T].$$

$$B[u_m, u_m'; t] = \underbrace{\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j}\, dx}_{B_1} + \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{m x_i} u_m' + c u_m u_m' dx}_{B_2}$$

由 Gronwall 不等式

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)\,ds\right) \qquad 0 \le t \le T$$

$$\eta(0) = \|u_m'(0)\|_2^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m x_i}(0)\, u_{m x_j}(0)\, dx.$$

$$\le C\left(\|h\|_{L^2}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right).$$

$$\Longrightarrow \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m x_i}(t)\, u_{m x_j}(t)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right).$$

L-一致椭圆

$$\Longrightarrow \sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \|u_m'(t)\|_{L^2}^2\right) \le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L_t^2 L_x^2}^2\right).$$

再估计 $\|u_m''\|_{L_t^2 H_x^{-1}}$.

Fix $v \in H_0^1(U)$, $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ $\qquad v = \underset{\mathrm{Span}\{w_k\}_1^m}{v^1} + v^2 \in \left(\mathrm{Span}\{w_k\}_1^m\right)^\perp$

$$\langle u_m'', v\rangle = (u_m'', v)$$

$$= (u_m'', v_1) + \underbrace{(u_m'', v_2)}_{=0}$$

$$= (f, v_1) - B[u_m, v^1; t].$$

$$|\langle u_m'', v\rangle| \le C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(U)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\right)$$

对 t 积分.

$$\int_0^T \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2\, dt \le C\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\, dt.$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2 L_x^2}^2\right)$$

Step3: 解的存在唯一性 (Banach-Alaoglu).

Thm 7.3.3 (*) ∃! weak sol.

Pf: 由 7.2.2 及习题 5 知.

$\exists$ 子列 $\{u_{m_l}\}$ $\quad u\in L^2(0,T;H_0^1)$ $\quad u'\in L_t^2L_x^2$. $\quad u''\in L_t^2H_x^{-1}$.

s.t.
$$u_{m_l}\rightharpoonup u \quad \text{in } L_t^2H_{0x}^1$$
$$u_{m_l}'\rightharpoonup u' \quad \text{in } L_t^2L_x^2$$
$$u_{m_l}''\rightharpoonup u'' \quad \text{in } L_t^2H_x^{-1}.$$

取 $v=\sum_{k=1}^N d^k(t)w_k$. $\quad d^k\in C^\infty$ $\quad$ 设 $m\geq N$.

在 $(u_m'',w_k)+B[u_m,w_k;t]=(f,w_k)$ 两边乘以 $d^k(t)$. 对k求和.

对t积分有
$$\int_0^T\langle u_m'',v\rangle+B[u_m,v;t]\,dt=\int_0^T(f,v)\,dt.$$

$m=m_l$. $\quad l\to\infty$
$$\Rightarrow\int_0^T\langle u'',\vec v\rangle+B[u,\vec v;t]\,dt=\int_0^T(f,\vec v)\,dt.\quad\forall\vec v\in L^2(0,T;H_0^1).$$
因 $\{\sum_{k=1}^N d^k(t)w_k\}_{N=1}^\infty$ dense

$\vec v=\eta v$, $v\in H_0^1\cap C_c^\infty$, $\eta\in L^2(0,T)$
$$\Rightarrow\langle u'',v\rangle+B[u,v;t]=(f,v).\quad\forall v\in H_0^1(U)\quad\text{a.e. } t\in[0,T]$$
$$\begin{cases}u\in C([0,T];L^2), & u'\in C([0,T];H^{-1}).\end{cases}$$

如今还需验证 $u(0)=g$ $\quad u'(0)=h$.

$\forall v\in C^2([0,T];H_0^1)$. $v(T)=v'(T)=0$. $\quad$ 对t分部积分两次有:
$$\int_0^T\langle v'',u\rangle+B[u,v;t]\,dt=\int_0^T(f,v)\,dt-(u(0),v'(0))+\langle u'(0),v(0)\rangle.$$

同样
$$\int_0^T\langle v'',u_{m_l}\rangle+B[u_{m_l},v;t]\,dt=\int_0^T(f,v)\,dt-(u_{m_l}(0),v'(0))+\langle u_{m_l}'(0),v'(0)\rangle$$

$l\to\infty$ 即得.

下面证明唯一性:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u|_{\partial U} = 0 & \forall t\in[0,T] \\ u(0)=0,\ \partial_t u(0)=0 & \end{cases}$$

只有零解.

Fix $s\in[0,T]$. $v(t) := \int_t^s u(\tau)\,d\tau \cdot \chi_{\{s\geq t\leq T\}}(t)$.

则 $\forall t\in[0,T]$, $v(t)\in H_0^1(U)$. 进而由弱解定义知.

$$\int_0^s \langle u'', v\rangle + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

由 $u'(0)=v(s)=0$. 分部积分有.

$$\int_0^s -(u', v') + B[u, v; t]\,dt = 0.$$

$$\xRightarrow{v'=-u} \int_0^s \langle u', u\rangle - B[v', v; t]\,dt = 0.$$

· $\langle u', u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2$.

而 $B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot v + c v\cdot v\,dx$.

$$\frac{d}{dt}B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t \partial_i v\partial_j v + \boxed{2a^{ij}\partial_i v_t\partial_j v} + \sum_{i=1}^n b^i_t \partial_i v\cdot v + 2 b^i \partial_i v_t\cdot v + c_t v\cdot v + \boxed{2cv_t v}\,dx$$

$b^i\partial_i v\cdot v_t$. $-1\, b^i \partial_i v_t \cdot v$, $v_t = -u$.

$= 2B[v', v; t]$

$$\Rightarrow \int_U\Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t\,\partial_i(v)\,\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i_t\,\partial_i(v)\cdot v + c_t\cdot(v)\cdot v\Big)dx$$

$$+ \int_U\Big(\sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot(\underbrace{-v_t}_{=u\ (\text{因 } -v'=u)}) - \sum_{i=1}^n b^i\,\partial_i u\cdot v\Big)dx$$

最后一项分部积分

$$= 2B[v', v; t] + D[v, v; t] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\, u\,dx - \int_U \sum_{i=1}^n \left(b^i_{x_i} u\cdot v + b^i u\cdot v_{x_i}\right)dx$$

$$= 2B[v', v; t] + C[u, v; t] + D[v, v; t].$$

其中 $C[u,v;t] := -\int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot u + \frac{1}{2} b^i_{x_i} uv\,dx$

$D[u,v;t] := \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i_t u_{x_i} v + c_t uv\,dx.$ $\quad \forall u,v\in H_0^1(U)$

$$\Rightarrow \int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} B[v,v;t]\right)dt$$

$$= -\int_0^s C[u,v;t] + D[v,v;t]\,dt.$$

左边 $= \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2} + \underbrace{\frac{1}{2} B[v(0),v(0);t]}_{\gtrsim \|v(0)\|_{H_0^1}}$

$$\Rightarrow \|u(s)\|^2_{L^2} + \|v(0)\|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\le C\left(\int_0^s \|v\|^2_{H_0^1(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)} + \|v(0)\|^2_{L^2(U)}\right)$$

令 $w(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau$. 则 $v(t) = w(s)-w(t)$ $\quad \forall 0\le t\le T.$

从而

$$\|u(s)\|^2_{L^2} + \|w(s)\|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\le C\left(\int_0^s \|w(t)-w(s)\|^2_{H_0^1(U)} + \|u(t)\|^2_{L^2(U)}\,dt + \|w(s)\|^2_{L^2(U)}\right)$$

$$\le C\int_0^s 2\|w(t)\|^2_{H_0^1} + \underbrace{2\|w(s)\|^2_{H_0^1}}_{\text{拿出去}} + \|u(t)\|^2_{L^2}\,dt + \|w(s)\|^2_{L^2}$$

$\|w(s)\|_{L^2}\le \int_0^s \|u(t)\|_{L^2}$

$$\le 2sC\|w(s)\|^2_{H_0^1} + C\int_0^s \|w\|^2_{H_0^1(U)} + \|u\|^2_{L^2}\,dt.$$

$$\Rightarrow \|u(s)\|^2_{L^2} + (1-2sC)\|w(s)\|^2_{H_0^1} \le C\int_0^s \|w\|^2_{H_0^1} + \|u\|^2_{L^2}\,dt.$$

选 T_1. 使 $1-2T_1C_0 \ge \frac{1}{2}$ 则 $s\in[0,T_1]$ 时.

$\|u(s)\|^2_{L^2} + \|w(s)\|^2_{H_0^1} \le C\int_0^s \|u(t)\|^2_{L^2} + \|w(t)\|^2_{H_0^1}\,dt.$ 由 Gronwall 不等式

有 $u\equiv 0$ in $[0,T_1]$. 再在 $[T_1,2T_1]$, $[2T_1,3T_1]$ …… 以此类推即可

7.3.3. 正则性、

与抛物方程类似，我们先对最简单的双曲方程（波方程）进行形式推导，来预测正则性结果。

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

u是光滑解.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^2+u_t^2\,dx\right)=2\int_{\mathbb{R}^n}Du\cdot Du_t+u_t u_{tt}\,dx$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} 2\int u_t\cdot(u_{tt}-\Delta u)\,dx.$$

$$=2\int u_t\cdot f\,dx.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx$$

~~由Gronwall不等式知.~~

~~对t积分.（$\forall 0\le t\le T$）.~~

$$\leq 1\cdot\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|Du|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}f^2.$$

$$\cancel{\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|Du(t)|^2dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(t)dx\,d\tau-\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(0)\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}|Du(0)|^2dx}$$

$$\cancel{\leq\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx\,d\tau+\int}$$

令 $\eta(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(t)+|Du(t)|^2\,dx.$ $\psi(t)=\int f^2(t)dx$, $\phi(t)=1$. 则 $\eta'(t)\le\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$

则由Gronwall不等式知.

$$\eta(t)\le C(t)\left(\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\,ds\right)$$

对t取sup.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\int|Du(t)|^2+|u_t(t)|^2\,dx\le C_T\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}h^2dx\right)$$

从而对波方程.

$$\|u\|_{L_t^\infty H_0^1}+\|u_t\|_{L_t^\infty L_x^2}\lesssim_T\|f\|_{L_t^2L_x^2}+\|g\|_{H_0^1}+\|h\|_{L^2}.$$

再考虑更高正则性：

令 $\tilde{u} = u_t$. 则 $\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u}(0) = \tilde{g} := h. \\ \partial_t \tilde{u}(0) = \tilde{h} := u_{tt}(\cdot,0) = f(\cdot,0) + \Delta g. \end{cases}$

$\cancel{\Rightarrow u_t}$

则由之前的形式推导，有：

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx \le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 + f(\cdot,0)^2 \, dx\right)$$

且：$\sup_{0\le t\le T} \|f(\cdot,t)\|_{L^2} \le C\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}\right)$

由Sobolev嵌入.

又：$-\Delta u = f - u_{tt} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_{tt}^2 \, dx \quad \forall\, 0 \le t \le T$

平方. 对x积分，左边分部积分2次.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 + |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx \le C_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + f_t^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 \, dx.$$

□

从而 $\cancel{g \in H^2}$

$$\|u(t)\|_{L_t^\infty H_x^2} + \|u'(t)\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u'\|_{L_t^2 H_0^1} + \|u''\|_{L_t^2 H_x^{-1}} \lesssim \|f\|_{H_t^1 L_x^2} + \|g\|_{H^2}.$$

下面证明双曲方程的正则性定理，要注意下面出现的 $\{w_k\}$ 是 Ch6.7 中构造的 $-\Delta$ 的特征函数系，是 L^2 的标准正交基，H_0^1 的正交基.

Thm 7.3.4:

(1). 设 $g\in H_0^1(U)$, $f\in L_t^2L_x^2([0,T]\times U)$, 设 $u\in L^2(0,T;H_0^1)$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1})$

是双曲方程
$$\begin{cases} \partial_{tt}u+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$
的弱解.

则: $u\in \cancel{L^2(0,T;H^2(U))\cap} L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u'\in L^\infty(0,T;L^2(U))$

且 $$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u'(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}$$
$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2(U)}\right).$$

(2). 若还有: $g\in H^2(U)$. $h\in H_0^1(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2(U))$. $u'\in L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u''\in L^\infty(0,T;L^2(U))$. $u'''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

且 $$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}+\|u''(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$$
$$+\|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C\left(\|f\|_{H_t^1L_x^2}+\|g\|_{H^2}+\|h\|_{H^1}\right).$$

证明: 在 Thm 7.3.2 中. 已证明:

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1}+\|u_m'(t)\|_{L^2}\right)\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2}\right)$$

令 $m=m_l\to\infty$. 由 $u_{m_l}\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$

$u_{m_l}'\rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$

知. (1)成立.

(2) 令 $\tilde{u}_m = u_m'$.

则 ~~由弱解定义有~~ 由逼近解的构造有

$$(\tilde{u}_m'', w_k) + B[\tilde{u}_m, w_k] = (f', w_k) \qquad 1\le k\le m.$$

两边乘 $d_m^{k}{}''$. 对 k 从 1 到 m 求和. 因 $\tilde{u}_m' = u_m'' = \sum d_m^{k}{}'' w_k$.

$$\Rightarrow (\tilde{u}_m'', \tilde{u}_m') + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m'] = (f', \tilde{u}_m')$$

与 Thm 7.7.2 类似.

令 $A[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i u \partial_j v\, dx. \quad u,v\in H_0^1(U)$

则有 $\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{u}_m'\|_{L^2}^2 + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m]\right) \le C\left(\|\tilde{u}_m'\|_{L^2}^2 + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m] + \|f'\|_{L^2}^2\right)$. $\cdots(*)$

下面先估计 (2) 中除了 u''' 的项.

由于 $B[u_m, w_k] = (f - u_m'', w_k)$.

两边. 乘 $\lambda_k d_m^k(t)$

$$\Rightarrow B[u_m, \underbrace{\lambda_k u_m}_{-\Delta u_m}] = (f - u_m'', \lambda_k u_m)$$

$\xRightarrow{\text{对k求和}}$ ~~$-\Delta w_k = \lambda_k w_k$~~ $B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m'', -\Delta u_m)$

$$= (Lu_m, -\Delta u_m)$$

由习题 7.9 知

$\exists \beta > 0.\ \gamma \ge 0$, s.t. $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$ 有:

$$\beta\|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_m\|_{H^2(U)}^2 \le C(Lu_m, -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C\, B[u_m, -\Delta u_m] + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C(f - u_m'', -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\le C\left(\|f\|_2^2 + \|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

这里. 对 $u_m''\Delta u_m$ 先用 Hölder 变成 $\|u_m''\|_2\|\Delta u_m\|_2$. 再用 Young. $\le \varepsilon\|\Delta u_m\|_2^2 + C(\varepsilon)\|u_m''\|_2^2$. ε 充分小, 移到左边吸收.

又: $\widetilde{u_m} = u_m'$

对(*)再用 Gronwall 有:

$$\cancel{\|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{H^1}^2 \le C\|f'\|_{H_t L_x^2}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_m''\|_{L^2(U)}^2 + \|u_m'(t)\|_{H^1(U)}^2$$

$$\le C_T\Big(\underbrace{\|u_m''(0)\|_{L^2}^2}_{f(\cdot,0)+\Delta g} + \|u_m'(0)\|_{H^1(U)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}\Big)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2)}\right)$$

Sobolev嵌入 $d=1,\ H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\le C_T\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2\right).$$

u''' 估计与抛物方程 u'' 类似, 略去. □

Rmk: 波方程的正则性到不了抛物方程那么高 (只有 $L_t^\infty H_0^1$, 没有 $L_t^2 H_x^2$)

这是因为, 抛物正则性证明过程中, 在证得 $u\in L_t^2 H_0^1$, $u'\in L_t^2 L_x^2$ 后,

可以利用 $(u',v)+B[u,v]=(f,v)$ $\quad \forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

$\Rightarrow B[u,v]=(\underbrace{f-u'}_{\in L^2(U)},v)$ a.e. $t\in[0,T]$ 再用椭圆方程正则性定理得 $u\in L_x^2$.

但双曲方程的推导中不能证得 $u''\in L_t^2 L_x^2$, 只有 $L_t^2 H_x^{-1}$.

从而 $B[u,v]=(f-u'',v)$ 中, $f-u''\in H^{-1}$, 不在 L^2 中.

不能证得 $u''\in L_t^2 L_x^2$ 的原因在于:

· 抛物方程中证明 $u_m'\in L_t^2 L_x^2$ 时, 用 $\underbrace{(u_m', u_m')}_{\text{这直接是 } u_m' \text{ 的} L^2 \text{范数}} + B[u_m, u_m'] = (f, u_m')$.

而在双曲方程中, 只有 $\underbrace{(\widetilde{u_m}'', \widetilde{u_m}')}_{\text{只是 } \frac{d}{dt}\|u_m''\|_{L^2}^2} + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}'] = (f', u_m')$.

导致后面用 Gronwall 不等式时出不来 $\|u_m''\|_{L^2L^2}$, 只有 u_m' 的估计.

事实上, 波方程、Schrödinger 方程等色散方程, 其正则性和光滑效应比抛物方程差很多. 色散方程常讨论的都是低正则性问题, 但抛物方程并不如此. □

本节最后，我们不加证明地叙述高阶正则性的结果.

Thm 7.3.5:

(1) 设 $g\in H^{m+1}(U)$, $h\in H^{m}(U)$, $\frac{d^kf}{dt^k}\in L^2_tH^{m-k}_x$.

且 $g_0:=g\in H^1_0$, $h_1:=h\in H^1_0$

$$\begin{cases} g_{2l}:=\dfrac{d^{2l-2}f(\cdot,0)}{dt^{2l-2}}-Lg_{2l-2}\in H^1_0 & \text{if } m=2l. \\ h_{2l+1}:=\dfrac{d^{2l-1}}{dt^{2l-1}}f(\cdot,0)-Lh_{2l-1}\in H^1_0, & \text{if } m=2l+1 \end{cases}$$

成立，则

$$\frac{d^ku}{dt^k}\in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)),\quad 0\le k\le m+1.$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^ku}{dt^k}\right\|_{L^\infty H^{m+1-k}(U_T)}\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^kf}{dt^k}\right\|_{L^2_tH^{m-k}_x}+\|g\|_{H^{m+1}(U)}+\|h\|_{H^{m}(U)}\right)$$

(2) $g,h\in C^\infty(\bar U)$, $f\in C^\infty(\bar U_T)$. 上述条件对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都满足.

则 $\exists!\ u\in C^\infty(\bar U_T)$ 成为原方程的解.

□

~~7.3.4:~~ 预

7.3.4: 二元PDE的约化.

考虑: $\sum_{i,j=1}^2 a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^2 b^i\partial_i u+cu=0$. $\quad a^{ij}=a^{ji}$, $(x_1,x_2)\in U\subset\mathbb{R}^2$.

问：上述方程能否通过变量替换，化成常见形式？

设：$y=\Phi(x)$ i.e. $y_1=\phi^1(x_1,x_2)$, $y_2=\phi^2(x_1,x_2)$. $\quad u(x)=v(\Phi(x))$, $v(y)=u(\chi(y))$, $\chi:=\Phi^{-1}$.

从而 $\partial_{x_i}u=\sum_{k=1}^2\partial_{y_k}v\,\partial_{x_i}\Phi^k$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^2\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l+\sum_{k=1}^2\partial_{y_k}v\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi^k.$$

代入(*)，有：

$$(*) = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \sum_{k,l=1}^{2} \partial_{y_k}\partial_{y_l} v \cdot \partial_{x_i}\phi^k \partial_{x_j}\phi^l \quad + \text{一堆一阶项、零阶项}.$$

$$= \sum_{k,l=1}^{2} \widetilde{a_{kl}}\, \partial_{y_k}\partial_{y_l} v + \cdots, \quad \widetilde{a_{kl}} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\phi^k_{x_i}\phi^l_{x_j} \qquad \cdots(\#).$$

对(#)，为了使它的形式尽可能简洁，我们需要选取合适的 Φ.

* 例如，若我们希望 $\widetilde{a}^{11} = \widetilde{a}^{22} = 0$.

则这要求 $\cancel{0 = a^{11}(\partial_{x_1}v)^2}$

$$0 = a^{11}(\partial_{x_1}\phi^1)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}\phi^1\partial_{x_2}\phi^1 + a^{22}(\partial_{x_2}\phi^1)^2$$

$$0 = a^{11}(\partial_{x_1}\phi^2)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}\phi^2\partial_{x_2}\phi^2 + a^{22}(\partial_{x_2}\phi^2)^2$$

即 ϕ^1, ϕ^2 是方程：

$$a^{11}(\partial_{x_1}u)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}u + a^{22}(\partial_{x_2}u)^2 = 0 \quad \text{in } U \qquad \cdots(**)$$

的解

• 再假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 且 $\det A = a^{11}a^{22} - (a^{12})^2 < 0$. 此时我们称

(*) 是双曲的. 据此条件，我们对(**)作分解如下.

$$a^{11}\cdot(**) = \left(a^{11}\partial_{x_1}u + \left(\sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} + a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right)\cdot\left(a^{11}\partial_{x_1}u + \left(-\sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} + a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right) \qquad \cdots(***)$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow$ (***) 是如下两个方程之乘积：

(#1) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u + \left(a^{12} + \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u = 0$

(#2) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u + \left(a^{12} - \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u = 0.$

如今：让 ϕ^1 为(#1)的解，且 $D\phi^1 \neq 0$，则 ϕ^1 沿直线 $\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}^1 = a^{11} \\ \dot{x}^2 = a^{12} + \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} \end{cases}$ 为 const.

让 ϕ^2 为(#2)的解，且 $D\phi^2 \neq 0$，则 ϕ^2 沿直线 $\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}^1 = a^{11} \\ \dot{x}^2 = a^{12} - \sqrt{\cdots} \end{cases}$ 为 const.

这称作(*)的"特征线".

使得 $\tilde{a}^{12} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \partial_{x_i}\varphi^1 \partial_{x_j}\varphi^2 \neq 0$ in U

从而 (*) 化为

$$\partial_{y_1 y_2} v + \underbrace{\cdots}_{\text{一阶项. 零阶项}} = 0$$

这称作 (*) 的第一典则形式.

若又令 $z_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$$\Rightarrow \quad \partial_{z_1}^2 w_1 - \partial_{z_2}^2 w_2 + \cdots = 0.$$

这称作第二典则形式.

§7.4: 有限传播速度

7.4.1: 预备知识 I: 余面积公式及其推论 (coarea)

~~Def~~ (Jacobian of a Lipschitzian map).

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为 Lipschitz 的映射, $Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 & \cdots & \partial_{x_n} f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f^m & \cdots & \partial_{x_n} f^m \end{pmatrix}$, 若 f 在 x 处可微

$\Longrightarrow$ 对 $\mathcal{L}^n$-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 定义 f 的 Jacobian 为

$$Jf(x) := [\![Df(x)]\!]$$

其中, 对线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $[\![L]\!] := \begin{cases} \sqrt{\det(L^* \circ L)}, & n \le m \\ \sqrt{\det(L \circ L^*)}, & n \ge m \end{cases}$

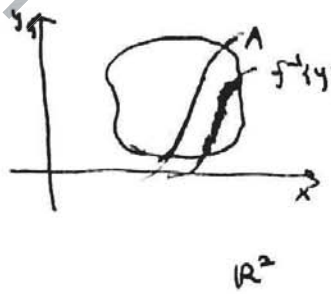
~~Thm 7.4~~

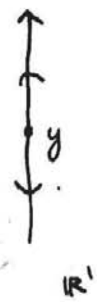
Lemma 7.4.1 (余面积公式). $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 Lipschitz 函数映射. $n \ge m$. 则 $\forall \mathcal{L}^n$-可测集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 有: $\int_A Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$.

证明见 L.C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Version. CRC Press. 2015. ∎

Rmk: ① 当 f 是线性映射时, lem 7.4.1 可以看作"斜着的" Fubini Thm.

② 一般地, 可以看作"弯曲的 Fubini 定理".





Jf 之积分 $=$ 弯曲切片的特征函数对 $\mathcal{H}^{n-m}$ 求积分, 再将切片积分.

③ 若令 $A = \{Jf = 0\}$ 则 $\mathcal{H}^{n-m}(\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\}) = 0$. $\forall \mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$

这类似 Sard 定理 ($f \in C^k$, 则对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 有 $\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\} = \emptyset$). 其从得到 $\mathcal{H}^{n-m}$ 零测, f 只需 Lip 即可.

corollary 7.4.1 (水平集的积分).

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ Lipschitz. $n\geq m$. 则 $\forall$ $\mathcal{L}^n$-可积的 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

有:

(1) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ $\mathcal{H}^{n-m}$-可积 对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y\in\mathbb{R}^m$ 成立.

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} g\cdot Jf\,dx=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{f^{-1}\{y\}} g\,d\mathcal{H}^{n-m}\right)dy$$

Rmk: $\forall y\in\mathbb{R}^m$. $f^{-1}\{y\}$闭 从而 $\mathcal{H}^{n-m}$-可测. 因此 (2) 是合法的.

~~证明~~

首先有以下引理.

lemma 7.4.2: $f: X\to[0,\infty]$ 为μ-可测函数 则 $\exists$ μ-可测集 $\{A_i\}_1^\infty\subseteq X$.

s.t. $f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k}$.

Pf: 令 $A_1=\{x\in X \mid f(x)\geq 1\}$.

$A_k=\left\{x\in X \mid f(x)\geq\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\chi_{A_j}\right\}$.

从而 $f\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k}$.

又: 若 $f(x)=\infty$ 则 $\forall k$. $x\in A_k$

若 $0\leq f(x)<\infty$, 则 对无穷多个 n. $x\notin A_n$.

$\Rightarrow 0\leq f(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k}\leq\frac{1}{n}$.

#.

回到 cor 7.4.1: 不妨设 $g\geq 0$. 则 由 lem 7.4.2 有: $g=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k}$ for some $\mathcal{L}^n$-可测集 $\{A_k\}_1^{\infty}$

则 $$\int_{\mathbb{R}^n} g\cdot Jf\,dx\overset{MCT}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{A_k}Jf\,dx$$

$$\overset{\text{coarea formula}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^{n-m}(A_k\cap f^{-1}\{y\})\,dy$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathcal{H}^{n-m}(A_k\cap f^{-1}\{y\})\,dy.$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{f^{-1}\{y\}} g\,d\mathcal{H}^{n-m}\right)dy.$$

$\square$

lem 7.4.3（水平集积分）

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lip.

(1) $\int_{\mathbb{R}^n}|Df|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\})\,dt$

(2). 若 $\operatorname{ess\,inf}|Df|>0$. 且 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-可积. 则

$$\int_{\{f>t\}}g\,dx=\int_t^{\infty}\left(\int_{\{f=s\}}\frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right)ds.$$

特别地：$\frac{d}{dt}\int_{\{f>t\}}g\,dx=-\int_{\{f=t\}}\frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}$. $\mathcal{L}^1$-a.e. $t\in\mathbb{R}$.

Pf: (1) 在 Coarea formula 中. 令 $m=1$. 并注意 $Jf=|Df|$.

(2)(3): $E_t:=\{f>t\}$

由上一引理知

$$\int_{E_t}g\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_t}\cdot\frac{g}{|\nabla f|}Jf\,dx.$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{\partial E_s}\frac{g}{|\nabla f|}\chi_{E_t}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,ds.$$

$$=\int_t^{\infty}\left(\int_{\partial E_s}\frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right)ds$$

□

7.4.2：双曲方程的有限传播速度.

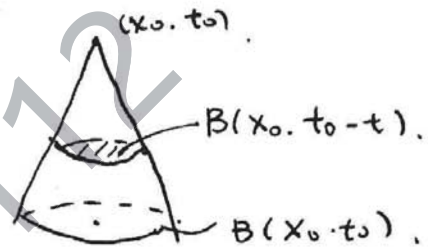
- 波动方程的有限传播速度.

设 $u\in C^2$ solves $\partial_t^2 u-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

Fix $x_0\in\mathbb{R}^n$. $t_0>0$.

定义以 (x_0,t_0) 为顶点的"倒向光锥"

$$K(x_0,t_0):=\left\{(x,t)\ \middle|\ 0\le t\le t_0,\ |x-x_0|\le t_0-t\right\}$$



Thm 7.4.1 (波方程的有限传播速度).

$u=u_t=0$ on $B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$.

则 $u=0$ on $K(x_0,t_0)$.

Rmk：这说明：$B(x_0,t_0)$ 之外的扰动. 对光锥内的解没有影响.

Pf：$E(t):=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u(x,t))^2+|\nabla u(x,t)|^2\,dx.\quad 0\le t\le t_0.$

$$E'(t)==\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\cdot\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla u_t\,dx.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS$$

分部积分

$$=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\,\underbrace{(\partial_t^2 u-\Delta u)}_{0}\,dx+\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot\partial_t u\,dS.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS.$$

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\partial_t u-\frac{1}{2}(\partial_t u)^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dS.$$

柯西

$$\le\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2+(\partial_t u)^2}{2}-\frac{(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2}{2}\,dS\quad\le 0$$

$\Rightarrow 0\le E(t)\le E(0)=0$

□

· 双曲方程的有限传播速度.

仍然先看波方程:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \cancel{\{t=0\}}(0,\infty). \qquad \cdots (*)$$

我们考虑方程的"振荡解".

Fix $\varepsilon>0$. 希望找形如 $u^\varepsilon(x,t) = e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}} a^\varepsilon(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$. $\cdots$ (#)

其中, p^ε 是相函数. 实值函数 $a^\varepsilon(x,t)$ 是振幅. 形如(#)的解称作 "geometric optics ansatz".

波方程的振荡解, 可以理解为: 研究相函数在 $\varepsilon\to 0$ 时对应的PDE.

下面是具体的形式推导.

(#)代入(*).

$$0=\partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i\partial_t^2 p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon - a^\varepsilon\left(\frac{\partial_t p^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{2i\,\partial_t p^\varepsilon\,\partial_t a^\varepsilon}{\varepsilon} + \partial_t^2 a^\varepsilon\right)$$

$$- e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}}\left(\frac{i\Delta p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon - \frac{|\nabla p^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}a^\varepsilon + 2i\frac{\nabla p^\varepsilon\cdot\nabla a^\varepsilon}{\varepsilon} + \Delta a^\varepsilon\right)$$

可约去 $e^{i\frac{p^\varepsilon}{\varepsilon}}$, 取实部

$$\Longrightarrow \quad a^\varepsilon\left((\partial_t p^\varepsilon)^2 - |\nabla p^\varepsilon|^2\right) = \varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\varepsilon - \Delta a^\varepsilon\right).$$

$\varepsilon\to 0$ 时, 假设有 $p^\varepsilon\to p$, $a^\varepsilon\to a\neq 0$

$$\Longrightarrow \quad p_t \pm |\nabla p| = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty). \qquad \cdots (**)$$

(**)可以视作 $\varepsilon\to 0$ 时, (#)在(**)确定的特征线附近高度聚集.

对一般的二阶双曲方程 $\partial_t^2 u - \sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l}u = 0$, in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ $\cdots$ (***)
$a^{lk}=a^{kl}$.

我们仍希望寻找形式(#)的解.

$$\partial_{x_k}u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k}a^\varepsilon\right).$$

$$\Rightarrow \partial_{x_kx_l}u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_l}p^\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k}a^\varepsilon\right)$$

$$+ e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\left(\partial_{x_kx_l}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k}p^\varepsilon\,\partial_{x_l}a^\varepsilon\right) + \partial_{x_kx_l}a^\varepsilon\right).$$

约去 $e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}$ 取实部有

$$a^2\left((\partial_t p^\varepsilon)^2-\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}\partial_k p^\varepsilon\partial_l p^\varepsilon\right)=\varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\varepsilon-\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}\partial_k\partial_l a^\varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow\quad p_t\pm\left(\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}\partial_k p\,\partial_l p\right)^{\frac{1}{2}}=0\qquad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

#.

下面考虑 (***) $\partial_t u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的光滑解.

$$Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u.$$

Fix $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，我们对此方程，希望找到类似于"波方程的"光锥" C. 其顶点为 (x_0,t_0). s.t. 只要 $u=\partial_t u=0$ on $C_0:=C\cap\{t=0\}$ 就有：$u\equiv 0$ in C.

由上面对振荡解的讨论，我们可以猜测所求的区域 C 是形如 $\{p=0\}$ 这样的水平集. p 是 Hamilton-Jacobi 方程 $p_t-\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}p_{x_i}p_{x_j}\right)^{\frac{1}{2}}=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解.

分离变量. $p(x,t)=q(x)+t-t_0$.

q 满足: $\begin{cases}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}q_{x_i}q_{x_j}=1\\ q>0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n-\{x_0\}.\\ q(x_0)=0\end{cases}$ $\quad(\Rightarrow \nabla q\neq 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\})$.

* $\boxed{\text{例如. } L=-\Delta \text{ 时. } \quad q(x):=|x-x_0|.}$

于是我们所求的"光锥"定为.

$$K:=\{(x,t)\mid p(x,t)<0\}=\{(x,t)\mid q(x)<t_0-t\}.$$

$\forall t>0$. 令 $K_t=\{x\mid q(x)<t_0-t\}$ = K 在 t 时刻的横截面

($\Rightarrow \partial K_t\in C^\infty$ 且为 $n-1$-流形)

下面证明对称双曲方程的有限传播速度.

Thm 7.4.2 设 $u\in C^\infty$ 是 $\partial_t^2 u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解 若 $u=\partial_t u=0$ on K_0.

则 $u=0$ in K.

Rmk: 从而: 若 $u(0)=g$. $\partial_t u(0)=h$. 则 $u(x_0,t_0)$ 仅与 g,h 在 K_0 中的取值有关.

Pf: 令 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\,dx$.

$$E'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\,dx\right).$$

余面积公式 cor 7.4.2

$$=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u_t\,dx.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\left((\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\right)\frac{1}{|\nabla\varphi|}\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$=: I_1-I_2.$$

对 I_1: 第二项分部积分可得:

$$I_1=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\partial_t u\cdot\partial_j(a^{ij}\partial_i u)\,dx.$$

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\cdot u_t\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\vec{n}$ 为 ∂K_t 的单位外法向

$$\cancel{-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}}$$

$$=\int_{K_t}\partial_t u\cdot\left(\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\left(\partial_j a^{ij}\partial_i u+a^{ij}\partial_i\partial_j u\right)\right)dx.$$

加起来为0.

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1};$$

$$=-\int_{K_t}\partial_t u\cdot\sum_{i,j=1}^n\partial_j a^{ij}\cdot\partial_i u\,dx+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

那么.

$$|A| \le \left|\int_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \cdot n^j\right| \cdot |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left(\sum a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum a^{ij} n^i n^j\right)^{\frac{1}{2}} |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

这里用到了:
$A=(a^{ij})$ 为实对称阵. a^{ij}非负
则.
$$\left|\sum_{i,j} a^{ij} x_i y_j\right| \le \left(\sum_{i,j} a^{ij} x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j} a^{ij} y_i y_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

∂K_t上. $q = t_0 - t$.
$n = \nabla q / |\nabla q|$

则
$$\sum_{i,j} a^{ij} n^i n^j = \sum_{i,j}^{n} \frac{a^{ij} q_{x_i} q_{x_j}}{|\nabla q|^2} = \frac{1}{|\nabla q|^2}$$

$$\text{即} \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} |u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz (第一项).

$$\le \int_{K_t} u_t^2 + C \int_{K_t} \frac{a^{ij} \partial_i u \partial_j u}{|\nabla u|^2} \, dx + \int_{\partial K_t} \frac{|u_t|}{|\nabla q|} \cdot \left(\sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}$$

L 一致有界

$$\le C\left(\int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) dx + \int_{\partial K_t} \cdots\cdots$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le C E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} \left((\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$= C E(t) + B$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{E}(t) = A - B \le C E(t) \\ E(0) = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Gronwall不等式}} E(t) \equiv 0 \quad 0 \le t \le t_0.$$

$$\Rightarrow u \equiv 0 \quad \text{in } K.$$

□.

§7.5：一阶双曲方程组

7.5.1：消失粘性法：

考虑：$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_j \vec{u} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \vec{u}(0) = \vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$ $\cdots(*)$

$\vec{u} = (u^1, \dots, u^m) : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ 为未知函数.

$B_j : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to M^{m\times m}$. ~~为矩阵~~ $j=1,2,\dots,n$.

$\vec{f}$: $\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$.

$\vec{g}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

给定.

$\vec{B}(x,t;y) := \sum_{j=1}^{n} y_j B_j(x,t)$. $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.

Def (1) 若 $B(x,t;y)$（$m\times m$ 方阵）$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. 可对角化. 则称 $(*)$ 是双曲的.

这说明 $(*)$ 是双曲的. 若 $\forall x, y, t$. $B(x,t;y)$ 有 m 个实特征值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$.
且对应特征向量构成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基

(2). 称 $(*)$ 是对称双曲方程组，若 $B_j(x,t)$ 是对称阵.
称 $(*)$ 是严格双曲的. 若 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, $\forall t \geq 0$, $B(x,t;y)$ 有 m 个不同的实特征值 $\lambda_1(x,t;y) < \cdots < \lambda_m(x,t;y)$.

Motivation: 讨论方程的行波解 (travelling wave).

设 $f=0$. $B_j(x,t;y)$ 是常系数矩阵. 则

$\sum_{j=1}^{n} y_j B_j = B(y)$ 仅与 y 有关.

寻求 $(*)$ 的行波解，即希望 $\vec{u}$ 有形式 $\vec{u}(x,t) = \vec{v}(y \cdot x - \sigma t)$. $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$

上式代入 $(*)$ $\Rightarrow$ $\left(-\sigma I + \sum_{j=1}^{n} y_j B_j\right) \vec{v}' = 0$.

$\Rightarrow$ $\vec{v}'$ 是 $B(y)$ 关于特征值 σ 的特征向量.

双曲条件保证 (*) 有 m 个不同的行波解 ($\forall$ 方向 y)，它们应为 $(y\cdot x-\lambda_k(y)t)\vec{r}_k(y)$，其中 $\lambda_1(y)\le\cdots\le\lambda_m(y)$ 是 $B(y)$ 的特征值，$\{\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_m\}$ 是对应特征向量。
$|y|=1$ 时，特征值即为波速。

$\square$

下面我们引入所谓的"消失粘性法"来证明对称一阶双曲组初值问题的存在唯一性。

考虑

$$(*)\begin{cases}\partial_t\vec{u}+\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}\vec{u}=\vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ \vec{u}=\vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad T>0.$$

并假设 (1): $B_j(x,t)$ 是对称阵. $\forall j$. $\forall x\in\mathbb{R}^n$. $t\in[0,T]$

(2) $B_j\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,T];\mathbb{M}^{m\times m})$.

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}\left(|B_j|,|\partial_x B_j|,|\partial_t B_j|,|\partial_{x,t}^2 B_j|\right)<\infty.\quad\forall j.$$

(3) $\vec{g}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

$\vec{f}\in H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)\to\mathbb{R}^m)$.

定义: (1) 双线性形式: $B[\vec{u},\vec{v};t]:=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^n\left(B_j(\cdot,t)\partial_{x_j}\vec{u}\right)\cdot\vec{v}\,dx$

$\forall\, 0\le t\le T.\ \vec{u},\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

(2). 称 $\vec{u}\in L^2(0,T;H^1)$，$\vec{u}'\in L^2(0,T;L^2)$ 是 (*) 的弱解若

(i). $(\vec{u}',\vec{v})+B[\vec{u},\vec{v};t]=(\vec{f},\vec{v})$. $\forall\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$. a.e. $t\in[0,T]$

(ii) $\vec{u}(0)=\vec{g}$

消失粘性法的基本思路是，在原方程加入较小的(带ε)抛物项，

例如

$$(\#^\varepsilon)\quad \begin{cases} \partial_t \vec{u}^\varepsilon - \varepsilon \Delta \vec{u}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = \vec{g}^\varepsilon(x). & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$0<\varepsilon \ll 1.\quad \vec{g}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \vec{g}$

$(\#^\varepsilon)$ 被视为原方程的逼近，我们试图先用不动点方法证明 $(\#^\varepsilon)$ 的解(视作原方程的逼近解)具有存在唯一性，再用能量估计与 Banach-Alaoglu 定理证明 $(*)$ 方程的解的存在唯一性.

↑此时 取子列 $\varepsilon_k \to 0$ ↑所谓"粘性消失".

Step 1：逼近解存在唯一性：

Thm X.5.1：$\forall \varepsilon>0$. $(\#^\varepsilon)$ 存在唯一解 $\vec{u}^\varepsilon \in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m))$
且 $\vec{u}^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m))$.

<u>Proof</u>：我们采用压缩映射原理的方法. 因此. 我们要

① 构造函数空间 X.

② 构造解映射 T：$u \mapsto Tu$. 使之成为 X 到自身的压缩映射.

③ 利用压缩映射原理，得不动点 $\vec{u}$ 即为方程的局部解

④ 再设法变成整体 $[0,T]$ 上的解

(1.1) 为确定 X，我们先要对方程进行先验估计，即先大致判断 u 会落在什么空间中.

$(\#^\varepsilon)$ 中的难处主要是高阶项，因此，我们把低阶项 $\sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon$ 挪到右边去. 变成

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}^\varepsilon - \varepsilon \Delta \vec{u}^\varepsilon = f - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} \vec{u}^\varepsilon \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = g. \end{cases} \quad \cdots (\#\#^\varepsilon).$$

这样就变成一个非齐次热方程.

我们先考虑一般的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u = f \\ u(0) = g. \end{cases}$$

由Du'Hamel原理：

$$u(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds.$$

其中 $e^{\varepsilon t\Delta} g(x) := \cancel{\int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}} \left(e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \hat{g}\right)^{\vee}$.

∧: Fourier 变换

∨: 反Fourier 变换.

$$\cdot\ \|e^{\varepsilon t\Delta} g\|_{H^s} = \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \cdot \hat{g}(\xi) \langle\xi\rangle^s\|_{L^2}.$$

$$= \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle\xi\rangle^s \hat{g}(\xi)\|_{L^2}$$

$$\lesssim \|\langle\xi\rangle^s \hat{g}(\xi)\|_{L^2} = \|g\|_{H^s}.$$

又：$$e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle\xi\rangle^s = e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{((\varepsilon t)^{\frac{1}{2}}\xi)}_{\eta}\rangle^s$$

$$= e^{-\eta^2} \langle(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}}\eta\rangle^s.$$

$$\lesssim (\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}}$$

原方程初值 $g \in H^1 \Rightarrow e^{\varepsilon t\Delta} g \in L_t^\infty H_x^1$

• 非齐次项估计：

$$\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(y,s)\, dy\, ds$$

$\phi(t.x)$ 设作热方程基本解

$$= \int_0^t \phi(\cdot, \varepsilon(t-s)) * f(s)\, ds.$$

$\Rightarrow \cancel{\|\int_0^t e^{\varepsilon t}}$

$\Rightarrow$

$$\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2_x} \overset{\text{广义Minkowski不等式}}{\le} \int_0^t \left\| \cancel{e^{\varepsilon(t-s)\Delta}}\ \phi(\cdot,\varepsilon(t-s)) * f(s)\right\|_{L^2_x} ds.$$

$\|f*g\|_q \le \|f\|_p \|g\|_r \longrightarrow$ 卷积 Young不等式

$1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$

$$\le \int_0^t \|\phi(\cdot,\varepsilon(t-s))\|_{L^1_x}\|f(s)\|_{L^2_x}\,ds.$$

~~关于x积分~~

$y=\frac{x}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$ $\|\phi\|_{L^1_y}=const.$

$$C_\varepsilon\int_0^t \|f(s)\|_{L^2_x}\,ds$$

$$\le \cancel{CT\cdot\min\{\|f\|_{L^\infty_t L^2_x},}$$

$$\begin{cases} CT\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ C_\varepsilon\,\|1\|_{L^2_t}\,\|f\|_{L^2_t L^2_x} = C_\varepsilon T^{\frac12}\|f\|_{L^2_t L^2_x} \end{cases}$$

$$\nabla_x u^\varepsilon = \nabla_x\int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac n2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(x-y,s)\,dy\,ds$$

$$= \int_0^t \nabla_x \phi_\varepsilon(x-y,t-s)\, f(y,s)\,dy\,ds$$

$\longrightarrow$ 可以直接算出 $\le(\varepsilon(t-s))^{-\frac12}$. 有限 $\longrightarrow$ 类似于正态分布的一阶矩 $E|X|$.

$$\le \int_0^t \|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^1_x}\,\|f\|_{L^2}\,ds$$

$$\overset{\text{同上}}{\le} C_\varepsilon \begin{cases} T\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ T^{\frac12}\,\|f\|_{L^2_t \cancel{H^1_x} L^2_x} \end{cases}$$

而原方程中 $f\in H^1_{t,x}$. t方向上 由 $H^1_t\hookrightarrow L^\infty_t$ 知 $f\in L^\infty_t \cancel{H^1_x} L^2_x$

($\Rightarrow f\in L^2_t \cancel{H^1_x} L^2_x$, $t<\infty$)

这样 我们~~证明了~~大致可以猜测 $X=L^\infty_t H^1_x$

(1.2) 令 $X = L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n))$ ~~我们证明是~~

形式推导表明

$$(\#\#^\varepsilon) \iff u^\varepsilon(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\Big(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j u^\varepsilon_{x_j}(s)\Big)\,ds$$

$$\text{令 } T: u \mapsto e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\Big(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u(s)\Big)\,ds.$$

我们证明 T 是 $X \to X$ 的压缩映射.

· $\operatorname{Im} T \subseteq X$. 由先验估计(1.1)

$$\|Tu\|_X \lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|\nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

$$\lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12}\Big(\|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|u\|_{L^\infty_t H^1_x}\Big)$$

$$< \infty$$

· 再证 T 压缩: $\forall u, v \in X$

$$Tu - Tv = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} B_j \partial_j (u-v)(s)\,ds,$$

$$\|Tu - Tv\|_{L^\infty_t H^1_x} \underset{\text{还用(1.1)}}{\le} C(\varepsilon) T^{\frac12} \|u-v\|_{L^\infty_t H^1_x}.$$

$$< \frac12 \|u-v\|_X.$$ provided choosing $C(\varepsilon) T^{\frac12} < \frac12$.

$\Rightarrow \exists T_1$ s.t. $[0,T_1]$上

$T: L^\infty_t H^1_x \longrightarrow L^\infty_t H^1_x$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$ 是压缩映射

$\therefore$ $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$上. $(\#\#^\varepsilon)$ 有唯一解 u^ε. 再在 $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, … 依此类推即可 ∎

(1.3) 再证 $u^\varepsilon\in L^2(0,T;H^3)$. $u^{\varepsilon}\in L^2(0,T;H^1)$.

实际: 令 $\tilde f = f-\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a.e. $0\le t\le T$.

由抛物正则性定理 $u^\varepsilon\in L^\infty(0,T;H^2)$, $u^{\varepsilon\prime}\in L^2(0,T;H^1)$.

这样 $\sum B_j\partial_{x_j}u\in L^\infty(0,T;H^1)$.

$\Rightarrow \tilde f\in H^1$ a.e. $t\in[0,T]$

$\Rightarrow u^\varepsilon\in L^\infty_t H^3_x$. 证毕.

再用抛物正则性定理.

$\square$

这样我们证明了(##$^\varepsilon$), 即逼近解的存在唯一性 ($\forall\varepsilon$).

下面我们证明, 逼近解序列在某些自反空间中一致有界. 再用 Banach-Alaoglu 定理. 得子列 $u^{\varepsilon_k}\to u$. as $k\to\infty$ ($\varepsilon_k\to 0$). 从而证明解的存在唯一性. 该套路我们已经反复用过.

Step 2: 能量估计.

Thm 7.5.2: $\exists$ $C>0$. s.t. $\forall 0<\varepsilon\le 1$.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}+\|u^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}\right)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}+\|f\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))}+\|f'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))}\right)$$

证明: (2.1) 先算第一项, 拆成 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|Du^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ 分别估计:

(2.1) $\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2\right) = (u^\varepsilon, u^{\varepsilon\prime})$

$$= \left(u^\varepsilon,\ f - \sum_{j=1}^n B_j\,\partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon\Delta u^\varepsilon\right).$$

$|(u^\varepsilon, f)| \le \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$

$$|(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)| \overset{\text{分部积分}}{\underset{\text{(采用 } C_c^\infty \text{ 函数逼近)}}{=}} -\varepsilon\|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le 0.$$

再算：$\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j\,\partial_{x_j} u^\varepsilon\right)$.

先设 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$.

$$\left(v, \sum_{j=1}^n B_j\,\partial_{x_j} v\right) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (B_j\,\partial_{x_j}\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx. \quad \text{其中}$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} B_j^{11} & \cdots & B_j^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_j^{m1} & \cdots & B_j^{mm} \end{pmatrix}}_{\text{实对称阵}} \begin{pmatrix} \partial_{x_j} v_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_j} v_m \end{pmatrix} \right) \underset{\text{点乘}}{\cdot} (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m B_j^{1i}\cdot\partial_{x_j} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m B_j^{mi}\cdot\partial_{x_j} v_i \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m B_j^{ki}\cdot(\partial_{x_j} v_i)\cdot v_k.$$

用了 B_j 实对称 $\longrightarrow$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\partial_{x_j}(B_j^{ki}\, v_i v_k) - \partial_{x_j} B_j^{ki}\cdot v_i v_k\right) dx.$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}(B_j v\cdot v)\,dx - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j\,\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx.$$

由于 v 紧支，故 上式第一项 $=0$

上式绝对值 $\le \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^n \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j\,\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx\right| \le C\|v\|_{L^2}^2.$

(2)

下面再估计 $v=u^{\varepsilon'}$ 的 L^2 范数.

(###$^\varepsilon$) 两边对 t 求导:

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon\Delta v + \sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j} v = f' - \sum_{j=1}^n \partial_t B_j\, \partial_{x_j} u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v = f - \sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j} g^\varepsilon + \varepsilon\Delta g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

同上可得:

$$\sup_{0\le t\le T}\|u^{\varepsilon'}(t)\|_{L^2}^2 \le C\Big(\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2H_x^1}^2 + \|f'\|_{L_t^2L_x^2}^2\Big)$$

又由磨光与分部积分可得: $\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2$ $\quad (g^\varepsilon=\eta_\varepsilon * g)$.

又: $\|f(0)\|_{L^2}^2 \le C(\|f\|_{L_t^2L_x^2}^2 + \|f'\|_{L_t^2L_x^2}^2)$.

则 $\sup_{0\le t\le T}\|u^{\varepsilon'}(t)\|_{L^2}^2 \le C(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L_t^2H_x^1} + \|f'\|_{L_t^2L_x^2})$.

□

Step 3: 存在唯一性.

Thm 7.5.3:

$$(*)\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j} u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

在之前~~的条件~~下.弱解∃!

Proof: 由 Thm 7.5.2 知: $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L_t^2H_x^1$ 一致有界.

$\{u^{\varepsilon'}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L_t^2L_x^2$ 一致有界.

由 Banach-Alaoglu 定理,∃弱收敛子列:

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } L_t^2H_x^1$$

$$u^{\varepsilon_k'} \rightharpoonup u' \quad \text{in } L_t^2L_x^2$$

再由 C_c^∞ 函数逼近 H^1 函数 $\left(H_0^s(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)\right)$.

则 $$\left|\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)\right| \le C\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)},$$

这样: $$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2} \le C\left(\|u^\varepsilon\|^2_{L^2}+\|f\|^2_{L^2}\right).$$

再由 Gronwall 不等式 即得:

$$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} \le C\left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}+\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$

(因 $\|g^\varepsilon\|_{L^2}\le\|g\|_{L^2}$)

(2.2): $\cancel{\frac{d}{dt}}$ 下面估计 $\|Du^\varepsilon\|_{L^2}$.

Fix $k\in\{1,2,\dots,n\}$. $v^k := \partial_{x_k}u^\varepsilon$.

对 (###) 两边对 x_k 求导, 有:

$$\begin{cases} \partial_t v^k - \varepsilon\Delta v^k + \sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}v^k = \partial_{x_k}f - \sum_{j=1}^n \partial_{x_k}B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v^k = \partial_{x_k}g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

同 (2.1) 可得:

$$\frac{d}{dt}\|v^k\|^2_{L^2} \le C\left(\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2} + \|\nabla f\|^2_{L^2}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2} \le \text{右}.$$

再由 Gronwall 不等式即有,

$$\sup_{0\le t\le T}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2} \le C\left(\|\nabla g\|^2_{L^2}+\|f\|^2_{L^2}\right).$$

于是 $$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1} \le C\left(\|g\|_{H^1}+\|f\|_{L^2_tH^1_x}\right).$$

由弱解定义. $\forall v \in C^1([0,T];H^1)$.

$$\int_0^T (u^{\varepsilon\prime}, v) + \varepsilon Du^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt. \quad \cdots(\#)$$

取 $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ (as $k \to \infty$)

由弱收敛 $\Longrightarrow$ $\int_0^T (u', v) + B[u, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt$. $\forall v \in C^1([0,T];H^1)$ $\cdots(\#\#)$

$\Longrightarrow$ $(u', v) + B[u, v; t] = (f, v)$. $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ a.e. $t \in [0,T]$

设 $v(T) = 0$.

则 $(\#)$ $\xRightarrow{\text{分部积分}}$

$$\int_0^T (-u^\varepsilon, v') + \varepsilon Du^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt + (g^\varepsilon, v(0))$$

$\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$.

$$\Rightarrow \int_0^T (-u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\,dt + (g, v(0))$$

~~分部积分 $\Longrightarrow$ $\int_0^T (-u, v')$~~

又对$(\#\#)$分部积分

$$\Rightarrow -\int_0^T (u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\,dt + (u(0), v(0))$$

$\Rightarrow u(0) = g$ ，存在性证毕

再证唯一性. 只用考虑 $(*)$在 $f = g = 0$ 时是否只有解 $u = 0$

~~如~~ 令 $v = u \Rightarrow \forall$ a.e. $0 \le t \le T$ $(u', u) + B[u, u; t] = 0$.

~~又~~ 由B $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \le -B[u, u; t] \le C\|u(t)\|_{L^2}^2$.

再由 Gronwall 不等式即得

□

§ 7.6 半群方法 ~~与 Schrödinger 半群的 Strichartz 估计~~

7.6.1：预备知识：

设 X 是实 Banach 空间，(可能无界的) 线性算子 $A: D(A) \underset{\uparrow}{\subseteq} X \to X$.
子空间

考虑：(*) $\begin{cases} u'(t) = Au(t) & t \geq 0. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

key point ① A 满足什么条件时，ODE(*) 有唯一解 u？($\forall$ initial data $u_0 \in X$)

② 许多 PDE 可以抽象为 (*) 的形式

Def (算子半群) 设 $u(t) := S(t)u_0$. $(t \geq 0)$

(1) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是：$X \to X$ 是算子半群，若
一族有界线性算子

① $S(0)u_0 = u_0 \quad \forall u_0 \in X$

② $\forall t, s \geq 0. \ u_0 \in X \quad S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0$

③ $t \mapsto S(t)u_0$ 是 $[0, +\infty) \to X$ 的连续映射 ($\forall u_0 \in X$)

(2) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 为压缩半群，若 $\forall t \geq 0 \quad \|S(t)\| \leq 1$.

□

压缩半群可以用来生成 (*) 生成的 flow
在 X 上

Def (无穷小生成元，infinitesimal generator) 设 $\{S(t)\}$ 是压缩半群.

令 $D(A) := \left\{ u \in X \;\middle|\; \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{S(t)u - u}{t} \text{ 在 } X \text{ 中存在} \right\}$

$$Au := \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \qquad \forall u \in D(A)$$

则称 $A: D(A) \to X$ 是半群 $S(t)$ 的无穷小生成元.

□

Thm X.6.1: (微分性质) 设 $u\in D(A)$ 则

(1) $\forall t\geq 0$. $S(t)u \in D(A)$

(2) $AS(t)u = S(t)Au$. $\forall t\geq 0$.

(3). $t\mapsto S(t)u$ $\forall t>0$ 是可微的.

(4) $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$. $\forall t>0$

Proof: ~~设 (1) 是2.~~

(1)(2): 设 $u\in D(A)$.

则 $\lim\limits_{s\to 0^+} \frac{S(s)(S(t)u)-S(t)u}{s}$

$$= \lim_{s\to 0^+} \frac{S(t+s)u - S(t)u}{s}$$

$$= S(t)\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)u-u}{s} = S(t)Au \text{ 存在}$$

$$\Rightarrow S(t)u\in D(A)$$

$$A(S(t)u) = S(t)Au.$$

(3) claim: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$

$$\frac{S(t)u-S(t-h)u}{h} - S(t)Au$$

$$= S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) - S(t)Au.$$

$$= \underbrace{S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)}_{A\text{的定义}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0\ \ 0} + \underbrace{(S(t-h)-S(t))Au}_{\text{连续性}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0\ \ 0}.$$

$\to 0$ as $h\to 0$.

(4)：由(3)易知

$$\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h} \longrightarrow S(t)Au \quad \text{as } h\to 0^+.$$

□

Thm 7.6.2

(1) $D(A) \underset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2) A是闭算子，即 满足 $\forall u_n\in D(A)$ $\left.\begin{array}{l}u_n\to u\\ Au_n\to v\end{array}\right\}\Rightarrow$ ~~Au=v~~ $u\in D(A)$ 且 $Au=v$.

证明：(1) Fix $u\in X$. $\quad u^t := \int_0^t S(s)u\,ds$. 则 $\frac{u^t}{t}\to u$ in X as $t\to 0^+$. (由连续性).

只用证 $u^t\in D(A)$ 即可. $(\forall t>0)$

$$\forall h>0.\quad \frac{S(h)u^t-u^t}{h} = \frac{1}{h}\left(S(h)u^t-u^t\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^t S(s)u\,ds - \int_0^t S(s)u\,ds\right)$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^t \left(S(s+h)-S(s)\right)u\,ds$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}-\int_0^h\right)S(s)u\,ds$$

$$\xrightarrow{h\to 0^+} S(t)u-u.$$

$\Rightarrow u^t\in D(A)$.

$Au^t = S(t)u-u$.

$\Rightarrow D(A)\overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2). 为证A闭 设 $u_k\in D(A)$, $u_k\to u$ in X

$Au_k\to v$ in X.

要证：$u\in D(A)$ $\quad v=Au$.

$$\xRightarrow{7.6.1} S(t)u_k-u_k=\int_0^t S(s)Au_k\,ds$$

$$\xRightarrow{k\to\infty} S(t)u-u=\int_0^t S(s)v\,ds.$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,ds = v. \Rightarrow \begin{array}{l}u\in D(A)\\ v=Au\end{array}$$ □

设 $A: D(A) \to X$ 为闭算子

Def: (1) (预解集 Resolvent set) $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I$ 1-1 & 满射$\}$.

(2). $\lambda \in \rho(A)$. 则定义对应的预解算子 $R_\lambda: X \to X$ 为.

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

~~Fact~~

Recall: 闭图像定理: 闭线性算子是有界的.

$\Rightarrow R_\lambda: X \to D(A) \subseteq X$. 是有界线性算子

进一步地: $A R_\lambda u = R_\lambda A u$.

Thm 7.6.3.

(1). 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$. 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(2) 若 $\lambda > 0$ 则 $\lambda \in \rho(A)$.

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \quad \forall u \in X$$

(R_λ 为 $S(t)$ 的 Laplace 变换).

$$\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$$

Pf. (1) Trivial.

(2). $\lambda > 0$. $\|S(t)\| \le 1$. 知 (2) 中积分式 有定义.

$$\widetilde{R_\lambda} u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt.$$

$\forall h > 0, u \in X$.

$$\frac{S(h) \widetilde{R_\lambda} u - \widetilde{R_\lambda} u}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)u - S(t)u)\, dt\right)$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u \, dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t) u \, dt$$

$$= -e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u.$$

$$\longrightarrow -u + \lambda \widetilde{R_\lambda} u. \quad \Rightarrow A \widetilde{R_\lambda} u = -u + \lambda \widetilde{R_\lambda} u$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A) \widetilde{R_\lambda} u = u \quad \forall u \in X$$

claim: $A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$

若 claim 成立. 则:

$\forall u \in D(A)$. $A\widetilde{R_\lambda}u = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt.$$

$$= \widetilde{R_\lambda}Au.$$

$\Rightarrow \widetilde{R_\lambda}(\lambda I - A)u = u.$

又: $\lambda I - A$ 1-1. & onto.

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. $\widetilde{R_\lambda} = R_\lambda$.

余下只用证 claim.

先证明: 对 $\int_0^M$. A 可与之换序:

$\forall M \in \mathbb{R}_+$. 将 $[0, M]$ 作分割:

$$[0, M] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left[\frac{j}{2^k}M, \frac{j+1}{2^k}M\right].$$

由 $I_k(t) := \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda t_j}S(t_j)u \cdot \chi_{t\in[t_{j-1}, t_j]}$. $\rightrightarrows e^{-\lambda t}S(t)u$.

↑simple functions as $k \to \infty$

及 A 闭. 知:

$$A\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^M I_k(t)\,dt\right)$$

$$\overset{A\text{闭}}{=} \lim_{k\to\infty} A\int_0^M I_k(t)\,dt.$$

$$\underset{I_k\text{ simple.}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_0^M AI_k(t)\,dt$$

$$\overset{A\text{闭}}{\underset{MCT}{=}} \int_0^M \lim_{k\to\infty} AI_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^M Ae^{-\lambda t}S(t)u\,dt \overset{A\text{ linear}}{=} \int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

又: $e^{-\lambda t}$ rapidly decays, $\|S(t)\| \le 1$. A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt \xrightarrow[\exists]{M\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)u\,dt.$$

$$\Rightarrow A\left(\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right) \xrightarrow{M\to\infty} A\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right).$$

therefore "||" holds.

|| 刚刚已证.

$$\int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt.$$

|| ||

$$\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt$$

□.

下面来对压缩半群的生成元进行刻画.

Thm 7.5.4 (Hille-Yosida).

A为X上稠定的闭算子. 则 A是S(t)(压缩半群)的生成元 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$. $\forall \lambda > 0$.

Pf: $\Rightarrow$ By thm 7.6.3.

$\Leftarrow$ 设A闭、稠定, $\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$

下面构造A生成的压缩半群.

直接构造是困难的, 因此我们先找一族有好性质的(便于计算).

先求A_λ的生成半群 再令$\lambda\to\infty$来证明.

令 $A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda.$ $(\lambda>0)$.

这称作 A 的正则化逼近

<u>Claim</u>: $A_\lambda u \to Au$.

若 Claim 对. 则令. $S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda}$.

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)\| \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k.$$

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$ $\rightarrow \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1 \Rightarrow \{S_\lambda(t)\}$ 是压缩半群

S_λ 生成元: A_λ. $D(A_\lambda) = X$. 此为易见.

直接算

由于 A_λ 是 R_λ 的"多项式". 故 R_λ. R_μ 可交换 $\Rightarrow A_\lambda$. A_μ 可交换.

$$\Rightarrow \cancel{A_\lambda S_\mu} \quad A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu. \quad \forall t>0.$$

$$\Rightarrow S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(S_\mu(t-s) S_\lambda(s) u\right) ds.$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s). S_\lambda(s) (A_\lambda u - A_\mu u)\, ds$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t) u\| \le t \, \|\underbrace{A_\lambda u - A_\mu u}_{\text{由于}}\| \to 0 \quad \text{as } \lambda.\mu \to \infty$$

因 $A_\lambda u \to Au$. as $\lambda \to \infty$ (by claim).

故 $\{A_\lambda u\}_{\lambda>0}$ Cauchy.

$\Rightarrow \{S_\lambda(t) u\}_{\lambda>0}$ 是柯西列:

$\therefore \exists\, S(t)u := \lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t) u.$ $\forall t \ge 0.$ $u \in D(A)$.

又: $\left.\begin{array}{l}\|S_\lambda\| \le 1 \\ A \text{ 稠密}\end{array}\right\}$ BLT Thm $\Rightarrow \forall u \in X$ $S(t)u \overset{\exists}{=} \lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t) u.$

$\forall t$. $\forall$ $I \subset\subset [0,\infty)$.

且 $S(t)$ 是压缩半群

下面证明 A是$\{S(t)\}$里的无穷小生成元:

设 B为生成元.

则: $Bu = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)u-u}{t}$ $\quad \forall u\in D(A)$.

而 $S_\lambda(t)u-u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u\,ds$.

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \le \|S_\lambda(s)\|\cdot\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s)-S(s))Au\| \to 0 \quad (\lambda\to\infty)$$

$\forall u\in D(A)$.

故. 令$\lambda\to\infty$ 由DCT.

$S(t)u-u = \int_0^t S(s)Au\,ds$. $\quad \forall u\in D(A)$

$$\Rightarrow \begin{cases} D(A)\subseteq D(B). \\ \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{S(t)u-u}{t} \overset{\exists}{=\!=} Bu. \quad \forall u\in D(A). \\ \quad \| \\ \quad Au. \end{cases}$$

又若 $\lambda>0$. $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$.

则 $X=(\lambda I-A)D(A)=(\lambda I-B)D(A)$.

$\Rightarrow (\lambda I-B)\big|_{D(A)}$ 1-1 & onto. $\Rightarrow D(A)=D(B)$.

$\Rightarrow A=B$

$\Rightarrow A$为$\{S(t)\}_{t\ge 0}$的生成元.

最后我们只用证claim: $\forall u\in D(A)$. $A_\lambda u\to Au$. as $\lambda\to\infty$

$A_\lambda u = -\lambda u+\lambda^2R_\lambda u. = \lambda(\lambda R_\lambda u-u)$.

$= \lambda(AR_\lambda u) = \lambda(R_\lambda Au)$.

$\|\lambda R_\lambda u-u\| \le \|R_\lambda\|\cdot\|Au\| \le \frac{1}{\lambda}\|Au\|\to 0$.

$\Rightarrow \lambda R_\lambda u\to u$ as $\lambda\to\infty$ $\quad\forall u\in D(A)$. $\Big\}$ $\Rightarrow \forall u\in X.$ $\lambda R_\lambda u\to u$

A稠定

$\|\lambda R_\lambda\|\le 1$.

$\Rightarrow$ ~~$A_\lambda u \Rightarrow \lambda R_\lambda Au$~~

$A_\lambda u \underset{\lambda R_\lambda Au}{\|} \to Au$. □

7.6.2 二阶方程中的应用

I. 考虑抛物方程

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{0\}. \end{cases}$$

L的系数与t无关. $\partial U \in C^\infty$

取 $X = L^2(U)$. $D(A) = H_0^1 \cap H^2$ $Au := -Lu$.

则 A 为 X 上的无界算子.

Thm 7.5.5: A生成了L^2上的一个 γ-压缩半群.

即 Hille-Yosida 的条件换为 $(\gamma, \infty) \subset \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda > \gamma$.

Pf: $D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$. ✓.

再证: A是闭算子. + 预解式估计 + $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$

① A闭? 设 $u_k \in D(A)$. $\begin{matrix} u_k \to u \\ Au_k \to f \end{matrix}$ in $L^2(U)$.

由正则性定理:

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \le C \left(\|Au_k - Au_l\|_{L^2} + \|u_k - u_l\|_{L^2} \right)$$

$\Rightarrow u_k \to u$ in H^2.

$\Rightarrow u \in D(A)$.

$\Big\} \Rightarrow Au_k \to Au$ (因 $A = -L$).

$\Rightarrow f = Au$. ✓.

② $(\gamma, \infty) \subset \rho(A)$? $\forall \lambda \ge \gamma$.

$$\begin{cases} (L + \lambda I)u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

在H_0^1中∃! weak sol (given $f \in L^2$).

$\underrightarrow{\text{正则性Thm}}$ ~~Au = f~~ $u \in H^2 \cap H_0^1 \Rightarrow u \in D(A)$.

$\Rightarrow$: $\lambda u - Au = f$. $\therefore (\lambda I - A): D(A) \to X$. 1-1 & onto. ($\forall \lambda \ge \gamma$).

$\Rightarrow [\gamma, \infty) \subset \rho(A)$

(3): $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\quad \lambda > \gamma$.

Consider $B[u,v] + \lambda(u,v) = (f,v)$. $\quad \forall v \in H_0^1(U)$. $\quad \cdots$ (#).

由 能量估计 (in Lax-Milgram).

$\exists \beta > 0, \gamma \ge 0$ 使 $\forall u \in H_0^1$ $\quad \beta \|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2}^2$

$\cancel{\forall \lambda > \gamma \Rightarrow (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}}$.

(#) 中. 令 $v = u$.

$$B[u,u] + \lambda(u,u) = (f,u). \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.$$

$$\ge (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2$$

又因 $u = R_\lambda f$

故 $\|R_\lambda f\|_2 \le \frac{1}{\lambda-\gamma}\|f\|_2$ $\quad \forall f \in L^2$ $\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda > \gamma$. □

Rmk: 半群方法提供了形如 (*) 方程构造解的途径. 但 a^{ij}, b^i, c 要与 t 无关.

II 对双曲方程

$$(**) \begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u(0) = g \quad \partial_t u(0) = h. & \text{in } U. \end{cases}$$

$L = -\sum_{i,j} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + cu$. $\quad c \ge 0$. $\quad a^{ij} = a^{ji}$.

令 $v = \partial_t u$

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_t v = -Lu & \text{in } U_T. \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u(0) = g, \ v(0) = h & \text{in } U. \end{cases}$$

如何选择 A?

- $\exists \beta>0$. $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]$ $\forall u \in H_0^1$

- Take $X = H_0^1 \times L^2$.

$$\|(u,v)\|_X := \sqrt{B[u,u] + \|v\|_2^2}$$

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1.$$

$$A(u,v) := (v, -Lu).$$

类似可证．A 满足 Hille-Yorsida Thm.

故有

Thm 又.6.6:

如上算子 A 生成了 $H_0^1 \times L^2$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}$

□.

又.6.3: 实例:

设 Φ 是热方程的基本解，即 $\Phi(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

$\forall t>0$. 令.

$$[S(t)g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy. \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$S(0)g = g$.

则: $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群.

不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

~~Check~~:

· $S(t)$ 是 L^2 上的压缩半群

· $\|S(t)g\|_{L^2} = \|\Phi * g\|_{L^2}$

$$\le \|\Phi\|_{L^1} \|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(t)\| \le 1.$$

· $\widehat{S(t+s)g} = \widehat{\Phi(x-y, t+s) * g}(\xi)$.

$$= \hat{\Phi}(\xi, t+s)\,\hat{g}(\xi).$$

$$= \hat{\Phi}(\xi, t)\,\hat{\Phi}(\xi, s)\,\hat{g}(\xi) = \widehat{S(t)S(s)g}$$

· $t \mapsto S(t)g$ 连续性:

$$\|S(t+h)g - S(t)g\|_{L^2} \le \|S(h)g - g\|_{L^2}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, h) g(y)\, dy - g(x) \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, h) (g(y) - g(x))\, dy \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, h) (g(x-y) - g(x))\, dy \right\|_{L^2_x}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, h) \underbrace{\|g(x-y) - g(x)\|_{L^2_x}}_{\downarrow 0\ (\text{平移连续性})}\, dy.$$

$$\xrightarrow{DCT} 0.$$

✓

· $S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩半群，因在 $t=0$ 处不连续

令 $g(x) = \chi_{\{x>0\}}$. $g(0)=0$.

$$(S(t)g)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy. \qquad (S(t)g)(0) = \frac{1}{2} \quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \|S(t)g - g\|_{L^\infty} \ge \frac{1}{2}$$

□.

· 热方程 C^∞ 正则性:

Lemma 7.6.7: 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

归纳定义 $D(A^k) := \{u\in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u \in D(A)\}$ $(k\geq 2)$

证明: 若 $\exists k$, $u\in D(A^k)$, 则 $\forall t\geq 0$ $S(t)u\in D(A^k)$

Pf: $\forall j\in\{1,2,\dots,k-1\}$, 要证: $A^jS(t)u\in D(A)$.

i.e. $$\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)A^jS(t)u - A^jS(t)u}{s} \ \exists$$

$$\frac{S(s)A^jS(t)u - A^jS(t)u}{s}$$

$$= \frac{S(s)S(t)A^ju - S(t)A^ju}{s}$$

$$= \frac{S(t+s)(A^ju) - S(t)(A^ju)}{s}$$

归纳假设 $A^ju\in D(A)$

$\Longrightarrow$ exists (以及 $S(0)=Id$). □

Prop 7.6.8: $X=L^2$. 若 u 是 $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u(0)=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$ 的

半群解 ($g\in C_c^\infty(U)$) 则 $u(\cdot,t)\in C^\infty(U)$, $\forall 0\leq t\leq T$.

Pf: ~~$\forall k\in\mathbb{N}$ 注意到~~

半群解: $u(x,t)=e^{t\Delta}g =: S(t)g$.

由: $\forall k\in\mathbb{N}$, $D(\Delta^k) = H_0^{2k}$ (Take $A=\Delta$).

由 lem 7.6.7 知 $\forall t\geq 0$, $u(\cdot,t)=S(t)g\in H_0^{2k}(U)$, $\forall k$

$\Rightarrow u\in C^\infty$

□

§7.7 常系数线性发展方程的Fourier方法：Strichartz估计.

7.7.1: Schrödinger方程的Strichartz估计(非端点).

考虑 (*) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \\ u(0)=g & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases}$

若 u, f, g 均是Schwartz函数, 则由Fourier变换法可得: ($f=0$)

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}(\xi).$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}\right)^{\vee}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}}\, g(y)\,dy =: e^{it\Delta}g.$$

$f\neq 0$时. 由Du'Hamel原理

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{it\Delta}g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds.$$

若 f 是非线性函数 $f(x,t,u)$. 则原方程化作积分方程

即 $u(t,x) = e^{it\Delta}g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x,u,s)\,ds.$

因此,要对Schrödinger方程的解进行估计.尤其是需要对半线性,非线性Schrödinger方程的适定性/长时间行为进行研究时,我们应分别搞清楚 $\left\{\begin{array}{l} e^{it\Delta}g \text{项} \\ \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds \text{项} \end{array}\right.$ 的 $L_t^q L_x^r$ 范数的估计,此为Schrödinger方程最基本的时空估计.

在叙述结果之前,我们先证明一个简单的衰减估计.

Lemma 7.7.1 (Schrödinger 方程衰减估计).

$\forall r\in[2,+\infty]$ $\|e^{it\Delta}g\|_{L_x^r}\lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L_x^{r'}}$

Proof: 由 $\{e^{it\Delta}\}$ 是酉算子知. $e^{it\Delta}: L^2\longrightarrow L^2$ with bdd $=1$.

又: $e^{it\Delta}g(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}}g(y)dy.$

$|e^{it\Delta}g(x)|\lesssim t^{-\frac{d}{2}}\|g\|_{L^1}.$

$\Rightarrow \|e^{it\Delta}g\|_{L^\infty}\lesssim t^{-\frac{d}{2}}\|g\|_{L^1}$

故: $e^{it\Delta}: L^1\to L^\infty$ with bdd $\lesssim t^{-\frac{d}{2}}$.

由 Riesz-Thorin 插值. 有 $\forall r\geq 2$.

$\|e^{it\Delta}g\|_{L^r}\lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^{r'}}.$

$\square$

下设 $d\in\mathbb{Z}_+$. $2^*=\frac{2d}{d-2}$. $(q,r)\neq(2,2^*)$.

我们证明所谓"非端点" Strichartz 估计.

Thm 7.7.2 (Strichartz).

设 q,r 满足 $\frac{2}{q}+\frac{d}{r}=\frac{d}{2}$ (称作"容许对", admissible pair).

$(q,r,d)\neq(2,\infty,2)$. $(q,r)\neq(2,2^*)$.

则: (1) $\left\|\int_{\mathbb{R}}^{t} e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds\right\|_{L_x^2}\lesssim\|f\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}$.

(2) $\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|f\|_{L^2}$.

(3) $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|f\|_{L_t^{\tilde{q}'}L_x^{\tilde{r}'}}$.

(q,r), $(\tilde{q},\tilde{r})$ 是任何上述容许对.

"$'$" 代表 dual index.

在证明之前我们不加证明地给出如下引理，该引理将 $\int_0^t$ 的估计化作 $\int_{\mathbb{R}}$ 的估计.

Lemma 7.7.2 (Christ-Kiselev 引理).

设 Y, Z 是 Banach 空间, $K(t,s)$ 是取值于 $\mathcal{L}(Y,Z)$ 的连续函数.

$-\infty \le a \le b \le +\infty$, $Tf(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\,ds$.

设 $\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)} \le C\|f\|_{L^p((a,b);Y)}$.

令 $Wf(t) = \int_a^t K(t,s) f(s)\,ds$. 则 $1 \le p < q \le \infty$ 时

$$\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)} \le \frac{2^{-2(\frac1p-\frac1q)}\cdot 2C}{1-2^{-(\frac1p-\frac1q)}}\|f\|_{L^p((a,b);Y)}.$$

令 $a=-\infty$, $b=+\infty$

$K(t-s) = e^{it\Delta}$

$Z = L^r$, $Y = L^{r'}$ 即可. □

Proof of Thm 7.7.1

先证 $\tilde q = q$, $\tilde r = r$ 的情形

(1) $\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^q_t L^r_x}$

广义Minkowski

$$\le \left\|\int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} f(s)\|_{L^r}\,ds\right\|_{L^q_t}$$

衰减估计

$$\lesssim \left\|\int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-d(\frac12-\frac1r)} \|f(s)\|_{L^{r'}}\,ds\right\|_{L^q_t}$$

$$= \left\| |\cdot|^{-\underbrace{d(\frac12-\frac1r)}_{\sigma}} * \|f(\cdot)\|_{L^{r'}}\right\|_{L^q_t}$$

Hardy-Littlewood-Sobolev不等式 $\||\cdot|^{-\sigma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$, $0<\sigma<d$, $\frac1q + 1 = \frac1r + \frac{\sigma}{d}$

$$\lesssim \|f\|_{L^\lambda_t L^{r'}_x}$$ 而 $\begin{cases}\frac{\sigma}{d} + \frac1\lambda = 1 + \frac1q \\ \sigma = d(\frac12 - \frac1r)\end{cases} \Rightarrow \lambda = q'$

一般地：

(1)：$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2}^2$

$= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)ds \right\|_{L_x}^2$

$= \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds,\ \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} f(t)\, dt \right\rangle$

$= \iint_{\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}} \langle e^{-is\Delta} f(s),\ e^{-it\Delta} f(t) \rangle_x\, ds\, dt.$

$= \int_{\mathbb{R}} \left\langle f(s),\ \overline{\int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt} \right\rangle_x ds.$

Mixed-Norm Hölder $\le \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \left\| \int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_t^q L_x^r}$

(3) 在 $q=\tilde{q}$, $r=\tilde{r}$ 时的情形 $\lesssim \|f\|^2_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$

(2). $\|e^{it\Delta} g\|_{L_t^q L_x^r (I\times\mathbb{R}^d)}$

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (e^{it\Delta} g)(t,x)\, \overline{h(t,x)}\, dx\, dt \right|.$

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle e^{it\Delta} g,\ h \rangle_x\, dt \right|.$

$= \sup_h \left| \int_{\mathbb{R}} \left\langle g.\ \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)} \right\rangle_x dx \right|$

$\le \sup_h \|g\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h \right\|_{L^2}.$

由(1) $\lesssim \sup_h \|g\|_{L^2} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le \|g\|_{L^2}.$

(3) $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_t^q L_x^r}$

$$\leq \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\, h(t,x)\, dx\, dt \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \underline{\int_{\mathbb{R}} \langle e^{i(t-s)\Delta} f(s)}, h(t) \rangle_x \, dt\, ds \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)\, dt \right\rangle_x \right|.$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_x^2}.$$

$$\overset{(2)}{\lesssim} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}.$$

$\square$.

借此，我们证明半线性次临界 Schrödinger 方程，

其 H^1 强解的 Local-Wellposedness.

又. 又2: Local well-posedness of subcritical NLS ~~semil~~. in $d \geq 3$.

~~何为 subcritical?~~

~~Endpoint case: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$.~~

~~在证明中有一些要求: $\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$:~~

Consider (NLS) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times I. \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) & \cancel{\text{in } H^s(\mathbb{R}^d)} \end{cases}$

那么：

$$u(t,x) \underset{H^1}{=} e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^{p-1}u)(s)\,ds \quad \cdots (*)$$

Thm 7.7.2: (LWP for subcritical NLS in $d\geq 3$).

$0<p-1<\frac{4}{d-2}$ 时. NLS在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中局部适定. 即解 $\exists,!$, 对初值连续依赖.

证明之前. 我们不加证明地给出要用的引理：

Lemma 7.7.3:

$f(u)=|u|^{p-1}u$. 　则 $|f(u)-f(v)| \lesssim_p |u-v|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})$.

$|\nabla f(u)| \lesssim |u|^{p-1}|\nabla u|$

In fact. this can be derived by the local Lipschitzian property of f. □

Lemma 7.7.4:

X. Y是 Banach 空间 X自反. $X\hookrightarrow Y$. ~~[illegible]~~ $1<p,q\leq\infty$

· f_n 在 $L^p(I,Y)$ 中一致有界

· $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ in Y. for a.e $t\in I$.

则 $f\in L^p(I,X)$. 　$\|f\|_{L^p} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}$. □

Proof of Thm 7.7.2:

Step 1: 局部存在性：

Fix $M,T>0$. (q,r)是容许对.

令 $X=\left\{ u\in L^\infty((-T,T);H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^q W_x^{1,r} \;\middle|\; \begin{array}{l}\|u\|_{L^\infty((-T,T);H^1)}\leq M \\ \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \leq M\end{array} \right\}$

$d(u,v) = \|u-v\|_{L_t^q L_x^2} + \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$

希望 (X,d) 是完备的度量空间

这只用证 (X,d) 完备 $L_t^q L_x^r$ 闭

设 $\{u_n\} \subset X$ $u_n \to u$ in $L_t^q L_x^r$ $u \overset{?}{\in} X$

注意 . u_n bdd in $L_t^q W_x^{1,r} \cap L_t^\infty H_x^1$

. $H^1 \hookrightarrow L^r$ $\|u_n(t)\|_{L^r} \le C\|u_n(t)\|_{H^1} \lesssim 1$ a.e

$\Rightarrow$ ∃ 弱收敛子列 $u_n \rightharpoonup v$ in L^r

$\Rightarrow u = v$ in $L_t^q L_x^r$

再用 lem 7.7.4 即可.

下面用压缩映射原理证明 Step 1 :

令 $J: u \longmapsto e^{it\Delta} u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds.$

要证: 对 $J:(X,d) \to (X,d)$ 是压缩映射

~~$\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty L_x^2} = \|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(f(u)(s) - f(v)(s))\, ds\|_{L_t^\infty L_x^2}$~~

~~$\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|f(u) - f(v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$~~

~~$\overset{\text{lemma}}{\lesssim} C\|(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})(u-v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$~~

先证 $J(X) \subseteq X$

$\forall u \in X$

$\|Ju\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \lesssim \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^q W_x^{1,r}} + \|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$

$\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\langle\nabla\rangle f(u)\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$ $\langle\nabla\rangle = (1+|\nabla|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\||u|^{p-1}\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$

$\overset{\text{Hölder}}{\le} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\|u\|_{L^r}^{p-1}\|\langle\nabla\rangle u\|_{L^r}\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$

刚才说要求：

$$\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$$
$$\overset{\|}{1-\frac{1}{r}} \Rightarrow r = p+1.$$

而希望 $H^1 \hookrightarrow L^r$ 则由 Sobolev 嵌入定理知：

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \iff r \leq \frac{2d}{d-2}$$
$$\iff p-1 \leq \frac{4}{d-2} \text{ 临界指标.}$$

只考虑 $p-1 < \frac{4}{d-2}$，否则要涉及 endpoint Strichartz 估计.

接着. 上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\Big\| 1 \cdot \|u\|_{H_x^1}^{p-1} \|u\|_{W_x^{1,r}} \Big\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|u_0\|_{H^1} + \|1\|_{L_t^{(1-\frac{2}{q})^{-1}}} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\infty} + (1-\frac{2}{q}).$$

$r < \frac{2d}{d-2}$ 时. $1-\frac{2}{q} > 0$ (subcritical).

上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} M^p$.

Take $M = 2C\|u_0\|_{H^1}$.

$CT^{1-\frac{2}{q}} M^p < \frac{M}{4}$ 时.

上式 $\leq \frac{3}{4}M$.

对 $L_t^\infty H_x^1$ 类似. $\Rightarrow J(X) \subseteq X$.

再证 J 压缩: $\|J_u - J_v\|_{L_t^\infty L_x^2} \overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} \|f(u) - f(v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$

$$\lesssim \big\| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) |u-v| \big\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\overset{\text{同上}}{\leq} CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\leq CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot 2M^{p-1} \cdot d(u,v).$$

换成 $L_t^q L_x^r$ 也对

取 $CT^{1-\frac{2}{q}}M^{p-1} \ll 1$. 再用压缩映像原理即有 $L_t^q L_x^r \cap L_t^\infty L_x^2$

的 local existence

下证 H^1 中 $\exists!$ 仍对.

$p \le 2$ 要用别的方法, 我们在此略去.

$\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty H_x^1}$ ~~中~~ 要估计

$$\lesssim \|\langle\nabla\rangle(|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}} \quad (p>2)$$

同上

$$\lesssim \cancel{CT^{1-\frac{2}{q}}(\|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^qL_x^r} + \|\langle\nabla\rangle v\|_{L_t^qL_x^r})(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1})\|u-v\|_{L_t^\infty H_x^1}}$$

$$+ CT^{1-\frac{2}{q}}\|\langle\nabla\rangle(u-v)\|_{L_t^qL_x^r}\cdot(\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1}).$$

$$\lesssim \underbrace{CT^{\frac{1}{4}}M^2}_{\text{取}<\frac{1}{2}} d(u,v) \quad \text{即可.}$$

Step 2: ~~local~~ 对初值连续依赖:

设 $u_{0,n} \to u_0$ in H^1. u_n, u 是以 $u_{0,n}$, u_0 为初值的解.

则 $u_n \to u$ in $C_t^0 H_x^1$ → 因 u 的表达式自动保证连续性 (据 A.C.)

$$u - u_n = e^{it\Delta}(u_0 - u_{0,n}) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(f(u) - f(u_n))(s)\,ds.$$

$$\|u-u_n\|_{L_t^qL_x^r} \overset{\text{Strichartz}}{\le} C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L^2} + C\|f(u) - f(u_n)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L_x^2} + CT^{1-\frac{2}{q}}(\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1} + \|u_n\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1})\|u-u_n\|_{L_t^qL_x^r}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{H_x^1} + CT^{1-\frac{2}{q}}\cdot C(\|u_0\|_{H^1})\cdot\|u_n - u\|_{L_t^qL_x^r}$$

取 T 充分小 即 $CT^{1-\frac{2}{q}}C(\|u_0\|_{H^1})<\frac{1}{2}$ 即可.

$L_t^\infty L_x^2$ 也对　下估计 H^1 norm.

$$\nabla u_n - \nabla u = e^{it\Delta}(\nabla u_{n,0} - \nabla u_0) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\nabla(f(u)-f(u_n))ds$$

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2} + C\|\nabla(f(u)) - \nabla f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\lesssim C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1} + C\||u|^{p-1}\nabla(u-u_n)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}} + C\|(|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1})\nabla u_n\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} C\|u_{0,n}-u_0\|_{H^1} + C\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1}\|\nabla u - \nabla u_n\|_{L_t^q L_x^r}\cdot T^{1-\frac{2}{q}} + \|(\underline{|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1}})\nabla u\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}$$

$p>2$. 用中值 Thm.

$1<p\le 2$　$|x|^{p-1}$ Hölder 连续.

$\lesssim |u_n - u|^{p-1}$.

$\to 0$ as $n\to\infty$　(T 充分小).

这样 ~~local well~~ p
局部适定性 完成证明.

$\square$

Remark.

$$(\text{NLS})\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\ \mu=\pm1 \\ u(0)=u_0 & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(1) 半线性 Schrödinger 的 Well-posedness 与 p, d, μ 均有关.

我们在 Step1 中某步用 Hölder 时出现了 $p-1<\frac{4}{d-2}$!

① 此为"能量次临界 NLS.

$d\geq3$. 次临界NLS. 有 H^1 Global well-posedness.

$d\leq2$. 需另外做. 因 Strichartz 估计不一定对.
(主要在 endpoint case).

问: 如何 local $\longrightarrow$ global?

Answer: 利用守恒律.

$$E_0(u)=\|u\|_2^2$$

$$E_1(u)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{2\mu}{p+1}|u|^{p+1}\,dx.$$

② Energy-critical?

利用 Keel-Tao 端点Strichartz估计. 例如 $d=3$, $p=5$.
有 $L_t^\infty H_x^1\cap L_t^{10}W_x^{1,\frac{30}{13}}$
适定. $\begin{cases}\text{小初值}\Rightarrow\text{global}\\ \text{大初值}\Rightarrow\text{local}\end{cases}$

③ 超临界: 未知.

(2) 关于 Strichartz 估计.

端点情形. 见: ($d\geq3$, $d\leq2$ 只对径向函数对. 否则有反例).

Markus Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates, American Journal of Mathematics, 1998.

还要用到 双端点, 三端点插值. 故不作介绍.

(3) 事实上. 不仅有 Schrödinger 方程有 Strichartz 估计. 对其它常见的色散方程 (KdV, Airy, Wave) 也有结论.
这都是抽象 Strichartz 估计与插值空间的理论. □

Thm 7.7.3 (抽象 Strichartz 估计)

设 $U(t): L^2_x \to L^2_x$ 是一族单参数的有界线性算子. X 自反 Banach.
一致有界的

$S(\mathbb{R}^d)$ 在 X, X^* 中稠密.

假设: $\|U(t)U^*(t')f\|_{X^*} \lesssim |t-t'|^{-\gamma}\|f\|_X$.

$$\|U(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(X^*)} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

$$\left\|\int_{R} U^*(t)\,\Phi(t,\cdot)\,dt\right\|_{L^2} \lesssim \|\Phi\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}X}.$$

证明与 Schrödinger 方程的完全类似. $(U(t)=e^{it\Delta})$

实际上, 这用到的最核心的想法是:

* 设 H Hilbert. Y 自反.

  $T: H\to Y$ bdd. $T^*: Y^*\to H$.

  若 T 有界. 则 $\|TT^*\|_{Y^*\to Y} = \|T\|^2_{H\to Y}$.

  而在 Strichartz 估计中. TT^* 远比 T 容易估计. □.

Corollary: 波方程 Strichartz 估计

取 $\gamma=(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. $s=\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. $0<\gamma<1$.

则
$$\|W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_{x,2}^{-s,p}} + \|\partial_t W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_{2}^{-s-1,p}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_2^{s,2}} + \|g\|_{\dot{B}_2^{-1,2}}.$$

其中 $\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} := \left\|2^{ks}\|P_kf\|_{L^p}\right\|_{\ell_k^q}$ (P_k 为 Littlewood-Paley 投影)

$W(t)f = \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f}{\sqrt{-\Delta}}$. i.e. $\widehat{W(t)f} = \frac{\sin(t|\xi|)f}{t|\xi|}$.

$\partial_t W(t)f = \cos(t\sqrt{-\Delta})f$.

Proof:

$$\partial_t W(t)\cdot P_k f = \cos(t\sqrt{-\Delta})\, P_k f = \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} + e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{2} P_k f.$$

而 $e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f := \big(e^{it|\xi|}\cdot \underbrace{\widehat{P_k f}}_{\varphi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi)} \big)^{\vee}$

φ为支于$\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$的$C_c^\infty$-bump

$$= \int e^{it|\xi|} e^{ix\cdot\xi}\,\varphi(\tfrac{\xi}{2^k})\,\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

$$\overset{\eta=2^{-k}\xi}{=} \int e^{i2^k t|\eta|}\, e^{i2^k x\eta}\,\varphi_0(\eta)\,\hat{f}(2^k\eta)\,2^{kd}\,d\eta$$

$$= \int e^{i2^k t|\eta|}\, e^{i2^k x\eta}\,\widehat{P_0 f(2^k\cdot)}\,d\eta.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\sqrt{-\Delta}}P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}}\|P_k f\|_{L^1}.$$

对$W(t)f$项:

$$\Big\|\frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}P_k g\Big\|_{L^\infty_x} = \frac{1}{2}\Big\|\frac{e^{it\sqrt{-\Delta}}-e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}}P_k g\Big\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}}\,\underline{\Big\|\frac{P_k}{\sqrt{-\Delta}}g\Big\|_{L^1}}.$$

故: $\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}}\|P_k f\|_{L^1}$. $\approx 2^{-k}\|P_k g\|_{L^1}$.

$\|\cdots\cdots\|_{L^2} \lesssim \|P_k f\|_{L^2}$.

By Riesz-Thorin Interpolation:

$$\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)}\|P_k f\|_{L^{p'}}$$

$(2<p<\frac{2d}{d-2})$ 按复插值 $\theta=\frac{2}{p}$ $= 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})k}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})}\|P_k f\|_{L^{p'}}$

$\Rightarrow$

$$2^{-\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})k}\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p}$$

$$\lesssim \underset{\substack{\uparrow \\ s(t)}}{2^{-sk}}\, t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|P_k f\|_{L^{p'}}$$

乘以 2^{sk}，取 l_k^2

$$\Rightarrow \Big\| \|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L_x^p} 2^{ks}\Big\|_{l_k^2} =: \|\cos(t\sqrt{-\Delta})\|_{\dot B^{s,p}_2}$$

$\downarrow$

$$\lesssim t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{\dot B^{-s,p'}_2}$$

在抽象 Strichartz 中，对应 $X^* = \dot B^{s,p}_2$，$\nu=(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

$\square$

Rmk：发展方程的调和分析(Fourier)方法

好处：方便处理导数，与精细正则性，便于构造函数空间.

有众多分析工具可用.

注意 此时不应将导数视作差商的极限.

而应视作 $|\nabla|^s f = (|\xi|^s \hat f(\xi))^\vee$.

即在频率空间中视作乘以一个多项式乘子.

这样即可刻画分数阶导数.

坏处：变系数难做，涉及2个函数乘积的估计

Other Methods: $\begin{cases}\text{Paraproduct} \\ \text{Conservation law (例如 Morawetz 估计)} \\ \text{变分或其它方法}\end{cases}$