

2025年秋季学期偏微分方程作业四

极大值原理、格林函数

截止时间：2026年元月5日下课前

作业题1-9是必做题，作业题10是选做题。

作业题 1 (习题4.1.3). 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调递增函数, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是有界区域, 常数 $T > 0$. 设 $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ 是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u) = 0, & \text{in } \Omega_T \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), & t = 0, \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \\ u(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}), & t \geq 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 φ, g 是给定的有界光滑函数。

- (1) 设 $f \in C^1$, 叙述并证明微分算子 $\mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u + f(u)$ 的比较原理。
- (2) 如果只假设 f 连续, 证明上述方程解的唯一性。(提示: 可以用能量法。)

作业题 2 (习题4.1.4). 考虑一维热方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in } [0, +\infty) \times (0, \pi), \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad (t \geq 0).$$

- (1) 证明: 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $v(t, x) = ae^{-t} \sin x$ 满足上述方程。
- (2) 若初值选取为 $u(0, x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$, 证明: 对应的解满足 $e^{-t} \leq \max_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \leq \frac{\pi}{2}e^{-t}$.

提示: (2) 可以用比较原理, 可以联想(1)中解的初值是什么。

作业题 3 (习题4.2.3, 下调和函数的弱极值原理). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开集 (未必是区域)。函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是 Ω 中的下调和函数, 即 $-\Delta u \leq 0$ 在 Ω 内恒成立。

- (1) 证明: 对任意球 $B(\mathbf{x}, r) \Subset \Omega$, 成立 $u(\mathbf{x}) \leq \oint_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$.
- (2) 证明: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
- (3) 证明: 若 $v \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Ω 内的调和函数, 则 $|\nabla v|$ 在 $\partial\Omega$ 上达到最大值。

提示：(1)模仿调和函数平均值原理的证明。(2)先证明 $-\Delta u < 0$ 的情况，对一般情况考虑扰动 $u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2$ 。(3)计算 $\Delta(|\nabla v|^2)$ 并证明它非负。

作业题 4 (习题4.2.5, 选做). 设 $\Omega := B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$, $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 满足

$$\Delta u - 2u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g(\mathbf{x}).$$

这里 g 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数，证明：存在常数 $C > 0$ 使得 $\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C$.

提示：选取充分大的常数 $\lambda > 0$, 使得 $\Delta(u^2 + \frac{\lambda}{4}|\mathbf{x}|^2) \geq 0$.

作业题 5 (习题4.2.6). 设 $u \in C^3(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是开集 Ω 内的非负调和函数, 球 $B(\mathbf{x}_0, R) \Subset \Omega$. 证明：对任意 $1 \leq i \leq d$ 有 $|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d}{R}u(\mathbf{x}_0)$.

提示： $u \geq 0$ 表明 $u = |u|$, 思考在模仿命题4.2.9的证明过程中如何利用这个事实得到我们想要的结论。

作业题 6 (习题4.2.8). 设 u 是 \mathbb{R}^d 中的调和函数。证明：若 u 满足以下两条件中任一个，则 u 是常数。

- (1) 存在常数 $C > 0, p > 0$ 使得 $|u(\mathbf{x})| \leq C(\log(1 + |\mathbf{x}|^p) + 1) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.
- (2) 存在常数 $C \in \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) \geq C \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

作业题 7 (习题4.3.5). 设 $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$)是如下方程的解

$$-\Delta u_i + c_i(\mathbf{x})u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_i|_{\partial\Omega} = g_i(\mathbf{x}).$$

若 $c_2(\mathbf{x}) \geq c_1(\mathbf{x}) \geq 0$ 和 $g_2(\mathbf{x}) \geq g_1(\mathbf{x}) \geq 0$ 恒成立, 证明: $u_1(\mathbf{x}) \geq u_2(\mathbf{x})$ 在 $\bar{\Omega}$ 上恒成立。

提示：先证明 $u_i \geq 0$, 再考虑 $u_1 - u_2$ 满足的方程和边值条件。

作业题 8 (习题5.2.1). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$)是边界光滑的有界区域, 定义 $D := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\}$ 为 Ω 的直径。记 $\Phi(\mathbf{x})$ 为Laplace方程的基本解 (见讲义上的定义3.3.1)。今固定 $\mathbf{x} \in \Omega$, 证明：

- (1) 格林函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \psi^x(\mathbf{y})$ 是唯一的, 且满足 $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = -1$;
- (2) 当 $d \geq 3$ 时, 对任意 $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 有 $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 成立;
- (3) 当 $d = 2$ 时, 对任意 $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 有 $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{D}$ 成立.

提示：(1)边值为1且在有界区域 Ω 中调和的函数只能是常值函数1. (2)-(3)思考怎么用极大值原理, 本题(2)是以前的考试原题。

作业题 9 (习题5.2.3, 球上的Harnack不等式). 设 u 是闭球 $\overline{B(\mathbf{0}, R)} \subset \mathbb{R}^d$ 上的非负调和函数。

- (1) 结合讲义上的公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2} \frac{R - |\mathbf{x}|}{(R + |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0}) \leq u(\mathbf{x}) \leq R^{d-2} \frac{R + |\mathbf{x}|}{(R - |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0})$$

(2) 用(1)证明: $\forall r \in (0, R)$, 成立不等式 $\sup_{B(\mathbf{0},r)} u \leq (\frac{R+r}{R-r})^d \inf_{B(\mathbf{0},r)} u$.

作业题 10 (问题4.1.1, 选做). 习题4.1.4中, 假设初值 $u(0, x) = u_0(x) \in C^1([0, \pi])$ 且满足 $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, 证明: 存在常数 $C > 0$, 使得对应的解满足 $\sup_{x \in [0, \pi]} |u(t, x)| \leq C e^{-t}$.

提示: 将 $u_0(x)$ 与习题4.1.4(1)初值的常数倍相比较, 这是本题假设初值 C^1 的原因所在。