2019年春季学期微分方程2(H)期中考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

2019年4月28日　考试时间: 2小时　主讲教师: 赵立丰

注：本试卷共5题，每题20分，总分100分。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

除特别说明以外，本试卷中的U均是指$\mathbb{R}^n$中的有界开集，并且边界光滑。

1. 证明：存在常数$C>0$, 使得如下不等式对任意$u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$成立：

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)}\le C\|u\|_{L^2(U)}^{1/2}\|\nabla^2 u\|_{L^2(U)}^{1/2}.$$

2. 设$u\in H^1(U)$是方程

$$\Delta u=f\quad \text{in } U$$

的弱解，其中$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明：$u\in H^2_{loc}(U)$, 且对于任意$V\subset\subset U$, 成立不等式

$$\|u\|_{H^2(V)}\le C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(U)}).$$

(提示：本题考查内部正则性定理的证明，不允许直接用该定理结论。)

3. 设$U\subseteq\mathbb{R}^n$是有界连通开集，且$\partial U\in C^1$. 证明：存在常数$C(n,p,U)>0$，使得对任意$u\in W^{1,p}(U)$ $(1\le p<n)$, 成立不等式

$$\|u-(u)_U\|_{L^{np/(n-p)}(U)}\le C\|Du\|_{L^p(U)},$$

其中$(u)_U=\frac{1}{|U|}\int_U u(x)dx$.

4. 证明：当$p>n$时，有紧嵌入$W^{1,p}(U)\hookrightarrow\hookrightarrow C^1(\bar{U})$.

5. 设$Lu=-\Delta u+c(x)u$ (其中$c\in C^\infty(\bar{U})$)，其伴随算子记为L^*. 设L^*的零空间为$N(L^*)=Span\{\phi(x)\}$.

(1)证明：存在常数μ使得如下椭圆方程存在弱解:

$$\begin{cases} Lu=f+\mu\phi & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

(2)若$f\in H^1(U)$, 该弱解有何正则性？