偏微分方程讲义 (II): 现代偏微分方程基础

章俊彦

中国科学技术大学　数学科学学院

Email: yx3x@ustc.edu.cn

最后更新时间：2026 年 2 月 15 日

前言

这份讲义是根据我在新加坡国立大学(NUS)做博士后期间讲授MA5213-高等偏微分方程 (Advanced Partial Differential Equations) 这一研究生课程时写的讲稿修订并扩充而成的，在中国科学技术大学则可用于讲授本研贯通课程“现代偏微分方程”（原“微分方程II”）。预备知识主要有

- 古典偏微分方程(微分方程I)：本课程并不直接用到古典PDE课程内容，但古典PDE可以为这门课的理论提供一些初等的例子。
- 实变函数：Lebesgue测度与积分理论、Lebesgue微分定理、L^p空间和积分收敛定理。
- 线性泛函分析：Hilbert空间的Riesz表示定理、弱收敛/弱-*收敛、紧算子的谱理论。
- 其它（非必需）：L^p空间的插值定理、Fourier变换、缓增分布与Sobolev空间。具体可参见 Folland [8] 第6、8、9章或 Stein [15] 第2、3章的部分内容。

这门课可视作中、高年级本科生以及硕士生的偏微分方程基础课程，旨在让对分析与偏微分方程感兴趣的同学掌握近代偏微分方程的基本语言和方法，以使得选课的同学具有阅读现代偏微分方程文献和专著的基本能力。本课程的主体内容仍为线性偏微分方程，但与本科偏微分方程不同的是，这门课不再讨论古典解的具体计算，而是关注变系数、粗糙的系数和初边值等给定信息不再具有较好正则性时的情况。此时我们能用的方法仅以能量法为主，再结合实分析、傅立叶分析中的各类具体估计和线性泛函分析的抽象工具，来求得线性方程正则性较差的解。尽管这些理论略显枯燥，但仍是研究非线性偏微分方程必需的技术。

讲义的第一章讲述整数阶Sobolev空间$W^{k,p}(U)$，其中$U \subset \mathbb{R}^d$是边界充分光滑（至少是 Lipschitz 连续或 C^1）的开集。Sobolev空间$W^{k,p}(U)$的优点之一是它同时刻画了一个局部可积函数的可积性和（弱）可微性，而Sobolev不等式则刻画了Sobolev函数可积性、可微性、Hölder连续性之间的定量关系。同时，Sobolev函数可以由光滑函数（通过与磨光函数族作卷积构造）以某些方式逼近，进而我们可以对Sobolev函数建立链式法则、Leibniz法则等基本运算。

需注意，与Sobolev空间一同引入的一个概念是偏微分方程的“弱解”。事实上这可能是偏微分方程研究中最重要的概念之一。在研究具体问题时，我们通常需要分析各种非线性偏微分方程解的行为，而且其系数可能正则性不高或者甚至依赖于解，因此直接证明经典解的存在性通常很困难。退而求其次，我们可以先寻求弱解（通常在分布意义下），这个过程对正则性的要求较低，而且可以用性质非常好的函数作为测试函数来刻画弱解的行为。在得到弱解之后，如果方程的系数和初边值足够正则，我们可以尝试提高弱解的正则性，使其最终与期望的经典解一致。

在第二章和第三章中，我们使用不同的方法研究不同类型的二阶线性偏微分方程的存在性：

椭圆型偏微分方程和抛物型偏微分方程。椭圆型偏微分方程的存在性定理是通过运用线性泛函分析中的Lax-Milgram定理和Fredholm二择一定理得到的。第二章末尾我们介绍了经典解的极值原理、De Giorgi-Moser迭代（弱解的极值原理和 Hölder 连续性）以及 Pohozaev 恒等式等椭圆方程经典结论。抛物型方程的存在性则是通过使用 Galerkin 逼近证得的，这种方法在数学上是“分离变量法”的推广，也常用于数值计算。第一至第三章的主要参考文献是Evans的偏微分方程著作[6, Chapter 5, 6, 7.1]，椭圆方程补充内容主要来自韩青、林芳华教授的著作 [9, 第四章]。我们还介绍了消失粘性法来求解$\mathbb{R}^d$中的线性对称双曲组，参考Evans [6, Chap. 7.3.1]。在第四章我们介绍双曲守恒律的几种基本波（一维情形）：激波、接触间断和稀疏波，参考[10, Chap. 5].（暂时鸽置）。

第五章介绍了Fourier分析方法，为第六章讲波动方程和Schrödinger方程作准备。另一方面，Fourier 变换使我们能够建立关于函数可微性的更为精细的刻画。当$U = \mathbb{R}^d$时，我们利用Fourier变换可以轻松定义任意非整数阶$s \in \mathbb{R}$的导数。而在具有边界的区域中，分数阶导数通常通过差商（Sobolev-Slobodeckiĭ范数）来刻画，这往往复杂很多。此外我们还引入了 Littlewood-Paley 分解这一有力的工具将函数的不同的频段进行“局部化”。在证明非整数阶导数的Leibniz法则和链式法则时，Littlewood-Paley理论至关重要。进一步地，利用 Littlewood-Paley 理论，我们可以建立更加精细的Sobolev不等式，这在决定一个非线性偏微分方程解的存在空间时尤为重要。这部分主要参考文献是 Bahouri-Chemin-Danchin [2, Chap. 1]和陶哲轩的色散方程[16, Appendix A]。在第六章，我们介绍波动方程和 Schrödinger 方程。我们先讲线性方程的存在性、正则性和有限传播速度，再证明拟线性波动方程的局部存在性，这部分主要参考 Jonathan (Wing-Hong) Luk 的讲义[11, Chap. 4-6]。然后我们介绍若干实例，以揭示非线性项对解的存在性的巨大影响。本章最后介绍了 Schrödinger 方程的 Strichartz 估计，以及质量临界NLS的小初值整体解和位力恒等式。

讲义的初稿于2025年1月7日完成，在当时并未来得及认真校对。在此，我要致谢如下老师和同学们，他们指出了讲义初稿的无数谬误，并分享了自己对讲授这门课的经验或是学习心得。

- 中国科学技术大学的赵立丰教授，以及于俊骜、王鼎涵、尹宇辰、周芾、张源意同学。
- 新加坡国立大学的安歆亮教授，以及2025年MA5213班上的严翼勋(EOM Ikhoon)、戚馥麟、温铠阳(Timothy WAN Kai Yang)、吴笙榕、张力源同学。
- 香港中文大学的罗辰昀教授（我的同门师兄），广州软件学院的杨庭轩老师。

如果您在学习过程中发现了讲义中的错误或是有任何建议，请您尽快告知本人。由于NUS单学期时间较短，MA5213这门课只上了12周不到（每周4课时），我的课程实际上只涵盖了讲义的第1–3、5章和第6章的部分内容，并且跳过了不少与PDE本身无关的证明。本讲义仍然有部分章节的内容待补充，例如双曲守恒律方程、变分法等与非线性偏微分方程相关的内容。

章俊彦
2026年1月31日

目录

第一章　Sobolev空间

本章讲述整数阶Sobolev空间的基本理论。在过去的几十年里，Sobolev空间已被证明在分析众多PDE的问题中极其有用。事实上，在物理或其他领域中的许多模型中，解的点态行为很难被精细刻画。一个例子是水波运动：每个液体粒子或者单个涡旋的运动状态很难被精确描述。因此，必须找到替代方法来证明PDE解的存在性并分析解的定性和定量性质，例如能量方法、变分法、Fourier分析等，进而函数的可微性和可积性的刻画变得非常重要。另一方面，Sobolev空间 $W^{k,p}$ 的一个主要优势是这类函数空间同时考虑了函数的可积性和可微性，而Hölder连续函数空间 $C^{k,\alpha}$ 只考虑点态行为。此外，我们可以"牺牲一定可微性，换取更高的可积性"，并建立Sobolev空间与 L^p 空间和 $C^{k,\alpha}$ 空间之间的定量关系。

在介绍Sobolev空间之前，我们首先介绍函数空间 $C^{k,\alpha}$。在建立点态估计时，它们实际上比经典的连续函数空间 C^k 更有用，特别是椭圆PDE的Schauder估计。

在整个讲义中我们假设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开集。设$\alpha \in (0,1]$，我们称函数u是**α阶Hölder连续的**，是指存在常数 $C > 0$ 使得

$$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \leqslant C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U.$$

I特别地，当 $\alpha = 1$ 时，我们称 u 在 U 中是 **Lipschitz连续的**。据此我们引入空间 $C^{k,\alpha}$ 如下。

定义 1.0.1. 给定一个有界连续函数 $u : U \to \mathbb{R}$，我们定义

- 一致范数：$\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup\limits_{\boldsymbol{x} \in U} |u(\boldsymbol{x})|$.
- α阶Hölder半范数：
$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U}} \frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha}}.$$
- α阶Hölder范数：$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}$.
- Hölder空间 $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ $(k \in \mathbb{N})$:

$$C^{k,\alpha}(\overline{U}) = \left\{ u \in C^k(\overline{U}) \middle| \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^{\alpha} u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [\partial^{\alpha} u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} < \infty \right\}.$$

可以验证，线性空间$C^{k,\alpha}(\overline{U})$ 在赋予$\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})}$范数时是Banach空间。

1.1 弱导数和Sobolev空间

我们通常无法直接证明某些PDE的解属于 $C^{k,\alpha}$，因为这需要非常高的点态正则性。为了克服这种困难，人们发现Sobolev空间是构造“粗糙”解的好选择，并且“弱导数”在构造过程中起着重要作用。

1.1.1 弱导数

我们从一个简单的例子开始：给定有界区域 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和函数 $f \in L^2(U)$，我们考虑Poisson方程

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

注意源项 f 可能是一个非常粗糙的函数，这使得直接证明存在二阶可微的解变得困难。另一方面如果 $u \in C^2(U)$，那么由Gauss-Green公式我们得到

$$\int_U f\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U). \tag{1.1.1}$$

注意，上述积分等式的成立只需要 $u \in H_0^1(U)$，即 $\nabla u \in L^2(U)$ 且 $u|_{\partial U} = 0$。因此我们可以将Poisson方程的“弱解”定义为满足恒等式 (1.1.1) 的 u. 这种弱解的存在性可以用Hilbert空间的Riesz表示定理证明，而这里的 ∇u 实际上是 u 的“弱导数”，因为它只属于 $L^2(U)$ 而不是 $C(U)$.

受上述例子的启发，我们引入“弱导数”的概念。

定义 1.1.1. 设$u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U), \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$是多重指标。我们称$v$是$u$的$\alpha$阶弱导数，记作$\partial^\alpha u = v$，是指下式成立

$$\int_U u\partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U). \tag{1.1.2}$$

若这样的 v 不存在，则我们就称u的α阶弱偏导数不存在。

注记 1.1.1. 需注意，上述定义与泛函分析中的分布导数略有不同（参见Folland [8, Chapter 9]），因为我们的定义要求弱导数是一个局部Lebesgue可积函数，而分布导数只要求属于 $\mathcal{D}'(U) := (C_c^\infty(U))'$ 但不一定是局部可积函数（例如 Dirac delta δ）。

命题 1.1.1 (弱导数的唯一性)**.** u的α阶弱导数，如果存在，则在相差一个零测集意义下是唯一的。

证明. 设 $v_1, v_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ 是u的两个α阶弱偏导数。据定义，它们满足

$$\int_U (v_1 - v_2)\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

那么所需结论立即由以下引理得出。 □

引理 1.1.2. 若$w \in L^1_{\text{loc}}(U)$满足$\int_U w\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$对任意$\varphi \in C_c^\infty(U)$成立, 则$w = 0$ 在 U 中几乎处处成立。

引理 1.1.2 的证明. 设 $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是附录 C.2 中定义的一族磨光核，满足

$$\eta \in C_c^\infty(B(\mathbf{0},1)), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1, \quad \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right).$$

那么对任意 $\varepsilon > 0$，我们也有 $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon = 1$。据此有

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}) &= \int_U w(\boldsymbol{x})\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_U (w(\boldsymbol{x})-w(\boldsymbol{y}))\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \underbrace{\int_U w(\boldsymbol{y})\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}}_{\text{=0 by assumption}} \\ &= \int_{U\cap B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} (w(\boldsymbol{x})-w(\boldsymbol{y}))\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

再利用$0 \leqslant \eta \leqslant 1$可得

$$|w(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} |w(\boldsymbol{x})-w(\boldsymbol{y})|\eta(\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant \alpha(d)\fint_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} |w(\boldsymbol{x})-w(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

其中$\alpha(d)$是$\mathbb{R}^d$中单位球的体积，而 $\fint$ 表示积分的体积平均。当 $\varepsilon \to 0$ 时，右端收敛到0是对几乎处处的$\boldsymbol{x} \in U$成立的，这是Lebesgue微分定理的结论。 □

接下来，我们介绍两个弱导数的例子。

例 1.1.1. 设$d = 1, U = (0,2)$, 考虑函数 $u(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$. 定义 $v(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$. 下面证明$u' = v$在弱导数意义下成立。任取$\varphi \in C_c^\infty(U)$, 我们要证明

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于左边，我们计算可得

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(1) - \varphi(0) + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这里我们用到了$\varphi \in C_c^\infty \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(2) = 0$.

例 1.1.2. 设 $d=1, U=(-1,1)$ 以及 $u(x)=\begin{cases}0 & -1<x\leqslant 0\\ 1 & 0\leqslant x<1\end{cases}$. 我们断言弱导数$u'$ 不存在，即不存在任何$v\in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ 满足

$$\int_{-1}^{1}u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(U).$$

用反证法，假设存在某个 $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ 满足上述等式。据 u 的定义得到

$$-\int_{-1}^{1}v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=-\varphi(0),\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(-1,1).$$

现在，我们选取一列 $\{\varphi_m(x)\}\subset C_c^\infty(-1,1)$ 满足 $0\leqslant\varphi_m\leqslant 1, \varphi_m(0)=1$ 以及当$m\to\infty$时有$\varphi_m(x)\to 0$对任意$x\neq 0$成立。将 φ 替换为 φ_m 并令 $m\to\infty$，我们得到（利用控制收敛定理）

$$-1=\lim_{m\to\infty}(-\varphi_m(0))=-\lim_{m\to\infty}\int_{-1}^{1}v(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}v(x)\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

得到矛盾。

注记 1.1.2. 函数 u 被称为Heaviside函数，如果我们将其延拓到 $\mathbb{R}$ 上，满足 $u|_{x<1}=0$ 和 $u|_{x>1}=1$。u 的分布导数正是原点处的Dirac delta $\delta_0\in\mathcal{D}'$，它不是局部可积函数。

1.1.2 Sobolev空间$W^{k,p}(U)$

接下来我们引入Sobolev空间的定义。

定义 1.1.2 (Sobolev空间). 给定$k\in\mathbb{N}$和$1\leqslant p\leqslant\infty$，Sobolev空间$W^{k,p}(U)$定义为

$$W^{k,p}(U):=\left\{f\in L^p(U)\middle|\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p(U)}<\infty\right\}.$$

也就是说$W^{k,p}(U)$空间由全体满足“直到 k 阶弱导数都是 $L^p(U)$ 函数”的局部可积函数 $f:U\to\mathbb{R}$构成。进一步可以证明$(W^{k,p}(U),\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)})$是Banach空间，其范数定义为

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p(U)},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

注记 1.1.3. 由于 L^p 范数包含积分的 $1/p$ 次幂，当 $1\leqslant p<\infty$ 时，我们有时也使用等价范数（定

义如下）

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_U |\partial^\alpha f|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=2$ 时，我们记 $H^k(U) := W^{k,2}(U)$.

定义 1.1.3. 设$\{f_m\}, f$属于$W^{k,p}(U)$. 我们称f_m在$W^{k,p}(U)$中收敛到f，是指当$m\to\infty$时成立$\|f_m - f\|_{W^{k,p}(U)}\to 0$. 我们称$f_m$在$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$中收敛到$f$，是指$\|f_m - f\|_{W^{k,p}(V)}\to 0$对任意 $V \Subset U$成立。

定义 1.1.4. 我们用 $W^{k,p}_0(U)$ 表示 $C^\infty_c(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中的闭包。因此，$f\in W^{k,p}_0(U)$ 当且仅当存在函数 $f_m\in C^\infty_c(U)$ 使得 f_m在$W^{k,p}(U)$ 中收敛到f. 进一步，我们有

$$f\in W^{k,p}_0(U) \Leftrightarrow f\in W^{k,p}(U) \text{ 且 } \partial^\alpha f = 0 \text{ on } \partial U \ \ \forall |\alpha|\leqslant k-1.$$

然而其证明并非易事，具体可参见第1.3节。

例 1.1.3. 令$U = B(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^d$, $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{-a}$ $(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$。给定 $d\in\mathbb{N}^*$ 和 $p\in[1,\infty)$，我们希望找到 $a>0$ 使得 $u\in W^{1,p}(U)$.

解. 首先我们知道 u 在远离原点处光滑，因此可以在非零的$\boldsymbol{x}$处计算其经典导数 $\partial_i u(\boldsymbol{x}) = \frac{-ax_i}{|\boldsymbol{x}|^{a+2}}$. 接下来我们验证这也是 U 中的弱导数。为此固定 $\varepsilon>0$ 并选取任意 $\varphi\in C^\infty_c$，我们进行如下计算

$$\int_{U\setminus B(\mathbf{0},\varepsilon)} u\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{U\setminus B(\mathbf{0},\varepsilon)} \partial_i u\,\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} u\varphi\nu_i\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},$$

其中 $\nu = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ 是 $\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)$ 上的单位内法向量。然后，为了验证 $\partial_i u$ 也是 U 中 u 的弱导数，我们需要检查边界项在 $\varepsilon\to 0$ 时消失

$$\left|\int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} u\varphi\nu_i\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty}\mathrm{Area}(\partial B(\mathbf{0},\varepsilon))\varepsilon^{-a} \leqslant C_d\varepsilon^{d-1-a}$$

当 $a+1<d$ 时收敛到 0，这也隐含着要求 $d\geqslant 2$.

接下来我们需要 $u\in L^p(U)$以及全体$\partial_i u\in L^p(U)$ $(1\leqslant i\leqslant d)$. 由于$U$是包含原点的有界区域，所以$u\in L^p(U)$当且仅当$ap<d$成立；再求导得$|\nabla u(\boldsymbol{x})| = \frac{|a|}{|\boldsymbol{x}|^{a+1}}$对$\boldsymbol{x}\neq 0$成立，而我们知道$|\nabla u(\boldsymbol{x})|\in L^p(U)$当且仅当$(a+1)p<d$. 因此我们得出结论：$u\in W^{1,p}(U)$当且仅当$a<\frac{d-p}{p}$成立。特别地，我们得出$p\geqslant d$时有$u\notin W^{1,p}(U)$. □

例 1.1.4. 令$U=\mathbb{R}^d\setminus\overline{B(\mathbf{0},1)}$, 以及$u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{-a}$ $(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$. 给定$d\in\mathbb{N}^*$和$p\in[1,\infty)$, 我们希望找到 $a>0$ 使得 $u\in W^{1,p}(U)$.

解. 该情况下我们不再需要 $a+1<d$ 来确保经典导数 $\partial_i u$ 也是弱导数，因为 $\partial_i u$ 的奇点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\notin U$. 至于可积性，$|\boldsymbol{x}|^{-(a+1)}\in L^p(U)$ 要求 $(a+1)p>d$，即 $a>\frac{d-p}{p}$；而$|\boldsymbol{x}|^{-a}\in L^p(U)$要求$ap>d$，

即$a > d/p$. 取交集后即得$a > d/p$. □

习题 1.1

习题 1.1.1. 设$f \in W^{1,p}(0,1)$，$1 \leqslant p < +\infty$. 证明：

(1) f 几乎处处等于一个绝对连续函数 $f^* \in L^p(0,1)$.

(2) 当 $p > 1$ 时，我们有 $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^{1-\frac{1}{p}}(\int_0^1 |f'(t)|^p \,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$.

提示：考虑 $f^*(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$，这里 f' 是 f 在 $(0,1)$ 中的弱导数。

习题 1.1.2. 设$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 是 $U = B(\boldsymbol{0},1) \subset \mathbb{R}^d$ 中的一个可数稠密子集，且

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k|^{-a}.$$

求$a \in \mathbb{R}$ 的范围使得 $u \in W^{1,p}(U)$.

习题 1.1.3. 设$\zeta \in C_c^\infty(U)$ 且 $u \in W^{k,p}(U)$. 证明：$\zeta u \in W^{k,p}(U)$ 且经典Leibniz公式成立

$$\partial^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \zeta \, \partial^{\alpha-\beta} u.$$

1.2　Sobolev函数的光滑逼近和基本运算

如果继续根据定义来求弱导数，我们会发现这件事情在技术上相当繁琐。于是我们很自然地会问：是否可以用某种方式用更好的函数（例如光滑函数）逼近Sobolev函数，并将光滑函数的“良好性质”继承给Sobolev函数。事实上，这可以通过附录 C.2 中介绍的磨光来实现。今固定 $k \in \mathbb{N}$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和开集 $U \subset \mathbb{R}^d$. 对$\varepsilon > 0$，我们定义“缩水子集” $U_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in U | \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial U) > \varepsilon\}$.

1.2.1　局部光滑逼近

第一个定理表明对任意$1 \leqslant p < \infty$，$W^{1,p}(U)$函数可以在U内部被光滑函数逼近。

定理 1.2.1 (局部光滑逼近). 设 $f \in W^{k,p}(U)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，在 U_ε 中定义卷积 $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$. 那么对任意 $\varepsilon > 0$都有$f_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$，且当$\varepsilon \to 0$时，$f_\varepsilon$在$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$中收敛到$f$.

证明. 光滑性已在定理 C.2.1(1) 中证明，此处略过。接下来证明逼近性质，关键步骤是验证

$$\partial^\alpha f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \partial^\alpha f \text{ in } U_\varepsilon, \quad \forall |\alpha| \leqslant k.$$

若能证明上式，则据定理C.2.1(4)可得$\partial^\alpha f^\varepsilon \to \partial^\alpha f$ in L^p_{loc}对任意$|\alpha| \leqslant k$都成立，这正是我们要证明的结论。

现在证明关键步骤。今固定 $\varepsilon > 0$和$\boldsymbol{x} \in U_\varepsilon$，计算可得

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \partial^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_U \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (-1)^{|\alpha|} \int_U \partial^\alpha_{\boldsymbol{y}} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

注意，对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in U_\varepsilon$，函数 $\eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$（作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数）属于 $C_c^\infty(U)$.据弱导数的定义可得

$$\int_U \partial^\alpha_{\boldsymbol{y}} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \partial^\alpha_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

于是

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \underbrace{(-1)^{2|\alpha|}}_{=1} \int_U \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \partial^\alpha f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (\eta_\varepsilon * \partial^\alpha f)(\boldsymbol{x}).$$

□

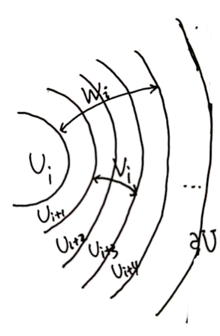
1.2.2　整体光滑逼近

证明定理 1.2.1之后，我们很自然地会问：是否能在整个区域U上逼近给定的Sobolev函数，而不仅仅是在紧子集上？是否可能将光滑逼近延拓到边界？这两个问题答案都是肯定的，并且这种逼近可以通过使用单位分解来实现，但我们需要对 ∂U 的光滑性作进一步假设。

定理 1.2.2 (整体光滑逼近). *假设 U 有界且 $f \in W^{k,p}(U)$ 对某个 $1 \leqslant p < \infty$ 成立。则存在一列函数 $\{f_m\} \subset C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ 使得 $f_m \xrightarrow{W^{k,p}(U)} f$.*

证明. 对 $i \in \mathbb{N}^*$定义$U_i = x \in U | \mathrm{dist}\,(\boldsymbol{x}, \partial U) > 1/i$，那么有 $U = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$, 即开集 U 被一列开子集 U_i 穷竭。在定理1.2.2, 我们已经在每个 U_i 中构造了 u 的光滑逼近，现在我们需要将这些逼近函数“粘合”在一起。问题在于这要对一列光滑函数计算**无限求和**，求和之后所得函数可能不再光滑。为确保光滑性，只需使无限和是**局部有限**的：对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in U$，在该点的小邻域中只有有限多个非零项。这可以通过所谓的**单位分解**来实现。

具体来说，对每个 $i \in \mathbb{N}^*$，我们定义 $V_i := U_{i+3} \backslash \overline{U_{i+1}}$ 和 $W_i := U_{i+4} \backslash \overline{U_i}$，如下图。



令 $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ 是从属于开集族 V_i 的一个光滑单位分解，即

- $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$ 且 $\zeta_i \in C_c^\infty(V_i)$.
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i = 1$ in U.

据定义知，对任意一点$\boldsymbol{x} \in U$，只有有限多个 i 使得 $\zeta_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$. 此外，习题 1.1.3表明，每个$\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ 且 $\mathrm{Spt}\,(\zeta_i f) \subseteq V_i$.

今定义$f^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i f)$为$f$在“薄层”$V_i$中的光滑逼近。固定$\delta > 0$，我们可将参数 ε_i选取得充分小使得 $|f^i - \zeta_i f|_{W^{k,p}(U)} < \frac{\delta}{2^i}$成立。同时我们有 $\mathrm{Spt}\, f^i \subseteq W_i$. 注意引入这样的 W_i 是必要的，因为与磨光核做卷积可能会“撑大”给定函数的支集（从 V_i “膨胀”到 W_i）。

现在定义 $F := \sum\limits_{i=1}^{\infty} f^i$。由局部有限性，求和式中只有有限多个非零项，所以 $F \in C^\infty(U)$。另一方面我们知道 $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i f$, 因此对任意 $V \Subset U$有

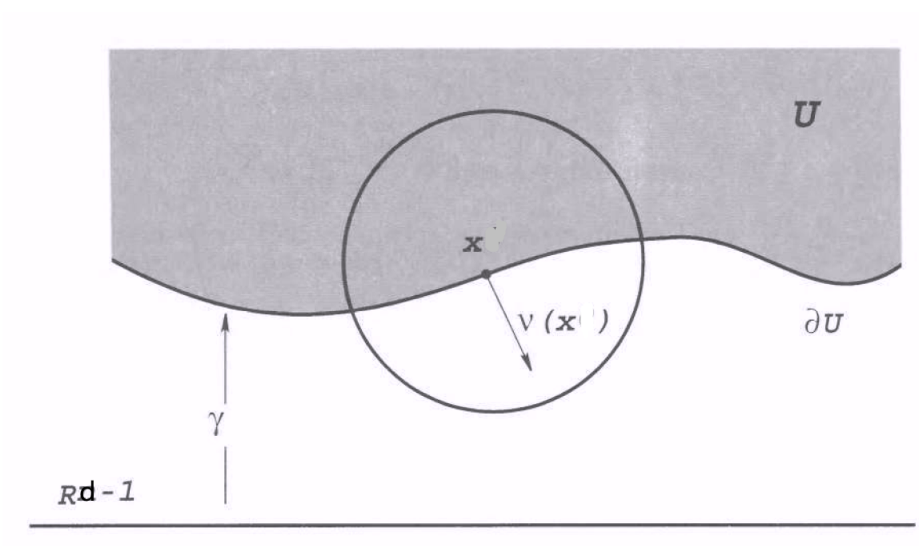
$$\|F - f\|_{W^{k,p}(V)} \leqslant \sum_i \|f^i - \zeta_i f\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_i \|\eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i f) - \zeta_i f\|_{W^{k,p}(U)} < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\delta = \delta.$$

这个 δ 与 V 的选取是无关的，这样我们就得到 $|F - f|_{W^{k,p}(U)} \leqslant \delta$。特别地，令 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$，我们就得到一列满足要求的 f_m。 □

接下来我们证明Sobolev函数的**到边**光滑逼近，这需要假设边界 ∂U 至少是Lipschitz连续的。

定义 1.2.1. 我们称边界 ∂U 是**Lipschitz连续的**，是指对每个点 $\boldsymbol{x} \in \partial U$，存在 $r > 0$ 和一个Lipschitz连续映射 $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$，使得（必要时可旋转和重新定义坐标轴）有

$$U \cap B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} | y_d > \gamma(y_1, \cdots, y_{d-1})\} \cap B(\boldsymbol{x}, r).$$



The boundary of U

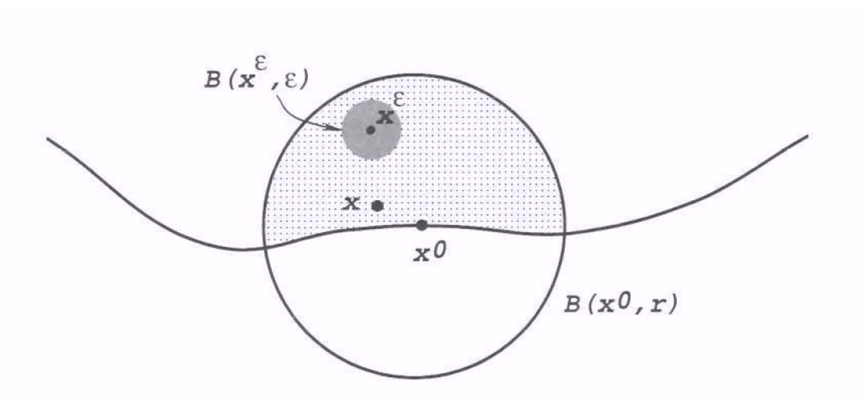
定理 1.2.3 (到边的整体光滑逼近). 设有界开集$U \subset \mathbb{R}^d$具有Lipschitz边界。设 $f \in W^{k,p}(U)$ 对某个 $1 \leqslant p < \infty$ 成立，那么存在函数列 $\{f_m\} \subset C^\infty(\overline{U})$使得$f_m \xrightarrow{W^{k,p}(U)} f$.

证明. 据定理 1.2.2，我们还需在边界∂U附近构造f的光滑逼近。注意U的有界性蕴含了∂U的紧性，因此边界∂U可以被**有限多个**开集覆盖，并记这些开集为 $V_1, \cdots, V_N$。在构造了边界的有限覆盖之后，我们只需用一个开集 $V_0 \subset U$ 覆盖剩下的内部部分. 而V_0中的逼近已在定理1.2.1中证明了，因此只需在 ∂U 的每个开覆盖中构造光滑逼近。

今固定 $\boldsymbol{x}^0 \in \partial U$，存在 $r > 0$ 和Lipschitz连续函数 $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 使得

$$U \cap B(\boldsymbol{x}^0, r) = \{\boldsymbol{x} | x_d > \gamma(x_1, \cdots, x_{d-1})\} \cap B(\boldsymbol{x}^0, r).$$

我们再记 $V = U \cap B(\boldsymbol{x}^0, \frac{r}{2})$.



给定 $\boldsymbol{x} \in V$，我们定义平移点 $\boldsymbol{x}^\varepsilon := \boldsymbol{x} + \lambda\varepsilon e_d$ $(\varepsilon > 0)$. 对固定且适当大的 $\lambda > 0$（例如$\lambda > \mathrm{Lip}(\gamma) + 2$），我们知道球 $B(\boldsymbol{x}^\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U \cap B(\boldsymbol{x}^0, r)$ 对任意$\boldsymbol{x} \in V$和充分小的$\varepsilon > 0$总是成立。接下来我们定义逼近，令$f^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}^\varepsilon)$，并定义逼近函数 $F^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f^\varepsilon$。容易看出 $F^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$，我们现在作出断言

断言. $F^\varepsilon \to f$ in $W^{k,p}(V)$.

证明断言之前，我们先说明一下基本想法。

1. **该类逼近的构造.** 读者可能会问：为什么需要引入“平移点” $\boldsymbol{x}^\varepsilon$ 并选取充分大的 $\lambda > 0$？其原因是如果任取一点$\boldsymbol{x} \in V$，那么它可能非常非常接近边界。若我们直接在这样的$\boldsymbol{x}$的小邻域内磨光函数f，那么卷积可能会撑大支集使得$B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap U^c \neq \emptyset$. 另一方面，边界的Lipschitz连续性保证了边界不会“高度振荡”（Lipschitz连续性隐含了边界图像函数一阶导数的一致上界），因此如果我们选取 $\lambda > \mathrm{Lip}(\gamma) + 2$，那么大小为 $O(\lambda\varepsilon)$ 的平移一定能保证 $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset U$，从而为与磨光核的卷积留出足够的空间。
2. **为什么断言可以推出定理结论？** 事实上，若断言成立，那么只需对 $\overline{U}$ 作单位分解即可完成定理证明。具体来说我们先固定一个 $\delta > 0$。由于∂U紧，我们可以找到**有限多个**点 $\boldsymbol{x}_i^0 \in \partial U$ $(1 \leqslant i \leqslant N$ 和 $r_i > 0$ 使得 $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B(\boldsymbol{x}_i^0, r_i/2)$。记 $V_i := U \cap B(\boldsymbol{x}_i^0, r_i/2)$，那么对每个 i，

存在光滑函数 $f_i\in C^\infty(\overline{V_i})$ 使得

$$\|f_i-f\|_{W^{k,p}(V_i)}<\delta,\quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

在此之后，我们可以找到开集$V_0\Subset U$使得

$$U\subset\bigcup_{i=0}^N V_i,\quad 且\quad \exists f_0\in C^\infty(\overline{V_0}),\ 使得\ \|f_0-f\|_{W^{k,p}(U)}<\delta.$$

至此，我们已经构造了一个由$V_0,B(\boldsymbol{x}_1^0,r_1/2),\cdots,B(\boldsymbol{x}_N^0,r_N/2)$组成的$\overline{U}$的**有限**开覆盖。记$\{\zeta_i\}_{i=0}^N$是从属于这个开覆盖的 $\overline{U}$ 的一个单位分解，并令 $F:=\sum\limits_{i=0}^N\zeta_if_i\in C^\infty(\overline{U})$。据单位分解的定义有 $f=\sum\limits_{i=0}^N\zeta_if$，所以对任何$|\alpha|\leqslant k$可计算

$$\|\partial^\alpha f-\partial^\alpha F\|_{L^p(U)}\leqslant\sum_{i=0}^N\|\partial^\alpha(\zeta_i(f_i-f))\|_{L^p(V_i)}\leqslant C\sum_{i=0}^N\|f_i-f\|_{W^{k,p}(V_i)}\leqslant C(N+1)\delta.$$

最后我们只需证明断言。回忆 F^ε 是 f 平移之后再磨光所得，因此我们应该将 $F^\varepsilon-f$ 拆分为 $F^\varepsilon-f^\varepsilon$ 和 $f^\varepsilon-f$ 来控制误差。简单起见，我们只证明$L^p(U)$ 收敛，$W^{k,p}$范数的收敛同理可得。我们有

$$\|F^\varepsilon-f\|_{L^p(V)}\leqslant\|F^\varepsilon-f^\varepsilon\|_{L^p(V)}+\|f^\varepsilon-f\|_{L^p(V)}.$$

第二项的收敛性即由L^p范数的**平移连续性**得出，因此只需证明第一项收敛到0。据定义有

$$\begin{aligned}F^\varepsilon(\boldsymbol{x})-f^\varepsilon(\boldsymbol{x})=F^\varepsilon(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^\varepsilon)&=\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}\eta(\frac{\mathbf{w}}{\varepsilon})(f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d-\mathbf{w})-f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d))\,\mathrm{d}\mathbf{w}\\&\overset{\boldsymbol{z}:=\frac{\mathbf{w}}{\varepsilon}}{=\!=\!=}\int_{B(\mathbf{0},1)}\eta(\boldsymbol{z})(f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d))\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.\end{aligned}$$

这个积分的 $L_{\boldsymbol{x}}^p$ 范数可以通过积分的Minkowski不等式来控制

$$\begin{aligned}\|F^\varepsilon-f^\varepsilon\|_{L^p(V)}&=\|F^\varepsilon-f^\varepsilon\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(U\cap B(\boldsymbol{x}^0,\frac{r}{2}))}\\&=\Big\|\|\eta(\boldsymbol{z})(f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^1_{\boldsymbol{z}}(B(\mathbf{0},1))}\Big\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(U\cap B(\boldsymbol{x}^0,\frac{r}{2}))}\\(\text{积分Minkowski不等式})\quad&\leqslant\Big\|\|\eta(\boldsymbol{z})(f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x}+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(U\cap B(\boldsymbol{x}^0,\frac{r}{2}))}\Big\|_{L^1_{\boldsymbol{z}}(B(\mathbf{0},1))}\\&=\int_{B(\mathbf{0},1)}|\eta(\boldsymbol{z})|\|f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon\boldsymbol{z})-f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d)\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(V)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，据L^p范数的平移连续性可得被积函数 $\|f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon \boldsymbol{z})-f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(V)}$ 收敛到0. 同时我们有

$$|\eta(\boldsymbol{z})|\|f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon \boldsymbol{z})-f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(V)}\leqslant 2\|f\|_{L^p(U)}\in L^1_{\boldsymbol{z}}(B(\mathbf{0},1)),$$

而控制函数不依赖于 $\boldsymbol{z}$。据控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(\mathbf{0},1)}|\eta(\boldsymbol{z})|\|f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon \boldsymbol{z})-f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(V)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\ =&\int_{B(\mathbf{0},1)}|\eta(\boldsymbol{z})|\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d-\varepsilon \boldsymbol{z})-f(\cdot+\lambda\varepsilon e_d))\|_{L^p_{\boldsymbol{x}}(V)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}=0.\end{aligned}$$

□

1.2.3 Sobolev函数的基本运算法则

有了光滑逼近定理之后，我们希望为Sobolev函数建立基本运算法则。

命题 1.2.4 (Sobolev函数的运算法则). 设$1\leqslant p<\infty$.

(1) 若 $f,g\in W^{1,p}(U)\cap L^\infty(U)$, 则 $fg\in W^{1,p}(U)\cap L^\infty(U)$, 且 $\partial_i(fg)=(\partial_i f)g+f(\partial_i g)$ 对 $i=1,\cdots,d$ 在 U 中几乎处处成立.

(2) 若 $f\in W^{1,p}(U)$, $F\in C^1(\mathbb{R})$, $F'\in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0)=0$, 则 $F(f)\in W^{1,p}(U)$, 且 $\partial_i(F(f))=F'(f)\partial_i f$对$i=1,\cdots,d$在 U 中几乎处处成立。若U在$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue测度有限，则$F(0)=0$不是必要的。

(3) 若$f\in W^{1,p}(U)$, 则$f^+,f^-,|f|\in W^{1,p}(U)$，并且有

$$\partial f^+=\begin{cases}\partial f & \text{a.e. on }\{f>0\}\\ 0 & \text{a.e. on }\{f\leqslant 0\},\end{cases}$$

$$\partial f^-=\begin{cases}0 & \text{a.e. on }\{f\geqslant 0\}\\ -\partial f & \text{a.e. on }\{f<0\},\end{cases}$$

$$\partial|f|=\begin{cases}\partial f & \text{a.e. on }\{f>0\}\\ 0 & \text{a.e. on }\{f=0\}\\ -\partial f & \text{a.e. on }\{f<0\}.\end{cases}$$

特别地，$\partial f=0$ 在 $\{f=0\}$ 上几乎处处成立。

证明. 我们只证明 (1) 和 (3) 中的第一个等式。(2) 的证明留作练习。

对(1)，我们选取$\varphi \in C_c^\infty(U)$以及满足$\mathrm{Spt}\,\varphi \subset V \Subset U$的开集$V$. Let $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，并定义$g_\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$. 那么我们首先有

$$\int_U fg(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V fg(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_V f_\varepsilon g_\varepsilon(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这里我们可以直接验证如何交换极限与积分。事实上，利用Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_V f_\varepsilon g_\varepsilon(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_V fg(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V f_\varepsilon(g_\varepsilon - g)(\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V (f_\varepsilon - f)g\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\leqslant \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)}\underbrace{\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(V)}}_{\leqslant\|f\|_{L^\infty(V)}}\|\partial_i\varphi\|_{L^{p'}(V)} + \|g\|_{L^\infty}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)}\|\partial_i\varphi\|_{L^{p'}(V)} \to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

这里请注意：假设 $f, g \in L^\infty$ 是必要的，而 $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ 的收敛性是定理 C.2.1给出的。

(3) 的证明稍微有点技巧性。给定 $\varepsilon > 0$,我们定义 $F_\varepsilon(r) = (\sqrt{r^2+\varepsilon^2} - \varepsilon)\chi_{r\geqslant 0}$，则可以直接验证$F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ 且 $F_\varepsilon' \in L^\infty(\mathbb{R})$ 关于 ε 一致有界。现在我们对 F_ε 用(2)的结论并分部积分得到

$$\int_U F_\varepsilon(f)\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U F_\varepsilon'(f)\partial_i f\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(U).$$

由于 $f \in W^{1,p}$ 且 $F_\varepsilon(f) \xrightarrow{a.e.} f^+$. 故当 $\varepsilon\to 0$时，据控制收敛定理有

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_U F_\varepsilon'(f)\partial_i f\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U \lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon'(f)\partial_i f\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{U\cap\{f>0\}}\partial_i f\varphi.$$

因此我们得到 ∂f^+ 的表达式，然后使用 $f^- = (-f)^+$ 和 $|f| = f^+ + f^-$ 得到其余结论。 □

习题 1.2

习题 1.2.1. 设 U, V 是开集，$V \Subset U$. 证明：存在 $\zeta\in C^\infty(U)$ 使得 $\zeta|_V = 1$ 且 ζ 在 ∂U 附近为零。

提示：取 $V \Subset W \Subset U$ 并磨光 χ_W。

习题 1.2.2. 假设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 有界且 $U \Subset \bigcup_{i=1}^N V_i$。证明：存在 $\zeta_i \in C^\infty(U)$，$i = 1,\cdots,N$，使得

$$0\leqslant\zeta_i\leqslant 1,\ \mathrm{Spt}\,\zeta_i\subset V_i,\ \sum_{i=1}^N\zeta_i = 1 \text{ in } U.$$

提示：对每个 i，用习题 1.2.1 的结论构造 $\varphi_i \in C^\infty(U)$ 满足 $\varphi_i = 1$ 在 $\overline{W_i}$，$W_i \Subset V_i$ 且 $\mathrm{Spt}\,\varphi_i\subset V_i$。然后令 $\zeta_1 = \varphi_1$，$\zeta_2 = \varphi_2(1-\varphi_1),\cdots,\zeta_N = \varphi_N(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_{N-1})$. 注意这不是唯一的选择。

习题 1.2.3. 证明命题 1.2.4(2).

习题 1.2.4. 证明：$\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 \leqslant C\|u\|_{L^2(U)}\|\partial^2 u\|_{L^2(U)}$ 对任何 $u \in C_c^\infty(U)$ 成立。然后将此结论推广到 $u \in H_0^1(U) \cap H^2(U)$，这里需假设 U 有界且 ∂U 光滑。

习题 1.2.5. 设 $u \in C_c^\infty(U)$，证明如下两个不等式。

(1) $\|\nabla u\|_{L^p(U)} \leqslant C\|u\|_{L^p(U)}^{\frac{1}{2}}\|\partial^2 u\|_{L^p(U)}^{\frac{1}{2}}$ for $2 \leqslant p < \infty$.

(2) $\|\nabla u\|_{L^{2p}(U)} \leqslant C\|u\|_{L^\infty(U)}^{\frac{1}{2}}\|\partial^2 u\|_{L^p(U)}^{\frac{1}{2}}$ for $1 \leqslant p < \infty$.

提示：对指标为 $(p, p, \frac{p}{p-2})$ 使用三元Hölder不等式。

习题 1.2.6. 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是**连通**开集且 $f \in W^{1,p}(U)$ 满足 $\nabla f = \mathbf{0}$ 在 U 中几乎处处成立。证明：f 几乎处处等于一个常值函数。

提示：本题**不能使用Poincaré不等式**来证明，因为该题结论在Poincaré不等式的证明中要用到。在 $V \Subset U$ 中考虑 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，并证明对充分小的 $\varepsilon > 0$，$f_\varepsilon = C_\varepsilon$ 在 V 中几乎处处成立。然后使用定理 C.2.1 来证明 $\|f_\varepsilon\|_{L^p}$ 关于 ε 一致有界，因此 $\{C_\varepsilon\}$ 也一致有界，进而$\{f_\varepsilon\}$ 的一个子列收敛到一个常数。

1.3 迹定理和延拓定理

若 $u \in C(\overline{U})$，那么我们可以明确定义 u 在边界 ∂U 上的逐点取值。然而如果 $u \in W^{1,p}(U)$ 仅仅是一个Sobolev函数，那么我们可以修改它在零测集上的值。特别地，边界∂U的d维Lebesgue测度是零，因此我们需要讨论如何“指定”Sobolev函数的边值。本节我们假设 $1 \leqslant p < \infty$.

定理 1.3.1 (迹定理). 设$1 \leqslant p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开集，且 ∂U 是Lipschitz连续的。那么

(1) 存在有界线性算子 $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U; \mathrm{d}S)$ 使得在 ∂U 上 $\mathrm{Tr} f = f$ 对所有 $f \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ 成立，且
$$\|\mathrm{Tr} f\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$$
对每个 $f \in W^{1,p}(U)$ 成立。其中常数 $C > 0$ 仅依赖于 p, U. 这里 $\mathrm{d}S = \mathcal{H}^{d-1}|_{\partial U}$ 是 ∂U 上的 $(d-1)$ 维Hausdorff测度（也解释为曲面测度）。

(2) （分部积分）对任意 $\boldsymbol{\phi} \in C^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ 和 $f \in W^{1,p}(U)$，有
$$\int_U f \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U \nabla f \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial U} (\boldsymbol{\phi} \cdot N) \mathrm{Tr} f \, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},$$
其中 N 表示 ∂U 的单位外法向量。

注记 1.3.1. 函数 $\mathrm{Tr} f$ 称为 f 在 ∂U 上的**迹**，它在 $\mathcal{H}^{d-1}|_{\partial U}$ 零测集意义下是唯一确定的，$\mathrm{Tr} f$即

可认为是 f 在 ∂U 上的“边值”。事实上它进一步满足

$$\lim_{r\to 0}\fint_{U\cap B(\boldsymbol{x},r)}|f(\boldsymbol{y})-\mathrm{Tr}\, f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0,\quad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. } \boldsymbol{x}\in\partial U.$$

进而

$$\mathrm{Tr}\, f(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to 0}\fint_{U\cap B(\boldsymbol{x},r)}f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

证明. 首先，我们假设 $f\in C^1(\overline{U})$ 并先考虑 $p=1$ 的情况，即证明 $\int_{\partial U}|f|\,\mathrm{d}S\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 由于 ∂U 是Lipschitz连续的，对任意 $\boldsymbol{x}^0\in\partial U$，我们可以找到 $r>0$ 和一个Lipschitz连续函数 $\gamma:\mathbb{R}^{d-1}\to\mathbb{R}$，使得（在必要时旋转以及重新定义坐标轴后）

$$U\cap B(\boldsymbol{x}^0,r)=\{\boldsymbol{x}|x_d>\gamma(x_1,\cdots,x_{d-1})\}\cap B(\boldsymbol{x}^0,r).$$

记$B:=B(\boldsymbol{x}^0,r)$ 并暂时假设 f 在 $U\backslash B$ 中恒为零，即我们先把f在 ∂U 和 B 的交集附近作“ 局部化”。此时∂U 的单位外法向量 N满足

$$-e_d\cdot N=\cos\langle -e_d,N\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\langle -e_d,N\rangle}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{Lip}\,\gamma)^2}}\quad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. on } B\cap\partial U.$$

现在固定 $\varepsilon>0$ 并定义 $\beta_\varepsilon(t)=\sqrt{t^2+\varepsilon^2}-\varepsilon$. 据Gauss-Green定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}&=\int_{B\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\leqslant C\int_{B\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)(-e_d\cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\&\leqslant -C\int_{B\cap U}\partial_{x_d}(\beta_\varepsilon(f))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_{B\cap U}|\beta_\varepsilon'(f)||\nabla f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这里 $C>0$ 是由 $(-e_d\cdot N)$ 的估计产生的正常数，并且我们也使用了 $|\beta_\varepsilon'|\leqslant 1$ 这一事实。现在令 $\varepsilon\to 0$并使用命题 1.2.4(2)得

$$\int_{\partial U}|f|\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\leqslant C\int_U|\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.3.1}$$

注意，引进$\beta_\varepsilon(f)\to|f|$的逼近过程是必要的，因为 $f\in C^1$ 并不意味着 $|f|$ 处处连续可微，而 $\beta_\varepsilon(f)$ 恰是 $|f|$ 的 C^1 逼近。

接下来我们想将(1.3.1)推广到f在$U\backslash B$中不恒为零的情况。事实上我们可以用有限多个这样的球 $B(\boldsymbol{x}_i^0,r_i)$, $i=1,\cdots,m$覆盖∂U（注意∂U是紧的），然后用定理 1.2.3 证明中的单位分解来实现，从而得到

$$\int_{\partial U}|f|\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\leqslant C\int_U|\nabla f|+|f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \forall f\in C^1(\overline{U}). \tag{1.3.2}$$

具体来说，对 $1 \leqslant i \leqslant m$我们记 $B_i := B(\boldsymbol{x}_i^0, r_i)$，定义$C_i = \sqrt{1+(\mathrm{Lip}\,\gamma_i)^2}$，并记$C = \max\{C_i\}$. 设 $V, B_1, \cdots, B_m$ 是 $\overline{U}$ 的一个有限开覆盖，其单位分解为 $\zeta_0, \zeta_1, \cdots \zeta_m$. 模仿上述证明可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} \beta_\varepsilon(f)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} &\leqslant C\sum_{i=1}^m \int_{B_i\cap\partial U} \zeta_i\beta_\varepsilon(f)(-e_d\cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ &= C\sum_{i=1}^m \int_{B_i\cap U} \partial_{x_d}(\zeta_i\beta_\varepsilon(f))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= C\sum_{i=1}^m \int_{B_i\cap U} (\partial_{x_d}\zeta_i)\beta_\varepsilon(f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{B_i\cap U} \zeta_i\partial_{x_d}(\beta_\varepsilon(f))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\leqslant C'\int_U |\beta_\varepsilon(f)| + |\beta_\varepsilon'(f)||\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \exists C'>0.\end{aligned}$$

然后令 $\varepsilon \to 0$ 即可导出 (1.3.2).

接下来我们将此结论推广到一般的 $p \in (1,\infty)$. 对给定的$p > 1$，我们在 (1.3.2) 中用$|f|^p$替换$|f|$，同理可得

$$\int_{\partial U} |f|^p\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant C\int_U |f|^p + |\nabla f||f|^{p-1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在Young不等式$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$中取$a = |\nabla f|, b = |f|^{p-1}$ 可得

$$\int_{\partial U} |f|^p\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant C'\int_U |f|^p + |\nabla f|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall f \in C^1(\overline{U}),$$

其中这个 $C' > 0$ 依赖 p. 因此如果我们记 $\mathrm{Tr}\, f := f|\partial U$，那么存在依赖于$p$的常数$C > 0$使得$|\mathrm{Tr}\, f|L^p(\partial U) \leqslant C|f|_{W^{1,p}(U)}$ 对全体 $f \in C^1(\overline{U})$ 成立。同样容易验证 $f \in C^1(\overline{U})$ 时分部积分公式(2)成立。

最后证明对 $f \in W^{1,p}(U)$ 有相同的结论。给定这样一个f，据定理 1.2.3知存在函数 $f_n \in C^\infty(\overline{U})$ 在 $W^{1,p}(U)$ 中收敛到 f。那么我们有

$$\|\mathrm{Tr}\, f_k - \mathrm{Tr}\, f_l\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|f_k - f_l\|_{W^{1,p}(U)}$$

这表明 $\{\mathrm{Tr}\, f_n\}$ 是 $L^p(\partial U)$ 中的Cauchy列，从而存在极限 $\mathrm{Tr}\, f \in L^p(\partial U)$，定义为$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, f_n$. 而且这个极限不依赖于 f 的光滑逼近的选取。现在给定一个 $f \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$，我们也可以使用到边全的整体光滑逼近来定义 $\mathrm{Tr}\, f = f|_{\partial U}$. 由于 $W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ 在 $W^{1,p}(U)$ 中稠密，我们可以将算子 Tr（通过B.L.T.定理）延拓为一个从 $W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ 的有界线性算子。至于分部积分公式，我们也可以使用到边的整体光滑逼近定理来完成证明，此处不再重复。 □

接下来我们证明一个关于迹为零函数的进一步结果。这个结论相当重要，但证明的技巧性过

强，初学者可以跳过。

定理 1.3.2 (零迹定理). 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开集，∂U 是Lipschitz连续的，且 $f \in W^{1,p}(U)$。则

$$f \in W_0^{1,p}(U) \text{ 当且仅当 } \operatorname{Tr} f = 0 \text{ on } \partial U.$$

证明. “仅当”部分容易证明，实际上它只是光滑逼近的一个简单推论。给定 $f \in W_0^{1,p}(U)$，存在一列 $\{f_n\} \subset C_c^\infty(U)$ 使得 $f_n \xrightarrow{W^{1,p}(U)} f$. 由于 $\operatorname{Tr} f_n = 0$ 且 $\operatorname{Tr}: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ 是有界线性算子，我们得到$\operatorname{Tr} f$在∂U上恒为零。

反之则非常困难。给定 $f \in W^{1,p}(U)$ 且 $\operatorname{Tr} f|_{\partial U} = 0$，我们需要构造一列 $\{f_n\} \subset C_c^\infty(U)$ 使得 $\|f_n - f\|_{W^{k,p}(U)} \to 0$. 据附录 C.2 的光滑逼近知，构造一列 C_c^∞ 函数在 $L^p(U)$ 范数下逼近一个Sobolev函数是容易的。然而我们还需要确保一阶导数的收敛性，这步并非平凡：因为**整体光滑逼近定理**并不保证**光滑逼近函数的边值**为零。为了**同时得到逼近的收敛性和光滑逼近的零边值失**，我们可以在边界附近的一个正的距离里面把f“截断”（但截断距离最终收敛到0），然后磨光截断后的逼近函数。

为了技术上的简便，我们假设 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$具有紧支集，且$\operatorname{Tr} f|_{\partial \mathbb{R}_+^d} = 0$. 这可以通过对 ∂U 作单位分解并拉直 γ 的图像来实现，这个步骤只要求∂U的Lipschitz连续性。

第一步：截断的构造. 我们定义一个光滑截断函数 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$：

$$\zeta(x_d) = \begin{cases} 1 & x_d \in [0,1], \\ \text{递减, 取值于}[0,1] & x_d \in [1,2], \\ 0 & x_d \in [2,\infty). \end{cases}$$

然后对每个 $m \in \mathbb{N}^*$，我们在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^d$处定义 $\zeta_m(\boldsymbol{x}_d) := \zeta(m x_d)$以及

$$w_m(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x})(1 - \zeta_m(\boldsymbol{x})).$$

换言之，w_m是f在$\mathbb{R}^{d-1} \times [\frac{1}{m}, \infty)$上的光滑截断，并在 $\mathbb{R}^{d-1} \times [\frac{2}{m}, \infty)$上与$f$相等，而且容易看出$\|w_m - f\|_{L^p(U)} \to 0$.

第二步：一阶导数的收敛性.直接计算可得

$$\partial_{x_d} w_m = \partial_{x_d} f(1 - \zeta_m(\boldsymbol{x})) - m f(\boldsymbol{x})\zeta'(x_d) \quad \text{and} \quad \partial_{x_i} w_m = \partial_{x_i} f(\boldsymbol{x})(1 - \zeta_m(\boldsymbol{x})) \ \ 1 \leqslant i \leqslant d-1.$$

因此可算得

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} |\nabla w_m - \nabla f|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}_+^d} |\zeta_m|^p |\nabla f|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + C m^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x}', x_d)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}x_d. \tag{1.3.3}$$

再据 ζ_m 的定义和控制收敛定理，容易看出第一项积分收敛到0

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} |\zeta_m|^p |\nabla f|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty. \tag{1.3.4}$$

关于第二项，注意到法向分量 $x_d \in [0, \frac{2}{m}]$ 非常接近边界，所以我们应该将 $f(\boldsymbol{x}', x_d)$ 表示为 f 的边界值与 $\partial_{x_d} f$ 的积分之和，即类似于微积分基本定理的形式。然而这里我们只知道 f 是一个Sobolev函数，而微积分基本定理只对绝对连续函数有效，所以我们必须对f构造一个合适的逼近。因为$\mathrm{Tr}\, f|_{\partial\mathbb{R}^d_+} = 0$，所以存在一列函数 $\{u_k\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 使得 $u_k \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)} f$，从而由迹定理得 $\mathrm{Tr}\, u_k = u_k|_{x_d=0} \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} 0$. 对每个 u_k我们有 $u_k(\boldsymbol{x}', x_d) = u_k(\boldsymbol{x}', 0) + \int_0^{x_d} \partial_{x_d} u_k(\boldsymbol{x}', t)\,\mathrm{d}t$。因此便有

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_k(\boldsymbol{x}', x_d)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \leqslant \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_k(\boldsymbol{x}', 0)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^{x_d} 1 \cdot |\partial_{x_d} u_k(\boldsymbol{x}', t)| \,\mathrm{d}x \right)^p \mathrm{d}t,$$

i其中第一项当 $k \to \infty$ 时收敛到0，这是因为 $\mathrm{Tr}\, u_k = u_k|_{x_d=0} \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} 0$. 对于第二项，我们使用积分Minkowski不等式和Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^{x_d} 1 \cdot |\partial_{x_d} u_k(\boldsymbol{x}', t)| \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right)^p \mathrm{d}t = \left\| \|\partial_{x_d} u_k\|_{L^1_{x_d}(0,x_m)} \right\|^p_{L^p_{\boldsymbol{x}'}(\mathbb{R}^{d-1})} \\
\leqslant & \left\| \|\partial_{x_d} u_k\|_{L^p_{\boldsymbol{x}'}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|^p_{L^1_{x_d}(0,x_m)} = \left[\int_0^{x_d} 1 \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\partial_{x_d} u_k(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right)^{\frac{1}{p}}}_{\text{作为 } t \text{ 的函数}} \mathrm{d}t \right]^p \\
\leqslant & \left[\left(\int_0^{x_d} 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_0^{x_d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\partial_{x_d} u_k(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right)^{\frac{1}{p}\cdot p} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
\leqslant & C x_d^{p-1} \int_0^{x_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla u_k(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

然后取$k \to \infty$，我们得到一个类似于微积分基本定理的估计

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x}', x_d)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \leqslant C x_d^{p-1} \int_0^{x_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla f(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t, \quad \text{a.e. } x_d > 0. \tag{1.3.5}$$

现在将 (1.3.5) 代入 (1.3.3) 的第二项就可得到

$$
\begin{aligned}
& m^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x}', x_d)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}x_d \leqslant C m^p \int_0^{\frac{2}{m}} x_d^{p-1} \left(\int_0^{x_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla f(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_d \\
\leqslant & C m^p \left(\int_0^{\frac{2}{m}} x_d^{p-1} \,\mathrm{d}x_d \right) \cdot \sup_{x_d \in [0, \frac{2}{m}]} \int_0^{x_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla f(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t \\
= & C m^p \cdot \frac{2^p}{m^p p} \cdot \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla f(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t = C_p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla f(\boldsymbol{x}', t)|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}t. \qquad (1.3.6)
\end{aligned}
$$

当$m \to \infty$时右边收敛到0，所以(1.3.3) 的右边收敛到0，即 $\nabla w_m \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \nabla f$. 这样我们就证明了$w_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)} f$.

第三步：截断逼近函数的磨光. 序列 $\{w_m\}$ 可以在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ 范数下逼近 f，但这些函数可能不属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^+_d)$. 此时注意到 w_m 在 $\mathbb{R}^{d-1} \in [0, \frac{1}{m}]$ 中恒为零，因此我们有足够的空间在 x_d 方向磨光每个 w_m，并通过对角线法取一个子列。具体来说，对给定的 $k \in \mathbb{N}^*$，第二步表明存在一个子列 w_{m_k} 满足

$$\|w_{m_k} - f\|_{W^{1,p}(U)} < \frac{1}{k}.$$

于是对每个k我们可以定义$w_{m_k}^n := \eta_{\frac{1}{2mn}} * w_{m_k}$，其中$\eta(x_d)$ 是 x_d分量的卷积光滑子。我们知道$w_{m_k}^n$紧支于$\mathbb{R}^{d-1} \times [\frac{1}{m}(1 - \frac{1}{2n}), \infty)$中。据定理 1.2.1可知，对每个$j \in \mathbb{N}^*$我们都可以找到 n_j（递增到∞）使得

$$\|w_{m_k}^{n_j} - w_{m_k}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)} < \frac{1}{j}.$$

因此令 $f_k := w_{m_k}^{n_k} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，我们就得到$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)} \to 0$. □

我们以Sobolev延拓定理结束本节。它的结论很容易理解，但证明技术相当复杂。特别地，对于不同的可微性指标 $k \in \mathbb{N}^*$，证明过程中的构造不同。因此我们只列出结论并省略证明。

定理 1.3.3 (Sobolev延拓定理). 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$U \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开集，且 $\partial U \in C^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). 设 $G \subset \mathbb{R}^d$ 是开集且满足 $U \Subset G$，那么存在依赖于 d, k, U, G的常数 $C > 0$以及有界线性映射 $\mathbf{E} : W^{k,p}(U) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$，使得对任何 $f \in W^{k,p}(U)$，有

(1) $\mathbf{E}f = f$ a.e. in U.

(2) $\operatorname{Spt} \mathbf{E}f \Subset G$.

(3) $\|\mathbf{E}f\|_{W^{k,p}(G)} \leqslant C\|f\|_{W^{k,p}(U)}$.

习题 1.3

习题 1.3.1. 设$U \subset \mathbb{R}^d$是具有Lipschitz边界的有界开集。证明：不存在有界线性算子 $\mathrm{Tr}\ : L^p(U) \to L^p(\partial U)$ 使得$\mathrm{Tr}\, f = f|_{\partial U}$对全体$f \in C(\overline{U}) \cap L^p(U)$都成立。

提示：构造序列$\{f_m\}$满足$\|f_m\|_{L^p(U)} \to 0$，但在边界∂U上恒有$\mathrm{Tr}\, f_m \equiv 1$.

习题 1.3.2. 设$f_\pm \in H^1(\mathbb{R}^d_\pm)$满足$\mathrm{Tr}\, f_- = \mathrm{Tr}\, f_+$在$\mathbb{R}^{d-1} \times \{x_d = 0\}$上成立。定义$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$为

$$f = \begin{cases} f_+ & x_d > 0 \\ f_- & x_d < 0 \end{cases}.$$

证明：$f \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

习题 1.3.3. 设$f \in H^1_0(\mathbb{R}^d_+) \cap H^2(\mathbb{R}^d_+)$. 证明：对任意$1 \leqslant i \leqslant d-1$, 偏导数$\partial_{x_i} f$也属于$H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$.

1.4 Sobolev嵌入定理

本节讨论Sobolev空间与常见函数空间的包含关系，尤其是讨论 L^p 空间和 $C^{k,\alpha}$ 空间。特别地，我们主要考虑$W^{1,p}(U)$的嵌入，因为如果$k \geqslant 2$，我们就可对k归纳来找到正确的嵌入空间。

1.4.1 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式

第一种情况是$1 \leqslant p < d$。我们想问是否可以建立如下形式的估计：

$$\text{是否存在} C > 0,\ q \geqslant 1 \text{使得} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)?$$

关键之处在于这个常数C不应依赖函数u，所以我们可以从该不等式的**伸缩不变性 (scaling invariance)**出发来考虑。也就是说给定$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \lambda > 0$，我们定义伸缩后的函数$f_\lambda(\boldsymbol{x}) := f(\lambda \boldsymbol{x})$. 对$f_\lambda$，我们仍然希望它满足类似的不等式，且**不等式的常数C不依赖伸缩系数λ**. 直接计算得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_\lambda(\boldsymbol{x})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda \boldsymbol{x})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{y})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f_\lambda|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(\lambda \boldsymbol{x})|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda^{p-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(\boldsymbol{y})|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

把它们代回f_λ的不等式可得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \lambda^{1-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

因此我们要求$1-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})=0$, 否则令$\lambda\to 0$或$\infty$就会得到矛盾。这个指标$q$满足 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{d}$, 即$q=\frac{dp}{d-p}$. 现在我们记它为

$$p^*:=\frac{dp}{d-p}.$$

定理 1.4.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式). 设 $1\leqslant p<d$，则存在仅依赖p,d的常数$C>0$使得

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\quad \forall f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

证明. 据定理1.2.1, 我们不妨设$f\in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ (需注意的是此时常数 C 不应当依赖 $\mathrm{Spt}\, f$ 的大小). 而要证的结论相当于是用f的导数控制f自身，那么一个自然的想法就是利用微积分基本定理去计算f. 为了简便，我们首先考虑$p=1$的情况，此时$1^*=\frac{d}{d-1}$.

$$\forall i=1,\cdots,d,\quad f(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x_i}\partial_{x_i}f(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i,$$

于是

$$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i.$$

然后有

$$|f(\boldsymbol{x})|^{\frac{d}{d-1}}=(|f(\boldsymbol{x})|^d)^{\frac{1}{d-1}}\leqslant\prod_{i=1}^d\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

注意乘积中的第 i 项不依赖于 x_i. 现在对 x_1 积分得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^{1^*}\,\mathrm{d}x_1\\ \leqslant&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(t_1,x_2\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i.\right)^{\frac{1}{d-1}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=2}^d\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{d-1}}\,\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

用$(d-1)$元的Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^{1^*}\,\mathrm{d}x_1\\ \leqslant&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(t_1,x_2\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{d-1}}\cdot\left(\prod_{i=2}^d\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{d-1}}.\end{aligned}$$

接下来，对 x_2 积分并使用Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^{1^*}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\ \leqslant&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,t_2,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t_2\right)^{\frac{1}{d-1}}\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(t_1,x_2,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{d-1}}\\ &\times\prod_{i=3}^{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{d-1}}.\end{aligned}$$

重复此步骤，最终得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{1^*}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant&\prod_{i=1}^{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla f|(x_1,\cdots,t_i,\cdots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\cdots\,\mathrm{d}t_i\cdots\,\mathrm{d}x_d\right)^{\frac{1}{d-1}}\\ =&\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{d}{d-1}},\end{aligned}$$

这正是 $p=1$ 时的GNS不等式

$$\|f\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)}\leqslant\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

对于 $1<p<d$, 我们用 $g=|f|^\gamma$ 代替 f，其中 $\gamma>1$ 待定。此时我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{\frac{\gamma d}{d-1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{d-1}{d}}&\leqslant\gamma\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{\gamma-1}|\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\leqslant\gamma\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{(\gamma-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\quad p'=\frac{p}{p-1}.\end{aligned}$$

为了“凑出”消去结构，我们选取 γ 使得它满足

$$\frac{\gamma d}{d-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}\Rightarrow\gamma=\frac{p(d-1)}{d-p}\Rightarrow\frac{\gamma d}{d-1}=p^*=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}.$$

这样我们就得到了最终要证的结论

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{p^*}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{d-1}{d}}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p'}}\Rightarrow\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

□

定理 1.4.2 (Sobolev嵌入定理). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是具有Lipschitz边界的有界开集，且 $1\leqslant p<d$.

(1) 任意$f \in W^{1,p}(U)$ 都属于 $L^{p*}(U)$，并有估计 $\|f\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$，其中常数$C > 0$仅依赖$d, p, U$.
(2) 任意$f \in W_0^{1,p}(U)$都满足估计$\|f\|_{L^q(U)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(U)}$对全体$q \in [1, p^*]$成立，其中常数$C > 0$仅依赖$d, p, q, U$.

根据第二个估计，在 U 有界时，$W_0^{1,p}(U)$ 上的范数 $\|\nabla f\|_{L^p(U)}$ 等价于 $\|f\|_{W^{1,p}(U)}$.

证明. 由于 ∂U 是Lipschitz的，我们可以将 $f \in W^{1,p}(U)$ 延拓为 $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$，它满足$\bar{f} = f$在$U$中几乎处处成立，$\operatorname{Spt}\bar{f}$ 是紧的，以及不等式 $\|\bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$. 由于 $\bar{f}$ 紧支，故存在一列函数 $\{u_m\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $u_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \bar{f}$. 据定理 1.4.1，我们得到

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow u_m \to \bar{f} \text{ in } L^{p^*}(\mathbb{R}^d).$$

又由GNS不等式可得 $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. 令$m \to \infty$即得

$$\|\bar{f}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\nabla \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

这给出了(1)的证明。对(2), 我们可以类似地将f在 $\mathbb{R}^d \backslash \overline{U}$作零延拓，再利用$U$的有界性和Hölder's不等式推出 $\|f\|_{L^q(U)} \leqslant \|1\|_{L^r(U)}\|f\|_{L^{p^*}(U)}$, 其中 $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q^*}$. □

注记 1.4.1. 当 p 单调上升地趋近于 d 时，Sobolev 共轭指标 $p^* = \frac{dp}{d-p} \to +\infty$. 我们期望 $W^{1,d}$ 函数属于 L^∞，但当 $d \geqslant 2$ 时这不成立。取而代之的是$W^{1,d}$嵌入到一个 BMO 型空间，见习题 1.4.10.

定理 1.4.2(2) 的结论也表明：对任意 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$W_0^{1,p}$ 函数满足如下 Poincaré 不等式。

推论 1.4.3. 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 有界且 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，则存在常数 $C > 0$使得

$$\|f\|_{L^p(U)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(U)}$$

对所有 $f \in W_0^{1,p}(U)$ 成立。

1.4.2 紧嵌入

我们已经看到 GNS 不等式表明对 $1 \leqslant p < d$ 和 $p^* = \frac{dp}{d-p}$ 有嵌入关系 $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$. 然而有界性仅意味着弱-*收敛（自反空间中是弱收敛）。若要得到强收敛，我们就得要求嵌入映射是紧算子。本节将证明：当$1 \leqslant q < p^*$时，函数空间 $W^{1,p}(U)$ **紧**嵌入到 $L^q(U)$ 中。

定义 1.4.1 (紧嵌入). 设 X, Y 是两个 Banach 空间，且满足 $X \subset Y$。我们称 X **紧嵌入到 (compactly embedded into)** Y 中，记为 $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$，是指它们满足如下条件

- (有界性) 存在常数 $C > 0$ 使得 $|f|_Y \leqslant C|f|_X$对任意$f \in X$成立。
- (紧性) X 中的每个有界序列在 Y 中是预紧的，即在 Y 中具有 **收敛子列**。

定理 1.4.4 (Rellich-Kondrachov). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是具有 Lipschitz 边界 ∂U 的有界开集。设 $1\leqslant p<d$，则对全体 $1\leqslant q<p^*$有 $W^{1,p}(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U)$.

证明. 嵌入关系由 GNS 不等式和 $\mathcal{L}^d(U)<\infty$ 保证，只需证明紧性。设$\{f_m\}$在 $W^{1,p}(U)$ 中一致有界，即$\sup\limits_m\|f_m\|_{W^{1,p}(U)}\leqslant M$. 此时我们需要构造一个在 $L^q(U)$ 中收敛的子序列 $\{f_{m_k}\}$. 而“构造紧性”的一个直接途径是用 Arzelà-Ascoli 引理，它表明当 U 有界时，一致有界且等度连续的函数列在 $L^\infty(U)$ 范数下必有收敛子列。由于 $\mathcal{L}^d(U)<\infty$ 时 $L^\infty(U)\subset L^q(U)$，我们期望得到在 $L^q(U)$ 中的强收敛。

第一步：光滑化. 我们需要磨光f_m才能使用 Arzelà-Ascoli 引理。据 Sobolev 延拓定理（定理 1.3.3），我们可以假设 $f_m\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 且在某个有界开集 $V\subset\mathbb{R}^d$ 中具有紧支集。同时我们假设 $\sup\limits_m\|f_m\|_{W^{1,p}(V)}<\infty$.

今给定 $\varepsilon>0$并定义 $f_m^\varepsilon=\eta_\varepsilon*f_m$. 我们希望证明 $\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^q(V)}\to0$ 关于m**一致地**成立。事实上，若f_m 是 C^1 的，则据微积分基本定理有

$$\begin{aligned}|f_m^\varepsilon-f_m|&\leqslant\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})|f_m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f_m(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\&\leqslant\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_m(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{y})\right|\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\&\leqslant\int_0^1\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}|\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot|\nabla f_m(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

取 $L^1(V)$ 范数并利用 Tonelli 引理，我们得到

$$\begin{aligned}\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^1(V)}&\leqslant\int_0^1\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}|\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\|\nabla f_m(\cdot-t\boldsymbol{y})\|_{L^1(V)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\|\nabla f_m\|_{L^1(V)}\int_{B(0,\varepsilon)}|\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})|\cdot|\boldsymbol{y}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\varepsilon\|\nabla f_m\|_{L^1(V)}\\&\leqslant\varepsilon\|1\|_{L^{p'}(V)}\|\nabla f_m\|_{L^p(V)}=C\varepsilon\|\nabla f_m\|_{L^p(V)}\leqslant CM\varepsilon.\end{aligned}$$

利用光滑逼近（定理 1.2.1），该不等式对 $f_m\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 也成立。现在我们将 $L^1(V)$ 替换为 $L^q(V)$，并设 $\theta\in(0,1)$ 满足 $\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{p^*}=\frac{1}{q}$，则由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^q(V)}&\leqslant\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^1(V)}^\theta\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}\leqslant C(M\varepsilon)^\theta\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}\\&\leqslant C(M\varepsilon)^\theta(\|f_m^\varepsilon\|_{L^{p^*}(V)}+\|f_m\|_{L^{p^*}(V)})^{1-\theta}\leqslant C'\varepsilon^\theta,\end{aligned}$$

其中我们利用了由GNS不等式得到的 $\sup\limits_m\|f_m\|_{L^{p^*}(V)}<\infty$. 因此给定任意 $\delta>0$，当 $\varepsilon\to0$ 时，我们有（关于 m 一致的）收敛 $\|f_m^\varepsilon-f_m\|_{L^q(V)}<\delta$.

第二步：对于固定的 $\varepsilon>0$，证明$\{f_m^\varepsilon\}$ 的（关于 m 一致，但不关于ε一致！）有界性. 这可直接由Hölder不等式和卷积光滑化的定义证得

$$
\begin{aligned}
|f_m^\varepsilon(\boldsymbol{x})| &\leqslant \int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|f_m(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}\|f_m\|_{L^1(V)} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-d}\|f_m\|_{L^q(V)} \leqslant C'\varepsilon^{-d} < \infty.
\end{aligned}
$$

第三步：对固定的$\varepsilon>0$证明$\{f_m^\varepsilon\}$的等度连续性. 再次由定义得到

$$
|\nabla f_m^\varepsilon(\boldsymbol{x})| \leqslant \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}\|f_m\|_{L^1(V)} \leqslant C\varepsilon^{-d-1} < \infty.
$$

现在据 Arzelà-Ascoli 引理，对每个固定的$\varepsilon>0$都存在子列 $\{f_{m_k}^\varepsilon\}$ 在 $L^\infty(V)$ 范数下收敛，因此

$$
\limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_k}^\varepsilon - f_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \leqslant \limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_k}^\varepsilon - f_{m_l}^\varepsilon\|_{L^\infty(V)}\|1\|_{L^q(V)} = 0.
$$

第四步：原序列的强收敛。 现在我们需要结合第一步和 $\{f_m^\varepsilon\}$ 的收敛性来构造 $\{f_m\}$ 的一个收敛子列，这可通过标准的对角线法完成。给定 $\delta>0$ 和充分大的 $k,l\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$
\begin{aligned}
\|f_{m_k}-f_{m_l}\|_{L^q(V)} &\leqslant \|f_{m_k}-f_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} + \|f_{m_k}^\varepsilon - f_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)} + \|f_{m_l}^\varepsilon - f_{m_l}\|_{L^q(V)} \\
&\leqslant 2\delta + \|f_{m_k}^\varepsilon - f_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)}.
\end{aligned}
$$

注意我们不能直接对 $\delta\to 0$ 和$\limsup\limits_{k,l}$ 同时取极限，这是因为**第三步中子列的选取可能随着$\varepsilon>0$取值的变化而变化**。因此我们必须在这里使用对角线法。具体地，取 $\delta_1=1$，由第一步和第三步知我们可以找到一个小的 $\varepsilon_1>0$ 和一个子序列 $\{f_{m_{k,(1)}}\}$ 使得

$$
\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_1,\quad \limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_{k,(1)}}^\varepsilon - f_{m_{l,(1)}}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0,
$$

于是

$$
\limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_{k,(1)}} - f_{m_{l,(1)}}\|_{L^q(V)} \leqslant 2.
$$

接下来再取$\delta_2=\frac{1}{2}$，我们可找到$\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ 以及 子列的子列 $\{f_{m_{k,(2)}}\}\subset\{f_{m_{k,(1)}}\}$ 使得

$$
\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_2,\quad \limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_{k,(2)}}^\varepsilon - f_{m_{l,(2)}}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0 \Rightarrow \limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_{k,(2)}} - f_{m_{l,(2)}}\|_{L^q(V)} \leqslant 1.
$$

归纳地重复如上过程，对 $n\in\mathbb{N}^*$取$\delta_n=\frac{1}{n}$, 则存在$\varepsilon_n\in(0,\varepsilon_{n-1})$ 以及 $\{f_{m_{k,(n)}}\}\subset\{f_{m_{k,(n-1)}}\}$ 使得下式

成立

$$\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_n,\quad \limsup_{k,l\to\infty}\|f^{\varepsilon}_{m_k,(n)}-f^{\varepsilon}_{m_l,(n)}\|_{L^q(V)}=0\Rightarrow \limsup_{k,l\to\infty}\|f_{m_k,(n)}-f_{m_l,(n)}\|_{L^q(V)}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

最后，对任意 $k\in\mathbb{N}^*$，将$g_{m_k}:=f_{m_k,(k)}$定为我们期望构造的子列的第 k 项，则我们得到

$$\limsup_{k,l\to\infty}\|g^{\varepsilon}_{m_k}-g^{\varepsilon}_{m_l}\|_{L^q(V)}=\limsup_{k,l\to\infty}\|f^{\varepsilon}_{m_k,(k)}-f^{\varepsilon}_{m_l,(l)}\|_{L^q(V)}=0.$$

□

注记 1.4.2. 回忆当 $p\to d$ 时有 $p^*=\frac{dp}{d-p}\to+\infty$，于是我们期望当 U 有界时$W^{1,p}(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$ 对**所有** $1\leqslant p\leqslant\infty$ 成立。事实上当 $p>d$ 时，证明需要 Morrey 不等式和 Arzelà-Ascoli 引理。我们将证明留作习题 1.4.1。还需注意，即使边界不是 Lipschitz 的，$W^{1,p}_0(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$ 也成立。

注记 1.4.3 (U 的有界性)**.** 应当特别注意 U 的有界性假设是相当重要的。若U 是无界，例如 U 是一个带状区域 $\mathbb{R}^{d-1}\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^d$，$d\geqslant 2$，我们可以考虑对给定的 $f\in W^{1,p}(U)$ 定义 $f_m(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+me_1)$，并且可以证明在 L^p 中有弱收敛 $f_m\rightharpoonup 0$，但其 L^q 范数总是等于 $\|f\|_{L^q}$. 另外还要注意 U 的有界性假设通常**不能**被 $\mathcal{L}^d(U)<\infty$ 替代。虽然确实存在一些体积有限的无界区域使得该区域内的紧嵌入仍然成立，但这需要对区域的形状有额外要求，详情请参阅 Adams-Fournier 的著作 [1, Chapter 6].

1.4.3 Poincaré不等式

我们现在以Poincaré不等式为例来说明如何利用紧性证明新的不等式。

记号 1.4.1. 给定 $f:U\to\mathbb{R}$，当 $\mathcal{L}^d(U)<\infty$ 时，我们定义积分平均 $(f)_U:=⨍_U f\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\frac{1}{\mathcal{L}^d(U)}\int_U f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$.

以下定理，又称作 Poincaré 不等式，是偏微分方程研究中最重要结论之一。它断言具有零均值的 Sobolev 函数的导数必控制函数本身。

定理 1.4.5 (Poincaré不等式)**.** 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是一个**有界连通开集**且具有 Lipschitz 边界 ∂U. 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则存在仅依赖 d,p,U 的常数 $C>0$，使得

$$\|f-(f)_U\|_{L^p(U)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(U)},\quad \forall f\in W^{1,p}(U).\tag{1.4.1}$$

证明. 我们用反证法证明该不等式。若该不等式不成立，则对每个 $k\in\mathbb{N}^*$，我们可以找到函数 $f_k\in W^{1,p}(U)$ 使得

$$\|f_k-(f_k)_U\|_{L^p(U)}>k\|\nabla f_k\|_{L^p(U)}.$$

接下来我们在 $L^p(U)$ 中对 $f_k-(f_k)_U$ 进行重新归一化，定义

$$g_k := \frac{f_k-(f_k)_U}{\|f_k-(f_k)_U\|_{L^p(U)}} \Rightarrow (g_k)_U=0,\ \|g_k\|_{L^p(U)}=1 \Rightarrow \|\nabla g_k\|_{L^p(U)}<\frac{1}{k}.$$

据习题 1.4.1, 我们知道$W^{1,p}(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$, ，所以存在子列 $\{g_{k_j}\}$ 和属于 $L^p(U)$ 的函数 g，使得 $\|g_{k_j}-g\|_{L^p(U)}\to 0$. 据$g_k$的定义可得 $(g)_U=0$, $\|g\|_{L^p(U)}=1$. 但另一方面，我们可以证明 $\nabla g=\mathbf{0}$几乎处处成立，再结合U的连通性和习题1.2.6可知g在U中几乎处处等于一个常数，而积分均值$(g)_U=0$迫使这个常数只能是零，即$g=0$在U中几乎处处成立，这与$\|g\|_{L^p(U)}=1$矛盾。

余下只需验证 $\nabla g=\mathbf{0}$ 在 U 中几乎处处成立。事实上对任意 $\varphi\in C_c^\infty(U)$，我们有

$$\int_U g\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lim_{j\to\infty}\int_U g_{k_j}\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\lim_{j\to\infty}\int_U \partial_i g_{k_j}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,$$

据此推出 $\nabla g=\mathbf{0}$ 在 U 中几乎处处成立 □

注记 1.4.4. 该Poincaré 不等式与定理 1.4.2 中的有所不同。这里我们放弃了边界条件 $f|_{\partial U}=0$，但必须要求 U 有界（否则紧嵌入不再有效）。当 $u\in W_0^{1,p}(U)$ 时，不等式 $\|u\|_{L^p(U)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(U)}$（同样以 Poincaré 命名）在一些无界区域中仍然成立（实际只需要 U 在一个方向上有界，例如带状区域 $\mathbb{R}^{d-1}\times(-1,1)$）。

1.4.4 Morrey嵌入定理

Sobolev 嵌入定理给出了当 $p<d$ 时 $W^{1,p}(U)$ 可以嵌入到具有更高可积性的 $L^q(U)$ 空间，其中$q\leqslant p^* := \frac{dp}{d-p}$. 在习题1.4.10中，我们将看到 $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)\cap L^1(\mathbb{R}^d)$ 嵌入到一个 BMO 型空间。当 $p>d$ 且 U 有界时，我们将在本节看到$W^{1,p}(U)$ 中的 Sobolev 函数 f 几乎处处等于一个 $C^{0,\alpha}(\overline{U})$-Hölder 连续函数，其中 $\alpha=1-\frac{d}{p}$. 当 $p=\infty$ 时，$C^{0,\alpha}$ 被 Lipschitz 连续性取代。进一步地，与给定Sobolev函数f几乎处处相等的Hölder 连续函数必由 $f^*(\boldsymbol{x}) := \lim_{r\to 0}(f)_{\boldsymbol{x},r}$ 给出，这称作函数 f 的**精细表示 (precise representative)**，这可借助绝对连续性给出证明。

我们首先证明Morrey不等式

定理 1.4.6. 设$d<p<\infty$，令$\alpha := 1-\frac{d}{p}$. 则存在依赖于 p,d 的常数 $C>0$使得

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},\quad \forall f\in C_c^1(\mathbb{R}^d).$$

证明. 我们需要证明两个不等式

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant C|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\alpha\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},\qquad |f(\boldsymbol{x})|\leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

我们先证明第一个不等式，第二个的处理本质上类似。固定$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, 记 $r := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 和 $W :=$

$B(\boldsymbol{x},r)\cap B(\boldsymbol{y},r)$，则我们有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|=\fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\leqslant \fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}+\fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.$$

而$\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},r)$，所以我们可以在第一个积分中作变量替换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+t\mathbf{w}$，其中 $\mathbf{w}\in\partial B(\mathbf{0},1)$ 且 $0\leqslant t<r$，于是得到

$$\begin{aligned}
\fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} &= \frac{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}{\mathcal{L}^d(W)}\frac{1}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_{B(\boldsymbol{x},r)}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\
&\leqslant \frac{C}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_{B(\boldsymbol{x},r)}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\
&= \frac{C}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_0^r\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}+t\mathbf{w})|t^{d-1}\,\mathrm{d}S_{\mathbf{w}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{C}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_0^r\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}\left|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(\boldsymbol{x}+s\mathbf{w})\,\mathrm{d}s\right|t^{d-1}\,\mathrm{d}S_{\mathbf{w}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

然后我们将 t 放大为 r 并将变量 $\mathbf{w}$ 替换回到 $\boldsymbol{z}:=\boldsymbol{x}+s\mathbf{w}$ 得到：

$$\begin{aligned}
\fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} &\leqslant \frac{C}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_0^r\left(\underline{\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}}\int_0^r\frac{|\nabla f(\boldsymbol{x}+s\mathbf{w})|}{s^{d-1}}\underline{s^{d-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}S_{\mathbf{w}}}\right)t^{d-1}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{C}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_0^r\int_{B(\boldsymbol{x},r)}\frac{|\nabla f(\boldsymbol{z})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|^{d-1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\;t^{d-1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{Cr^d}{d\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_{B(\boldsymbol{x},r)}\frac{|\nabla f(\boldsymbol{z})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|^{d-1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\
&\leqslant C'\int_{B(\boldsymbol{x},r)}\frac{|\nabla f(\boldsymbol{z})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|^{d-1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\leqslant C'\|\nabla f\|_{L^p(B(\boldsymbol{x},r))}\left\||\boldsymbol{x}-\cdot|^{1-d}\right\|_{L^{p'}(B(\boldsymbol{x},r))}.
\end{aligned}$$

最后一项可以通过极坐标直接计算：

$$\left\||\boldsymbol{x}-\cdot|^{1-d}\right\|_{L^{p'}(B(\boldsymbol{x},r))}=\left(\int_0^r\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}\rho^{d-1}\frac{1}{\rho^{(d-1)p'}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{p'}}$$

该不等式右边是有限数当且仅当 $(d-1)(p'-1)<1$，而这等价于 $p>d$. 当 $p>d$ 时，不等式右端等于 $C_d r^{1-\frac{d}{p}}$. 类似的估计在把 $\boldsymbol{x}$ 替换为 $\boldsymbol{y}$ 时也成立。因此我们有

$$\fint_W |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\leqslant C''r^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

接下来，我们证明 $|f(\boldsymbol{x})|$ 的估计。

$$|f(\boldsymbol{x})| = \fint_{B(\boldsymbol{x},1)} |f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant C\left(\int_{B(\boldsymbol{x},1)} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} + \int_{B(\boldsymbol{x},1)} |f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right).$$

第一个积分的控制方式与上面相同：

$$\int_{B(\boldsymbol{x},1)} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \leqslant C\int_{B(\boldsymbol{x},1)} \frac{|\nabla f(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|^{d-1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

用 Hölder 不等式即可看出第二个不等式是有界的

$$\int_{B(\boldsymbol{x},1)} |f(\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \leqslant \|1\|_{L^{p'}(B(\boldsymbol{x},r))}\|f\|_{L^p(B(\boldsymbol{x},r))} \leqslant C\|f\|_{L^p(B(\boldsymbol{x},r))}.$$

结合上述估计，我们得到 Morrey 不等式的结论。 □

我们现在得出如下嵌入定理。

定理 1.4.7 (Morrey嵌入定理). 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有 Lipschitz 边界的有界开集。设 $d < p < \infty$ 且 $f \in W^{1,p}(U)$，则 f 在 U 中几乎处处等于其**精细表示** $f^*(\boldsymbol{x}) := \lim\limits_{r\to 0}(f)_{\boldsymbol{x},r}$，并且 $f^* \in C^{0,\alpha}(\overline{U})$，其中 $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$.

证明. 据定理 1.3.3 (Sobolev 延拓定理)，我们可以假设 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 且紧支。由于 $d < p < \infty$，我们可以找到一列函数 $\{f_m\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $f_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} f$. 利用 Morrey 不等式我们知道 $\{f_m\}$ 也是 $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ 中的 Cauchy 列。因此存在函数 $\bar{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$f_m \to \bar{f} \quad \text{in } C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d).$$

由 f_m 的定义，我们知道极限函数 $\bar{f}$ 在 U 中几乎处处与 f 相等。同样对 f_m 用 Morrey 不等式并取极限 $m \to \infty$ 可得到 $\bar{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ 以及

$$\|\bar{f}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

最后，这个 $\bar{f}$ 必在 U 中处处与精细表示 f^*相等。事实上我们有

$$f^*(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_{B(\boldsymbol{x},r)} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \xlongequal{f=\bar{f}\text{ a.e.}} \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathcal{L}^d(B(\boldsymbol{x},r))}\int_{B(\boldsymbol{x},r)} \bar{f}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

由于 $\bar{f}$ 连续，据 Lebesgue 微分定理可知 $f^* = \bar{f}$ 在 U 中点点成立。 □

1.4.5 Lipschitz连续性和可微性

如上定理实际上对 $p=\infty$ 也成立，但证明方法并不相同，这是因为 C_c^∞ 在 L^∞ 中不稠密。本节我们证明 f 在 U 中局部 Lipschitz 连续（不一定有界）当且仅当 $f\in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U)$.

定理 1.4.8 (Lipschitz连续性与$W^{1,\infty}$). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 为开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 给定。则

$$f\text{在 } U \text{ 中局部 Lipschitz 连续} \qquad \text{当且仅当} \qquad f\in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U).$$

这里f在U中局部 Lipschitz 连续是指 f在U的任何紧子集上 Lipschitz 连续。

证明. 我们首先证明必要性。设 f 在 U 中局部 Lipschitz 连续，我们要证明对每个 $i\in 1,\cdots,d$，f的弱∂_i-导数存在且在 U 的任何紧子集上几乎处处有界。对任意 $V\Subset W\Subset U$，我们选取 $0<h<\operatorname{dist}(V,\partial W)$ 充分小并定义差商

$$\forall \boldsymbol{x}\in V,\ \ D_i^h(f)(\boldsymbol{x}):=\frac{f(\boldsymbol{x}+he_i)-f(\boldsymbol{x})}{h}.$$

注意现在有 $\sup\limits_{h>0}|D_i^{-h}(f)|\leqslant \mathrm{Lip}(f|_W)<\infty$，据此并结合“$L^\infty$ 函数必属于任意 L^p_{loc} $(1\leqslant p<\infty)$”这一事实，我们知道存在子列 $h_j\to 0$ 和函数 $v_i\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$ 使得如下弱收敛成立

$$D_i^{-h_j}(f)\xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(U)} v_i \qquad 1<p<\infty.$$

这里我们需指出 $v_i\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$ 并不是 L^p_{loc}-弱收敛的直接推论，而是可以通过使用 $L^\infty(W)$ 范数的定义（$W\Subset U$）和 $\|D_i^{-h}(f)\|_{L^p(W)}$ 关于p的一致有界性来证明。具体而言，记 $L:=\mathrm{Lip}(f|_W)$，并对任意固定的 $\varepsilon>0$定义$A:=\{\boldsymbol{x}\in W: v_i(\boldsymbol{x})\geqslant L+\varepsilon\}$. 由于 $1_A\in L^2(W)$，由弱收敛可得

$$\int_A D_i^{-h_j}(f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_W D_i^{-h_j}(f)1_A\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to\int_A v_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

因为$\|D_i^{-h_j}(f)\|_{L^\infty(W)}\leqslant L$, 我们便得到 $\int_A D_i^{-h_j}(f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant L\cdot\mathcal{L}^d(A)$. 另一方面，$v_i\geqslant L+\varepsilon$ 在 A 中意味着 $\int_A v_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant(L+\varepsilon)\cdot\mathcal{L}^d(A)$，这迫使 $\mathcal{L}^d(A)=0$, 也就是说 $v_i\leqslant L$ 在 W 中几乎处处成立。类似地，我们可证明 $v_i\geqslant -L$ 在 W 中几乎处处成立。因此我们实际上证明了对任意 $W\Subset U$ 有 $v_i\in L^\infty(W)$.

现在我们证明这个 v_i 就是 ∂_i-弱导数。任取 $\varphi\in C_c^\infty(V)$，我们有

$$\int_U f(\boldsymbol{x})\frac{\varphi(\boldsymbol{x}+he_i)-\varphi(\boldsymbol{x})}{h}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_U D_i^{-h}(f)(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令 $h=h_j$ 且取极限 $j\to\infty$，我们推出

$$\int_U f\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_U v_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

接下来证明充分性。给定 $f\in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U)$ 和 $\varepsilon_0>0$，我们可以找到有界子集 $V\Subset W\Subset U$ 使得 $f\in W^{1,\infty}(W)$ 且 $\mathrm{dist}\,(W,\partial U),\mathrm{dist}\,(V,\partial W)>\varepsilon_0$. 第一步是磨光 f，定义 $f_\varepsilon:=f*\eta_\varepsilon$，其中 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

断言. 以下陈述成立。

- 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\{f_\varepsilon\}$ 在 V 中一致收敛。
- 记极限函数为 F，则 F 在 V 中 Lipschitz 连续。
- 在任何有界 $V\Subset U$ 中，$F=f$ 几乎处处成立（因此 F 是 f 的精细表示）。

该断言的证明有点“绕弯子”，这是因为光滑逼近在 L^∞ 中不成立。在这一步我们不知道一致收敛的极限函数到底是什么，因此我们应该去证明 f_ε 是 $L^\infty(V)$ 中的 Cauchy 列。对 $\varepsilon,\delta\in(0,\varepsilon_0)$ 和 $\boldsymbol{x}\in V$，我们有

$$
\begin{aligned}
|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})-f_\delta(\boldsymbol{x})| &= \left|\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)}\eta\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right)f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}-\frac{1}{\delta^d}\int_{B(\mathbf{0},\delta)}\eta\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\delta}\right)f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right| \\
&= \left|\int_{B(\mathbf{0},1)}\eta(\boldsymbol{y})(f(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right|\leqslant\int_{B(\mathbf{0},1)}\eta(\boldsymbol{y})|f(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.
\end{aligned}
$$

在这一步我们不能直接将 $\lim\limits_{\varepsilon,\delta\to0}$ 与 $\int_{B(\mathbf{0},1)}$ 交换，这是因为 L^∞ 函数可能不是几乎处处连续的。实际上我们应该利用 $f\in W^{1,\infty}(W)\subset W^{1,p}(W)$（对 $1<p<\infty$ 而言）推出存在 $f^*\in C^{0,\alpha}(\overline{W})$ 在 W 中与 f 几乎处处相等，这样我们就可以在积分下将 f 替换为 f^*.

$$
|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})-f_\delta(\boldsymbol{x})|\leqslant\int_{B(\mathbf{0},1)}\eta(\boldsymbol{y})|f^*(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})-f^*(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.
$$

现在我们用控制收敛定理（控制函数为 $2\eta(\boldsymbol{y})\|f\|_{L^\infty(W)}$）得到

$$
\limsup_{\varepsilon,\delta\to0}|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})-f_\delta(\boldsymbol{x})|\leqslant\int_{B(\mathbf{0},1)}\limsup_{\varepsilon,\delta\to0}\eta(\boldsymbol{y})|f^*(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})-f^*(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0.
$$

记极限函数为 $F(\boldsymbol{x})$. 由于在 V 中有一致收敛 $f_\varepsilon\rightrightarrows F$，我们知道 $F\in C(V)$. 现在来验证它的 Lipschitz 连续性。事实上对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，我们有

$$
|F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y})|\leqslant|F(\boldsymbol{x})-f_\varepsilon(\boldsymbol{x})|+|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})-f_\varepsilon(\boldsymbol{y})|+|f_\varepsilon(\boldsymbol{y})-F(\boldsymbol{y})|.
$$

现在只需证明对每个$\varepsilon>0$，函数 f_ε在V中Lipschitz连续，且Lipschitz常数有不依赖ε的上界。我们作计算如下

$$
|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})-f_\varepsilon(\boldsymbol{y})|=\left|\int_0^1\nabla f_\varepsilon(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\|\nabla f_\varepsilon\|_{L^\infty(V)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.
$$

由于 $\|\nabla f_\varepsilon\|_{L^\infty(V)} \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{L^1}\|\nabla f\|_{L^\infty} = \|\nabla f\|_{L^\infty}$，我们得到 f_ε 在 V 中 Lipschitz 连续，且其 Lipschitz 常数有与 ε 无关的上界。因此对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，我们也得到 $|F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y})| \leqslant \|\nabla f\|_{L^\infty(V)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. 最后由连续性可知在 V 中有 $F = f^*$逐点成立。 □

注记 1.4.5. 需注意，我们不能断言"f 在 U 中 Lipschitz 连续当且仅当 f 与 U 中的一个 Lipschitz 连续函数相等"。即使 U 有界，"局部"一词也不能去掉。反例参见习题 1.4.10。事实上$W^{1,\infty}(U) = C^{0,1}(U)$ 对任何**拟凸** (**quasi-convex**)区域 U 成立，即任意两点 $a,b\in U$ 都可由一条长度至多为 $M|a-b|$ 的曲线 γ 连接，其中 $M>0$ 与 a,b 无关。

习题 1.4

习题 1.4.1. 证明对任意 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$W^{1,p}(U)$ 紧嵌入到 $L^p(U)$ 中。

习题 1.4.2. 设 $d\geqslant 2$。证明 $u(\boldsymbol{x}) := \ln\ln(1+\frac{1}{|\boldsymbol{x}|})$ 属于 $W^{1,d}(B)$，其中 B 为单位球，但这个 u 显然是无界的。

习题 1.4.3. 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是有界区域，函数 $u\in H^1(U)$ 满足：存在$\alpha\in(0,1)$使得集合 $Z := \{\boldsymbol{x}\in U|u(\boldsymbol{x})=0\}$ 满足 $\mathcal{L}^d(Z)\geqslant\alpha\mathcal{L}^d(U)$. 证明：存在仅依赖于 d,α 的常数 $C>0$，使得

$$\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：在 $U\backslash Z$ 中，将 u^2 写为 $(u-(u)_U+(u)_U)^2$ 并对 $(u-(u)_U)^2$ 应用 Poincaré 不等式。$(u)_U^2$ 的贡献将被所需不等式的左边吸收，这是因为 $U\backslash Z$ 的测度严格小于 U 的测度。该不等式可被用于证明 De Giorgi 密度定理（定理2.7.7）。

习题 1.4.4. 设 $d\geqslant 3$ 且 $r>0$, $B_r := B(\mathbf{0},r)$。设 $u\in H^1(B_r)$，证明：$\frac{u}{|\boldsymbol{x}|}\in L^2(B_r)$并满足估计

$$\int_{B_r}\frac{u^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C\int_{B_r}|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{r^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：首先利用 $\nabla(|\boldsymbol{x}|^{-1}) = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$ 并分部积分，然后利用 $r\int_{\partial B_r}u^2\,\mathrm{d}S = \int_{B_r}\nabla\cdot(\boldsymbol{x}u^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 来控制分部积分产生的边界项。

习题 1.4.5. 证明如下形式的 Hardy 不等式。

(1) 设 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，$\mathbf{F}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是一个向量场，且在$\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$是$C^1$的。证明

$$\int_{\mathbb{R}^d}u^2\mathrm{div}\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u\cdot(u\mathbf{F})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(2) 设 $d \geqslant 3$，$F(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ 且 $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. 证明

$$\frac{(d-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

习题 1.4.6. 设 $\Omega := (x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < x^4$. 证明函数 $f(x,y) = \frac{1}{x}$ 属于 $H^1(\Omega)$ 但不属于 $L^5(\Omega)$。这与 Sobolev 嵌入定理的结论是否矛盾？

习题 1.4.7. 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域。证明：$H^2(U)$ 紧嵌入到 $H^1(U)$，且对任意 $\varepsilon > 0$存在常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)} \leqslant \varepsilon\|u\|_{H^2(U)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^2(U)}, \quad \forall u \in H^2(U).$$

习题 1.4.8. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，给定 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，定义 $(f)_{\boldsymbol{x},r} := ⨍_{B(\boldsymbol{x},r)} f$。证明：存在依赖于 d, p 的常数 $C > 0$，使得对任意球 $B(\boldsymbol{x},r) \subset \mathbb{R}^d$ 和 $f \in W^{1,p}(B(\boldsymbol{x},r))$都有如下不等式成立

$$\|f - (f)_{\boldsymbol{x},r}\|_{L^p(B(\boldsymbol{x},r))} \leqslant Cr\|\nabla u\|_{L^p(B(\boldsymbol{x},r))}.$$

提示：先对单位球证明结论。对一般的球，考虑 $v(\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})$，其中 $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{0},1)$.

习题 1.4.9. 设 $f \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. 证明 $f \in BMO(\mathbb{R}^d)$，且满足估计

$$⨍_{B(\boldsymbol{x},r)} |f - (f)_{\boldsymbol{x},r}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^d(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $BMO(\mathbb{R}^d)$ 是有界平均振荡空间 (bounded mean oscillation)，并赋予半范数

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^d)} := \sup_{B(\boldsymbol{x},r)} ⨍_{B(\boldsymbol{x},r)} |f - (f)_{\boldsymbol{x},r}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} < \infty.$$

习题 1.4.10. 设 $U = B(\boldsymbol{0},1)\backslash\{(x,y) \in (\boldsymbol{0},1) | x \geqslant 0,\ y = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中沿x正半轴割开一条缝的开圆盘。定义 $u(x,y) = (\max\{0,x\})^2 \max\{\operatorname{sgn} y, 0\}$. 证明$u \in W^{1,\infty}(U)$, 但在 U 中不是 Lipschitz 连续的。

习题 1.4.11. 设 $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$，证明：存在有界连续且在无穷远处极限为零的函数$\tilde{u} \in C_0(\mathbb{R}^3)$, 使得 $u \overset{a.e.}{=} \tilde{u}$.

问题 1.4

问题 1.4.1. 设$U \subset \mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域，开球$B \Subset U$. 对$\varepsilon \in (0,1)$设u_ε是如下方程的光滑解

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^{-1}(u_\varepsilon - f)\mathbf{1}_B = 0 & \text{in } U, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial U, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

其中 $f \in H_0^1(U)$ 是给定的函数。证明：$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)}$ 关于 ε 一致有界，且 $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2(B)} f$.

问题 1.4.2. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$U \subset \mathbb{R}^d$ 是边界Lipschitz 的有界区域，$S \subset \partial U$ 是边界的子集，且具有正的 $(d-1)$-维Hausdorff测度。证明：存在依赖于 p, S, U 的常数 $C > 0$，使得对所有满足 $\mathrm{Tr}\, u|_S = 0$ 的 $u \in W^{1,p}(U)$，有 $\|u\|_{L^p(U)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(U)}$.

问题 1.4.3. 考虑 p-Laplace 方程的特征值问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{p-2}u & \boldsymbol{x} \in U \\ u = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial U. \end{cases}$$

其中 $1 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}$是一个参数，$U \subset \mathbb{R}^d$是有界区域。证明：若该方程有不恒为零的解$u$，则对应的特征值$\lambda$满足不等式 $\lambda \geqslant C\mathcal{L}^d(U)^{-\frac{p}{d}}$, 其中常数 $C > 0$ 仅依赖 p, d.

提示：分别讨论三种情况 $p < d$, $p \geqslant d \geqslant 2$ 和 $p \geqslant d = 1$.

问题 1.4.4 (Strauss径向引理). 设$d \geqslant 2$, $u \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ (即$u \in H^1(\mathbb{R}^d)$是径向函数，$u(\boldsymbol{x})$取值只依赖$r := |\boldsymbol{x}|$). 本题可默认$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的，进而你可以直接对 C_c^∞ 径向函数证明。

(1) 利用微积分基本定理和$u(\infty) = 0$证明：$|u(r)|^2 \leqslant 2r^{1-d}\int_r^\infty |u(s)||u'(s)|s^{d-1}\,\mathrm{d}s$.

(2) 证明：$|u(r)| \leqslant Cr^{-(d-1)/2}\|u\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

提示：对(1)右边的积分用Cauchy-Schwarz不等式，再用积分的极坐标表示凑出 u 和 ∇u 的 L^2 范数。

问题 1.4.5 (径向Sobolev空间的紧嵌入). 设$d \geqslant 2$, $2 < q < 2^* := \frac{2d}{d-2}$, 证明：$H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ 是紧嵌入。

提示：在$|\boldsymbol{x}| = R$处作截断，当$|\boldsymbol{x}| > R$时用Strauss径向引理，当$|\boldsymbol{x}| \leqslant R$时已经有紧性。

1.5 一般的Sobolev不等式

最后我们介绍一般 $W^{k,p}(U)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ 的Sobolev不等式，其证明就是结合定理 1.4.1 或定理 1.4.6 的论证方法以及对 k 归纳即得，此处不再叙述。

记号 1.5.1. 对 $x \in \mathbb{R}$定义 $[x]$ 为小于等于 x 的最大整数，$x := x - [x]$ 为其小数部分。

定理 1.5.1 (一般形式的 Sobolev 不等式). 设$U \subset \mathbb{R}^d$ 是边界Lipschitz 的有界开集，函数$f \in W^{k,p}(U)$.

(1) 若 $k < \frac{d}{p}$，则 $f \in L^q(U)$，其中 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$（等价地，$q = \frac{dp}{d-kp}$）。同时还有估计 $\|f\|_{L^q(U)} \leqslant C(d,k,p,U)\|f\|_{W^{k,p}(U)}$.

(2) 若 $k>\frac{d}{p}$，则 f 在 U 中几乎处处等于其精细表示 f^*，且 $f^*\in C^{k-[\frac{d}{p}]-1,\alpha}(\overline{U})$，其中

$$\alpha=\begin{cases}1-\left\{\frac{d}{p}\right\} & \frac{d}{p}\notin\mathbb{Z},\\ (0,1)\text{中的任意实数} & \frac{d}{p}\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

并且我们有如下估计 $\|f^*\|_{C^{k-[\frac{d}{p}]-1,\alpha}(\overline{U})}\leqslant C(d,k,p,\alpha,U)\|f\|_{W^{k,p}(U)}$.

需注意(2)的一个特殊情形是 $H^k(U)\subset L^\infty(U),\quad k>\frac{d}{2}$，且有不等式

$$\|f\|_{L^\infty(U)}\leqslant C\|f\|_{H^k(U)}. \tag{1.5.1}$$

该结论将在后续内容中被反复用到，我们会在第五章证明更精细的结论，同时参见习题 1.5.1。

习题 1.5

习题 1.5.1. 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界Lipschitz 的有界开集，正整数$k>\frac{d}{2}$. 证明：存在依赖于 k,d,U 的常数 $C>0$，使得对任意$f,g\in H^k(U)$成立如下不等式

$$\|fg\|_{H^k(U)}\leqslant C\|f\|_{H^k(U)}\|g\|_{H^k(U)}. \tag{1.5.2}$$

注记 1.5.1. 对于一般的 $k\in\mathbb{N}$ 和 $f,g\in H^k(U)\cap L^\infty(U)$，我们实际上有 Moser 型不等式（也称为"分数阶 Leibniz 法则"中 Kato-Ponce 型不等式的特殊情况）：

$$\|fg\|_{H^k(U)}\leqslant C\left(\|f\|_{H^k(U)}\|g\|_{L^\infty(U)}+\|g\|_{H^k(U)}\|f\|_{L^\infty(U)}\right). \tag{1.5.3}$$

不等式 (1.5.1)-(1.5.3) 在无界区域或 $\mathbb{R}^d$ 中也成立，且 k 不必是整数，但证明完全依赖 Fourier 分析，我们将在第五章重新讨论此结论。

第二章　线性椭圆方程

本章我们考虑如下边值问题

$$Lu = f \text{ in } U, \qquad u = 0 \text{ on } \partial U. \tag{2.0.1}$$

这里 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集，$u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ 是未知函数。函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 是给定的，L 是一个二阶线性偏微分算子，具有散度形式（多用于证明存在性）

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j (a^{ij}(\boldsymbol{x})\partial_i u) + \sum_{i=1}^{d} b^i(\boldsymbol{x})\partial_i u + c(\boldsymbol{x})u \tag{2.0.2}$$

或者非散度形式（多用于极大值原理）

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(\boldsymbol{x})\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{d} b^i(\boldsymbol{x})\partial_i u + c(\boldsymbol{x})u \tag{2.0.3}$$

其中系数函数 $a^{ij}, b^i, c\ (1 \leqslant i, j \leqslant d)$ 是给定的，系数矩阵$[a^{ij}]$ 是对称方阵，即 $a^{ij} = a^{ji}$. 边界条件 $u = 0$ 在 ∂U 上被称为**Dirichlet 边界条件**。

定义 2.0.1. 我们称由(2.0.2) 或 (2.0.3) 定义的微分算子 L 是**（一致）椭圆的**，是指存在常数 $\theta > 0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in U,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.0.4}$$

椭圆性意味着对于每个 $\boldsymbol{x} \in U$，矩阵 $[a^{ij}(\boldsymbol{x})]$ 是正定的，且其最小特征值大于或等于 θ. 最简单的例子就是 $a^{ij} = \delta^{ij}$ 且 $b^i = c = 0$，在这种情况下算子 L 为 $-\Delta$；而更具代表性的一个例子是$-\Delta + cI\ (c \geqslant 0)$. 从现在起，我们使用爱因斯坦求和约定，即重复的指标表示对它们求和。例如，(2.0.2)-(2.0.3) 现在写作

$$Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + b^i\partial_i u + cu \text{ or } Lu = -a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u + cu.$$

2.1　线性椭圆方程的弱解和Sobolev空间H^{-1}

2.1.1　弱解的定义

方程 (2.0.1) 中，我们只假设了 $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ 且 $f \in L^2(U)$. 正如第一章开头所述，当系数和源项光滑性很差时，直接证明经典解的存在性通常并不容易。退而求其次地，我们改为**在弱意义下**求解方程 (2.0.1). 具体地，令 $v \in C_c^\infty(U)$ 且 u 是一个光滑解。那么分部积分得到

$$\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v + b^i \partial_i u v + cuv \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.1.1}$$

利用光滑逼近，我们可以证明同样的恒等式对任何 $v \in H_0^1(U)$也成立。此外如果 $u \in H_0^1(U)$，这个恒等式也是有意义的。因此我们可以考虑在 $H_0^1(U)$ 中寻找方程 (2.0.1) 的“弱”解。

定义 2.1.1. 我们定义与散度形式的椭圆算子 (2.0.2) 相对应的 **双线性型** $B[\cdot,\cdot]$ 为

$$B[u,v] := \int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v + b^i \partial_i u v + cuv \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall u, v \in H_0^1(U). \tag{2.1.2}$$

我们称 $u \in H_0^1(U)$ 是 (2.0.1) 的一个弱解，是指

$$B[u,v] = (f,v)_{L^2(U)}, \quad \forall v \in H_0^1(U), \tag{2.1.3}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_{L^2(U)}$ 表示 $L^2(U)$ 中的内积。

更一般地，我们还会遇到 $f \in H^{-1}(U)$（即 $H_0^1(U)$ 的对偶空间）的情况。这种情况下我们应将 (2.1.3) 的右侧替换为 $\langle f, v\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $H^{-1}(U)$ 和 $H_0^1(U)$ 的配对。

2.1.2　Sobolev 空间 $H^{-1}(U)$

现在我们引入 Sobolev 空间 $H^{-1}(U)$.

定义 2.1.2. 我们定义 $H^{-1}(U)$ 为 $H_0^1(U)$ 的对偶空间。也就是说$f \in H^{-1}(U)$ 意味着 f 是 $H_0^1(U)$ 上的有界线性泛函，其范数定义为

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup\left\{\langle f, u\rangle \middle| u \in H_0^1(U), \ \|u\|_{H_0^1(U)} \leqslant 1\right\}.$$

需要注意的是，我们<u>不</u>像 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理那样将 $H_0^1(U)$ 与其对偶空间等同。实际上我们有

$$H_0^1(U) \subset L^2(U) \subset H^{-1}(U)$$

且如果 U 是有界的，第一个包含关系可以被紧嵌入替换。

我们有以下刻画定理。

定理 2.1.1 (H^{-1} 的刻画)**.** 设 $f\in H^{-1}(U)$，则存在一组函数 $f^0,f^1,\cdots,f^d\in L^2(U)$ 使得下式成立

$$\langle f,v\rangle=\int_U f^0v+f^i\partial_i v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\qquad\forall v\in H_0^1(U).\tag{2.1.4}$$

如果(2.1.4) 成立，我们就记 $f=f^0-\sum\limits_{i=1}^{d}\partial_i f^i$。此外我们有

$$\|f\|_{H^{-1}(U)}=\inf\left\{\left(\int_U\sum_{i=0}^{d}|f^i|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\middle|f\text{ 满足 (2.1.4)}\right\}.$$

特别地，如果我们把 $v\in L^2(U)$ 视作 $H^{-1}(U)$ 中的元素，则对任意的 $u\in H_0^1(U)$有

$$(v,u)_{L^2(U)}=\langle v,u\rangle.$$

证明. 给定 $f\in H^{-1}(U)$，我们来构造满足 (2.1.4) 的 $f^0,f^1,\cdots,f^d$, 这本质上是 Riesz 表示定理的应用。由于 f 是 $H_0^1(U)$ 上的有界线性泛函，且 $H_0^1(U)$ 是 Hilbert 空间，我们知道存在 $u\in H_0^1(U)$ 使得 $(u,v)_{H_0^1(U)}=\langle f,v\rangle$ 对任意的 $v\in H_0^1(U)$ 成立。现在回顾 $H_0^1(U)$ 的内积可以定义为

$$(u,v)=\int_U\nabla u\cdot\nabla v+uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

因此令$f^0=u$，$f^i=\partial_i u\ (1\leqslant i\leqslant d)$ 即可得到所需结果。

接下来证明$\|f\|_{H^{-1}(U)}$ 的等价定义，我们假设 $g^0,g^1,\cdots,g^d\in L^2(U)$ 满足

$$\langle f,v\rangle=\int_U g^0v+g^i\partial_i v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在之前定义的 $H_0^1(U)$ 内积中令 $v=u$，我们得到

$$\int_U|\nabla u|^2+u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_U\sum_i|g^i|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

因此

$$\int_U\sum_{i=0}^{d}|f^i|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_U\sum_{i=0}^{d}|g^i|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

最后若$\|v\|_{H_0^1(U)}\leqslant 1$，那么 $|\langle f,v\rangle|$ 被上述最后一个不等式的左边界住，然后再对全体这样的 $v\in$

$H_0^1(U)$ 取上确界得到

$$\|f\|_{H^{-1}(U)}^2 \leqslant \sum_i \int_U |f^i|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

另一方面，令$v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(U)}}$可以使得等号成立。 □

习题 2.1

习题 2.1.1. 设有界开集$U \subset \mathbb{R}^d$具有Lipschitz边界。

(1) 设 $\{v_n\} \subset H_0^1(U)$ 满足 $\|v_n\|_{H_0^1(U)} \leqslant 1$。证明：存在子列 $\{v_{n_k}\}$ 和 $v \in H_0^1(U)$ 使得 $\|v_{n_k} - v\|_{H^{-1}(U)} \to 0$。

(2) 设 $v \in H_0^1(U)$, $\|v\|_{H_0^1(U)} = 1$。证明：$v \in H^{-1}(U)$，且对于任何 $\varepsilon > 0$存在一个依赖ε 的常数 $C(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\|v\|_{L^2(U)} \leqslant \varepsilon + C(\varepsilon)\|v\|_{H^{-1}(U)}.$$

习题 2.1.2. $H^{-1}(\mathbb{R}^d) = (H^1(\mathbb{R}^d))'$ 是否成立？这里 X' 是 Banach 空间 X 的对偶空间。

2.2 存在性定理1: Lax-Milgram定理

据定义 2.1.1，给定 $f \in L^2(U)$，我们证明存在唯一的 $u \in H_0^1(U)$ 使得 (2.1.3) 对所有 $v \in H_0^1(U)$ 成立。这里我们首先试用Lax-Milgram定理来证明存在性。

定理 2.2.1. 设H 为具有内积 $(\cdot,\cdot)$、范数 $\|\cdot\|$ 以及与其对偶空间配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 Hilbert 空间。设 $B: H \times H \to \mathbb{R}$ 是一个双线性映射，且存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 使得

- （有界性）对任意 $u, v \in H$ 有 $|B[u,v]| \leqslant \alpha\|u\|\|v\|$,
- （强制性）对任意 $u \in H$ 有 $|B[u,u]| \geqslant \beta\|u\|^2$.

设$f: H \to \mathbb{R}$ 为 H 上的有界线性泛函。那么存在唯一的 $u \in H$ 使得 $B[u,v] = \langle f, v\rangle$ 对所有 $v \in H$ 成立。

证明. 大致的思路. 该结论与 Riesz 表示定理有些相似。事实上，由于 f 是 H 上的有界线性泛函，Riesz 表示定理表明存在 $w \in H$ 使得

$$\langle f, v\rangle = (w, v) \quad \forall v \in H.$$

另一方面我们可以定义一个线性算子 $A: H \to H$ 使得 $B[u,v] = (Au, v)$. 若能证明 $A: H \to H$ 是双射，那么对任意给定的 f，我们就可以通过定义 $u = A^{-1}w$ 来构造所需的u.

第 1 步：定义映射 A. 据有界性假设，我们知道对任何固定的 $u \in H$，映射 $v \longmapsto B[u,v]$ 是 H 上的有界线性泛函。因此利用 Riesz 表示定理知，存在唯一的元素 $w \in H$ 使得 $B[u,v] = (w,v)$ 对任何 $v \in H$ 成立。于是我们定义 $A: H \to H$ 为 $Au := w$，即对 $u, v \in H$ 有 $B[u,v] = (Au, v)$.

第 2 步：A 是有界线性算子。 容易看出 A 是线性的，其有界性也来自于 $B[\cdot,\cdot]$ 的有界性：

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leqslant \alpha\|u\|\|Au\| \Rightarrow \|Au\| \leqslant \alpha\|u\| \quad \forall u \in H.$$

第 3 步：A 是双射。 据强制性假设，我们有

$$\beta\|u\|^2 \leqslant B[u, u] = (Au, u) \leqslant \|Au\|\|u\| \Rightarrow \beta\|u\| \leqslant \|Au\|.$$

因此A 是单射，且 $R(A)$（A 的值域）在 H 中是闭的。要证明 $R(A) = H$，只需验证 $(R(A))^{\perp} = 0$。事实上，如果存在非零元素 $w \in (R(A))^{\perp}$，那么我们得到 $\beta\|w\|^2 \leqslant B[w, w] = (Aw, w) = 0$. 因此我们证明了$A$是$H$上的双射。

第 4 步：u 的存在性。 我们现在回到本定理的证明。给定 $f \in H'$，据 Riesz 表示定理，存在某个 $w \in H$ 满足 $\langle f, v\rangle = (w, v)$ 对所有 $v \in H$ 成立。现在我们可以通过定义 $Au = w$（或 $u := A^{-1}w$）来构造所需的 u。然后我们得到

$$B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in H.$$

唯一性由于强制性很容易证明，此处略去。 □

现在我们希望将 Lax-Milgram 定理应用于椭圆方程 (2.0.1)，我们可以建立以下能量估计。

定理 2.2.2 (能量估计). *对于椭圆方程 (2.0.1) 及其对应的双线性型 (2.1.2)，成立如下估计：存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 和 $\gamma \geqslant 0$ 使得*

- $|B[u, v]| \leqslant \alpha\|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}$.
- $\beta\|u\|^2_{H_0^1(U)} \leqslant B[u, u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(U)}$.

证明. 回顾 $B[u, v]$ 的具体形式

$$B[u, v] = \int_U a^{ij}\partial_i u\partial_j v + b^i\partial_i uv + cuv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad u, v \in H_0^1(U).$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leqslant \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)}\|\partial_i u\|_{L^2(U)}\|\partial_j v\|_{L^2(U)} + \|b^i\|_{L^\infty(U)}\|\partial_i u\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} + \|c\|_{L^\infty(U)}\|u\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \\ &\leqslant C(\|u\|_{L^2(U)} + \|\nabla u\|_{L^2(U)})(\|v\|_{L^2(U)} + \|\nabla v\|_{L^2(U)}) \leqslant \alpha\|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}. \end{aligned}$$

第二个不等式可以用类似的方式证明

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j u + b^i \partial_i u\, u + cu^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\geqslant \theta \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \|b^i\|_{L^\infty} \|\partial_i u\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} - \|c\|_{L^\infty(U)} \|u\|^2_{L^2(U)} \\
&\geqslant \theta \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} - \left(\frac{C_1}{\varepsilon} + C_2\right) \|u\|^2_{L^2(U)}.
\end{aligned}$$

这里我们使用了一致椭圆性条件和 Young 不等式。取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$，我们可得：存在$\beta > 0$和$\gamma \geqslant 0$使得下式成立

$$B[u,u] \geqslant \beta \|u\|^2_{H^1_0(U)} - \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}.$$

注意 $\gamma = 0$ 确实是可以达到的（例如 $b^i = c = 0$的情况）。 □

注记 2.2.1. 事实上，该定理中的强制性假设可以反推出 L 的一致椭圆性（前提是假设$\{a^{ij}\}$是实对称阵，且各元素均为 L^∞ 函数），见问题 2.2.2.

注意，如果$\gamma > 0$，那么$B[\cdot,\cdot]$不一定满足 Lax-Milgram 定理的假设。当我们使用 Lax-Milgram 定理证明方程 (2.0.1) 的存在性时，椭圆算子应当施加一些额外的约束。

定理 2.2.3 (弱解第一存在性定理). *存在 $\gamma \geqslant 0$（在定理 2.2.2 中得到），使得对于任意 $\mu \geqslant \gamma$ 和 $f \in L^2(U)$，如下边值问题存在唯一的弱解 $u \in H^1_0(U)$.*

$$Lu + \mu u = f \text{ in } U, \qquad u = 0 \text{ on } \partial U. \tag{2.2.1}$$

证明. 对方程 (2.2.1)，我们定义其双线性型（对应于 $L_\mu := L + \mu I$）为

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu(u,v)_{L^2(U)} \quad \forall u,v \in H^1_0(U).$$

据 $\mu \geqslant \gamma$ 和定理 2.2.2 可知 $B_\mu[\cdot,\cdot]$ 满足 Lax-Milgram 定理的假设。给定 $f \in L^2(U)$，我们可将 f 视作 $H^{-1}(U)$中的一个元素，因此 $\langle f,v\rangle$ 等于内积 $(f,v)_{L^2(U)}$. 据 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $u \in H^1_0(U)$ 满足 $B_\mu[u,v] = \langle f,v\rangle$ 对所有 $v \in H^1_0(U)$ 成立，也就是说 u 是 (2.2.1) 的唯一弱解。 □

注记 2.2.2. 我们可以类似证明对于 $f \in H^{-1}(U)$，方程$Lu + \mu u = f$（具有 Dirichlet 边界条件）弱解的存在性，这只需注意到 $\langle f,v\rangle = \int_U f^0 v + f^i \partial_i v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是 $H^1_0(U)$ 上的有界线性泛函。特别地，该存在性定理表明映射

$$L_\mu := L + \mu I \ : \ H^1_0(U) \to H^{-1}(U) \quad (\mu \geqslant \gamma)$$

是一个同构。

习题 2.2

本节我们假设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界开集。系数 a^{ij}, b^i, c 是光滑的且满足一致椭圆性。

习题 2.2.1. 设$Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + cu$. 证明：存在常数 $\mu > 0$，使得只要$c(\boldsymbol{x}) \geqslant -\mu$在$U$中恒成立，相应的双线性型 $B[\cdot,\cdot]$ 就满足 Lax-Milgram 定理的假设。

习题 2.2.2. 函数 $u \in H_0^2(U)$ 是双调和方程

$$\Delta^2 u = f \text{ in } U, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

的弱解，是指对任意 $v \in H_0^2(U)$有$\int_U \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明弱解的存在性和唯一性。

习题 2.2.3. 设U连通，我们称函数 $u \in H^1(U)$ 是具有 Neumann 边界条件的 Poisson 方程的弱解

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

是指对任意的$v \in H^1(U)$有$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明：如上方程存在弱解当且仅当 $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

习题 2.2.4. 考虑具有 Robin 边界条件的 Poisson 方程

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \qquad u + \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U.$$

请定义该问题的弱解 $u \in H^1(U)$，并讨论对于给定 $f \in L^2(U)$ 时解的存在性和唯一性。

提示：证明双线性型的强制性可以使用类似于定理 1.4.5 中 Poincaré 不等式证明的技巧。

习题 2.2.5. 设U连通，并设∂U 是两个不相交的闭集Γ_1, Γ_2的并集。考虑具有混合 Dirichlet-Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \qquad u = 0 \text{ on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \Gamma_2.$$

请定义该问题的弱解 $u \in H^1(U)$，并讨论对于给定 $f \in L^2(U)$ 时解的存在性和唯一性。

提示：从 $H := \{v \in H^1(U) | \mathrm{Tr}\, v|_{\Gamma_1} = 0\}$ 中选择测试函数。

习题 2.2.6. 设$u \in H^1(U)$ 是 U 中 $-\partial_j(a^{ij}\partial_i u) = 0$ 的一个有界弱解，$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑的凸函数，令 $w = \phi(u)$。证明：w 是一个弱下解，即对于任何 $v \in H_0^1(U)$ 且 $v \geqslant 0$，有 $B[w, v] \leqslant 0$。

问题 2.2

问题 2.2.1. 本题旨在对方程(2.0.1)的弱解存在性给出一个变分证明，其中 L 定义由 (2.0.2) 给出，且假设$b^i = c = 0$ 以及 $g \in L^2(\partial U)$. 令

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} a^{ij} \partial_i w \partial_j w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中 $w \in \mathcal{A} := \{w \in H^1(U) | \mathrm{Tr}\, w = g \text{ on } \partial U\}$.

(1) 设 $\{u_n\} \subset H^1(U)$ 在 $H^1(U)$ 中弱收敛到 u，且 $\ell := \liminf\limits_{n\to\infty} I[u_n]$。证明存在子列 $\{u_{n_k}\}$ 使得 $\ell = \lim\limits_{k\to\infty} I[u_{n_k}]$ 且 $u_{n_k} \xrightarrow{L^2(U)} u$.

(2) 给定任意充分小的 $\varepsilon > 0$，证明：存在子集 $G_\varepsilon \subset U$ 使得 u_{n_k} 在 G_ε 中一致收敛于 u，在 G_ε 中有 $|u(\boldsymbol{x})| + |\nabla u(\boldsymbol{x})| \leqslant \varepsilon^{-1}$，且 $\mathcal{L}^d(U \backslash G_\varepsilon) < \varepsilon$.

(3) 证明: $\ell \geqslant I[u]$。这实际上表明 $I[\cdot]$ 在 $H^1(U)$ 上是 **弱下半连续的**，也就是说给定任何在 $H^1(U)$ 中弱收敛到 u 的序列 $\{u_n\} \subset H^1(U)$，I 满足 $I[u] \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} I[u_n]$.

(4) 令 $m := \inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w] < \infty$，模仿 (1)-(3) 来证明存在 $u \in \mathcal{A}$ 使得 $I[u] = m$.

(5) 证明 $\mathcal{A}$ 中极小化子 u 的唯一性。(提示：如果 u_1, u_2 是两个不同的极小化子，那么考虑 $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ 并证明 $I[\bar{u}] < (I[u_1] + I[u_2])/2$.)

(6) 证明极小化子 u 恰好是方程(2.0.1)的弱解。

问题 2.2.2. 设$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = [a^{ij}(\boldsymbol{x})]_{d\times d}$是实对称方阵，且各$a^{ij} \in L^\infty(U)$. 设存在常数 $\theta, c > 0$ 使得下式成立

$$\theta \int_U |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \int_U \sum_{i,j=1}^d a^{ij} \partial_i v \partial_j v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + c \int_U |v|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \ \ \forall v \in C_c^\infty(U). \tag{*}$$

证明：对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\pi U$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \theta \mathbf{I}_d$ 是半正定方阵。本题可以使用如下结论

命题. 设$\mathbf{G} : U \to S^{d\times d}$ 是局部可积的矩阵值函数, 其中 $S^{d\times d}$ 是全体 $d \times d$ 实对称方阵构成的集合。若 If $\int_U \mathbf{G}(\boldsymbol{x}) v^2(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ge 0$ 对任意 $v \in C_c^\infty(U)$ 成立，则对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\pi U$, $\mathbf{G}(\boldsymbol{x}) \ge 0$ 是半正定方阵。

提示：考虑形如 $w(\boldsymbol{x}) \sin(k\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi})$ 的测试函数，其中$w \in C_c^\infty(U), \boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{N}^*$, 然后用 Riemann-Lebesgue 引理(命题D.1.3(4)).

2.3 存在性定理2: Fredholm二择一

证明定理 2.2.3之后，我们自然会问：如果(2.2.1)中不带μu项，我们是否还能证明椭圆方程的存在性？答案是肯定的，但唯一性取决于齐次方程 $Lu = 0$（具有 Dirichlet 边界条件）是否具有

非零解。此外我们可以证明：如果齐次方程允许非零解，那么解空间必须是有限维的，且维数等于相应“对偶问题”解空间的维数。这看上去和 $\mathbb{R}^n$ 中求解线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ 的分类讨论相似。对于椭圆 PDE，我们用紧算子的 Fredholm 理论来证明类似的结论。

2.3.1 紧算子的性质

首先我们回顾紧算子的一些基本性质。

定义 2.3.1. 设X,YBanach 空间。我们说一个有界线性算子 $K:X\to Y$ 是**紧算子**，是指对于任何有界集 $B\subset X$，$K(B)$ 在 Y 中是预紧的（即 $\overline{K(B)}$ 在 Y 中是紧的），并记 $K\in\mathfrak{C}(X,Y)$.

容易看出，K 是紧算子当且仅当对任何有界序列 $\{x_n\}\subset X$，$\{Kx_n\}$ 在 Y 中有收敛子列。据此可得

命题 2.3.1. 设X,Y,Z 为 Banach 空间。

(1) 若 $K\in\mathfrak{C}(X,Y)$, $x_n\rightharpoonup x$ 在 X 中弱收敛，那么 $Kx_n\to Kx$ 在 Y 中（强）收敛。
(2) 若有界线性算子 $K_1:X\to Y$ 和 $K_2:Y\to Z$ 有一个是紧算子，那么复合算子 $K_2\circ K_1:X\to Z$ 也是紧算子。
(3) 若 $K\in\mathfrak{C}(X,Y)$，那么其伴随算子 $K^*\in\mathfrak{C}(Y',X')$，其中 X',Y' 分别是 X,Y 的对偶空间。

务必注意，(1) 意味着恒等算子 $I\in\mathfrak{C}(X)$ 当且仅当 $\dim X<\infty$.

我们再来回顾 Fredholm 二择一（Fredholm Alternative）定理。

定理 2.3.2 (Fredholm二择一). 设X 为 Banach 空间，$K\in\mathfrak{C}(X)$. 则

(1) $\dim N(I-K)<\infty$, 其中 $N(I-K)=\{x\in X|(I-K)x=0\}$.
(2) $R(I-K)$ 是闭集。
(3) $R(I-K)=N(I-K^*)^{\perp}$ 且 $R(I-K^*)={}^{\perp}N(I-K)$.
(4) $N(I-K)=\{0\}$ 当且仅当 $R(I-K)=X$.
(5) $\dim N(I-K)=\dim N(I-K^*)$.

这里对$M\subset X$, $F\subset X'$, 我们记

$$ {}^{\perp}M:=\{f\in X'|\langle f,x\rangle=0,\ \forall x\in M\},\quad F^{\perp}:=\{x\in X|\langle f,x\rangle=0,\ \forall f\in X'\}. $$

一个相当特别的例子是考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$. 我们知道这个线性方程组有解 $\boldsymbol{x}$ 当且仅当 $\mathbf{b}$ 可以写成 $A_j:=(a_{1j},\cdots,a_{nj})^{\top}$ 的线性组合，即 $\mathbf{b}=\sum\limits_{j=1}^n x_jA_j$. 这也等价于

$$ \boldsymbol{z}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n a^{ij}z_i=0\ \ (\boldsymbol{z}\perp A_j)\quad\forall j=1,\cdots,n. $$

因此我们知道

- 给定 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$，方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ 有解当且仅当对任意 $\boldsymbol{z}\in\ker\mathbf{A}^\top$ 有 $\boldsymbol{z}\perp\mathbf{b}$.
- 只有两种情况：
  1. 给定 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$，方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$;
  2. $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，且 $\dim\ker\mathbf{A}=\dim\ker\mathbf{A}^*$.

现在令 $\mathbf{A}=I-K$，其中 $K\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 那么第一个结论与定理 2.3.2(3) 一致，第二个结论与定理 2.3.2(4)-(5) 一致。

我们最后回顾紧算子的谱定理。

定义 2.3.2. 设X 为 Banach 空间，$A:X\to X$ 是一个有界线性算子。

- A 的预解集(resolvent set)定义为 $\rho(A):=\{\eta\in\mathbb{R}|A-\eta I$ 是双射$\}$.
- A 的谱(spectrum)定义为 $\sigma(A):=\mathbb{R}\backslash\rho(A)$.

给定 $\eta\in\rho(A)$，据闭图像定理知 $(A-\eta I)^{-1}$ 是 X 上的有界线性算子。

- 我们称 $\lambda\in\sigma(A)$ 是 A 的特征值是指 $N(A-\eta I)\neq\{0\}$. 算子A的全体特征值构成的集合称为A的**点谱(point spctrum)**，记作 $\sigma_p(A)$.
- 若λ是特征值且存在 $w\neq 0$ 使得 $Aw=\lambda w$，那么我们称 w 是 A 对应于 λ 的特征向量。

我们现在有

定理 2.3.3 (Riesz-Schauder). 设X 为 Banach 空间且 $K\in\mathfrak{C}(X)$，则有

- 除非 $\dim X<\infty$，否则 $0\in\sigma(K)$.
- $\sigma(K)\backslash\{0\}=\sigma_p(K)\backslash\{0\}$.
- $\sigma_p(K)$ 的聚点（如果存在）必须是 0.

2.3.2　Fredholm二择一及其在椭圆PDE上的应用

给定散度形式 (2.0.2) 的椭圆算子 L 并设 $b^i\in C^1(\overline{U})$，我们定义其伴随算子 L^* 为

$$L^*v:=\partial_i(a^{ij}\partial_j v)-b^i\partial_i v+(c-\partial_i b^i)v.$$

伴随双线性型 $B^*:H_0^1(U)\times H_0^1(U)\to\mathbb{R}$ 定义为：对 $u,v\in H_0^1(U)$，$B^*[v,u]:=B[u,v]$。我们说 $v\in H_0^1(U)$ 是如下**伴随问题的弱解**

$$L^*v=f \text{ in } U,\quad u=0 \text{ on } \partial U,$$

是指对任意$u\in H_0^1(U)$都有$B^*[v,u]=(f,u)_{L^2(U)}$ 成立。

注记 2.3.1. 应当指出L^* 的具体形式是由伴随算子的定义自然推导出来的，即 $\langle Lu,v\rangle=\langle u,L^*v\rangle$.

我们不妨暂时设 u, v 是光滑函数，将 L 的具体形式代入左侧并进行分部积分得到

$$\begin{aligned}\langle Lu, v\rangle &= \int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v - \partial_i(b^i v)u + cuv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U \partial_i(a^{ij}\partial_j v)u - \partial_i(b^i v)u + cuv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \left\langle u, -\partial_i(a^{ij}\partial_j v) - b^i\partial_i v + (c - \partial_i b^i)v\right\rangle =: \langle u, L^* v\rangle.\end{aligned}$$

据此我们就可导出 B^* 的具体形式。

本节我们的目标是用定理 2.3.2（Fredholm 二择一）来证明方程 (2.0.1) 弱解的存在性定理。

定理 2.3.4 (弱解第二存在性定理). 下列两个结论有且仅有一个成立：

(A) 对任何 $f \in L^2(U)$，方程(2.0.1)存在唯一的弱解。

(B) 齐次方程（即方程(2.0.1)在$f = 0$的情况）存在非零弱解 $u \in H_0^1(U)$.

此外若 (B) 成立，则齐次方程的解空间（记作 N）是 $H_0^1(U)$ 的有限维子空间，且 $\dim N = \dim N^*$. 这里 N^* 是齐次伴随方程，即方程$L^* v = 0$ in U，$v|_{\partial U} = 0$ 的解空间。

最后，方程 (2.0.1) 有弱解当且仅当对于任何 $v \in N^*$ 都有 $(f, v)_{L^2(U)} = 0$.

证明. 证明分为四个步骤。

第 1 步：解的形式构造。 我们回忆用Lax-Milgram 定理证得的第一存在性定理表明：给定 $g \in L^2(U)$，U中带有零边值的方程$L_\gamma u = g$在 $H_0^1(U)$ 中有唯一弱解，其中 $L_\gamma := L + \gamma I$，γ 是定理 2.2.3 中的常数。此时我们记 $u = L_\gamma^{-1} g$。

接下来我们回到方程 $Lu = f$. 对于这个方程，我们知道 $u \in H_0^1(U)$ 是它的弱解当且仅当 $u \in H_0^1(U)$ 是 $L_\gamma u = f + \gamma u$ 的弱解，即

$$B_\gamma[u, v] = \langle \gamma u + f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(U),$$

这进一步等价于

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) \Leftrightarrow (I - \gamma L_\gamma^{-1})u = L_\gamma^{-1} f.$$

现在令$Ku = \gamma L_\gamma^{-1} u$以及$h = L_\gamma^{-1} f$，则有

$$u \text{ 是 (2.0.1) 的一个弱解 } \Leftrightarrow (I - K)u = h.$$

第 2 步：证明 K 是 $L^2(U)$ 上的紧算子。 由于 L_γ 满足 Lax-Milgram 定理的假设，据强制性可知如果存在 $v \in H_0^1(U)$ 和 $g \in L^2(U)$ 使得 $L_\gamma v = g$ 在弱意义下成立，即 $B_\gamma[v, \varphi] = (g, \varphi)_{L^2(U)}$ 对所有 $\varphi \in H_0^1(U)$ 成立，那么

$$\beta\|v\|_{H_0^1(U)}^2 \leqslant B_\gamma[v, v] = (g, v)_{L^2(U)} \leqslant \|g\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \leqslant \|g\|_{L^2(U)}\|v\|_{H_0^1(U)},$$

从而给出

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} = \gamma\|v\|_{H_0^1(U)} \leqslant C\|g\|_{L^2(U)} \quad \text{对于某个 } C > 0.$$

因此$K: L^2(U) \to H_0^1(U)$ 是一个有界线性算子。另一方面我们有紧嵌入 $H_0^1(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)$，因此 K 作为一个 $L^2(U) \to L^2(U)$ 的有界线性算子，在 $L^2(U)$ 上也是一个紧算子，这是命题 2.3.1(2) 的结论。

第 3 步：Fredholm 二择一的应用。 现在我们在定理 2.3.2 中取 $X = L^2(U)$, $K = \gamma L_\gamma^{-1}$，得到两种可能性。

- 情况 1：$N(I-K) = \{0\}$. 该情况下给定任何 $h \in L^2(U)$，方程 $(I-K)u = h$ 在 $L^2(U)$ 中有唯一解。然后根据第 1 步，这个 u 也给出了 (2.0.1) 的一个弱解。
- 情况 2：$N(I-K) \neq \{0\}$. 该情况下我们必有 $\gamma \neq 0$. 据定理 2.3.2知道齐次方程 $u - Ku = 0$ 在 $L^2(U)$ 中有非零解且 $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)$.

第 4 步：验证解的存在性 $\Leftrightarrow (f, v) = 0\ \forall v \in N^*$。 令 v 是 U 中（带有零边值的）方程 $L^* v = 0$（或等价地 $v - K^* v = 0$）的弱解。我们有

$$(h, v) = \gamma^{-1}(Kf, v) = \gamma^{-1}(f, K^* v) \overset{v=K^*v}{=\!=\!=} \gamma^{-1}(f, v).$$

所以$(I-K)u = h$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 对任意 $v \in N^* := N(I-K^*)$ 成立 $\langle h, v\rangle = 0 \Leftrightarrow (f, v) = 0.$ □

现在我们得到如下存在性定理。

定理 2.3.5 (弱解第三存在性定理). *存在一个至多可数的集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}$，使得如下边值问题对于每个给定的$f \in L^2(U)$ 有唯一弱解当且仅当 $\lambda \notin \Sigma$*

$$Lu = \lambda u + f \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

若Σ 是一个无限集，那么 $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ 是一个单调不减序列，且 $\lambda_k \to +\infty$.

我们称 Σ 为算子 L 的（实）谱。上述定理表明边值问题

$$Lu = \lambda u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

具有非平凡解 $w \not\equiv 0$ 当且仅当 $\lambda \in \Sigma$，在这种情况下 λ 被称为**L 的特征值**，而 w 被称为对应的**特征函数**。定理 2.3.5 说明 L 的特征值必是一个趋于 $+\infty$ 的不减序列。

证明. 令 γ 为定理 2.2.3 中的常数并假设 $\lambda > -\gamma$，不失一般性地假设 $\gamma > 0$. 据 Fredholm 二择一，边值问题

$$Lu = \lambda u + f \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U$$

对每个给定的 $f \in L^2(U)$ 存在唯一弱解，当且仅当如下齐次问题只有零解

$$Lu = \lambda u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

这件事情成立当且仅当 $u=0$ 是如下方程的的唯一弱解:

$$Lu+\gamma u=(\lambda+\gamma)u \text{ in } U, \quad u=0 \text{ on } \partial U.$$

最后一个方程恰好在 $u=L_\gamma^{-1}(\gamma+\lambda)u=\frac{\gamma+\lambda}{\gamma}Ku$ 时成立，其中 $Ku:=\gamma L_\gamma^{-1}u$. 我们知道若 $u=0$ 是唯一的弱解，那么 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ 就不是 K 的特征值。因此可见如果 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ 不是 K 的特征值，那么如下方程就有唯一解

$$Lu=\lambda u+f \text{ in } U, \quad u=0 \text{ on } \partial U$$

因为$K\in\mathfrak{C}(L^2(U))$，据定理 2.3.3，我们知道 K 的特征值要么是一个有限集，要么是一个趋于 0 的序列。这等价于当特征值有无穷多个时必有 $\lambda_k\to+\infty$，因为 $\gamma>0$ 是给定的且 λ 仅出现在 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ 的分母中。 □

习题 2.3

习题 2.3.1. *令Σ是L的全体特征值构成的集合。给定实数 $\lambda\notin\Sigma$ 和函数 $f\in L^2(U)$，设 $u\in H_0^1(U)$ 为如下方程的弱解*

$$Lu=\lambda u+f \text{ in } U, \quad u=0 \text{ on } \partial U.$$

证明：存在常数 $C>0$ 使得 $\|u\|_{L^2(U)}\leqslant C\|f\|_{L^2(U)}$.（提示：反证法。）

2.4 线性椭圆算子的特征值问题

本节我们考虑椭圆算子的特征值问题

$$Lw=\lambda w \text{ in } U, \quad w=0 \text{ on } \partial U. \tag{2.4.1}$$

这里 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是具有光滑边界 ∂U 的有界区域（这意味着连通性）。为了简单起见，我们只考虑对称椭圆算子的情况，即假设

$$Lu=-\partial_j(a^{ij}\partial_i u), \quad a^{ij}=a^{ji}, \quad a^{ij}\in C^\infty(\overline{U}). \tag{2.4.2}$$

因此相应的双线性型也是对称的：对于任何 $u,v\in H_0^1(U)$成立$B[u,v]=B[v,u]$.

2.4.1 特征函数系的正交性

第一个定理给出的对称椭圆算子的特征值和特征函数的初步结论

定理 2.4.1 (对称椭圆算子的特征值). *L 的每个特征值都是实数。进一步地，若我们根据每个特征*

值的（有限）重数重复列出，我们有 $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，其中

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty.$$

最后，存在 $L^2(U)$ 的一组标准正交基 $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，其中 $w_k \in H_0^1(U)$ 是对应于每个 $k \in \mathbb{N}^*$ 的特征值 λ_k 的特征函数：

$$Lw_k = \lambda_k w_k \text{ in } U, \quad w_k = 0 \text{ on } \partial U.$$

注记 2.4.1. 据2.5节中的正则性理论，a^{ij}的光滑性可以推出$w_k \in C^\infty(U)$，并且实际上有 $w_k \in C^\infty(\overline{U})$（这要求 ∂U 也是 C^∞ 的）。

在证明这个定理之前，让我们简要回顾一下对称紧算子的谱理论。

对称紧算子的谱理论

设H是复Hilbert空间。

定义 2.4.1. 我们称有界线性算子 $A : H \to H$是**对称的**，是指对所有 $x, y \in H$ 有 $(Ax, y) = (x, Ay)$. 这里 $(\cdot,\cdot)$ 是 H 的内积。容易看出 A 是对称的当且仅当 $A = A^*$.

命题 2.4.2. 设$A : H \to H$ 为一个有界线性算子。那么 A 是对称的当且仅当对于任何 $x \in H$ 有 $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. 此情况下我们进一步有

(1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$，且对任意的 $x \in H, \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{Im}\,\lambda \neq 0$ 有 $\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{\|x\|}{|\mathbf{Im}\,\lambda|}$.

(2) 令 $H_1 \subset H$ 是 H 的一个 A-不变闭子空间，则 $A|_{H_1}$ 在 H_1 上也是对称的。

(3) 对于任何 $\lambda, \lambda' \in \sigma_p(A)$ 且 $\lambda \neq \lambda'$，有 $N(\lambda I - A) \perp N(\lambda' I - A)$.

(4) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

在 Hilbert 空间上，对称紧算子的谱和结构与欧氏空间中实对称阵的特征值和结构非常相似。特别地，我们知道任何实对称方阵都是可对角化的，且对角元恰好是特征值，这也说明实对称矩阵的特征向量给出了欧氏空间的一组正交（归一化后为标准正交）基；此外二次型的临界值也是特征值。这些性质对于 Hilbert 空间上的对称紧算子也成立。

命题 2.4.3. 设$A \in \mathfrak{C}(H)$ 是对称的，则存在 $x_0 \in H$，$\|x_0\| = 1$，使得

$$\lambda := |(Ax_0, x_0)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|, \quad Ax_0 = \lambda x_0.$$

命题 2.4.4. 设$A \in \mathfrak{C}(H)$ 是对称的。那么存在一个至多可数的实数列 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，其唯一可能的聚点（如果存在）是 0，使得 $\{\lambda_k\}$ 恰好是 A 的特征值。此外存在 H 的一组标准正交基 $\{e_k\}$ 使得

$$x = \sum_{k\geqslant 1} (x, e_k) e_k, \quad Ax = \sum_k \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

命题 2.4.5 (Courant极小极大刻画). 设$A \in \mathfrak{C}(H)$ 是对称的，且有特征值 $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0 > \cdots \geqslant \lambda_2^- \geqslant \lambda_1^-$. 那么

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \qquad \lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.$$

这里 E_{n-1} 可以是 H 的任何 $(n-1)$ 维闭子空间。

我们现在证明定理 2.4.1.

定理2.4.1的证明. 设$S = L^{-1} : L^2(U) \to L^2(U)$. 在之前的章节中我们已经证明了 $S \in \mathfrak{C}(L^2(U))$，故只需验证 S 在 $L^2(U)$ 上是对称的。事实上，任取$f, g \in L^2(U)$ 并令 $u := Sf, v := Sg$，则$u, v \in H_0^1(U)$ 分别是 $Lu = f$ 和 $Lv = g$（具有 Dirichlet 边界条件）的弱解。因此我们有

$$(Sf, g)_{L^2(U)} = (u, g)_{L^2(U)} = B[v, u] = B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)} = (f, Sg)_{L^2(U)}.$$

进一步地，对于任何 $f \in L^2(U)$，我们有 $(Sf, f) = (u, f) = B[u, u] \geqslant 0$。据命题 2.4.4 可知，$S$ 的特征值全为**正实数**，且相应的特征函数构成了 $L^2(U)$ 的一组标准正交基。对 S 的任何特征值（设为 $\eta > 0$），如果对于某个 $0 \neq w \in H_0^1(U)$ 有 $Sw = \eta w$，则这等价于 $Lw = \lambda w$，其中 $\lambda = \eta^{-1}$。 □

我们在此指出，椭圆算子特征值的分布和特征函数的行为研究在数学物理中极其重要，至今仍有许多未解决的问题。在以往的研究中， H. Weyl证明了一个里程碑式的结论：在具有光滑边界的有界区域 $U \subset \mathbb{R}^d$ 中，$(-\Delta)$算子在 U 中（零边值条件）的特征值满足

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_k^{d/2}}{k} = \frac{(2\pi)^d}{\mathcal{L}^d(U)\alpha(d)}.$$

我们将在下一节中给出 L 的最小特征值 λ_1 的刻画定理。$\lambda_1 > 0$ 也被称为**主特征值**。

2.4.2 对称椭圆算子的主特征值变分原理

本节证明对称椭圆算子最小特征值的变分原理。

定理 2.4.6 (主特征值变分原理). 设$\lambda_1 > 0$ 为具有Dirichlet零边值的对称椭圆算子 L（如 (2.4.1)-(2.4.2) 所定义）的主特征值。

(1) 主特征值有如下变分刻画

$$\lambda_1 = \min\{B[u, u] | u \in H_0^1(U), \ \|u\|_{L^2(U)} = 1\}. \tag{2.4.3}$$

(2) 上述极小值在u取成 U内一个<u>不变号的光滑函数</u> w_1 时达到，该w_1是特征值问题的解

$$Lw_1 = \lambda_1 w_1 \text{ in } U, \quad w_1 = 0 \text{ on } \partial U.$$

(3) 最后，若 $u \in H_0^1(U)$ 是如下方程的任一弱解

$$Lu = \lambda_1 u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U,$$

那么 u 是 w_1 的常数倍。这表明 λ_1 必须是单特征值。特别地，我们有 $0 < \boxed{\lambda_1 < \lambda_2} \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$

证明. 首先我们知道 L 的特征函数（记作$\{w_k\}$）构成 $L^2(U)$ 的一组标准正交基，因此有 $(w_k, w_l)_{L^2(U)} = \delta_{kl}$. 此外注意到

$$B[w_k, w_l] = \lambda_k(w_k, w_l) = \lambda_k \delta_{kl} \qquad k, l \in \mathbb{N}^*,$$

这表明 $\{w_k\}$ 构成了 $H_0^1(U)$ 的一个$\underline{\text{正交子集}}$（其内积定义为 $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(U)} = B[\cdot,\cdot]$）。对(1)只需证明 $\{w_k\}$ 也给出了 $H_0^1(U)$ 的一组$\underline{\text{正交基}}$。

断言. $\{w_k/\sqrt{\lambda_k}\}$ 构成了 $H_0^1(U)$ 的一组标准正交基。

证明该断言，则只需证明对于任意的 $k \in \mathbb{N}^*$，$B[w_k, u] = 0$ 能推出 $u = 0$. 而这是容易的，因为任一个 $u \in H_0^1(U)$ 也属于 $L^2(U)$，所以u可以展开为 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j w_j$，于是

$$B[w_k, u] = \sum_{j=1}^{\infty} B[w_k, d_j w_j] = d_k \lambda_k (w_k, w_k)_{L^2(U)} = 0 \Rightarrow d_k = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

今不妨设 $\|u\|_{L^2(U)} = 1$，于是我们得到 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j^2 = 1$，进一步可得下式在 $H_0^1(U)$ 中收敛。

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \sqrt{\lambda_j} \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}},$$

据此断言很容易就推出：对于任何具有上述 $H_0^1(U)$ 展开式的 u，我们有

$$B[u, u] = \sum_{j=1}^{\infty} d_j^2 \lambda_j \geqslant \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} d_j^2 = \lambda_1,$$

且等号成立当且仅当 $u = w_1$. (1)证毕。

(2) 的证明依赖强极大值原理（定理 2.6.6）。首先我们作出如下断言

断言. 若$u \in H_0^1(U)$ 满足 $\|u\|_{L^2(U)} = 1$，则u是如下特征值问题的弱解当且仅当 $B[u, u] = \lambda_1$.

$$Lu = \lambda_1 u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

断言的证明. 断言的必要性部分是显然的，用$B[u, v]$的定义就能证出。接下来证明充分性，设 $u \in$

$H_0^1(U)$ 满足 $\|u\|_{L^2(U)} = 1$ 且 $B[u,u] = \lambda_1$, 那么我们可以将 u 展开为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k w_k$，其中 $d_k = (u, w_k)_{L^2(U)}$ 且 $\sum_k d_k^2 = 1$. 现在我们计算 $B[u,u]$：

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \lambda_1 = B[u,u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0,$$

上式表明对所有满足 $\lambda_k > \lambda_1$ 的 k 必有 $d_k = 0$，而 λ_1 的重数有限，故有

$$\text{存在} m \in \mathbb{N}^*,\ \ u = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k)_{L^2(U)} w_k, \quad Lw_k = \lambda_1 w_k \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant m.$$

这说明 $Lu = \lambda_1 u$ 在弱意义下成立，断言证毕。 □

据此断言，我们可以证明(2). 现在假设 u 是如下特征值问题的一个非零弱解

$$Lu = \lambda_1 u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U,$$

我们要证明在 U 中要么$u > 0$恒成立，要么$u < 0$恒成立。不妨设 $\|u\|_{L^2(U)} = 1$，并令

$$\alpha := \int_U (u^+)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \beta := \int_U (u^-)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其中 $u^+ := \max\{0, u\}$ 且 $u^- := \max\{0, -u\}$ 满足 $u = u^+ - u^-$ 和 $|u| = u^+ + u^-$. 那么 $\int_U u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$ 意味着 $\alpha + \beta = 1$. 据命题 1.2.4，我们知道 $u^\pm$ 也属于 $H_0^1(U)$，且

$$\partial u^+ = \begin{cases} \partial u & \text{a.e. on } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. on } \{u \leqslant 0\}, \end{cases} \qquad \partial u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. on } \{u \geqslant 0\} \\ -\partial u & \text{a.e. on } \{u < 0\}, \end{cases}$$

因此有

$$B[u^+, u^-] = \int_U a^{ij} \partial_i u^+ \partial_j u^- \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\text{因为 } \partial u^+, \partial u^- \text{ 至少有一个为零}).$$

现在由断言以及$B[\cdot,\cdot]$的双线性可知

$$\lambda_1 = B[u,u] = B[u^+ - u^-, u^+ - u^-] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-] \geqslant \lambda_1 \alpha + \lambda_1 \beta = \lambda_1.$$

这里最后一个不等式成立用到了(1)的结论和$u^\pm \in H_0^1(U)$. 现在上面的不等式被迫等号成立，即 $B[u^\pm, u^\pm] = \lambda_1 \|u^\pm\|_{L^2(U)}^2$. 据断言知，**$u^\pm$也是$L$的主特征值$\lambda_1$对应的特征函数。** 据$a^{ij} \in C^\infty(\overline{U})$以及椭圆正则性定理（见第 2.5 节），我们可证得 $u^\pm \in C^\infty(U)$. 所以我们在 U 中有 $Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geqslant 0$.

（现在这是一个经典解，不仅是弱解!）由于 U 连通，据强极大值原理（定理 2.6.6）有

$$\text{要么 } u^+ > 0 \text{ 在 } U \text{ 中恒成立}, \qquad \text{要么 } u^+ = 0 \text{ 在 } U \text{ 中恒成立}.$$

接下来我们分别讨论这两种情况

(a) 若在 U 中 $u^+ > 0$，那么结论得证，因为$u^+ > 0$恒成立自然推出$u > 0$恒成立。

(b) 若在 U 中 $u^+ = 0$，那么在 U 中有 $u \leqslant 0$恒成立。情况(b)中又分为两种不同情况

(b-1) 若在 U 中始终有 $u < 0$，那么结论得证。

(b-2) 若存在 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ 使得 $u(\boldsymbol{x}_0) = 0$，那么这也意味着 u^- 在 U 中达到其最小值。而 u^- 也是特征函数，我们在 U 中有 $Lu^- = \lambda_1 u^- \geqslant 0$恒成立。所以现在再用一次强极大值原理就得到 u^- 必须是一个常数，且这个常数必须为零（因为 $u^-(\boldsymbol{x}_0) = u(\boldsymbol{x}_0) = 0$）。而得到该结论的前提是$u^+ = 0$恒成立，结合刚刚证得的$u^- = 0$就迫使$u = 0$恒成立，这与$\|u\|_{L^2(U)} = 1$矛盾。

最后我们证明 (3). 如果 $u, \tilde{u}$ 都是如下特征值问题的非零弱解

$$Lu = \lambda_1 u \text{ in } U, \quad u = 0 \text{ on } \partial U.$$

那么据(2)得知 $\int_U \tilde{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$，故存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_U u - C\tilde{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

但 $u - C\tilde{u}$ 也是对应于 λ_1 的特征函数，若它不恒为零，则据(2)知它在区域内不变号，进而积分不可能为零，所以我们证明了$u - C\tilde{u} = 0$在U中恒成立。因此$\lambda_1 > 0$ 必须是一个单特征值。 □

注记 2.4.2. (1) 的结论也可以写成

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{B[u,u]}{\|u\|_{L^2(U)}^2}.$$

本节的末尾我们介绍非对称椭圆算子的主特征值的性质，证明略去。假 $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\overline{U})$，其中 U 是边界光滑的有界区域，$[a^{ij}]$ 是对称的且在 U 中 $c \geqslant 0$。

定理 2.4.7 (非对称椭圆算子的主特征值)**.** 定义 $Lu = -a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u + cu$，其中 a^{ij}, b^i, c 满足上述条件。则

(1) 算子 L（带Dirichlet边界条件）存在一个实特征值 λ_1，其满足：如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是任何其他特征值，就必有 $\mathbf{Re}(\lambda) \geqslant \lambda_1$.

(2) 存在一个相应的特征函数 w_1，它在 U 内是正的。

(3) 特征值 λ_1 是单特征值。

习题 2.4

习题 2.4.1 (Courant 极小极大原理). 设 $Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$ 是对称椭圆算子。设L(带零边界条件)的特征值为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots$ 证明：对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$，有

$$\lambda_k = \max_{S\in\Sigma_{k-1}} \min_{\substack{u\in S^\perp \\ \|u\|_{L^2(U)}=1}} B[u,u],$$

其中 Σ_{k-1} 表示 $H_0^1(U)$ 全体 $(k-1)$ 维子空间构成的集合。

习题 2.4.2. 设$Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + b^i\partial_i u + cu$ 是一致椭圆算子，在零边界条件下其主特征值为 $\lambda_1 > 0$. 证明：对任意正整数k有如下极大极小刻画成立：

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{u\in C^\infty(\overline{U}) \\ u>0 \text{ in } U \\ u=0 \text{ on } \partial U}} \inf_{\boldsymbol{x}\in U} \frac{Lu(\boldsymbol{x})}{u(\boldsymbol{x})}$$

提示：考虑对应的伴随算子 L^* 的主特征值 λ_1 的特征函数 w_1^*，你可能需要用到定理 2.4.7。

习题 2.4.3. 考虑一族边界光滑的有界区域 $U(\tau) \subset \mathbb{R}^d$，它光滑地依赖于参数 $\tau \in \mathbb{R}$。随着 τ 的变化，$\partial U(\tau)$ 上的每个点以速度 $\mathbf{v}$ 移动。对于每个 τ，我们考虑由

$$-\Delta w = \lambda w \text{ in } U(\tau), \quad w|_{\partial U(\tau)} = 0$$

定义的特征值 $\lambda = \lambda(\tau)$ 和相应的特征函数 $w = w(\boldsymbol{x};\tau)$，并限制 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} = 1$. 设 λ, w 是 $\tau, \boldsymbol{x}$ 的光滑函数。证明：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = -\int_{\partial U(\tau)} \left|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x};\tau)\right|^2 (\mathbf{v}\cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\mathbf{v}\cdot N$ 是边界 $\partial U(\tau)$ 的法向速度。

提示：变分原理给出 $\lambda(\tau) = \int_{U(\tau)} |\nabla w(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，然后计算 $\lambda'(\tau)$，剩下的就是证明 $\int_{U(\tau)} \partial_\tau |\nabla w(\boldsymbol{x};\tau)|^2 = 2\lambda'(\tau)$，其中要利用 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} \equiv 1$ 来证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|w\|^2_{L^2(U(\tau))} = 0$.

注记 2.4.3. 本题的结论表明随着区域 U 的扩大，$(-\Delta)$ 的主特征值会变小。

问题 2.4

问题 2.4.1. 给出定理 2.4.6 (1) 的一个变分证明。定义泛函

$$I[w] = \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad w \in \mathcal{A} := \{w \in H_0^1(U) | \|w\|_{L^2(U)} = 1 \text{ in } U\}.$$

(1) 任取序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $I[u_n] \to m := \inf_{w\in\mathcal{A}} I[w]$. 证明：存在子列 $\{u_{n_k}\}$在$H_0^1(U)$中弱收敛到

某个u，且$I[u] \leqslant m$.

(2) 证明：$u \in \mathcal{A}$，因此 u 是所求的极小化子且满足 $I[u] = m$。（提示：用紧嵌入 $H_0^1(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)$。）

(3) 固定 $v \in H_0^1(U)$ 并选取$w \in H_0^1(U)$使得$\int_U uw \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$. 考虑由 $j(\tau,\sigma) := \int_U (u+\tau v+\sigma w)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 1$ 定义的扰动。证明：存在 $\phi \in C^1(\mathbb{R})$满足$\phi(0) = 0$，且对于任意充分小的 $|\tau|$ 有 $j(\tau,\phi(\tau)) = 0$. 然后验证

$$\phi'(0) = -\frac{\int_U uv \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_U uw \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}.$$

(4) 令$w(\tau) := \tau v + \phi(\tau)w$，然后对于充分小的 $|\tau|$令 $i(\tau) := I[u + w(\tau)]$. 利用$i'(0) = 0$证明存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得对任意$v \in H_0^1(U)$都有

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int_U uv \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(5) 证明 (4) 中的 λ 恰好是 λ_1，即 U 中具有Dirichlet零边值条件时 $(-\Delta)$ 的主特征值。

2.5 椭圆正则性定理

我们现在来讨论方程 $Lu = f$ 在 U 中的弱解 u 是否“足够正则”这个问题。设 $f \in L^2(U)$，由于 L 是一个二阶微分算子，我们期望解 u 在某种意义下是二阶可微的。然而我们仍然必须选择一类合适的函数空间来实现这种二阶可微性。事实上我们有：

- $f \in L^2(U) \Rightarrow u \in H^2(U)$.
- $f \in C(\overline{U}) \not\Rightarrow u \in C^2(\overline{U})$, 反例请参考习题 2.5.2.
- 对$\alpha \in (0,1)$, 成立$f \in C^{0,\alpha}(\overline{U}) \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}(\overline{U})$.

本节我们考虑 (2.0.1) 的$H_0^1(U)$-弱解的正则性，其中L的定义如(2.0.2)所述。当$f \in L^2(U)$时，首先应设法将u的可微性提高到二阶。事实上，如果我们考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的方程 $-\Delta u = f$，假设 u 是一个光滑解且当$|\boldsymbol{x}| \to \infty$时快速衰减到0，则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\partial_i u)(\partial_j\partial_j u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j\partial_i\partial_i u \,\partial_j u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\partial_j u)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2 u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

进一步地，若$f \in H^m$，则 u 的正则性“应当为” H^{m+2}。到最后可以证得：如果f 和 L 的系数都是 C^∞的，那么方程的解u也有C^∞正则性。这里需指出$H_0^1(U)$ 弱解的二阶（弱）导数存在性由下一节讨论的Sobolev函数差商性质所保证，从某种程度上来说，这与微积分里面证明导数存在时总是去考虑证明差商的逐点存在性的想法是类似的。

2.5.1 Sobolev函数的差商

在微积分中，当我们想证明一个函数 $f(\boldsymbol{x})$ 具有 ∂_i 导数时，只需验证差商的极限存在，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+he_i)-f(\boldsymbol{x})}{h}\text{ 存在.}$$

对于 Sobolev 函数，我们想要模仿该方法得到类似的结论，但该类极限的存在性是通过弱收敛而不是逐点收敛获得的。设$f:U\to\mathbb{R}$ 是 U 中的局部可积函数，且令 $V\Subset U$.

定义 2.5.1. 给定$\boldsymbol{x}\in V, h\in\mathbb{R}$充分小使得$0<|h|<\operatorname{dist}(V,\partial U)$，我们定义函数$f$在第$i$分量上尺度为$h$的差商

$$D_i^h f(\boldsymbol{x}):=\frac{f(\boldsymbol{x}+he_i)-f(\boldsymbol{x})}{h},\quad 1\leqslant i\leqslant d.$$

并记 $D^h f:=(D_1^h f,\cdots,D_d^h f)$.

命题 2.5.1 (差商与弱导数)**.** 如下两个结论成立。

(1) 设 $\underline{1\leqslant p<\infty}$ 且 $f\in W^{1,p}(U)$。那么存在常数$C>0$使得对任意 $V\Subset U$ 以及任意 $0<|h|<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial U)$ 都有

$$\|D^h f\|_{L^p(V)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(U)}.$$

(2) 设 $\underline{1<p<\infty}$，$f\in L^p(V)$，且存在常数 $C>0$ 使得

$$\|D^h f\|_{L^p(V)}\leqslant C,\ \ \forall 0<|h|<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial U).$$

那么

$$f\in W^{1,p}(V),\ \ \|\nabla f\|_{L^p(V)}\leqslant C.$$

注意，如果我们考虑**切向导数**对应的结论，那么 $V\Subset U$ 是多余的。

证明. (1) 由于 $p<\infty$，我们不妨假设 f 是光滑的（否则我们使用光滑逼近）。那么对任意$\boldsymbol{x}\in V$，$1\leqslant i\leqslant d$ 以及 $0<|h|<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial U)$，我们有

$$|f(\boldsymbol{x}+he_i)-f(\boldsymbol{x})|\leqslant|h|\int_0^1|\nabla f(\boldsymbol{x}+the_i)|\,\mathrm{d}t.$$

于是有

$$\int_V|D^h f|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\sum_{i=1}^d\int_V\int_0^1|\nabla f(\boldsymbol{x}+the_i)|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=C\sum_{i=1}^d\int_0^1\int_V|\nabla f(\boldsymbol{x}+the_i)|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.$$

这立即推出 $\|D^h f\|_{L^p(V)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(U)}$。

对 (2)，设$f \in L^p(U)$，我们只需注意到以下“分部积分”公式对于差商成立（实际上这只是变量替换的结果）：

$$\int_V f(D_i^h \varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_V (D_i^{-h} f)\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(V),\ 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{2.5.1}$$

由据$\|D_i^{-h} f\|_{L^p(V)}$关于h一致有界以及$1 < p < \infty$知，存在子列 $h_k \to 0$ 和 $v_i \in L^p(V)$ 使得

$$D_i^{-h_k} f \rightharpoonup v_i \qquad 在\ L^p(V)\ 中弱收敛.$$

注意这里 $1 < p < \infty$ 是必要的，否则 L^p 空间不是自反的，进而无法得到弱收敛。将其代回“分部积分”公式并取极限 $h_k \to 0$，我们得到

$$\int_U f\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V f\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\lim_{h_k\to 0}\int_V D_i^{-h_k} f\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_V v_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U v_i\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

因此v_i恰好是f的∂_i-弱导数，故$\nabla f \in L^p(V)$, $f \in W^{1,p}(V)$. □

2.5.2 椭圆内正则性定理

本节证明二阶椭圆方程的内部正则性定理。

定理 2.5.2 (内部椭圆正则性). 设 $a^{ij} \in C^1(U), b^i, c \in L^\infty(U)$ 且 $f \in L^2(U)$. 又设 $u \in H^1(U)$ 是方程 $Lu = f$ 在 U 中的一个弱解。那么 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$，且对任意开集 $V \Subset U$，我们有估计

$$\|u\|_{H^2(V)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \tag{2.5.2}$$

其中 $C > 0$ 仅依赖 V, U 以及 L 的系数。

注意内部正则性与 u 的边界值无关，因此不需要假设 $u \in H_0^1(U)$。此外由于 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$，我们实际上证得了$Lu = f$在$U$中几乎处处成立。因此$u$实际上在$U$中几乎处处给出了方程的点态解。

通过对 f 和 L 系数的可微阶数进行归纳，容易证明以下两个推论，证明略去。

推论 2.5.3 (高阶椭圆内部正则性). 设 $m \in \mathbb{N}$，$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$ 且 $f \in H^m(U)$. 又设 $u \in H^1(U)$ 是方程 $Lu = f$ 在 U 中的一个弱解。那么 $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(U)$，且对任意开集 $V \Subset U$，我们有估计

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leqslant C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \tag{2.5.3}$$

其中 $C > 0$ 仅依赖 m, V, U 以及 L 的系数。

推论 2.5.4 (C^∞ 椭圆内部正则性). 设 $a^{ij}, b^i, c, f \in C^\infty(U)$，又设$u \in H^1(U)$ 是 $Lu = f$ 在 U 中的一个弱解，则 $u \in C^\infty(U)$.

定理 2.5.2 的证明. 不妨设$b^i = c = 0$，否则将低阶项移到右侧。据$u \in H_0^1(U)$弱解定义可得

$$\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^1(U). \tag{2.5.4}$$

我们现在需要选取合适的 v 使得：

- 左侧(在分部积分后)给出 $D^h(\nabla u)$ 的 $L^2(U)$ 范数。
- v 在边界上为零。也就是说我们必须将所有要算的估计“局部化”到远离边界 ∂U 的地方。

满足第一个要求并不困难，但对第二个要求，我们应考虑在 v 中插入某些截断函数。固定一个开子集 $V \Subset U$ 并选取 W 使得 $V \Subset W \Subset U$。接着我们选取满足如下条件的**光滑截断函数** ζ：

$$\zeta = 1 \text{ in } V, \quad \zeta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \backslash W, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1.$$

这对于将所有要算的估计“局部化”到远离边界 ∂U 的地方是必要的。

令 $|h| > 0$ 充分小，并对 $1 \leqslant k \leqslant d$ 定义 $v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= -\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j (D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U a^{ij}\partial_i u D_k^{-h}(\partial_j(\zeta^2 D_k^h u))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\text{利用 (2.5.1)} \qquad &= \int_U D_k^h(a^{ij}\partial_i u)\partial_j(\zeta^2 D_k^h u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_U a^{ij}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_k)(D_k^h \partial_i u)\zeta^2 (D_k^h \partial_j u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + A_1
\end{aligned}$$

其中

$$A_1 := \int_U a^{ij}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_k)\,\partial_j(\zeta^2)\,(D_k^h\partial_i u)(D_k^h u) + (D_k^h a^{ij})\partial_i u(\zeta^2 D_k^h \partial_j u + \partial_j(\zeta^2)\,D_k^h u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 L 是一致椭圆的，我们有

$$\int_U a^{ij}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_k)\,(D_k^h \partial_i u)\zeta^2 (D_k^h \partial_j u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \theta \int_U \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

这给出了我们想要的 $\|\zeta(D_k^h \nabla u)\|_{L^2(U)}$. 而$A_1$直接控制如下：对于任何适当小的 $\varepsilon > 0$有

$$\begin{aligned}
|A_1| &\leqslant C\|a^{ij}\|_{C^1(U)}\left(\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}\|D_k^h u\|_{L^2(U)} + \|D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}\|\nabla u\|_{L^2(U)} + \|D_k^h u\|_{L^2(U)}\|\nabla u\|_{L^2(U)}\right) \\
&\leqslant \varepsilon\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C'}{\varepsilon}\left(\|D_k^h u\|_{L^2(U)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(U)}^2\right)
\end{aligned}$$

现在我们选取 $\varepsilon \in (0, \frac{\theta}{2})$ 使得 $\varepsilon\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}^2$ 可以被 $\theta\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}^2$ 吸收

$$\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \frac{\theta}{2}\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}^2 - C\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2. \tag{2.5.5}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\|D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\|_{L^2(U)}^2 \leqslant \|\nabla(\zeta^2 D_k^h u)\|_{L^2(U)}^2 &\leqslant C\left(\int_W |\zeta^2 \nabla D_k^h u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_W |\nabla(\zeta^2)||D_k^h u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) \\ &\leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 + \|\zeta(D_k^h \nabla u)\|_{L^2(U)}^2\right).\end{aligned}$$

再用带ε的 Young 不等式可得到

$$\int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \varepsilon\|v\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(U)}^2 \leqslant C\varepsilon\left(\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 + \|\zeta(D_k^h \nabla u)\|_{L^2(U)}^2\right) + C''\|f\|_{L^2(U)}^2.$$

选取 $\varepsilon \in (0, \frac{\theta}{4C})$, 我们就得到

$$\int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\theta}{4}\|\zeta D_k^h \nabla u\|_{L^2(U)}^2 + C\left(\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2\right) \tag{2.5.6}$$

结合(2.5.4), (2.5.5) 以及 (2.5.6) 可得

$$\int_V |D_k^h \nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_U \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C\int_U |f|^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

至此我们证明了$\nabla u \in H^1_{\mathrm{loc}}(U)$以及$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$，且有估计

$$\|u\|_{H^2(V)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}).$$

最后一步是用 $\|u\|_{L^2(U)}$ 替换 $\|u\|_{H^1(U)}$. 实际上在 (2.5.4) 中令$v := \zeta^2 u$就很容易得到结论。模仿上述步骤可以证得

$$\|u\|_{H^1(V)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

因此，我们得出结论

$$\|u\|_{H^2(V)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

□

2.5.3 *椭圆整体正则性定理

现在我们将椭圆正则性估计做到整个区域以证明弱解的整体正则性。本节证明以下结论：

定理 2.5.5 (椭圆边界正则性)**.** 设U 是一个具有 C^2 边界 ∂U 的有界开集。设 $a^{ij}\in C^1(\overline{U})$, $b^i,c\in L^\infty(U)$ 且 $f\in L^2(U)$，又设 $u\in H_0^1(U)$ 是 (2.0.1) 的弱解：

$$Lu=f \text{ in } U,\qquad u=0 \text{ on } \partial U.$$

那么 $u\in H^2(U)$，且满足

$$\|u\|_{H^2(U)}\leqslant C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(U)}). \tag{2.5.7}$$

这里常数 $C>0$ 依赖 U 和 L 的系数。

注记 2.5.1. 如果 $u\in H_0^1(U)$ 是 (2.0.1) 的唯一弱解，那么据习题 2.3.1，上述估计可以简化为

$$\|u\|_{H^2(U)}\leqslant C\|f\|_{L^2(U)}. \tag{2.5.8}$$

同样地，如果对 f 和 L 系数的可微阶数进行归纳，就很容易证明以下两个推论。

推论 2.5.6 (高阶椭圆整体正则性)**.** 设 $m\in\mathbb{N}$，$a^{ij},b^i,c\in C^{m+1}(\overline{U})$，$f\in H^m(U)$ 且 $\partial U\in C^{m+2}$。进一步假设 $u\in H_0^1(U)$ 是如下方程的弱解

$$Lu=f \text{ in } U,\qquad u=0 \text{ on } \partial U.$$

那么 $u\in H^{m+2}(U)$，且有估计

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)}\leqslant C(\|f\|_{H^m(U)}+\|u\|_{L^2(U)}), \tag{2.5.9}$$

其中常数 $C>0$ 依赖 m,U 和 L 的系数。如果 $u\in H_0^1(U)$ 是唯一的弱解，上述估计可以简化为

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)}\leqslant C\|f\|_{H^m(U)}. \tag{2.5.10}$$

推论 2.5.7 (C^∞ 椭圆整体正则性)**.** 设 $a^{ij},b^i,c,f\in C^\infty(\overline{U})$ 且 $\partial U\in C^\infty$，又设 $u\in H_0^1(U)$ 是如下方程的弱解

$$Lu=f \text{ in } U,\qquad u=0 \text{ on } \partial U.$$

则$u\in C^\infty(\overline{U})$.

定理 2.5.5 的证明. 首先局部正则性（定理 2.5.2）表明 $Lu=f$ 在 U 中 a.e. 成立，而不仅是在弱意义下成立。事实上定理 2.5.2 告诉我们：对任意$\varphi\in C_c^\infty(U)$都有 $B[u,\varphi]=(f,\varphi)$，因此 $(Lu-f,\varphi)_{L^2(U)}=0$，再用引理 1.1.2 即得$Lu-f=0$在$U$中几乎处处成立。

给定 $\boldsymbol{x}^0\in\partial U$，我们知道存在 $r>0$ 和 C^2 函数 $\gamma:\mathbb{R}^{d-1}\to\mathbb{R}$ 使得

$$U\cap B(\boldsymbol{x}^0,r)=\{\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}^0,r)|x_d>\gamma(x_1,\cdots,x_{d-1})\}.$$

此外存在微分同胚 Φ 和足够小的 $s>0$ 使得 $\boldsymbol{y}=\Phi(\boldsymbol{x})$ 以及

$$U' := B(\mathbf{0},s)\cap\{y_d>0\}\subset\Phi(U\cap B(\boldsymbol{x}^0,r)).$$

由于 U 有界，我们可用有限多个此类开球覆盖住边界 ∂U，并通过上述微分同胚将每个开集的弯曲边界拉直。因此为简单起见，我们可假设 $U=B(\mathbf{0},1)\cap\mathbb{R}^d_+$. 该情况下 $\partial_1,\cdots,\partial_{d-1}$ 是切向导数，而切向正则性已经满足定理 2.5.2 的结论，所以余下只要计算涉及 ∂_d 的法向导数估计。

令 $U=B(\mathbf{0},1)\cap\mathbb{R}^d_+, V=B(\mathbf{0},\frac{1}{2})\cap\mathbb{R}^d_+$. 选取截断函数 $\zeta\in C^\infty(U)$ 使得

$$\zeta=1 \text{ in } B(\mathbf{0},\frac{1}{2}),\quad \operatorname{Spt}\zeta\subset B(\mathbf{0},1),\quad 0\leqslant\zeta\leqslant1.$$

现在 u 是 (2.0.1) 的一个弱解，据定义我们得到

$$\int_U a^{ij}\partial_i u\partial_j v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\left(f-b^i\partial_i u-cu\right)v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\qquad\forall v\in H^1_0(U).\tag{2.5.11}$$

对于 $1\leqslant k\leqslant d-1$，在 (2.5.11) 中取 $v=-D^h_k(\zeta^2D^h_k u)$，模仿定理 2.5.2 的证明可得

$$\int_V|D^h_k\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|f|^2+|u|^2+|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\qquad\forall 1\leqslant k\leqslant d-1.\tag{2.5.12}$$

这实际上给出法向导数至多1阶时的二阶导数估计

$$\|\partial_i\partial_j u\|^2_{L^2(V)}\leqslant C\left(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|u\|^2_{L^2(U)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(U)}\right),\qquad\forall i+j<2d.\tag{2.5.13}$$

余下只需控制纯法向导数∂_d^2u，此时我们不必像上面那样计算差商，否则$\boldsymbol{x}+he_k$可能跑出这个区域。实际上，从方程本身可以看出：二阶法向导数$\partial^2_d u$可以直接用各个 $\partial_i\partial_j u$（$i+j<2d$，即至少有一个切向导数）以及低阶项表示出来，而这些项已经在 (2.5.13) 中得到了控制。具体来说，因为$Lu=f$ 在 U 中几乎处处成立（可见这一步是必要的!），所以有

$$a^{dd}\partial_d^2u=-\sum_{i+j<2d}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)+b^i\partial_i u+cu-f-\partial_d u\partial_d a^{dd}.$$

此外一致椭圆性条件意味着 $a^{dd}\geqslant\theta$，固有

$$\|\partial_d^2u\|^2_{L^2(V)}\leqslant C\left(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|u\|^2_{H^1(U)}\right).\tag{2.5.14}$$

模仿定理 2.5.2 证明中的最后一步，我们可以改进不等式右边如下：

$$\|\partial_d^2u\|^2_{L^2(V)}\leqslant C\left(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|u\|^2_{L^2(U)}\right),\tag{2.5.15}$$

这连同 (2.5.13) 就给出了我们想要的估计

$$\|u\|_{H^2(V)}^2 \leqslant C\left(\|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2\right). \tag{2.5.16}$$

□

习题 2.5

习题 2.5.1. 设$u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ 具有紧支集，且是 $\mathbb{R}^d$ 中的方程 $-\Delta u + c(u) = f$ 的一个弱解。这里 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，光滑函数$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $c(0) = 0$ 以及 $c' \geqslant 0$.证明: $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$。

提示：模仿内部正则性定理的证明，但不需要插入截断函数 ζ.

习题 2.5.2. 记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), B(\mathbf{0}, r) = B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^2$ 并要求 $R < 1$. 今考虑方程

$$\Delta u = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|\boldsymbol{x}|^2}\left(\frac{4}{\sqrt{-\ln|\boldsymbol{x}|}} + \frac{1}{2(-\ln|\boldsymbol{x}|)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

如果我们将上述方程右端项在原点处的值设为0，则它在 $\overline{B(\mathbf{0}, r)}$ 中是连续的。现在定义

$$u(\boldsymbol{x}) := \sqrt{-\ln|\boldsymbol{x}|}(x_1^2 - x_2^2).$$

证明：

(1) $u \in C(\overline{B(\mathbf{0}, r)}) \cap C^\infty(\overline{B(\mathbf{0}, r)}\backslash\{\mathbf{0}\})$ 在 $B(\mathbf{0}, r)\backslash\{\mathbf{0}\}$ 中满足上述方程，且边界条件为$u|_{\partial B(\mathbf{0}, r)} = \sqrt{-\ln R}(x_1^2 - x_2^2)$.

(2) $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}| \to 0} \partial_1^2 u = \infty$，这说明 $u \notin C^2(B(\mathbf{0}, r))$.

习题 2.5.3. 给出一个 $f \in L^1(U)$ 的反例，使得对于任意 $0 < |h| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}\,(V, \partial U)$ 有 $\|D^h f\|_{L^1(V)} \leqslant C$成立，但 $f \notin W^{1,1}(V)$.

习题 2.5.4. 本习题旨在补全当 $U \neq B(\mathbf{0}, 1) \cap R_+^d$ 时定理 2.5.5 的证明。如证明中所述，给定 $\boldsymbol{x}^0 \in \partial U$，存在 $r > 0$ 和C^2 函数 $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 使得

$$U \cap B(\boldsymbol{x}^0, r) = \{\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, r) | x_d > \gamma(x_1, \cdots, x_{d-1})\}.$$

此外存在微分同胚 Φ 和足够小的 $s > 0$ 使得 $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$（或 $\boldsymbol{x} = \Psi(\boldsymbol{y})$）且

$$U' := B(\mathbf{0}, s) \cap \{y_d > 0\} \subset \Phi(U \cap B(\boldsymbol{x}^0, r))\Theta$$

同时也记 $V' := B(\mathbf{0}, \frac{s}{2}) \cap \{y_d > 0\}$.

(1) 证明 $|\det(\nabla\Phi)| = 1$.

(2) 定义 $u'(\boldsymbol{y}) := u(\Psi(\boldsymbol{y}))$, 证明 $u' \in H_0^1(U')$ 是如下方程的弱解

$$L'u' = f' \text{ in } U', \qquad u' = 0 \text{ on } \partial U.$$

这里 $f'(\boldsymbol{y}) := f(\Psi(\boldsymbol{y}))$, 算子$L'$定义如下,

$$L'u' := -\partial_{y_l}({a'}^{kl}\partial_{y_k}u') + {b'}^{k}\partial_{y_k}u' + c(\Psi(\boldsymbol{y}))u'(\Psi(\boldsymbol{y}))$$

它仍为是一致椭圆的，其系数为

$${a'}^{kl} := a^{ij}(\Psi(\boldsymbol{y}))\frac{\partial\Phi^k}{\partial x_i}(\Psi(\boldsymbol{y}))\frac{\partial\Phi^l}{\partial x_j}(\Psi(\boldsymbol{y})), \quad {b'}^{k} := b^i(\Psi(\boldsymbol{y}))\frac{\partial\Phi^k}{\partial x_i}(\Psi(\boldsymbol{y})).$$

(3) 用 (2) 和定理 2.5.5 的证明方法推出

$$\|u'\|^2_{H^2(U')} \leqslant C\left(\|f\|^2_{L^2(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)}\right). \tag{2.5.17}$$

2.6 极大值原理

本节介绍椭圆 PDE 研究中最重要的工具之一——极大值原理(Maximum Principles). 极大值原理基于一个简单的观察：如果 $u \in C^2$ 在开集 U 中的一点 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ 处达到其最大值，那么

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \nabla^2 u(\boldsymbol{x}_0) \leqslant 0.$$

在此我们指出，极值原理方法不再是前几节那样基于L^2型范数估计的“能量法”。实际上，基于极大值原理得到的推论大多**刻画了逐点性质**，因此我们必须要求解属于 C^2（古典解）。

为了技术上的简便，我们在本节假设椭圆算子具有非散度形式 (2.0.3)，且具有**连续**系数。人们可能还会问：对于椭圆 PDE 的弱解，特别是当系数不具有上面所述的较好正则性时，是否可以证明任何**逐点估计**？答案是肯定的，但证明和结论都与我们在本节中将要讨论的内容大不相同。在第 2.7 节中，我们将介绍著名的 *De Giorgi–Moser* 迭代，它给出了具有粗糙系数的椭圆 PDE 弱解的 L^∞ 估计。

2.6.1 弱极值原理

设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是有界开集（未必连通）。

定理 2.6.1 (弱极大值原理). 设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $c = 0$.

- 若$Lu \leqslant 0$在Ω内恒成立，则$\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$. 此时称$u$是**下解** (subsolution).
- 若$Lu \geqslant 0$在Ω内恒成立，则$\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$. 此时称$u$是**上解** (supersolution).

特别地，若$Lu=0$在Ω内恒成立, 则$\max_{\overline{\Omega}}|u|=\max_{\partial\Omega}|u|$.

证明. 我们采用扰动法。

断言. 若$Lu<0$在Ω内恒成立，则$\max_{\overline{\Omega}}u=\max_{\partial\Omega}u$.

先假设断言成立来证明(1). 现在(1)的假设只有$Lu\leqslant 0$, 所以我们考虑对u作小扰动，定义$u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}):=u(\boldsymbol{x})+\varepsilon e^{\lambda x_1}$, 其中$0<\varepsilon\ll 1$, $\lambda>0$是一个充分大的待定常数. 直接计算可得：Lu^{ε}被一个关于λ的二次函数所控制，其二次项系数为负

$$Lu^{\varepsilon}=Lu+\varepsilon L(e^{\lambda x_1})\leqslant 0+\varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2a^{11}+\lambda b^1)\leqslant \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2\theta+\lambda\|b\|_{L^{\infty}(\Omega)}).$$

所以当λ充分大时, 就有$Lu^{\varepsilon}<0$在Ω内恒成立。据断言知$\max_{\overline{\Omega}}u^{\varepsilon}=\max_{\partial\Omega}u^{\varepsilon}$. 而$\varepsilon>0$, 所以

$$\max_{\overline{\Omega}}u\leqslant\max_{\overline{\Omega}}(u+\varepsilon e^{\lambda x_1})=\max_{\overline{\Omega}}u^{\varepsilon}=\max_{\partial\Omega}u^{\varepsilon}\leqslant\max_{\partial\Omega}u+\max_{\partial\Omega}\varepsilon e^{\lambda x_1}.$$

令 $\varepsilon\to 0_+$, 我们得到要证的结论$\max_{\overline{\Omega}}u=\max_{\partial\Omega}u$.

接下来只要证明断言。反证法：若存在内点$\boldsymbol{x}_0\in\Omega$使得$u(\boldsymbol{x}_0)=\max_{\overline{\Omega}}u$. 那么有

$$\partial_iu(\boldsymbol{x}_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant d),\quad \text{Hessian方阵}\nabla^2u(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0\ (\text{半负定})\Rightarrow\partial_i^2u(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant d.$$

若a^{ij}是对角阵，则我们已经证得想要的结论：因为此时可以结合$a^{ii}\geqslant\theta$得到$Lu(\boldsymbol{x}_0)=-a^{ii}\partial_i^2u\geqslant 0$, 从而$Lu\geqslant 0$在$\Omega$内恒成立，与断言的假设矛盾。一般情况下，由于$\{a^{ij}\}$是严格正定的实对称方阵，那么就存在正交方阵$\mathbf{O}=\{o_{ij}\}$使得

$$\mathbf{O}A\mathbf{O}^{\top}=\Lambda,\qquad \Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_d),\ \ \lambda_i\geqslant\theta,\ 1\leqslant i\leqslant d.$$

同时，我们也作对应的变量替换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+\mathbf{O}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 得到

$$\partial_{x_i}u=\sum_k o_{ki}\partial_{y_k}u,\qquad \partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l}o_{ki}(\partial_{y_ky_l}u)o_{lj}.$$

所以在$\boldsymbol{x}_0$处，我们算得

$$Lu(\boldsymbol{x}_0)=-a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=-(o_{ki}a^{ij}o_{lj})\partial_{y_k}\partial_{y_l}u=-\sum_{k=1}^d\lambda_k\partial_{y_k}^2u\geqslant 0,$$

这又与断言的假设矛盾。 □

若L的系数满足$c\geqslant 0$, 我们仍然可以证明类似的结论，方法与定理2.6.1完全一样，此处略去。

定理 2.6.2 ($c\geqslant 0$的弱极大值原理). 设$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $c\geqslant 0$在Ω内恒成立。

- 若$Lu \leqslant 0$在Ω内恒成立，则$\max\limits_{\overline{\Omega}} u \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. 即$u$的非负最大值在边界上达到。
- 若$Lu \geqslant 0$在Ω内恒成立，则$\min\limits_{\overline{\Omega}} u \geqslant -\max\limits_{\partial\Omega} u^-$. 即$u$的非正最小值在边界上达到。

特别地，若$Lu = 0$在Ω内恒成立，则有$\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$.

2.6.2 内梯度估计：Bernstein技巧

我们在学习古典偏微分方程时，可以利用平均值原理证明调和函数的梯度估计。但是当Laplace算子替换成一般系数椭圆算子(例如非散度型椭圆算子(2.0.3))时，或者欧氏空间换成黎曼流形时，平均值原理均不再成立。此情况下我们还能用的工具就只有极值原理和Hopf引理了。因此要估计$|\nabla u|$ 的逐点界，只需让 $\Delta(|\nabla u|^2)$ 尽量非负，然后用弱极值原理即可（这里考虑模长的平方是因为它更容易计算）；而如果要证明梯度的内估计（不考虑边界），我们则应该插入合适的截断函数，以将梯度估计限制在 U 的一个紧子集内。该方法被称作 **Bernstein 技巧**。

设椭圆算子L如(2.0.3)定义，并假设存在常数$\lambda, \Lambda > 0$使得 $\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2$ 对任意$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ 成立。

定理 2.6.3 (内梯度估计). *设$u \in C^3(U) \cap C^1(\overline{U})$ 满足 $Lu = f$ in U, 其中 $f \in L^\infty(U), a^{ij} \in C^1(U), b, c \in L^\infty(U)$, 且不妨设原点$O \in U$, 则对任意球$B(\mathbf{0}, R) \Subset U$, 成立梯度估计*

$$\sup_{B(\mathbf{0},R/2)} |\nabla u| \leqslant C\left(\frac{1}{R}\sup_{B(\mathbf{0},R)} |u| + \sup_{B(\mathbf{0},R)} |f|\right).$$

为了避免繁琐计算，我们以 $L = -\Delta$, $f = 0$, $R = 1$ 为例证明调和函数的内梯度估计，但我们不使用平均值原理等任何调和函数特有的性质。

定理 2.6.4 (调和函数的内梯度估计). *设$u \in C^3(B(\mathbf{0},1)) \cap C^1(\overline{B(\mathbf{0},1)})$是单位球$B(\mathbf{0},1)$内的调和函数。不用平均值原理证明：存在常数$C > 0$, 使得$\max\limits_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} |\nabla u| \leqslant C \max\limits_{\partial B(\mathbf{0},1)} |u|$成立。*

证明. 首先，直接计算可得

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2\sum_{i,j=1}^d (\partial_i\partial_j u)^2 + 2\sum_{i=1}^d \partial_i u\,\partial_i(\Delta u) = 2|\nabla^2 u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla(\Delta u). \tag{2.6.1}$$

该式称作**Bôchner公式**。把$\Delta u = 0$代入知上式最后一项为零，因此 $\Delta(|\nabla u|^2) \geqslant 0$, 进而 $|\nabla u|$ 在边界达到最大值。但是现在我们需要把梯度估计限制在 $B(\mathbf{0}, 1/2)$ 内，因此需要插入合适的截断函数。

对任意非负的截断函数$\varphi \in C_c^\infty(B(\mathbf{0},1))$, 我们计算可得

$$\Delta(\varphi|\nabla u|^2) = (\Delta\varphi)|\nabla u|^2 + 4(\nabla\varphi)^\top(\nabla^2 u)(\nabla u) + 2\varphi|\nabla^2 u|^2.$$

而据Cauchy-Schwarz不等式可得 $4|(\nabla\varphi)^{\top}(\nabla^2 u)(\nabla u)| \leqslant 2\varphi|\nabla^2 u|^2 + (2/\varphi)|\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2$. 因此我们得到

$$\Delta(\varphi|\nabla u|^2) \geqslant \left(\Delta\varphi - \frac{2|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)|\nabla u|^2.$$

但现在注意，$|\nabla\varphi|^2/\varphi$ 可能分母为零，因此我们需要选取合适的 φ 来避免这个情况。今选取 $\varphi = \eta^2$, 其中非负截断函数 $\eta \in C_c^\infty(B(\mathbf{0},1))$ 在 $B(\mathbf{0},\frac{1}{2})$ 内恒为1. 代入上式得到

$$\Delta(\eta^2|\nabla u|^2) \geqslant (2\eta\Delta\eta - 6|\nabla\eta|^2)|\nabla u|^2 \geqslant -C|\nabla u|^2,$$

其中$C > 0$只依赖η, d. 这个时候我们需要添加一项来补偿右端负项，而此时注意到

$$\Delta(u^2) = 2|\nabla u|^2 + 2u\Delta u = 2|\nabla u|^2,$$

因此 $\Delta(\eta^2|\nabla u|^2 + (C/2)u^2) \geqslant 0$. 据弱极大值原理得

$$\sup_{B(\mathbf{0},1)}(\eta^2|\nabla u|^2 + (C/2)u^2) = \sup_{\partial B(\mathbf{0},1)}(\eta^2|\nabla u|^2 + (C/2)u^2) = \frac{C}{2}\sup_{\partial B(\mathbf{0},1)} u^2.$$

而左边$\geqslant \sup\limits_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2|\nabla u|^2$，开根号即得结论。 □

2.6.3 Hopf引理和强极值原理

在许多情况下，弱极大值原理已经足够让我们控制椭圆 PDE 的解（或者下解）的逐点界。本节我们证明：在一个**连通**开集内的（下）解除非是常数，否则不能在内部达到其（非负）最大值，从而大大加强了极大值原理的结论。而它的证明依赖于对外法向导数 $\frac{\partial u}{\partial N}$在边界极大点处的细致分析。

引理 2.6.5 (Hopf引理). 设$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $c = 0$. 假设

- $Lu \leqslant 0$在Ω内恒成立;
- 存在边界点$\boldsymbol{x}^0 \in \partial\Omega$使得$u(\boldsymbol{x}^0) > u(\boldsymbol{x})$对任意$\boldsymbol{x} \in \Omega$成立;
- Ω在$\boldsymbol{x}^0$处满足内球条件 *(interior ball condition)*, 即存在球$B \subset \Omega$使得$\boldsymbol{x}^0 \in \partial B$.

则$\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0) > 0$, 其中$N$是球$B$在边界点$\boldsymbol{x}^0$处的单位外法向量。若$c \geqslant 0$, 则再加条件$u(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0$, 仍然可以保证同样的结论成立。

Hopf引理也可以导出强极值原理

定理 2.6.6 (强极大值原理). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是<u>有界区域</u>, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $c = 0$.

(1) 若在Ω中恒有$Lu \leqslant 0$, 且存在内点$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$使得$u(\boldsymbol{x}_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, 则$u$在$\Omega$内必定是常数。

(2) 若在Ω中恒有$Lu \geqslant 0$, 且存在内点$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$使得$u(\boldsymbol{x}_0) = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$, 则$u$在$\Omega$内必定是常数。

当$c \geqslant 0$时，我们也有类似结论

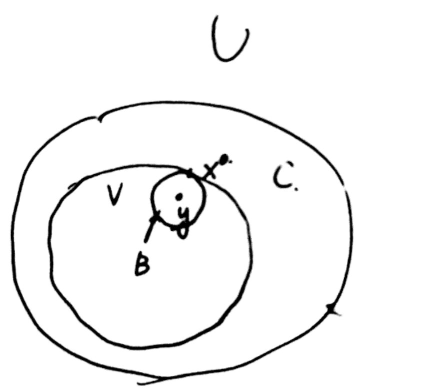
定理 2.6.7 ($c \geqslant 0$的强极大值原理). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $c \geqslant 0$.

(1) 若在Ω中恒有$Lu \leqslant 0$, 且存在内点$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$使得$u$在$\boldsymbol{x}_0$处达到非负最大值, 则$u$在$\Omega$内是常数。

(2) 若在Ω中恒有$Lu \geqslant 0$, 且存在内点$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$使得$u$在$\boldsymbol{x}_0$处达到非正最小值, 则$u$在$\Omega$内是常数。

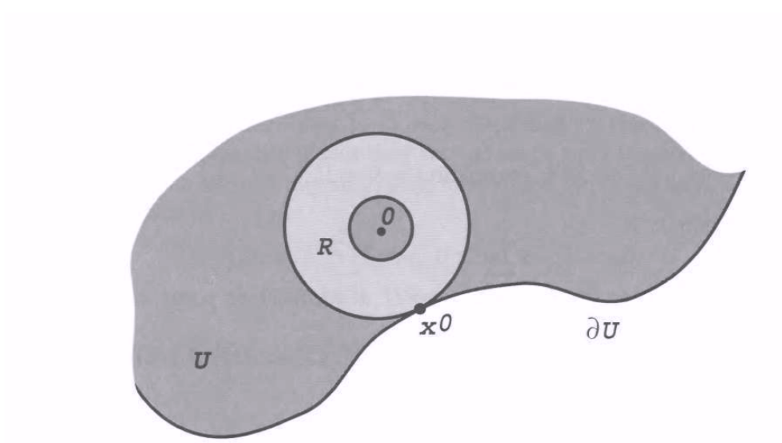
首先我们在 Hopf 引理成立的情况下证明强极值原理（$c = 0$）

证明. 设在 U 中有 $Lu \leqslant 0$，并记 $M := \max_{\overline{U}} u$ 且 $C := \{\boldsymbol{x} \in U | u(\boldsymbol{x}) = M\}$. 用反证法：假设集合 $V := \{\boldsymbol{x} \in U | u(\boldsymbol{x}) < M\} \neq \emptyset$. 现在选取一个满足 $\operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, C) < \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \partial U)$ 的点 $\boldsymbol{y} \in V$，并记 B 为位于 V 中且中心为 $\boldsymbol{y}$的最大球。那么存在 $\boldsymbol{x}^0 \in C$ （实际上是“切点”）使得 $\boldsymbol{x}^0 \in \partial B$.



务必注意这里U的连通性是必要的，否则$\operatorname{dist}(V, C)$可能严格正，从而$\boldsymbol{x}^0 \in C$可能不存在。现在$V$满足内球条件，据Hopf 引理得 $\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0) > 0$，其中$N$是$\partial B$的外单位法向量。这导致矛盾：$u$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处达到其最大值，这蕴含了 $\nabla u(\boldsymbol{x}^0) = \mathbf{0}$，进而$\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0) = N(\boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}^0) = 0$. □

关于Hopf引理本身，它的结论并不难理解：如果u在区域边界的某点$\boldsymbol{x}_0$上达到最大值，则在Ω内部靠近$\boldsymbol{x}_0$的地方，u的取值应当沿着该点处的外法向是递增的（否则u不可能在边界点达到最大值），这就说明$\boldsymbol{x}_0$处的外法向导数$\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0)$不可能是负的。不过若要证明$\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0)$是严格正的，还需要施加合适的扰动并仔细选取辅助函数。在此我们仅考虑 $c \geqslant 0$ 的情况（此时还要假设$u(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0$），而$c = 0$ 的情况（不要求$u(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0$）可以用同样的方法证明。



Hopf引理的证明. 为了方便显式构造辅助函数，不妨设球B为$B(\mathbf{0},r)$. 由Hopf引理的假设(2), 我们希望构造辅助函数v使得对任意充分小的$0<\varepsilon\ll 1$成立

i. $u(\boldsymbol{x}_0)\geqslant u(\boldsymbol{x})+\varepsilon v(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x}\in\partial B(\mathbf{0},r)\cup\partial B(\mathbf{0},r/2)$成立.

ii. $L(u+\varepsilon v)\leqslant 0$在环形区域$A:=B(\mathbf{0},r)\backslash\overline{B(\mathbf{0},r/2)}$成立.

iii. $v|_{\partial B(\mathbf{0},r)}=0$, $v|_{\partial B(\mathbf{0},r/2)}\geqslant 0$, $\frac{\partial v}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0)<0$.

如果能构造出这样的函数v, 则由弱极大值原理可得$u(\boldsymbol{x})+\varepsilon v(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0$在$A$中恒成立, 以及$u(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon v(\boldsymbol{x}_0)-u(\boldsymbol{x}_0)=0$. 所以函数$u+\varepsilon v-u(\boldsymbol{x}_0)$在$\boldsymbol{x}_0$处的外法向导数必定是非负的，因此得到$\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0)\geqslant -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0)>0$.

这样的辅助函数v可以选取为$v(\boldsymbol{x})=e^{-\lambda|\boldsymbol{x}|^2}-e^{-\lambda r^2}$的形式，其中$\boldsymbol{x}\in B(\mathbf{0},r)$, $\lambda>0$是一个待定的充分大的常数。然后直接计算可得

$$\begin{aligned}Lv=&-a^{ij}\partial_i\partial_j v+b^i\partial_i v+cv=e^{-\lambda|\boldsymbol{x}|^2}\left(a^{ij}(-4\lambda^2x_ix_j+2\lambda\delta^{ij})-2\lambda b^ix_i+c(1-e^{-\lambda(r^2-|\boldsymbol{x}|^2)})\right)\\ &\leqslant e^{-\lambda|\boldsymbol{x}|^2}(-4\theta\lambda^2|\boldsymbol{x}|^2+2\lambda\sum_i a^{ii}+2\lambda|b||\boldsymbol{x}|+c).\end{aligned}$$

在环形区域A中我们可算得

$$Lv\leqslant e^{-\lambda|\boldsymbol{x}|^2}(-\theta\lambda^2r^2+2\lambda\sum_i a^{ii}+2\lambda|b|r+c)$$

对$\boldsymbol{x}\in A$，上式右端在$\lambda>\frac{d}{2r^2}$充分大时必定是$\leqslant 0$的，而其它性质也可以直接验证。 □

2.6.4 Harnack不等式：对数梯度估计

极大值原理给出了椭圆方程解的极值估计，接下来我们想进一步控制解的振幅。本节证明Harnack 不等式：在远离边界的有界子区域中，$Lu=0$的非负解的最小值和最大值是可比较的。

定理 2.6.8 (Harnack不等式). *设$0\leqslant u\in C^2(\Omega)$是方程$Lu=0$在$\Omega$内的解，其中算子$L$具有形式(2.0.3). 设$V\Subset\Omega$是连通子集，则存在常数$C>0$(仅依赖$V$和$L$的系数)使得如下不等式成立*

$$\sup_V u\leqslant C\inf_V u.$$

与调和函数的Harnack不等式相比，我们现在不再有平均值原理这一重要性质，从而“滚球法”证明（见古典偏微分方程课程）不再奏效。接下来我们介绍证明Harnack不等式的一般方法：**对数梯度估计 (logarithmic gradient estimates).**

接下来我们不妨假设$u>0$, 否则考虑加上一个常值小扰动$u+\varepsilon>0$. 给定$V\Subset\Omega$, 我们希望证明存在 $C>0$ 使得 $u(\boldsymbol{x})\leqslant Cu(\boldsymbol{y})$对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$成立. 而这个不等式等价于说$|\ln\frac{u(\boldsymbol{x})}{u(\boldsymbol{y})}|\leqslant C'$对某个常数$C'>0$成立。现在再对函数$g(t):=\ln u(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})$)用微积分基本定理和链式法则得到下式

（这种写法以后还会经常用到）

$$\ln\frac{u(\boldsymbol{x})}{u(\boldsymbol{y})}=\ln u(\boldsymbol{x})-\ln u(\boldsymbol{y})=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\int_0^1\nabla\ln u(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}t,$$

所以问题就转化为证明存在常数$C''>0$使得$\sup\limits_V|\nabla\ln u|\leqslant C''$. 这也说明了为什么我们将接下来要展现的证明方法命名为“对数梯度估计”。

有的人也许会问：为什么我们非要将Harnack不等式的证明转化为对数函数的估计呢？事实上我们可以考虑一个特殊情况，即调和函数的Harnack不等式。若u的调和函数，则$v:=\ln u$就满足$-\Delta v=|\nabla v|^2$, 再令$w=|\nabla v|^2$可得$\Delta w+2\nabla w\cdot\nabla v=2|\nabla^2 v|^2$. 所以问题就转化为对$v$作内梯度估计，从而可以用习题2.6.3的方法来完成证明，这些步骤是完全不依赖平均值原理的。

为了免去不必要的麻烦，接下来我们假设$b^i=c=0,\ u>0$来证明Harnack不等式。在证明的末尾，我们会以调和函数的Harnack不等式为例，稍加解释辅助函数选取的方法。

证明. 设$b^i=c=0,u>0$. 令$v=\ln u$, 则直接计算可得

$$u=e^v,\ \ \partial_i u=e^v\partial_i v,\ \ \partial_i\partial_j v=e^v(\partial_i v\partial_j v+\partial_i\partial_j v),$$

代入 $Lu=0$ 得到$a^{ij}(\partial_i\partial_j v+\partial_i v\partial_j v)=0$在$\Omega$中成立。现在令$w:=a^{ij}\partial_i v\partial_j v$, 则上式表明$w=-a^{ij}\partial_i\partial_j v$. 接下来我们作出断言

断言. 令 $b^k:=-2a^{kl}\partial_l v$. 则

$$-a^{kl}\partial_k\partial_l w+b^k\partial_k w\leqslant-\frac{\theta^2}{2}|\nabla^2 v|^2+C|\nabla v|^2. \tag{2.6.2}$$

断言的证明包含巨量的无聊计算，我们暂时先跳过它来看看断言成立之后能推出什么。

今选取光滑截断函数$\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$满足$0\leqslant\zeta\leqslant1,\ \zeta|_V=1$, 并定义辅助函数$z=\zeta^4 w$将$w$的取值局限在$V$里面。假设$z$在某点$\boldsymbol{x}_0\in\Omega$取得最大值，从而对$1\leqslant k\leqslant d$有$\partial_k w(\boldsymbol{x}_0)=0$, 从而

$$0=\partial_k z=\zeta^4\partial_k w+4\zeta^3 w\partial_k\zeta\Rightarrow\zeta\partial_k w+4(\partial_k\zeta)w=0,$$

以及

$$\partial_k\partial_l z=\zeta^4\partial_k\partial_l w+4\zeta^3\partial_l\zeta\partial_k w+12\zeta^2\partial_l\zeta+\partial_k\zeta w+4\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta w+4\zeta^3\partial_k\zeta\partial_l w.$$

接下来计算

$$\begin{aligned}
&-a^{kl}\partial_k\partial_l z+b^k\partial_k z\\
=&\zeta^4\left(-a^{kl}\partial_k\partial_l w+b^k\partial_k w\right)-12a^{kl}(\zeta^2\partial_l\zeta\partial_k\zeta)w-4a^{kl}(\zeta^3\partial_k\zeta)\partial_l w-4a^{kl}\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta\, w+4b^k\zeta^3\partial_k\zeta\, w\\
=&\zeta^4\left(-a^{kl}\partial_k\partial_l w+b^k\partial_k w\right)+O\left(\zeta^3|\nabla w|+\zeta^2 w+|\nabla v|\zeta^3 w\right)
\end{aligned}$$

其中最后一项中的 $|\nabla v|$ 是由不等式 $|b^k| \leqslant C|\nabla v|$ 给出的。

在$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$处，我们有$\partial_k z = 0, -a^{kl}\partial_k\partial_l z \geqslant 0$ (因为Hessian矩阵$\nabla^2 z$是半负定的), 所以得到

$$0 \leqslant \zeta^4\left(-a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k\partial_k w\right) + C'\left(\zeta^3|\nabla w| + \zeta^2|w| + |\nabla v|\zeta^3|w|\right). \tag{2.6.3}$$

据(2.6.2), (2.6.3) 以及一致椭圆条件，得到

$$0 \leqslant \zeta^4(-\frac{\theta^2}{2}|\nabla^2 v|^2 + C|\nabla v|^2) + C'\left(\zeta^3|\nabla w| + \zeta^2|w| + |\nabla v|\zeta^3|w|\right), \quad \text{at } \boldsymbol{x}_0.$$

由于 $w = -a^{ij}\partial_i\partial_j v$, 我们实际上得到

$$\zeta^4 w^2 \leqslant C''\left(\zeta^4|\nabla v|^2 + \zeta^3|\nabla w| + \zeta^2 w + \zeta^3|\nabla v|w\right), \quad \text{at } \boldsymbol{x}_0 \tag{2.6.4}$$

接下来我们分析如上不等式的右边

- $\zeta^3|\nabla v|w = (\zeta^2|\nabla v|)\zeta w \leqslant \varepsilon w\zeta^4|\nabla v|^2 + wC_\varepsilon\eta^2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\theta}\zeta^4 w^2 + C(\varepsilon)w\zeta^2$. 此处我们用了带$\varepsilon$的Young不等式, 以及$\theta|\nabla v|^2 \leqslant w$, 它由$w = a^{ij}\partial_i v\partial_j v$得到.
- $\zeta^4|\nabla w|$. 回忆我们有$\zeta\partial_k w + 4\partial_k\zeta w = 0$, 它表明$|\zeta\nabla w| \leqslant C|w|$, 从而$\zeta^3|\nabla w| \leqslant C\zeta^2|w|$.
- $\zeta^4|\nabla v|^2 \leqslant \zeta^2|\nabla v|^2 \leqslant \dfrac{\zeta^2 w}{\theta}$.

把上述估计代入 (2.6.4), 得到存在常数$C_1, C_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, 使得在$\boldsymbol{x}_0$处成立 $\zeta^4 w^2 \leqslant C_1\varepsilon\zeta^4 w^2 + C_2\zeta^2 w$. 今选取$\varepsilon < \frac{1}{2C_1}$, 得到

$$\zeta^4 w^2 \leqslant 2C_2\zeta^2 w \Rightarrow z = \zeta^4 w \leqslant 2C_2\zeta^2 \leqslant 2C_2, \quad \text{at } \boldsymbol{x}_0.$$

由于$z = \zeta^4 w$在$\boldsymbol{x}_0$达到最大以及$\zeta|_V = 1$, 结合$w \geqslant \theta|\nabla v|^2$知存在$C_0 > 0$满足$|\nabla v| \leqslant C_0$.

接下来只需证明断言成立。直接计算可得

$$\partial_l w = \partial_l a^{ij}(\partial_i v\partial_j v) + 2a^{ij}\partial_l\partial_i v\,\partial_j v, \qquad \partial_k\partial_l w = 2a^{ij}\partial_l\partial_i v\partial_k\partial_j v + 2a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v + R$$

其中$R := \partial_k\partial_l a^{ij}\,\partial_i v\,\partial_j v + 2\partial_l a^{ij}\partial_k\partial_i v\,\partial_j v + 2\partial_k a^{ij}\partial_l\partial_i v\partial_j v$, 其满足：对$\varepsilon > 0$, 成立$|R| \leqslant C(|\nabla v|^2 + |\nabla v||\nabla^2 v|) \leqslant \varepsilon|\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon)|\nabla v|^2$. 因此现在得到

$$-a^{kl}\partial_k\partial_l w = -R - 2a^{kl}a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v) - 2a^{kl}a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v. \tag{2.6.5}$$

该式的第一项可以由一致椭圆条件控制，因为系数矩阵$\{a^{ij}\}$是严格正定的实对称方阵，故存在方阵P使得$\{a^{ij}\} = P^\top P$, 进而有 $a^{kl}a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v) = (\nabla^2 v\cdot P)\cdot(\nabla^2 v\cdot P)^\top \geqslant \theta^2|\nabla^2 v|^2$. (2.6.5)中的第二

项包含了三阶导数，我们可以利用$w = a^{kl}\partial_k\partial_l v$将其降阶：

$$\begin{aligned}-a^{kl}a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v &= -\,a^{ij}\partial_j v a^{lk}\partial_i\partial_k\partial_l v = -a^{ij}\partial_j v\left(\partial_i(a^{kl}\partial_k\partial_l v) - \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v\right)\\ &= -\,a^{ij}\partial_j v(\partial_i w - \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v) = -\frac{1}{2}b^i\partial_i w + a^{ij}\partial_i a^{lk}\partial_j v\partial_k\partial_l v.\end{aligned}$$

我们把上述两项代入(2.6.5), 并结合$|R|$的估计，就得到

$$\begin{aligned}&-a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k\partial_k w \leqslant |R| - \theta^2|\nabla v|^2 + |a^{ij}\partial_i a^{lk}\partial_j v\partial_k\partial_l v|\\ &\leqslant |R| - \theta^2|\nabla^2 v|^2 + C|\nabla v||\nabla^2 v| \leqslant \varepsilon|\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon)|\nabla v|^2 - \theta^2|\nabla^2 v|^2\\ &\leqslant -\frac{\theta^2}{2}|\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon)|\nabla v|^2,\end{aligned}$$

其中我们用到了带ε的Young不等式，并取$\varepsilon \in (0, \frac{\theta^2}{2})$把带$\varepsilon$的项吸收掉。断言证毕。 □

注记 2.6.1 (辅助函数$\zeta^4 w$的选取). 读者也许会问为什么在辅助函数里面把ζ的幂次取成4，而不是像内梯度估计那样取成2或者是其它幂次？这也许可以从调和函数Harnack不等式的证明里面看出来。今假设$L = -\Delta$, $U = B(\mathbf{0}, 1)$, $V = B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$，设有光滑截断函数$\varphi$满足$0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi|_V = 1$, 我们计算$\Delta(\varphi w)$得到

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi w) + 2\nabla w\cdot\nabla(\varphi w) &= 2\varphi|\nabla^2 v|^2 + 2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla^2 v)\cdot(\nabla v)^\top + 2w\nabla\varphi\cdot\nabla v + (\Delta\varphi)w\\ &\geqslant \varphi|\nabla^2 v|^2 - 2|\nabla\varphi||\nabla v|^3 + \left(\Delta\varphi - \frac{4|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)|\nabla v|^2.\end{aligned}$$

若选取$\varphi = \zeta^4$并结合不等式 $|\nabla^2 v|^2 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{d}\partial_i^2 v \geqslant \frac{1}{d}(\Delta v)^2 = \frac{|\nabla v|^4}{d} = \frac{w^2}{d}$ 则可以证明$\Delta(\varphi w) + 2\nabla w\cdot\nabla(\varphi w)$具有不依赖$v$的下界（因为下式第一行右边诸项皆为$\zeta|\nabla v|$的幂次，且是首项系数为正的四次多项式，故一定有下界）

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta^4 w) + 2\nabla w\cdot\nabla(\zeta^4 w) &\geqslant \frac{1}{d}\zeta^4|\nabla v|^4 - 8\zeta^3|\nabla\zeta||\nabla v|^3 + 4\zeta^2(\zeta\Delta\zeta - 13|\nabla\zeta|^2)|\nabla v|^2\\ &\xlongequal{t=\zeta|\nabla v|} \frac{1}{2d}\zeta^4 w^2 + \frac{t^4}{2d} - 8|\nabla\zeta|t^3 + 4(\zeta\Delta\zeta - 13|\nabla\zeta|^2)t^2 \geqslant -C' \quad \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

我们现在保留$\frac{1}{2d}\zeta^4 w^2$这项是因为最终我们要估计$\zeta^4 w$的最大值。假设$\zeta^4 w$在内点$\boldsymbol{x}_0 \in B(\mathbf{0}, 1)$取到最大值，那么有$\nabla(\zeta^4 w) = 0$以及$\Delta(\zeta^4 w) \leqslant 0$在$\boldsymbol{x}_0$处成立，进而得到 $\zeta^4 w^2(\boldsymbol{x}_0) \leqslant 2C'd$. 这个$C'$现在依赖于维数$d$和截断函数$\zeta$. 若$w(\boldsymbol{x}_0) \geqslant 1$, 则 $\zeta^4 w^2(\boldsymbol{x}_0) \leqslant 2C'd$; 否则我们有$\zeta^4 w(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \zeta^4(\boldsymbol{x}_0)$. 所以无论如何都存在只依赖维数的常数$C > 0$使得$\zeta^4 w \leqslant C$在$B(\mathbf{0}, 1)$中恒成立。

如果我们将$\varphi=\zeta^4$换成ζ^2, 则会算出

$$\Delta(\zeta^2 w)+2\nabla w\cdot\nabla(\zeta^2 w)\geqslant \frac{1}{d}\zeta^2|\nabla v|^4-4\zeta|\nabla\zeta||\nabla v|^3+2\zeta\Delta\zeta|\nabla v|^2\underline{-16|\nabla\zeta|^2|\nabla v|^2}.$$

这样的话，上述不等式右边就不再是$t':=\sqrt{\zeta}|\nabla v|$的多项式（因为出现了带下划线的项），进而不能保证不等式右边有**不依赖v的**下界估计。

习题 2.6

除特别说明之外，本节习题均假设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域。

习题 2.6.1. 设u是方程$-a^{ij}\partial_i\partial_j u=0$在$U$内的光滑解，系数$a^{ij}\in C^1(\overline{U})$. 证明：

$$\max_U|\nabla u|\leqslant C(\max_{\partial U}|\nabla u|+\max_{\partial U}|u|).$$

提示：令$v=|\nabla u|^2+\lambda u^2$, 选取充分大的$\lambda$使得$Lv\leqslant 0$在$U$中恒成立。

习题 2.6.2. 设u是方程$-a^{ij}\partial_i\partial_j u=f$ in U, $u|_{\partial\Omega}=0$的光滑解，其中f有界。固定$\boldsymbol{x}^0\in\partial U$，我们称$C^2$函数$w$是$\boldsymbol{x}^0$处的**闸函数 (barrier function)**是指w满足如下条件：

$$Lw\geqslant 1 \text{ in } U,\ \ w(\boldsymbol{x}^0)=0,\ \ w\geqslant 0 \text{ on } \partial U.$$

证明：若w是$\boldsymbol{x}^0$处的一个闸函数，则存在常数$C>0$使得$|\nabla u(\boldsymbol{x}^0)|\leqslant C|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0)|$.

习题 2.6.3. 设$Lu=-a^{ij}\partial_i\partial_j u+b^i\partial_i u+cu$，且存在 $v\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ 使得 $Lv\geqslant 0$在 U 中成立，在 $\overline{U}$上恒有$v>0$. 证明：若$u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$在$U$中满足$Lu\leqslant 0$且$u|_{\partial U}\leqslant 0$，则$u$在$U$中必须是非正的。(提示：令 $w=\frac{u}{v}$ 并考虑 $\tilde{L}w=-a^{ij}\partial_i\partial_j w+\partial_i w(b^i-a^{ij}\partial_j v\cdot\frac{2}{v})$.)

习题 2.6.4 (调和函数的可去奇点). 设u是去心球$\check{B}(\mathbf{0},R):=B(\mathbf{0},R)\backslash\{\mathbf{0}\}\subset\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 2)$内的调和函数，且满足

$$u(\boldsymbol{x})=\begin{cases}o(|\boldsymbol{x}|^{2-d}) & d\geqslant 3\\ o(\ln|\boldsymbol{x}|) & d=2,\end{cases}\quad \text{as } |\boldsymbol{x}|\to 0.$$

证明：u在$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$处有定义，即$u$在球$B(\mathbf{0},R)$内是调和函数。

习题 2.6.5 (调和函数的Kelvin变换). 对$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$ $(d\geqslant 2)$, 我们定义它关于单位球面的反演点为$\boldsymbol{x}^*:=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$. 再定义函数$u(\boldsymbol{x})$的Kelvin变换为$(\mathcal{K}u)(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x}^*)|\boldsymbol{x}^*|^{d-2}=u(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2})|\boldsymbol{x}|^{2-d}$. 按照如下步骤证明：如果$u$是单位球内的调和函数，则$\mathcal{K}u$是单位球外部的调和函数。

(1) 对任意$1\leqslant i,j\leqslant d$, 证明: $\frac{\partial x_j^*}{\partial x_i}=\frac{\delta^{ij}}{|\boldsymbol{x}|^2}-\frac{2x_ix_j}{|\boldsymbol{x}|^4}$. 这里的 $\delta^{ij}=1$ if $i=j$, $\delta^{ij}=0$ if $i\neq j$. 据此证明$\nabla\boldsymbol{x}^*(\nabla\boldsymbol{x}^*)^\top=|\boldsymbol{x}|^{-4}I_d$, 其中 I_d 是$d\times d$ 单位方阵。

(2) 用(1)证明：$\Delta(\boldsymbol{x}^*)=2(2-d)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}$.

(3) 证明：$\Delta(\mathcal{K}u(\boldsymbol{x}))=\Delta(u(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2})|\boldsymbol{x}|^{2-d})=0.$

习题 2.6.6. 设$\Omega=\mathbb{R}^d\backslash\overline{B(\mathbf{0},1)}$, $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$满足

$$\Delta u=0 \text{ in } \Omega,\qquad u=0 \text{ on } \partial B(\mathbf{0},1).$$

(1) 若 $d=2$, 且 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}u(\boldsymbol{x})/\ln|\boldsymbol{x}|=0$，证明：$u$在$\Omega$内恒为零。

(2) 若 $d\geqslant 3$, 且 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}u(\boldsymbol{x})=0$，证明：$u$在$\Omega$内恒为零。

(3) 若 $d\geqslant 3$, 但只假设 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}u(\boldsymbol{x})/\ln|\boldsymbol{x}|=0$，此时$u$在$\Omega$内是否还恒等于零？证明你的结论。

提示：用习题 2.6.4 和习题 2.6.5(3) 的结论。

问题 2.6

问题 2.6.1. 证明：习题2.5.2中的方程没有属于$C^2(B(\mathbf{0},r))$的古典解。

提示：反证法，若存在这样的古典解$v\in C^2(B(\mathbf{0},r))$, 则考虑$w=u-v$, 其中$u$的定义如习题2.5.2所述。可见$w$是调和函数，且在去心圆盘$B(\mathbf{0},r)\backslash\{\mathbf{0}\}$上有界，利用习题 2.6.4将其延拓为整个圆盘上的调和函数，从而属于$C^2(B(\mathbf{0},r))$. 这与习题2.5.2的结论矛盾。

问题 2.6.2. 设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，$\lambda_1>0$是$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边值)的主特征值，$w_1\in C^\infty(\overline{U})$是对应$\lambda_1$的特征函数。证明：任给$g\in C^1(\overline{U})$，必存在常数$A,B$，使得$Aw_1(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant Bw_1(\boldsymbol{x})$对任意$\boldsymbol{x}\in\overline{U}$成立。

问题 2.6.3 (Carleman估计). 设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，权重函数 $\varphi\in C^2(\overline{U})$ 是严格凸的（即 Hess φ 严格正定）且满足非退化条件 $|\nabla\varphi|>0$ in $\overline{U}$. 请按照如下步骤证明 Carleman 估计：存在常数$C>0,\tau_0>0,\lambda_0>0$, 使得对任意的 $\lambda\geqslant\lambda_0,\tau\geqslant\tau_0$ 和 $u\in C_c^\infty(U)$, 成立不等式

$$\tau^3\int_U e^{2\tau\varphi}|u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\tau\int_U e^{2\tau\varphi}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U e^{2\tau\varphi}|\Delta u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(1) 令 $w=e^{\tau\varphi}u$, $P_\varphi w:=e^{\tau\varphi}\Delta(e^{-\tau\varphi}w)$. 证明: $P_\varphi w=Sw+Aw$, 其中

$$Sw:=\Delta w+\tau^2|\nabla\varphi|^2w,\qquad Aw:=-2\tau\nabla\varphi\cdot\nabla w-\tau(\Delta\varphi)w.$$

(2) 证明：

$$\int_U\tau^2|\nabla\varphi|^2w\,Aw\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\tau^3\int_U(\nabla\varphi)^\top(\nabla^2\varphi)(\nabla\varphi)|w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\tau^3\int_U|\nabla\varphi|^2\Delta\varphi|w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$
$$\int_U\Delta w\,Aw\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\tau\int_U(\nabla w)^\top(\nabla^2\varphi)(\nabla w)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\tau\int_U w(\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla w)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(3) 证明：利用(1)计算$\|P_\varphi w\|_{L^2}^2$, 再将(2)代入证明：当λ,τ充分大时，存在常数$C>0$使得

$$\tau^3\int_U |w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\tau\int_U |\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\|P_\varphi w\|_{L^2}^2.$$

(4) 将 w 换回 u 以导出 Carleman 估计。

注：这里假设 $|\nabla\varphi|$ 不退化是因为最终会发现 τ^3 的系数主要由 $|\nabla\varphi|^4$ 贡献，如果这项消失，那么无法让 τ^3 项占据主导，以吸收误差；另外权重函数 φ 必须满足**强伪凸性** (**strongly pseudo-convex**)，这里我们用“严格凸”这个更强条件代替它，进而可以利用 Hessian 方阵的正定性才能控制**所有方向的导数** $|\nabla w|^2$.

注记 2.6.2. 如果我们选取 $\varphi=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2$，那么 Carleman 估计可以视作 L^2 版本的 Hopf 引理。回忆证明 Hopf 引理时，我们用到 $\Delta(e^{\lambda\psi})=\lambda^2|\nabla\psi|^2e^{\lambda\psi}+\lambda(\Delta\psi)e^{\lambda\psi}$, 只要$\lambda$充分大，那么第一项就占主导。Hopf引理证明中的该项保证了辅助函数是下调和函数，进而可用比较原理；而在 Hopf 引理的证明中考虑环形区域（也就是挖去半径 $r/2$ 的球那一步）则是为了把权重函数的临界点挖掉，保证其凸性带来的正性是“均匀的”。Hopf 引理表明，如果函数在边界一点达到严格最大值，要想“逃离”内部，该点处的导数必须非零。而 Carleman 估计给出一个带权的整体能量不等式，阻止解在某处“太强地消失”而仍保持非零，即证明 L^∞ 系数散度型椭圆方程解的唯一延拓性：如果解在开集的一个子集上为零，那么它在整个连通区域上都为零。

事实上 Carleman 估计还表明边界法向导数的 L^2 可以直接控制内部 L^2 范数，具体看见下题的“能观性不等式”。

问题 2.6.4 (能观性不等式 (observability inequality)). 设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d\backslash\overline{U}$. 定义

$$\Gamma_0:=\{\boldsymbol{x}\in\partial U:(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot N(\boldsymbol{x})\geqslant 0\},\ \ \Gamma_1:=\partial U\backslash\Gamma_0.$$

设 $u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$ 满足如下方程

$$-\Delta u=f\ \text{in}\ U\qquad u|_{\partial U}=0,\qquad f\in L^2(U).$$

通过将上一题中的 ψ 取成 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2$ 来证明：存在常数 $C>0$ (仅依赖 $U,\Gamma_0,\boldsymbol{x}_0$) 使得

$$\|u\|_{H^1(U)}\leqslant C\left(\|f\|_{L^2(U)}+\|\frac{\partial u}{\partial N}\|_{L^2(\Gamma_0)}\right).$$

注记 2.6.3. 对波动方程、热传导方程，我们其实也能建立类似的能观不等式，其本质是在说：如果我们知道内部的驱动力 f 是什么，你只需要盯着边界的一小块 Γ_0 看，就能控制整个系统的能量。这个想法实际上来自于 PDE 的反问题 (inverse problems)：如果我们在边界上的测量数据有一点点误差，我们在内部推算出的结果会不会偏离十万八千里？Carleman 估计给出的答案是：“只要你满足条件，误差是可控的。”现实中，这个想法常常用于探测某个区域内是否具有“空腔”。

问题 2.6.5 (Modica–Mortla 梯度估计). 设空间维数$d\geqslant 2$, 函数$u\in C^3(\mathbb{R}^d)$是Allen-Cahn方程的有界解

$$\Delta u=W'(u),\quad W(u):=\frac{1}{4}(1-u^2)^2,\quad P(\boldsymbol{x}):=\frac{1}{2}|\nabla u(\boldsymbol{x})|^2-W(u(\boldsymbol{x})).$$

(1) 证明：$|u(\boldsymbol{x})|\leqslant 1$恒成立。

(2) 证明：$\Delta P=|\nabla^2 u|^2-(u^3-u)^2$.

(3) 设 $\boldsymbol{b}:=\dfrac{2(u^3-u)}{|\nabla u|^2}\nabla u$, 证明：$\Delta P-\boldsymbol{b}\cdot\nabla P\geqslant 0$.

(4) 证明：$P\leqslant 0$恒成立，其结论即为 Modica–Mortola梯度估计。

提示：(1) 考虑辅助函数 $u_\varepsilon(\boldsymbol{x}):=u(\boldsymbol{x})-\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$, 在它的最大值点处利用方程分析$u$的取值；(4) 反设$P$的最大值$M>0$, 取$\{\boldsymbol{x}_n\}$使得$P(\boldsymbol{x}_n)=M$, 然后考虑 $u_n(\boldsymbol{x}):=u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_n)$ 并证明该函数列的极限函数 u_∞ 对应的 P_∞ 在原点处取到最大值；最后考虑 $U:=\{P_\infty>m/2\}$ 并用强极值原理证明它包含原点的连通分支是闭集，以推出 $P_\infty\equiv M$，而$|\nabla u|$有严格正下界，这与 u 有界矛盾。

注记 2.6.4. Modica-Mortola 估计（以及相关的 Modica-Mortola 定理）起源于相变理论的数学研究，特别是关于 Allen-Cahn 方程和极小曲面之间的深层联系。为了描述两种不混溶流体（或金属合金中的两个相）的共存与分离，Van der Waals 和后来的 Cahn & Hilliard 提出了扩散界面模型。其能量泛函（通常称为 Ginzburg-Landau 能量或 Cahn-Hilliard 能量）形式如下：

$$E_\varepsilon[u]=\int_\Omega\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{\varepsilon}W(u)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其中 u 是序参数（例如密度或浓度），$u=\pm 1$ 代表两个纯相；$W(u)$ 是双阱势能，例如 $W(u)=(1-u^2)^2$；$\varepsilon>0$ 是小参数，代表界面厚度的尺度。这个能量包含两项竞争：势能项 $\frac{1}{\varepsilon}W(u)$ 迫使 u 尽量取值 ± 1，梯度项 $\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2$ 惩罚 u 的剧烈变化。欲使总能量最小，系统会形成大片的 $u\approx 1$ 区域和大片的 $u\approx -1$ 区域，而在两者之间形成一个宽度 $O(\varepsilon)$ 的过渡层。

1977年，Modica 和 Mortola 发表了奠基性论文 "Un esempio di Γ-convergenza..."。他们证明当 $\varepsilon\to 0$ 时， E_ε 以Γ-收敛到周长泛函: $E_\varepsilon(u)\xrightarrow{\Gamma} c_0\cdot\mathrm{Per}(\{u=1\})$. 这意味着相变问题的极小解，在 $\varepsilon\to 0$ 的极限下，其相界面会收敛到极小曲面。在研究 E_ε 的极小解（即 Euler-Lagrange 方程 $-\varepsilon\Delta u+\frac{1}{\varepsilon}W'(u)=0$ 的解）的渐近行为时，一个关键问题是：在过渡层内部，解的结构是什么样的？在一维情形下，最优过渡层满足能量均分（即Modica–Mortola梯度估计等号恒成立）；一般维数则是 $\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2\leqslant\varepsilon^{-1}W(u)$，其暗示了解在界面附近的局部行为非常像一维解，即 $u(x)\approx g(x\cdot\nu)$. 具体可参见

- Luciano Modica, Stefano Mortola. Un esempio di Γ-convergenza. Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **14**(1) (1977), 285–299.
- Luciano Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. Arch. Rational Mech. Anal. **98**(2)123–142, 1987.
- Luciano Modica. A gradient bound and a Liouville theorem for nonlinear Poisson equations. Commun. Pure Appl. Math., **38**(5), 679–684, 1985.

进一步地，Modica梯度估计在 De Giorgi 猜想的证明中起到关键作用。De Giorgi 猜想断言：方程 $\Delta u = u^3 - u$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的有界解，如果满足 $\partial_{x_d} u > 0$，则其水平集必须是超平面（即 u 仅依赖于一个方向）。目前 $d = 2, 3, 4, 5$ 的情况已经解决，而$d \geqslant 9$的情况存在反例，具体可参见：

- (2维) Nassif Ghoussoub, Changfeng Gui. On a conjecture of De Giorgi and some related problems. Math. Ann., **311**(3), 481–491, 1998.
- (3维) Luigi Ambrosio, Xavier Cabré. Entire solution of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi. J. Amer. Math. Soc., **13**(4), 725–739, 2000.
- (4, 5维) Ovidiu Savin. Regularity of flat level sets in phase transitions. Ann. Math., **169**(1), 41–79, 2009.
- ($d \geqslant 9$ 反例) Manuel del Pino, Mike Kowalczyk, Juncheng Wei. On De Giorgi's conjecture in dimension $N \geqslant 9$. Ann. Math., **174**(3), 1485–1569, 2011.

2.7 *De Giorgi–Nash–Moser迭代

本章我们已经证明了弱解的存在性，而后面讨论的极大值原理则是对经典解建立的。那么我们能否对弱解直接作出L^∞型的估计呢？这就是 De Giorgi–Nash–Moser 迭代给出的结论。事实上，他们三个人分别使用了不同的方法，本节我们主要介绍 Moser 给出的L^p指标迭代法，然后介绍 De Giorgi 对解的 $C^{0,\alpha}$ 连续性作出的证明。本节最后的问题2.7.1中，我们简介 De Giorgi 的控制水平集测度的方法，具体可参见韩青、林芳华的著作 [9, 第4章].

我们考虑边界光滑的有界区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的散度型椭圆方程：

$$Lu := -\nabla \cdot (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\nabla u) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in U \tag{2.7.1}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (a^{ij}(\boldsymbol{x}))$ 满足一致椭圆性条件：存在 $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$，使得 $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \in U$：

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a^{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2.$$

假设 $a^{ij} \in L^\infty$，$u \in H^1(U)$ 为弱解。这里我们首先列出接下来要反复用到的 GNS 不等式：

引理 2.7.1. 设 $d \geqslant 3$，Sobolev 临界指标为 $\chi = \frac{d}{d-2} > 1$（若 $d = 2$，可取任意大的 χ）。对任意 $v \in H_0^1(B(\mathbf{0}, r))$，有：

$$\left(\int_{B(\mathbf{0},r)} |v|^{2\chi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/\chi} \leqslant C(d,r)\int_{B(\mathbf{0},r)} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.7.2}$$

在进入证明之前，我们还要引进弱下解、弱上解的概念。

定义 2.7.1. 我们称$u \in H^1(U)$是(2.7.1)的**弱下解 (weak subsolution)**/**弱上解 (weak supersolution)**,

是指对任意**非负的**测试函数 $\varphi \in H_0^1(U)$ 都有

$$\int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi \leqslant (\geqslant) 0.$$

2.7.1 Caccioppoli不等式

我们首先证明Caccioppoli不等式，其给出一个比较“反直觉”的结论：椭圆方程的弱下解的导数可以反过来被函数本身控制。

定理 2.7.2 (Caccioppoli不等式). 设 u 是方程(2.7.1)的**非负弱下解**，则对任意 $B(\mathbf{0},r) \subset B(\mathbf{0},R) \Subset U$，有：

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{4\Lambda^2}{\lambda^2(R-r)^2} \int_{B(\mathbf{0},R)\setminus B(\mathbf{0},r)} u^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.7.3}$$

证明. 取截断函数 $\eta \in C_c^\infty(B(\mathbf{0},R))$，满足 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$，$\eta|_{B(\mathbf{0},r)} \equiv 1$，且 $|\nabla\eta| \leqslant \frac{2}{R-r}$. 再取测试函数 $\varphi = \eta^2 u$，代入弱解定义得

$$\int_U \boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla(\eta^2 u) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U \eta^2 \boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U 2\eta u \boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla\eta \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0$$

利用椭圆性 $\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}$ 和有界性 $|A\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}| \leqslant \Lambda|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|$：

$$\lambda \int_U \eta^2 |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2\Lambda \int_U \eta u |\nabla u||\nabla\eta| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

利用Young不等式得

$$2\Lambda(\eta|\nabla u|)(u|\nabla\eta|) \leqslant 2\Lambda\left(\frac{\lambda}{4\Lambda}\eta^2|\nabla u|^2 + \frac{\Lambda}{\lambda}u^2|\nabla\eta|^2\right) = \frac{\lambda}{2}\eta^2|\nabla u|^2 + \frac{2\Lambda^2}{\lambda}u^2|\nabla\eta|^2$$

移项整理得：

$$\frac{\lambda}{2}\int_U \eta^2|\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_U u^2|\nabla\eta|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

除以 $\frac{\lambda}{2}$ 再代入 $|\nabla\eta|$ 的界即得证。 □

2.7.2 Moser迭代：L^p估计幂次迭代得到L^∞估计

现在我们证明 Moser 迭代得到的关键结论。

定理 2.7.3 (弱解的局部有界性). 若 $u \in H^1(B(\mathbf{0},1))$ 是非负弱下解，则 $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(B(\mathbf{0},1))$ 且存在常

数 $C = C(d, \lambda, \Lambda)$ 使得对于 $0 < r < R \leqslant 1$ 成立下式：

$$\sup_{B(\mathbf{0},r)} u \leqslant \frac{C}{(R-r)^{d/2}} \|u\|_{L^2(B(\mathbf{0},r))} . \tag{2.7.4}$$

证明. 取测试函数 $\varphi = \eta^2 u^\beta$ $(\beta \geqslant 1)$，其中截断函数 η 与 Caccioppoli 不等式证明中的选取相同。计算得 $\nabla\phi = \beta\eta^2 u^{\beta-1}\nabla u + 2\eta u^\beta \nabla\eta$.

第一步：建立迭代不等式. 代入方程得

$$\beta \int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2 u^{\beta-1} \boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2\int_{B(\mathbf{0},1)} \eta u^\beta \boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla\eta \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

利用椭圆性，我们得到

$$\lambda\beta \int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2 u^{\beta-1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2\Lambda \int_{B(\mathbf{0},1)} \eta u^\beta |\nabla u||\nabla\eta| \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

仿照 Caccioppoli 不等式的证明，我们将右边的被积函数拆分为：

$$2\Lambda(\eta u^{\frac{\beta-1}{2}}|\nabla u|)\cdot(u^{\frac{\beta+1}{2}}|\nabla\eta|) \leqslant \Lambda\left[\varepsilon\left(\eta^2 u^{\beta-1}|\nabla u|^2\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2\right)\right].$$

现在选取$\varepsilon = \lambda\beta/(2\Lambda)$充分小，使得 $\Lambda\varepsilon$ 项可以被左边吸收，得到

$$\lambda\beta \int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2 u^{\beta-1}|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\lambda\beta}{2}\int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2 u^{\beta-1}|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{\Lambda}{(\frac{\lambda\beta}{2\Lambda})}\int_{B(\mathbf{0},1)} u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

两边同时乘以 $\frac{2}{\lambda\beta}$，得到关于 u 的精确估计：

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2 u^{\beta-1}|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{4\Lambda^2}{\lambda^2\beta^2}\int_{B(\mathbf{0},1)} u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.7.5}$$

现在令 $w = u^{\frac{\beta+1}{2}}$，则 $|\nabla w|^2 = (\frac{\beta+1}{2})^2 u^{\beta-1}|\nabla u|^2$. 代入上式并结合$|\nabla\eta|$ 的界可得 w 的估计：

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2|\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{(\beta+1)^2\Lambda^2}{\beta^2\lambda^2}\int_{B(\mathbf{0},1)} w^2|\nabla\eta|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C}{(R-r)^2}\int_{B(\mathbf{0},r)} w^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中C仅依赖λ, Λ. 现在对 ηw 用 GNS 不等式 (2.7.2) 得到

$$\left(\int_{B(\mathbf{0},r)} w^{2\chi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/\chi} \leqslant \left(\int_{B(\mathbf{0},1)} (\eta w)^{2\chi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/\chi} \leqslant C\int_{B(\mathbf{0},1)} |\nabla(\eta w)|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C}{(R-r)^2}\int_{B(\mathbf{0},r)} w^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令 $p=\beta+1\geqslant 2$，把 w 换回 u，两边再开p次方得到

$$\|u\|_{L^{p\chi}(B(\mathbf{0},r))} \leqslant \left(\frac{C}{(R-r)^2}\right)^{1/p} \|u\|_{L^p(B(\mathbf{0},r))}. \tag{2.7.6}$$

第二步：迭代到L^∞范数. 定义序列：

- 指数序列：$p_k = 2\chi^k$.
- 半径序列：$R_k = r + \frac{R-r}{2^k}$, 则 $R_0 = R, R_\infty = r$.
- 间距：$R_k - R_{k+1} = \frac{R-r}{2^{k+1}}$.

在(2.7.6)中，我们令 $p=p_k, R=R_k, r=R_{k+1}$得到

$$\|u\|_{L^{p_{k+1}}(B_{R_{k+1}})} \leqslant \left(\frac{C\cdot 4^{k+1}}{(R-r)^2}\right)^{\frac{1}{p_k}} \|u\|_{L^{p_k}(B_{R_k})}.$$

对 $k=0,1,2,\cdots$ 进行迭代累乘：

$$\|u\|_{L^\infty(B(\mathbf{0},r))} \leqslant \left[\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4C}{(R-r)^2}\right)^{\frac{1}{2\chi^k}} \cdot (4^{\frac{1}{2\chi^k}})^k\right] \|u\|_{L^2(B(\mathbf{0},r))}.$$

又因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\chi^k} = \frac{\chi}{\chi-1} = \frac{n}{2} < \infty$, 以及 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\chi^k} < \infty$，所以无穷乘积收敛为一个有限常数，最终得到

$$\sup_{B(\mathbf{0},r)} u \leqslant \frac{\tilde{C}}{(R-r)^{d/2}} \|u\|_{L^2(B(\mathbf{0},r))}.$$

□

注记 2.7.1. 除了该局部有界性定理，Moser实际上还证明了弱解满足 Harnack 不等式，但证明过程需要用到BMO空间的John-Nirenberg不等式，因此我们不在讲义中写下细节。具体细节可参见韩青、林芳华的专著 [9, 4.4节].

2.7.3 De Giorgi迭代：$C^{0,\alpha}$ 连续性

在建立局部有界性(L^∞)之后，De Giorgi**利用水平集的测度来控制解的振幅**，进而将有界解“升级为”$C^{0,\alpha}$连续的解。具体来说，本节要证明的结论如下。

定理 2.7.4 (De Giorgi 定理). 设u是 $Lu=0$ 在 $B(\mathbf{0},1)$ 中的弱解，那么则有

$$\sup_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} |u(\boldsymbol{x})| + \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} \frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\alpha} \leqslant C\left(d,\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\|u\|_{L^2(B(\mathbf{0},1))}. \tag{2.7.7}$$

其中 $\alpha = \alpha(d, \frac{\Lambda}{\lambda}) \in (0,1)$.

证明这个定理的核心思想是：如果解的能量有限，且在大部分区域的取值较小，那么它的局部振幅不可能大。首先我们介绍两个基本引理。

引理 2.7.5. 设 $\Phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ 为凸函数。那么：

(1) 若 u 是下解且 $\Phi' \geqslant 0$，只要 $v = \Phi(u)$ 满足 $v \in H^1_{loc}(B(\mathbf{0},1))$, 那么$v$也是下解。

(2) 若 u 是上解且 $\Phi' \leqslant 0$，只要 $v = \Phi(u)$ 满足 $v \in H^1_{loc}(B(\mathbf{0},1))$, 那么$v$也是下解。

特别地，若u是下解，则对$k \in \mathbb{R}$有$(u-k)^+ := \max\{0, u-k\}$ 也是下解。

证明. 我们只证明(1), 直接计算即可。首先假设 $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$。那么 $\Phi'(s) \geqslant 0, \Phi''(s) \geqslant 0$。去 $\varphi \in C^1_c(B(\mathbf{0},1))$ 且 $\varphi \geqslant 0$。直接计算得出：

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} a^{ij}\partial_i v \partial_j \varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{B(\mathbf{0},1)} a^{ij}\partial_i u \partial_j (\Phi'(u)\varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{B(\mathbf{0},1)} (a^{ij}\partial_i u \partial_j u)\varphi\Phi''(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0,$$

其中 $\Phi'(u)\varphi \in H^1_0(B(\mathbf{0},1))$ 非负。一般情况用Φ和卷积光滑子$\{\eta_\varepsilon\}$作卷积逼近即可。 □

下一个引理是习题1.4.3的直接结论，我们不再证明。

引理 2.7.6. 设$\varepsilon > 0$, $u \in H^1(B(\mathbf{0},1))$ 满足 $|\{x \in B(\mathbf{0},1); u = 0\}| \geqslant \varepsilon |B(\mathbf{0},1)|$，则存在常数 $C = C(\varepsilon, d)$，使得

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} u^2 \leqslant C \int_{B(\mathbf{0},1)} |\nabla u|^2. \tag{2.7.8}$$

定理 2.7.7 (密度定理). 设 $u > 0$ 是 B_2 中的上解，且满足 $|\{x \in B(\mathbf{0},1) : u \geqslant 1\}| \geqslant \varepsilon |B(\mathbf{0},1)|$. 则存在仅依赖于 d 和 Λ/λ 的常数 C，使得 $\inf\limits_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} u \geqslant C$.

证明. 我们可以假设 $u \geqslant \delta > 0$，然后令 $\delta \to 0+$. 据引理 2.7.5知$v = (\log u)^-$ 是下解，且具有下界 $\log \delta^{-1}$. 据定理2.7.3得

$$\sup_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} v \leqslant C \left(\int_{B(\mathbf{0},1)} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7.9}$$

注意 $|\{x \in B(\mathbf{0},1); v = 0\}| = |\{x \in B(\mathbf{0},1); u \geqslant 1\}| \geqslant \varepsilon |B(\mathbf{0},1)|$，据引理 2.7.6 可得

$$\sup_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})} v \leqslant C \left(\int_{B(\mathbf{0},1)} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7.10}$$

我们证明右端有界。为此取测试函数 $\varphi = \frac{\zeta^2}{u}, \zeta \in C^1_c(B_2)$. 代入方程可得

$$0 \leqslant \int_{B(\mathbf{0},2)} a^{ij}\partial_i u \partial_j \left(\frac{\zeta^2}{u}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{B(\mathbf{0},2)} \zeta^2 \frac{a^{ij}\partial_i u \partial_j u}{u^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_{B(\mathbf{0},2)} \frac{\zeta a^{ij}\partial_i u \partial_j \zeta}{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

移项，并注意到$\nabla\log u=(\nabla u)/u$, 再用一致椭圆条件和Young不等式得到

$$\int_{B(\mathbf{0},2)}\zeta^2|\nabla\log u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\delta\|\zeta\nabla\log u\|^2_{L^2(B(\mathbf{0},2))}+C\int_{B(\mathbf{0},2)}|\nabla\zeta|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

取$\delta>0$充分小使得该项被左边吸收，这样我们得到 $\int_{B(\mathbf{0},2)}\zeta^2|\nabla\log u|^2\leqslant C\int_{B(\mathbf{0},2)}|\nabla\zeta|^2$. 因此对固定的 $\zeta\in C_c^1(B_2)$, $\zeta|_{B(\mathbf{0},1)}\equiv 1$，我们有

$$\int_{B(\mathbf{0},1)}|\nabla\log u|^2\leqslant C. \tag{2.7.11}$$

结合 (2.7.9) 我们得到$\sup\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}v=\sup\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}(\log u)^-\leqslant C$. 所以 $\inf\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}u\geqslant e^{-C}>0$. □

接下来我们控制振幅。

定理 2.7.8 (振幅定理). *设 u 是 $Lu=0$ 在 B_2 中的有界解，则存在 $\gamma=\gamma(d,\frac{\Lambda}{\lambda})\in(0,1)$ 使得*

$$\operatorname*{osc}_{B(\mathbf{0},\frac12)}u\leqslant\gamma\operatorname*{osc}_{B(\mathbf{0},1)}u. \tag{2.7.12}$$

证明. 局部有界性已在定理2.7.3中得证。现在我们令 $\alpha_1=\sup\limits_{B(\mathbf{0},1)}u$, $\beta_1=\inf\limits_{B(\mathbf{0},1)}u$. 考虑方程的解 $\frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}$ 以及 $\frac{\alpha_1-u}{\alpha_1-\beta_1}$, 并注意到如下等价关系：

$$u\geqslant\frac12(\alpha_1+\beta_1)\iff\frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant\frac12,\qquad u\leqslant\frac12(\alpha_1+\beta_1)\iff\frac{\alpha_1-u}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant\frac12.$$

情形 1. 若有$\left|\left\{x\in B(\mathbf{0},1);\frac{2(u-\beta_1)}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant 1\right\}\right|\geqslant\frac12|B(\mathbf{0},1)|$. 那么在 $B(\mathbf{0},1)$ 中对 $\frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant 0$ 使用密度定理，就得到存在 $C>1$ 使得 $\inf\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}\frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant\frac1C$, 进而得到 $\inf\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}u\geqslant\beta_1+C^{-1}(\alpha_1-\beta_1)$.

情形 2. 若有 $\left|\left\{x\in B(\mathbf{0},1);\frac{2(\alpha_1-u)}{\alpha_1-\beta_1}\geqslant 1\right\}\right|\geqslant\frac12|B(\mathbf{0},1)|$. 同上可得 $\sup\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}u\leqslant\alpha_1-C^{-1}(\alpha_1-\beta_1)$.

现在令 $\alpha_2=\sup\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}u$, $\beta_2=\inf\limits_{B(\mathbf{0},\frac12)}u$. 注意到 $\beta_2\geqslant\beta_1$ 以及 $\alpha_2\leqslant\alpha_1$. 无论以上哪种情形成立，我们都可以得到

$$\alpha_2-\beta_2\leqslant\left(1-\frac1C\right)(\alpha_1-\beta_1)\Rightarrow\operatorname*{osc}_{B(\mathbf{0},\frac12)}u\leqslant\left(1-\frac1C\right)\operatorname*{osc}_{B(\mathbf{0},1)}u.. \tag{2.7.13}$$

□

而De Giorgi 定理（定理2.7.4）不难由如上定理推出。

定理2.7.4的证明. 定理2.7.4待证不等式的左边第一项 $\sup\limits_{B(\mathbf{0},\frac{1}{2})}|u|$ 已经在局部有界性定理（定理2.7.3）中得到估计，因此我们只需要计算第二项，也就是 $\sup\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B(\mathbf{0},\frac{1}{2})}\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}}$ 的估计。

第1步：振幅的迭代. 据振幅定理存在常数 $\gamma=\gamma(d,\frac{\Lambda}{\lambda})\in(0,1)$，使得对 $B(\mathbf{0},1)$ 中的任意球 $B(\boldsymbol{x}_0,r)\subset B(\mathbf{0},1)$，只要方程在该球内有定义，就有如下振幅衰减估计（通过缩放不变性）：

$$\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R/2)}u\leqslant\gamma\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R)}u. \tag{2.7.14}$$

接下来我们进行迭代。首先取$\alpha=-\log_2\gamma>0$, 然后固定$\boldsymbol{x}_0\in B(\mathbf{0},\frac{1}{2})$，令$R_0=\frac{1}{2}$，则球 $B(\boldsymbol{x}_0,R_0)\subset B(\mathbf{0},1)$. 考虑半径序列 $R_k=\frac{R_0}{2^k}$，其中 $k\in\mathbb{N}$. 反复利用 (2.7.14) 式，我们得到

$$\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_k)}u\leqslant\gamma\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_{k-1})}u\leqslant\gamma^k\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u.$$

而 $\gamma=2^{-\alpha}$ 和 $R_k=2^{-k}R_0$，所以 $\gamma^k=(2^{-\alpha})^k=(2^{-k})^{\alpha}=\left(\frac{R_k}{R_0}\right)^{\alpha}$, 进而得到

$$\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_k)}u\leqslant\left(\frac{R_k}{R_0}\right)^{\alpha}\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u. \tag{2.7.15}$$

第2步：任意球上的振幅估计. 今任取 $0<r<R_0$，则存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $R_{k+1}\leqslant r\leqslant R_k$. 而 $B(\boldsymbol{x}_0,r)\subset B(\boldsymbol{x}_0,R_k)$，据振幅的单调性知

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,r)}u&\leqslant\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_k)}u\leqslant\left(\frac{R_k}{R_0}\right)^{\alpha}\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u\quad(\text{由 }2.7.15)\\&=\left(\frac{2R_{k+1}}{R_0}\right)^{\alpha}\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u\leqslant2^{\alpha}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\alpha}\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u=Cr^{\alpha}.\end{aligned} \tag{2.7.16}$$

其中 $C=2^{\alpha}R_0^{-\alpha}\operatorname*{osc}\limits_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u$. 因为 u 局部有界（定理2.7.3），我们可以用 $\|u\|_{L^2(B(\mathbf{0},1))}$ 控制 $\operatorname*{osc}\limits_{B(\boldsymbol{x}_0,R_0)}u$.

第3步：Hölder 差商的控制. 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B(\mathbf{0},\frac{1}{2})$，令$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. 若 $r\geqslant1/6$，则直接由局部有界性定理即可得到 Hölder 差商的控制。今考虑 $r<1/6$ 的情况，此时$\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x},3r/2)$, 进而有

$$|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|\leqslant\sup_{\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},3r/2)}u(\boldsymbol{z})-\inf_{\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},3r/2)}u(\boldsymbol{z})=\operatorname*{osc}_{B(\boldsymbol{x},3r/2)}u \tag{2.7.17}$$

由(2.7.16)知（注意 $\boldsymbol{x}\in B(\mathbf{0},\frac{1}{2})$，且 $r<1/6$ 使得 $B(\boldsymbol{x},3r/2)\subset B(\mathbf{0},\frac{3}{4})\subset B(\mathbf{0},1)$）

$$|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|\leqslant C\left(\frac{3r}{2}\right)^{\alpha}=C'|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}\Rightarrow\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}}\leqslant C'. \tag{2.7.18}$$

这就证明了 $u\in C^{0,\alpha}(B(\mathbf{0},\frac{1}{2}))$. □

注记 2.7.2. 这一小节我们只展现了 De Giorgi 将弱解从 L^{∞} 提升到 $C^{0,\alpha}$ 的过程，所谓 De Giorgi 切割水平集的方法主要是用于证明局部有界性定理，我们将其主要过程列在问题 2.7.1 供大家参考，具体细节可参见韩青、林芳华的专著 [9, 定理4.1].

注记 2.7.3. 细心的读者会发现，本节标题中的Nash没有出现。实际上他的贡献在于抛物方程证明了热核估计和矩估计，然后得到抛物方程解的 Hölder 连续性。Nash 本人的论文很难读，读者可以参考如下文献。

- John Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math., **80**(4), 931–954, 1958.
- E. B. Fabes, D. W. Stroock. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash. Arch. Rational Mech. Anal., **96**(4), 327–344, 1986.

问题 2.7

问题 2.7.1 (De Giorgi 证明局部有界性定理). 设$u\in H^1(B(\mathbf{0},1))$为方程(2.7.1)的**非负弱下解**。对$k\in\mathbb{R}$, 定义水平集$A_k:=\{\boldsymbol{x}\in B(\mathbf{0},1):u(\boldsymbol{x})>k\}$ 以及截断函数 $u_k:=(u-k)^+$.

(1) 设$h>k$, 利用 Caccioppoli 不等式和 Sobolev 嵌入定理证明

$$\int_{A_h}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\frac{C}{(h-k)^2}|A_k|^{\frac{2}{d}}\int_{A_k}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(2) 选取 $k_n=M(1-2^{-n})$，其中 $M>0$ 为待定常数，令 $U_n=\int_{A_{k_n}}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明：

$$\forall n\geqslant 3,\quad U_{n+1}\leqslant\frac{C\cdot 4^n}{M^2}U_n^{1+\frac{2}{n-2}}.$$

(3) 设非负数列 $\{Y_n\}$ 满足 $Y_{n+1}\leqslant C_0b^nY_n^{1+\varepsilon}$，其中 $C_0>0,b>1,\varepsilon>0$. 证明：存在 $\delta>0$（仅依赖 C_0,b,ε），使得只要 $Y_0\leqslant\delta$，就有 $Y_n\to 0$.

(4) 选取合适的M使得$u\leqslant M$几乎处处成立，进而得到$u\in L^{\infty}(B(\mathbf{0},1))$.

2.8 Derrick-Pohozaev恒等式

设空间维数$d \geqslant 3$, $U \subset \mathbb{R}^d$是有界区域，本节考虑如下半线性椭圆方程的边值问题：

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \text{ in } U, \qquad u|_{\partial U} = 0. \tag{2.8.1}$$

用山路引理(Mountain-Pass)等变分工具可证明当$1 < p < \frac{d+2}{d-2}$时，该方程有非平凡解 $u \not\equiv 0$. 本节证明，若$p > \frac{d+2}{d-2}$，且U是关于原点的**星形域(star-shaped domain)**，则方程(2.8.1)只有零解。

定义 2.8.1 (星形域). 若对任意的$\boldsymbol{x} \in \overline{U}$，线段 $\{\lambda\boldsymbol{x} : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ 都位于 $\overline{U}$ 中，则称区域 U 是关于原点的**星形域**。

显见，包含原点的凸集必定是关于原点的星形域，但反之未必。星形域具有如下性质

引理 2.8.1 (星形域的法线). 设 $\partial U \in C^1$，且有界区域 U 是关于原点的星形域。那么对任意 $\boldsymbol{x} \in \partial U$ 都有 $\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. 这里 $N(\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{x} \in \partial U$ 处的单位外法向量。

证明. 因为 $\partial U \in C^1$，若 $x \in \partial U$，则对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，使得 $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < \delta$. 并且$\boldsymbol{y} \in \overline{U}$ 可推出 $N(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} \leqslant \varepsilon$. 特别地，令 $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ $(0 < \lambda < 1)$. 由于 U 是星形域，故 $\boldsymbol{y} \in \overline{U}$，进而有

$$N(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = -\lim_{\lambda \to 1^-} N(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{(\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x})}{|\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}|} \geqslant 0.$$

□

接下来我们证明：如果有界区域 U 是星形域，对于超临界增长，方程(2.8.1)只有零解。这个证明基于一个神奇的想法：在方程两边同时乘以 $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u$ 这个特殊乘子，然后再不断分部积分。这个乘子实际上是将诺特定理（定理7.3.1）应用在方程的伸缩不变性时得到的，在本节末尾我们将指出：$\boldsymbol{x} \cdot \nabla u$实际上是**伸缩变换群的无穷小生成元**。

定理 2.8.2 (非平凡解的不存在性). 设有界区域U是边界C^1的星形域（关于原点），函数 $u \in C^2(\overline{U})$ 是方程(2.8.1)的解，且$p > \frac{d+2}{d-2}$，则$u \equiv 0$在U中恒成立。

证明. 方程两边同时乘以 $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u$ 并在 U 上积分，得到

$$\int_U (-\Delta u)(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U |u|^{p-1}u(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.8.2}$$

上式左边记为A, 右边记为B. 左边分部积分得到

$$A = \sum_{i,j=1}^d \int_U (\partial_i u)\partial_i(x_j \partial_j u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial U} (\partial_i u) N_i x_j (\partial_j u)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} =: A_1 + A_2.$$

然后计算A_1，直接拆括号得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i,j=1}^{d}\int_U (\partial_i u)[\delta^{ij}(\partial_j u) + x_j(\partial_i\partial_j u)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{d}\int_U \partial_j\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)x_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \left(1-\frac{d}{2}\right)\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial U}\frac{|\nabla u|^2}{2}(N(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

现在我们来处理边界项，因为 $u|_{\partial U}=0$，所以$\forall\boldsymbol{x}\in\partial U$，梯度向量 $\nabla u(\boldsymbol{x})$ 必定平行于法向量 $N(\boldsymbol{x})$（因为 $u|_{\partial U}=0$ 蕴含 u 在边界上的切向导数为零）。因此 $\nabla u(\boldsymbol{x}) = \pm|\nabla u(\boldsymbol{x})|N(\boldsymbol{x})$. 将其代入$A_2$得到

$$A_2 = -\int_{\partial U}|\nabla u|^2(N(\boldsymbol{x})\cdot x)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \tag{2.8.3}$$

上述各式相加，我们得到A的化简

$$A = \frac{2-d}{2}\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial U}|\nabla u|^2(N(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$

接下来我们再计算B, 分部积分得到

$$B := \sum_{j=1}^{d}\int_U |u|^{p-1}u x_j(\partial_j u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{d}\int_U \partial_j\left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1}\right)x_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{d}{p+1}\int_U |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而$A=B$，所以现在得到如下恒等式（称作**Derrick-Pohozaev恒等式**）

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\partial U}|\nabla u|^2(N(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{p+1}\int_U |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.8.4}$$

据引理2.8.1，我们得到不等式

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{d}{p+1}\int_U |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.8.5}$$

最后我们通过能量估计来导出矛盾。方程两边乘u再分部积分，我们可以算出

$$\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

代入 (2.8.5)，我们得到

$$\left(\frac{d-2}{2} - \frac{d}{p+1}\right)\int_U |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0.$$

若方程的解 u 不恒为零，则必然有 $\frac{d-2}{2}-\frac{d}{p+1}\leqslant 0$，即 $p\leqslant\frac{d+2}{d-2}$，这与假设矛盾。 □

最后我们简要地说明一下乘子$\boldsymbol{x}\cdot\nabla u$的来源。考虑$\mathbb{R}^d$上的伸缩变换群 (dilation group)，用参数$t\in\mathbb{R}$表示为 $T_t : \boldsymbol{x} \longmapsto e^t\boldsymbol{x}$. 当$t=0$时是恒等变换。而它作用在光滑函数$u$上可定义为$\mathcal{S}_t u(\boldsymbol{x}) := u(e^t\boldsymbol{x})$. 其无穷小生成元 (infinitesimal generator) 定义为该群作用关于t在$t=0$处的导数

$$Au := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{S}_t u(\boldsymbol{x}).$$

代入$\mathcal{S}_t$定义得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(e^t\boldsymbol{x}) = \nabla u(e^t\boldsymbol{x})\cdot(e^t\boldsymbol{x}) \Rightarrow Au(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\nabla u(\boldsymbol{x}).$$

可见$\boldsymbol{x}\cdot\nabla$ 是空间伸缩变换流 $\boldsymbol{x}(t) := e^t\boldsymbol{x}_0$ 对应的向量场，它是一个从原点向外发出的径向向量场。

而在PDE的实例中，函数u往往具有物理量纲 (scaling dimension)，标准的伸缩变换往往伴随着函数值的缩放。我们考虑

$$\forall\lambda>0,\ u_\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda^k u(\lambda\boldsymbol{x}) \xlongequal{\lambda=e^t} e^{kt}(\mathcal{S}_t u)(\boldsymbol{x}) = e^{kt}u(e^t\boldsymbol{x}).$$

此时生成元为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(e^{kt}u(e^t\boldsymbol{x})\right) = ku(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\cdot\nabla u(\boldsymbol{x}).$$

在讲义后面有关诺特定理的内容中，例7.3.2就给出了波动方程的例子，而伸缩变换 $(\boldsymbol{x},t)\longmapsto(\lambda\boldsymbol{x},\lambda t)$, $u\longmapsto\lambda^{\frac{d-1}{2}}u(\lambda\boldsymbol{x},\lambda t)$ 保证了时空 $\dot{H}^1$ 范数的不变性。

再回到我们本节讨论的半线性椭圆方程(2.8.1)，如果我们要寻求它的伸缩不变性 (scaling invariance)，就不妨待定 $u_\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda^\alpha u(\lambda\boldsymbol{x})$ 使得：如果u是解，则u_λ也是解。代入方程计算得

$$-\Delta(u_\lambda) = -\lambda^{\alpha+2}(\Delta u)(\lambda\boldsymbol{x}),\quad |u_\lambda|^{p-1}u_\lambda = \lambda^{\alpha p}(|u|^{p-1}u)(\lambda\boldsymbol{x}).$$

要让二者相等，则必须有$\alpha+2=\alpha p$, 解得 $\alpha = 2/(p-1)$. 另一方面我们如果把u看作有限能量解，则能量范数 $\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 也是伸缩不变，计算可得 $\alpha=(d-2)/2$，进而得到临界指标 $p=\frac{d+2}{d-2}$.

总结来说，Pohozaev恒等式本质上是诺特定理（定理7.3.1）应用在伸缩不变性下的特例，乘子 $\boldsymbol{x}\cdot\nabla u$ 作用在方程上相当于在问"如果我把你拉伸一点点，能量会怎么变？"对应到本节讨论的例子，当p大于临界指标时，该乘子提供的"拉伸"弱于高次非线性项的"聚集"，因此方程难以存在非平凡的有限能量解。

习题 2.8

习题 2.8.1. $\mathbb{R}^d$中的质量临界Schrödinger方程的基态 (ground state) Q是满足如下半线性椭圆方程的径向正解，且在无穷远处衰减到零

$$-\Delta Q + Q - |Q|^{\frac{4}{d}}Q = 0,\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.$$

(1) 模仿定理2.8.2的方法证明: $\|Q\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^d)}^{2+\frac{4}{d}} = 2\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$.

(2) 已知如下 Galiargo-Nirenberg 插值不等式成立

$$\|u\|_{L^{2+(4/d)}(\mathbb{R}^d)}^{2+(4/d)} \leqslant C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{4/d}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

证明：Q可使得该不等式取等号，并写出此时的最佳常数C关于$\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$的表达式。

习题 2.8.2 (Rellich-Pohozaev恒等式). 设$U\subset\mathbb{R}^d$的边界光滑的有界区域，$V\in C^1(\overline{U})$是给定的位势函数，$\lambda>0$是$(-\Delta+V(\boldsymbol{x})I)$算子(带Dirichlet零边值)的一个特征值，$u\in H^2(U)\cap H_0^1(\overline{U})$是对应的特征函数，即

$$-\Delta u + V(\boldsymbol{x})u = \lambda u \text{ in } U, \qquad u|_{\partial U} = 0.$$

证明：

$$\lambda\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_{\partial U}(\boldsymbol{x}\cdot N(\boldsymbol{x}))\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2\,\mathrm{d}S_x + \int_U(2V(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}\cdot\nabla V(\boldsymbol{x}))|u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

注：这和习题2.4.3的结论是相通的。

问题 2.8

问题 2.8.1 (GNS不等式的最佳常数). 由GNS不等式(定理1.4.1)知，对$f\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 成立不等式$\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. 本题讨论最佳常数问题，也就是如下泛函(称作**Rayleigh商**)的极小值

$$J[f] := \frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{(\int_{\mathbb{R}^3}|f|^6\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{1/3}}, \qquad f\in H^1(\mathbb{R}^3), f\neq 0.$$

(1) 用变分法证明 $J[u]$ 的极小化子（假设已知存在）满足 $-\Delta u = \mu u^5$, 其中μ是常数。

(2) 今假设已知极小化子 $u(r)$ 是径向函数，且满足 $u(0)=1, u(+\infty)=0$. 计算此时极小化子的表达式以及GNS不等式最佳常数C的具体取值。该解实际上被称作 Talenti bubble.

注：(2)的假设需要用到对称重排定理和Polya-Szegö不等式，已超出本讲义知识范围。实际上，$-\Delta u=\mu u^5$ 的H^1 正解是唯一的（即必须是关于某一点的径向函数）这是1989年由 Caffarelli–Gidas–Spruck 用移动平面法（见 Evans [6, 第九章]）证明的结论，可参见

- Luis A. Caffarelli, Basilis Gidas, Joel Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical sobolev growth. Commun. Pure Appl. Math., **42**(3), 271–297, 1989.

另一方面，Talenti气泡解本质上是**球面上的常数函数投影到平面上后的样子**。

问题 2.8.2 (能观性不等式的简化证明). 利用乘子 $M := 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla u + (d-1)u$ 和 Pohozaev 恒等式的证明方法，重新证明能观不等式（问题2.6.4）.

第三章 线性抛物方程

本章我们始终假设$U \subset \mathbb{R}^d$是有界开集，且对$T > 0$定义抛物圆柱 (parabolic cylinder)$U_T := (0,T] \times U$. 本章我们考虑如下初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T, \\ u = 0 & \text{on } [0,T] \times \partial U, \\ u = g & \text{on } \{t=0\} \times U. \end{cases} \tag{3.0.1}$$

这里 $f : U_T \to \mathbb{R}$ 和 $g : U \to \mathbb{R}$ 是给定的函数，$u : \overline{U_T} \to \mathbb{R}$ 是未知函数 $u = u(t,\boldsymbol{x})$. L 是二阶偏微分算子，它具有如下**散度形式**：

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j (a^{ij}(t,\boldsymbol{x})\partial_i u) + \sum_{i=1}^{d} b^i(t,\boldsymbol{x})\partial_i u + c(t,\boldsymbol{x})u \tag{3.0.2}$$

或者**非散度形式**

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(t,\boldsymbol{x})\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{d} b^i(t,\boldsymbol{x})\partial_i u + c(t,\boldsymbol{x})u \tag{3.0.3}$$

其中系数 a^{ij}, b^i, c $(1 \leqslant i,j \leqslant d)$ 为给定函数。

定义 3.0.1. 我们称微分算子$\partial_t + L$ (由 (3.0.2) 或 (3.0.3) 定义) 是 **(一致)抛物的**，是指存在常数 $\theta > 0$ 使得对任意的 $(t,\boldsymbol{x}) \in U_T$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$均有下式成立

$$\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{3.0.4}$$

特别地，对于每个固定的 $t \in [0,T]$，算子 L 是一致椭圆型的。

一个简单的例子是假设 $a^{ij} = \delta^{ij}$ 且 $b^i = c = 0$，即热方程。我们将看到一般二阶抛物型偏微分方程的解在许多方面与热方程的解相似。对于一般的二阶抛物型偏微分方程，二阶项 $a^{ij}(t,\boldsymbol{x})\partial_i\partial_j u$ 描述了扩散（diffusion），一阶项 $b^i\partial_i u$ 描述了输运（transport），而零阶项 cu 描述了

产生或损耗（creation or depletion）。

目前已有许多其他（非线性）抛物型方程或方程组，例如 Navier-Stokes 方程、Keller-Segel 方程、Fokker-Planck 方程、Black-Scholes 方程（一类时间倒向抛物方程）等，它们被广泛应用于流体力学、生物数学、动理学、金融学等诸多领域。

3.1　时空Sobolev空间

在介绍线性抛物方程之前，我们需要搞清楚含有时间变量的 Sobolev 空间的基本设定。特别地，对于将 $(t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times U$ 映射到 $u(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 的函数 $u:[0,T]\times U \to \mathbb{R}$，我们可以将 u 与一个**取值于Banach空间的映射**关联起来：

$$\mathbf{u}:[0,T]\to X$$

其定义为

$$[\mathbf{u}(t)](\boldsymbol{x}) := u(t,\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in U,\ \ 0\leqslant t\leqslant T.$$

这里 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个实 Banach 空间。换句话说，我们将把函数$u(t,\boldsymbol{x})$看作是从 t 到某个（由关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数构成的）Banach 空间 X 的映射 $\mathbf{u}$。这可以让我们更方便定义发展方程的弱解。

3.1.1　Banach空间值的函数

我们首先简略介绍Banach空间值函数。令 $(X,\|\cdot\|)$是实 Banach 空间，设 $\boldsymbol{f}:[0,T]\to X$ 是一个 Banach 空间值函数，其中 $T>0$.

定义 3.1.1. 我们现在将 Lebesgue 测度论中的一些概念扩展到 Banach 空间值函数。

- （简单函数）如果对于 $t\in[0,T]$，有 $\mathbf{s}(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)u_i$ 成立，则称 $\mathbf{s}:[0,T]\to X$ 为**简单函数 (simple function)**. 这里所有的 $u_i\in X$，且所有的 E_i 都是 $[0,T]$ 的 Lebesgue 可测子集。
- （强可测函数）如果存在一列简单函数 $\mathbf{s}_k:[0,T]\to X$，使得对于几乎处处的 $t\in[0,T]$ 有 $\mathbf{s}_k(t)\to f(t)$ 成立，则称 $\boldsymbol{f}:[0,T]\to X$ 是**强可测 (strongly measurable)**的。
- （弱可测函数）如果对于任何 $u^*\in X'$（X 的对偶空间），映射 $t\longmapsto\langle u^*,\boldsymbol{f}(t)\rangle$ 都是 Lebesgue 可测的，则称 $\boldsymbol{f}:[0,T]\to X$ 是**弱可测 (weakly measurable)**的。
- 如果存在一个零测集 $N\subset[0,T]$，使得 $\{\boldsymbol{f}(t)|t\in[0,T]\backslash N\}$ 是可分的，则称 $\boldsymbol{f}:[0,T]\to X$ **的取值是几乎可分的 (almost separable valued)**.

定理 3.1.1 (Pettis' lemma). $\boldsymbol{f}:[0,T]\to X$ 是强可测的当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 是弱可测的且取值是几乎可分的。

接下来，我们定义 Banach 空间值函数的积分。

定义 3.1.2.

- 设$\mathbf{s}(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i$是一个简单函数，则

$$\int_0^T \mathbf{s}(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^1(E_i) u_i.$$

- 如果存在一列简单函数 $\{\mathbf{s}_k\}$ 使得

$$\int_0^T \|\mathbf{s}_k(t) - \boldsymbol{f}(t)\|\,\mathrm{d}t \to 0.$$

  则称强可测函数 $\boldsymbol{f} : [0, T] \to X$ 是 **Bôchner 可积的**。

- 如果 $\boldsymbol{f} : [0, T] \to X$ 是 Bôchner 可积的，则定义

$$\int_0^T \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{k\to\infty} \int_0^T \mathbf{s}_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 3.1.2 (Bôchner引理). 强可测函数 $\boldsymbol{f} : [0, T] \to X$ 是 Bôchner 可积的当且仅当映射 $t \longmapsto \|\boldsymbol{f}(t)\|$ 在 $[0, T]$ 上是 Lebesgue 可积的。这种情况下我们有

$$\left\|\int_0^T \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

且对于任意的 $u^* \in X'$，有

$$\left\langle u^*, \int_0^T \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle = \int_0^T \langle u^*, \boldsymbol{f}(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

成立。

3.1.2 含时间变量的Sobolev空间

现在我们可以引入涉及时间变量的 Sobolev 空间。设$(X, \|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间。

定义 3.1.3. 设$T > 0$是给定的数。

- 我们定义 $L^p(0, T; X)$ 为所有满足如下条件的强可测函数 $\mathbf{u} : [0, T] \to X$ 构成的集合：

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

  以及

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

- 我们定义 $C([0,T];X)$ 为所有满足如下条件的连续函数 $\mathbf{u}:[0,T]\to X$ 构成的集合：

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

定义 3.1.4. 设 $T>0$ 为给定常数。

- （弱导数）令 $\mathbf{u}\in L^1(0,T;X)$。如果存在 $\mathbf{v}\in L^1(0,T;X)$ 使得

$$\int_0^T \varphi'(t)\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \varphi(t)\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

  对任意的 $\varphi\in C_c^\infty(0,T)$ 都成立，则称 $\mathbf{v}$ 为 $\mathbf{u}$ 的**弱（时间）导数**，记作 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}$。
- （Sobolev 空间）我们定义 $W^{1,p}(0,T;X)$ 为所有满足如下条件的函数 $\mathbf{u}\in L^p(0,T;X)$ 构成的集合：其弱（时间）导数 $\mathbf{u}'$ 存在且属于 $L^p(0,T;X)$。其范数定义为

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p + \|\mathbf{u}'(t)\|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T}(\|\mathbf{u}(t)\| + \|\mathbf{u}'(t)\|) & p=\infty. \end{cases}$$

Functions in $W^{1,p}(0,T;X)$中的函数满足微积分的一些基本性质。

命题 3.1.3 (含时Sobolev空间的基本运算)**.** 令 $\mathbf{u}\in W^{1,p}(0,T;X)$，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$。则：

(1) （可能在某个零测集上重新定义后）$\mathbf{u}\in C([0,T];X)$;

(2) 对任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，有 $\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(s)+\int_s^t \mathbf{u}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(3) 如下估计成立

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\| \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)},$$

其中常数 $C>0$ 仅依赖T.

以下结论在证明线性抛物方程弱解的存在性和正则性时非常有用。

命题 3.1.4. 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是有界开集。设 $\mathbf{u}\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ 且 $\mathbf{u}'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$。

(1) （可能在某个零测集上重新定义后）$\mathbf{u}\in C([0,T];L^2(U))$.

(2) 映射 $t\longmapsto\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2$ 是绝对连续的，且对几乎处处的 $0\leqslant t\leqslant T$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2\langle\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)\rangle.$$

(3) 如下估计成立

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leqslant C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right),$$

其中常数$C>0$仅依赖T.

命题 3.1.5. 设$U \subset \mathbb{R}^d$ 是具有光滑边界 ∂U 的有界开集，并取 $m \in \mathbb{N}$. 设 $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^{m+2}(U))$ 且 $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^m(U))$.

- （可能在某个零测集上重新定义后）$\mathbf{u} \in C([0,T];H^{m+1}(U))$.
- 如下估计成立

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leqslant C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^m(U))}\right),$$

其中常数$C > 0$仅依赖T.

习题 3.1

习题 3.1.1. 设我们已有如下弱收敛成立

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &\rightharpoonup \mathbf{u} && \text{in } L^2(0,T;H_0^1(U)),\\ \mathbf{u}_k' &\rightharpoonup \mathbf{v} && \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{aligned}$$

证明 $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$.

习题 3.1.2. 设H 为实 Hilbert 空间，并假设在 $L^2(0,T;H)$ 中有弱收敛 $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$。又已知存在常数$C > 0$使得下式成立

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}_k(t)\| \leqslant C, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

证明：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| \leqslant C.$$

3.2 弱解存在性定理：Galerkin逼近

根据第2.1节中的叙述，当系数、源项 f 和初始数据 g 的正则性不够好时，我们需要首先讨论线性抛物方程的存在性理论。今假设方程组 (3.0.1)中的算子 L 满足散度形式 (3.0.2)，并考虑其Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T,\\ u = 0 & \text{on } [0,T]\times\partial U,\\ u = g & \text{on } \{t=0\}\times U, \end{cases}$$

其中

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^d \partial_j(a^{ij}(t,\boldsymbol{x})\partial_i u) + \sum_{i=1}^d b^i(t,\boldsymbol{x})\partial_i u + c(t,\boldsymbol{x})u$$

对任意 $t \in [0,T]$ 是对称且一致椭圆的。源项 $f \in L^2(U_T)$，初值$g \in L^2(U)$，系数 $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$均已给定。

3.2.1 弱解的定义

若函数 $u(t,\boldsymbol{x})$ 是 (3.0.1) 的光滑解，我们将 u 与如下映射对应起来：

$$\mathbf{u} : [0,T] \to H_0^1(U), \qquad t \longmapsto \mathbf{u}(t)$$

其定义为 $[\mathbf{u}(t)](\boldsymbol{x}) := u(t,\boldsymbol{x})$。换句话说，在定义弱解时，我们将把 u 看作是从 t 到空间 $H_0^1(U)$ 的映射 $\mathbf{u}$. 类似地我们通过 $[\boldsymbol{f}(t)](\boldsymbol{x}) := f(t,\boldsymbol{x})$ 定义 $\boldsymbol{f} : [0,T] \to L^2(U)$. 因此我们如果固定 $v \in H_0^1(U)$，那么就可以用这个 v 乘以抛物方程并进行分部积分，得到

$$(\mathbf{u}', v)_{L^2(U)} + B[\mathbf{u}, v; t] = (\boldsymbol{f}, v)_{L^2(U)}, \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T.$$

这里双线性型定义为

$$B[\mathbf{u}, v; t] := \int_U a^{ij}(t,\boldsymbol{x})\partial_i u \partial_j v + b^i(t,\boldsymbol{x})\partial_i u v + c(t,\boldsymbol{x}) u v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \ u, v \in H_0^1(U),\ \text{a.e. } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

我们还要搞清楚时间导数 $\mathbf{u}'$ 属于哪个函数空间。事实上，从抛物方程本身，我们有

$$\partial_t u = \underbrace{(f - b^i\partial_i u - cu)}_{=:g^0} + \partial_j(\underbrace{a^{ij}\partial_i u}_{=:g^j}) = g^0 + \sum_{j=1}^d \partial_j g^j,$$

其中所有 g^j $(0 \leqslant j \leqslant d)$ 皆属于 $L^2(U)$. 因此时间导数 $\partial_t u(t,\cdot)$ 属于 $H^{-1}(U)$ 并满足估计

$$\|\partial_t u\|_{H^{-1}(U)} \leqslant \left(\sum_{j=0}^d \|g^j\|_{L^2(U)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)}).$$

此估计表明弱时间导数 $\mathbf{u}'$ 对于几乎处处的 $t \in [0,T]$ 而言应当属于 $H^{-1}(U)$，因此 $(\mathbf{u}', v)_{L^2(U)}$ 应当替换为 $\langle \mathbf{u}', v\rangle$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $H^{-1}(U)$ 与 $H_0^1(U)$ 的配对。现在，我们可以定义 (3.0.1)的弱解了。

定义 3.2.1 (弱解). 若 $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H_0^1(U))$ 且 $\mathbf{u}' \in L^2(0,T; H^{-1}(U))$ 满足以下条件，则称其为 (3.0.1)（其中 L 由 (3.0.2) 定义）的一个弱解：

- 对于任意 $v \in H_0^1(U)$ 和几乎处处的 $t \in [0,T]$，有$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\boldsymbol{f}, v)_{L^2(U)}$ 成立;
- $\mathbf{u}(0) = g$.

需指出的是，据命题 3.1.4(1) 可知 $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2(U))$，所以$\mathbf{u}(0) = g$ 作为映射 $\mathbf{u} : [0,T] \to L^2(U)$ 的逐点值是可以定义的。

3.2.2 动机：分离变量法

让我们回想一下如何求解区间 $(0,\pi)$ 上具有 Dirichlet 边界条件的一维热方程，即我们考虑如下问题的古典解：

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = f(t,x) & t>0,\ 0<x<\pi \\ u(0,x) = g(x) & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ u(t,0)=0,\ u(t,\pi)=0 & t\geqslant 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中 f,g 足够正则。该方程通常使用分离变量法求解。首先我们假设 $f=0$ 且 $u(t,x)=T(t)X(x)$，然后我们可以（从边界条件中）发现：

$$\lambda_n = n^2,\ X_n(t)=\sin nx,\ T_n(t)=A_n\cos nt + B_n \sin nt \Rightarrow u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$

其中系数 A_n, B_n 由初始数据 $g(x)$ 确定。一般情况下，当 $f\not\equiv 0$ 时，我们只需在基 $\{\sin nx\}$ 下展开 u,f：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx,\quad f(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin nx,$$

并求解 ODE $T_n''(t)+n^2T_n(t)=f_n(t)$ 来确定 $T_n(t)$。分离变量法背后的原理是 $\{\sin nx\}$ 恰好给出了 $L^2((0,\pi))$ 的正交基。同时我们也发现 $\{\sin nx\}$ 恰好是 $(0,\pi)$ 上 $-\Delta = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$（具有零 Dirichlet 边界条件）的特征函数，对应于特征值 n^2.

为了将这一思想“推广”到一般情况，我们可以作如下考量：

- U 必须是有界的，这保证了 L 的谱必须是离散的。
- 我们可在（由某些对称椭圆算子的特征函数系给出的）标准正交基 $\{w_n\}$ 下展开解和源项。

然而我们现在需要研究的是一个系数、初值和源项都很**粗糙**的偏微分方程。我们必须证明：通过“模仿分离变量法”得到的无穷级数确实在 $L^2(0,T;H_0^1(U))$ 中收敛，且其时间导数在 $L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 中。因此先对空间维数进行“有穷截断”是合理的，这种方法被称为“Galerkin 逼近”。

3.2.3 Galerkin逼近：存在性和唯一性

设$\{w_k\}$ 是 $L^2(U)$ 的标准正交基，也是 $H_0^1(U)$ 的正交基，且每个 w_k 是光滑的。例如我们可以选取 $\{w_k\}$ 为 $H_0^1(U)$ 中 $-\Delta$ 的归一化特征函数。Galerkin 逼近的过程如下：

1. **构造有限维截断.** 对 $m\in\mathbb{N}^*$，我们寻找一系列形式如下的函数 $\mathbf{u}_m:[0,T]\to H_0^1(U)$：

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \tag{3.2.2}$$

我们希望确定系数 $d_m^k(t)$ 使得

$$d_m^k(0) = (g, w_k), \tag{3.2.3}$$

$$(\mathbf{u}_m', w_k)_{L^2(U)} + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\boldsymbol{f}, w_k)_{L^2(U)} \tag{3.2.4}$$

对 $1 \leqslant k \leqslant m$ 和 $0 \leqslant t \leqslant T$ 成立。这表明 $\mathbf{u}_m$ 可以逼近 $\mathbf{u}$ 在 $\{w_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ 所张成的子空间上的投影。

2. **逼近序列（关于m的）一致能量估计.** 其弱极限的存在性由 Eberlein-Šmulian 定理保证，我们希望该极限就是所需的弱解。
3. **验证弱极限恰好是唯一的弱解.** 我们将用习题 3.1.1 的结论来验证时间导数 $\mathbf{u}_k'$ 的弱极限恰好是 $\mathbf{u}_k$ 的弱极限的时间导数。

第1步：逼近解序列的构造

首先证明逼近解序列的存在性。

定理 3.2.1. *对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在唯一的具有如下形式的函数 $\mathbf{u}_m$：*

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \tag{3.2.5}$$

其满足

$$d_m^k(0) = (g, w_k), \tag{3.2.6}$$

$$(\mathbf{u}_m', w_k)_{L^2(U)} + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\boldsymbol{f}, w_k)_{L^2(U)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{3.2.7}$$

证明. 据正交性，我们可以很直接地得到

$$(\mathbf{u}_m'(t), w_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_m^k(t),\ \ B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t)$$

其中 $e^{kl}(t) = B[w_l, w_k, t]$. 设 $\mathbf{u}_m$ 具有形式 $\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$，$f^k(t) := (\boldsymbol{f}(t), w_k)$. 那么我们得到如下线性常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_m^k(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t),\ \ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{3.2.8}$$

其初值为 $d_m^k(0) = (g, w_k)$。由于系数 $e^{kl}(t)$ 足够正则，常微分方程的标准存在性理论表明：对于几乎处处的 $0 \leqslant t \leqslant T$，存在唯一的绝对连续函数 $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), \cdots, d_m^m(t))$ 满足初值和该常微分方程组。这样的话，定理内容中定义的 $\mathbf{u}_m$ 自动满足我们所需的等式。 □

第2步：逼近解序列的一致能量估计

定理 3.2.2. *存在仅依赖于 U,T 和 L 的系数的常数 $C>0$，使得对于每个 $m\in\mathbb{N}$，有*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))}+\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\leqslant C\left(\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|\mathrm{g}\|^2_{L^2(U)}\right). \tag{3.2.9}$$

在开始证明之前，我们必须强调：建立能量泛函 $E(t)$ 的估计最重要的步骤是建立 Grönwall 型不等式

$$E(t)\leqslant C\left(E(0)+\int_0^t E(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

这通常是通过微分不等式 $E'(t)\leqslant AE(t)$ 推导出来的。

证明. 给定 $m\in\mathbb{N}$，我们已经有 $(\mathbf{u}'_m,w_k)_{L^2(U)}+B[\mathbf{u}_m,w_k;t]=(\boldsymbol{f},w_k)_{L^2(U)}$ 对 $1\leqslant k\leqslant m$ 成立。方程两边同时乘以 $d^k_m(t)$ 并对 $1\leqslant k\leqslant m$ 求和得到

$$\underbrace{(\mathbf{u}'_m,\mathbf{u}_m)_{L^2(U)}}_{=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)}}+B[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]=(\boldsymbol{f},\mathbf{u}_m)_{L^2(U)}. \tag{3.2.10}$$

这一步正是“模仿”在热方程 $\partial_t u-\Delta u=f$ 两边乘以 u 并在 U 上积分这一步骤。现在我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)}+\int_U a^{ij}\partial_i u_m\,\partial_j u_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(f,\mathbf{u}_m)-\int_U b^i\partial_i u_m\,u_m\,\mathrm{d}x-\int_U cu^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

利用 Hölder 不等式、L 的一致椭圆性和 Young 不等式，对任意 $\delta>0$有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}+\theta\|\nabla\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}&\leqslant C\Big(\|f\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}+\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}\|b\|_{L^\infty(U)}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}\\&\qquad+\|c\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\Big)\\&\leqslant\delta\|\nabla\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}+C\Big(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\Big).\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

选取 $\delta\in(0,\theta/2)$ 充分小，使得 $\delta\|\nabla\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}$ 可以被左边吸收。我们知道存在 $C>0$ 使得下式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)}+\theta\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_m(\tau)\|^2_{L^2(U)}\right)\leqslant C\Big(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\Big). \tag{3.2.12}$$

而 $f(t,\cdot)\in L^2(U)$ 是给定的，据Grönwall 不等式，我们可以证明存在一个依赖 T,U,L 的常数

$C_T>0$ 使得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)}+\theta\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_m(\tau)\|^2_{L^2(U)}&\leqslant C_T\left(\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)}+\int_0^T\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(U)}\,\mathrm{d}t\right)\\&\leqslant C_T\left(\|g\|^2_{L^2(U)}+\int_0^T\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(U)}\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

现在还要估计$\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}$. 回忆$\mathbf{u}_m(t)=\sum\limits_{k=1}^m d_m^k(t)w_k$ 可推出 $\mathbf{u}_m'(t)=\sum\limits_{k=1}^m(d_m^k)'(t)w_k$，而它属于 $\mathrm{span}\{w_1\cdots,w_m\}$. 现在我们固定$t\in[0,T]$并选取测试函数$\varphi\in H_0^1(U)$, 其满足 $\|\varphi\|_{H_0^1(U)}\leqslant 1$. 于是有

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{u}_m',\varphi\rangle=\langle\mathbf{u}_m',\varphi_m\rangle&=B[\mathbf{u}_m,\varphi_m;t]+(\boldsymbol{f},\varphi_m)\\&\leq C\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}\|\nabla\varphi_m\|_{L^2(U)}+(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}+\|f\|_{L^2(U)})\|\varphi_m\|_{L^2(U)}\\&\leq C(\|f\|_{L^2}+\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}),\end{aligned}$$

其中最后一步用了 $\|\varphi_m\|_{H_0^1(U)}\leqslant\|\varphi\|_{H_0^1(U)}=1$ 和 Poincaré 不等式。现在对全体满足 $\|\varphi\|_{H_0^1(U)}\leqslant 1$的 φ 取上确界，据 $H^{-1}(U)$ 范数的定义得

$$\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{H^{-1}(U)}\leqslant C\left(\|f\|^2_{L^2}+\|\nabla\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\right),\tag{3.2.14}$$

因此利用估计 (3.2.13) 可得

$$\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\leqslant C_T\left(\|g\|^2_{L^2(U)}+\int_0^T\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(U)}\,\mathrm{d}t\right)\tag{3.2.15}$$

其中常数 $C_T>0$ 取依赖于 T,U,L. □

第三步：弱解的存在性和唯一性

最后一步是利用定理 3.2.2 中的一致能量估计得到弱极限。我们期待该极限就是方程 (3.0.1) 唯一的弱解。

定理 3.2.3. *方程 (3.0.1) 存在唯一的弱解。*

证明. 据定理3.2.2中得到的一致能量估计以及习题3.1.1可知：存在子列$\{\mathbf{u}_{m_l}\}\subset\{\mathbf{u}_m\}$ 使得

$$\mathbf{u}_{m_l}\xrightarrow{\text{在 } L^2(0,T;H_0^1(U)) \text{ 中弱收敛}}\mathbf{u},\quad \mathbf{u}_{m_l}'\xrightarrow{\text{在 } L^2(0,T;H^{-1}(U)) \text{ 中弱收敛}}\mathbf{u}',$$

据命题3.1.5又可得到 $\mathbf{u}\in C^1([0,T];H_0^1(U))$. 接下来我们验证这个 $\mathbf{u}$ 正是我们想要的弱解。固定

$N \in \mathbb{N}$ 并选取具有如下形式的函数 $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(U))$：

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k.$$

然后我们任取 $m \geqslant N$, 在(3.2.7) 两边同时乘以$d^k(t)$ 并对 t 变量积分得

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_m', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})\,\mathrm{d}t, \tag{3.2.16}$$

令 $m = m_l$ 并取弱极限得到

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})\,\mathrm{d}t,\ \ \forall \mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U)), \tag{3.2.17}$$

这里我们用到形如 $\sum d^k(t)w_k$ 的函数在该空间中是稠密的这一事实。随后我们得到

$$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\boldsymbol{f}, v),\ \ \forall v \in H_0^1(U),\ \text{a.e. } t \in [0,T]. \tag{3.2.18}$$

再用命题 3.1.3 ，就证得$\mathbf{u} \in C(0,T];L^2(U))$

下面证明$\mathbf{u}$的初值是g. 分部积分时间变量可得

$$\int_0^T \langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})\,\mathrm{d}t + (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)),\ \ \forall \mathbf{v} \in C^1(0,T;H_0^1(U)) \text{ with } \mathbf{v}(T) = 0, \tag{3.2.19}$$

以及

$$\int_0^T \langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})\,\mathrm{d}t + (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)),\ \ \forall \mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U)). \tag{3.2.20}$$

再次令 $m = m_l$ 并取极限。由于在 $L^2(U)$ 中 $\mathbf{u}_{m_l}(0) \to g$ 且 $\mathbf{v}(0)$ 是任意的，我们知 $\mathbf{u}(0) = g$ 必须成立。又因为我们只考虑线性方程，证明唯一性就只需验证当 $\boldsymbol{f} = g = 0$ 时 (3.0.1) 的唯一弱解为零。在 (3.2.17) 中令 $\mathbf{v}$ 为 $\mathbf{u}$ 本身，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0. \tag{3.2.21}$$

而又因为存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] \geqslant C_1\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)}^2 - C_2\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \geqslant -C_2\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2,$$

所以用 Grönwall 不等式立即得出 $\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}=0$，故 $\mathbf{u}=0$. $\square$

习题 3.2

习题 3.2.1 (Poisson方程的Galerkin逼近). 设 $f\in L^2(U)$，$u_m=\sum_{k=1}^m d_m^k w_k$ 满足

$$\int_U \nabla u_m\cdot\nabla w_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U f\,w_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \forall 1\leqslant k\leqslant m,$$

其中 $\{w_k\}$ 是 $H_0^1(U)$ 的标准正交基。证明：$\{u_m\}$ 存在子列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛于Poisson方程 $-\Delta u=f\ (t>0,\boldsymbol{x}\in U), u|_{\partial U}=0$ 的弱解 u.

习题 3.2.2. 设 $g\in L^2(U)$ 并设 u 是如下问题的光滑解：

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 & \text{in } U_T,\\ u=0 & \text{on } [0,T]\times\partial U,\\ u=g & \text{on } \{t=0\}\times U.\end{cases}\tag{3.2.22}$$

证明：对任意的$t\geqslant 0$有

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(U)}\leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}.$$

这里 $\lambda_1>0$ 是具有零 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 在 U 上的主特征值。

3.3 抛物正则性定理

在证得抛物方程 (3.0.1) 弱解的存在唯一性之后，我们自然会提出进一步的问题：这个弱解是古典解吗？解的正则性如何？为了搞清楚这件事情，我们可以先尝试计算热方程的**先验估计 (a priori estimate).**

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f & \text{in } [0,T]\times\mathbb{R}^d,\\ u(0,\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x}) & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d,\end{cases}\tag{3.3.1}$$

其中这里我们还假设 u 是一个当 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时迅速衰减到 0 的光滑解。在定理 3.2.2 中，我们实际上得到了 $L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^2\cap L_t^2 H_{\boldsymbol{x}}^1$ 先验估计：

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^d} u(t,\boldsymbol{x})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{x})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(f(t,\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right).$$

然而热方程中的 Laplacian 项包含二阶导数，当源项$f(t,\cdot)\in L^2(U)$时，我们自然会问：u 是否具有 H^2 正则性？（即u是否在L^2意义下是二阶可微的？）事实上，我们可以取平方然后分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^d}(u_t-\Delta u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2 - 2\partial_t u\Delta u + (\Delta u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2 + 2\partial_t\nabla u\cdot\nabla u + (\Delta u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

进而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2 + (\Delta u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.3.2}$$

对时间变量t积分，得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2 + (\Delta u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla \mathrm{g}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^T\int_U f(t,\boldsymbol{x})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right). \tag{3.3.3}$$

这表明如果初值 $g\in H_0^1$ 且源项 $f\in L_t^2L_{\boldsymbol{x}}^2$，则解 $\mathbf{u}\in L_t^2H_{\boldsymbol{x}}^2\cap L_t^\infty H_{\boldsymbol{x}}^1$ 且 $\mathbf{u}'\in L_t^2L_{\boldsymbol{x}}^2$。接下来我们想进一步建立**对时间变量$t$逐点的** H^2 估计（而不是 L_t^2 型的）。这是可以实现的，但也要求初值 g 和源项 f 具有更高的正则性。事实上我们对热方程求 ∂_t 得到

$$\partial_t^2 u - \Delta\partial_t u = \partial_t f \text{ in } (0,T]\times\mathbb{R}^d,\quad \partial_t u(0,\cdot) = f(0,\cdot)+\Delta \mathrm{g}(\cdot).$$

两边乘以$\partial_t u$再分部积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_t u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\partial_t u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|\partial_t f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

据Grönwall不等式得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_t u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\partial_t u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t f)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla^2\mathrm{g}|^2 + f(0,\cdot)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right). \tag{3.3.4}$$

然后模仿命题 3.1.4 的证明那样用微积分基本定理，我们有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t,\cdot)\|_{L^2(U)}^2 \leqslant C\left(\|f\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)}^2\right). \tag{3.3.5}$$

这给出了 $\partial_t u$ 的正则性。对于 u 的 $L_t^\infty H_{\boldsymbol{x}}^2$ 正则性，我们使用椭圆正则性定理（定理 2.5.2，本质上是用 Δu 乘在方程两边然后积分）得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2 u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} f^2 + (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.3.6}$$

因此我们得出结论：

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2 + |\nabla^2 u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \partial_t u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ \leqslant\ & C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t f)^2 + f^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2 \mathrm{g}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right).\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

根据如上对标准热方程的分析，我们期待对抛物方程 (3.0.1) 证明如下正则性结果。为了技术上的简便，我们假设$U \subset \mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，$\{w_k\} \subset H_0^1(U)$ 是 $(-\Delta)$ 算子(带Dirichlet边界条件)的特征函数系 (据椭圆正则性定理实际上有$\{w_k\} \subset C^\infty(\overline{U})$)，并假设系数 a^{ij}, b^i, c 在 $\overline{U}$ 中光滑且与 t 无关。

定理 3.3.1 (抛物正则性). 设$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 为 (3.0.1) 的弱解，初值 $g \in H_0^1(U)$，源项 $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;L^2(U))$。那么解 $\mathbf{u}$ 实际上满足

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^2(U)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(U)),\ \ \mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U)),$$

并有如下估计

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \leqslant C \left(\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|\mathrm{g}\|^2_{H_0^1(U)} \right), \tag{3.3.8}$$

其中常数 $C > 0$ 依赖 U, T 和 L 的系数。

此外，如果我们还额外地假设 $g \in H^2(U)$ 以及 $\boldsymbol{f}' \in L^2(0,T;L^2(U))$，那么 $\mathbf{u}$ 满足

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H^2(U)),\ \mathbf{u}' \in L^\infty(0,T;L^2(U)) \cap L^2(0,T;H_0^1(U)),\ \mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

并有如下估计

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2(U)} \right) + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}''\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \\ \leqslant\ & C \left(\|\boldsymbol{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\mathrm{g}\|^2_{H^2(U)} \right).\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

证明. 第一部分本质上是在方程两边同时乘以 $\mathbf{u}'$ 然后分部积分。然而目前我们不知道是否有 $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U))$，所以我们首先应该对 (3.2.5) 中定义的逼近序列 $\{\mathbf{u}_m'\}$ 做这件事情而不是$\mathbf{u}$本身。今

在方程 (3.2.7) 两边同时乘以 ${d_m^k}'(t)$ 并对 $1 \leqslant k \leqslant m$ 求和，得到

$$(\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m') + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'] = (\boldsymbol{f}, \mathbf{u}_m'), \ \ \text{a.e. } t \in [0, T].$$

因此现在需要计算 $B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m']$. 代入算子 L 的具体形式，我们得到

$$B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'] = \int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m' \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U b^i \partial_i \mathbf{u}_m \, \mathbf{u}_m' + c \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m' \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $a^{ij} = a^{ji}$ 且系数与时间无关，我们发现二阶项给出了一个能量结构

$$\int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m' \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

然后用 Young 不等式，对任意 $\delta > 0$有

$$\left| \int_U b^i \partial_i \mathbf{u}_m \, \mathbf{u}_m' + c \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m' \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leqslant \delta \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C}{\delta} \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2$$

以及

$$|(\boldsymbol{f}, \mathbf{u}_m')| \leqslant \delta \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C}{\delta} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(U)}^2.$$

于是我们推出如下不等式

$$\|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2\delta \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C}{\delta} \left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \right).$$

现在选取$\delta \in (0, \frac{1}{4})$充分小，使得含$\delta$的项被不等式左边吸收掉，然后再对时间变量积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 \, \mathrm{d}t + \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\leqslant\ & C \left(\int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m \bigg|_{t=0} + \int_0^T \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \, \mathrm{d}t \right) \\
\leqslant\ & C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^2(U))}^2 + \|\mathrm{g}\|_{H_0^1(U)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

最后，据L的一致椭圆性有 $\int_U a^{ij} \partial_i \mathbf{u}_m \, \partial_j \mathbf{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \theta \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2$，这样就得到

$$\int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 \, \mathrm{d}t + \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \leqslant C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^2(U))}^2 + \|\mathrm{g}\|_{H_0^1(U)}^2 \right), \tag{3.3.11}$$

上式右边不依赖于 m，因此我们可以令 $m=m_l\to\infty$ 并取极限得到

$$\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;H_0^1(U)),\ \ \mathbf{u}'\in L^2(0,T;L^2(U))$$

它们满足如下估计（用习题3.1.2）

$$\int_0^T\|\mathbf{u}'\|_{L^2(U)}^2\,\mathrm{d}t+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2\leqslant C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^2(U))}^2+\|g\|_{H_0^1(U)}^2\right).\tag{3.3.12}$$

现在可以证明 $\mathbf{u}$ 有 $L_t^2H_{\boldsymbol{x}}^2$ 了。事实上现在我们已经得到

$$(\mathbf{u}',\varphi)+B[\mathbf{u},\varphi]=(\boldsymbol{f},\varphi)\ \ \forall\varphi\in H_0^1(U),\ \text{a.e. }t\in[0,T],$$

该式又可写作

$$B[\mathbf{u},\varphi]=(\mathbf{h},\varphi)\ \ ,\mathbf{h}\ :=\boldsymbol{f}-\mathbf{u}'\in L^\infty(0,T;L^2(U)).$$

据椭圆正则性定理（定理 2.5.5）可知：对几乎处处的 $t\in[0,T]$有 $\mathbf{u}(t)\in H^2(U)$ 以及

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2(U)}^2\leqslant C(\|\mathbf{h}\|_{L^2(U)}^2+\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2)\leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(U)}^2+\|\mathbf{u}'\|_{L^2(U)}^2+\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2).$$

这与之前得到的估计相结合就给出了我们要证明的估计，至此 (3.3.8) 得证。

接下来我们假设 $g\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$ 和 $\boldsymbol{f}\in H^1(0,T;L^2(U))$ 来证明更高的抛物正则性 (3.3.9)。同样地，我们首先对逼近方程 (3.2.7)（而不是原方程）求时间导数，这是因为我们目前还没有解（在时间上）的可微性。现在有

$$(\mathbf{u}_m'',w_k)+B[\mathbf{u}_m',w_k]=(\boldsymbol{f}',w_k),$$

两边同时乘以 ${d_m^k}'(t)$ 并对 $1\leqslant k\leqslant m$ 求和得到

$$(\mathbf{u}_m'',\mathbf{u}_m')+B[\mathbf{u}_m',\mathbf{u}_m']=(\boldsymbol{f}',\mathbf{u}_m').$$

据L的一致椭圆性和 Grönwall 不等式，我们推出

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}^2+\int_0^T\|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}^2\,\mathrm{d}t&\leqslant C(\|\mathbf{u}_m'(0)\|_{L^2(U)}^2+\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2)\\&\leqslant C(\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2).\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

现在我们必须寻求对 $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2$ 的控制。现在需注意L**不一定是对称椭圆算子**，所以我们也许要通过 $\|\Delta\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}$ 来控制 $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}$。而这件事情可以通过将 $\mathbf{u}_m$ 在标准正交基 $\{w_k\}$ 中作展

开来实现。事实上，据椭圆正则性定理（以及 $\mathbf{u}_m|_{\partial U}=0$），我们有

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leqslant C(\|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 + \|\Delta\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2).$$

因为 $\mathbf{u}_m(0)=\sum\limits_{k=1}^m d_m^k(0)w_k(\boldsymbol{x})$ 以及 $-\Delta\mathbf{u}_m(0)=\sum\limits_{k=1}^m d_m^k(0)\lambda_k w_k(\boldsymbol{x})$ (注意 w_k 是 $(-\Delta)$ 的特征函数), 据特征函数系的正交性可得

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 = \sum_{k=1}^m (d_m^k(0))^2 \leqslant \lambda_1^{-2}\sum_{k=1}^m (d_m^k(0)\lambda_k)^2 = \lambda_1^{-2}\|\Delta\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2,$$

从而

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leqslant C(1+\lambda_1^{-2})\|\Delta\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2$$

其中 $\lambda_1>0$ 是具有 Dirichlet 边界条件的 $(-\Delta)$ 的主特征值。接下来，我们分部积分两次并且利用 $\mathbf{u}_m|_{\partial U}=\Delta\mathbf{u}_m|_{\partial U}=0$ 得到（这里用到了特征函数本身是属于$C^\infty(\overline{U})$的）

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leqslant C(\mathbf{u}_m(0), \Delta^2\mathbf{u}_m(0)).$$

由于 $\Delta^2\mathbf{u}_m(0)\in \mathrm{Span}\{w_1,\cdots,w_m\}$ 以及 $(\mathbf{u}_m(0),w_k)=(g,w_k)$，我们有

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leqslant C(\Delta g, \Delta\mathbf{u}_m(0)) \leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 + C\|g\|_{H^2(U)}^2,$$

从而存在$C>0$使得 $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}\leqslant C\|g\|_{H^2(U)}$ 成立。现在我们得到$\mathbf{u}_m'$的一致估计

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}^2\,\mathrm{d}t &\leqslant C(\|\mathbf{u}_m'(0)\|_{L^2(U)}^2 + \|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2)\\ &\leqslant C(\|g\|_{H^2(U)}^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2).\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

现在我们利用方程来证明 $L_t^\infty H_{\boldsymbol{x}}^2$ 正则性。回忆我们已有

$$B[\mathbf{u}_m, w_k] = (\boldsymbol{f}-\mathbf{u}_m', w_k),\ \ 1\leqslant k\leqslant m.$$

该式两边乘以 $\lambda_k d_m^k(t)$ 并对 $1\leqslant k\leqslant m$ 求和后得到

$$B[\mathbf{u}_m, -\Delta\mathbf{u}_m] = (\boldsymbol{f}-\mathbf{u}_m', -\Delta\mathbf{u}_m),\ \ t\in[0,T].$$

而 $\Delta\mathbf{u}_m|_{\partial U}=0$, 所以 $B[\mathbf{u}_m,-\Delta\mathbf{u}_m]=(L\mathbf{u}_m,-\Delta\mathbf{u}_m)$. 据问题 3.3.1 知

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H^2(U)}^2 \leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2). \tag{3.3.15}$$

结合 $\mathbf{u}_m'$ 一致估计限，我们得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\mathbf{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}^2+\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^2(U)}^2\right)+\int_0^T\|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}^2\,\mathrm{d}t\leqslant C(\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2). \quad (3.3.16)$$

令 $m=m_l\to\infty$，就导出了 $\mathbf{u}$ 所需的估计。

余下还要证明 $\mathbf{u}''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$. 我们知道 $H^{-1}(U)$ 是 $H_0^1(U)$ 的对偶空间，所以我们选取 $\varphi\in H_0^1(U)$ 并要求其满足 $\|\varphi\|_{H_0^1(U)}\leqslant 1$，将其$\varphi=\varphi_m+\varphi_m^\perp$，其中 $\varphi_m\in\mathrm{Span}\{w_1,\cdots,w_m\}$, $\varphi_m^\perp\in\mathrm{Span}\{w_{m+1},w_{m+2},\cdots\}$. 据定义有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_m''\|_{H^1(U)}&=\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leqslant 1}|\langle\mathbf{u}_m'',\varphi\rangle|=\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leqslant 1}\left|\langle\boldsymbol{f}',\varphi_m\rangle-B[\mathbf{u}_m',\varphi_m;t]\right|\\&\leqslant\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leqslant 1}\left(\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(U)}\|\varphi_m\|_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}\|\varphi_m\|_{H_0^1(U)}\right)\leqslant\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}.\end{aligned}$$

由于我们已经证明了 $\mathbf{u}_m'$ 的一致估计，那么令 $m=m_l$ 并取极限就立即得到 $\mathbf{u}''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 和正则性估计 (3.3.9). □

通过对 Sobolev 可微指标k的归纳，我们还可以证明更高阶的抛物正则性结果，证明略去。

定理 3.3.2 (高阶抛物正则性). 给定正整数 $m\in\mathbb{N}^*$. 对于抛物方程 (3.0.1)，设 $g\in H^{2m+1}(U)$ 且对于 $0\leqslant k\leqslant m$ 有 $\frac{\mathrm{d}^k\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t^k}\in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))$。同时假设初值 g 满足**直到 m 阶的相容性条件 (compatibiliy conditions up to m-th order)**，即

$$g_0=g\in H_0^1(U),\ g_j:=\frac{\mathrm{d}^{j-1}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t^{j-1}}(0)-Lg_{j-1}\in H_0^1(U),\ \ 1\leqslant j\leqslant m.$$

则对 $0\leqslant k\leqslant m+1$ 有 $\frac{\mathrm{d}^k\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^k}\in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))$，并成立如下估计

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{\mathrm{d}^k\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}^2\leqslant C\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{\mathrm{d}^k\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t^k}\right|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))}^2+\|g\|_{H^{2m+1}(U)}^2\right), \quad (3.3.17)$$

其中常数$C>0$ 仅依赖 m,U,T 以及L 的系数。

注记 3.3.1. 相容性条件是必要的，它保证了全体 $g_0,g_1,\cdots,g_m$ 在边界 ∂U 上的迹都为零。否则方程解的时间导数的初值未必是零，即初边值产生冲突。

定理 3.3.3 (C^∞ 抛物正则性). 对抛物方程 (3.0.1)，设 $g\in C^\infty(\overline{U})$，$f\in C^\infty(\overline{U_T})$，且初值 g 满足**无穷阶的相容性条件**，即

$$g_0=g\in H_0^1(U),\ g_j:=\frac{\mathrm{d}^{j-1}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t^{j-1}}(0)-Lg_{j-1}\in H_0^1(U),\ \ j=1,2,\cdots$$

那么 (3.0.1) 具有唯一的解 $u\in C^\infty(\overline{U_T})$.

问题 3.3

问题 3.3.1. 设 $u\in C^\infty(U)$ 满足 $u|_{\partial U}=\Delta u|_{\partial U}=0$. 证明：存在$\beta>0,\gamma\geqslant 0$使得

$$\beta\|u\|^2_{H^2(U)}\leqslant(Lu,-\Delta u)_{L^2(U)}+\gamma\|u\|^2_{L^2(U)}.$$

其中 $Lu:=-\partial_j(a^{ij}\partial_j u)+b_i\partial_i u+cu$ 是一致椭圆的，且满足$a^{ij}=a^{ji}$.

注：此估计用于抛物正则性的证明。为了简化证明你也可以假设 $b^i=c=0$.

问题 3.3.2. 当 $L=-\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$（即 L 是对称椭圆算子）时，试给出增强正则性 (3.3.9) 的简化证明。

提示：把标准正交基 $\{w_k\}$ 选取为 L 在 $H^1_0(U)$ 中的特征函数而不是 $(-\Delta)$ 的特征函数。那么就不再需要问题 **??** 中的不等式了。

3.4 抛物极大值原理

本节讨论二阶抛物算子的极大值原理和 Harnack 不等式，这里我们假设椭圆算子 L 具有非散度形式会更方便：

$$Lu=-a^{ij}\partial_i\partial_j u+b^i\partial_i u+cu,\quad a^{ij},b^i,c\in C(\overline{U_T}),\ a^{ij}=a^{ji}.$$

我们定义抛物圆柱 $U_T:=(0,T]\times U$ 和抛物边界 $\Gamma_T:=\overline{U_T}\backslash U_T$，其中 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界充分光滑的有界开集。本讲义中我们仅证明弱极大值原理，强极大值原理的证明需要抛物 Harnack 不等式，在此略去。

3.4.1 弱极值原理

给定区间 $I\subseteq\mathbb{R}$ 和开集 $U\subseteq\mathbb{R}^d$，我们定义 $C^2_1(I{\times}U):=\{u:I{\times}U\to\mathbb{R}:u,\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\partial_{x_j}u,\partial_t u\in C(I\times U),\forall 1\leqslant i,j\leqslant d\}$，其中变量 $t\in I,\boldsymbol{x}\in U$. 本节我们假设 U 是有界的。

定理 3.4.1 (弱极大值原理)**.** 设 $u\in C^2_1(U_T)\cap C(\overline{U_T})$，且在 U_T 中有 $c=0$。若 $\partial_t u+Lu\leqslant 0$（类似地，$\geqslant 0$）在 U_T 中恒成立，则有 $\max\limits_{\overline{U_T}}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$（类似地，$\min\limits_{\overline{U_T}}u=\min\limits_{\Gamma_T}u$）。此时 u 被称为下解（上解）。

证明. 证明过程与定理 2.6.1 非常相似。我们首先增加假设为 $\partial_t u+Lu<0$ 在 U_T 中恒成立，并假设存在 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in U_T$ 使得 $u(t_0,\boldsymbol{x}_0)=\max\limits_{\overline{U_T}}u$. 若 $0<t_0<T$，那么 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是 U_T 的内点，因此 $\partial_t u(t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$. 另一方面，我们可以模仿定理 2.6.1 的证明计算出在 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 处有 $Lu\geqslant 0$。因此在

$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 处必有 $\partial_t u + Lu \geqslant 0$，这与假设 $\partial_t u + Lu < 0$ 矛盾。若 $t_0 = T$，那么仍然有 $\partial_t u(t_0, \boldsymbol{x}_0) \geqslant 0$，这再次导致在 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 处 $\partial_t u + Lu \geqslant 0$.

现在我们仅假设$\partial_t u + Lu \leqslant 0$在$U_T$中成立。此时我们引进扰动 $u^\varepsilon(t, \boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x}) - \varepsilon t$（其中 $\varepsilon > 0$ 是一个小常数）。直接计算可得 $\partial_t u^\varepsilon + Lu^\varepsilon = \partial_t u + Lu - \varepsilon < 0$ 在U_T中恒成立，进而 $\max\limits_{\overline{U_T}} u^\varepsilon = \max\limits_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. 现在取极限 $\varepsilon \to 0$，我们得到

$$\max_{\overline{U_T}} u = \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\overline{U_T}} (u - \varepsilon t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\Gamma_T} (u - \varepsilon t) \leqslant \max_{\Gamma_T} u.$$

而反向不等式是显而易见的，因为 $\Gamma_T \subsetneq \overline{U_T}$. □

当算子 L 中的零阶项系数 $c \geqslant 0$ 时，我们可以证明类似的结果。

定理 3.4.2 ($c \geqslant 0$的弱极大值原理). *设 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ 且在 U_T 中有 $c \geqslant 0$。若 $\partial_t u + Lu \leqslant 0$ 在 U_T 中恒成立（类似地，$\geqslant 0$），则 $\max\limits_{\overline{U_T}} u \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} u^+$（类似地，$\min\limits_{\overline{U_T}} u \geqslant \min\limits_{\Gamma_T} u^-$）。特别地，若 $\partial_t u + Lu = 0$ 在 U_T 中恒成立，则有 $\max\limits_{\overline{U_T}} |u| = \max\limits_{\Gamma_T} |u|$.*

3.4.2 强极值原理

证明抛物方程的强极大值原理需要用到抛物 Harnack 不等式。

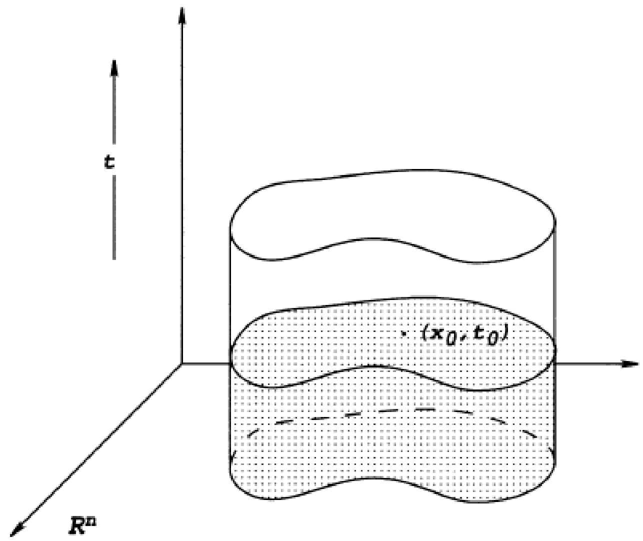
定理 3.4.3 (抛物 Harnack 不等式). *设非负函数 $u \in C_1^2(U_T)$ 在 U_T 中满足 $\partial_t u + Lu = 0$. 设 $V \Subset U$ 是连通子集，则那么对任意的 $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$，存在常数 $C > 0$，使得*

$$\sup_V u(t_1, \cdot) \leqslant \inf_V u(t_2, \cdot).$$

其中常数C仅依赖 V, t_1, t_2 和 L 的系数。

定理 3.4.3 的证明需要用到对数梯度估计方法，具体参见 Evans [6, 391页定理 7.1.10], 我们将在下一小节利用 Li-Yau 梯度估计给出$L = (-\Delta)$情况的证明。现在我们用抛物 Harnack 不等式和抛物弱极值原理来证明抛物强极值原理。

定理 3.4.4 (强极大值原理). *设有界开集 U 是连通的，函数 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ 且在 U_T 中有 $c = 0$. 若在 U_T 中恒有 $\partial_t u + Lu \leqslant 0$（类似地，$\geqslant 0$）且 u 在点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in U_T$ 处达到其在 $\overline{U_T}$ 上的最大值（类似地，最小值），那么 u 在 U_{t_0} 中恒为常值（注意不是 U_T!）。*



Parabolic strong maximum principle

定理 3.4.3 的结论表明抛物方程具有“无限传播速度”。

证明. 设在 U_T 中 $\partial_t u + Lu \leqslant 0$ 且 u 在 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in U_T$ 处达到最大值。选取具有光滑边界的开子集 $W \Subset U$，使得 $\boldsymbol{x}_0 \in W$. 然后考虑抛物方程

$$\partial_t v + Lv = 0 \quad \text{in } W_T, \qquad v = u \quad \text{on } \Delta_T := \overline{W_T} \backslash W_T.$$

据弱极大值原理，我们知道 $u \leqslant v \leqslant M := \max\limits_{\overline{U_T}} u$，因此在 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 处有 $v = M$. 现在我们需要证明 $w := M - v \equiv 0$ 在W中恒成立，若能证得该结论，则强极值原理已经得证，这是因为 $W \Subset U$ 是任意选取的。

由于 $c = 0$，我们知道在 W_T 中有 $\partial_t w + Lw = 0$ 以及 $w \geqslant 0$. 据抛物 Harnack 不等式，对于任意满足 $\boldsymbol{x}_0 \in V$ 的子集 $V \Subset W$ 和 $0 < t < t_0$，都有

$$\sup_V w(t, \cdot) \leqslant C \inf_V w(t_0, \cdot).$$

另一方面，$\inf\limits_V w(t_0, \cdot) \leqslant w(t_0, \boldsymbol{x}_0) = 0$ 迫使 w 在 $\{t\} \times V$ 上恒为 0 这件事情对所有的 $t \in (0, t_0)$ 都成立。由于 $V \Subset W$ 和 $t \in (0, t_0)$ 都是任意的，我们知道在 W_{t_0} 中必有 $w = 0$ 恒成立，因此在 v 在 W_{t_0} 中恒为常值M. 由于$v = u$在 Δ_T 上成立，我们就证明了在 $[0, t_0] \times \partial W$ 上 $u = M$ 恒成立。 □

对 $c \geqslant 0$，我们也有类似的结果。

定理 3.4.5 ($c \geqslant 0$的强极值原理). 设有界开集 U 是连通的，函数 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ 且在 U_T 中有 $c \geqslant 0$. 若在 U_T 中恒有 $\partial_t u + Lu \leqslant 0$（类似地，$\geqslant 0$）且 u 在点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in U_T$ 处达到其在 $\overline{U_T}$ 上的**非负最大值**（类似地，**非正最大值**），那么 u 在 U_{t_0} 中恒为常值（注意不是 U_T!）。

3.4.3　*抛物Harnack不等式的证明

本节我们来证明定理3.4.3. 为了简化计算，我们假设$L=-\Delta$, 即考虑标准热方程的 Harnack 不等式，但是我们不利用热核的具体表达式和估计，以求得一个一般性的证明。

抛物 Harnack 的“演化特征”． 我们先考虑热方程的基本解：任固定 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$，考虑$K(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}{4t}}$. 直接计算可得 K 是热方程的解。对任意 $(t_1,\boldsymbol{x}_1)$, $(t_2,\boldsymbol{x}_2)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$，计算可得

$$\frac{K(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{K(t_2,\boldsymbol{x}_2)}=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{d/2}e^{\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{\xi}|^2}{4t_2}-\frac{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\xi}|^2}{4t_1}}.$$

由Young不等式知，对任意 $t_2>t_1>0$，

$$\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{\xi}|^2}{t_2}\leqslant\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{t_2-t_1}+\frac{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\xi}|^2}{t_1},\ \text{等号成立当且仅当}\ \boldsymbol{\xi}=\frac{t_2\boldsymbol{x}_1-t_1\boldsymbol{x}_2}{t_2-t_1}.$$

因此，

$$\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^d,\ t_2>t_1>0,\quad K(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{d/2}\exp\left\{\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{4(t_2-t_1)}\right\}K(t_2,\boldsymbol{x}_2),$$

且当 $\boldsymbol{\xi}$ 如上选取时等号成立。

这个简单的计算表明，热方程的 Harnack 不等式具有“演化”特征：正解在某一时刻的取值被其在稍后时刻的取值控制。因此如果我们要证明形如 $u(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant Cu(t_2,\boldsymbol{x}_2)$ 的结论，那么常数 C 应依赖 t_2/t_1，$|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|$，以及最重要的 $(t_2-t_1)^{-1}>0$.

对数梯度估计的动机　Harnack不等式需要估计 $\frac{u(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{u(t_2,\boldsymbol{x}_2)}$，求对数之后就只需计算 $v(t_1,\boldsymbol{x}_1)-v(t_2,\boldsymbol{x}_2)$，因此我们自然需要估计 v_t 和 $|\nabla v|$. 现在我们再次从基本解考虑这个问题。在上面的基本解中令$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$, 即计算可得

$$K(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}\quad\Rightarrow\quad v(t,\boldsymbol{x})=\log K(t,\boldsymbol{x})=-\frac{d}{2}\log(4\pi t)-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}.$$

求导即得

$$\partial_t v=-\frac{d}{2t}+\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t^2},\quad\nabla v=-\frac{\boldsymbol{x}}{2t},\quad\Rightarrow\quad\partial_t v=-\frac{d}{2t}+|\nabla v|^2.$$

现在对热方程的任意正解，我们证明如下的微分 Harnack 不等式。

定理 3.4.6 (Li-Yau对数梯度估计). *设 $u\in C^{2,1}((0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 是方程 $u_t-\Delta u=0$ 的正解。那么 $v=\log u$ 满足*

$$\partial_t v+\frac{d}{2t}\geqslant|\nabla v|^2\quad\text{in }(0,T]\times\mathbb{R}^d.$$

若该结论成立，则通过简单的积分即可推导出 Harnack 不等式。

推论 3.4.7 (热方程的Harnack不等式). 设 $u \in C^{2,1}((0,T]\times\mathbb{R}^d)$ 是 $u_t = \Delta u$ 在 $(0,T]\times\mathbb{R}^d$ 中的正解。则对任意的 $(t_1,\boldsymbol{x}_1),(t_2,\boldsymbol{x}_2) \in (0,T]\times\mathbb{R}^d$ 和 $t_2 > t_1 > 0$ 成立如下不等式:

$$\frac{u(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{u(t_2,\boldsymbol{x}_2)} \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{d/2} \exp\left\{\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{4(t_2-t_1)}\right\}.$$

证明. 令$v = \log u$，任取$\boldsymbol{x}_1$到$\boldsymbol{x}_2$的路径 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ ($t \in [t_1,t_2]$) 满足 $\boldsymbol{x}(t_i) = \boldsymbol{x}_i, i = 1,2$. 据定理 3.4.6，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t,\boldsymbol{x}(t)) = v_t + \nabla v\cdot\boldsymbol{x}'(t) \geqslant |\nabla v|^2 + \nabla v\cdot\boldsymbol{x}'(t) - \frac{d}{2t} \geqslant -\frac{1}{4}|\boldsymbol{x}'(t)|^2 - \frac{d}{2t}.$$

对t积分得到

$$v(t_1,\boldsymbol{x}_1) \leqslant v(t_2,\boldsymbol{x}_2) + \frac{d}{2}(\log t_2 - \log t_1) + \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{x}'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

接下来寻找“最佳路径”使得上式最后一个积分最小。我们要求沿路径满足 $\boldsymbol{x}''(t) = 0$. 因此我们可以设 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$. 又因为 $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}t_i + \boldsymbol{b}, i = 1,2$，所以我们取

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1}{t_2-t_1},\quad \boldsymbol{b} = \frac{t_2\boldsymbol{x}_1 - t_1\boldsymbol{x}_2}{t_2-t_1}.$$

那么 $\int_{t_1}^{t_2}|\boldsymbol{x}'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{t_2-t_1}$. 因此得到

$$v(t_1,\boldsymbol{x}_1) \leqslant v(t_2,\boldsymbol{x}_2) + \frac{d}{2}(\log t_2 - \log t_1) + \frac{1}{4}\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{t_2-t_1},$$

等价地，即为Harnack不等式

$$\frac{u(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{u(t_2,\boldsymbol{x}_2)} \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{d/2} \exp\left\{\frac{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|^2}{4(t_2-t_1)}\right\}.$$

□

对数梯度估计的证明. 接下来我们证明定理3.4.6. 我们考虑 $|\nabla v|^2 - v_t$ 并打算推导其上界。首先我们推导 $|\nabla v|^2 - v_t$ 满足的一个抛物型方程。但仔细的分析表明，该方程中的某些项无法被控制。所以我们引入参数 $\alpha \in (0,1)$ 并转而考虑 $\alpha|\nabla v|^2 - v_t$. 在我们应用极值原理后，令 $\alpha \to 1$ 即得结论。**下面的证明可能是本课程中最难的证明之一，如果你不想看那就不看好了，反正考试是不可能考你默写它的。**

定理3.4.6的证明. 不妨设 u 直到 $\{t=0\}$ 都连续，否则在 $[\varepsilon,T]\times\mathbb{R}^d$ 上考虑该问题再令 $\varepsilon\to 0$即可。

第一步：推导对数梯度的方程. 我们首先推导涉及 $v=\log u$ 的导数的方程。直接计算可得

$$v_t=\Delta v+|\nabla v|^2.$$

令 $w=\Delta v$，则有 $w_t=\Delta v_t=\Delta(\Delta v+|\nabla v|^2)=\Delta w+\Delta|\nabla v|^2$. 由 $\Delta|\nabla v|^2=2|\nabla^2 v|^2+2\nabla v\cdot\nabla(\Delta v)=2|\nabla^2 v|^2+2\nabla v\cdot\nabla w$，我们得到

$$w_t-\Delta w-2\nabla v\cdot\nabla w=2|\nabla^2 v|^2. \tag{3.4.1}$$

注意 ∇v 是需要被控制的，且作为系数出现在方程 (3.4.1) 中。所以我们需要推导 ∇v 满足什么方程。令 $\tilde{w}=|\nabla v|^2$，直接计算得

$$\begin{aligned}\tilde{w}_t&=2\nabla v\cdot\nabla v_t=2\nabla v\cdot\nabla(\Delta v+|\nabla v|^2)=2\nabla v\cdot\nabla(\Delta v)+2\nabla v\cdot\nabla\tilde{w}\\&=\Delta|\nabla v|^2-2|\nabla^2 v|^2+2\nabla v\cdot\nabla\tilde{w}=\Delta\tilde{w}+2\nabla v\cdot\nabla\tilde{w}-2|\nabla^2 v|^2.\end{aligned}$$

因此得到$\tilde{w}=|\nabla v|^2$满足的热方程

$$\tilde{w}_t-\Delta\tilde{w}-2\nabla v\cdot\nabla\tilde{w}=-2|\nabla^2 v|^2. \tag{3.4.2}$$

由Cauchy不等式得

$$|\nabla^2 v|^2=\sum_{i,j=1}^d v_{x_ix_j}^2\geqslant\sum_{i=1}^d v_{x_ix_i}^2\geqslant\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d v_{x_ix_i}\right)^2=\frac{1}{d}(\Delta v)^2.$$

因此从(3.4.1)可以推出

$$w_t-\Delta w-2\nabla v\cdot\nabla w\geqslant\frac{2}{d}w^2.$$

第二步：推导待证量的方程. 根据我们在证明定理之前的讨论，直接估计 $|\nabla v|^2-v_t$ 有困难，因此引进常数 $\alpha\in(0,1)$ 并令 $f:=\alpha|\nabla v|^2-v_t$. 那么则

$$f=\alpha|\nabla v|^2-\Delta v-|\nabla v|^2=-\Delta v-(1-\alpha)|\nabla v|^2=-w-(1-\alpha)\tilde{w}.$$

据(3.4.1)-(3.4.2)可算出

$$f_t-\Delta f-2\nabla v\cdot\nabla f=-2\alpha|\nabla^2 v|^2.$$

接下来我们用 f 来估计 $|\nabla^2 v|^2$。注意到

$$\begin{aligned}|\nabla^2 v|^2 &\geqslant \frac{1}{d}(\Delta v)^2 = \frac{1}{d}(|\nabla v|^2 - v_t)^2 = \frac{1}{d}((1-\alpha)|\nabla v|^2 + f)^2 \\ &= \frac{1}{d}(f^2 + 2(1-\alpha)|\nabla v|^2 f + (1-\alpha)^2|\nabla v|^4) \geqslant \frac{1}{d}(f^2 + 2(1-\alpha)|\nabla v|^2 f).\end{aligned}$$

据此得到f满足如下的不等式

$$f_t - \Delta f - 2\nabla v \cdot \nabla f \leqslant -\frac{2\alpha}{d}(f^2 + 2(1-\alpha)|\nabla v|^2 f). \tag{3.4.3}$$

这里需要指出，右端的 $|\nabla v|^2$ 在后面起着重要作用，所以我们不能直接假设$\alpha = 1$.

第三步：作截断. 现在引入截断函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，且 $\varphi \geqslant 0$，并令 $g = t\varphi f$. 我们推导 g 满足什么方程或不等式估计. 求导得:

$$g_t = \varphi f + t\varphi f_t, \quad \nabla g = t\varphi \nabla f + tf\nabla\varphi, \quad \Delta g = t\varphi\Delta f + 2t\nabla\varphi\cdot\nabla f + tf\Delta\varphi.$$

那么，

$$\begin{aligned}&t\varphi f_t = g_t - \frac{g}{t}, \quad t\varphi\nabla f = \nabla g - \frac{\nabla\varphi}{\varphi}g, \\ &t\varphi\Delta f = \Delta g - 2\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\cdot\left(\nabla g - \frac{\nabla\varphi}{\varphi}g\right) - \frac{\Delta\varphi}{\varphi}g = \Delta g - 2\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\cdot\nabla g + \left(2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2} - \frac{\Delta\varphi}{\varphi}\right)g.\end{aligned}$$

在 (3.4.3) 两边乘以 $t^2\varphi^2$，把上述等式代入换掉 $f_t, \nabla f$ 和 Δf，我们得到

$$t\varphi(g_t - \Delta g) + 2t(\nabla\varphi - \varphi\nabla v)\cdot\nabla g \leqslant g\left\{\varphi - \frac{2\alpha}{d}g + t\left(2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} - \Delta\varphi - \frac{4\alpha(1-\alpha)}{d}\varphi|\nabla v|^2 - 2\nabla\varphi\cdot\nabla v\right)\right\}.$$

为了消去右端的 $|\nabla v|$，我们对最后两项进行配方。（这里我们需要 $\alpha < 1$！否则无法控制右端的 $-2\nabla\varphi\cdot\nabla v$.）因此只要 g 是非负的，就有

$$t\varphi(g_t - \Delta g) + 2t(\nabla\varphi - \varphi\nabla v)\cdot\nabla g \leqslant g\left\{\varphi - \frac{2\alpha}{d}g + t\left(2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} - \Delta\varphi + \frac{d}{4\alpha(1-\alpha)}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)\right\}.$$

这里注意，右边除了 g 以外已经没有未知量。今选取 $\varphi = \eta^2$，其中 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且 $\eta \geqslant 0$。对非负的g我们算得

$$t\eta^2(g_t - \Delta g) + 2t(2\eta\nabla\eta - \eta^2\nabla v)\cdot\nabla g \leqslant g\left\{\eta^2 - \frac{2\alpha}{d}g + t\left(6|\nabla\eta|^2 - 2\eta\Delta\eta + \frac{d}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta|^2\right)\right\}.$$

现在取截断函数 $\eta_0\in C_0^\infty(B(\mathbf{0},1))$，使得在 $B(\mathbf{0},1)$ 中 $0\leqslant\eta_0\leqslant 1$，且在 $B(\mathbf{0},1/2)$ 中 $\eta_0=1$. 任给 $R\geqslant 1$, 我们取 $\eta(\boldsymbol{x})=\eta_0(\boldsymbol{x}/R)$ 就得到

$$\left(6|\nabla\eta|^2-2\eta\Delta\eta+\frac{d}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta|^2\right)(\boldsymbol{x})=\frac{1}{R^2}\left(6|\nabla\eta_0|^2-2\eta_0\Delta\eta_0+\frac{d}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta_0|^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{x}}{R}\right).$$

因此我们得到在 $(0,T)\times B(\mathbf{0},R)$ 中，对非负的g成立如下不等式

$$t\eta^2(g_t-\Delta g)+2t(2\eta\nabla\eta-\eta^2\nabla v)\cdot\nabla g\leqslant g\left(1-\frac{2\alpha}{d}g+\frac{C_\alpha t}{R^2}\right),$$

这里的常数$C_\alpha>0$仅依赖 α 和 η_0. 我们要指出，左边出现了 ∇v，但它是一阶项 ∇g 的系数，所以在后面使用弱极值原理的时候这项根本没用。

第四步：使用弱极值得出结论. 现在作出如下断言

断言. *在$(0,T]\times B(\mathbf{0},R)$ 中成立如下不等式:*

$$1-\frac{2\alpha}{d}g+\frac{C_\alpha t}{R^2}\geqslant 0. \tag{3.4.4}$$

反证法：今假设 $h:=1-\frac{2\alpha}{d}g+\frac{C_\alpha t}{R^2}$ 在 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in(0,T]\times B(\mathbf{0},R)$ 处取得**负的最小值**。这样我们得到

$$h(t_0,\boldsymbol{x}_0)<0,\quad h_t\leqslant 0,\quad \nabla h=0,\quad \Delta h\geqslant 0\quad \text{at } (t_0,\boldsymbol{x}_0).$$

据h的定义可得 $g(t_0,\boldsymbol{x}_0)>0$. 而 $g=t\eta^2 f$ 在 $(0,T)\times B(\mathbf{0},R)$ 的抛物边界上恒为零，所以 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 不可能落在抛物边界上。接下来对h求导，得到 $h_t=-\frac{2\alpha}{d}g_t+\frac{C_\alpha}{R^2}$ 以及 $\nabla h=-\frac{2\alpha}{d}\nabla g$, 因此得到

$$g_t\geqslant 0,\quad \nabla g=0,\quad \Delta g\leqslant 0\quad \text{at } (t_0,\boldsymbol{x}_0).$$

这样在 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 处，我们得到矛盾

$$0\leqslant t\eta^2(g_t-\Delta g)+2t(2\eta\nabla\eta-\eta^2\nabla v)\cdot\nabla g\leqslant g\left(1-\frac{2\alpha}{d}g+\frac{C_\alpha t}{R^2}\right)<0.$$

因此断言正确，(3.4.4) 在 $(0,T)\times B(\mathbf{0},R)$ 中成立。所以我们得到

$$1-\frac{2\alpha}{d}t\eta^2(\alpha|\nabla v|^2-v_t)+\frac{C_\alpha t}{R^2}\geqslant 0\quad \text{in } (0,T]\times B(\mathbf{0},R). \tag{3.4.5}$$

现在对任意固定的 $(t,\boldsymbol{x})\in(0,T]\times\mathbb{R}^d$，我们选取 $R>|\boldsymbol{x}|$. 代入截断函数 $\eta=\eta_0(\cdot/R)$ 并令 $R\to\infty$，我们得到

$$1-\frac{2\alpha}{d}t(\alpha|\nabla v|^2-v_t)\geqslant 0.$$

再令 $\alpha \to 1$ 即可得到所需的估计。 □

我们只需在 (3.4.5) 中取 $R=1$ 就能得到有界区域内热方程正解的对数梯度估计。

定理 3.4.8 (局部 Li-Yau 梯度估计). 设 $u \in C^{2,1}((0,1]\times B(\mathbf{0},1))$ 是 $u_t - \Delta u = 0$ 的正解，则对任意 $\alpha \in (0,1)$，$v = \log u$ 满足

$$v_t - \alpha|\nabla v|^2 + \frac{d}{2\alpha t} + C \geqslant 0 \quad \text{在 } (0,1]\times B(\mathbf{0},1/2) \text{ 中},$$

其中 $C>0$ 是仅依赖 d 和 α 的常数。

类似地我们可得到有界区域上热方程的Harnack不等式

推论 3.4.9. 设 $u \in C^{2,1}((0,1]\times B(\mathbf{0},1))$ 是 $u_t - \Delta u = 0$ 的非负解，则对任意 $(t_1,\boldsymbol{x}_1),(t_2,\boldsymbol{x}_2) \in (0,1]\times B(\mathbf{0},1/2)$ 以及 $t_2 > t_1$ 成立 Harnack 不等式

$$u(t_1,\boldsymbol{x}_1) \leqslant Cu(t_2,\boldsymbol{x}_2),$$

其中 $C>0$ 是仅依赖 d，t_2/t_1 和 $(t_2-t_1)^{-1}$ 的常数。

习题 3.4

习题 3.4.1. 设 u 为热方程 $\partial_t u - \Delta u + cu = 0$ 在 $\mathbb{R}_+ \times U$ 中的光滑解，在 $\{t=0\}\times\overline{U}$ 上 $u=g$，边界条件为在 $[0,\infty)\times\partial U$ 上 $u=0$。这里 $g(\boldsymbol{x}), c(t,\boldsymbol{x})$ 是给定的连续函数。

(1) 若存在常数 γ 使得 $c \geqslant \gamma > 0$，证明：存在常数 $A>0$ 使得对任意的 $(t,\boldsymbol{x}) \in (0,T]\times U$，均有 $|u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant Ae^{-\gamma t}$.

(2) 当 $g \geqslant 0$ 且 c 有界时，证明 u 是非负的。

习题 3.4.2. 证明定理 3.4.2，你可以参考定理 2.6.2 的证明。

习题 3.4.3. 证明定理 3.4.5.（提示：考虑 $\partial_t u + L'u$，其中 $L'u := Lu - cu$.）

问题 3.4

问题 3.4.1. 在习题 3.2.2 中，如果再假设 $g \in C^1(\overline{U})$，证明：存在常数 $C>0$ 使得对任意 $t>0$ 都有 $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in U} |u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant Ce^{-\lambda_1 t}$.

提示：如果初值是对应于$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边界条件时)的主特征值 λ_1 的特征函数 w_1，那对应热方程的解是什么？然后用问题2.6.2的结论。

3.5 消失粘性法

本节我们引入**消失粘性法 (vanishing viscosity method)**（也称为**无粘极限 (inviscid limit)**）来证明一阶线性对称双曲方程组的局部存在性。事实上，无粘极限在双曲守恒律的研究中起着重要作用，并派生了许多具有挑战性的问题。该方法的核心思想是添加一个带有小系数 ε 的粘性项 $\varepsilon\Delta u$ 以获得一个"正则化"的抛物系统，然后求解该抛物系统，最后再取极限 $\varepsilon \to 0$ 以获得原始双曲组的存在性。本节我们假设区域 $U = \mathbb{R}^d$，并同时指出：如果区域有边界，该方法可能不适用，这是因为边界附近可能出现**"边界层"(boundary layer)**. 例如在对带边区域中的 Navier-Stokes 方程（描述粘性流体运动）取无粘极限时，如果N-S方程本身带有无滑动(non-slip)边界条件，那么就会出现强边界层导致边界条件不匹配，取极限时可能需要在实解析函数或者一定阶数的Gevrey函数类里面考虑（可以理解为C^∞或者Schwartz函数都不够用），该领域仍有许多未解决的问题。

考虑如下一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{d} \mathbf{B}_j \partial_j \mathbf{u} = \boldsymbol{f} & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{g} & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

这里 $\mathbf{u} = (u^1, \cdots, u^m) : [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ 是未知向量，$\mathbf{B}_j : [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^{m\times m}$, $(1 \leqslant j \leqslant d)$ 是系数矩阵，源项 $\boldsymbol{f} : [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ 和初值 $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ 是给定的函数。

定义 3.5.1 (双曲性). 若对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \geqslant 0$，m阶方阵 $\mathbf{B}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ 都是可对角化的，则称 (3.5.1) 是**双曲方程组 (hyperbolic system)**. 这里 $\mathbf{B}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ 的定义为

$$\mathbf{B}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) := \sum_{j=1}^{d} y_j \mathbf{B}_j(t,\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, t \geqslant 0).$$

如果每个 $\mathbf{B}_j$ 都是对称的，那么我们说 (3.5.1) 是**对称双曲 (symmetric hyperbolic)**的。等价地，若对所有的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t$，方阵 $\mathbf{B}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ 都有 m 个实特征值

$$\lambda_1(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda_2(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$$

且对应的特征向量 $\{\mathbf{r}_k(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\}$ 构成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，则称 (3.5.1) 是双曲方程组。进一步地，若所有的 $\leqslant$ 都被严格不等式 $<$ 替换，那么我们说 (3.5.1) 是**严格双曲 (strictly hyperbolic)**的。

注记 3.5.1 (双曲性定义的动机). 为了简便，我们不妨假设每个 $\mathbf{B}_j$ 是常系数的且 $\boldsymbol{f} = 0$. 考虑具有 $\mathbf{u}(t,\boldsymbol{x}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} - \sigma t)$ 形式的 (3.5.1) 的**平面波解**，其中 $\mathbf{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ 足够光滑。将它代入 (3.5.1),

我们得到

$$\left(-\sigma I_m + \sum_{j=1}^{d} y_j \mathbf{B}_j\right)\mathbf{v}' = 0.$$

因此 $\mathbf{v}'$ 是矩阵 $\mathbf{B}(\boldsymbol{y})$ 的特征值 σ 对应的特征向量。双曲性条件要求对每个给定的 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$，存在 m 个不同的平面波解，由下式给出：

$$(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} - \lambda_k(\boldsymbol{y})t)\mathbf{r}_k(\boldsymbol{y}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant m),\ \ \lambda_1(\boldsymbol{y}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m(\boldsymbol{y}).$$

对于 $\|y\| = 1$ 的特征值即为波速。

现在我们证明如下对称双曲组 (3.5.1) 弱解的局部存在性。

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \sum\limits_{j=1}^{d} \mathbf{B}_j \partial_j \mathbf{u} = \boldsymbol{f} & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{g} & \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

其中未知函数 $\mathbf{u} : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$，对 $1 \leqslant j \leqslant d$，系数矩阵 $\mathbf{B}_j \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{M}^{m\times m})$ 都是对称方阵，且满足

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\mathbf{B}_j| + |\nabla_{t,\boldsymbol{x}} \mathbf{B}_j| + |\nabla^2_{\boldsymbol{x},t} \mathbf{B}_j| < \infty \qquad 1 \leqslant j \leqslant d. \tag{3.5.3}$$

初值 $\boldsymbol{g} \in H^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m)$，源项 $\boldsymbol{f} \in H^1((0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m)$ 均给定。

接下来我们定义方程组 (3.5.1) 的弱解。

定义 3.5.2. 给定 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m)$ 和 $0 \leqslant t \leqslant T$，定义双线性型

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] := \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} (\mathbf{B}_j(t,\cdot)\partial_j \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

满足以下条件的函数$\mathbf{u}$被称为对称双曲系统初值问题的弱解：

- $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ 且 $\mathbf{u}' \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$;
- 对任意 $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m)$ 和几乎处处的 $t \in [0,T]$，成立 $(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})$;
- $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{g}$.

注意我们已经有 $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$，因此 $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{g}$ 可以逐点成立。

我们接下来证明

定理 3.5.1. (3.5.2) 存在唯一的弱解。

3.5.1 抛物正则化方程组的存在性

现在我们引入 ε-抛物正则化方程组，其中 $0<\varepsilon<1, \boldsymbol{g}^\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$.

$$\begin{cases}\partial_t \mathbf{u}^\varepsilon - \varepsilon\Delta\mathbf{u}^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon = \boldsymbol{f} & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ \mathbf{u}^\varepsilon = \boldsymbol{g}^\varepsilon & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

消失粘性法的思想是：先对固定的 $\varepsilon>0$ 求解 ε-抛物正则化方程组，然后证明该解有关于 ε 一致的能量估计，最后取极限 $\varepsilon\to 0$ 得到双曲方程组（$\varepsilon=0$）(3.5.2) 的解。

我们首先对固定的 $\varepsilon>0$ 求解抛物正则化方程。

定理 3.5.2. *对任意 $\varepsilon>0$，(3.5.4) 存在唯一解 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 满足 $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$，$\mathbf{u}^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$.*

求解抛物正则化方程的困难在于 ε-正则化项是高阶项，因此我们**可以尝试将一阶项 $\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon$ 视作源项**。这里还要指出 $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^{\varepsilon\prime}$ 的 H^3, H^1 正则性是抛物正则性定理（定理 3.3.2）的直接结果。换句话说，我们证明(3.5.4)解的存在性时应当选取较低阶的函数空间。

如何寻找合适函数空间？

如何"预测"解在何种函数空间中存在？考虑方程组 (3.5.4) 之前，我们不妨先看一下热方程

$$\partial_t u - \varepsilon\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d, \qquad u(0)=g\in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d.$$

据Duhamel原理，我们有 $u(t)=e^{\varepsilon t\Delta}g+\int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 其中 $e^{\varepsilon t\Delta}g := (e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\hat{g}(\boldsymbol{\xi}))^\vee$ 可以用Fourier变换定义。这样对$s\geqslant 0$，我们有

$$\|e^{\varepsilon t\Delta}g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\|_{L^2} \leqslant C\|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\|_{L^2} = C\|g\|_{H^s}.$$

此外，令$\boldsymbol{\eta}=\sqrt{\varepsilon t}\boldsymbol{\xi}$，我们可算出 $e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s = e^{-\eta^2}\langle(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\eta}\rangle^s \leqslant C(\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}}$. 因此当初值 $g\in H^1(\mathbb{R}^d)$ 时，我们期待 $e^{\varepsilon t\Delta}g\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$.

对非齐次部分，令 $\Phi(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon t}}$ 为标准热方程（$\varepsilon=1$）的基本解，则有

$$\int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot)*f(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}\tau.$$

利用积分 Minkowski 不等式和卷积 Young 不等式，我们有

$$\left\|\int_0^t \Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot) * f(\tau,\cdot)\right\|_{L^2} \leqslant \int_0^t \|\Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot) * f(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_0^t \underbrace{\|\Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot)\|_{L^1}}_{=1} \|f(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau \leqslant \begin{cases} T\|f\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^2} \\ T^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_t^2 L_{\boldsymbol{x}}^2} \end{cases}.$$

类似地，我们可以证明

$$\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\int_0^t \Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot) * f(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L^2} = \left\|\int_0^t \nabla\Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot) * f(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L^2}$$

$$\leqslant \int_0^t \underbrace{\|\nabla\Phi(\varepsilon(t-\tau),\cdot)\|_{L^1}}_{\leqslant C(\varepsilon(t-\tau))^{-\frac{1}{2}}} \|f(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau \leqslant C_\varepsilon T^{1/2}\|f\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^2}.$$

由于源项 $f \in H^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$，我们知道对任意给定的 $T < \infty$，有 $f \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. 因此我们“预测”：应该在 $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ 中证明 ε-正则化方程组 (3.5.4) 的局部存在性。

定理3.5.2的证明

我们用压缩映射原理证明 (3.5.4) 解的存在性。令 $X := L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ 并定义

$$\mathcal{T} : \mathbf{w} \longmapsto e^{\varepsilon t\Delta}\boldsymbol{g} + \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)\Delta}\left(\boldsymbol{f}(\tau,\cdot) - \sum_{j=1}^d \mathbf{B}_j(\tau,\cdot)\partial_j \mathbf{w}(\tau,\cdot)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{3.5.5}$$

我们要证明如下事实

- $\mathcal{T}$ 是 X 到 X 自身的映射，即 $R(\mathcal{T}) \subseteq X$.
- $\mathcal{T}$ 是 X 上的压缩映射，即存在常数 $C \in (0,1)$ 使得对于任何 $\mathbf{w},\mathbf{v} \in X$ 都有 $\|\mathcal{T}\mathbf{w} - \mathcal{T}\mathbf{v}\|_X \leqslant C\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_X$ 成立。

若能证明这两点成立，那么压缩映射原理就表明 $\mathcal{T}$ 在 X 中具有唯一的不动点，这正是我们所需的 ε-抛物正则化系方程组 (3.5.4) 的解。

从先验估计可以直观地看到，对任意 $\mathbf{w} \in X$ 有

$$\|\mathcal{T}\mathbf{w}\|_X \leqslant C\|g\|_{H^1} + C_\varepsilon T^{\frac{1}{2}}(\|\boldsymbol{f}\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^2} + \|\nabla\mathbf{w}\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^2}) < \infty.$$

这说明$R(\mathcal{T}) \subseteq X$. 接下来我们证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的压缩映射。任给定 $\mathbf{w},\mathbf{v} \in X$，我们计算

$$\mathcal{T}\mathbf{w} - \mathcal{T}\mathbf{v} = \sum_{j=1}^d \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)\Delta}\mathbf{B}_j\partial_j(\mathbf{w}-\mathbf{v})(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

再次利用先验估计得到 $\|\mathcal{T}\mathbf{w}-\mathcal{T}\mathbf{v}\|_X \leqslant C_\varepsilon T^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|_X$. 今选取充分小的 $T_1>0$ 使得 $C_\varepsilon T_1^{\frac{1}{2}}<0.5$，我们就证明了 $\mathcal{T}$ 是 $L^\infty(0,T_1;H^1)$ 上的压缩映射。因此在 $X=L^\infty(0,T_1;H^1)$ 中存在唯一的不动点（记为 $\mathbf{u}^\varepsilon$），它也是方程组 (3.5.4) 的解。然后我们在 $[T_1,2T_1],[2T_1,3T_1],\cdots$ 中重复此论证，从而得到 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 中解的存在性。这里要注意：压缩映射原理得到的解的存在时长 T_1 不依赖于 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$，否则这个“重复”过程是不对的。

最后我们证明解 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 满足正则性 $\mathbf{u}^\varepsilon\in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$, $\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$. 事实上，对a.e. $t\in[0,T]$，源项 $\boldsymbol{f}-\sum\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon\in L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m)$，据抛物正则性定理（定理 3.3.1）可得 $\mathbf{u}^\varepsilon\in L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$, $\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$, 进而$\boldsymbol{f}-\sum\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$. 据定理3.3.2, 我们就得到$\mathbf{u}^\varepsilon\in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$.

3.5.2 一致估计与无粘极限

我们在上一小节得到的先验估计依赖于 ε^{-1}，而取无粘极限需要对ε-抛物正则化方程组 (3.5.4) 建立关于粘性系数 ε 的**一致估计**。

定理 3.5.3 (关于 ε 一致的能量估计). *记 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 为定理 3.5.2 中求得的 (3.5.4) 的解。则存在常数 $C>0$（不再依赖 ε），使得对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$都有*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2+\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2}^2\right)\leqslant C\left(\|\boldsymbol{g}\|_{H^1}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^1)}^2+\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right). \tag{3.5.6}$$

证明. 我们计算如下能量估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot\partial_t\mathbf{u}^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot(\varepsilon\Delta\mathbf{u}^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\sum_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot(\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对第一项分部积分得到$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot(\varepsilon\Delta\mathbf{u}^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 第二项则可以直接控制 $\left|\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leqslant\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}$. 对第三项，我们可以利用 $\mathbf{B}_j$ 的对称性来消掉 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 上的导数 ∂_j，分部积分得

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot(\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon)\cdot\mathbf{u}^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{u}^\varepsilon|^2(\partial_j\mathbf{B}_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

进而

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{u}^\varepsilon\cdot(\mathbf{B}_j\partial_j\mathbf{u}^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{u}^\varepsilon|^2(\partial_j\mathbf{B}_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leqslant C\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2}^2.$$

如上三项相加，我们得到微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+C(\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)\leqslant C(\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2).$$

据Grönwall不等式可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2\leqslant C(\|\boldsymbol{g}\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t),$$

这里我们用到了卷积光滑子的性质 $\|\boldsymbol{g}^\varepsilon\|_{L^2}\leqslant\|\boldsymbol{g}\|_{L^2}$.

类似地，$\nabla\mathbf{u}^\varepsilon$ 和 $\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}$ 的一致估计可以通过分别对抛物正则化方程求偏导数 ∂_{x_k} 和 ∂_t 然后模仿上述论证来证明。我们不再叙述过程，仅列出结果：

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2&\leqslant C(\|\nabla\boldsymbol{g}\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^1)}^2),\\
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2}^2&\leqslant C(\|\nabla\boldsymbol{g}\|_{L^2}^2+\varepsilon^2\|\Delta\boldsymbol{g}^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}(0)\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^1)}^2+\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2)\\
&\leqslant C(\|\nabla\boldsymbol{g}\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{g}^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;H^1)}^2+\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2),
\end{aligned}$$

这里面我们用到了卷积光滑子的另一性质 $\|\Delta\boldsymbol{g}^\varepsilon\|_{L^2}\leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla\boldsymbol{g}\|_{L^2}$ 以及 $\|\boldsymbol{f}(0)\|_{L^2}^2\leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2+\|\boldsymbol{f}'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2)$. 注意 $\Delta\boldsymbol{g}^\varepsilon$ 是必要的，因为 $\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}$ 的初值是 $\boldsymbol{f}-\sum\mathbf{B}_j\partial_j\boldsymbol{g}^\varepsilon+\varepsilon\Delta\boldsymbol{g}^\varepsilon$. □

$\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ 的一致有界性给出了该序列的（一个子列的）弱极限。

定理 3.5.1 的证明. 结合如上一致能量估计和习题 3.1.1 可知，存在子列 $\{\varepsilon_k\}$ 使得

$$\mathbf{u}^{\varepsilon_k}\rightharpoonup\mathbf{u}\quad\text{in }L^2(0,T;H^1),\quad\mathbf{u}^{\varepsilon_k\prime}\rightharpoonup\mathbf{u}'\quad\text{in }L^2(0,T;L^2).$$

余下只需验证弱极限 $\mathbf{u}$ 确实是 (3.5.2) 的唯一弱解。任取测试函数 $\boldsymbol{\varphi}\in C^1([0,T];H^1)$，我们计算可得（对 $\varepsilon\Delta\mathbf{u}^\varepsilon$ 这项分部积分）：

$$\int_0^T(\mathbf{u}^{\varepsilon\prime},\boldsymbol{\varphi})+\varepsilon\nabla\mathbf{u}^\varepsilon:\nabla\boldsymbol{\varphi}+B[\mathbf{u}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi};t]\,\mathrm{d}t=\int_0^T(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}t.$$

令 $\varepsilon=\varepsilon_k\to0$，我们得到

$$\int_0^T(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi})+B[\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};t]\,\mathrm{d}t=\int_0^T(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}t,\ \ \forall\boldsymbol{\varphi}\in C^1([0,T];H^1),$$

因此我们得出结论：对于几乎处处的 $t\in[0,T]$ 和全体 $\boldsymbol{\varphi}\in C^1([0,T];H^1)$，都有 $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi})+B[\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};t]=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi})$ 成立。今选取$\boldsymbol{\varphi}$使得$\boldsymbol{\varphi}(T)=0$，然后在 $(\mathbf{u}^{\varepsilon\prime},\boldsymbol{\varphi})$ 中分部积分时间导数 ∂_t 得到

$$\int_0^T-(\mathbf{u}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}')+\varepsilon\nabla\mathbf{u}^\varepsilon:\nabla\boldsymbol{\varphi}+B[\mathbf{u}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi};t]\,\mathrm{d}t=\int_0^T(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}t+(\boldsymbol{g},\mathbf{v}(0)).$$

令 $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$，再次得到

$$\int_0^T (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}') + B[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}t + (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\varphi}(0)).$$

另一方面，在 $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi})$ 中分部积分∂_t得到

$$\int_0^T (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}') + B[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; t]\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}t + (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\varphi}(0)),$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}(0)$ 是任意的，所以 $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{g}$. 由方程组的线性，取 $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}$，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} = 0$ 就得出唯一性。 □

注记 3.5.2. 本节最后，我们再次强调上述方法可能不适用于初边值问题，因为 ε-正则化问题的边界条件可能与原始双曲方程组不同，甚至边界条件的数量也可能不同。这在从描述粘性流体运动的 Navier-Stokes 方程到描述无粘流体运动的 Euler 方程的初边值问题无粘极限的研究中尤为明显。前者可以给定无滑动(non-slip)条件 $\mathbf{u} = 0$，而后者给定滑移(slip)条件 $\mathbf{u} \cdot N = 0$. 这种边界条件的不匹配实际上源于边界层线性：当忽略粘性时，边界层会粘附在边界上，并且其厚度随着粘性趋于 0 而趋于 0。

关于具有边界的区域中一阶对称双曲方程组的经典理论，可参考以下论文或书籍：

- Peter D. Lax, Phillips, R. S. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 13(3), 427–455, 1960.
- Rauch, J. Symmetric Positive Systems with Boundary Characteristic of Constant Multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1), 167-187, 1985.
- Métivier, G. Small viscosity and boundary layer methods: Theory, stability analysis, and applications. Springer Science & Business Media, 2004.

第四章　双曲守恒律简介（暂时鸽置）

5

4.1　拟线性双曲守恒律方程组

1

4.2　接触间断、稀疏波和激波阵面

2

4.3　非线性基本波：经典解

3

4.4　非线性基本波：间断解

4

第五章　Sobolev空间的Fourier刻画

我们在第一章介绍了整数阶Sobolev空间。然而，如果仅使用整数阶Sobolev空间，许多估计在Sobolev指标上并不是最佳的。此外在 $\mathbb{R}^d$ 上的非线性色散方程和波动方程的研究中，Fourier分析是一个强有力的工具，我们可以通过分析函数Fourier变换的不同频率来获得更精细的估计。因此人们可能会问，对于 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，是否可以定义非整数阶Sobolev空间 $W^{s,p}(\Omega)$？

这个问题的答案是肯定的，但对于不同的区域 Ω 可能需要用不同方式来定义这种推广。当 $\Omega = \mathbb{R}^d$ 时，最有效的工具是Fourier变换，因为做Fourier变换可以将导数转化为多项式型的乘子。而当区域带边时，其中一种推广被称为"Sobolev-Slobodeckiĭ空间"，它是通过差商(differential quotients)来定义的。

本讲义中，我们仅讨论 $\Omega = \mathbb{R}^d$ 且 $p = 2$ 的情况，即应用最广泛的Sobolev空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 及其齐次对应空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$。对一般的$W^{s,p}$空间，与之对应的Sobolev嵌入定理等结论均需要使用Littlewood-Paley 分解来证明，具体参见陶哲轩的非线性色散方程专著 [16] 的附录A.

5.1　非整数阶Sobolev空间$H^s(\mathbb{R}^d)$

给定 $\xi \in \mathbb{R}^d$，我们记 $\langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$，它对应于 $\sqrt{1-\Delta}$ 的Fourier乘子。现在给定 $s \in \mathbb{R}$，我们可以利用Fourier变换来定义$H^s(\mathbb{R}^d)$.

定义 5.1.1 (非齐次Sobolev空间). 给定 $s \in \mathbb{R}$，我们定义s阶Sobolev空间

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}. \tag{5.1.1}$$

$H^s(\mathbb{R}^d)$ 是一个Hilbert空间，其范数 $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_{L^2}$ 由内积 $\langle u, v\rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$ 诱导。

注记 5.1.1. 需注意，当 s 为负数时，$\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 并不意味着 u 是一个（局部可积的）函数。另一方面，由于缓增分布的Fourier变换仍为缓增分布，因此我们确实应该对缓增分布而不是 L^2 函数来定义分数阶Sobolev空间。

当 $s \in \mathbb{N}$ 时，上述定义与第一章中定义的整数阶Sobolev空间一致，这可以用Plancherel恒等式和Fourier变换的基本性质证明。

命题 5.1.1. 分数阶Sobolev空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 满足以下性质：

(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中都是稠密的。

(2) 当 $s \in \mathbb{N}$ 时，$H^s(\mathbb{R}^d)$ 与第一章中定义的 $W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ 是等价的。

我们再介绍齐次Sobolev空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$，它包含了那些"第 s 阶导数"（不包括任何低阶导数）为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数的缓增分布。

定义 5.1.2 (齐次Sobolev空间). 给定 $s \in \mathbb{R}$，我们定义 s 阶齐次Sobolev空间为

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : |\boldsymbol{\xi}|^s \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}. \tag{5.1.2}$$

这里 $\mathcal{P}$ 是多项式的集合。

注记 5.1.2. 商空间 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ 实际上忽略了那些"Fourier变换支于 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ 处的"缓增分布（特别地，任何非零多项式都不属于 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$）。事实上，任何支于单点的缓增分布必然是该点处的Dirac delta及其导数的有限线性组合，因此其Fourier逆变换恰好是一个多项式。换句话说，实际上我们有

$$\mathcal{S}'/\mathcal{P} \cong \mathcal{S}_h' := \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : (P(\boldsymbol{\xi})\hat{u}(\boldsymbol{\xi}))(\mathbf{0}) = 0,\ P \in \mathcal{P}\right\}.$$

注意 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ 在弱*拓扑下<u>并非 $\mathcal{S}'$ 的闭子空间</u>。

为了简化符号，我们也引入分数阶导数作为Fourier乘子。

定义 5.1.3. 给定 $f \in \mathcal{S}$ 和 $s \in \mathbb{R}$，我们通过Fourier变换定义 $P(\nabla)f$：

$$\widehat{P(\nabla)f}(\boldsymbol{\xi}) := P(i\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}),\ P \text{ 是一个多项式}.$$

类似地，给定一个局部可积的复值函数 m，我们将**Fourier乘子**定义为

$$\widehat{m(\nabla/i)f}(\boldsymbol{\xi}) := m(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}).$$

特别地，我们将 $\langle\nabla\rangle f$ 和 $|\nabla| f$ 记为

$$\widehat{\langle\nabla\rangle f}(\boldsymbol{\xi}) := \langle\boldsymbol{\xi}\rangle\hat{f}(\boldsymbol{\xi}), \qquad \widehat{|\nabla| f}(\boldsymbol{\xi}) := |\boldsymbol{\xi}|\hat{f}(\boldsymbol{\xi}).$$

在此设定下，我们有

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \langle\nabla\rangle^s f \in L^2(\mathbb{R}^d); \qquad f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow |\nabla|^s f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

命题 5.1.2. 齐次Sobolev空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 满足以下性质。

(1) $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 是Hilbert空间当且仅当 $s < \frac{d}{2}$.

(2) 当 $s < \frac{d}{2}$ 时，集合

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) \text{ 在 } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \text{ 附近为零}\right\}$$

是 $\dot{H}^s$ 的稠密子集。

(3) $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间是 $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

证明. 这里我们只证明 (1) 和 (2). 对 (1)，当 $s<\frac{d}{2}$ 时，我们定义内积

$$(u,v)_{\dot{H}^s}:=\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^{2s}\hat{u}(\boldsymbol{\xi})\overline{\hat{v}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

故只需证明完备性。

设 $\{u_n\}\subset\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 是Cauchy列，则据定义知 $|\boldsymbol{\xi}|^s\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的Cauchy列。由 L^2 的完备性可知，存在 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得 $|\boldsymbol{\xi}|^s\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})\xrightarrow{L^2}f$. 现在记 $f=|\boldsymbol{\xi}|^s g$，我们要证明 g 是缓增分布。

事实上，这可通过将 $g(\boldsymbol{\xi})$ 分解为 $g(\boldsymbol{\xi})\chi_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1}$ 和 $g(\boldsymbol{\xi})\chi_{|\boldsymbol{\xi}|>1}$ 直接得出。对于低频部分，我们有

$$\int_{B(\mathbf{0},1)}|g(\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{B(\mathbf{0},1)}|\boldsymbol{\xi}|^s|g(\boldsymbol{\xi})||\boldsymbol{\xi}|^{-s}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\leqslant\underbrace{\||\boldsymbol{\xi}|^s g(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2}}_{=\|f\|_{L^2}<\infty}\underbrace{\left(\int_{B(\mathbf{0},1)}|\boldsymbol{\xi}|^{-2s}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty\text{ 当且仅当 }2s<d}<\infty.$$

因此$(g(\boldsymbol{\xi})\chi_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1})^\vee$ 是一个有界函数。对于高频部分，因为$|\boldsymbol{\xi}|>1$，所以 $|\boldsymbol{\xi}|\simeq\langle\boldsymbol{\xi}\rangle$，进而

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|>1}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{2s}|g(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_{|\boldsymbol{\xi}|>1}|\boldsymbol{\xi}|^{2s}|g(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty.$$

最后我们定义Cauchy列的极限 u 为 $u:=\mathscr{F}^{-1}(g)$. 上述分析表明 $u_n\xrightarrow{\dot{H}^s}u$ 且 $u\in\dot{H}^s$.

当 $s\geqslant\frac{d}{2}$ 时，我们用反证法证明：$(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_{\dot{H}^s})$ 是不完备的。首先作如下断言。

断言 (习题 5.1.4). 当 $s\geqslant\frac{d}{2}$ 时，$N:u\longmapsto\|\hat{u}\|_{L^1(B(\mathbf{0},1))}+\|u\|_{\dot{H}^s}$ 是 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 上的一个范数，且 $(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d),N)$ 是Banach空间。

若该断言成立，且如果赋予 $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ 范数的 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 也是完备的，那么 $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ 必须与范数 N 等价（因为范数 N 总是比 $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ 强），这就导致下式必须成立：

$$\|\hat{u}\|_{L^1(B(\mathbf{0},1))}\leqslant C\|u\|_{\dot{H}^s}.$$

我们接下来构造一个反例来推翻这个不等式。设 $\mathcal{A}=\{\frac{1}{4}<|\boldsymbol{\xi}|<\frac{1}{3}\}$ 是单位球内的一个圆环，满足 $\mathcal{A}\cap 2\mathcal{A}=\emptyset$. 然后我们定义 v_n 如下

$$\hat{v_n}:=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{(s+\frac{d}{2})k}}{k}\chi_{2^{-k}\mathcal{A}}.$$

直接计算得

$$\|\hat{v_n}\|_{L^1(B(\mathbf{0},1))}=C\sum_{k=1}^n\frac{2^{(s+\frac{d}{2})k}}{k}2^{-kd}=C\sum_{k=1}^n\frac{2^{(s-\frac{d}{2})k}}{k}\to\infty,\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

但我们又可算出下式结论导出矛盾：

$$\|v_n\|_{\dot{H}^s}^2=\sum_{k=1}^n\int_{2^{-k}\mathcal{A}}|\boldsymbol{\xi}|^{2s}k^{-2}2^{2k(s+\frac{d}{2})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\leqslant C\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<\infty.$$

(2) 当 $s<\frac{d}{2}$ 时，$\dot{H}^s$ 是一个Hilbert空间。只需证明：如果 $u\in\dot{H}^s$ 满足

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}_0,\ (u,\varphi)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^{2s}\hat{u}(\boldsymbol{\xi})\overline{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=0,\ \text{则 } u=0.$$

但这非常直接。事实上，给定$u\in\dot{H}^s$，如果对任意的 $\varphi\in\mathcal{S}_0$ 都有 $(u,\varphi)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}=0$，那么据 $\mathcal{S}_0$ 的定义知 $\hat{u}=0$ 在 $\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上成立。利用Plancherel恒等式即可推出 $u=0$. □

习题 5.1

习题 5.1.1. 证明 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 的完备性。

习题 5.1.2. 证明命题 5.1.2 (3)。确切地说，如果 $|s|<\frac{d}{2}$，证明

(1) 双线性泛函

$$\begin{aligned}B:\mathcal{S}_0\times\mathcal{S}_0&\to\mathbb{C}\\(\phi,\varphi)&\longmapsto\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

可以延拓为 $\dot{H}^{-s}\times\dot{H}^s$ 上的连续双线性泛函。

(2) 如果 L 是 $\dot{H}^s$ 上的连续线性泛函，则存在唯一的缓增分布 $u\in\dot{H}^{-s}$ 使得 $\langle L,\phi\rangle=B[u,\phi]$ 对所有 $\phi\in\dot{H}^s$ 成立，且 $\|L\|_{(\dot{H}^s)^*}=\|u\|_{\dot{H}^{-s}}$。

习题 5.1.3. 设 $s_0\leqslant s\leqslant s_1$，证明：$\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d)\cap\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d)\subseteq\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$，且若 $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$，则 $\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\leqslant\|u\|_{\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta}\|u\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d)}^{\theta}$. 该结论实际上对非齐次Sobolev空间也对。

习题 5.1.4. 当 $s>\frac{d}{2}$ 时，证明：$(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d),N)$ 是完备的，其中范数 N 定义为

$$N:u\longmapsto\|\hat{u}\|_{L^1(B(\mathbf{0},1))}+\|u\|_{\dot{H}^s}.$$

习题 5.1.5. 设 $0<s<1$, $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. 证明：$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})|^2}{|\boldsymbol{y}|^{d+2s}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}<\infty.$$

这给出了齐次Sobolev范数与Sobolev-Slobodeckiĭ范数之间的等价性。

提示：将 $\hat{u}$ 分解为 $\{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1\}$ 部分和 $\{|\boldsymbol{\xi}|>1\}$ 部分。然后在Sobolev-Slobodeckiĭ范数中对 $\boldsymbol{x}$ 变量用Plancherel恒等式。

5.2 Sobolev嵌入定理的Fourier方法

本节证明Sobolev空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 和 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 的嵌入定理，即类似于定理 1.5.1 的结果。

5.2.1 次临界和临界Sobolev嵌入定理

首先，我们证明“次临界” Gagliargo-Nirenberg-Sobolev 型不等式。

定理 5.2.1 (次临界Sobolev嵌入). 设 $0\leqslant s<\frac{d}{2}$，则 $H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ 对 $2\leqslant q<2^*:=\frac{2d}{d-2s}$ 成立，且有不等式 $\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(s,q,d)\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

证明. 只需对所有 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 证明此不等式。给定 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，我们有 $f=(\hat{f})^\vee$. 由于 $2\leqslant q<\infty$，其对偶指标 $1<q'\leqslant 2$，据Hausdorff-Young不等式知

$$\|f\|_{L^q}=\|(\hat{f})^\vee\|_{L^q}\leqslant C\|\hat{f}\|_{L^{q'}}.$$

我们将其写为 $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat{f}(\boldsymbol{\xi}))$，再用Hölder不等式得到

$$\|\hat{f}\|_{L^{q'}}=\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat{f}(\boldsymbol{\xi}))\|_{L^{q'}}\leqslant\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^r}\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat{f}\|_{L^2}=\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^r}\|f\|_{H^s}.$$

剩下只需验证 $\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}<\infty$，而这等价于 $sr>d$. 事实上我们只需从Hölder不等式中算出r：

$$\frac{1}{q'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{q}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}=\frac{s}{d},$$

这给出了我们需要的不等式$sr>d$. □

注记 5.2.1. 虽然 q 严格小于临界指标 2^*，但由于 $\mathbb{R}^d$ 的无界性，上述嵌入仍然不是紧的。事实上我们可以很容易地构造一个反例，设 $f\in H^s(\mathbb{R}^d)$ 且 $\|f\|_{H^s}=1$，定义 $f_n(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+n\mathbf{e}_1)$, 那么当 $n\to\infty$ 时，f_n 弱收敛于 0，但其 L^q 范数保持与 f 本身相同。因此这个 $\{f_n\}$ 没有任何强收敛的子序列。

当 $0 < s < \frac{d}{2}$ 时，临界嵌入 $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$（其中 $2^* := \frac{2d}{d-2s}$）实际上是作为Hardy-Littlewood-Sobolev不等式（定理 C.3.4）的推论成立。为简单起见，我们对齐次Sobolev空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 证明此结论。

定理 5.2.2 (临界Sobolev嵌入). 当 $0 \leqslant s < \frac{d}{2}$ 时，空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 连续嵌入到 $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ 中，其中 $2^* := \frac{2d}{d-2s}$.

证明. 同样只需对 $f \in \mathcal{S}$ 证明即可。令 $g := (|\boldsymbol{\xi}|^{d-\gamma}\hat{f})^\vee$，则 $\hat{f} = |\boldsymbol{\xi}|^{-d+\gamma}\hat{g}$，因此 $f = (|\boldsymbol{\xi}|^{-d+\gamma})^\vee * g$. 由习题 D.2.4知 $(|\boldsymbol{\xi}|^{-d+\gamma})^\vee = C_{d,\gamma}|\boldsymbol{x}|^{-\gamma}$。因此Hardy-Littlewood-Sobolev不等式表明

$$\|f\|_{L^q} = C_{d,\gamma}\||\cdot|^{-\gamma} * g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\ \ 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{d}.$$

我们在上式中令 $p = 2, s = d - \gamma$ 并利用Plancherel恒等式，右边变为

$$\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{L^2} = \||\boldsymbol{\xi}|^{d-\gamma}\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{\dot{H}^{d-\gamma}} = \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

此时 q 恰好与临界指标 2^* 一致：

$$\frac{1}{q} = \frac{\gamma}{d} - \frac{1}{2} = \frac{d-s}{d} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d} = \frac{1}{2^*} \Rightarrow q = 2^*.$$

□

5.2.2 Morrey嵌入定理和临界空间$\dot{H}^{\frac{d}{2}}$

本节考虑 $s \geqslant \frac{d}{2}$ 时 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 的Sobolev嵌入定理。首先有一个**相当简单也相当重要、相当实用的结果：当 $s > \frac{d}{2}$ 时，$H^s(\mathbb{R}^d)$ 是一个Banach代数并且嵌入到 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中。**

定理 5.2.3 (Banach代数$H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s > \frac{d}{2})$). 设 $s > \frac{d}{2}$. 则:

(1) $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$，且对任意的 $f \in H^s$ 有 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

(2) 对任意 $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ 有 $\|fg\|_{H^s} \leqslant C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$.

证明. 同样只需对Schwartz函数证明这两个不等式。

(1) 因为 $s > \frac{d}{2}$，所以 $\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s} \in L^2(\mathbb{R}^d)$，这样就有

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})| = |(\hat{f})^\vee(\boldsymbol{x})| = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right| &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\ &= C\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat{f}(\boldsymbol{\xi}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \leqslant C\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^2}\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat{f}\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

然后对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ 取上确界就得出 $f \in L^\infty$ 以及 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

(2) 对 $f,g\in\mathcal{S}$，我们有 $\widehat{fg}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}(\hat f*\hat g)$，于是

$$\begin{aligned}\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}&=\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\widehat{fg}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s(\hat f*\hat g)\|_{L^2}\\&=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left\|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat g(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\right\|_{L^2_\xi}.\end{aligned}$$

接下来我们作出断言

断言. 对所有 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^d$ 和 $s>0$，成立

$$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\leqslant C_s(\langle\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}\rangle^s+\langle\boldsymbol{\eta}\rangle^s),\quad C_s=\max\{2^{s/2},2^{s-1}\}.$$

如果这个断言成立，据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat g(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\right\|_{L^2_\xi}=&C\left(\left\|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}\rangle^s\hat f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat g(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\right\|_{L^2_\xi}+\left\|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle^s\hat f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat g(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\right\|_{L^2_\xi}\right)\\=&C\left(\|(\langle\cdot\rangle^s\hat f)*\hat g\|_{L^2}+\|(\langle\cdot\rangle^s\hat g)*\hat f\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$

再用卷积Young不等式（定理 C.3.6），我们有

$$\|(\langle\cdot\rangle^s\hat f)*\hat g\|_{L^2}\leqslant\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat f\|_{L^2}\|\hat g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{H^s}\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^2}\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s\hat g\|_{L^2}\leqslant C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s},$$

这里再次用到了 $s>\frac{d}{2}$ 以保证 $\|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}\|_{L^2}<\infty$. 对换 f,g 同理可得 $\|(\langle\cdot\rangle^s\hat g)^*\hat f\|_{L^2}$.

最后只要证明上述断言。对于 $p>0$，我们有

$$\begin{aligned}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^p\leqslant&(1+2|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2+2|\boldsymbol{\eta}|^2)^p\leqslant2^p(1+|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2+1+|\boldsymbol{\eta}|^2)^2\\\leqslant&\max\{2^p,2^{2p-1}\}\left((1+|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2)^p+(1+|\boldsymbol{\eta}|^2)^p\right).\end{aligned}$$

令 $p=s/2$ 即得证。 □

接下来，我们证明Morrey嵌入定理的类似结果。

定理 5.2.4 (Morrey嵌入). 设 $s>\frac{d}{2}$ 且 $s-\frac{d}{2}\notin\mathbb{Z}$. 则 $\dot H^s(\mathbb{R}^d)\subset C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d)$ 中，其中 $k=[s-\frac{d}{2}]$ 且 $\rho=\{s-\frac{d}{2}\}$. 而且对任意的 $f\in\dot H^s(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\sup_{|\alpha|=k}\sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}}\frac{|\partial^\alpha f(\boldsymbol{x})-\partial^\alpha f(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\rho}\leqslant C_{d,s}\|f\|_{\dot H^s}.$$

证明. 我们仅证明 $s-\frac{d}{2}$ 的整数部分为 0 的情况。由于$s>\frac{d}{2}$，我们模仿定理5.2.3(1)的证明可得 $\hat f\in L^1$，因此据 Riemann-Lebesgue 引理知 f 是一个有界连续函数。

现在我们将 f 分解为低频和高频部分。固定 $A>0$（待定）并选取光滑函数 $\theta\in\mathcal{S}$ 使得 $\hat\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，$0\leqslant\hat\theta\leqslant 1$ 且在 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ 附近 $\hat\theta=1$. 接下来我们定义

$$f_{\ell,A}:=\left(\hat\theta(\frac{\cdot}{A})\hat f\right)^{\vee},\qquad f_{h,A}:=f-f_{\ell,A}.$$

换句话说，$f_{\ell,A}$ 实际上是将频率变量 $\boldsymbol{\xi}$ 局部化到 $|\boldsymbol{\xi}|=A$ 附近。低频部分 $f_{\ell,A}$ 当然是光滑的，据微积分基本定理有

$$\left|f_{\ell,A}(\boldsymbol{x})-f_{\ell,A}(\boldsymbol{y})\right|\leqslant\left\|\nabla f_{\ell,A}\right\|_{L^\infty}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

利用Fourier反演公式和Cauchy-Schwarz不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\nabla f_{\ell,A}\right\|_{L^\infty}&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|\left|\widehat{f}_{\ell,A}(\boldsymbol{\xi})\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=C\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^{1-s}|\boldsymbol{\xi}|^{s}\left|\widehat{f}_{\ell,A}(\boldsymbol{\xi})\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\&\leqslant C\left(\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant CA}|\boldsymbol{\xi}|^{2-2s}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right)^{\frac12}\|f\|_{\dot H^s}\leqslant\frac{C}{(1-\rho)^{\frac12}}A^{1-\rho}\|f\|_{\dot H^s}\quad\text{其中 }\rho=s-d/2.\end{aligned}$$

对高频部分 $f_{h,A}$，我们可直接控制逐点值，因为在远离原点处 $|\boldsymbol{\xi}|^{-s}$ 是 L^2 可积的。

$$\left\|f_{h,A}\right\|_{L^\infty}\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left|\widehat{f}_{h,A}(\boldsymbol{\xi})\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\leqslant\left(\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant A}|\boldsymbol{\xi}|^{-2s}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right)^{\frac12}\|f\|_{\dot H^s}\leqslant\frac{C}{\rho^{\frac12}}A^{-\rho}\|f\|_{\dot H^s},$$

这样就得到得到

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant\left\|\nabla f_{\ell,A}\right\|_{L^\infty}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+2\left\|f_{h,A}\right\|_{L^\infty}\leqslant C_s\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|A^{1-\rho}+A^{-\rho}\right)\|f\|_{\dot H^s}.$$

现在令$A=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1}$得到最佳上界，我们便完成了定理的证明。 □

最后我们考虑 $s=\frac{d}{2}$ 的情况。习题 1.4.2 已经表明 $\dot H^{d/2}$ 函数可能不属于 L^∞. 避开这个反例的一种方法是把 L^∞ 空间稍微扩大一点，答案由BMO空间给出。

定义 5.2.1. 有界平均振荡 (bounded mean oscillation)空间 $BMO(\mathbb{R}^d)$ 是由全体满足下式的局部可积函数 f 构成的集合。

$$\|f\|_{BMO}:=\sup_{\text{球}B}\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty\quad\text{其中}\quad f_B:=\frac{1}{|B|}\int_B f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

我们需要半范数 $\|\cdot\|_{BMO}$ 在常数函数上为零。因此这不是一个范数。

现在我们陈述Sobolev嵌入定理。

定理 5.2.5. 空间 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)\cap \dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ 包含于 $BMO(\mathbb{R}^d)$ 中，且存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{BMO}\leqslant C\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}$$

对所有 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)\cap \dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ 成立。

证明. 我们模仿定理 5.2.4 那样使用高低频分解 $f = f_{\ell,A}+f_{h,A}$. 对任意球 B，我们用Cauchy-Schwarz不等式得到

$$\int_B |f-f_B|\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|B|}\leqslant \left\|f_{\ell,A}-\left(f_{\ell,A}\right)_B\right\|_{L^2(B,\frac{\mathrm{d}x}{|B|})}+\frac{2}{|B|^{\frac{1}{2}}}\left\|f_{h,A}\right\|_{L^2(B)}.$$

设 R 为球 B 的半径。我们有

$$\begin{aligned}\left\|f_{\ell,A}-\left(f_{\ell,A}\right)_B\right\|_{L^2(B,\frac{\mathrm{d}x}{|B|})}&\leqslant R\left\|\nabla f_{\ell,A}\right\|_{L^\infty}\leqslant CR\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^{1-\frac{d}{2}}|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{d}{2}}\left|\widehat{f}_{\ell,A}(\boldsymbol{\xi})\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\&\leqslant CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}.\end{aligned}$$

高频部分则可以直接控制

$$\left\|f_{h,A}\right\|_{L^2}=\left\|\widehat{f_{h,A}}\right\|_{L^2}\leqslant\left\|A^{-\frac{d}{2}}|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{d}{2}}\widehat{f_{h,A}}\right\|_{L^2}\leqslant A^{-\frac{d}{2}}\||\boldsymbol{\xi}|^{\frac{d}{2}}\hat{f}\chi_{|\xi|\geqslant A}\|_{L^2}.$$

我们推出

$$\int_B |f-f_B|\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|B|}\leqslant CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}+C(AR)^{-\frac{d}{2}}\left(\int_{|\xi|\geqslant A}|\boldsymbol{\xi}|^d|\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

最后选取 $A=R^{-1}$ 达到最佳上界即可完成证明。 □

对于非齐次Sobolev空间 $H^{d/2}(\mathbb{R}^d)$，我们有所谓的Moser-Trudinger不等式，它实际上给出了到Orlicz型空间的嵌入。

定理 5.2.6. 存在两个仅依赖于 d 的常数 $c,C>0$，使得以下不等式对任意 $f\in H^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ 成立：

$$\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(c\left(\frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\|f\|_{H^{d/2}}}\right)^2\right)-1\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C.$$

5.2.3 紧嵌入、迹定理

由于 $\mathbb{R}^d$ 无界，对 $0<s<\frac{d}{2}$ 和 $2\leqslant q<2^*$ 的次临界嵌入 $H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ 都不是紧的，但我们仍然有从 H^s 到 H^t（对于 $t<s$）的紧嵌入。需注意，这种紧嵌入一般来说不是由包含映射给出的，除非函数本身具有紧支集。

定理 5.2.7. 设 $t<s$，乘以一个 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 函数（不是包含映射！）是 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 到 $H^t(\mathbb{R}^d)$ 的紧算子。

证明. 设 $\varphi\in\mathcal{S}$。我们需要证明：对任意满足 $\sup\limits_n\|f_n\|_{H^s}\leqslant 1$ 的序列 $\{f_n\}\subset H^s(\mathbb{R}^d)$，存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 f_{n_k} 在 $H^t(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛。

首先，Eberlein-Šmulian定理保证了序列 $\{f_n\}$（取子列后）弱收敛到某个 $f\in H^s(\mathbb{R}^d)$，且 $\|f\|_{H^s}\leqslant 1$. 我们不妨把该子列仍然记作 $\{f_n\}$ 并令 $g_n=f_n-f$。直接计算表明 $\sup\limits_n\|\varphi g_n\|_{H^s}\leqslant C$. 因此现在需要证明 $\|\varphi g_n\|_{H^t(\mathbb{R}^d)}\to 0$ 成立。

我们在 $|\xi|=R$ 处截断频率变量 ξ 得到如下估计

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi&=\int_{|\xi|\leqslant R}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi+\int_{|\xi|\geqslant R}\langle\xi\rangle^{2(t-s)}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\\ \leqslant\int_{|\xi|\leqslant R}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi+\frac{C\left\|\varphi g_n\right\|_{H^s}^2}{(1+R^2)^{s-t}}.\end{aligned}$$

因为 $\{\varphi g_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中一致有界，故对给定的 $\varepsilon>0$，可选取 R 使得 $\frac{C}{(1+R^2)^{s-t}}\left\|\varphi g_n\right\|_{H^s}^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

现在证明

$$\int_{|\xi|\leqslant R}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\to 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi g_n}(\xi)&=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{g}_n(\eta)\,\mathrm{d}\eta\\&=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\eta\rangle^{2s}\underbrace{\langle\eta\rangle^{-2s}\hat{\varphi}(\xi-\eta)}_{\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\text{ 对每个 }\xi\in\mathbb{R}^d}\hat{g}_n(\eta)\,\mathrm{d}\eta=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left(g_n,(\langle\cdot\rangle^{-2s}\hat{\varphi}(\xi-\cdot))^{\vee}\right)_{H^s}.\end{aligned}$$

据已知的弱收敛 $g_n\xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)}0$，我们知道上述 H^s 内积必须收敛到 0. 这样我们现在对每个 $\xi\in\mathbb{R}^d$ 都证明了逐点极限 $\widehat{\varphi g_n}(\xi)\to 0$.

接下来我们断言一致有界性：

断言. $\sup\limits_{\substack{|\xi|\leqslant R\\ n\in\mathbb{N}}}|\widehat{\varphi g_n}(\xi)|<\infty$.

如果断言成立，那么据控制收敛定理就可得到我们要证明的估计。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|\xi|\leqslant R}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=\int_{|\xi|\leqslant R}\lim_{n\to\infty}\langle\xi\rangle^{2t}\left|\widehat{\varphi g_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=0,$$

现在证明断言，我们有

$$|\widehat{\varphi g_n}(\xi)|^2=(2\pi)^{-d}\left(g_n,(\langle\cdot\rangle^{-2s}\hat{\varphi}(\xi-\cdot))^{\vee}\right)_{H^s}^2\leqslant\|g_n\|_{H^s}^2\|\langle\cdot\rangle^{-s}\hat{\varphi}(\xi-\cdot)\|_{L^2}^2.$$

对上式最后一项继续做拆分，得到

$$\int \langle \eta\rangle^{-2s}|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta \leqslant \int_{|\eta|\leqslant 2R}\langle \eta\rangle^{-2s}|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta+\int_{|\eta|\geqslant 2R}\langle \eta\rangle^{-2s}|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta.$$

第一个积分肯定是有界的，

$$\int_{|\eta|\leqslant 2R}\langle \eta\rangle^{-2s}|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta \leqslant C\int_{|\eta|\leqslant 2R}\langle \eta\rangle^{2|s|}\,\mathrm{d}\eta.$$

而在第二项中，我们必须用 $\varphi\in\mathcal{S}$ 造出更高次的衰减因子以证明有界性。由于 $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，故存在常数 $C>0$ 使得

$$|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|\leqslant C\langle\xi-\eta\rangle^{-2N_0}\quad \text{其中 } N_0=\frac{d}{2}+|s|+1.$$

我们现在用 $|\xi-\eta|\geqslant|\eta|/2$ （注意 $|\xi|\leqslant R, |\eta|\geqslant 2R$）就得到想要的有界性

$$\int_{|\eta|\geqslant 2R}\langle \eta\rangle^{-2s}|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta \leqslant C_{N_0}\int_{|\eta|\geqslant 2R}\langle \eta\rangle^{2|s|}\langle\xi-\eta\rangle^{-2N_0}\,\mathrm{d}\eta\leqslant C\int_{|\eta|\geqslant 2R}\langle \eta\rangle^{2|s|-2N_0}\,\mathrm{d}\eta<\infty.$$

□

最后我们介绍迹定理。定理 1.3.1 中表明 $W^{1,p}(U)$ 函数的边值可以定义为 $L^p(\partial U)$ 函数。设 $U=\mathbb{R}^d_+$ 为半空间，我们将看到只要 $s>\frac{1}{2}$（不能取等号$s=\frac{1}{2}$），$H^s(\mathbb{R}^d_+)$ 函数的迹实际上有 $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ 的可微性。

定理 5.2.8 (迹定理). 设 $s>1/2$. 定义限制映射 γ 如下

$$\gamma:\begin{cases}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})\\ \qquad f\longmapsto\gamma(f):(x_2,\cdots,x_d)\longmapsto\phi(0,x_2,\cdots,x_d)\end{cases}$$

则 γ 可被连续地延拓为 $H^s(\mathbb{R}^d)\to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ 的满射。

作为推论，我们有一个更实用版本的迹定理。对 $s\geqslant 0$，我们定义

$$H^s(\mathbb{R}^d_+):=\Big\{u\in L^2(\mathbb{R}^d):\langle\xi'\rangle^r\partial_d^k\hat{u}(\xi',x_d)\in L^2(\mathbb{R}^d),\ r+k\leqslant s,\ k\geqslant 0,\ k\in\mathbb{Z}\Big\}.$$

这里Fourier变换是对切向变量 $\boldsymbol{x}'=(x_1,\cdots,x_{d-1})$ 定义的。

推论 5.2.9 (迹不等式). 设 $s>1/2$ 且 $f\in H^s(\mathbb{R}^d_+)$，其中 $\mathbb{R}^d_+$ 是上半空间 $\{x_d>0\}$. 则 $\operatorname{Tr}f\in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^d_+)$ 且有估计 $\|\operatorname{Tr}f\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^d_+)}\leqslant C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d_+)}$.

推论 5.2.9 的证明非常容易，本质上就是“反过来用”分部积分的Gauss-Green公式。

定理 5.2.9 的证明. 不妨设 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，然后直接硬算就完事了

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Tr}\, f\|^2_{H^{s-\frac12}(\partial\mathbb{R}^d_+)} &= \int_{\partial\mathbb{R}^d_+}\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{2s-1}|\hat f(\boldsymbol{\xi}',0)|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'\\ =&-2\mathbf{Re}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^s\overline{\hat f(\boldsymbol{\xi}',x_d)}\right)(\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{s-1}\partial_{x_d}\hat f(\boldsymbol{\xi}',x_d))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'\,\mathrm{d}x_d\\ =&-2\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\langle\nabla'\rangle^s f\,\partial_{x_d}\langle\nabla'\rangle^{s-1}f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}x_d\\ \leqslant&\, 2\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d_+)}.\end{aligned}$$

其中我们在第三行用了Fourier变换的基本性质 $\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^d}\hat f(\boldsymbol{\xi})\overline{\hat g(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$. □

定理 5.2.8 的证明. 我们先证明 γ 的存在性，即我们要证明存在常数 $C>0$ 使得

$$\forall f\in\mathcal{S},\quad \|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac12}}\leqslant C\|f\|_{H^s}.$$

为此，我们用Fourier变换重写迹算子：

$$\begin{aligned}f(0,\boldsymbol{x}')&=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\cdot0\cdot\xi_1}e^{i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\xi}'}\hat f(\xi_1,\boldsymbol{\xi}')\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'\\ &=(2\pi)^{\frac{-(d-1)}{2}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}e^{i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\xi}'}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat f\left(\xi_1,\boldsymbol{\xi}'\right)\mathrm{d}\xi_1\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'\end{aligned}$$

因此有

$$\widehat{\gamma(f)}\left(\boldsymbol{\xi}'\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat f\left(\xi_1,\boldsymbol{\xi}'\right)\mathrm{d}\xi_1.$$

据Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$\left|\widehat{\gamma(f)}(\boldsymbol{\xi}')\right|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi_1^2+|\boldsymbol{\xi}'|^2\right)^{-s}\mathrm{d}\xi_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|\hat f(\xi)|^2\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{2s}\,\mathrm{d}\xi_1\right),$$

其中第一个积分因为$s>\frac12$从而是有限的。所以，在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'$ 积分后，我们推导出 $\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac12}}\leqslant C_s\|f\|^2_{H^s}$，这完成了定理第一部分的证明。

现在我们证明“提升算子”（实际上它是迹算子的右逆）的存在性。设 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\chi(0)=1$. 我们定义

$$Rv(\boldsymbol{x}):=(2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}e^{i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\xi}'}\chi(x_1\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle)\hat v(\boldsymbol{\xi}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}',$$

这实际上是 $\chi(x_1\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle)\hat{v}(\boldsymbol{\xi}')$ 在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中的Fourier逆变换。在 $\mathbb{R}^d$ 中作Fourier变换得到

$$\widehat{Rv}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-it\xi_1}\chi(t\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle)\hat{v}\left(\boldsymbol{\xi}'\right)\mathrm{d}t=\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{-1}\hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle}\right)\hat{v}(\boldsymbol{\xi}')$$

故它的 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 范数由下式给出

$$\begin{aligned}\|Rv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}&=\int_{\mathbb{R}^d}(1+\xi_1^2+|\boldsymbol{\xi}'|^2)^s\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{-2}\left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle}\right)\right|^2|\hat{v}(\boldsymbol{\xi}')|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\&=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(1+\frac{\xi_1^2}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^2}\right)^s\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{-1}\left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle}\right)\right|^2\mathrm{d}\xi_1\right]\left(\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{2s-1}|\hat{v}(\boldsymbol{\xi}')|^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'.\end{aligned}$$

由于 $\hat{\chi}\in\mathcal{S}$，我们知道对任意 N，存在常数 C_N 使得 $|\hat{\chi}(t)|\leqslant C_Nt^{-N}$，于是得到

$$\int_{\mathbb{R}}\left(1+\frac{\xi_1^2}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^2}\right)^s\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{-1}\left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle}\right)\right|^2\mathrm{d}\xi_1\leqslant C_N^2\int_{\mathbb{R}}\left(1+\frac{\xi_1^2}{\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^2}\right)^{s-2N}\cdot 1\,\mathrm{d}\xi_1.$$

这里我们也使用了 $\langle\boldsymbol{\xi}'\rangle^{-1}\leqslant 1$。再选取充分大的 N 使得 $s-2N<-\frac{1}{2}$，我们就能让上述积分是有限的。因此 $\|\widehat{Rv}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ 的右边得到如下控制

$$\|Rv\|^2_{H^s}\leqslant C\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

最后，容易看出 $\gamma Rv=v$ 是恒成立的，证毕。 □

注记 5.2.2. 延拓映射 R 的构造不是唯一的。特别地，在推论 5.2.9 的设定下，给定 $g\in H^{s-1/2}(\partial\mathbb{R}^d_+)$，其调和延拓（设为 G，定义为 $-\Delta G=0\ (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d_+)$ 且 $G|_{\partial\mathbb{R}^d_+}=g$）满足反向迹不等式：$\|G\|_{H^s(\mathbb{R}^d_+)}\leqslant C\|g\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^d_+)}$，这可以通过分析Poisson积分（半空间中的调和延拓可以显式计算）来证明，甚至对所有 $s\geqslant 0$ 都成立。

习题 5.2

习题 5.2.1. 证明：对任意 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^d$ 和 $s\in\mathbb{R}$，成立不等式

$$\left(1+|\boldsymbol{\xi}|^2\right)^s\left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{-s}\leqslant 2^{|s|}\left(1+|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{|s|}.$$

习题 5.2.2. 设 $\varphi\in C(\mathbb{R}^d)$ 满足当 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时 $\varphi(\boldsymbol{x})\to 0$，且 $\hat{\varphi}$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^d}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^a|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}<\infty$. 证明：$|s|\leqslant a$时，映射 $M_\varphi(f):=\varphi f$ 是 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子。此外如果额外假设 $\varphi\in\mathcal{S}$，证明：对任意$s\in\mathbb{R}$，M_φ 是 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子。（提示：用习题 5.2.1.）

习题 5.2.3. 证明：若对任意$s\in\mathbb{R}$都有$f\in H^s(\mathbb{R}^d)$，则 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

习题 5.2.4. 若 $H^s(\mathbb{R}^d)\subset C_0(\mathbb{R}^d)$，其中 C_0 表示在无穷远处收敛到零的连续函数，证明 $s>d/2$.

提示：用闭图像定理证明包含映射 $H^s\hookrightarrow C_0$ 是连续的，因此对 $|\alpha|\leqslant k$，$\partial^\alpha\delta\in H^{-s}$.

习题 5.2.5. 设 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 不恒为零，并设$\mathbb{R}^d$ 中的序列 $\{\mathbf{a}_n\}$ 满足 $|\mathbf{a}_n|\to\infty$. 定义 $\varphi_n(\boldsymbol{x}):=\varphi(\boldsymbol{x}-\mathbf{a}_n)$. 证明：对任意$s\in\mathbb{R}$, $\{\varphi_n\}$在H^s中一致有界，但对任何 t，该序列在 H^t 中都没有收敛子列。

习题 5.2.6. 设 $1<p\leqslant 2$. 证明：$L^p(\mathbb{R}^d)$ 连续嵌入到 $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ 中，其中 $\frac{s}{d}=\frac12-\frac1p$. (提示：使用对偶和临界Sobolev嵌入。)

问题 5.2

问题 5.2.1. 给定 $m\in\mathbb{N}^*$，设 $P(\partial)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}c_\alpha\partial^\alpha$ 其中 $c_\alpha\in\mathbb{R}$ 且存在m阶多重指标α 使得 $c_\alpha\neq 0$. 我们定义微分算子 $P(\partial)$ 的**主象征 (principal symbol)** P_m 为

$$P_m(\boldsymbol{\xi}):=\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha\boldsymbol{\xi}^\alpha.$$

我们称 $P(\partial)$ 是 **m 阶椭圆的**，是指对任意 $\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$ 都有 $P_m(\boldsymbol{\xi})\neq 0$. 今假设 $P(\partial)$ 是 m 阶微分算子。

(1) 证明：$P(\partial)$ 是椭圆的当且仅当存在 $C,R>0$ 使得对 $|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R$ 有 $|P(\boldsymbol{\xi})|\geqslant C|\boldsymbol{\xi}|^m$.

(2) 若 $u\in H^s(\mathbb{R}^d)$ 且 $P(\partial)u\in H^s(\mathbb{R}^d)$，证明：$u\in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$.

注记 5.2.3. 这是椭圆正则性定理的推广。事实上当 $P(\partial)$ 不是椭圆算子时，正则性定理可能不再成立。但方程 $P(\partial)u=f$ 仍然至少在 $L^2(\Omega)$ 中是可解的。该情况下的证明会困难得多，而且必须分析解的Fourier支集。该结论被称为 **Malgrange-Ehrenpreis定理**，参见 Muscalu-Schlag [12, 10.4节].

问题 5.2.2. 回顾我们在定理 5.2.2 中对 $0\leqslant s<\frac d2$ 得到了不等式 $\|f\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}$。然而在乘以特征 $e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\eta}}$ 这一运算下它**不是**不变的。事实上，给定 $\varphi\in\mathcal{S}$ 并设其满足 $\hat\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，我们定义 $\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})=e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}}\varphi(\boldsymbol{x})$. 证明：$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2^*}}$ 不依赖 ε，但 $\|\varphi_\varepsilon\|_{\dot H^s}$ 的阶为 $O(\varepsilon^{-s})$.

问题 5.2.3 (齐次Besov空间 $\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}$)**.** 设 $\theta\in\mathcal{S}$ 满足 $\hat\theta\in C_c^\infty$，$0\leqslant\hat\theta\leqslant 1$ 且在 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ 附近有 $\hat\theta=1$. 对 $f\in\mathcal{S}'$ 和 $\sigma>0$，我们定义

$$\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d):=\left\{\|f\|_{\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}}:=\sup_{A>0}A^{d-\sigma}\|\theta(A\cdot)*f\|_{L^\infty}<\infty\right\}.$$

可以验证$(\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_{\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)})$ 是Banach空间。现假设 $s<\frac d2$，证明：$\dot H^s$ 连续嵌入到 $\dot B^{s-\frac d2}_{\infty,\infty}$，且有不等式

$$\|f\|_{\dot B^{s-\frac d2}_{\infty,\infty}}\leqslant\frac{C}{\sqrt{\frac d2-s}}\|f\|_{\dot H^s},\qquad\forall f\in\dot H^s,$$

其中 C 仅依赖 d 和 $\operatorname{Spt}\theta$.

问题 5.2.4 (齐次Besov范数的不变性). 在问题 5.2.2 和 5.2.3 的假设下，再假设设 $0<\sigma\leqslant d$. 证明对任意 $\varepsilon>0$，$\|\varphi_\varepsilon\|_{\dot B^{-\sigma}_{\infty,\infty}}\leqslant C\varepsilon^\sigma$.

提示：当 $A\varepsilon>1$ 时结论显见。当 $A\varepsilon\leqslant 1$ 时，利用 $(-i\varepsilon\partial_1)^d e^{ix_1/\varepsilon}=e^{ix_1/\varepsilon}$ 并分部积分 d 次。

问题 5.2.5 (加细版本的临界嵌入). 设 $0<s<\frac{d}{2}$. 证明：存在仅依赖于 d 和 $\widehat{\theta}$ 的常数 C，使得

$$\|f\|_{L^{2^*}}\leqslant\frac{C}{(2^*-2)^{\frac{1}{2^*}}}\|f\|^{1-\frac{2}{2^*}}_{\dot B^{s-\frac{d}{2}}_{\infty,\infty}}\|f\|^{\frac{2}{2^*}}_{\dot H^s}.$$

更多细节参见 Bahouri-Chemin-Danchin [2, Remark 1.44].

提示：不妨假设齐次Besov范数为 1，并模仿定理 5.2.4 那样作拆分 $f=f_{\ell,A}+f_{h,A}$，于是 $\{|f|>\alpha\}\subseteq\{|f_{\ell,A}|>\alpha/2\}\cup\{|f_{h,A}|>\alpha/2\}$. 利用Besov范数的定义可以看出，适当选取$A$可使得第一个集合的测度为零。然后利用定理 C.1.8 计算$\|f\|^{2^*}_{L^{2^*}}$，并对 $p=2$ 用习题 C.1.6 中的Chebyshev不等式。

问题 5.2.6 (加细版本的稠密性论证). 若 $s\leqslant\frac{d}{2}$（或 $<\frac{d}{2}$），证明：$C_c^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\})$ 在 $H^s(\mathbb{R}^d)$（或 $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$）中稠密。若$s>\frac{d}{2}$，则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\})$ 在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中的闭包是如下集合

$$\left\{u\in H^s(\mathbb{R}^d):\partial^\alpha u(\mathbf{0})=0\ \forall\text{满足}|\alpha|<s-\frac{d}{2}\text{的多重指标}\alpha\right\}.$$

提示：设 $u_s:=(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{2s}\hat u)^\vee$. 若对任意的 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\})$ 有 $(u_s,\varphi)_{L^2}=0$，则 $\operatorname{Spt}u_s=\{\mathbf{0}\}$. 然后再用定理D.2.7.

问题 5.2.7. 给定常系数微分算子 L，我们称 $u\in\mathcal{D}'$ 为 L **的基本解** 是指 $Lu=\delta$ 在分布意义下成立。求出 $\mathbb{R}^d$ 中Laplace算子 $L_1=-\Delta$ 和热算子 $L_2=\partial_t-\Delta$ 的基本解。

参考：Stein [15, 第3.2节].

接下来的问题考虑$\mathbb{R}^{1+d}$中的波动算子$\square:=\partial_t^2-\Delta_{\boldsymbol{x}}$的基本解。即考虑方程

$$\begin{cases}(\partial_t^2-\Delta)E_+=\delta(t,\boldsymbol{x}), & t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d;\\ \operatorname{Spt}E_+\subseteq\{(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{1+d}:t\geqslant 0\}.\end{cases}\tag{5.2.1}$$

问题 5.2.8. 利用时空Fourier变换或对空间变量$\boldsymbol{x}$的Fourier变换，求解低维情形下的基本解。

(1) 当 $d=1$ 时，证明基本解为：
$$E_+(t,x)=\frac{1}{2}H(t-|x|),$$
其中 $H(\cdot)$ 为 Heaviside 阶梯函数。

(2) 当 $d=3$ 时，已知半径为 t 的球面上均匀测度 $\mathrm{d}\sigma_t$ 的空间Fourier变换为 $\widehat{\mathrm{d}\sigma_t}(\boldsymbol{\xi})=4\pi t\frac{\sin(t|\boldsymbol{\xi}|)}{|\boldsymbol{\xi}|}$。

证明：
$$E_+(t,x)=\frac{1}{4\pi t}\delta(t-|\boldsymbol{x}|).$$

(3) 对$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，定义切向分量为$\boldsymbol{x}'=(x_1,x_2)$. 当$d=2$时，考虑二维波动方程，将其视为与第三个坐标 x_3 无关的三维问题。通过降维法证明：

$$E_2(t,\boldsymbol{x}')=\int_{\mathbb{R}}E_3(t,\boldsymbol{x}',x_3)\,\mathrm{d}x_3=\frac{1}{2\pi}\frac{H(t-|\boldsymbol{x}'|)}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{x}'|^2}}.$$

问题 5.2.9. 现在考虑一般维数的波动算子，它可由低维向高维递推。设 $E_d(t,x)$ 为 d 维波动方程基本解。已知Fourier变换的表达式 $\hat{E}_d(t,\boldsymbol{\xi})=\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$.

(1) 证明递推关系：
$$E_{d+2}(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi t}\frac{\partial}{\partial t}E_d(t,\boldsymbol{x}).$$

(2) 证明：当 $d\geqslant 3$ 为奇数时，$\operatorname{Spt}E_d\subset\{(t,\boldsymbol{x}):t=|\boldsymbol{x}|\}$; 当 d 为偶数时，$\operatorname{Spt}E_+=\{(t,\boldsymbol{x}):t\geqslant|\boldsymbol{x}|\}$. 并据此解释为什么偶数维波动方程不满足“强惠更斯原理”。

5.3 *Sobolev空间的Littlewood-Paley刻画

许多非线性发展方程可以通过将其视为描述低频、中频和高频之间的振荡和相互作用来分析。欲使频率分析严格化，我们需要若干调和分析工具，特别是Fourier变换。然而仅做Fourier变换并不能区分不同频段的行为，而这些行为在处理导数估计时实际上非常重要。因此一个自然的想法是在频率空间中找到一个合适的分解（实际上是单位分解），这就是所谓的**Littlewood-Paley理论**。

设 $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ 为一个实值径向对称的 C_c^∞ 函数，支于球 $\{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 2\}$ 内，且在球 $\{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1\}$ 上等于1. 这一“鼓包”函数的具体表达式并不重要，这里我们用 $1,2$ 而不是其他数字是因为1和2都是二进数(dyadic numbers). 现在我们定义Littlewood-Paley投影。

定义 5.3.1. 设 φ 如上定义，$N\in\mathbb{Z}$, $f\in\mathcal{S}$. 我们定义 $\psi(\boldsymbol{\xi})=\varphi(\boldsymbol{\xi})-\varphi(2\boldsymbol{\xi})$, 且对 $j\in\mathbb{Z}$ 定义 $\varphi_j(\boldsymbol{\xi})=\varphi(\boldsymbol{\xi}/2^j),\psi_j(\boldsymbol{\xi})=\psi(\boldsymbol{\xi}/2^j)$. 然后我们定义**Littlewood-Paley投影**如下：

$$P_Nf:=(\psi_N(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}))^\vee,\quad P_{\leqslant N}f:=(\varphi_N(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}))^\vee,\quad P_{\geqslant N}f:=\left((1-\varphi_N(\boldsymbol{\xi}))\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\right)^\vee.$$

换句话说，P_N 将 f 局部化到频段 $|\boldsymbol{\xi}|\sim 2^N$ 附近。容易证明对所有 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $\sum\limits_{N\in\mathbb{Z}}\psi_N(\boldsymbol{\xi})=1$. 且对于所有满足 $|N-M|\geqslant 2$ 的 $N,M\in\mathbb{Z}$，我们有 $\operatorname{Spt}\psi_N\cap\operatorname{Spt}\psi_M=\emptyset$. 因此$\{\psi_N\}$ 实际上给出了频率空间的一个单位分解。

5.3.1 Bernstein型不等式

现在我们介绍Bernstein型不等式，它给出Littlewood-Paley投影的基本性质。

命题 5.3.1 (Bernstein型不等式). 设 $N\in\mathbb{Z}$， $s\geqslant 0$ 且 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. 则在 $\mathbb{R}^d$ 中有

$$\|P_{\geqslant N}f\|_{L^p}\leqslant C(p,s,d)2^{-Ns}\||\nabla|^sP_{\geqslant N}f\|_{L^p}, \tag{5.3.1}$$

$$\|P_{\leqslant N}|\nabla|^sf\|_{L^p}\leqslant C(p,s,d)2^{Ns}\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p}, \tag{5.3.2}$$

$$\|P_N|\nabla|^{\pm s}f\|_{L^p}\simeq C(p,s,d)2^{\pm Ns}\|P_Nf\|_{L^p}, \tag{5.3.3}$$

$$\|P_{\leqslant N}f\|_{L^q}\leqslant C(p,q,d)2^{Nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p}, \tag{5.3.4}$$

$$\|P_Nf\|_{L^q}\leqslant C(p,q,d)2^{Nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|P_Nf\|_{L^p} \tag{5.3.5}$$

证明. 这些不等式几乎都是卷积Young不等式（定理 C.3.6）的直接推论，在此我们只证明 (3) 和 (5).

对 (3)，我们有 $P_Nf=\tilde{P}_N(P_Nf)$, 其中 $\tilde{P}_N:=P_{N-2}+P_{N-1}+\cdots+P_{N+2}$. (注意 $\psi_{N-2}+\cdots+\psi_{N+2}=1$ 在 $\operatorname{Spt}\psi_N$ 上成立。) 所以我们知道 $P_N(|\nabla|^{\pm s}f)=\tilde{P}_N(|\nabla|^{\pm s}P_Nf)=(\tilde{\psi}_N(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s\widehat{P_Nf}(\boldsymbol{\xi}))^\vee=(\psi_N(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s)^\vee*f$. 据卷积Young不等式可得

$$\|P_N(|\nabla|^{\pm s}f)\|_{L^p}\leqslant\|(\psi_N(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s)^\vee\|_{L^1}\|P_Nf\|_{L^p}.$$

现在我们计算

$$(\psi_N(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s)^\vee(\boldsymbol{x})=C\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\psi(2^{-N}\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\xlongequal{\boldsymbol{\xi}=2^N\boldsymbol{\eta}}C2^{Nd}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\boldsymbol{x}\cdot 2^N\boldsymbol{\eta}}\psi(\boldsymbol{\eta})2^{Ns}|\boldsymbol{\eta}|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}=C2^{N(d+s)}\check{\psi}(2^N\boldsymbol{x}),$$

于是

$$\|(\psi_N(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^s)^\vee\|_{L^1}\leqslant C2^{N(d+s)}\|\check{\psi}(2^N\cdot)\|_{L^1}=C2^{Ns}\|\check{\psi}\|_{L^1}\leqslant C2^{Ns}.$$

同样的证明适用于 $|\nabla|^{-s}f$.

对 (5)，我们再次使用 $P_Nf=\tilde{P}_N(P_Nf)$ 得到

$$\|P_Nf\|_{L^q}=\|(\psi_{N-2}+\cdots+\psi_{N+2})^\vee*P_Nf\|_{L^q}\leqslant C\|\psi_N^\vee\|_{L^r}\|P_Nf\|_{L^p},\ \ 1+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}.$$

然后就有

$$\|\psi_N^\vee\|_{L^r}=\|(\psi(\cdot/2^N))^\vee\|_{L^r}=2^{Nd}\|\check{\psi}(2^N\cdot)\|_{L^r}=2^{Nd(1-\frac{1}{r})}\|\check{\psi}\|_{L^r}.$$

因为 $1-\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$，故有

$$\|P_N f\|_{L^q} \leqslant C(p,q,d)2^{Nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|P_N f\|_{L^p}.$$

□

我们还有 L^p 空间的Littlewood-Paley刻画。据单位分解的局部有限性，我们可以看出如下结论给出了一个“几乎正交性 (almost orthogonality)”的刻画，它本质上是一个类似于勾股定理的结论。然而其证明依赖于Hörmander-Mikhlin乘子定理，这是调和分析中的结论，所以我们在此略过。

定理 5.3.2 (Littlewood-Paley平方函数定理). *对任意 $1<p<\infty$，存在常数 $C=C(p,d)>0$ 使得*

$$\forall f\in\mathcal{S},\quad C^{-1}\|f\|_{L^p}\leqslant\|S(f)\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{L^p},$$

其中 $S(f)$ 是 f 的 **Littlewood-Paley平方函数**，*定义为*

$$S(f):=\left(\sum_{N\in\mathbb{Z}}|P_N f|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|P_N f\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

5.3.2 Sobolev空间的Littlewood-Paley刻画

有了Littlewood-Paley投影，我们就可以建立非整数阶导数在某些 L^p 空间中更一般的估计。我们现在按如下方式定义Sobolev空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 和 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.

定义 5.3.2. *给定 $s\in\mathbb{R}$ 和 $1<p<\infty$，我们定义非齐次Sobolev空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 为*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^d):=\left\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d):\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}:=\|\langle\nabla\rangle^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}<\infty\right\}.$$

定义齐次Sobolev空间 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 为

$$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d):=\left\{f\in\mathcal{S}'/\mathcal{P}(\mathbb{R}^d):\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}:=\||\nabla|^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}<\infty\right\}.$$

据Bernstein不等式(命题 5.3.1(3))，我们有Sobolev范数的Littlewood-Paley刻画

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}\simeq\|P_{\leqslant 1}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\left\|\left(\sum_{N=1}^{\infty}2^{2Ns}|P_N f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.3.6}$$

第一个结论是 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 的Sobolev嵌入定理，它不再只对 $p=2$ 这一特殊情况成立。

定理 5.3.3 (非端点Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式). 设 $1 < p < q \leqslant \infty$ 和 $s > 0$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\theta s}{d}$, 其中 $0 < \theta < 1$. 则存在常数 $C = C(d, p, q, s) > 0$ 使得对任意 $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 有如下不等式成立

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{L^p}^{1-\theta}\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}^{\theta}.$$

证明. 我们采用Littlewood-Paley分解 $f = \sum_N P_N f$. 由Bernstein不等式和三角不等式，我们有

$$\|f\|_{L^q} \leqslant \sum_N \|P_N f\|_{L^q} \leqslant C(d,p,q)\sum_N 2^{N(\frac{d}{p}-\frac{d}{q})}\|P_N f\|_{L^p} = \sum_N 2^{N\theta s}\|P_N f\|_{L^p}.$$

另一方面，据命题 5.3.1(3) 和 P_N 的有界性，我们有

$$\|P_N f\|_{L^p} \leqslant C(d,p)\|f\|_{L^p}, \quad \|P_N f\|_{L^p} \leqslant C(d,p,s)2^{-Ns}\|P_N|\nabla|^s f\|_{L^p} \leqslant C(d,p,s)2^{-Ns}\||\nabla|^s f\|_{L^p}.$$

将此代入前面的估计，我们知道存在整数 K 使得下式成立

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q} &\leqslant C(d,p,s)\sum_{N\leqslant K} 2^{N\theta s}\|f\|_{L^p} + \sum_{N>K} 2^{N\theta s}\cdot 2^{-Ns}\||\nabla|^s f\|_{L^p} \\ &\leqslant C(d,p,s)\left(\|f\|_{L^p}\frac{2^{K\theta s}}{1-2^{-\theta s}} + \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}\frac{2^{(K+1)(\theta-1)s}}{1-2^{(\theta-1)s}}\right).\end{aligned}$$

现在我们通过选取合适的 K 来找到最佳上界。让不等式右边两项相等，可以推出

$$2^{-Ks} = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{\dot{W}^{s,p}}}\cdot\frac{1-2^{(\theta-1)s}}{2^{(1-\theta)s}-1}.$$

将此代回上述不等式以消去 K项，我们得到不等式右边等于

$$2C(d,p,s)\|f\|_{L^p}\frac{\|f\|_{\dot{W}^{s,p}}^{\theta}}{\|f\|_{L^p}^{\theta}}\cdot\left(\frac{1-2^{(\theta-1)s}}{2^{(1-\theta)s}-1}\right)^{-\theta} \leqslant C\|f\|_{L^p}^{1-\theta}\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}^{\theta}.$$

□

此时的临界嵌入定理仍然是Hardy-Littlewood-Sobolev不等式的推论。

定理 5.3.4 (端点Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式). 设 $1 < p < q < \infty$ 和 $s > 0$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{d}$. 则存在常数 $C = C(d,p,q,s) > 0$ 使得对于任意 $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$，使得如下不等式成立

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

特别地，当 $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{s}{d}$ 时，我们有非齐次Sobolev空间的嵌入定理

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

我们也可证明定理 5.2.3 (1) 的类似结果.

定理 5.3.5. 设 $1 < p < \infty, s > 0$ 满足 $sp > d$. 则

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(p,s,d)\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$$

5.3.3 非整数阶Leibniz法则和链式法则

作为本章的末尾，我们来证明非整数阶导数的Leibniz法则和链式法则，以呼应课程开头对整数阶Sobolev函数建立的运算法则。研究这些运算法则是必要的，因为很多研究中的问题必须要非常精确的Sobolev估计。

例 5.3.1 (分数阶Leibniz法则). 设 f, g 为 $\mathbb{R}^d$ 上的函数，记 D^α 为某个阶数 $\alpha > 0$ 为正的微分算子或拟微分算子。直观上，我们知道

- (高-低/低-高相互作用) 如果 f 的频率显著高于 g（例如 $f = P_N F$, $g = P_{<N-3}G$），或者比 g "更粗糙"（例如对某些 u， $f = \nabla u, g = u$），那么 fg 将具有与 f 相当的频率，且我们期待 $D^\alpha(fg) \approx (D^\alpha f)g$ 以及 $P_N(fg) \approx (P_N f)g$.
- (高-高/低-低相互作用) 如果 f 和 g 具有相近的频率（例如对于某些 F, G,有 $f = P_N F$, $g = P_N G$），那么 fg 应该具有比 f 低或相接近的频率，且我们期待 $D^\alpha(fg) \lesssim (D^\alpha f)g \approx f(D^\alpha g)$。

- (完整的Leibniz法则) 对 f 和 g 没有额外的频率假设，我们期待

$$D^\alpha(fg) \approx f(D^\alpha g) + (D^\alpha f)g$$

例 5.3.2 (非整数阶链式法则). 设 u 为 $\mathbb{R}^d$ 上的函数，$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个"适当光滑"的函数（例如 $F(u) = |u|^{p-1}u$ ）。那么对任意具有正阶数 $\alpha > 0$ 的微分算子 D^α，我们有非整数阶的链式法则

$$D^\alpha(F(u)) \approx F'(u)D^\alpha u$$

以及Littlewood-Paley刻画

$$P_{<N}(F(u)) \approx F(P_{<N}u), \quad P_N(F(u)) \approx F'(P_{<N}u)P_N u.$$

我们观察到当D^α是k阶（k为整数）微分算子时，上述讨论在最高阶k的层面上确实是完全正确的（即忽略任何 f, g, u 的 $\leqslant k-1$ 阶导数的项）。事实上，上述两个原则是更一般原则的实例：

例 5.3.3 (最高阶项占主导的原则).

- 当分配导数时，主导项通常是所有导数落在单个函数上的项；
- 如果各个函数的光滑度不同，主导项将是所有导数落在最粗糙（或最高频率）的那个函数上的项。

对这些“原则”的完全严格处理需要用到仿微分计算 (paradifferential calculus)，这已经超出了本讲义的知识范围。我们现在证明 $D=\partial$ 这一最简单情况下的非整数阶Leibniz法则，所得结论通常被称作**Moser型不等式**。

定理 5.3.6 (Moser型不等式). *若* $s\geqslant 0$，*则对任意的* $f,g\in H^s(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$，*都成立不等式*

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(s,d)\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

特别地，若$s>d/2$，*该结论就退化为定理* 5.2.3(2).

处理这种多线性估计的基本方法是使用Littlewood-Paley分解先扒出所有差不多是零的项（由于不可能的频率相互作用），然后用Bernstein和Hölder不等式估计每个剩余分量，最后求和。一般来说我们应该尝试在尽可能低频段用Bernstein不等式，因为这给出了最有效的估计。而在某些情况下，需要用Cauchy-Schwarz不等式来完成求和。

证明. 设$s>0$. 据Sobolev范数的平方函数刻画（命题 5.3.1），我们有

$$\|fg\|_{H^s}\lesssim C(s,d)\|P_{\leqslant 1}(fg)\|_{L^2}+\left(\sum_{N>1}2^{2Ns}\|P_N(fg)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

我们只估计后一项，因为第一项可以通过使用 $P_{\leqslant 1}$ 的 L^2 有界性和Cauchy-Schwarz不等式直接控制。我们对 f 作高低频拆分

$$\|P_N(fg)\|_{L^2}\leqslant C\|P_N((P_{<N-3}f)g)\|_{L^2}+\sum_{M>N-3}\|P_N((P_Mf)g\|_{L^2}.$$

对第一项，我们从Fourier支集（或者Littlewood-Paley投影的定义）可以观察到，在这项里面我们可以用 $P_{N-3<\cdot<N+3}g$ 替换 g，因此由Hölder不等式得

$$\|P_N((P_{<N-3}f)g)\|_{L^2}\leqslant C\|(P_{<N-3}f)P_{N-3<\cdot<N+3}g\|_{L^2}\leqslant C\|f\|_{L^\infty}\|P_{N-3<\cdot<N+3}g\|_{L^2}.$$

这项对上述平方函数的总贡献是 $C(s,d)(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s})$.

对第二项，我们容易证得下式

$$\sum_{M>N-3}\|P_N((P_Mf)g)\|_{L^2}\leqslant C\sum_{M>N-3}\|(P_Mf)g\|_{L^2}\leqslant C\|g\|_{L^\infty}\sum_{M>N-3}2^{-Ms}\|P_Mf\|_{L^2}$$

所以由Cauchy-Schwarz不等式就得到

$$2^{2Ns}\sum_{M>N-3}\|P_N((P_Mf)g)\|_{L^2}^2 \leqslant C\|g\|_{L^\infty}^2\sum_{M>N-3}2^{2(N-M)s}\|P_Mf\|_{L^2}^2.$$

最后对 N 求和（并利用假设 $s>0$），可见此项的总贡献是 $C(s,d)(\|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty})$，证毕。 □

注记 5.3.1. 如上定理证明过程中用到的拆解方法实际上就是例5.3.1里面所述的高-低、低-高、共振分解，它实际上就是调和分析中著名的**Bony仿积分解 (Bony's paraproduct decomposition)**，这也是严格证明非整数阶 Leibniz 法则必需的工具。在此我们将仿积分解的定义列举如下，更多内容可参考 Bahouri–Chemin–Danchin [2, 第2章].

定义 5.3.3 (Bony仿积分解)**.** 对乘积fg, 如下拆解方式被称作**仿积分解**

$$fg = T_fg + T_gf + R(f,g), \tag{5.3.7}$$

其中

$$T_fg := \sum_{N\in\mathbb{Z}}(P_{<N-3}f)(P_Ng), \quad T_gf := \sum_{N\in\mathbb{Z}}(P_{<N-3}f)(P_Nf), \quad R(f,g) := \sum_{N\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{M\in\mathbb{Z}\\ |M-N|\leqslant 3}}(P_Nf)(P_Mg).$$

而$T_f(\cdot), T_g(\cdot)$被称作**仿微分算子 (paradifferential operator)**. 可见，$\|T_fg\|_{H^s}$ (f低频, g高频) 的本质贡献即为 $\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}$, 而$\|T_gf\|_{H^s}$ (g低频, f高频) 的本质贡献即为 $\|g\|_{L^\infty}\|f\|_{H^s}$, 共振项 $R(f,g)$ 的贡献也可以完全被两个上界之和控制住。

定理 5.3.7 (Schauder型估计/仿线性化 (paralinearization))**.** 设 V 是有穷维赋范线性空间，$s\geqslant 0$, 函数$f\in H^s(\mathbb{R}^d\to V)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d\to V)$. 设 k 为大于 s 的最小整数，并设 $F\in C^k_{\mathrm{loc}}(V\to V)$ 满足 $F(0)=0$. 则 $F(f)\in H^s(\mathbb{R}^d\to V)$ 也成立，且有如下形式的界

$$\|F(f)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\left(F,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},V,s,d\right)\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

证明. 证明仿线性化估计的方法与上一定理相关，尽管不完全相同。粗略地说，我们用Taylor展开将 $F(f)$ 拆分为一个粗糙的误差（粗略估计）和一个光滑的主项（利用其导数信息进行估计），然后使用诸如Hölder, Bernstein, 和 Cauchy-Schwarz等工具来估计出现的项。

记 $A:=\|f\|_{L^\infty}$. 由于 $F\in C^k_{\mathrm{loc}}$, $F(0)=0$，据微积分基本定理就得到 $|F(f)|\leqslant C(F,A,V)|f|$. 这已经证明了$s=0$的情况。据Bernstein不等式（命题 5.3.1），我们需要证明

$$\left(\sum_{N>1}2^{2Ns}\|P_NF(f)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \leqslant C(F,A,V,s)\|f\|_{H^s}, \qquad \forall s>0.$$

我们首先在 $P_NF(f)$ 中扔掉 $F(f)$ 的“粗糙”部分。固定 N,s，并作拆分 $f=P_{<N}f+P_{\geqslant N}f$. 注意，由Littlewood-Paley投影的定义知，f和$P_{<N}f$都被$C(V,d,A)$控制。现在 $F\in C^k_{\mathrm{loc}}$，因此在半

径为 $C(V,d,A)$ 的球上是Lipschitz的，故有$F(f)=F(P_{<N}f)+C(V,d,A,F)(|P_{\geqslant N}f|)$. 这就导出

$$\|P_N F(f)\|_{L^2} \leqslant C(F,A,V,d)\|P_N F(P_{<N}f)\|_{L_2} + \|P_{\geqslant N}f\|_{L^2}.$$

为了控制后一项，由三角不等式和Cauchy-Schwarz观察到

$$2^{2Ns}\|P_{\geqslant N}f\|_{L^2}^2 \leqslant C(s)\sum_{N'\geqslant N} 2^{N's}2^{Ns}\|P_{N'}f\|_{L^2}^2$$

对 N 求和并用 H^s 范数的Littlewood-Paley刻画 (5.3.6)可得此项可以被 $\|f\|_{H^s}^2$ 控制。因此只需证明

$$\left(\sum_{N>1} 2^{2Ns}\|P_N F(P_{<N}f)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \leqslant C(F,A,V,s)\|f\|_{H^s}.$$

据Bernstein不等式，我们得到 $\|P_N F(P_{<N}f)\|_{L^2} \lesssim C(d,k)2^{-Nk}\|\nabla^k F(P_{<N}f)\|_{L^2}$. 反复用链式法则，并注意到 F 的所有导数都是局部有界的，我们因此证得逐点估计

$$|\nabla^k F(P_{<N}f)| \leqslant C(F,A,V,d,k)\sup_{k_1+\cdots+k_r=k}|\nabla^{k_1}(P_{<N}f)|\cdots|\nabla^{k_r}(P_{<N}f)|$$

其中$r=1,\cdots,k$，非负整数$k_1,\cdots,k_r$满足$k_1+\cdots+k_r=k$. 我们用Littlewood-Paley分解进一步拆分

$$\left|\nabla^k F(P_{<N}f)\right| \leqslant C(F,A,V,d,k)\sup_{k_1+\cdots+k_r=k_1}\sum_{1\leqslant N_1,\cdots,N_r<N}\left|\nabla^{k_1}(\tilde{P}_{N_1}f)\right|\cdots\left|\nabla^{k_r}(\tilde{P}_{N_r}f)\right|,$$

这里我们采用惯用的记号（即非齐次Littlewood-Paley分解）：当 $N>1$ 时记 $\tilde{P}_N := P_N$，而 $\tilde{P}_1 := P_{\leqslant 1}$. 我们可以取 $N_1 \leqslant N_2 \cdots \leqslant N_r$，其中上面的 $k_1,\cdots,k_r$ 可以取遍满足 $k_1+\cdots+k_r=k$ 的非负整数。现在据Bernstein不等式，我们有

$$\left\|\nabla^{k_i}(\tilde{P}_{N_i}f)\right\|_{L^\infty} \leqslant C(d,k)2^{N_ik_i}\|f\|_{L^\infty} \leqslant C(d,k,A)2^{Nk_i}, \quad 1\leqslant i\leqslant r-1.$$

类似可得 $\left\|\nabla^{k_r}(\tilde{P}_{N_r}f)\right\|_{L^2} \leqslant C(d,k)2^{N_rk_r}\|\tilde{P}_{N_r}f\|_{L^2}$. 因此我们有

$$\left\|\nabla^k F(P_{<N}f)\right\|_{L^2} \leqslant C(F,A,V,d,k)\sup_{k_1+\cdots+k_r=k}\sum_{1\leqslant N_1\leqslant\cdots\leqslant N_r<N} 2^{N_1k_1}\cdots 2^{N_rk_r}\left\|\tilde{P}_{N_r}f\right\|_{L^2}.$$

对 N_1 求和，然后对 N_2 求和……最后对 N_{r-1} 求和，并记 $N' := N_r$，我们得到

$$\left\|\nabla^k F(P_{<N}f)\right\|_{L^2} \leqslant C(F,A,V,d,k)\sum_{1\leqslant N'<N} 2^{N'k}\|\tilde{P}_{N'}f\|_{L^2}.$$

由Cauchy-Schwarz不等式，我们得出

$$\|P_N F(P_{<N} f)\|_{L^2}^2 \leqslant C(F, A, V, d, k) \sum_{1 \leqslant N' < N} 2^{N'k} 2^{-Nk} \|\tilde{P}_{N'} f\|_{L^2}^2 .$$

对 N 求和，据 H^s 范数的Littlewood-Paley刻画 (5.3.6)知，此项可以被 $\|f\|_{H^s}^2$ 控制，证毕。 □

习题 5.3

习题 5.3.1. 完成命题 5.3.1 的证明。

习题 5.3.2. 证明定理 5.3.4. （提示：用Hardy-Littlewood-Sobolev不等式。）

习题 5.3.3. 证明定理 5.3.5.（提示：用Bernstein不等式和 $s > d/p$.）

习题 5.3.4 (Gagliardo-Nirenberg插值不等式). 设$1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, $0 \leqslant j < m$. 则存在常数$\theta \in [\frac{j}{m}, 1]$和指标$p$满足

$$\|\partial^j f\|_{L^p} \leqslant C\|\partial^m f\|_{L^r}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{p} - \frac{j}{d} = \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + \frac{1-\theta}{q}.$$

问题 5.3

问题 5.3.1 (Littlewood-Paley投影的热半群刻画). 设 $\mathcal{A}$ 是中心为原点的但不包含原点的同心圆环，且设 $f \in \mathcal{S}$ 满足 $\operatorname{Spt} \hat{f} \subseteq \lambda \mathcal{A}$. 证明：存在常数 $c, C > 0$ 使得对任意 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 以及 $t, \lambda > 0$ 有

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^p} \leqslant C e^{-ct\lambda^2} \|f\|_{L^p}.$$

问题 5.3.2 (热半群刻画的Bernstein型不等式). 设 $u_0 \in \mathcal{S}$ 满足问题 5.3.1 中 f 的假设。考虑方程如下热方程的解u

$$\partial_t u - \nu \Delta u = 0,\ \ u|_{t=0} = u_0;$$

以及如下热方程的解 v

$$\partial_t v - \nu \Delta v = f(t, \boldsymbol{x}),\ \ v|_{t=0} = 0.$$

其中对任意 $t > 0$，$f(t, \cdot)$ 满足问题 5.3.1 中对 f 的假设。证明

$$\|u\|_{L_t^q L_x^b} \leqslant C(\nu\lambda^2)^{-\frac{1}{q}} \lambda^{d(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} \|u_0\|_{L^a},\ \ \|v\|_{L_t^q L_x^b} \leqslant C(\nu\lambda^2)^{-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \lambda^{d(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} \|f\|_{L_t^p L_x^a}$$

对任何 $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ 成立。

注记 5.3.2. Littlewood-Paley投影的热半群刻画可以进一步推广到无法定义Fourier变换的流形上，它虽然没有欧氏空间的Fourier变换好用，但至少给出Bernstein型不等式这样的频率局部化的结论。该工具在处理几何色散方程的动力学行为时尤为重要。

第六章　波动方程和Schrödinger方程

在本科偏微分方程课程中，我们已经学习了如何求解 $\mathbb{R}^d$ 或带特定边界条件的一维区间上的标准线性波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ 的古典解。显式解还表明波的传播速度是有限的，这也被称为Huygens原理。然而在许多物理模型中，波的传播满足具有**变系数甚至是非线性的**波动方程，例如广义相对论中的弯曲时空（Einstein 方程）、可压缩流体中的声波（可压缩 Euler 方程）、弹性介质的运动（弹性力学方程组）、可压缩等离子体中的磁声波（可压缩 MHD 方程）以及许多其他广泛应用的物理模型。

本章我们先考虑具有**给定**变系数的线性波动方程，即研究以下关于 $u: I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^{1+d}$ 中的方程：

$$\begin{cases} \partial_\alpha \left(g^{\alpha\beta}\partial_\beta u\right) = F & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ (u,\partial_t u) = (u_0,u_1) & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{6.0.1}$$

这里指标 α,β 取值是从 0 到 d，其中第 0 个分量指代时间变量 t. $F: [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是给定的源项，$I \subseteq \mathbb{R}$ 是时间变量取值的开区间。在此之后我们还将介绍拟线性波动方程的局部适定性理论及其爆破准则，其证明方法实际上是常微分方程里面就学过的Picard迭代法，这也是证明非线性偏微分方程存在性的一种常见方法。此后结合爆破准则和能量守恒，我们证明能量次临界的半线性波动方程必有小初值整体解。而拟线性波动方程的长时间存在性和渐近行为等内容需要用到Lorentz几何中的一些工具（例如由 Christodoulou, Klainerman 等人开发的向量场方法）或 Alinhac ghost weight等技术，本讲义暂不涉及。

6.1　线性波动方程的正则性和存在性

为了计算简便，本章我们设波动方程具有如下形式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - g^{ij}\partial_i\partial_j u = F & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ (u,\partial_t u) = (u_0,u_1) & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

我们要求 $\boldsymbol{g} := [\mathrm{g}^{ij}] : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 是对称正定方阵，并假设存在常数$0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$使得

$$\forall (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d,\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda |\boldsymbol{z}|^2 \leqslant g^{ij}(t, \boldsymbol{x}) z_i z_j \leqslant \Lambda |\boldsymbol{z}|^2. \tag{6.1.2}$$

后面我们还要对 $g^{\alpha\beta} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, F : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 和 $u_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 提出一些正则性假设。

6.1.1 线性波动方程的正则性

在证明线性波动方程 (6.1.1) 的局部存在性之前，我们先证明变系数线性波动方程的能量估计，这也可被视作解的正则性结论。需注意，这类方程可能不像标准波动方程那样成立能量守恒，但我们仍然可以证明某些适当定义的“能量”具有可控增长的性质。我们首先引入记号：

$$|\partial u|^2 := (\partial_t u)^2 + \sum_{i=1}^{d} \left(\partial_{x_i} u\right)^2 \tag{6.1.3}$$

定理 6.1.1 (L^2 能量估计). *设 u 为 (6.1.1) 的解，则存在常数 $C = C(d, T) > 0$使得如下估计成立:*

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} \|\partial u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C\left(\|(u_0,u_1)\|^2_{\dot H^1(\mathbb{R}^d)\times L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \|F(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(C\int_0^T \|\partial \boldsymbol{g}(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

这里 $\|\cdot\|_{\dot H^1} = \|\partial(\cdot)\|_{L^2}$ 表示齐次 Sobolev 范数。

证明. 这个定理的证明实际上与标准波动方程的证明类似。我们在方程两边乘以 $\partial_t u$ 然后积分得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_t^2 u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{g}^{ij}\partial_i\partial_j u \partial_t u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} F\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

第二项中分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)^2 + \mathrm{g}^{ij}\partial_j u\partial_i u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} F\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathrm{g}^{ij}\partial_j u\partial_i u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \mathrm{g}^{ij}\partial_i u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)^2 + \mathrm{g}^{ij}\partial_j u\partial_k u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 据(6.1.2)知$E(t) \approx \|\partial u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, 即二者可以被彼此的常数倍控制。这样我们得到能量不等式

$$E'(t) \leqslant \|F(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\partial \boldsymbol{g}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\partial u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{6.1.5}$$

对时间变量t积分，再用Young不等式得

$$\begin{aligned}E(t)&\leqslant E(0)+\int_0^t\|F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\partial_t u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\|\partial\boldsymbol{g}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\partial u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}\tau\\&\leqslant E(0)+\delta\sup_{t\in[0,T]}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\frac{1}{4\delta}\int_0^t\|F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\partial\boldsymbol{g}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\partial u(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}\tau\\&\leqslant E(0)+\delta E(t)+C\int_0^t\|F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|\partial\boldsymbol{g}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}E(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{6.1.6}$$

选取$\delta>0$充分小使得$\delta E(t)$被左边吸收掉。用Grönwall不等式，再对$t\in[0,T]$取上确界得

$$\sup_{t\in[0,T]}E(t)\leqslant C\left(E(0)+\int_0^T\|F(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(C\int_0^T\|\partial\boldsymbol{g}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2\,\mathrm{d}t\right)$$

即为所求。 □

对于常系数线性波动方程 $\partial_t^2 u-\Delta u=0$，我们知道如果 u 是一个解，那么 $\partial_t u$ 和 $\partial_{x_i}u$ 也是解。因此如果初值足够光滑且在 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时趋于零（例如 $u_0,u_1\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的情况），那么 u 的所有高阶导数在 L^2 中都是有界的。然而现在u 是 (6.1.1) 的解并不意味着它的导数也是 (6.1.1) 的解。不过我们模仿定理 6.1.1 的证明可以控制 u 的高阶 Sobolev 范数，进而得到以下推论，其证明留作练习。

推论 6.1.2. 设 $u\in C([0,T];H^k(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ 是 (6.1.1) 的解且 $2\leqslant k\in\mathbb{N}^*$. 那么存在常数 $C=C(d,k,T)>0$使得如下能量估计成立：

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\|(u(t),\partial_t u(t))\|_{H^k\times H^{k-1}}^2\\&\leqslant C\left[\|(u_0,u_1)\|_{H^k\times H^{k-1}}^2+\int_0^T\|F\|_{H^{k-1}}^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k-2}\left\|\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha\partial\boldsymbol{g}\,\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta\partial^2 u\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right]\exp\left(C\int_0^T\|\partial\boldsymbol{g}\|_{L^\infty}^2\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}\tag{6.1.7}$$

6.1.2　线性波动方程的存在性

本节我们利用能量估计结合 Hahn-Banach 定理来证明 (6.1.1) 解的局部存在性。下面我们假设 $\boldsymbol{g}$ 及其所有阶导数在 $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上都是有界的。假设源项 $F:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 满足：对于给定的 $k\in\mathbb{N}$ 有 $F\in L^2(0,T;H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$. 首先我们回顾 Hahn-Banach 定理。

定理 6.1.3 (Hahn-Banach 定理)**.** 设 X 是赋范线性空间，子空间$Y\subseteq X$ 满足对任意 $y\in Y$ 都有 $\|y\|_Y=\|y\|_X$. 设 $f\in Y^*$ 是 Y 上的有界线性泛函，则存在 $\tilde{f}\in X^*$ 使得 $\tilde{f}|_Y=f$ 以及 $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_{Y^*}$ 成立。

我们还需要以下引理：

引理 6.1.4. 令 $L^*\psi := \partial_\alpha(a^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi)$ 是 $Lu := \partial_\alpha(a^{\alpha\beta}\partial_\beta u)$ 的（形式）伴随算子。假设 $\psi \in C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d)$，则对任意 $m\in\mathbb{Z}$，存在 $C=C(m,T,\boldsymbol{g})>0$ 使得

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\int_t^T \|L^*\psi(\tau,\cdot)\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}\tau$$

对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。

证明. 对正整数$m\geqslant 1$，这是推论 6.1.2 的推论。我们现在对 $m\leqslant 0$ 的情况进行归纳。假设结果对于m_0+2的情况成立（其中m_0是某个负整数），我们希望证明在m_0的情况也成立。现在我们(用Fourier变换)定义 $\Psi=(1-\Delta)^{-1}\psi$，或者等价地通过方程 $(1-\Delta)\Psi=\psi$ 的解来定义Ψ，则存在依赖于 m_0,T,a 和 b 的常数$C>0$ 使得

$$\left|L^*\psi-(1-\Delta)L^*\Psi\right| = \left|L^*(1-\Delta)\Psi-(1-\Delta)L^*\Psi\right| \leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 3}|\partial_x^\alpha\Psi|\,.$$

因此得到

$$\|L^*\Psi\|_{H^{m_0+1}} \leqslant C\left(\|L^*\psi\|_{H^{m_0-1}}+\|\Psi\|_{H^{m_0+2}}\right)$$

据归纳假设，我们得到

$$\|\Psi(t,\cdot)\|_{H^{m_0+2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\int_t^T\left(\|L^*\psi(\tau,\cdot)\|_{H^{m_0-1}}+\|\Psi(\tau,\cdot)\|_{H^{m_0+2}}\right)\mathrm{d}\tau \leqslant C\int_t^T\|L^*\psi(\tau,\cdot)\|_{H^{m_0-1}}\,\mathrm{d}\tau.$$

在上式最后一行中我们使用了 Grönwall 不等式，据此得到

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^{m_0}} \leqslant C\|\Psi(t,\cdot)\|_{H^{m_0+2}} \leqslant C\int_t^T\|L^*\psi(\tau,\cdot)\|_{H^{m_0-1}}\,\mathrm{d}\tau.$$

□

现在我们可以证明(6.1.1)的局部存在性：

定理 6.1.5 (线性波动方程的局部存在性). 设 $k\in\mathbb{N}$. 给定 $F\in L^2([0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$，则方程(6.1.1)存在唯一的解$u$，它满足 $(u,\partial_t u)\in L^\infty([0,T];H^k(\mathbb{R}^d))\times L^\infty([0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$.

证明. 我们从 $(u_0,u_1)=(0,0)$ 的情况开始该情况也给出了 (6.1.1) 的唯一性。对像集 $L^*(C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d))$ 中的任一元素 $L^*\psi$，我们定义一个它到 $\mathbb{R}$ 的映射：

$$L^*\psi \longmapsto \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\psi F\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t =: \langle F,\psi\rangle,$$

其中 $L^*(C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d))$ 表示 $C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d)$ 在映射 L^* 下的像。注意这个映射是良定的，因为方程$L^*\psi=f$在给定$\psi(T,\cdot)=0$时解的唯一性已经在 L^2 能量估计（定理 6.1.1）中证明了。据

对 F 的假设和引理 6.1.4，我们有

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\psi F\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C\left(\int_0^T\|F\|_{H^{k-1}}\,\mathrm{d}t\right)\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\psi\|_{H^{-k+1}}\right)\leqslant C\int_0^T\|L^*\psi(t)\|_{H^{-k}}\,\mathrm{d}t.$$

据 Hahn-Banach 定理知，存在函数 $u\in(L^1((-\infty,T);H^{-k}(\mathbb{R}^d)))^*=L^\infty((-\infty,T);H^k(\mathbb{R}^d))$ 作为上面定义的映射的延拓，且满足$u|_{t<0}=0$. 即：

$$\langle F,\psi\rangle=\langle u,L^*\psi\rangle,\quad\forall\psi\in C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d).$$

因此u 是分布意义下的解。利用方程可以得到 $u\in C^1\left([0,T];L^2(\mathbb{R}^d)\right)$，进而 $(u,\partial_t u)|_{\{t=0\}}=(0,0)$.

接下来证明$(u,\partial_t u)\in L^\infty([0,T];H^k(\mathbb{R}^d))\times L^\infty([0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$. 首先我们不妨设$F$是具有紧支集的光滑函数，令$v=\partial_t u$, 这样波动方程变为

$$\partial_t v=F+g^{ij}\partial_i\partial_j u\in L^\infty(0,T;H^{k-2}(\mathbb{R}^d)).$$

对t积分即得$v=\partial_t u\in L^\infty(0,T;H^{k-2}(\mathbb{R}^d))$, 然后利用方程可得$\partial_t^2 u\in L^\infty(0,T;H^{k-2}(\mathbb{R}^d))$. 但是现在因为假设了$F$具有紧支集且光滑，所以我们可以用$k+1$替换掉$k$, 就得到$(u,\partial_t u)\in L^\infty([0,T];H^k(\mathbb{R}^d))\times L^\infty([0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$.

然后我们需要移除对F的光滑性假设。对一般的 $F\in L^1(0,T;H^{k-1})$，我们可找到在 $\{t<0\}$ 上取值为零的函数列 $\{F_n\}\subset C_c^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^d)$ 使得 $\int_0^T\|F(t,\cdot)-F_n(t,\cdot)\|_{H^{k-1}}\,\mathrm{d}t\to 0$. 这样的话，若$u_n\in L^\infty(0,T;H^k)\cap W^{1,\infty}(0,T;H^{k-1})$ 满足具有零初值的 $Lu_n=F_n$，我们就可由正则性定理得

$$\|\partial(u_l-u_n)\|_{H^{k-1}}\leqslant C\int_0^T\|F_l(t,\cdot)-F_n(t,\cdot)\|_{H^{k-1}}\,\mathrm{d}t\to 0.$$

最后我们还需处理初值非零的情况，不妨设初值$u_0,u_1\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$（否则仍然考虑类似上面的逼近），令$\eta(t,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x})+tu_1(\boldsymbol{x})$, 它正好满足$u$的初值条件。这样的话方程$Lv=F-L\eta$就是一个关于未知函数$v$且具有零初值的波动方程组，于是$u:=v+\eta$就给出了方程(6.1.1)的解，其正则性也和零初值的时候相同。 □

注记 6.1.1. 上述定理仅给出了分布意义下的解的存在性。但是我们可以利用 $s>d/2$ 时的 Sobolev 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$得到：如果我们初值正则性足够好，那么解也具有定理 6.1.2 中对应的正则性，因此当 k 足够大时方程的解可以逐点定义。

习题 6.1

习题 6.1.1. 证明定理6.1.2.

习题 6.1.2. 证明：对于任意常数 $D\in\mathbb{R}$，以下方程至多有一个光滑解 $u\in C^\infty([0,T]\times U)$. 这里

$U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有光滑边界的区域，且 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(U)$.

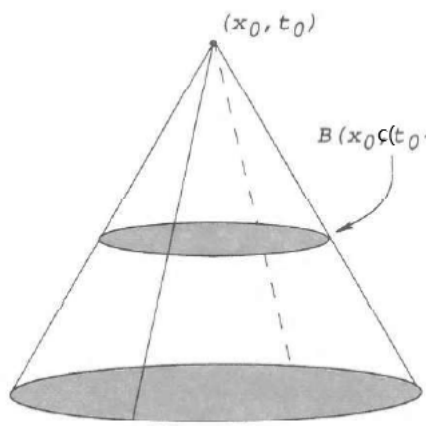
$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T] \times U, \\ u = \varphi,\ \partial_t u = \psi & \text{on } \{t=0\} \times U, \\ u = 0 & \text{on } [0,T] \times \partial U. \end{cases}$$

6.2 波动方程的有限传播速度

在本科 PDE 课程中，我们已经学过标准波动方程 $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ 具有有限传播速度。

定理 6.2.1 (有限传播速度). 对于在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 中带有初值 $(u_0, u_1) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的波动方程 $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$，如果存在 $t_0 > 0$ 和 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$使得初值$u_0, u_1$在集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant ct_0\}$ 中有恒为零，那么解 $u(t, \boldsymbol{x})$ 在过往光锥 (past light cone) $K(t_0, \boldsymbol{x}_0)$内恒为零。这里

$$K(t_0, \boldsymbol{x}_0) := \left\{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant c(t_0 - t)\right\}.$$



Cone of dependence

波动方程的有限传播速度描述了一个与抛物型极大值原理（无限传播速度）“相反”的现象。这一性质实际上否定了双曲型 PDE 满足极大值原理的可能性。

我们自然会问：对于变系数波动方程是否还能证明有限传播速度的结果？答案是肯定的。固定一点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$，我们希望构造某种以 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 为顶点的“弯曲光锥” C，使得如果初值在 $C \cap \{t = 0\}$ 上为零，那么解 u 在 C 内为零。

现在回忆：证明定理 6.2.1 的关键思想是证明在切片 $\{(t, \boldsymbol{x}) : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant c(t_0 - t)\}$ 上的能量关于时间t单调递减。因此我们可以试着寻找适当的函数 $q(\boldsymbol{x})$，使得类似的证明对于变系数波动方程也成立。准确地说，我们希望找到 $q(\boldsymbol{x})$，使得在切片 $K_t := \{\boldsymbol{x} : q(\boldsymbol{x}) < t_0 - t\}$ 上的某个能量函数 $e(t)$ 关于 t 递减。特别地，对标准波动方程这个 $q(\boldsymbol{x})$ 是 $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)/c$。

6.2.1 动机：几何光学

事实上，过往光锥的边界可以理解为某个 Hamilton-Jacobi 方程的解 $p(t,\boldsymbol{x})$ 的水平集，也就是说光锥的边界由某个 Hamilton-Jacobi 方程的特征曲线组成。

我们首先从 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 中的标准波动方程 $\partial_t^2 u-\Delta u=0$ 来看这一事实。对$t\geqslant 0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon>0$，我们考虑具有形式 $u^\varepsilon(t,\boldsymbol{x}):=U^\varepsilon(t,\boldsymbol{x})\cdot\exp(ip^\varepsilon(t,\boldsymbol{x})\varepsilon^{-1})$ 的复值解。将此式代入波动方程，我们得到

$$\begin{aligned}0=(\partial_t^2-\Delta)u^\varepsilon=&e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\partial_t^2U^\varepsilon+2i\varepsilon^{-1}\partial_tp^\varepsilon\,\partial_tU^\varepsilon-\varepsilon^{-2}(\partial_tp^\varepsilon)^2U^\varepsilon+i\varepsilon^{-1}\partial_t^2p^\varepsilon U^\varepsilon\right)\\&-e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\Delta U^\varepsilon+2i\varepsilon^{-1}\nabla p^\varepsilon\cdot\nabla U^\varepsilon-\varepsilon^{-2}U^\varepsilon|\nabla p^\varepsilon|^2+i\varepsilon^{-1}U^\varepsilon\,\Delta p^\varepsilon\right).\end{aligned}$$

取上述等式的实部，我们发现

$$U^\varepsilon((\partial_tp^\varepsilon)^2-|\nabla p^\varepsilon|^2)=\varepsilon^2(\partial_t^2U^\varepsilon-\Delta U^\varepsilon).\tag{6.2.1}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，若在某种意义下我们有收敛 $p^\varepsilon\to p$ 以及 $U^\varepsilon\to U\neq 0$，那么形式上我们就可得到

$$\partial_tp\pm|\nabla p|=0\qquad\text{in }\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d.\tag{6.2.2}$$

据分离变量法，我们可以得到 $p(t,\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x})+t-t_0$，且 q 在 $\mathbb{R}^d\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$ 中满足 $|\nabla q|^2=1$，$q>0$ 且 $q(\boldsymbol{x}_0)=0$，进而我们可以解出 $q(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$.

对于变系数的情况，我们也可以解出

$$\partial_tp\pm\left(g^{ij}\partial_ip\partial_jp\right)^{\frac12}=0\qquad\text{在 }\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d.\tag{6.2.3}$$

再用分离变量法得到

$$p(t,\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x})+t-t_0\tag{6.2.4}$$
$$g^{ij}\partial_iq\partial_jq=1,\quad q>0\text{ 在 }\mathbb{R}^d\backslash\{\boldsymbol{x}_0\},\quad q(\boldsymbol{x}_0)=0.\tag{6.2.5}$$

事实上这个 q 是在由 $\boldsymbol{g}$ 确定的黎曼度量下从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离。

6.2.2 有限传播速度的证明

我们定义 $K:=\{(t,\boldsymbol{x}):p(t,\boldsymbol{x})<0\}=\{(t,\boldsymbol{x}):q(\boldsymbol{x})<t_0-t\}$，对 $t>0$ 我们定义

$$K_t:=\{\boldsymbol{x}:q(\boldsymbol{x})<t_0-t\}.$$

由于 $\nabla q\neq\mathbf{0}$ 在远离 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立，我们知道对 $0\leqslant t\leqslant t_0$，$\partial K_t$ 是一个光滑的 $(d-1)$ 维超曲面。

定理 6.2.2 (有限传播速度). 设 u 是 (6.1.1) 的光滑解。若 $u \equiv \partial_t u \equiv 0$在$K_0$上成立，那么$u$在$K$中恒为零。

注记 6.2.1. 据此我们知道，若u是方程(6.1.1)在初值为(u_0, u_1)时的解，那么$u(t_0, \boldsymbol{x}_0)$仅依赖于 u_0 和 u_1 在 K_0 内的取值。

证明. 我们定义能量

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{K_t} (\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i u \partial_j u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0)$$

为了计算 $\dot{e}(t)$，我们利用余面积公式的推论（移动区域求导公式）得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{K_t} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) = \int_{K_t} \partial_t f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial K_t} \frac{f}{|\nabla q|} \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$

因此有

$$e'(t) = \int_{K_t} \partial_t u \,\partial_t^2 u + a^{ij}\partial_i u \partial_t \partial_j u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial K_t} \left((\partial_t u)^2 + a^{ij}\partial_i u \partial_j u\right) \frac{1}{|\nabla q|} \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \tag{6.2.6}$$

对第一项，我们分部积分并代入波动方程得到

$$\int_{K_t} \partial_t u \,\partial_t^2 u + a^{ij}\partial_i u \partial_t \partial_j u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{K_t} \partial_t u \left(\partial_t^2 u - \partial_j (\mathrm{g}^{ij}\partial_i u)\right) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial K_t} \mathrm{g}^{ij}\partial_i u N_j \,\partial_t u \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

$$= -\int_{K_t} \partial_t u (\partial_i u \,\partial_j \mathrm{g}^{ij}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial K_t} \mathrm{g}^{ij}\partial_i u N_j \,\partial_t u \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

其中 $N = (N_1, \cdots, N_d)$ 是 ∂K_t 的单位外法向量。直接计算可得第一项被 $Ce(t)$ 控制

$$\left| -\int_{K_t} \partial_t u (\partial_i u \,\partial_j \mathrm{g}^{ij}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leqslant Ce(t).$$

对第二项，我们希望它能够与 $e'(t)$ 中出现的边界项产生抵消。我们有

$$\left|\mathrm{g}^{ij}\partial_i u N_j\right| \leqslant \left(\mathrm{g}^{ij}\partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \left(g^{ij} N_i N_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

这是广义 Cauchy-Schwartz 不等式的推论：对于正定对称矩阵 $\mathcal{M} = \mathcal{P}\mathcal{P}^\top$ 和向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，有

$$|\boldsymbol{x}^\top \mathcal{M} \boldsymbol{y}| = |(\mathcal{P}\boldsymbol{x})^\top (\mathcal{P}\boldsymbol{y})| \leqslant |\mathcal{P}\boldsymbol{x}||\mathcal{P}\boldsymbol{y}| = \sqrt{(\mathcal{P}\boldsymbol{x}^\top)\mathcal{P}\boldsymbol{x}}\sqrt{(\mathcal{P}\boldsymbol{y})^\top \mathcal{P}\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \mathcal{M}\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{y}^\top \mathcal{M}\boldsymbol{y}}.$$

然后我们回忆在 K_t 上有 $q = t_0 - t$ 意味着在 ∂K_t 上有 $N = \frac{\nabla q}{|\nabla q|}$成立，因此

$$g^{ij}N_iN_j = \frac{g^{ij}\partial_i q\partial_j q}{|\nabla q|^2} = \frac{1}{|\nabla q|^2}.$$

用 Young 不等式，我们可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial K_t} g^{ij}\partial_i u N_j\,\partial_t u\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\right| &\leqslant \int_{\partial K_t}\left(g^{ij}\partial_i u\partial_j u\right)^{\frac{1}{2}}\left(g^{ij}N_iN_j\right)^{\frac{1}{2}}|\partial_t u|\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ &\leqslant \int_{\partial K_t}\left(g^{ij}\partial_i u\partial_j u\right)^{\frac{1}{2}}|\nabla q|^{-1}|\partial_t u|\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\left(g^{ij}\partial_i u\partial_j u + (\partial_t u)^2\right)|\nabla q|^{-1}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = -e'(t) + \int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u + a^{ij}\partial_i u\partial_t\partial_j u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

综上我们得到$e'(t) \leqslant Ce(t)$，而 $e(0) = 0$，据 Grönwall 不等式得 $e(t) = 0$. □

习题 6.2

习题 6.2.1. 对波动方程 $\partial_t^2 u - g^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$ 验证 (6.2.3).

习题 6.2.2. 考虑半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 & t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d;\\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \partial_t u(0,x) = \psi_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.\end{cases} \tag{6.2.7}$$

这里 f 是连续函数，且假设 u 在 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ 时趋于零。

(1) 证明如下$E(t)$关于时间是守恒量

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad F(u) := \int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s.$$

(2) 给定 $t_0 > 0$ 和 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ 并定义带有顶点 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 的时间倒向光锥 (time-backward light cone) 为

$$K(\boldsymbol{x}_0,t_0) := \{(t,\boldsymbol{x}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d : 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leqslant t_0 - t\},$$

$K(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 边界的弯曲部分为

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0) := \{(t,\boldsymbol{x}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d : 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| = t_0 - t\}.$$

定义光锥上的能量通量(energy flux)为

$$e(t) := \int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ \ 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0)} \frac{1}{2}|(\partial_t u)\nu - \nabla u|^2 + F(u)\,\mathrm{d}S = e(0) \tag{6.2.8}$$

其中 $\nu := \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$.

(3) 设 $F \geqslant 0$，利用 (2) 证明如果u_0, u_1在$B(\boldsymbol{x}_0, t_0)$中恒为零，那么u在光锥$K(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 内恒为零。

(4) 证明 (3) 对于拟线性波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u + f(u, \partial u) = 0$ 的光滑解 u 也成立，其中 f 连续且 $f(0, \mathbf{0}) = 0$.

提示：(2) 计算 $e'(t)$ 并将其与待证等式的左端进行比较，尤其要思考系数 $1/\sqrt{2}$ 是如何出现的。(4) 考虑 $E(t) = \int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 并注意到存在依赖于 $\|u, \partial u\|_{L^\infty}$ 的常数 $C > 0$ 使得 $|f(u, \partial u)| \leqslant C(|u| + |\partial u|)$成立。

6.3 拟线性波动方程的局部理论

在许多物理模型中出现的波动方程都是非线性的，尤其是拟线性波动方程，例如刻画无粘流体运动的可压缩Euler方程组、刻画时空弯曲的Einstein方程组等等。特别地，它们的非线性项都同时依赖于未知函数 u 和它的导数.

例 6.3.1 (可压缩欧拉方程). 设$d = 1, 2, 3$, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$是流体速度，$\rho, p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$分别是流体的密度和压力，其中$\rho > 0$. 可压缩理想流体满足Euler方程组

$$\begin{cases} \rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p \\ (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ p = p(\rho)\text{是严格递增函数，例如}p(\rho) = A\rho^\gamma - B. \end{cases}$$

对第一个式子求散度并代入第二个式子即得压力满足一个拟线性波动方程

$$\rho'(p) D_t^2 p - \Delta p = \rho(\partial_i u_j \partial_j u_i) + (\rho^{-1}\rho'(p) - \rho''(p))(D_t p)^2 - \rho^{-1}\rho'(p)|\nabla p|^2, \quad D_t := \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

另一方面，它的速度场也满足波动方程，这里我们以无旋情况为例，即$\mathbf{u} = \nabla\phi$时，若令$h(\rho) = \int_*^\rho p'(r)/r\,\mathrm{d}r$为焓，则可算出$\partial_t\phi - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - h = 0$, 此时第二个方程可以化作

$$\eta^{-2}\partial_t^2\phi - 2\eta^{-2}\nabla\phi \cdot \nabla\partial_t\phi + \eta^{-2}(\nabla\phi)^\top(\nabla^2\phi)(\nabla\phi) - \Delta\phi = 0.$$

例 6.3.2 (真空爱因斯坦方程). 设$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$是$\mathbb{R}^{1+3}$上的Lorentz度量，即它的符号为$(-,+,+,+)$. 真空Einstein 方程即为

$$\mathrm{Ric}\,\boldsymbol{g}=0\ \ (0\leqslant\mu,\nu\leqslant 3).$$

如果在局部坐标下作展开，则可以得到

$$0=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^2_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^2_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}+F_{\mu\nu}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\partial g}).$$

特别地，如果右端项第二、第三和第四项不存在，那么这就变成了一个拟线性波动方程组，且源项就只依赖g 及其导数的函数。另一方面，如果我们选取特殊的**波坐标条件 (wave coordinate condition)**，即假设局部坐标满足

$$\Box_g x^\alpha\ :=\frac{1}{\sqrt{-\det\boldsymbol{g}}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-\det\boldsymbol{g}}\partial_\nu x^\alpha)=0,$$

此时右端项第二、第三和第四项都可以写成至多含有一阶导数的项，真空Einstein方程会变成**约化(reduced)真空Einstein方程** $\widetilde{\mathrm{Ric}}\,g_{\mu\nu}=0$, 其中

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}\,g_{\mu\nu}=\mathrm{Ric}\,g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_\mu\lambda_\nu-\frac{1}{2}\partial_\nu\lambda_\mu.$$
$$\lambda_\sigma=g^{\mu\alpha}\partial_\mu g_{\alpha\sigma}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta}.$$

这是因为我们可以计算出在波坐标下$\lambda\equiv\mathbf{0}$. 所以可见，在波坐标下，真空Einstein方程是拟线性波动方程组。

本节我们考虑具有如下形式的拟线性波动方程。

$$\begin{cases}\partial_t^2u-g^{ij}(u)\partial_i\partial_j u=F(u,\boldsymbol{\partial}u) & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ (u,\partial_t u)=(u_0,u_1) & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{6.3.1}$$

其中 $k\in\mathbb{N}^*$ 待定。此外我们还要求

- $\boldsymbol{g},F$ 关于其变量都是光滑的, $F(0,\mathbf{0})=0$.
- $[g^{ij}]_{d\times d}$是实对称正定方阵，其中$\lambda(z),\Lambda(z)$关于$(z)\in\mathbb{R}$连续且取值为正。

$$\forall z\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\quad \lambda(z)|\boldsymbol{\xi}|^2\leqslant g^{ij}(z)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda(z)|\boldsymbol{z}|^2.\tag{6.3.2}$$

6.3.1 拟线性波动方程的局部适定性

在如上假设下，我们证明方程(6.3.1)的局部适定性。

定理 6.3.1 (拟线性波动方程的局部适定性). 设 $s\geqslant d+2$，初值$(u_0,u_1)\in H^s(\mathbb{R}^d)\times H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$具有

紧支集，则在本节的假设下有如下结论成立。

(1) (局部解的存在性和唯一性) 存在 $T>0$ (依赖$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ 和 $\|u_1\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}$), 使得方程 (6.3.1) 有唯一解并满足

$$(u,\partial_t u)\in L^\infty([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))\times L^\infty([0,T];H^{s-1}(\mathbb{R}^d)).$$

(2) (对初值的连续依赖性) 设 $u_0^{(n)},u_1^{(n)}$ 满足 $u_0^{(n)}\xrightarrow{H^r(\mathbb{R}^d)}u_0$ 以及 $u_1^{(n)}\xrightarrow{H^{r-1}(\mathbb{R}^d)}u_1$，则对充分小的$T>0$和任意的$1\leqslant r<d+2$成立下式

$$\|(u^{(n)}-u,\partial_t(u^{(n)}-u))\|_{L^\infty([0,T];H^r(\mathbb{R}^d))\times L^\infty([0,T];H^{r-1}(\mathbb{R}^d))}\to 0,\quad n\to\infty.$$

这里 u 是以 (u_0,u_1) 为初值的解，$u^{(n)}$是以 $(u_0^{(n)},u_1^{(n)})$ 为初值的解。

注记 6.3.1. 如果波动方程的系数$\boldsymbol{g}$同时依赖$u,\partial u$，则此时应当要求$s\geqslant d+3$，见 Sogge [13, 第一章].

证明. 我们不妨取$s=d+2$这个最低正则性。证明的方法是用常微分方程里就学过的Picard迭代法。据稠密性，我们不妨假设初值$u_0,u_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$以方便求导。今构造逼近解序列$\{u^{(n)}\}$如下：

- $u^{(1)}=0.$
- 对$n\geqslant 2$, 归纳地定义$u^{(n)}$为如下**线性波动方程**的唯一解

$$\begin{cases}\partial_t^2u^{(n)}-g^{ij}(u^{(n-1)})\partial_i\partial_j u^{(n)}=F(u^{(n-1)},\partial u^{(n-1)}) & \text{in }(0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ \left(u^{(n)},\partial_t u^{(n)}\right)=(u_0,u_1)\in H^{d+2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+1}(\mathbb{R}^d) & \text{on }\{t=0\}\times\mathbb{R}^d,\end{cases}\tag{6.3.3}$$

换言之，第n个逼近解由“以第$(n-1)$组解为系数的”线性波动方程归纳定义，这也是常微分方程里面用Picard迭代证明一阶ODE解的局部存在性的方法。

接下来需要证明两件事

- 逼近解序列$\{u^{(n)}\}$在某个函数空间内具有**关于n一致的上界**。
- 逼近解序列$\{u^{(n)}\}$是某个函数空间中的Cauchy列，这往往选取和上一条中用到的函数空间种类相同但阶数更低的函数空间）。

事实上，第二点的证明需要用到第一点的结论（从证明过程也可以看出为什么我们要先在低阶空间里面证明强收敛以构造出极限）；而只要第二点得证，从逼近方程(6.3.3)中取形式极限就得到了原方程(6.3.1).

逼近解序列的一致有界性. 这实际上就是推论6.1.2的翻版，我们对n归纳来证明结论。对正整数$n\geqslant 2$，我们定义能量泛函

$$E_n(t):=\left\|(u^{(n)}(t),\partial_t u^{(n)}(t))\right\|^2_{H^{d+2}\times H^{d+1}}=\left\|u^{(n)}(t)\right\|^2_{H^{d+2}(\mathbb{R}^d)}+\left\|\partial_t u^{(n)}(t)\right\|^2_{H^{d+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

然后证明如下结论

命题 6.3.2. *存在仅依赖初值和维数的时间$T>0$和常数$A>0$，使得$\sup_{t\in[0,T]} E_n(t)\leqslant A$.*

命题6.3.2的证明. 首先当$n=2$时，据逼近解构造$u^{(n-1)}=u^{(1)}=0$, 所以(6.3.3)是常系数、齐次线性波动方程，因此据线性方程能量估计直接可得：存在仅依赖初值的常数$A>0$和时间$T>0$ 使得$E_2(t)\leqslant A$. 接下来给定正整数$n\geqslant 3$，我们假设命题6.3.2对全体$\leqslant n-1$的正整数成立，接下来证明E_n也有一样的估计。

首先据Sobolev嵌入定理以及$d+2-[\frac{d+2}{2}]\geqslant 1+[\frac{d+1}{2}]$，存在常数$C>0$使得

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1+[\frac{d+1}{2}]}\|\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u^{(n-1)}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2+\sum_{|\alpha|\leqslant[\frac{d+1}{2}]}\|\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha\partial_t u^{(n-1)}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2\leqslant CE_{n-1}(t)\leqslant CA. \tag{6.3.4}$$

为控制$E_n(t)$，我们需要在方程(6.3.3)两边求导$\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha$, 其中$|\alpha|\leqslant d+1$. 对微分算子$T$和函数$f,g$, 我们记交换子为$[T,f]g=T(fg)-f(Tg)$. 这样方程求导后变为

$$\partial_t^2\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u^{(n)}-g^{ij}(u^{(n-1)})\partial_i\partial_j\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u^{(n)}=\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F(u^{(n-1)},\partial u^{(n-1)})-[\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha,g^{ij}(u^{(n-1)})]\partial_i\partial_j u^{(n)}. \tag{6.3.5}$$

下面分析如上波动方程的右端项。

交换子估计. $[\partial^\alpha,g^{ij}(u^{(n-1)})]\partial_i\partial_j u^{(n)}$ 是有限多项的线性组合，每一项都是 $u^{(n-1)}$ 或 $u^{(n)}$ 的导数的乘积，其中 $u^{(n-1)}$ 或 $u^{(n)}$ 被求导次数超过 $(|\alpha|+3)/2$ 的因子至多有一个。实际上这个事实就是硬拆括号然后用Sobolev嵌入定理算出来的，注意 $[\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha,g^{ij}(u^{(n-1)})]\partial_j\partial_k u^{(n)}$ 是形如下式的线性组合

$$\mathbf{a}(u^{(n-1)})\partial_{\boldsymbol{x}}^{\alpha_1}u^{(n-1)}\cdots\partial_{\boldsymbol{x}}^{\alpha_k}u^{(n-1)}\partial_{\boldsymbol{x}}^\gamma\partial_{\boldsymbol{x}}^2 u^{(n)},$$

其中 $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_k|+|\gamma|=|\alpha|$ 且 $|\gamma|\leqslant|\alpha|-1$.

- 若$|\gamma|\geqslant(|\alpha|-1)/2$，则 $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_k|\leqslant(|\alpha|+1)/2$. 这样对任意的 α_j,β_j都有 $|\alpha_j|\leqslant(|\alpha|+1)/2$.
- 若$|\gamma|<(|\alpha|-1)/2$，则$|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_k|\leqslant|\alpha|$. 这样在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 中至多只有一个指标的长度 $>|\alpha|/2$.

由于 $|\alpha|\leqslant d+1$，我们有

- 导数最多的那项取L^2后阶数不超过$d+2$, 因为$(|\alpha|+3)/2\leqslant 2+(d/2)<2+d$.
- 其它低阶项全取L^∞后再用Sobolev嵌入定理仍可以被H^{d+2}范数控制：$(|\alpha|+1)/2+(d+1)/2\leqslant d+\frac{3}{2}<d+2$.

这样由求导后的方程可得，存在依赖于A(但不依赖n)的常数$C_A>0$使得

$$|[\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha,g^{ij}(u^{(n-1)})]\partial_i\partial_j u^{(n)}|\leqslant C_A\left(\sum_{|\beta|\leqslant d+1}(|\partial^\beta\partial u^{(n-1)}|+|\partial^\beta\partial u^{(n)}|)+1\right).$$

因此据归纳假设以及上面讨论的导数阶数，我们有

$$\|[\partial^\alpha, g^{ij}(u^{(n-1)})]\partial_i\partial_j u^{(n)}\|_{L^2} \leqslant C_A(E_n(t)+1). \tag{6.3.6}$$

源项估计. 据求导法则，我们知道$\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F(u^{(n-1)}, \partial u^{(n-1)})$ 是有限多项的线性组合，每一项是 $u^{(n-1)}$ 的导数的乘积，其中超过$|\alpha|/2+1$阶导数落在 $u^{(n-1)}$ 上的因子至多有一个。实际上我们可以算出 $\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F(u^{(n-1)}, \partial u^{(n-1)})$ 是以下形式项的线性组合

$$a(u^{(n-1)}, \partial u^{(n-1)})\partial_{\boldsymbol{x}}^{\beta_1} u^{(n-1)} \cdots \partial_{\boldsymbol{x}}^{\beta_k} u^{(n-1)} \partial_{\boldsymbol{x}}^{\gamma_1} \boldsymbol{\partial} u^{(n-1)} \cdots \partial_{\boldsymbol{x}}^{\gamma_l} \boldsymbol{\partial} u^{(n-1)}$$

其中 $|\beta_1|+\cdots+|\beta_k|+|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_l| = |\alpha|$. 因此除至多一个多重指标外，其余均满足 $|\beta_j| \leqslant |\alpha|/2$ 和 $|\gamma_j| \leqslant |\alpha|/2$. 据此结合方程，我们得到

$$|\partial^\alpha F(u^{(n-1)}, \partial u^{(n-1)})| \leqslant C_A\left(\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+1} |\partial^\beta u^{(n-1)}| + 1\right) \leqslant C_A\left(\sum_{|\beta|\leqslant s+1} |\partial^\beta u^{(n-1)}| + 1\right),$$

据归纳假设 (6.3.4)，可得

$$\|\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F(u^{(n-1)}, \boldsymbol{\partial} u^{(n-1)})\|_{L^2} \leqslant C_A(E_{n-1}(t)+1) \leqslant C_A. \tag{6.3.7}$$

现在，据定理6.1.1以及归纳假设(6.3.4)(给出$\boldsymbol{\partial} g$的界)知

$$E_n(t) \leqslant C\left(E_n(0) + C_A\int_0^t (E_n(\tau)+1)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{C_0 t} \leqslant \left(C_1 + C_2\int_0^t E_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{C_0 t}.$$

其中上式出现的常数均只依赖初值(或者说A)和维数。据Grönwall不等式知，存在时间$T>0$，它只依赖初值(或者说A)和维数，使得 $\sup\limits_{t\in[0,T]} E_n(t) \leqslant A$. □

逼近解序列的收敛性. 接下来我们证明逼近解序列$\{u^{(n)}\}$在阶数略低一些的空间是强收敛的。为此我们考虑对第n组逼近解和第$(n-1)$组逼近解作差。记$[u]^{(n)} := u^{(n)} - u^{(n-1)}$，它满足方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 [u]^{(n)} - g^{ij}(u^{(n-1)})[u]^{(n)} = R_n & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ [u]^{(n)} = \partial_t [u]^{(n)} = 0 & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{6.3.8}$$

其中源项R_n定义为

$$R_n := [g^{ij}(u^{(n-1)}) - g^{ij}(u^{(n-2)})]\partial_i\partial_j u^{(n-1)} + F(u^{(n-1)}, \boldsymbol{\partial} u^{(n-1)}) - F(u^{(n-2)}, \boldsymbol{\partial} u^{(n-2)}).$$

据中值定理，我们可得

$$|R_n| \leqslant C\left(|[u]^{(n-1)}| + |[\partial u]|^{(n-1)}\right)(1 + |\partial u^{(n-1)}|).$$

我们现在定义$[u]^{(n)}$对应的能量泛函$[E]^{(n)}(t)$为

$$[E]^{(n)}(t) := \left\|u^{(n)}(t)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \left\|\partial_t u^{(n)}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

则据定理6.1.1知

$$\forall n \geqslant 3,\ [E]_n(t) \leqslant C\int_0^t [E]_{n-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

这样就存在不依赖n的时间$T' > 0$使得对任意$t \in [0, T']$有$[E]_n(t) \leqslant \frac{1}{2}[E]_{n-1}(t)$, 进而$\sum_n [E]_n(t) < \infty$. 这就说明$\{u^{(n)}\}$收敛到某个函数$u$, 其满足$u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^d))$, $\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$.

极限函数的正则性.　我们现在证明上面取到的极限u满足$u \in L^\infty([0, T], H^{d+2}) \cap C^{0,1}([0, T], H^{d+1})$. 事实上由 (6.3.4) 我们有

$$\|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{H^{d+2}}^2 + \|\partial_t u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{H^{d+1}}^2 \leqslant A.$$

所以对每个固定的 t，我们可以找到 $\{u^{(n-1)}\}$ 的子列（不妨仍记为 $\{u^{(n-1)}\}$）使得

$$u^{(n-1)}(t, \cdot) \xrightarrow{H^{d+2}(\mathbb{R}^d)} \tilde{u}, \quad \partial_t u^{(n-1)}(t, \cdot) \xrightarrow{H^{d+1}(\mathbb{R}^d)} \tilde{w}.$$

由于 $u^{(n-1)}(t, \cdot) \to u(t, \cdot)$ 在 H^1 中强收敛，且 $\partial_t u^{(n-1)}(t, \cdot) \to \partial_t u(t, \cdot)$ 在 L^2 中强收敛，我们必然有 $u(t, \cdot) = \tilde{u}$ 和 $\partial_t u(t, \cdot) = \tilde{w}$. 据范数的弱下半连续性知

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^{d+2}}^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{H^{d+2}}^2 \leqslant A, \quad \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{H^{d+1}}^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\partial_t u^{(n-1)}(t, \cdot)\|_{H^{d+1}}^2 \leqslant A.$$

这就表明$u \in L^\infty([0, T], H^{d+2}) \cap C^{0,1}([0, T], H^{d+1})$.

验证极限函数是解.　同理我们可以证明u满足和逼近解一样的能量估计，即

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^{d+2}(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{H^{d+1}(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant A.$$

现在可以证明逼近解$u^{(n)}$到极限函数u的逐点收敛了。据Sobolev插值不等式(习题5.1.3)知，对任意的$r\in[1,d+2)$，我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left\|(u^{(n)}-u,\partial_t u^{(n)}-\partial_t u)\right\|_{H^r\times H^{r-1}}\\ \leqslant\, & C\sup_{t\in[0,T]}\left\|(u^{(n)}-u,\partial_t u^{(n)}-\partial_t u)\right\|_{H^1\times L^2}^{\frac{d+2-r}{d+1}}\sup_{t\in[0,T]}\left\|(u^{(n)}-u,\partial_t u^{(n)}-\partial_t u)\right\|_{H^{d+2}\times H^{d+1}}^{\frac{r-1}{d+1}}\\ \leqslant\, & C_A\sup_{t\in[0,T]}\left\|(u^{(n)}-u,\partial_t u^{(n)}-\partial_t u)\right\|_{H^1\times L^2}^{\frac{d+2-r}{d+1}}\to 0.\end{aligned}$$

再用Sobolev嵌入定理，我们至少可以得到$u^{(n)}\xrightarrow{C^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)}u$, 这就表明极限函数$u$确实是方程的逐点解。

解的唯一性和对初值的连续依赖性. 我们在此只证明唯一性，解对初值的连续依赖性可以类似地证明，此处略去。设 u 和 $\tilde u$ 是两个解。令 $[u]:=u-\tilde u$，则 v 满足

$$\partial_t^2[u]-g^{ij}(u)\partial_i\partial_j[u]=R,\quad [u](0,\cdot)=0,\quad \partial_t[u](0,\cdot)=0,$$

其中

$$R:=[F(u,\partial u)-F(\tilde u,\partial\tilde u)]+[g^{ij}(u)-g^{ij}(\tilde u)]\partial_i\partial_j\tilde u.$$

显然$|R|\leqslant C(|[u]|+|\partial[u]|)$, 其中 C 依赖于 $|\partial\tilde u|$ 的界以及 g^{ij} 和 F 的导数的界。现在利用定理6.1.2，我们得到

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha[u](t,\cdot)\|_{L^2}\leqslant\int_0^t\|R(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^t\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha[u](\tau,\cdot)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

由 Grönwall 不等式，$\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha[u]\|_{L^2}=0$. 因此 $[u]=0$，即 $u=\tilde u$. □

注记 6.3.2. 事实上，定理6.3.1中对初值的正则性要求可以大幅下降，但是需要更复杂的调和分析工具。此时的临界正则性则是 $(u_0,u_1)\in H^{\frac{d+1}{2}+}\times H^{\frac{d-1}{2}+}$ $(d\geqslant 3)$ 和 $(u_0,u_1)\in H^{\frac{7}{4}+}\times H^{\frac{3}{4}+}$ $(d=2)$, 低于该正则性可以对一些特殊形式的拟线性波动方程构造出不适定的反例(破坏解对初值的连续依赖性，即小初值瞬间演化出大解)，可参见

- Hart F. Smith, Daniel Tataru: Sharp local well-posedness results for the nonlinear wave equation. Ann. Math., **162**(1), 291–366, 2005.
- Hans Lindblad: Counterexample to local existence for semilinear wave equations. Amer. J. Math., **118**(1), 1–16, 1996.

特别地，后者构造的反例实际上是一个仅依赖t和x_1变量的解，后来人们发现这个不适定的本质实际上是产生了瞬时激波(见下方第一个参考文献)。该方法近年被用于构造可压缩流体方程（同样

具有拟线性波动方程的结构）的低正则性瞬时激波反例，以寻求可压缩流体方程的低正则性解。

- Ross Granowski. Asymptotic Stable Ill-posedness of Geometric Quasilinear Wave Equations. PhD Thesis, Princeton University, 2018.
- Xinliang An, Haoyang Chen, Silu Yin. Low regularity ill-posedness for elastic waves driven by shock formation, Amer. J, Math. **145**(4), 1111–1181, 2023.
- Xinliang An, Haoyang Chen, Silu Yin. Low regularity ill-posedness and shock formation for 3D ideal compressible MHD, arXiv:2110.10647, 82 pages, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
- Xinliang An, Haoyang Chen, Silu Yin. The Cauchy problems for the 2D compressible Euler equations and ideal MHD system are ill-posed in $H^{\frac{7}{4}}(R^2)$, arXiv:2206.14003, 35 pages, to appear in Commun. Math. Phys.

同样地，近年也有将可压缩流体方程的局部解做到低正则性的结果。

- Marcelo Disconzi, Chenyun Luo, Giusy Mazzone, Jared Speck. Rough sound waves in 3D compressible Euler flow with vorticity. Selecta Mathematica, **28**(2), 41, 2022. 153 pages.
- Qian Wang. Rough solutions of the 3-D compressible Euler equations. Ann. Math., **195**(2), 509–654, 2022.

需注意当(u_0,u_1)的正则性低于$H^{\frac{d+1}{2}+}\times H^{\frac{d-1}{2}+}$时，并非所有的拟线性波动方程都不适定，例如$d=3$时$\Box u=u^2$的局部解可以对初值$(u_0,u_1)\in H^{0+\varepsilon}\times H^{-1+\varepsilon}$存在。参见

- Hans Lindblad: A sharp counterexample to local existence of low-regularity solutions to nonlinear wave equations. Duke Math. J., **72**(2), 503–539, 1993.

在定理6.3.1中，我们已经构造了存在于$L^\infty(0,T;H^{d+2}(\mathbb{R}^d))\times L^\infty(0,T;H^{d+1}(\mathbb{R}^d))$的唯一解。但在物理上，人们更希望看到光滑解的存在性，因此我们希望证明一个“保持正则性”的结论，即：只要我们证明了$H^{d+2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+1}(\mathbb{R}^d)$初值能产生$L^\infty(0,T;H^{d+2}(\mathbb{R}^d))\times L^\infty(0,T;H^{d+1}(\mathbb{R}^d))$的局部解，那么具有更高阶Sobolev正则性的初值对应的解也能保持它的正则性。

定理 6.3.3 (正则性保持). 给定方程(6.3.1)的初值$(u_0,u_1)\in H^{d+2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+1}(\mathbb{R}^d)$，定义**解的极大存在时间 (maximal time of existence)** T_*为

$$T_*:=\sup\{T>0:(6.3.1)\text{存在唯一解}u\in L^\infty(0,T;H^{d+2}(\mathbb{R}^d))\times L^\infty(0,T;H^{d+1}(\mathbb{R}^d))\}>0.$$

(1) 设$m>d+2$，若$(u_0,u_1)\in H^m(\mathbb{R}^d)\times H^{m-1}(\mathbb{R}^d)$，则对任意$T<T_*$，方程(6.3.1)的解属于$L^\infty(0,T;H^m(\mathbb{R}^d))\times L^\infty(0,T;H^{m-1}(\mathbb{R}^d))$.

(2) 若$(u_0,u_1)\in\cap_{m=1}^\infty H^m(\mathbb{R}^d)\times H^{m-1}(\mathbb{R}^d)$，则方程的解在$[0,T_*)\times\mathbb{R}^d$中是光滑的。

该定理的证明与定理6.1.2类似，我们在此略去。

6.3.2 拟线性波动方程的若干实例和爆破准则

尽管我们已经构造了拟线性波动方程(6.3.1)的局部解，但对具有不同非线性结构的波动方程，解的存在时长可以大相径庭。本节我们首先介绍两个经典例子，然后给出拟线性波动方程(6.3.1)解的爆破判定准则。

我们首先来看一个可以显式计算的，且具有小初值整体解的例子。

例 6.3.3 (具有零条件的拟线性波动方程). *考虑如下形式的非线性波动方程，其中$\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.*

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta u=(\partial_t u)^2-|\nabla u|^2 & t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}),\partial_t u(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon\psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{6.3.9}$$

我们证明当$0<\varepsilon\ll 1$时，方程(6.3.9)的光滑解可以演化到$t=\infty$，即小初值整体解。

这个例子摘自Klainerman的经典结果

- Sergiu Klainerman. Global existence for nonlinear wave equations, Commun. Pure Appl. Math. **33**(1), 43–101, 1980.

然而该结论的证明实际上是古典偏微分方程的内容。

证明. 令$v(t,\boldsymbol{x})=1-e^{-u(t,\boldsymbol{x})}$，直接计算可得$\partial_a v=e^{-u}\partial_a u,\quad \partial_a^2 v=e^{-u}(\partial_a^2 u-(\partial_a u)^2),\ a=t,1,2,3.$ 因此有$\partial_t^2 v-\Delta v=e^{-u}(\partial_t^2 u-(\partial_t u)^2-\Delta u+|\nabla u|^2)=0.$

现在$v(t,\boldsymbol{x})$满足标准的三维波动方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 v-\Delta v=0 & t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\\ v(0,\boldsymbol{x})=1-e^{-\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x})},\partial_t v(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon e^{-\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{6.3.10}$$

据Kirchhoff公式得到的$v(t,\boldsymbol{x})$是整体存在的光滑解

$$v(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{x},t)}v(0,\boldsymbol{y})+\nabla v(0,\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+t\partial_t v(0,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}.$$

现在我们将u从$u=-\log(1-v)$还原出来，这就要求$v(t,\boldsymbol{x})<1$对任意 $(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3$都成立。我们接下来证明$|v|<1$恒成立。据波动方程的衰减估计(或Kirchhoff公式本身)得知，

$$\begin{aligned}\forall t>0,\quad \max_{\mathbb{R}^3}|v(t,\cdot)|&\leqslant C(\max_{\mathbb{R}^3}|v(0,\cdot)|+\max_{\mathbb{R}^3}|\nabla v(0,\cdot)|+\max_{\mathbb{R}^3}|\partial_t v(0,\cdot)|)(1+t)^{-1}\\ &\leqslant C\varepsilon(\max_{\mathbb{R}^3}|\varphi|+\max_{\mathbb{R}^3}|\nabla\varphi|+\max_{\mathbb{R}^3}|\psi|)(1+t)^{-1}.\end{aligned}$$

注意这里用的衰减因子是$(1+t)^{-1}$而不是t^{-1}. 这就证明了当$\varepsilon>0$充分小时，必有$|v(t,\boldsymbol{x})|<1$对任意$t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$都成立。因此对任意 $t>0$, 我们可以从 $u(t,\boldsymbol{x})=-\log(1-v(t,\boldsymbol{x}))$ 还原出光滑的整

体解 $u(t,\boldsymbol{x})$. □

注记 6.3.3. 这里我们选取$d=3$是因为具有小初值的拟线性波动方程(6.3.1)在$d\geqslant 4$时才有整体解，而这里给出了一个三维情况也具有初值整体解的例子。该非线性项的形式的“零条件”(null condition)的一个特殊情况。所谓“零条件”是指方程$\partial_t^2u-\Delta u=F(u,\partial u)$的源项具有形式$F(u,\partial u)=q^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\partial_\beta u\ (0\leqslant\alpha,\beta\leqslant d)$，其中$q^{\alpha\beta}$满足

$$\text{只要 } m^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta=0\ (\text{即}\boldsymbol{\xi}=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_d)\text{是类光向量(null vector)}),\ \text{就有}q^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta=0.$$

一般情况下拟线性波动方程的小初值长时间解需要用 Christodoulou–Klainerman 开发的向量场方法来解决，即利用特殊的向量场来替换Sobolev嵌入不等式 $\|u\|_{L^\infty}\leqslant C\|u\|_{H^s}\ (s>\frac{d}{2})$ 中的s阶普通导数，这样可以将该不等式中的常数C替换为关于$t,|\boldsymbol{x}|$的衰减因子，进而可以看出衰减最差的方向出现在垂直于光锥的方向，衰减率为$O((1+t)^{-\frac{d-1}{2}})$. 当$d\leqslant 3$时它关于$t$不是可积的，因此无法求得体解。而具有“零条件”时，这个“最差的方向”里面的一个坏项被消去，进而方程具有关于t变量可积的衰减速率$O((1+t)^{-\frac{d+1}{2}})$.

需注意，上述结论必须要求初值的小性，也就是$\varepsilon\ll 1$是不可缺少的。接下来我们构造该方程的大初值有限时间爆破。

例 6.3.4 (大初值有限时间爆破的例子). 考虑如下形式的非线性波动方程.

$$\begin{cases}\partial_t^2u-\Delta u=(\partial_t u)^2-|\nabla u|^2 & t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\\ u(0,\boldsymbol{x})=0,\partial_t u(0,\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{6.3.11}$$

我们证明：对任意$\varepsilon>0$，必存在初值$\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$使得方程(6.3.11)的解在$t=\varepsilon$时发生爆破。

证明. 首先如果我们考虑与空间变量无关的解，那么就变成了求解常微分方程$u''(t)=(u'(t))^2$. 若初值$\psi=\varepsilon^{-1}$, 则方程的解为$u(t)=-\ln(1-\varepsilon^{-1}t)$, 进而满足要求。但我们注意到这个初值并非紧支，所以我们考虑作截断。

固定$R>\varepsilon$, 选取截断函数$\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, 使得$\chi$在$B(\mathbf{0},R)$中恒为1，并令$\psi(\boldsymbol{x})=\varepsilon^{-1}\chi(\boldsymbol{x})$.

断言. 该方程对应的解必定在$t=\varepsilon$之前发生爆破。

断言的证明需要用到有限传播速度的结论

命题 6.3.4 (非线性波动方程的有限传播速度). 考虑波动方程$\partial_t^2u-\Delta u=F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2u)$, $(t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$. 其中 $F(t,\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{p},\boldsymbol{A}):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1+d}\times\mathbb{R}^{(1+d)^2}\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，且对任意的 $t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}$ 都有 $F(t,\boldsymbol{x},0,\mathbf{0},\boldsymbol{A})=0$ 成立。给定$(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, 定义过往光锥

$$C_{t_0,\boldsymbol{x}_0}:=\{(t,\boldsymbol{x}):0\leqslant t\leqslant t_0\ \text{且}\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant t_0-t\}.$$

如果在 $B(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 上恒有 $u=\partial_t u=0$, 则$u\equiv 0$在 $C_{t_0,\boldsymbol{x}_0}$ 中恒成立。

若断言成立，那么我们考虑过往光锥$C_{0,\mathbf{0}}$的一个“锥台”

$$\Omega := \{(t,\boldsymbol{x}) : 0 \leqslant t < \varepsilon,\ t + |\boldsymbol{x}| \leqslant R\}.$$

那么u在Ω内的取值完全被这个锥台底部的取值 $u|_{\{t=0\}\times B(\mathbf{0},R)}$ 确定，也就是初值$\psi|_{B(\mathbf{0},R)}$. 这就说明在Ω内必有 $u(t,\boldsymbol{x}) = -\ln(1-\varepsilon^{-1}t)$ (因为它已经是解，而它又是Ω中唯一的解), 而这个解在$t=\varepsilon$时发生爆破。 □

思考. 如果我们把这个反例中的ε换成$1/\varepsilon$，会发现解仍然在$t = 1/\varepsilon$时刻爆破，这与例6.3.3的小初值整体解矛盾吗？

思考. 如何利用强惠更斯原理给出例6.3.3在$\varepsilon = 1$时的大初值有限时间爆破的简化证明？

我们现在来证明命题6.3.4，它的证明思路其实与线性方程的定理6.2.2类似。

命题6.3.4的证明. 对 $0 \leqslant t \leqslant t_0$，考虑能量函数

$$e(t) := \int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (u^2 + |u_t(t,\boldsymbol{x})|^2 + |\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对t求导，利用移动区域求导公式，分部积分后代入波动方程有

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (uu_t + u_t u_{tt} + \nabla u\cdot\nabla u_t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (u^2 + |u_t|^2 + |\nabla u|^2)\,\mathrm{d}S \\ &= 2\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} u_t(u + F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\quad + 2\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} u_t\frac{\partial u}{\partial N}\,\mathrm{d}S - \int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (u^2 + |u_t|^2 + |\nabla u|^2)\,\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

其中 N 是 $\partial B(\boldsymbol{x}_0, t_0 - t)$ 的单位外法向量。利用Cauchy-Schwarz不等式有 $2|u_t\nabla u\cdot N| \leqslant 2|u_t||\nabla u| \leqslant |u_t|^2 + |\nabla u|^2$. 代入后可得

$$e'(t) \leqslant 2\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} u_t(u + F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $F(t,\boldsymbol{x},0,0,\partial^2 u) = 0$，据微积分基本定理我们有

$$F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u) = F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u) - F(t,\boldsymbol{x},0,0,\partial^2 u) = \int_0^1 \partial_s F(t,\boldsymbol{x},su,s\partial u,\partial^2 u)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \Big(\partial_z F(t,\boldsymbol{x},su,s\partial u,\partial^2 u)u + \nabla_{\boldsymbol{p}} F(t,\boldsymbol{x},su,s\partial u,\partial^2 u)\cdot\partial u\Big)\,\mathrm{d}s.$$

这样就得到

$$|F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u)| \leqslant |u| \int_0^1 |\partial_z F(t,\boldsymbol{x},su,s\partial u,\partial^2 u)|\,\mathrm{d}s + |\partial u| \int_0^1 \left|\nabla_{\boldsymbol{p}} F\right|\,\mathrm{d}s.$$

令 $C=\max\{C_0,C_1\}$，其中

$$C_0 := \max_{(t,\boldsymbol{x})\in C_{t_0,\boldsymbol{x}_0}} \int_0^1 |\partial_z F(t,\boldsymbol{x},su,s\partial u,\partial^2 u)|\,\mathrm{d}s, \quad C_1 := \max_{(t,\boldsymbol{x})\in C_{t_0,\boldsymbol{x}_0}} \int_0^1 \left|\nabla_{\boldsymbol{p}} F\right|\,\mathrm{d}s.$$

那么$|F(t,\boldsymbol{x},u,\partial u,\partial^2 u)| \leqslant C(|u|+|\partial u|)$. 进而

$$e'(t) \leqslant 2(1+C)\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} |u_t|(|u|+|\partial u|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2(1+C)E(t).$$

据条件知$e(0)=0$，而非负函数$e(t)$关于t单调递减，所以只能$e(t)\equiv 0$, 因此在 $C_{t_0,\boldsymbol{x}_0}$ 中 $u\equiv 0$. □

例 6.3.5 (*Fritz John的小初值有限时间爆破反例). 考虑如下形式的非线性波动方程.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 & t>0, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, \\ u(0,\boldsymbol{x}) = \varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}), \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = \varepsilon\psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{6.3.12}$$

我们下面证明：当$\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$适当选取时，$0<\varepsilon\ll 1$，方程的解仍然会发生有限时间爆破，且解的存在时长至多为 $O(e^{1/\varepsilon})$ 尺度。

这个例子摘自Fritz John的经典结果

- Fritz John. Blow-up for quasi-linear wave equations in three-space dimensions. Commun. Pure Appl. Math., **34**(1), 29–51, 1981.

原始的证明实际上是对$\square u=(\partial_t u)^2$做的，但是这里我们给出的例子性质更差。原始证明很长也很复杂，我们在此先以径向解为例作初步计算。

径向解的小初值有限时间爆破构造思路. 若u是径向解，我们记它为$u(t,r)$, 其中$r=|\boldsymbol{x}|$. 令$v=ru$, 则直接计算可得

$$\partial_t^2 u - \Delta u = \frac{1}{r}(\partial_t^2-\partial_r^2)v \Rightarrow \partial_t^2 v - \partial_r^2 v = \frac{1}{r}(\partial_t v)^2 + \frac{1}{r}\underbrace{\left(\partial_r v - \frac{v}{r}\right)^2}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{1}{r}(\partial_t v)^2.$$

我们观察到：即使 v 初始很小，源项 $\frac{1}{r}v_t^2$ 始终为正，且会不断累积。接下来我们希望构造出 $Z'\geqslant CZ^2$ 这样的关系式，以构成 Riccati 型的爆破。为此，我们需要沿着特征线对该不等式积分。

第一步：引进特征方向导数． 沿光线向外 (Outgoing): $L = \partial_t + \partial_r$沿光线向内 (Incoming): $\underline{L} = \partial_t - \partial_r$ 此时一维波动算子 $\partial_t^2 - \partial_r^2 = L\underline{L}$. 这样就得到

$$L(\underline{L}v) \geqslant \frac{1}{r}(\partial_t v)^2.$$

第二步：沿着特征线积分． 令 $Z = \underline{L}v = \partial_t v - \partial_r v$. 这个量 Z 具有明确的几何意义：它对应于 $\underline{L}v$，即波形沿穿过光锥方向的变化率。这实际上是波动方程中衰减最慢的方向，也是最容易导致爆破的量。将 Z 代入不等式得 $LZ \geqslant \frac{1}{r}(\partial_t v)^2$. 今任取 $s_0 \in \mathbb{R}$, 沿着特征线 $t - r = s_0$积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t, r(t)) = (\partial_t + r'(t)\partial_r)Z = (\partial_t + \partial_r)Z = LZ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{1}{r(t)}(\partial_t v)^2.$$

又因为 $Lv = \partial_t v + \partial_t r$, 所以我们实际上得到

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{1}{4r(t)}(Z + Lv)^2.$$

第三步：选取合适的初值以构造“正性”． 如果我们能得到形如 $(Z + Lv)^2 \geqslant Z^2$ 这样的不等式，那么离我们的目标就很近了。此时注意：我们已经有 $\underline{L}W \geqslant 0$, 其中 $W := Lv = \partial_t v + \partial_t r$，这表明我们沿着 $t + r = C$ 这样的特征线积分时（即t增加，r减小， W 的取值是单调不减的。既然 W 沿着它的传播路径（向光锥内部）是单调增加的，那么 W 在任意时刻的值，一定大于等于它在“出发点”的值。这些向内光线的“出发点”要么是初始时刻 $t = 0$，要么是中心轴线 $r = 0$.

- **从 $t = 0$ 出发的光线.** $W(0, \boldsymbol{x}) = \partial_t v(0, \boldsymbol{x}) + \partial_r v(0, \boldsymbol{x})$ 完全由我们构造的初值决定，此时只要我们选取初值使得
$$\psi(r) + \varphi'(r) + \frac{1}{r}\varphi(r) \geqslant 0,$$
那么 W 在初始时刻就是非负的。据单调性，它之后会一直保持非负。
- **从 $r = 0$ 出来的光线.** 由于 $v(t, r) = ru(t, r)$，在 $r = 0$ 处我们有 $v(t, 0) = 0$. 这意味着沿 $r = 0$ 轴，$\partial_t v = 0$. 因此在原点附近有 $W|_{r=0} = \partial_t v + \partial_r v = 0 + \partial_r v = u(t, 0)$. 对于我们关心的爆破区域（通常在光锥 $r \approx t \gg 1$ 附近且远离原点），我们可以通过选取支集远离原点的初值来避开这个问题。

现在又因为$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} \geqslant 0$, 所以我们可选取$Z(0, r(0))$非负使得$Z$永远非负，这样的话我们就得到不等式

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{1}{4r(t)}(Z + Lv)^2 \geqslant \frac{1}{4r(t)}Z^2.$$

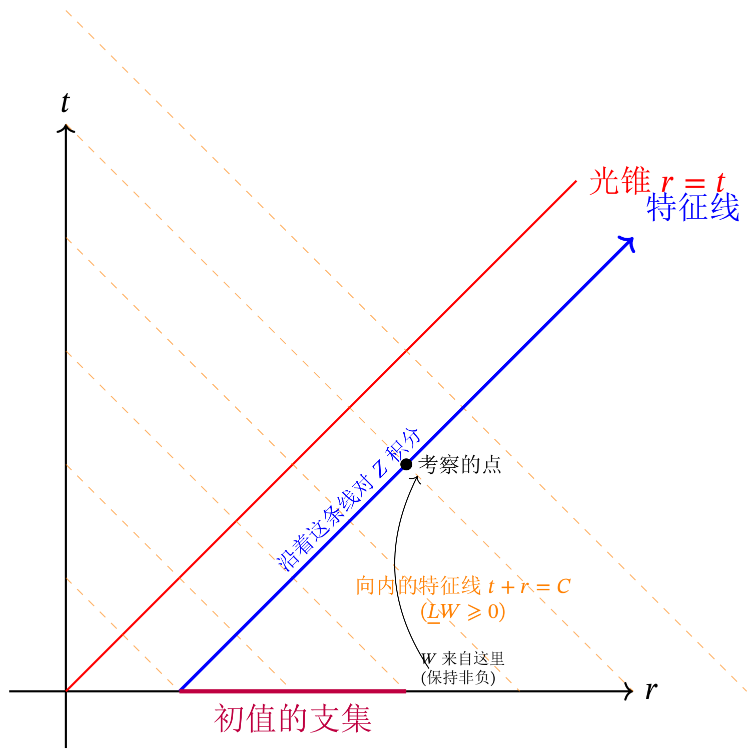


图 6.1: **特征线网.** 我们沿着蓝色的射线对 Z 积分以构造爆破，非负函数 W 通过橘色的虚线特征线“汇入”光锥。（不过黑白打印好像看不出颜色，难蚌……）

第四步：在光锥附近构造Riccati型爆破. 对大时间 t，沿特征线有 $r(t)=t-s_0\approx t\gg 1$. 不等式简化为$Z'(t)\geqslant \frac{1}{4t}Z^2(t)$. 这样直接计算可得

$$Z(t)\geqslant \frac{1}{\frac{1}{Z(t_0)}-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}.$$

如果我们假设初值$Z(t_0)=\varepsilon$, 那么可以解得 t 不能超过 $T_\varepsilon=e^{4/\varepsilon}$. □

***一般情况的粗略构造.** 若去掉径向解的假设，我们可以拟定一个解的“ansatz”

$$u(t,\boldsymbol{x})\sim\frac{\varepsilon}{r}U(s,\tau,\omega), \tag{6.3.13}$$

其中$s=t-r$, $\tau=\varepsilon\ln t$, 而$\omega\in\mathbb{S}^2$是角变量。此时我们有

$$\square\approx -\frac{1}{r}(\partial_t+\partial_r)(\partial_t-\partial_r),\ \ \underline{L}=\partial_t-\partial_r\approx 2\partial_s,\ \ L=\partial_t+\partial_r\approx\frac{\varepsilon}{r}\partial_r,$$

进而

$$\square u\approx\frac{\varepsilon}{r}\left(\frac{\varepsilon}{r}\partial_\tau\right)(2\partial_s U)=\frac{2\varepsilon^2}{r^2}\partial_\tau\partial_s U. \tag{6.3.14}$$

再算非线性项，得到

$$(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \approx \frac{\varepsilon^2}{r^2}(\partial_s U)^2 + \frac{\varepsilon^2}{r^2}(\partial_s U)^2 = \frac{2\varepsilon^2}{r^2}(\partial_s U)^2. \tag{6.3.15}$$

现在令 ε^2/r^2 的系数相等，得到 $-2\partial_\tau\partial_s U = 2(\partial_s U)^2 \Rightarrow \partial_\tau(\partial_s U) + (\partial_s U)^2 = 0$. 令 $H(s,\tau) = \partial_s U$ 为辐射场的梯度。我们再次得到 **Riccati 方程**

$$\partial_\tau H = H^2. \tag{6.3.16}$$

进而导出$\underline{L}U$的有限时间爆破。 □

注记 6.3.4. 从计算非线性项的过程我们也可以看出，若方程的源项改为例6.3.3的情况，则它在该 ansatz 下会约等于零，这也是我们称之为“零条件”的原因之一。

注记 6.3.5. 我们在此解释一下为什么这样拟定方程解的形式。

- $1/r$的衰减速率是由能量守恒得来的，这个通过积分的极坐标表示即可算出来。
- 为什么要关注 $s = t - r$？由惠更斯原理，波主要集中在光锥附近，远离原点才意味着 $r \approx t \to \infty$. 换言之，我们寻找“远离原点”的解，是因为只有那里才有解，而变量 s 描述了波包相对于光锥的局部形状。
- 为什么要引入 $\tau = \varepsilon \ln t$？这是问题的核心。我们注意到非线性项的量级为 $(\partial u)^2 \sim (\varepsilon/r)^2 \approx \varepsilon^2/t^2$（沿着 $r \approx t$），所以粗略地看我们有 $A'(t) = CA^2$ 这样方程，如果把 $A \sim 1/t$ 代入就会发现 $\int_1^T \frac{1}{t}dt = \ln T$.

注记 6.3.6 (*波动方程的“光锥几何”). 方向导数 $\underline{L} = \partial_t - \partial_r$ 和 $L = \partial_t + \partial_r$ 非常重要，前者垂直于光锥，衡量了波形轮廓随 $r - t$ 的快速变化；后者平行于光锥，衡量了波沿光线传播时的慢演化。 我们知道d维线性波动方程衰减速率是 $O(t^{-(d-1)/2})$，而这个速率就出现在 $\underline{L}$ 方向，在其他方

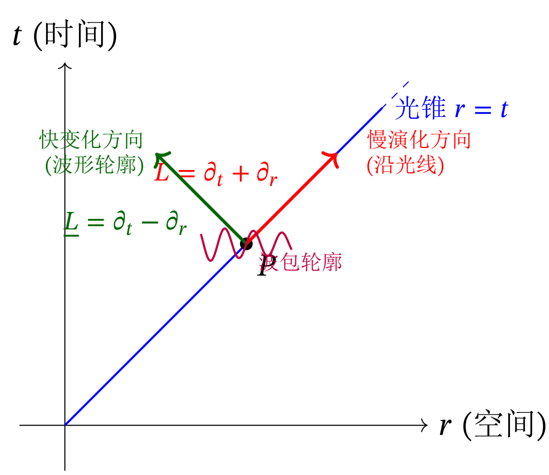


图 6.2: **传播几何示意图。** 解集中在光锥附近。算子 $\underline{L}$ 捕捉振荡的波形，而 L 捕捉长时间的非线性累积效应。

向（例如 L 方向）的衰减率实为 $O(t^{-(d+1)/2})$. 出现这种差别的原因其实仍可以追溯到它们的定义，以三维线性波的主要部分形式为 $u \approx \frac{1}{r}F(r-t)$ 为例，我们计算如下

$$LF(r-t)=0,\ \underline{L}F(r-t)=-2F';\quad L(r^{-1}F(r-t))\sim O(r^{-2}),\ \underline{L}(r^{-1}F(r-t))\sim O(r^{-1}).$$

可以看到沿着光锥方向（$r=t$）的波形是不变的。如果 $Lu \neq 0$，那就意味着发生了非线性的修正。因此 L 衡量的是偏离线性行波的程度，也就是长时间的累积效应。但算子 $\underline{L}$ 直接提取出了波形函数的导数 F'。这说明 $\underline{L}$ 能够看到波的所有细节、频率和振荡。如果波很陡峭，$|\underline{L}u|$ 就会很大。

事实上，我们可以据此将 $\{L,\underline{L}\}$ 扩充为Minkowski时空 $(\mathbb{R}^{1+3},\mathbf{m})$ 切空间的一组基 $\{L,\underline{L},e_A,e_B\}$，后两者为角向导数，以作为光锥上一点处的“标架”，它被称作“零标架”(null frame)，这也是现代PDE对拟线性波动方程研究的核心工具之一，**因为我们可以将 $\{\partial_t,\partial_1,\partial_2,\partial_3\}$ 这组“不够适配光锥形状”的标架换成“适配光锥形状的”零标架。**一旦将普通导数换成这些特殊向量场后，拟线性波动方程中的二次非线性项 $Q(\partial u,\partial u)$ 必然由以下几种组合构成：

$$Q(\partial u,\partial u)=\underbrace{C_1(\underline{L}u)(\underline{L}u)}_{\text{坏}\times\text{坏}}+\underbrace{C_2(\underline{L}u)(Lu)}_{\text{坏}\times\text{好}}+\underbrace{C_3(Lu)(Lu)}_{\text{好}\times\text{好}}+\cdots$$

由例 6.3.5 可见，如果 C_1 非零，那么就会累积出解的爆破。因此，为了做出三维拟线性波动方程的小初值整体解，人们就引入了所谓的“零条件”，可以证明 $Q(\partial u,\partial u)$ 满足零条件当且仅当它的 $(\underline{L}u)^2$ 项的系数为零。而在例 6.3.3 给出的带零条件的拟线性波动方程中，非线性项恰好满足这个条件，是为数不多可以完全显式计算的实例。更深刻的讨论可参见如下专著

- Jared Speck. Shock Formation in Small-Data Solutions to 3D Quasilinear Wave Equations. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 214, AMS.

注记 6.3.7 (*波动方程的爆破机制). 对拟线性波动方程来说，它的爆破可分为两类：**解析爆破 (analytic blow-up)**和**几何爆破 (geometric blow-up)**，前者有时候又称ODE爆破。它们的严格定义很复杂，可见如下参考书第一章

- Serge Alinhac. Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser.

大致来说，**解析爆破的本质是由非线性源项积累导致的能量爆破，这种情况下解本身必定爆破**，例如 Riccati 方程 $y'=y^2$ 给出的爆破就是如此（所以我们又称之为ODE爆破）。对波动方程来说，发生解析爆破时，特征线并不发生聚集。例如本节的例6.3.5就是解析爆破的例子。

注记 6.3.8 (*几何爆破). 几何爆破与解析爆破的机制完全不同：幅度 U 未必趋于无穷，而是其导数 $\partial_s U$（即斜率）趋于无穷，这**对应于物理上特征线汇聚导致激波 (Shock Wave)形成**。例如 Burgers 方程的爆破就服从这个机制，而刻画特征线/曲面的“汇聚程度”则需要引进“叶层密度倒数”(inverse foliation density)这个量。

具体来说，对拟线性波动方程 $\Box_{g(u,\partial u)}u = F(u,\partial u)$，我们考虑程函方程 (eikonal equation) $g^{\alpha\beta}(u)\partial_\alpha v\partial_\beta v = 0$的解$v$，即$\nabla v$是关于度量 $\boldsymbol{g}$ 的类光向量 (null vector)，那么 $C_v := \{v(t,\boldsymbol{x}) = \text{const}\}$ 这个水平集就是时空中的特征超曲面 (characteristic hypersurfaces)，也就是我们所谓的“光锥”，它们实际上由零测地线 (null geodesics) 构成。接下来我们定义从物理坐标 (t,x^1,x^2,x^3) 到程函坐标 $(\tau,v,\vartheta^1,\vartheta^2)$ 的微分同胚，其中$\tau = t$为时间坐标、v即为如上程函方程的解，ϑ^i即为角坐标，这是为了固定特征线在波面上的相对位置。事实上，对向量场 $L^\alpha = -g^{\alpha\beta}\partial_\beta v$，则角坐标 ϑ^A 定义为在球面上使得 L 成为输运算子的坐标：$L(\vartheta^A) = 0$，$A = 1,2$. 这意味着角坐标是沿着光线（特征线）被传输的。

在程函坐标下，算子$L = \partial_\tau$，说明在几何坐标系中，“光”是沿直线 τ 传播的，所有的几何弯曲都被隐藏到了坐标变换 Φ 的雅可比矩阵中。本质上这就是把弯曲的光锥进行“拉直”的过程。现在我们需要一个量来描述物理空间中特征曲面 C_v 和 C_{v+dv} 之间的“距离”或“密度”。在物理空间中，程函函数的梯度 ∇v 垂直于特征面。我们定义 Inverse Foliation Density μ 为梯度模长的倒数（或相关的共形因子）

$$\mu := \frac{1}{|\nabla_g v|} = \frac{1}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\partial_\alpha v\partial_\beta v}}.$$

更严格且通用的定义是利用坐标变换的体积元 (Volume Form) 或雅可比行列式。直观来看，μ 衡量了特征线在物理空间中的发散程度。若 μ 变大，说明特征线散开（稀疏）；若 $\mu \to 0$，说明特征线在物理空间中聚拢。而物理导数与几何导数的关系为 $\partial_{\boldsymbol{x}}u \sim \mu^{-1}\partial_v u$.

此时，通过展开$\Box_{\boldsymbol{g}}u$，并将程函方程的解归一化，我们会得到 $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau} \approx -C$，这说明特征曲面上存在某点 $(\tau,v,\vartheta) \to (T^*,v^*,\vartheta^*)$ 使得**叶层密度倒数趋于零**：$\lim\limits_{\tau\to T^*}\mu(\tau,v^*,\vartheta^*) = 0$. 回到物理时空则对应解的梯度范数发散：$\lim\limits_{t\to T^*}\|\partial u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \infty$且这种爆破是由因子 μ^{-1} 导致的。此时集合 $\Sigma = \{(t,\boldsymbol{x}) : \mu(t,\boldsymbol{x}) = 0\}$ 构成了时空中的奇异曲面，**特征线在此曲面上发生交汇，从物理坐标到程函坐标的坐标变换不再是单射（Jacobian退化）。这是光锥几何自身的“崩塌”，因此被称作“几何爆破”。**

类似的机制已被广泛用于构造可压缩流体方程的激波解，具体可参加如下专著或论文。当然如果你真能读通 Christodoulou 的著作，那你很难不是发表伟大作品的集大成者。

- Demetrios Christodoulou. The formation of shocks in 3-dimensional fluids, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.
- Demetrios Christodoulou and Shuang Miao, Compressible flow and Euler's equations, Surveys of Modern Mathematics, Vol. 9, International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2014.
- Jonathan Luk, Jared Speck. Shock formation in solutions to the 2D compressible Euler equations in the presence of non-zero vorticity, Invent. Math., **214**(1), 1–169, 2018.

看完两个例子之后，我们发现非线性项的毫厘之差会对方程解的存在时长带来质的改变。于是自然会问，对一般的拟线性波动方程(6.3.1)，可否找到波动方程的爆破（或延拓）判定准则？这里我们列出如下三条。

定理 6.3.5 (爆破准则 (breakdown criteria)). 给定方程(6.3.1)的初值$(u_0,u_1)\in H^{d+2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+1}(\mathbb{R}^d)$, 设$T_*$是解的极大存在时间。若$T_*<\infty$, 即方程的解发生有限时间爆破，则如下三条成立

$$\liminf_{t\to T_*}\|(u,\partial_t u)(t,\cdot)\|_{H^{d+2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+1}(\mathbb{R}^d)}=\infty. \tag{6.3.17}$$

$$\limsup_{t\to T_*}\left[\sum_{|\alpha|\leqslant\lfloor\frac{d+2}{2}\rfloor}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+\sum_{|\alpha|\leqslant\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}\|\partial_t\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right]=\infty. \tag{6.3.18}$$

$$\limsup_{t\to T_*}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=\infty. \tag{6.3.19}$$

注记 6.3.9. 本定理可将初值正则性换成$H^s\times H^{s-1}$ $(\forall s\geqslant d+2)$, 对应的结论仍然成立。

注记 6.3.10. 如果波动方程的系数$\boldsymbol{g}$同时依赖$u,\partial u$, 则此时的初值正则性应该提高为$H^{d+3}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+2}(\mathbb{R}^d)$, 而(6.3.17)-(6.3.19)此时变为

$$\liminf_{t\to T_*}\|(u,\partial_t u)(t,\cdot)\|_{H^{d+3}(\mathbb{R}^d)\times H^{d+2}(\mathbb{R}^d)}=\infty. \tag{6.3.20}$$

$$\limsup_{t\to T_*}\left[\sum_{|\alpha|\leqslant\lfloor\frac{d+6}{2}\rfloor}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+\sum_{|\alpha|\leqslant\lfloor\frac{d+4}{2}\rfloor}\|\partial_t\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right]=\infty. \tag{6.3.21}$$

$$\limsup_{t\to T_*}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=\infty. \tag{6.3.22}$$

见 Sogge [13, 第一章].

如上三条爆破准则中的第2、3条的证明思路类似，但是第三条需要用到非常精细的不等式(Gagliardo-Nirenberg插值不等式)。从实用性角度来看，第三条还是最好用的。我们接下来直接证明第三条(6.3.19)，而第二条(6.3.18)是(6.3.19)结合Sobolev嵌入定理的直接推论。

证明. 用反证法。若 $T_*<\infty$ 但爆破准则不成立，即假设存在常数 $K>0$，使得对任意 $t\in[0,T_*)$，解及其一阶导数是一致有界的：

$$\sup_{t\in[0,T_*)}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant K<\infty. \tag{6.3.23}$$

这意味着 u 和 ∂u 均属于 $L^\infty([0,T_*)\times\mathbb{R}^d)$. 接下来我们只需证明对充分大的$s$, 例如$s>\frac{d}{2}+1$, 方程解的$H^s$范数在$T_*$时刻仍然有限。这样的话据局部适定性定理（定理6.3.1），这个解还可以往后演化至少一小段时间，与T_*的极大性矛盾。

令$E(t):=\|(u,\partial_t u)\|^2_{H^{d+2}\times H^{d+1}}$. 据变系数波动方程的能量估计（定理6.1.2）

$$E(t)\leqslant C\cdot I(t)\cdot\exp\left(C\int_0^t\|\partial\boldsymbol{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{6.3.24}$$

其中 $\mathcal{I}(t)$ 代表初值以及源项和交换子项的贡献。据链式法则，系数的时空导数为：

$$\partial \boldsymbol{g}(u) = \boldsymbol{g}'(u)\partial u. \tag{6.3.25}$$

注意这里**仅包含一阶导数 ∂u**. 利用反证假设 (6.3.23) 我们有 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant K$ 且 $\|\partial u\|_{L^\infty} \leqslant K$。由于 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 是光滑的，其导数也是有界的，因此存在常数$C(K) > 0$ 使得 $\|\partial \boldsymbol{g}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\boldsymbol{g}'(u)\|_{L^\infty}\|\partial u\|_{L^\infty} \leqslant C(K)$. 这意味着能量估计中的指数因子在有限区间 $[0, T_*)$ 上是一致有界的：

$$\exp\left(C\int_0^{T_*} \|\partial \boldsymbol{g}\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\right) \leqslant \exp\left(C\cdot C(K)\cdot T_*\right) < \infty.$$

现在估计 $I(t)$ 中的非线性项。对源项用Moser不等式可得（其实直接拆括号硬算也可以）

$$\|F(u,\partial u)\|_{H^{d+1}}^2 \leqslant C(\|u\|_{L^\infty}, \|\partial u\|_{L^\infty})(1 + \|u\|_{H^{d+1}}^2 + \|\partial u\|_{H^{d+1}}^2) \leqslant C(K)E_s(t).$$

对交换子项，我们需要估计$\|[\partial^\alpha, g^{ij}]\partial_i\partial_j u\|_{L^2}$, 其中$|\alpha| = d+1$. 事实上，直接拆括号计算得（注意这里我们求的是整数阶导数，并不需要用Moser不等式及其推论）

$$\|[\partial^\alpha, \mathrm{g}^{ij}]\partial_i\partial_j u\|_{L^2}^2 \leqslant C(\|\boldsymbol{g}\|_{H^{d+1}}\|\partial u\|_{L^\infty} + \|\partial \boldsymbol{g}\|_{L^\infty}\|u\|_{H^{d+2}}).$$

在此说明一下，中间的交叉项均可使用Sobolev嵌入定理、Hölder不等式和 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式(习题5.3.4)控制，例如上述交换子会出现$\partial^{d+1}\boldsymbol{g}\cdot\partial^2 u$的项。此时我们先用Hölder不等式得到$\|\partial^{d+1}\boldsymbol{g}\cdot\partial^2 u\|_{L^2} \leqslant \|\partial^{d+1}\boldsymbol{g}\|_{L^p}\|\partial^2 u\|_{L^q}$, 其中$1/p + 1/q = 1/2$, 然后再利用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式就可以把$\|\partial^2 u\|_{L^q}$化成$\|\partial u\|_{L^\infty}$, 剩下的项在正则性充分高时都可以被$\|u\|_{H^{d+2}}$控制。

这样我们就得到

$$\|[\partial^\alpha g^{ij}]\partial_i\partial_j u\|_{L^2}^2 \leqslant C(K)E(t).$$

由于 (6.3.23) 保证了 $\|u\|_{L^\infty}$ 和 $\|\partial u\|_{L^\infty}$ 的有界性，我们可以得到**线性的**能量不等式：

$$E(t) \leqslant C(K, T_*)\left(E(0) + \int_0^t E(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

据Grönwall不等式知，

$$\sup_{t\in[0,T_*)} E(t) \leqslant C(K, T_*)E(0)e^{C(K,T_*)T_*} < \infty.$$

这表明高阶 Sobolev 范数在 T_* 时刻不发散。根据局部存在性定理，解可以延拓到 T_* 之后，这与 T_* 的极大性矛盾。这说明如果 $T_* < \infty$，则一阶导数的 L^∞ 范数必然爆破。 □

习题 6.3

习题 6.3.1. 考虑如下三维次临界波动方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u = \pm u^3, & (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3,\\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.\end{cases}$$

证明：此时的爆破准则(6.3.19)可以改进为

$$\limsup_{t\to T_*} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \infty.$$

注意本题无需假设初值$(u_0,u_1) \in H^s \times H^{s-1}$中的$s \geqslant d+2=5$，实际上该方程对$s \geqslant 2$均有局部解（这里不需证明）。

习题 6.3.2. 设$\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$满足如下波映射(wave map)方程

$$\begin{cases}\Box\boldsymbol{\phi} := \boldsymbol{\phi}\left(\partial_t\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} - \sum\limits_{i=1}^d \partial_i\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_i\boldsymbol{\phi}\right), & (t,\boldsymbol{x}) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ \boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}), \quad \partial_t\boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}).\end{cases}$$

初值满足$|\boldsymbol{\phi}_0|^2 = 1, \boldsymbol{\phi}_1^\top\cdot\boldsymbol{\phi}_0 = 0$，并假设具有紧支集。

(1) 证明

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\partial_t\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2 + \sum_{i=1}^d |\partial_i\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

(2) 设$d=1, m=2$，并假设光滑初值满足：存在$\boldsymbol{y}\in\mathbb{S}^2$ 使得 $(\boldsymbol{\phi}_0 - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\phi}_1) \in H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$. 证明：此时波映射方程有光滑的整体解。这里可以默认爆破准则(6.3.19)成立。

提示：注意到$|\boldsymbol{\phi}|^2 \equiv 1$是不变量。

6.4 能量次临界的半线性波动方程

本节我们考虑如下半线性波动方程解的长时间存在性，其中$\mu = \pm 1$.

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u = \mu|u|^{p-1}u & t>0, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.\end{cases} \tag{6.4.1}$$

这里我们首先介绍一些术语。考虑$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$中的半线性波动方程$\partial_t^2 u - \Delta u = \mu|u|^{p-1}u$.

- 系数$\mu = 1$时称之为**聚焦**(**focusing**)情况，$\mu = -1$时称之为**散焦**(**defocusing**)情况。
- 该方程具有守恒的能量

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 + \frac{(-\mu)}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而波动方程具有如下伸缩不变性：如果$u(t,\boldsymbol{x})$是方程(6.4.1)的解，则

$$\forall \lambda > 0,\ \ u_\lambda(t,\boldsymbol{x}) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda t, \lambda \boldsymbol{x})\ \text{也是方程(6.4.1)的解。}$$

直接计算可得$\|\nabla u_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{\frac{2}{p-1}+1-\frac{d}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}$. 当$d \geqslant 3$时，$\lambda$的幂次为$s = \frac{2}{p-1} + 1 - \frac{d}{2}$.

- 若$s > 0$, 即$p - 1 < \frac{4}{d-2}$: 此时称波动方程(6.4.1)是**能量次临界 (energy-subcritical)** 的。此时若令$\lambda \to \infty$，则$\lambda^s \to \infty$. 不严谨地说，这表明如果要把解压缩到很小尺度就需要“无限能量”，而这被解的能量守恒“禁止”。
- 若$s < 0$, 即$p - 1 > \frac{4}{d-2}$: 此时称波动方程(6.4.1)是**能量超临界 (energy-supercritical)** 的。不严谨地说，此时能量守恒无法阻止解的“集中”（即$\lambda \to \infty$这个过程）。
- 若$s = 0$, 即$p - 1 = \frac{4}{d-2}$: 此时称波动方程(6.4.1)是**能量临界 (energy-critical)** 的。此时非线性部分和线性部分达到“平衡态”。能量既不惩罚集中也不鼓励集中，因此往往需要非常细致的分析。

本节我们考虑$d = 3, 1 \leqslant p < 5$的特殊情况，即三维能量次临界的波动方程。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = \mu |u|^{p-1} u\ (\mu = \pm 1, 1 \leqslant p < 5) & t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

我们希望证明它具有小初值整体解

定理 6.4.1. 设$(u_0, u_1) \in H^5(\mathbb{R}^3) \times H^4(\mathbb{R}^3)$充分小且具有紧支集，则方程(6.4.2)存在整体解，并满足$(u, \partial_t u) \in L^\infty(0,\infty,H^5(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(0,\infty,H^4(\mathbb{R}^3))$.

注记 6.4.1. 这里我们选取初值在$H^5(\mathbb{R}^3)\times H^4(\mathbb{R}^3)$是为了契合上节证明的局部适定性结论（定理6.3.1）。注意到方程(6.4.2)是常系数的，且非线性项不依赖∂u，实际上我们可以在$H^1 \times L^2$里面作出能量有限解（弱解）的局部适定性，强解存在性也只需要初值落在$H^2 \times H^1$中，证明参见 Evans [6, 定理12.2.1].

注记 6.4.2. 对能量临界情况($p = 5$)，小初值整体解的证明非常困难，而且不可避免地需要使用 Strichartz 估计，可见 Sogge [13, 第3章]. 对大初值情况，散焦的临界波动方程仍然可以求得整体解，而对聚焦情况则需要讨论初值的能量与基态能量直接的关系，可参见如下文章

- Manoussos G. Grillakis. Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity. Commun. Pure Appl. Math., **45**(6), 749–774, 1992.

- Jalal Shatah, Michael Struwe. Well-Posedness in the Energy Space for Semilinear Wave Equations with Critical Growth. Internat. Math. Res. Notices (1994), no. 7, 303–309.
- Carlos E. Kenig, Frank Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing nonlinear wave equation. Acta Math., **201**(2), 147–212, 2008.

6.4.1 次临界波动方程的小初值整体解

证明小初值整体解的关键在于建立正则性传播定理（低阶范数有界蕴含高阶范数有界）以及解的爆破准则（解的存在时间仅由低阶范数决定）。**本节我们只考虑更困难的聚焦情况（$\mu = 1$，此时守恒的能量未必是非负的），散焦情况的证明更简单，就不再赘述了。**

命题 6.4.2 (正则性传播). *设u是方程(6.4.2)在$[0,T)\times\mathbb{R}^3$上的经典解且*

$$M := \sup_{0\leqslant t<T} \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \infty,$$

则初值的高阶正则性得以保持，即对$s\geqslant 2, (u_0,u_1)\in H^s\times H^{s-1}$必有

$$\sup_{0\leqslant t<T} \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3)} + \|u(t,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)} < \infty.$$

证明. 这里我们给出$p\in[1,3]$情况下的能量法证明，并以$s=2$为例。对更大的s证明是一样的。当$3<p<5$时需要用到波动方程的Strichartz估计或者三维线性波方程的显式解 (Kirchhoff公式)，这里略去。

设 $v=\partial u$ 为任意空间一阶导数。对方程求导得线性化方程：

$$\partial_t^2 v - \Delta v = p|u|^{p-1}v \tag{6.4.3}$$

定义二阶能量 $E_2(t)=\frac{1}{2}(\|\nabla v\|^2_{L^2}+\|\partial_t v\|^2_{L^2})$. 求时间导数，分部积分并利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$E_2'(t) = \int_{\mathbb{R}^3} p|u|^{p-1}v\partial_t v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C\|u^{p-1}v\|_{L^2}\|\partial_t v\|_{L^2} \tag{6.4.4}$$

而 $\|\partial_t v\|_{L^2}\leqslant\sqrt{2E_2(t)}$，我们只需估计非线性项。据Hölder 不等式得

$$\|u^{p-1}v\|_{L^2} \leqslant \|u^{p-1}\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6} = \|u\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}}\|\nabla u\|_{L^6} \tag{6.4.5}$$

- **高阶项**：由 Sobolev 临界嵌入 $H^1\hookrightarrow L^6$ （定理5.2.2），$\|\nabla u\|_{L^6}\leqslant C\|\nabla(\nabla u)\|_{L^2}\leqslant C\sqrt{E_2(t)}$.
- **低阶系数**：由$p\in[1,3]$知$3(p-1)\in[0,6]$（**这也是我们假设$p\leqslant 3$的直接原因**），由Sobolev嵌入定理，$\|u\|_{L^{3(p-1)}}$ 也可由 $\|u\|_{H^1}$ 控制。据定理假设，一阶能量有界蕴含 $\|u\|_{H^1}$ 有界，故 $\|u\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}}\leqslant C(M)$.

代回能量不等式得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{E_2(t)} \leqslant C(M)\sqrt{E_2(t)}$. 由 Grönwall 不等式即得结论。 □

接下来证明爆破准则

命题 6.4.3 (爆破准则). 设方程(6.4.2)解的极大存在时间为$T_* > 0$ (定义同定理6.3.3). 若$T_* < \infty$, 则

$$\limsup_{t\to T_*} \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$$

证明. 根据注记6.4.1知，对任意常数$K > 0$，只要方程(6.4.2)的初值(u_0, u_1)满足$\|u_0\|^2_{H^1} + \|u_1\|^2_{L^2} \leqslant K$, 则存在时间$T_K$使得方程的（弱）解在$[0, T_K] \times \mathbb{R}^3$存在。

现在用反证法，如果$T_* < \infty$但结论不成立，则存在常数$K > 0$使得

$$\sup_{t\in(0,T_*)} \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant K.$$

今选取$t_* := T_* - \frac{1}{2}T_K$, 以$(u(t_*, \boldsymbol{x}), \partial_t u(t_*, \boldsymbol{x}))$为方程(6.4.2)的新初值，由局部适定性结论知，此时方程的解至少可以再演化T_K时间，这就说明方程(6.4.2)在以(u_0, u_1)为初值时，所得的解至少可以存在$t_* + T_K = T_* + \frac{1}{2}T_K > T_*$时间，这与$T_*$的极大性矛盾。 □

接下来我们证明定理6.4.1.

定理6.4.1的证明. 首先我们定义能量泛函：

$$E[u](t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right) dx \tag{6.4.6}$$

对于经典解，直接计算可证得能量守恒：$E(t) = E(0) = E_0$.

接下来，据 Sobolev 嵌入定理 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$（$p < 5$，见定理5.2.1），存在常数 $C > 0$ 使得 $\|u\|_{L^{p+1}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}$. 这里我们用到了有限传播速度（命题6.3.4）得出$u(t,\cdot)$也具有紧支集，进而可以用Poincaré不等式把$\|u\|_{H^1}$替换作$\|\nabla u\|_{L^2}$.

这样能量守恒律就变成

$$E_0 = \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} - \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}} \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} - A\|\nabla u\|^{p+1}_{L^2}. \tag{6.4.7}$$

令 $y(t) = \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geqslant 0$，定义函数 $f(y) = \frac{1}{2}y^2 - Ay^{p+1}$. 于是我们得到$f(y(t)) \leqslant E_0$.

考察函数 $f(y) = \frac{1}{2}y^2 - Ay^{p+1}$ 在 $y \geqslant 0$ 上的性质：

- $f(0) = 0$.
- $f'(y) = y - A(p+1)y^p$。令 $f'(y) = 0$，解得唯一非零驻点 $y_* = (1/A(p+1))^{1/(p-1)}$.
- 在 y_* 处达到极大值（相当于是一个“势垒”高度），记为 $H = f(y_*) > 0$；当 $y > y_*$ 时，函数单调递减趋于$-\infty$.

现在假设初值足够小，满足：$E_0 < H$以及$\|\nabla u_0\|_{L^2} < y_*$（初值位于“势阱”）。我们断言：

断言. 对任意 $t \in [0, T_*)$，都有 $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2} < y_*$.也就是说解一直掉在“势阱”里面出不来。

断言的证明. $y(t) = \|\nabla u(t)\|_{L^2}$ 是时间的连续函数。在 $t = 0$ 时，$y(0) < y_*$。由于 $f(y(t)) \leqslant E_0 < H$，且 $f(y_*) = H$，这意味着 $y(t)$ 永远无法取到 y_* 这个值，因此无法穿过势垒到达右侧。所以解被“困”在势阱，即 $y(t) \in [0, y_*)$ 对任意 t 成立。 □

断言成立就表明 $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2}$ 是一致有界的。再回到能量守恒公式：

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u\|_{L^2}^2 = E_0 - \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \tag{6.4.8}$$

右边每一项都是有界的（非线性项由 Sobolev 嵌入被 ∇u 控制），因此 $\|\partial_t u(t)\|_{L^2}$ 也是一致有界的。因此存在常数 M，使得对于所有 $t \in [0, T_*)$，

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leqslant M < \infty. \tag{6.4.9}$$

现在，据爆破准则（命题6.4.3）知如果$T_* < +\infty$，则与(6.4.9)矛盾，因此极大存在时间$T_* = +\infty$. 这说明解至少在$H^1 \times L^2$ 中整体存在且有界。然后再用正则性传播的结论（命题6.4.2）知，对$s \geqslant 2, (u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$必有

$$\sup_{0 \leqslant t < T} \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2 < \infty.$$

因此方程存在整体经典解。 □

6.4.2 散焦、次临界波动方程的大初值整体解

当$\mu = -1, 1 \leqslant p < 5$时，即对三维的散焦次临界波动方程而言，大初值整体解也是存在的。本节我们只给出$p \leqslant 3$的能量法证明，而当$3 < p < 5$时需要用到波的传播本身的性质：要么使用Strichartz估计，要么使用Kirchhoff公式得到Jörgens估计。后者可参考 Evans [6, 12.3节].

考虑如下方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = -|u|^{p-1} u \ (1 \leqslant p \leqslant 3) & t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \partial_t u(0, \boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{6.4.10}$$

定理 6.4.4 (散焦大初值整体解). 设 $1 \leqslant p \leqslant 3$. 对$s \geqslant 2$以及紧支初值 $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$（即经典解），方程 (6.4.10)存在唯一的整体解 $(u, u_t) \in L^\infty(0, \infty; H^s(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(0, \infty; H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$.

证明. 这里我们仍然以$s = 2$为例写证明。证明分为两步：首先利用散焦性质获得一阶能量的整体先验界，然后利用 $p \leqslant 3$ 的条件进行二阶能量估计。

第一步：一阶能量的整体先验估计. 定义能量泛函：

$$E_1(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} \right) dx \tag{6.4.11}$$

关键点： 由于是散焦方程，上述能量必非负。由能量守恒 $E_1(t) = E_1(0) =: E_0$得到

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant E_0 \ \Rightarrow\ \|\nabla u\|_{L^2} \leqslant \sqrt{2E_0} \tag{6.4.12}$$

$$\frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leqslant E_0 \ \Rightarrow\ \|u\|_{L^{p+1}} \leqslant ((p+1)E_0)^{\frac{1}{p+1}} \tag{6.4.13}$$

此外，由 Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 和 Poincaré不等式，我们有：

$$\|u\|_{L^6} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2} \leqslant C\sqrt{2E_0} \tag{6.4.14}$$

利用Hölder不等式 $\|u\|_{L^q} \leqslant \|u\|_{L^{p+1}}^{\theta}\|u\|_{L^6}^{1-\theta}$，可知对任意 $q \in [\min(p+1,6), \max(p+1,6)]$，解的 L^q 范数是一致有界的。特别地，由于 $p \geqslant 1$，所以对 $q \in [2,6]$ 都有 $\|u\|_{L^q}$ 被初值能量 E_0 控制。

第二步：二阶能量估计. 为了证明解一直在 H^2 中，定义二阶能量。设 $v = \nabla u$：

$$\partial_t^2 v - \Delta v = -\nabla(|u|^{p-1}u) = -p|u|^{p-1}v \tag{6.4.15}$$

定义 $E_2(t) = \frac{1}{2}(\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|\partial_t v\|_{L^2}^2)$. 求导并代入方程得到

$$E_2'(t) \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} p|u|^{p-1}|v||\partial_t v|\,dx \leqslant p\|u^{p-1}v\|_{L^2}\sqrt{2E_2(t)}$$

我们需要估计 $\|u^{p-1}v\|_{L^2} = \|u^{p-1}\nabla u\|_{L^2}$。据 Hölder 不等式有

$$\|u^{p-1}\nabla u\|_{L^2} \leqslant \|u^{p-1}\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}.$$

- **控制** $\|\nabla u\|_{L^6}$：由 Sobolev 嵌入得$\|\nabla u\|_{L^6} \leqslant C\|\nabla^2 u\|_{L^2} \leqslant C\sqrt{E_2(t)}$。
- **控制** $\|u^{p-1}\|_{L^3}$：我们有$\|u^{p-1}\|_{L^3} = \|u\|_{L^{3(p-1)}}^{p-1}$. 而现在需要 $u \in L^{3(p-1)}$。**这里就要用到** $1 \leqslant p \leqslant 3$ **的条件来得到** $0 \leqslant 3(p-1) \leqslant 6$. 据第一步的结论，我们已经控制了 $\|u\|_{L^q}$ $(2 \leqslant q \leqslant 6)$. 因此存在仅依赖于 E_0 的常数 $C(E_0)$，使得 $\|u\|_{L^{3(p-1)}}^{p-1} \leqslant C(E_0) < \infty$.

第三步：封闭能量不等式 将上述估计代回能量不等式：

$$E_2'(t) \leqslant C \cdot C(E_0) \cdot \sqrt{E_2(t)} \cdot \sqrt{2E_2(t)} = \tilde{C}(E_0)E_2(t). \tag{6.4.16}$$

据 Grönwall 不等式得 $E_2(t) \leqslant E_2(0)e^{\tilde{C}(E_0)t}$. 这表明对于任意有限时间 t，二阶能量 $E_2(t)$ 是有限的。因此据正则性传播定理（命题6.4.2），解不会在有限时间内失去 H^2 正则性，因此经典解是整体存在的。 □

6.4.3 Bootstrap方法

本讲义直到本节为止才给出第一个由“局部适定性→爆破准则→整体存在性”的完整逻辑链条，使得我们从发展方程的局部解做到整体解。尽管本讲义规避了过于复杂的波动方程Strichartz估计，只用了最基本的能量法来完成证明，但是该逻辑链条背后的思想仍然值得提炼。这个思想就是 PDE 分析中无处不在的逻辑工具——**Bootstrap 方法（或称为连续性方法）**，而它的一个最基本的例子就是Grönwall不等式。

在非线性偏微分方程的研究中，我们经常会遇到这样的逻辑困境：

1. 为了证明解的某个范数 $X(t)$ 保持有界（或很小），我们需要证明某些能量估计。
2. 但这些能量估计往往只有在假设 $X(t)$ 已经有界（或很小）的前提下才能成立。

这就形成了一个循环：**“要证明它有界，必须先假设它有界”**。打破这个循环的逻辑工具就是 Bootstrap，它可以让我们作出的“有界假设”进行“自动加强”，进而证明“有界假设”本身就是成立的（即它不再是“额外假设”），这个过程往往也是用Grönwall不等式来实现。

我们现在介绍抽象Bootstrap原理。

命题 6.4.5 (抽象Bootstrap原理 [16, 第1.3节]). *设I是时间区间，且对任意$t \in I$我们有t时刻的“假设”$H(t)$和“结论”$C(t)$. 现在假设以下四条性质成立：*

(a) （“假设”⇒“结论”）若对某个$t \in I$，“假设”$H(t)$成立，则“结论”$C(t)$也成立；
(b) （“结论”强于“假设”）若对某个$t \in I$，“结论”$C(t)$成立，则存在t的开邻域$\mathcal{O}(t)$，使得“假设”$H(t')$对任意$t' \in I \cap \mathcal{O}(t)$成立；
(c) （“结论”具有闭性/连续性）若序列$\{t_n\} \subset I$收敛到$t \in I$, 且对任意n都有“结论”$C(t_n)$成立，则“结论”$C(t)$也成立；
(d) （基本假设）至少存在一个$t \in I$使得假设”$H(t)$成立。

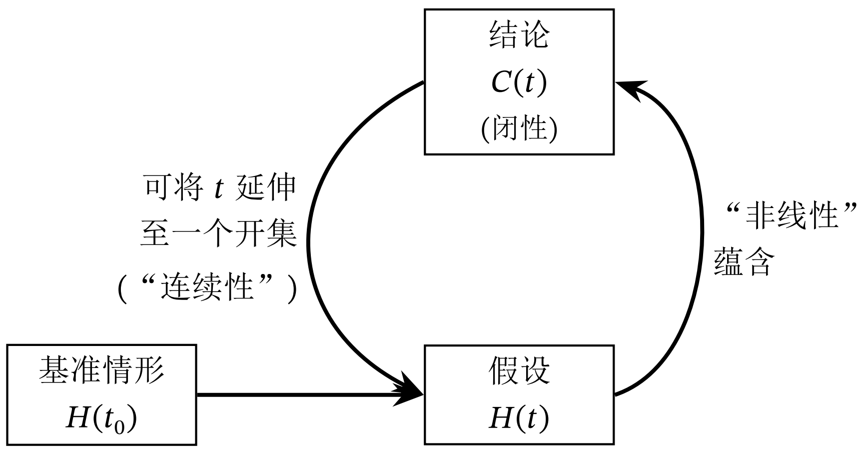
那么则有“结论”$C(t)$对任意$t \in I$都成立。

抽象Bootstrap原理的证明是区间连通性的简单应用。

证明. 令$\Omega := \{t \in I : \text{结论}C(t)\text{成立}\}$. 则(d)+(a)表明$\Omega$非空。然后(b)+(a)表明$\Omega$是开集，(c)表明$\Omega$是闭集。而区间$I$连通，所以$\Omega = I$. □

注记 6.4.3. *在实际应用该原理时，$H(t), C(t)$的选取一般应使得(b)–(d)容易验证，而(a)往往是最关键的步骤，一般来说我们需要充分利用方程和非线性项的结构来证明。该Bootstrap原理表面，为了证明“满足(c)的‘结论’$C(t)$”，只需要H在(b)的意义下比C更弱，且至少在一个时间点成立，这样证明“$H(t) \Rightarrow C(t)$”就容易多了。在研究PDE时，如果我们要证明对任意$t \in [0,T]$有某个能量估计$X(t) \leqslant M$成立，我们作出的“假设”$H(t)$可以是“对任意$t \in [0,T]$有$X(t) \leqslant 2M$”*

这个更弱的不等式，然后**利用方程和非线性项的结构来证明“在$H(t)$的成立的前提下，我们有$X(t) \leqslant M$对任意$t \in [0,T]$成立”。**



假设 $H(t)$ 与结论 $C(t)$ 之间关系的示意图：这种推理并不是循环论证，因为在每一次迭代循环中，我们都扩展了使假设和结论成立的时间集合。闭性假设防止了迭代一直停留在某个中间时间点。

Grönwall不等式本身就是Bootstrap原理的一个特例，虽然它有非常简单的微积分证明。

引理 6.4.6 (Grönwall不等式). 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个非负连续函数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为非负可积函数。设存在常数$A>0$使得对任意$t\in[0,T]$满足

$$f(t) \leqslant A + \int_0^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.4.17}$$

那么对任意 $t\in[0,T]$都有

$$f(t) \leqslant A\exp\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{6.4.18}$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，考虑以下条件

$$f(t) \le (1+\varepsilon)A\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^t g(s)ds\right). \tag{6.4.19}$$

定义$B := \{t\in[0,T]$: 条件 (6.4.19) 对任意 $s\in[0,t]$ 成立$\}$. 我们将证明 B 是非空的、开的且闭的，从而得出 $B=[0,T]$。

- B 显然是非空的，因为 $0\in B$.
- 由 f 的连续性可知，B 显然是闭的.

- 唯一困难的部分是证明 B 是开的。由 f 的连续性，只需证明如果 $t\in B$，那么我们有

$$f(t)\leqslant A\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{6.4.20}$$

即得到一个比 (6.4.19) 更强的界。为此注意到若 $t\in B$，则有

$$\begin{aligned}f(t)&\leqslant A+\int_0^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s\leqslant A+(1+\varepsilon)A\int_0^t g(s)\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^s g(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\&\leqslant A\left(1+\left(\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)-1\right)\right)=A\exp\left((1+\varepsilon)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

因此 $B=[0,T]$，即 (6.4.19) 对所有 $t\in[0,T]$ 和 $\varepsilon>0$ 成立。令 $\varepsilon\to 0$即得结论。 □

一般情况下，**Grönwall不等式是协助我们完成 Bootstrap (即验证命题6.4.5中的假设(a)) 的工具**。这里我们以计算拟线性波动方程小初值时解的存在时间为例，在默认已知波动方程衰减速率的情况下，给出利用 Bootstrap 原理的证明。这也是对非线性方程计算解的寿命的一般性方法。

考虑拟线性波动方程如下

$$\begin{cases}\Box u(t,\boldsymbol{x})=F(u,\partial u), & (t,\boldsymbol{x})\in[0,T)\times\mathbb{R}^d\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}),\partial_t u(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon\psi(\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{6.4.21}$$

其中$\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. 最终的结论如下

定理 6.4.7 (拟线性波动方程小初值时解的存在时长). 设 $d\geqslant 2$，对初值问题 (6.4.21)，存在 $\varepsilon_0>0$，使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时，经典解 u 的最大存在时间 $T_*\geqslant T_\varepsilon$ 满足以下估计：

$$T_\varepsilon=\begin{cases}+\infty & d\geqslant 4\ (\text{整体解});\\ \exp(c/\varepsilon) & d=3\ (\text{几乎整体解, almost global});\\ c/\varepsilon^2 & d=2.\end{cases}$$

其中 $c>0$ 为仅依赖初值和非线性项结构的常数。

定义 s 阶能量泛函（s 充分大，例如 $s>d/2+1$）：

$$E_s(u)(t):=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\partial_t\partial^\alpha u|^2+|\nabla\partial^\alpha u|^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\approx\|\partial u(t)\|_{H^s}^2.$$

由初值条件知存在常数 $C_0>0$ 使得 $\sqrt{E_s(u)(0)}\leqslant C_0\varepsilon$. 证明该定理前，我们承认如下估计正确。

命题 6.4.8 (能量估计). *存在常数 $C_1 > 0$，使得在光滑解存在的区间内有：*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{E_s(u)(t)} \leqslant C_1 \|\partial u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \sqrt{E_s(u)(t)}. \tag{6.4.22}$$

命题 6.4.9 (衰减估计). *存在仅依赖于维数 d 和阶数 s 的常数 $C_* > 0$，使得：*

$$\|\partial u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_*}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}\sqrt{E_s(u)(t)}. \tag{6.4.23}$$

Bootstrap方法计算lifespan. 我们将通过 Bootstrap 原理证明定理。设 T_* 为解的最大存在时间。

第一步：设定 Bootstrap 假设. 选取常数 $M > 1$，我们先在时间区间 $[0,T]$ 上（其中 $T < T_*$）作先验假设：

$$\sqrt{E_s(u)(t)} \leqslant MC_0\varepsilon, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{H}$$

我们的目标是证明：在某个时间范围内，(H) 的成立**自动蕴含**一个更强的界（例如 $\frac{M}{2}C_0\varepsilon$），从而根据 bootstrap 原理知 (H) 在该时间范围内一直成立。

第二步：封闭估计. 利用假设 (H)，我们可以控制 (6.4.23) 中的能量项：

$$\|\partial u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C_*}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}(MC_0\varepsilon).$$

令 $K = C_1C_*MC_0$，将上述 L^∞ 界代入 (6.4.22):

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_s(u)(t)} \leqslant C_1\left[\frac{C_*MC_0\varepsilon}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}\right]\sqrt{E_s(u)(t)}.$$

利用 Grönwall 不等式，并代入初值界 $\sqrt{E_s(u)(0)} \leqslant C_0\varepsilon$，我们得到

$$\sqrt{E_s(u)(t)} \leqslant C_0\varepsilon \exp\left(K\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{d-1}{2}}d\tau\right). \tag{6.4.24}$$

为确保 Bootstrap 假设 (H) ($\sqrt{E_s} \leqslant MC_0\varepsilon$) 不被破坏，我们需要右端项严格小于 $MC_0\varepsilon$，这等价于要求：

$$\exp\left(K\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{d-1}{2}}d\tau\right) \leqslant M \ \Rightarrow\ K\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{d-1}{2}}d\tau \leqslant \ln M.$$

第三步：T_ε 的确定. 令 $\mathcal{I}(t) = \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{d-1}{2}}d\tau$。我们根据维数 d 分析 $\mathcal{I}(t)$ 的性态。

- $d \geqslant 4$时，此时幂次 $-\frac{d-1}{2} \leqslant -\frac{3}{2} < -1$，积分一致有界

$$\mathcal{I}(t) < \int_0^\infty (1+\tau)^{-\frac{d-1}{2}} d\tau =: C_d < \infty.$$

  只要取 ε 充分小，使得 $K\varepsilon C_d \leqslant \ln M$，不等式对任意 $t \in [0,\infty)$ 均成立。所以解全局存在 $(T_\varepsilon = \infty)$.
- $d = 3$时，积分呈对数增长：$\mathcal{I}(t) = \ln(1+t)$. 因此有

$$K\varepsilon \ln(1+t) \leqslant \ln M \iff \ln(1+t) \leqslant \frac{\ln M}{K\varepsilon} \Rightarrow t \leqslant \exp\left(\frac{\ln M}{K\varepsilon}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{c}{\varepsilon}\right).$$

  所以当 $d = 3$ 时，解的存在时长的下界为 $T_\varepsilon \geqslant \exp(c/\varepsilon)$.
- $d = 2$时，积分呈多项式增长：$\mathcal{I}(t) = 2\left[(1+t)^{1/2} - 1\right] \approx 2t^{1/2}$. 进而得到

$$K\varepsilon(2t^{1/2}) \leqslant \ln M \iff t^{1/2} \leqslant \frac{\ln M}{2K\varepsilon} \Rightarrow t \leqslant \frac{(\ln M)^2}{4K^2\varepsilon^2}.$$

  所以当 $d = 2$ 时，解的存在时长的下界为 $T_\varepsilon \geqslant \frac{c}{\varepsilon^2}$.

综上所述，T_ε 取决于衰减率 $(1+t)^{-\frac{d-1}{2}}$ 的可积性：

- 若衰减率关于时间t可积，则非线性效应积累有限，可得整体解。
- 若衰减率不可积，则能量随时间缓慢增长，最终破坏小初值假设，导致 $T_* < \infty$.

□

习题 6.4

习题 6.4.1. 证明定理6.4.1在$\mu = -1, p = 3$的情况（散焦, cubic）。

习题 6.4.2. 考虑如下三维聚焦次临界波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = u^3, & (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \partial_t u(0, \boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

证明：存在初值$u_0, u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$满足

- 初始能量$E(0) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) - \frac{1}{4}|u_0|^4 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} > 0.$
- 对应的解$u(t, \boldsymbol{x})$在$t = 1$发生爆破，即$\lim\limits_{t \to 1^-} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$

提示：模仿例6.3.4考虑ODE型爆破，即先看只依赖t的解，该ODE的初值是一个常数；然后对原方程把初值u_0, u_1设置为该常值乘以截断函数$\chi_{B(\mathbf{0},R)}$，选取适当的R；最后用有限传播速度证

明唯一解只能是ODE爆破解。

问题 6.4

问题 6.4.1 (Strauss反例). 考虑如下三维波动方程，其中$1 < p < 1+\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^p, & (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

其中初值$u_0, u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$且支于$B(\mathbf{0},R)$内，且满足$\int_{\mathbb{R}^3} u_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} > 0, \int_{\mathbb{R}^3} u_1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} > 0$.

(1) 令$I(t) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t,\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 证明: 存在常数$C > 0$使得$I''(t) \geqslant CI(t)^p(1+t)^{-3(p-1)}$.

(2) 设v是$\partial_t^2 v - \Delta v = 0$带有相同初值$(u_0, u_1)$的解，证明：存在常数$C_1, C_2 > 0$使得$\int_{\mathbb{R}^3} v(t,\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = C_1 + C_2 t$.

(3) 利用Duhamel原理将u拆分为v和非齐次部分，用(2)证明: 存在常数$C > 0$使得$I(t) \geqslant C(1+t)^{4-p}$.

(4) 设$\varepsilon > 0$, $\mu = (p-1)^2 + \varepsilon(4-p)$, 则存在$\varepsilon > 0$使得$\mu \in (0,2)$. 据此导出: 存在常数$C > 0$ 使得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I'(t))^2 \geqslant C(I(t)^{2+\varepsilon}(1+t)^{-\mu})'$.

(5) 用(3), (4)导出矛盾，证明该方程不可能有整体光滑解。

6.5 Schrödinger方程的衰减估计和Strichartz估计

设 $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 为复值函数，我们考虑线性Schrödinger方程

$$i\partial_t u + \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.5.1}$$

利用Fourier变换，很容易求解该方程

$$u(t,\boldsymbol{x}) = e^{it\Delta} u_0, \qquad e^{it\Delta} f := (e^{-it|\boldsymbol{\xi}|^2} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}))^\vee = \frac{1}{(4i\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4it}} f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{6.5.2}$$

这也可以看作是基本解 Φ 与初值 u_0 的卷积，其中

$$\Phi(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4i\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4it}}. \tag{6.5.3}$$

线性Schrödinger方程具有如下不变性：

- (伸缩不变性, scaling invariance) 如果 u 是 (6.5.1) 的解，则对任意 $\lambda > 0$，$\lambda^{\frac{d}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda \boldsymbol{x})$ 也是

(6.5.1) 的解，其初值为 $\lambda^{\frac{d}{2}}u_0(\lambda \boldsymbol{x})$.

- (伽利略变换下的不变性, Galilean invariance) 如果 u 是 (6.5.1) 的解，则对任意 $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^d$，$e^{-it|\xi_0|^2}e^{ix\cdot\xi}u(t,\boldsymbol{x}-2t\boldsymbol{\xi}_0)$ 也是 (6.5.1) 的解，其初值为 $e^{ix\cdot\xi_0}u_0(\boldsymbol{x})$.

人们更感兴趣的是非线性Schrödinger方程 (NLS)

$$i\partial_t u + \Delta u = F(u, \partial u, \cdots).$$

特别地，半线性Schrödinger方程 ($F = F(u)$) 和拟线性Schrödinger方程 ($F = F(u, \partial u)$) 及其类似方程（用分数阶Laplacian或带某些位势项的Laplacian）在许多物理模型中都会出现。当考虑半线性情况时，我们假定非线性项为

$$F(u) = \mu|u|^{p-1}u,\ \ \mu = \pm 1,\ \ p \geqslant 1.$$

当 $\mu = 1$ 时，我们称NLS为散焦的(defocusing)；当 $\mu = -1$ 时，我们称NLS为聚焦的(focusing)。半线性NLS $i\partial_t u + \Delta u = \pm|u|^{p-1}u$ 满足以下守恒律

- (质量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.
- (能量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2 \pm \frac{1}{p+1}|u(t,\boldsymbol{x})|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.
- (动量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}u(t,\boldsymbol{x})\overline{\nabla u(t,\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

据此守恒律，我们引进如下术语

- 当 $p-1 = \frac{4}{d}$ 时，我们称NLS为 **质量临界** (**mass-critical**) 的，这是由于初值的 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 范数满足上述伸缩不变性。
- 当 $p-1 = \frac{4}{d-2}$ ($d \geqslant 3$) 时，我们称NLS为 **能量临界** (**energy-critical**) 的，因为能量 $E(t)$ 中非线性项的幂次是Sobolev嵌入的临界指标。

本章末尾，我们将证明质量临界NLS的小初值整体适定性和散射，这是NLS最简单的例子。

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm|u|^{\frac{4}{d}}u \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.5.4}$$

但在此之前，我们需要将线性Schrödinger方程的衰减估计和时空估计搞明白。

对于非齐次Schrödinger方程

$$i\partial_t u + \Delta u = F \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{6.5.5}$$

利用Duhamel原理可以直接写出解的表达式

$$u(t,\boldsymbol{x}) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}F(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.5.6}$$

为了证明NLS的存在性，我们需要证明Schrödinger半群 $e^{it\Delta}$ 的衰减估计（关于 t 变量逐点）和时空（$L_t^pL_{\boldsymbol{x}}^r$-型）估计，后者又被称作 Strichartz 估计。

我们首先证明衰减估计。

命题 6.5.1 ($e^{it\Delta}$ 的衰减估计). 设 $1\leqslant p\leqslant 2$ 且 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，则

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\leqslant Ct^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明. 设 $Tf=e^{it\Delta}f$. 由Plancherel恒等式知 $\|Tf\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$。然后用卷积Young不等式得到

$$\|Tf\|_{L^\infty}=\|\Phi*f\|_{L^\infty}\leqslant\|\Phi\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}\leqslant Ct^{-\frac{d}{2}}\|f\|_{L^1}.$$

据Riesz-Thorin内插定理（定理 C.3.5），我们知道 T 是 $L^p\to L^q$ 的有界线性算子，且对 $1\leqslant p\leqslant 2$ 有如下估计

$$\|Tf\|_{L^q}\leqslant C't^{-\frac{d\theta}{2}}\|f\|_{L^p},\ \ \frac{1}{p}=\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{2},\ \ \frac{1}{q}=\frac{\theta}{\infty}+\frac{1-\theta}{2}.$$

这正好给出了我们想要的结果，因为此时 $\theta=\frac{2}{p}-1$. □

接下来我们介绍非齐次部分的时空估计。首先我们证明 Christ-Kiselev引理，其表明 $\int_0^t\cdots\,\mathrm{d}\tau$ 型的时空估计可以归结为 $\int_{\mathbb{R}}\cdots\,\mathrm{d}\tau$ 型的时空估计，进而真正构造出了卷积结构。

引理 6.5.2 (Christ-Kiselev 引理 [4]). 设 X,Y 是 Banach 空间，$K(t,s):Y\to X$ 是有界线性算子，且关于t,s连续。设 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，并定义算子$T$和截断算子$W$如下：

$$T(f)(t)=\int_a^b K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s,\qquad W(f)(t)=\int_a^t K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

若 T 满足

$$\|T(f)\|_{L^q((a,b);X)}\leqslant C\|f\|_{L^r((a,b);Y)},$$

则对 $1\leqslant r<q\leqslant\infty$, W满足相同类型的估计

$$\|W(f)\|_{L^q((a,b);X)}\leqslant C_{qr}\|f\|_{L^r((a,b);Y)}.$$

证明. 我们证明 $q<\infty$ 的情形。不妨设 $\|f\|_{L^r((a,b);Y)}=1$ 且 f 是连续的，并且定义标量函数：

$$F(t):=\int_a^t\|f(s)\|_Y^r\,\mathrm{d}s$$

由于 $F:(a,b)\to(0,1)$ 单调递增的，对任意区间 $I=(c,d)\subset(0,1)$，其原像 $F^{-1}(I)=(F^{-1}(c),F^{-1}(d))$

也是区间，且满足：

$$\|\chi_{F^{-1}(I)}(s)f(s)\|^r_{L^r((a,b);Y)} = \int_{F^{-1}(c)}^{F^{-1}(d)} \|f(s)\|^r_Y \,\mathrm{d}s = F(F^{-1}(d)) - F(F^{-1}(c)) = d - c = |I|.$$

现在考虑 $(0,1)$ 上所有二进子区间的集合 $\{((k-1)2^{-j}, k2^{-j}) : 1 \leqslant k \leqslant 2^j, j = 1,2,3,\dots\}$. 我们在这些二进区间上定义一种关系 $\sim$：若 $|I| = |J|$ 且 I 与 J 不相邻，但它们的“父区间”是相邻的，则记为 $I \sim J$. 因此对每个固定的 J，至多存在 3 个区间 I 满足 $I \sim J$.

令 W 表示正方形 $(0,1)\times(0,1)$ 的 Whitney 分解（即每个子正方形的大小与其到对角线的距离成正比）[1]。从投影 $\pi_1(W)$ 和 $\pi_2(W)$ （分别是往x轴和y轴的投影）可以看出，对几乎处处的 $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$ 只要它满足$x<y$，就会存在唯一的二进子区间对 $I \ni x$ 和 $J \ni y$ 满足 $I \sim J$. 设 $x = F(s), y = F(t)$, 则有下式几乎处处成立：

$$\chi_{\{(s,t)\in(a,b)\times(a,b):s<t\}}(s,t) = \chi_{\{(x,y)\in(0,1)\times(0,1):x<y\}}(x,y) = \sum_{I\sim J}\chi_I(x)\chi_J(y) = \sum_{I\sim J}\chi_{F^{-1}(I)}(s)\chi_{F^{-1}(J)}(t).$$

据此我们可以将截断算子写作：

$$W(f) = \int_a^b \chi_{\{s<t\}}K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{I\sim J}\chi_{F^{-1}(J)}(t)T(\chi_{F^{-1}(I)}f)$$

由于对给定的 J只有有限个 I 满足 $I\sim J$，且对固定的尺度 $|J| = 2^{-j}$，不同的 J 是不交的，我们有：

$$\begin{aligned}\|W(f)\|_{L^q((a,b);X)} &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{|I|=2^{-j},I\sim J}\chi_{F^{-1}(J)}(t)T(\chi_{F^{-1}(I)}f)\right\|_{L^q((a,b);X)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}C\left(\sum_{|I|=2^{-j}}\|T(\chi_{F^{-1}(I)}f)\|^q_{L^q((a,b);X)}\right)^{1/q}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}C\left(\sum_{|I|=2^{-j}}\|\chi_{F^{-1}(I)}f\|^q_{L^r((a,b);Y)}\right)^{1/q} = \sum_{j=1}^{\infty}C\left(\sum_{|I|=2^{-j}}|I|^{q/r}\right)^{1/q} = \sum_{j=1}^{\infty}C2^{-j(1/r-1/q)} \leqslant C\end{aligned}$$

最后一步利用了级数的收敛性（因为 $q>r \Rightarrow \frac{1}{r}-\frac{1}{q}>0$），证毕。 □

---

[1]给定 $\mathbb{R}^d$ 中的开集 Ω，存在由闭二进方体构成的集合 $\mathcal{F} = \{Q_k\}$，满足以下三个性质：

- 完全覆盖：所有立方体的并集恰好构成该开集，即 $\Omega = \bigcup_k Q_k$.
- 任两个不同立方体的内部互不相交：即当 $j\neq k$ 时，$Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset$.
- 大小与距离的比例：即存在常数 $c_1, c_2 > 0$（通常取 $c_1 = 1, c_2 = 4$），使得：

$$c_1\mathrm{dist}(Q_k,\Omega^c) \leqslant \mathrm{diam}(Q_k) \leqslant c_2\mathrm{dist}(Q_k,\Omega^c)$$

这意味着越靠近边界的立方体越小，越远离边界的立方体越大。

接下来我们需要对指标 (p,q) 和 $(\tilde{p},\tilde{q})$ 提出合适的要求，使得下式成立

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^p L_x^q} \leqslant C\|f\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}.$$

由于 $p,q \geqslant 1$，我们用积分的Minkowski不等式得到

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^p L_x^q} \leqslant \left\|\int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-\tau)\Delta} f(\tau)\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^p}.$$

据衰减估计，我们有

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-\tau)\Delta} f(\tau)\|_{L_x^q}\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^p} \leqslant C\left\|\int_{\mathbb{R}} |t-\tau|^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\|f(\tau)\|_{L^{q'}}\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^p}.$$

被积函数现在是卷积形式，据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们希望能得到如下形式的界

$$\left\||\cdot|^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} * \|f(\cdot)\|_{L^{q'}}\right\|_{L_t^p} \leqslant C\|f\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}.$$

其中的可积指标应该满足

$$0<\gamma := d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})<1, \qquad 1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q'}+\frac{\gamma}{d} \Rightarrow \frac{2}{p}=d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right).$$

这促使我们定义所谓的“容许对”。

定义 6.5.1 (Admissible pair). 我们称(p,q) 为**NLS的容许对 (admissible pair for NLS)** 是指它满足

$$\frac{2}{p}=d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$$

并且 $d=1$时，要求$4\leqslant p\leqslant\infty$；$d=2$时，要求$2<p\leqslant\infty$；$d\geqslant 3$时，要求$2\leqslant p\leqslant\infty$. 此外若 $p>2$，则称 (p,q) 为 **非端点容许对 (non-endpoint admissble pair)**；若 $p=2$，则称 $(2,q)$ 为 **端点容许对 (endpoint admissble pair)**.

现在我们可以证明Schrödinger半群 $e^{it\Delta}$ 的**Strichartz估计**.

命题 6.5.3 (NLS的Strichartz估计). 设 $(p,q),(\tilde{p},\tilde{q})$ 为NLS的容许对, $t>0, f\in\mathcal{S}$, 则有以下估计

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^pL_x^q}\leqslant C\|f\|_{L^2}. \tag{6.5.7}$$

$$\left\|\int_0^t e^{-i\tau\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_x^2}\leqslant C\|f\|_{L_t^{p'}L_x^{q'}}, \tag{6.5.8}$$

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^pL_x^q}\leqslant C\|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}L_x^{\tilde{q}'}}. \tag{6.5.9}$$

注记 6.5.1. 如果没有Strichartz估计，只借助能量、动量守恒的话，我们只能建立解在H^1空间中的有界性，我们知道H^1有界序列会有弱极限，但我们不知道它是弥散了还是集中了，也不知道去哪里找那个集中的“形状”。Strichartz 范数作为一个时空范数关注整个时空，它度量的是波是否在弥散，如果波函数在时空上积分大，就必须在局部“显形”。

我们只证明非端点容许对的估计。端点情况请参考著名论文：

- Markus Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates. *American Journal of Mathematics*, 120(5), 955-980, 1998.

非端点情况的证明用到了所谓的 <u>TT^*-方法</u>：估计 T 的算子范数，可归结为估计 TT^* 的算子范数，而后者对NLS通常更容易，这是因为我们已经得到了如下估计

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^pL_x^q}\leqslant C\|f\|_{L_t^{p'}L_x^{q'}}. \tag{6.5.10}$$

证明. 由Christ-Kiselev引理[2]，只需证明 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上的估计。我们首先证明 (6.5.8)，由于 L^2 是Hilbert空间，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_x^2}^2=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta}f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{L_x^2}\\
=&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-i\tau\Delta}f(\tau),e^{-it\Delta}f(t)\right)_{L_x^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\left(f(\tau),\int_{\mathbb{R}} e^{i(\tau-t)\Delta}f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{L_x^2}\,\mathrm{d}\tau\\
\leqslant&\|f\|_{L_t^{p'}L_x^{q'}}\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(\tau-t)\Delta}f(t)\,\mathrm{d}t\right\|_{L_t^pL_x^q}\leqslant C\|f\|_{L_t^{p'}L_x^{q'}}^2.
\end{aligned}$$

---

[2]如果单纯证明Strichartz估计，事实上有比应用 Christ-Kiselev 引理更简单的方法，参见 [5, 引理 1.10] 中由 Grillakis 和 Machedon 给出的证明。

然后，(6.5.7) 可以借助 (6.5.8) 和 L^p 范数的对偶表示 (C.1.1) 来证明。

$$\begin{aligned}
\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^pL_{\boldsymbol{x}}^q} &= \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\Delta}f(t,\boldsymbol{x})\overline{\varphi(t,\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(e^{it\Delta}f,\varphi\right)_{L_{\boldsymbol{x}}^2}\,\mathrm{d}t\right| = \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left|\left(f,\int_{\mathbb{R}}e^{it\Delta}\varphi\,\mathrm{d}t\right)_{L_{\boldsymbol{x}}^2}\right| \\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\|f\|_{L^2}\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{it\Delta}\varphi\,\mathrm{d}t\right\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

其中我们在倒数第二个不等式中用到了 (6.5.8)。对 (6.5.9)，我们再次用对偶表示得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^pL_{\boldsymbol{x}}^q} = \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i(t-\tau)\Delta}f(\tau),\varphi(t,\cdot)\right)_{L_{\boldsymbol{x}}^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left|\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i\tau\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\int_{\mathbb{R}}e^{-it\Delta}\varphi(t,\cdot)\,\mathrm{d}t\right)_{L_{\boldsymbol{x}}^2}\right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{i\tau\Delta}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_{\boldsymbol{x}}^2}\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{it\Delta}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\|_{L_{\boldsymbol{x}}^2} \\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}}\leqslant 1}\|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}L_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{q}'}}\|\varphi\|_{L_t^{p'}L_{\boldsymbol{x}}^{q'}} \leqslant C\|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}L_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{q}'}}.
\end{aligned}$$

□

习题 6.5

习题 6.5.1. 考虑线性Schrödinger方程

$$i\partial_t u + \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

证明：

$$\lim_{t\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant\sqrt{t}}|u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

习题 6.5.2. 设$d=3$，考虑使用容许对$(p,q)=(4,3)$. 令$F(u)(t,\boldsymbol{x})=|u|^2u(t,\boldsymbol{x})$，证明如下带导数的Strichartz估计

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta}F(u)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L_t^\infty H_{\boldsymbol{x}}^1} \leqslant \|u\|_{L_t^4W_{\boldsymbol{x}}^{1,3}}^3.$$

6.6 质量临界非线性Schrödinger方程

本节我们考虑质量临界的非线性Schrödinger方程(mass critical NLS).

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm|u|^{\frac{4}{d}}u(=: F(u)), \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}). \tag{6.6.1}$$

6.6.1 小初值整体解和散射

我们证明质量临界NLS(6.6.1)的小初值整体适定性和散射。粗略地说，整体适定性和散射意味着 (6.6.1) 有可以延续到无穷时间的解，且当 $t \to \pm\infty$ 时，该解接近线性Schrödinger方程的解。

定义 6.6.1 (适定性). *初值问题被称为在区间 $I, 0 \in I \subset \mathbb{R}$ 上适定的，是指*

- *初值问题存在唯一解，*
- *解关于时间变量是连续的，*
- *解对初值有连续依赖性。*

定义 6.6.2 (散射 (scattering)). *我们称NLS的解在时间正向散射 (time-forward scattering)，是指解在 $t \in [0,\infty)$ 上存在，且存在函数 u_+ 使得*

$$u(t) - e^{it\Delta}u_+ \to 0, \qquad t \to +\infty.$$

NLS的解被称为在时间倒向散射 (time-backward scattering)，是指解在 $(-\infty, 0]$ 上存在，且存在 u_- 使得

$$u(t) - e^{it\Delta}u_- \to 0, \qquad t \to -\infty.$$

初值问题的解被称为是散射的，是指该问题整体适定，且在时间正向和倒向都散射，且 u_+ 和 u_- 对初值均有连续依赖性。

定理 6.6.1. *对任意 $d \geqslant 1$，存在充分小的 $\varepsilon_0(d) > 0$ 使得当 $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon_0$时，方程 (6.6.1) 在 $L_{t,\boldsymbol{x}}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ 中整体适定并在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中散射。*

证明. 我们首先证明存在性。设 $d \geqslant 1$，且为简单起见可以取$p = q$. 如果(p,q)是容许对，则可算出 $p = q = \frac{2(d+2)}{d}$，所以我们考虑如下Banach空间

$$X := \left\{ u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \|u\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon_0 \right\}.$$

其中 C 为常数。据Strichartz估计，存在常数 $C(d)$ 使得 $\left\|e^{it\Delta}u_0\right\|_{L_{t,\boldsymbol{x}}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon_0$.

现在我们定义映射

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}F(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

若 $u \in X$ 满足$\Phi(u)(t) = u(t)$，则 u 是 (6.6.1) 的解。据压缩映射原理，欲证明 (6.6.1) 在 X 中存在唯一解，只需证明 $\Phi(X) \subseteq X$ 且 Φ 是 X 上的压缩映射。由 $p = q = \frac{2(d+2)}{d}$ 的Strichartz估计和Hölder不等式，若 $u \in X$则有

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|F(u)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d+4}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|u\|^{1+\frac{4}{d}}_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant (C\varepsilon_0)^{1+\frac{4}{d}}.$$

因此我们只要选取常数ε_0充分小，就能得到 $\Phi(X) \subseteq X$.

接下来证明 Φ 是压缩映射，对 $u, v \in X$，我们计算

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} &\leqslant C\|F(u) - F(v)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d+4}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C \left\| |u|^{\frac{4}{d}} + |v|^{\frac{4}{d}} \right\|_{L_{t,x}^{\frac{d+2}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \|u - v\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

这里我们利用了 $||u|^\alpha u - |v|^\alpha v| \leqslant (1+\alpha)(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u - v|$. 现在对充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，有

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}$$

这说明 Φ 确实是X上的压缩映射。因此存在唯一的 $u \in X$ 成为 Φ 的不动点，它也是质量临界NLS (6.6.1) 的解。唯一性和对初值的连续依赖性可以用同样的方法证明，这里略去。

最后我们证明散射。设

$$u_+ = u_0 - i\int_0^\infty e^{-it\Delta} F(u(t))\,\mathrm{d}t, \qquad u_- = u_0 + i\int_{-\infty}^0 e^{-it\Delta} F(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

再由Strichartz估计和Christ-Kiselev引理知，$u_+, u_- \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$ 是良定的。又由控制收敛定理知

$$\lim_{T\to\infty} \|F(u)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d+4}}([T,\infty)\times\mathbb{R}^d)} = 0.$$

因此有

$$\left\| e^{iT\Delta} u_+ - u(T) \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} = \left\| \int_T^\infty e^{i(t-\tau)\Delta} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$$

这证明了对任意小初值 $\|u_0\|_{L^2} \leqslant \varepsilon_0$，方程(6.6.1)都有整体解，且在正时间方向散射。证明解在负时间方向散射也是完全一样的，在此略过。 □

6.6.2 NLS的位力恒等式

当 $\mu=-1$ 时，即对聚焦NLS而言

$$i\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^{p-1}u,\quad u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}),\quad \mu=\pm 1, \tag{6.6.2}$$

能量

$$E(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.6.3}$$

尽管是守恒的，但它可能是负的。这种情况下我们可以借助**位力恒等式 (Virial identity)** 证明方程的解发生有限时间爆破。本节我们再次以质量临界NLS为例，即假设$p-1=\frac{4}{d}$. 需注意，这个结果并不与上节证明的小初值整体适定性相矛盾。

我们定义**位力势 (Virial potential)** 如下

$$V(t):=\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}|^2|u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6.6.4}$$

容易看出 $V(t)$ 必须是非负的。另一方面我们可以证明，对 (6.6.2) 的任意解 u，如果它满足 $\boldsymbol{x}u\in L^2(\mathbb{R}^d)$，则如下结论成立

命题 6.6.2 (NLS的Virial恒等式). *设 u 是 (6.6.2) 的光滑解，且 $u_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$, $|\boldsymbol{x}|u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 则有*

$$V''(t)=8\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2\pm 4d\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\frac{2}{p+1}\right)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6.6.5}$$

特别地，如果我们令 $p-1=\frac{4}{d}$，那么就得到 $V''(t)=16E(t)$，据此可证明以下定理。

定理 6.6.3. *设 $u:[0,T_*)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 是聚焦、质量临界NLS（(6.6.1) 中 $\mu=-1$）的光滑解，且 $u_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$, $|\boldsymbol{x}|u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 若以下条件之一成立，就必有 $T_*<\infty$:*

(a) $E(0)<0$;

(b) $E(0)=0,\ V'(0)<0$;

(c) $E(0)>0,\ V'(0)<0,\ (V'(0))^2-32E(0)V(0)>0$.

注记 6.6.1. 需注意这个结果并不违反定理6.6.1中的小初值整体适定性，因为上述条件均与$\|u_0\|_{L^2}\ll 1$相矛盾。以(a)为例，我们实际上可以证得如下 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式：对任意$u\in H^1(\mathbb{R}^d)$有

$$\|u\|_{L^{2+\frac{4}{d}}}^{2+\frac{4}{d}}\leqslant C\|u\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

1982年, Weinstein证明了该不等式的最佳常数为 $C_*=\frac{2+(4/d)}{2\|Q\|_{L^2}^{4/d}}$. 这里的$Q$是基态解，即它是满足椭圆方程 $-\Delta Q=-Q+|Q|^{4/d}Q$ 的唯一径向正解。其证明方法是将最佳常数转化为具有约束条件的变

分问题，而它的极小化子满足如上椭圆方程，见如下文章

- Michael Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. Commun. Math. Phys., **87**(4), 567–576, 1982.

由Pohozaev恒等式的推导方法(习题2.8.1)并代入能量(6.6.3)中可以算得

$$E(t) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left[1-\left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}}\right)^{4/d}\right].$$

因此当$\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$时，才有$E(t) \geqslant 0$. 这说明如果$E < 0$，则初值的质量必定高于基态质量，与小初值矛盾。

"命题 6.6.2 ⇒ 定理 6.6.3" 的证明. 对聚焦质量临界NLS，由能量守恒，我们已经有 $V''(t) = 16E(t) = 16E(0)$. 然后对t积分两次，就得到 $V(t) = V(0) + V'(0)t + 8E(0)t^2$, 这是一个关于 t 的常系数二次函数。因此，只要 (a)-(c) 中任一条成立，我们就会得到当 $t \to \infty$ 时 $V(t) \to -\infty$，这与 $V(t)$ 的非负性矛盾。所以如果 (a)-(c) 中任一条成立，解的存在时长 T_* 必须是有限的。 □

余下只要证明位力恒等式 (6.6.5).

命题 6.6.2 的证明. 第一步: 计算 $V'(t)$. 注意 u 是复值函数，所以 $|u|^2 = u\bar{u}$, $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \overline{\nabla u}$. 接下来我们将反复使用诸如 $2\mathbf{Re}\,(z\bar{w}) = z\bar{w}+\bar{z}w$, $\mathbf{Re}\,(iz) = -\mathbf{Im}\,(z)$ 等事实，其中 $z, w \in \mathbb{C}$. 对$V(t)$求导得到

$$\begin{aligned}
V'(t) &= 2\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{x}|^2 \bar{u}\partial_t u = 2\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} i|\boldsymbol{x}|^2\bar{u}\Delta u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \pm \underbrace{2\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} i|\boldsymbol{x}|^2|u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{=0} \\
&= -2\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{x}|^2(\bar{u}\Delta u + \underbrace{|\nabla u|^2}_{\mathbf{Im}\,|\nabla u|^2=0})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{x}|^2\nabla\cdot(\bar{u}\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= 2\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\nabla(|\boldsymbol{x}|^2)}_{=2\boldsymbol{x}}\cdot(\bar{u}\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)u\,\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

第二步：计算 $V''(t)$. 再求一次导并分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
V''(t) &= 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)u\,\overline{\partial_t u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\partial_t u\,\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)u\,\overline{\partial_t u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 4\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla\cdot\boldsymbol{x})\partial_t u\,\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -8\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 4d\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\,\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

现在记 $J_1 := \mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $J_2 := \mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u\,\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 则有 $V''(t) = -8J_1 - 4dJ_2$. 而 J_2 在代入方程并分部积分后很容易计算

$$J_2 = -\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}(i\partial_t u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}\Delta u \mp |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \pm |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对 J_1，我们也代入NLS方程得到

$$\begin{aligned}J_1 =& \mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d} (i\Delta u \mp i|u|^{p-1}u)\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ =&\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \mp \mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p-1}u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

现在记 $K_1 := \mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $K_2 := \mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p-1}u\,(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 则有 $J_1 = K_1 \mp K_2$.

对 K_2，我们记 $g(x) = x^{\frac{p-1}{2}}$ 及其原函数 $G(x) := \frac{2}{p+1}x^{\frac{p+1}{2}}$，分部积分可得

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} (\boldsymbol{x}\cdot\nabla)(|u|^2)g(|u|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} (\boldsymbol{x}\cdot\nabla)G(|u|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\cdot\boldsymbol{x})G(|u|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{d}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

对 K_1，我们通过分部积分得到

$$\begin{aligned}K_1 &= -\sum_{j,k}\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u\,\partial_j(x_k\partial_k\bar{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\sum_{j,k}\mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u\,\delta_{jk}\partial_k\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathbf{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u\,x_k\partial_k\partial_j\bar{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\boldsymbol{x}\cdot\nabla)(|\nabla u|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\left(1-\frac{d}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

将上述等式加起来，我们得到

$$J_1 = -\left(1-\frac{d}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \pm \frac{d}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

因此，

$$V''(t) = -8J_1 - 4dJ_2 = 8\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \pm 4d\int_{\mathbb{R}^d} \left(1-\frac{2}{p+1}\right)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

□

习题 6.6

习题 6.6.1 (拟共形守恒律). 如果 u 是方程 (6.6.1) 的解，证明如下定义的量关于时间守恒。

$$\|(x+2it\nabla)u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2+\frac{8t^2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,\boldsymbol{x})|^{p+2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad p=\frac{4}{d}.$$

习题 6.6.2. 证明非线性Schrödinger方程 (6.6.2) 的质量、能量和动量守恒律。

- (质量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$.
- (能量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2\pm\frac{1}{p+1}|u(t,\boldsymbol{x})|^{p+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$.
- (动量守恒) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Im}\int_{\mathbb{R}^d}u(t,\boldsymbol{x})\overline{\nabla u(t,\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$.

问题 6.6

问题 6.6.1. 今考虑cubic NLS解的性质。

$$\mathbf{i}\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^2u\ \text{ in }(0,T)\times\mathbb{R}^3,\quad u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}).\tag{NLS}$$

其中初值$u_0\in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\mu=\pm1$.

(1) 利用习题6.5.2的结论证明：当$\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\ll 1$时，方程(NLS)有小初值整体解$u\in L_t^\infty(\mathbb{R};H_{\boldsymbol{x}}^1(\mathbb{R}^3))\cap L_t^4(\mathbb{R};W_{\boldsymbol{x}}^{1,3}(\mathbb{R}^3))$.

(2) 现在设$\mu=-1$，初值还满足$|\boldsymbol{x}|u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$. 设$u:[0,T_*)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$是此时(NLS)在$[0,T_*)\times\mathbb{R}^3$上的解。定义能量$E(t)$和位力势$V(t)$如下

$$E(t):=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2-\frac{1}{4}|u(t,\boldsymbol{x})|^4\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad V(t):=\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{x}|^2|u(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明：若$E(0)<0$，则$T_*<+\infty$. (提示：(2)先写出位力恒等式，然后证明$V''(t)\leqslant 16E(t)$.)

以能量临界NLS为例 $i\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^{\frac{4}{d-2}}u$, ($\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 3$), 我们在本讲义中已经证明了小初值整体适定性（在假设端点 Strichartz 估计成立的前提下）。而对大初值的情况，我们必须分散焦、聚焦讨论，而聚焦情况的长时间行为分类非常困难。

散焦、能量临界NLS具有大初值整体解且有散射（即 NLS 的解表现得像线性 Schrödinger 方程的解）。1999年，分析学的旷世奇才 Jean Bourgain 证明了径向解的情况，后由经典文献“CKSTT”证明了非径向解的情况。

- Jean Bourgain. Global well-posedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case. J. Amer. Math. Soc., **12**(1), 145–171, 1999.
- James Colliander, Markus Keel, Gigiola Staffilani, Hideo Takaoka, Terence Tao. Global well-posedness and scattering for the energy-critical Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$. Ann. Math. **167**(3),

767–865, 2008.

聚焦NLS带大初值时不一定有整体解，问题6.6.1就是一个利用位力恒等式构造的反例。对爆破解而言，我们一般根据爆破机制的不同将其分为第一型爆破（Type I blow-up，又称 ODE 型 blow up）以及第二型爆破（Type II blow-up，又称非 ODE 型 blow up）。前者一般是由非线性效应导致的，一般应根据 NLS 的伸缩不变性给出自相似解的轮廓 (profile) 然后再求解它满足的常微分方程。对能量临界 NLS 来说，目前尚未有证明 Type I blow-up 的结果。对 Type II blow-up, Kenig-Merle 利用集中紧方法和刚性定理，对能量临界 NLS 的径向解证明了：如果初值的能量和$\dot{H}^1$范数严格低于“基态解”，则解整体存在且有散射；反之若严格高于，则可以发生爆破。后来 Duyckaerts, Merle 等人对恰好处于“基态解”这一阈值的初值也作出了分类讨论。在更高维数时，半线性方程的局部理论有所不同，其结果可参见李栋和张晓轶的文章。

- Carlos Kenig, Frank Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation. Invent. Math., **166**(3), 645–675, 2006.
- Thomas Duyckaerts, Frank Merle. Dynamic of Threshold Solutions for Energy-Critical NLS. Geom. Funct. Anal. **18**(6), 1787–1840 (2009).
- Dong Li, Xiaoyi Zhang. Dynamics for the energy-criticial nonlinear Schrödinger equation in high dimensions. J. Funct. Anal., **256**(6), 1928–1961, 2009.

而近年 Merle–Raphaël–Rodnianski–Szeftel 完成了能量超临界 NLS 的散焦爆破解构造

- Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski, Jérémie Szeftel. On blow up for the energy super-critical defocusing nonlinear Schrödinger equations. Invent. Math., **227**(1), 247–413, 2022.

该结果与可压缩Euler方程和Navier–Stokes方程的爆破直接相关

- Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski, Jérémie Szeftel. On the implosion of a compressible fluid I: Smooth self-similar inviscid profiles. Ann. Math., **196**(2), 567–778, 2022.
- Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski, Jérémie Szeftel. On the implosion of a compressible fluid II: Singularity formation. Ann. Math., **196**(2), 779–889, 2022.

而对NLS的长时间行为，一个“终极猜想”即为所谓的**孤立子分解猜想 (soliton resolution conjecture)**，即猜测解在其存在时间范围内必定是辐射部分（radiation，类似于线性问题）加上若干个形状不变的孤立子，再加上小扰动，即

$$u(t,\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{J}\frac{e^{i\gamma_j(t)}}{\lambda_j(t)^{\frac{d-2}{2}}}V_j\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j(t)}{\lambda_j(t)}\right)+u_{\text{radiation}}(\boldsymbol{x})+o_{\dot{H}^1}(1).$$

而上面所说的爆破解，则是至少有一个bubble发生了聚集现象，即尺度 $\lambda_j(t)\to 0$，进而发生爆破。对 Schrödinger 方程而言，这个问题还处于长期公开的状态。

第七章　变分法简介

在对称椭圆算子的主特征值变分原理的证明中，变分法的思想已经出现：将特征值问题的解等价为某个位势能量泛函的极小化子。类似的思想则可以用于从“最小作用量原理”的角度出发推导出各种重要的偏微分方程。本章我们简要介绍欧拉-拉格朗日方程（最小作用量原理）及其简单应用。在本章末尾我们还介绍了诺特定理的数学表述，它可以用来推导方程的各种守恒量、单调量，这对非线性偏微分方程的研究起到重要作用。

7.1　一阶变分：欧拉-拉格朗日方程

今假设我们要求解某个微分方程 $A[u]=0$, 其中$A[\cdot]$是一个(非线性)微分算子, u是未知函数。显见，我们很难找到一般性的理论来求解非线性微分方程。但是变分法的思想告诉我们：对一部分微分方程问题(我们称作“变分问题”)，我们可以将微分方程的解视作某个“能量泛函”$I[\cdot]$的临界点，即$I'[u]=0$, 而能量泛函临界点的存在性往往可以通过泛函分析的方法求得。

本节简要介绍一阶变分的一般理论。设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑(如果非空)的开集，我们定义光滑函数$L:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\overline{U}\to\mathbb{R}$为**拉格朗日量 (Lagrangian)**, 其具有形式

$$L=L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})=L(p_1,\cdots,p_d,z,x_1\cdots,x_d),\qquad \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d,\ z\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.$$

其中$\boldsymbol{p},z$变量往往取成$\nabla w(\boldsymbol{x}),w(\boldsymbol{x})$, 这里$w(\boldsymbol{x})$是一个标量函数。我们还定义如下记号

$$\nabla_{\boldsymbol{p}}L=(\partial_{p_1}L,\cdots,\partial_{p_d}L),\ \nabla_zL=\partial_zL,\ \nabla_{\boldsymbol{x}}L=(L_{x_1},\cdots,L_{x_d}).$$

今考虑形如下式的泛函

$$I[w]:=\int_U L(\nabla w(\boldsymbol{x}),w(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中 $w:\overline{U}\to\mathbb{R}$属于某个容许集 (admissible set), 例如 $\mathcal{A}:=\{w\in C^\infty(\overline{U}):w|_{\partial U}=g\}$, 其中$g$是给定的函数。

定理 7.1.1. *设$\mathcal{A}:=\{w\in C^\infty(\overline{U}):w|_{\partial U}=g\}$, 其中$g$是给定的光滑函数。若$u\in\mathcal{A}$是$I[\cdot]$的极小化*

子(如果存在)，即 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$, 则$u$满足如下**欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange equation)**

$$-\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}(\partial_{p_i}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x}))+\partial_z L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})=0\quad \text{in } U. \tag{7.1.1}$$

证明. 任取$v\in C_c^\infty(U)$, 我们知道$u\in\mathcal{A}\Rightarrow u+\varepsilon v\in\mathcal{A}$. 令

$$j(\varepsilon):=I[u+\varepsilon v],\ \ \varepsilon\in\mathbb{R}.$$

由于u是$I[\cdot]$的极小化子, 所以$j(\varepsilon)$在$\varepsilon=0$取到最小值，所以$j'(0)=0$.

现在计算$j'(0)$. 据

$$j(\varepsilon)=\int_U L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

求导得

$$j'(\varepsilon)=\int_U\sum_{i=1}^{d}\partial_{p_i}L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}v+\partial_z L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令 $\varepsilon=0$, 我们得到

$$0=j'(0)=\int_U\sum_{i=1}^{d}\partial_{p_i}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}v+\partial_z L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

最后，我们中第一项中分部积分一个∂_{x_i}就得到想要的结论。 □

7.1.1 若干实例：各种基本方程的导出

例 7.1.1 (Poisson方程). 给定函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定义其原函数为$F(z)=\int_0^z f(y)\,\mathrm{d}y$. 我们现在考虑如下能量泛函

$$I[w]=\int_U\frac{1}{2}|\nabla w|^2-F(w)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

讨论. 由$L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2-F(z)$知,

$$\partial_{p_i}L=p_i,\ \ \partial_z L=-f(z).$$

所以欧拉-拉格朗日方程为

$$-\Delta u=f(u)\text{ in }U.$$

一般来说，$F(z)$往往取成多项式形式，例如$F(z)=\pm\frac{1}{p+1}z^{p+1}$, 它对应的欧拉-拉格朗日方程为$-\Delta u=\pm u^p$. 若$F\equiv 0$, 则这就是Laplace方程的Dirichlet原理。 □

注记 7.1.1. 我们同样也可以在能量泛函中引进时间变量t, 即将变量$\boldsymbol{x}$换为$(t,\boldsymbol{x})$, 梯度∇w换成$(\partial_t w,\ \nabla w)$, 这样就可以推导出波动方程。例如，考虑

$$I[w]=\int_0^T\int_U \frac{1}{2}w_t^2-\left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2+F(w)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

它对应的欧拉-拉格朗日方程即为波动方程

$$u_{tt}-\Delta u+f(u)=0.$$

例 7.1.2 (极小曲面 (minimal surface)). 考虑Plateau问题: 三维空间中给定一条闭曲线，以它为边界的曲面的面积最小值何时取到？

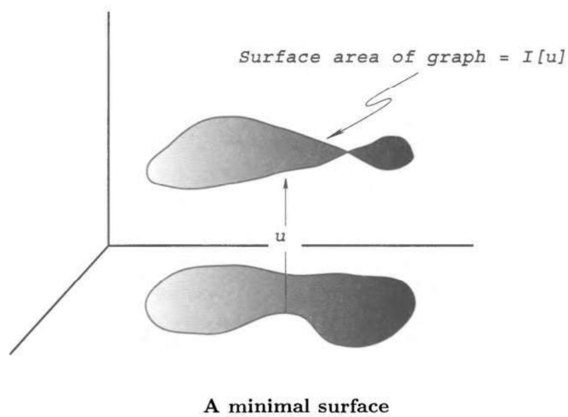


图 7.1: 极小曲面示例

讨论. 为了避免不必要的麻烦，我们考虑参数曲面的面积最小值，即计算如下泛函的极小化子

$$I[w]=\int_U\sqrt{1+|\nabla w|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

它对应的拉格朗日量为$L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})=\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2}$, 所以$\partial_{p_i}L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})=\frac{p_i}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2}}$, $\partial_z L=0$. 现在将$(\boldsymbol{p},z)$换成$(\nabla u,u)$, 我们就得到极小化子u满足的方程

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right):=\sum_{i=1}^d\partial_{x_i}\left(\frac{\partial_{x_i}u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0.$$

□

注记 7.1.2. 表达式$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$实际上是函数$u$的图像的平均曲率的$d$倍，所以上面求得的极小曲面的平均曲率为零。此外，这个量也有物理意义：流体的表面张力是正比于其界面的平均曲

率的。

例 7.1.3 (调和映射 (harmonic map)). 我们现在将标量函数w换成向量值函数$\mathbf{w} : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. 考虑如下泛函

$$I[\mathbf{w}] := \int_U \frac{1}{2}|\nabla \mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

在容许集 $\mathcal{A} := \{\mathbf{w} \in C^2(U \to \mathbb{R}^m) : w|_{\partial U} = \mathbf{g},\ |\mathbf{w}| = 1\}$ 上的极小化子。这看上去是一个几何问题，但实际上该问题的变种还能用来刻画液晶运动的稳态。我们证明极小化子$\mathbf{u}$满足如下拟线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} & \text{in } U \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

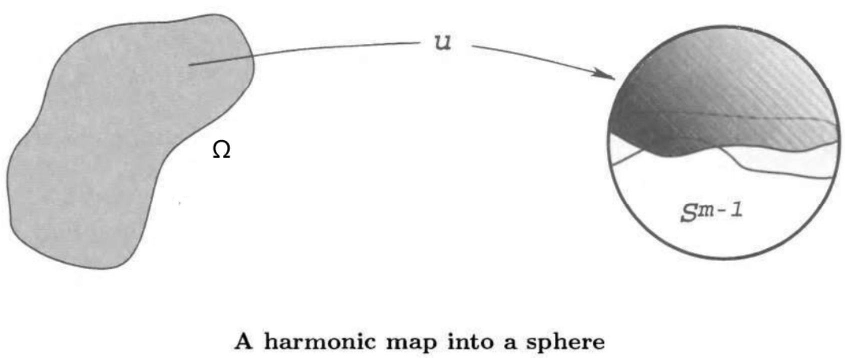


图 7.2: 到球面的调和映射

证明. 任取$\mathbf{v} \in C_c^\infty(U \to \mathbb{R}^m)$, 由于$|\mathbf{u}| = 1$, 我们知道当$\varepsilon$很小时有$|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}| \neq 0$, 进而$\mathbf{v}_\varepsilon := \dfrac{\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}|} \in \mathcal{A}$.

现在我们定义$j(\varepsilon) := I[\mathbf{v}_\varepsilon]$, 则$j$在$\varepsilon = 0$取到最小值，所以$j'(0) = 0$. 直接计算得

$$j'(0) = \int_U \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}'(0) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

这里的记号 $' := \frac{d}{d\varepsilon}$; $A : B := \sum\limits_{i,j} A_{ij} B_{ij}$.

接下来计算

$$\mathbf{v}'(\varepsilon) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}|} - \frac{((\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v})}{|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}|^3} \Rightarrow \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}.$$

将其代入$j'(0)$的表达式，得到

$$0=\int_U \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}-\nabla\mathbf{u} : \nabla((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $|\mathbf{u}|^2=1$, 我们求导得到 $\sum\limits_{j=1}^{m}(\partial_i u_j)u_j=0$ 对任意$1\leqslant i\leqslant d$ 都成立，即 $(\nabla\mathbf{u})^\top\mathbf{u}=\mathbf{0}$. 据此算得

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{u} : \nabla((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u})&=\sum_i\sum_j\partial_i\mathbf{u}_j\partial_i(\sum_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k\mathbf{u}_j)\\&=|\nabla\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\sum_i\underbrace{\sum_j\partial_i\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j}_{=0}\partial_i(\sum_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k)=|\nabla\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}).\end{aligned}$$

现在有

$$\int_U\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U|\nabla\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ \forall\mathbf{v}\in C_c^\infty(U\to\mathbb{R}^m).$$

左边分部积分一次，最终得到如下恒等式

$$\int_U(-\Delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U|\nabla\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ \forall\mathbf{v}\in C_c^\infty(U\to\mathbb{R}^m).$$

由$\mathbf{v}$的任意性得知，方程 $-\Delta\mathbf{u}=|\nabla\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$在$U$中恒成立。 □

7.1.2 二阶变分：凸性假设

若泛函$I[w]$在u达到极小值，则$j(\varepsilon):=I[u+\varepsilon v]$满足$j'(0)=0$, 而进一步我们还有$j''(0)\geqslant 0$. 现在我们来看看二阶导数的信息能带来什么。回忆

$$j(\varepsilon)=\int_U L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon\nabla v,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

求两次导数得到

$$\begin{aligned}j''(\varepsilon)=\int_U&\sum_{i,j=1}^{d}\partial_{p_i}\partial_{p_j}L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}v\partial_{x_j}v\\&+2\sum_{i=1}^{d}\partial_{p_i}\partial_z L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}vv\\&+\partial_z^2L(\nabla u+\varepsilon\nabla v,u+\varepsilon v,\boldsymbol{x})v^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon=0$, 我们得到如下不等式对任意$v\in C_c^\infty(U)$都成立:

$$0\leqslant\int_U\sum_{i,j=1}^d\partial_{p_i}\partial_{p_j}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}v\partial_{x_j}v+2\sum_{i=1}^d\partial_{p_i}\partial_z L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\partial_{x_i}vv+\partial_z^2L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})v^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这实际上可以推出

$$\sum_{i,j=1}^d\partial_{p_i}\partial_{p_j}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\geqslant 0\quad \xi\in\mathbb{R}^d,\ \boldsymbol{x}\in U. \tag{7.1.2}$$

该式被称作拉格朗日量L的**凸性假设**。证明的过程可以参见 Evans [6] 第八章第一节，此处略去细节。其大致方法为：选取形如下式的测试函数v,

$$v(\boldsymbol{x})=\varepsilon\rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\eta(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in U,$$

其中$\eta\in C_c^\infty(U)$, $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个定义如下的“锯齿状”函数: $\rho(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant\frac12\\ 1-x & \frac12\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 且满足 $\rho(x+1)=\rho(x)\ \ x\in\mathbb{R}$.

可见，凸性假设(7.1.2)应当成为极小化子存在性的必要条件之一，具体可参见[6, 第8.2, 8.4节].

习题 7.1

习题 7.1.1. 求如下能量泛函的欧拉拉格朗日方程

$$I[w]:=\int_0^T\int_U\frac12 w_t^2-\frac12|\nabla w|^2-\frac{m^2}{2}w^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $w(t,\boldsymbol{x})\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, $m>0$是给定的常数。

习题 7.1.2. 定义

$$I[w]=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\frac12 w_t^2-\left(\frac12|\nabla w|^2+\frac16 w^6\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

其中$w(t,\boldsymbol{x})$属于容许集$\mathcal{A}=\{w\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3):w(t,\cdot)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)\ \ \forall t\in[0,T]\}$. 求$I[w]$在$\mathcal{A}$上的极小化子$u$满足的方程，并证明

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac12(u_t)^2+\frac12|\nabla u|^2+\frac16 u^6\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

是守恒量。

习题 7.1.3. 寻找拉格朗日量$L=L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})$, 使得方程$-\Delta u+\nabla\varphi\cdot\nabla u=f$ in U是 $I[w]:=\int_U L(\nabla w,w,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

对应的欧拉-拉格朗日方程. (提示：考虑带指数项的拉格朗日量。)

习题 7.1.4. 设$\varepsilon > 0$, $U_T := (0,T] \times U$. 证明：存在拉格朗日量$L(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}, t)$ ($\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{d+1}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$), 使得如下椭圆正则化的热传导方程

$$\partial_t u - \Delta u - \varepsilon \partial_t^2 u = 0$$

是能量泛函 $I_\varepsilon[w] := \iint_{U^T} L(\partial_t w, \nabla w, w, t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$ 对应的欧拉-拉格朗日方程. (提示：考虑带指数项且依赖时间t的拉格朗日量。)

习题 7.1.5. 设$L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$是光滑函数, 且对$\boldsymbol{p}$-分量是一致凸的，即存在$\theta > 0$使得

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{p_i}\partial_{p_j} L(\nabla u, u, \boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^d,\ \boldsymbol{x} \in U).$$

证明$I[w] := \int_U L(\nabla u, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$在$\mathcal{A} := \{w \in C^\infty(\overline{U}) : w|_{\partial U} = g\}$上的极小化子是唯一的，其中$g : \partial U \to \mathbb{R}$是给定的光滑函数。

提示：若u_1, u_2是两个不同的极小化子，证明$2I[\frac{u_1+u_2}{2}] < I[u_1] + I[u_2]$, 进而导出矛盾。

习题 7.1.6 (变分法推导Hamilton方程组). 本题用变分法考虑例**??**的另证。设拉格朗日量$L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$是给定的光滑函数, 并记为$L = L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$. 固定$t > 0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, 定义作用量为

$$I[\boldsymbol{w}] := \int_0^t L(\dot{\boldsymbol{w}}(s), \boldsymbol{w}(s))\,\mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{w} \in \mathcal{A} := \{\boldsymbol{w}(\cdot) \in C^2([0,t]; \mathbb{R}^d) : \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{x}\}.$$

令假设曲线$\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{A}$是$I[\cdot]$在$\mathcal{A}$上的极小化子，即$I[\mathbf{x}(\cdot)] = \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{A}} I[\boldsymbol{w}(\cdot)]$.

(1) 证明：极小化子$\mathbf{x}(\cdot)$满足常微分方程组

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\nabla_{\boldsymbol{v}} L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))] + \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) = 0, \quad \forall s \in [0,t].$$

(2) 令$\mathbf{p}(s) := \nabla_{\boldsymbol{v}} L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))$为对应于位置$\mathbf{x}(s)$和速度$\dot{\mathbf{x}}(s)$的广义动量，并假设对任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$, 方程$\boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{v}} L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$有唯一的光滑解$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$. 令与拉格朗日量$L$相关联的Hamilton量$H$为

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) := \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}).$$

证明：$(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot))$是如下Hamilton方程的解

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad \dot{\mathbf{p}}(s) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \qquad s \in [0,t].$$

且$s \longmapsto H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$是常值映射。

注记 7.1.3. 特别地，若令$L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - \phi(\boldsymbol{x}), m > 0$. 则对应的欧拉-拉格朗日方程为$m\ddot{\mathbf{x}}(s) = -\nabla\phi(\mathbf{x}(s))$，即为牛顿第二定律，其中右端项为势能$\phi$决定的力场。对应的$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{p}|^2 +$

$\phi(\boldsymbol{x})$即为总能量，拉格朗日量即为动能、势能之差。

习题 7.1.7. 今不再固定习题7.1.6中的起点$\boldsymbol{y}$, 即容许集$\mathcal{A} := \{\boldsymbol{w}(\cdot) \in C^2([0,t];\mathbb{R}^d) : \boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{x}\}$.

(1) 证明习题7.1.6的(1)仍然成立，以及$\nabla_{\boldsymbol{v}} L(\dot{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}(0)) = 0$.

(2) 若$\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{A}$是作用量$J[w] := \int_0^t L(\dot{\boldsymbol{w}}(s), \boldsymbol{w}(s))\,\mathrm{d}s + g(\boldsymbol{w}(0))$的极小化子, 证明: $\mathbf{x}(\cdot)$是欧拉拉格朗日方程的解，并确定$s=0$处的边界条件。

7.2 变分不等式：椭圆自由边界问题

现在我们再来回顾Dirichlet原理: 如果我们把限制条件$w|_{\partial U} = g$换成一个单侧的不等式 $w \geqslant g$ in U ($g \in C^\infty(\overline{U})$ 被称作障碍函数), 即我们定义容许集为

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) : w \geqslant g \text{ in } U,\ \ w|_{\partial U} = 0\},$$

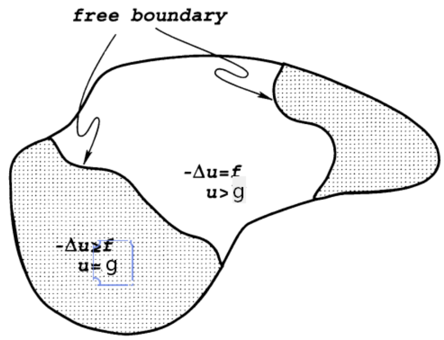
并考虑同样的能量泛函$I[w] := \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 该能量泛函在$\mathcal{A}$上的极小化子的存在唯一性需要使用泛函分析的方法证得，所以这里我们目前假设它是存在的。我们同样还假设$\mathcal{A}$是凸集(这个也是可以证明的). 然而，我们会发现现在的极小化子不再是位势方程边值问题的解吗，而是满足所谓的**变分不等式 (variational inequality)**:

- 如果u“超越了”障碍物，即当$u(x) > g(x)$时，我们仍有位势方程$-\Delta u = f$成立;
- 一般地，只有 $u \geqslant g$ 和 $-\Delta u \geqslant f$在U上恒成立。

定理 7.2.1 (变分不等式). 设$u \in \mathcal{A}$是$I[w]$在$\mathcal{A}$上的唯一极小化子. 则

$$\forall w \in \mathcal{A},\ \int_U (\nabla u)\cdot(\nabla(w-u))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \int_U f(w-u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

该不等式的证明并不困难，我们在本小节末尾再写出详细过程。更重要的则是如何理解该不等式。首先引进记号 $\mathcal{O} := \{\boldsymbol{x} \in U : u(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x})\}$, $\mathcal{C} := \{\boldsymbol{x} \in U : u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\}$.



The free boundary for the obstacle problem

图 7.3: 障碍物问题中的自由边界

由于u,g是连续函数，所以$\mathcal{O}$是开集, $\mathcal{C}$是(相对)闭集。

断言 1: $-\Delta u = f$在$\mathcal{O}$中恒成立。

断言 1的证明. 任取测试函数$v \in C_c^\infty(\mathcal{O})$, 由于在$\mathcal{O}$中有$u(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x})$, 所以当$|\varepsilon|$充分小时, 我们仍有$w(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon v(\boldsymbol{x}) \geqslant g(\boldsymbol{x})$,进而$w \in \mathcal{A}$. 据变分不等式，我们有

$$\varepsilon \int_{\mathcal{O}} (\nabla u) \cdot (\nabla v) - f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

由于该不等式对任意小的$\varepsilon > 0$和$\varepsilon < 0$都成立, 那么该式的不等号就只能变成等号了，这说明u满足$-\Delta u = f$在$\mathcal{O}$中恒成立。 □

断言 2: $u \geqslant g$ 和 $-\Delta u \geqslant f$在U上恒成立。

断言 2的证明. 一般情况下，我们选取v是非负测试函数，且$\varepsilon \in (0,1]$充分小。在变分不等式中分部积分可得

$$\int_U (-\Delta u - f) v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \ \ \forall v \in C_c^\infty(U),\ v \geqslant 0,$$

所以$-\Delta u \geqslant f$在U上恒成立。 □

注记 7.2.1. 集合$F := \partial\mathcal{O} \cap U$被称作**自由边界** (free boundary), 这里的“自由”一词是指我们并不知道这个交界面的具体位置在哪。而椭圆方程的自由边界问题在最优传输问题、空气动力学的定常冲击喷流问题等许多实际模型中都有出现。

在本小节的最后，我们来证明变分不等式。

变分不等式的证明. 固定 $w \in \mathcal{A}$, 则对任意$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, 由集合$\mathcal{A}$的凸性，我们有

$$u + \varepsilon(w - u) = (1-\varepsilon)u + \varepsilon w \in \mathcal{A}.$$

所以如果令 $j(\varepsilon)=I[u+\varepsilon(w-u)]$, 就会得到$j(\varepsilon)\geqslant j(0)$对任意$\varepsilon\in[0,1]$恒成立，这说明$j'(0)\geqslant 0$.

现在我们用导数定义计算$j'(0)$. 对$\varepsilon\in(0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{j(\varepsilon)-j(0)}{\varepsilon}=&\frac{1}{\varepsilon}\int_U\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla(w-u)|^2-|\nabla u|^2}{2}-f\,(u+\varepsilon(w-u)-u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&\int_U\nabla u\cdot\nabla(w-u)+\frac{\varepsilon|\nabla(w-u)|^2}{2}-f(w-u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0_+$, 结合$j'(0)\geqslant 0$可得

$$\int_U\nabla u\cdot\nabla(w-u)-f(w-u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant 0.$$

□

习题 7.2

习题 7.2.1. 证明$I[w]:=\int_U\frac{1}{2}|\nabla w|^2-wf\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$在容许集 $\mathcal{A}=\{w\in C^2(\overline{U}):w\geqslant g\text{ in }U,\ w|_{\partial U}=0\}$上的极小化子是唯一的，其中$g\in C^\infty(\overline{U})$是给定的函数。

习题 7.2.2. 证明：定理7.2.1中的变分不等式也可写作 $-\Delta u+\beta(u-g)\ni f$, 其中$\beta(\cdot)$为如下定义的多值函数

$$\beta(z):=\begin{cases}0 & z>0\\(-\infty,0] & z=0\\\emptyset & z<0\end{cases}.$$

习题 7.2.3. 给定$f\in L^2(U)$, 设u是泛函 $I[w]:=\int_U\frac{1}{2}|\nabla w|^2-wf\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在容许集 $\mathcal{A}=\{w\in C^2(\overline{U}):|\nabla w|\leqslant 1\text{ in }U,\ w|_{\partial U}=0\}$ 上的极小化子。证明：u 满足不等式

$$\int_U\nabla u\cdot\nabla(w-u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_U(w-u)f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\quad\forall w\in\mathcal{A}.$$

7.3　诺特定理

我们现在考虑能量泛函在适当的区域/函数变化下的不变性，并证明相应的欧拉-拉格朗日方程的解可以自动推出某些散度型守恒定律，这就是诺特定理 (Noether's theorem) 的实质内容。特别地，利用诺特定理，我们可以得到一些“乘子”，它能帮助我们推导出方程中不易观察到的一些守恒量、单调量。

本节我们假设$U\subseteq\mathbb{R}^d$是开集, 并记$I[w]=\int_U L(\nabla w,w,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 其中 $w:U\to\mathbb{R}$, $L=L(\boldsymbol{p},z,\boldsymbol{x})$都是光滑函数。

7.3.1 定理的叙述与证明

在叙述定理之前，我们需要引进区域变分和函数变分的概念。

记号 7.3.1 (区域变分 (domain variation)). 设$\mathfrak{X}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\boldsymbol{x}, \tau)$是一组随参数光滑变化的光滑向量场, 且对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$都有$\mathfrak{X}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x}$. 对充分小的参数$\tau$, 映射$\boldsymbol{x} \longmapsto \mathfrak{X}(\boldsymbol{x}, \tau)$ 被称作**区域变分** (domain variation). 同时我们记 $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}) := \mathfrak{X}_\tau(\boldsymbol{x}, 0)$, $U(\tau) := \mathfrak{X}(U, \tau)$.

记号 7.3.2 (函数变分 (function variation)). 给定$u: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 我们考虑函数$u$的一族光滑的**函数变分(function variation)** $w: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $w = w(\boldsymbol{x}, \tau)$ 满足 $w(\boldsymbol{x}, 0) = u(\boldsymbol{x})$ 对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$成立。我们记 $m(\boldsymbol{x}) := w_\tau(\boldsymbol{x}, 0)$, 并称之为一个**乘子(multiplier)**.

定义 7.3.1. 我们称泛函$I[\cdot]$在区域变分$\mathfrak{X}$和函数变分w下具有不变性，是指如下恒等式对任意的小参数τ和任意开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 都成立:

$$\int_U L(\nabla w(\boldsymbol{x}, \tau), w(\boldsymbol{x}, \tau), \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{U(\tau)} L(\nabla w, w, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{7.3.1}$$

接下来我们叙述并证明诺特定理，其表明能量泛函在区域变分和函数变分下的不变性可以让我们从欧拉-拉格朗日方程中推出散度形式的恒等式。

定理 7.3.1 (诺特定理). 设$I[\cdot]$在区域变分$\mathfrak{X}$和(对应函数u的)函数变分w下具有不变性，则

1. 如下恒等式成立

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \big(m \nabla_{\boldsymbol{p}} L(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) - L(\nabla u, u, \boldsymbol{x})\mathbf{v}\big) = m\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} L(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) - \partial_z L(\nabla u, u, \boldsymbol{x})\right).$$

2. 特别地，若u是$I[\cdot]$的临界点，并满足欧拉-拉格朗日方程 $-\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{p}} L) + \partial_z L = 0$, 则有如下散度形式的恒等式成立

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \big(m \nabla_{\boldsymbol{p}} L(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) - L(\nabla u, u, \boldsymbol{x})\mathbf{v}\big) = 0.$$

证明. 我们只需在恒等式(7.3.1)中对τ求导，再令$\tau = 0$即可。据此，得到等式

$$\int_U \nabla_{\boldsymbol{p}} L \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} m + \partial_z L m\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} L(\mathbf{v} \cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

左边第一项分部积分，得到

$$\int_U \nabla_{\boldsymbol{p}} L \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} m\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U m \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} L(\nabla u, u, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial U} m \nabla_{\boldsymbol{p}} L \cdot N\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

再用散度定理，得到

$$\int_{\partial U} L(\mathbf{v} \cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} - \int_{\partial U} m \nabla_{\boldsymbol{p}} L \cdot N\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = \int_U \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \big(L\mathbf{v} - m \nabla_{\boldsymbol{p}} L\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

二者联立，得到

$$\int_U m\left(\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})-\partial_z L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\right)=\int_U \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\left(m\nabla_{\boldsymbol{p}}L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})-L(\nabla u,u,\boldsymbol{x})\mathbf{v}\right).$$

由于上式对任意开集$U\subset\mathbb{R}^d$都成立，所以左右两边的被积函数必定处处相等。 □

7.3.2 几个实例

在实际使用诺特定理的时候，我们需要先“预测”使用何种区域变分$\boldsymbol{\mathfrak{X}}$和函数变分$w$以求得能量泛函的变分不变性，进而可以用极小化子$u$表示出我们想要的乘子$m$. 本节介绍两个简单实例，更复杂的例子参见习题和问题部分，它们大多选自 Evans [6, 第8.6节].

例 7.3.1 (平移不变性). 设$L=L(\boldsymbol{p},z)$不依赖$\boldsymbol{x}$变量, 则$I[w]:=\int_U L(\nabla w,w)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$是平移不变的。给定$k\in\{1,\cdots,d\}$, 定义$\boldsymbol{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{x},\tau):=\boldsymbol{x}+\tau e_k$ 和 $w(\boldsymbol{x},\tau):=u(\boldsymbol{x}+\tau e_k)$. 然后我们可以按照区域变分和函数变分的定义算出

$$\mathbf{v}=e_k,\quad m=\partial_{x_k}u.$$

因此，如果u是$I[\cdot]$的一个临界点, 则定理7.3.1可以推出

$$\sum_{i=1}^d\partial_{x_i}(\partial_{p_i}L\,\partial_{x_k}u-L\delta_{ik})=0,\quad k=1,\cdots,d. \tag{7.3.2}$$

应用. 例如，我们将该结论应用到波动方程上，考虑

$$I[w]=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\frac12(\partial_t w)^2-\frac12|\nabla w|^2+F(w)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$

并设 u 为极小化子。我们之前已经算过 u 满足半线性波动方程

$$\partial_t^2u-\Delta u+f(u)=0,\quad f=F'.$$

对此泛函，我们记 $\boldsymbol{p}=(\partial_t w,\partial_1 w,\cdots,\partial_d w)$, $\boldsymbol{x}=(t,x_1,\cdots,x_d)$ 并取 $k=0$ (时间变量). 则 $L(\boldsymbol{p},z)=\frac12p_0^2-\frac12(p_1^2+\cdots+p_d^2)+F(z)$, 对应 $\mathbf{v}=e_0,m=\partial_t u$. 据诺特定理，我们得到

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot(\nabla u\,u_t)+\partial_t\left(u_t^2-\frac12(u_t^2-|\nabla u|^2)+F(u)\right)=0.$$

这表明$e:=\frac12(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)$ 满足 $e_t-\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot(u_t\nabla u)=0$. 若$u$充分光滑，则可以推出能量守恒$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$.

类似地如果取$k\in\mathbb{N}^*$(对应空间变量)，则$\mathbf{v}=e_k$, $m=\partial_k u$. 据诺特定理我们得到

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\nabla u\,\partial_k u-e_k\left(\frac{1}{2}(u_t^2-|\nabla u|^2)-F(u)\right)\right)+\partial_t(\partial_k u\partial_t u)=0.$$

对该式积分，并用散度定理知$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_k u\partial_t u=0$对任意$1\leqslant k\leqslant d$成立，这是波方程的动量守恒。 □

例 7.3.2 (波动方程的伸缩不变性). 回忆线性波动方程$\partial_t^2u-\Delta u=0$对应如下泛函的极小化子

$$I[w]=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t w)^2-|\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.$$

我们不难证明，波动方程在如下伸缩变换$(\boldsymbol{x},t)\longmapsto(\lambda\boldsymbol{x},\lambda t)$, $u\longmapsto\lambda^{\frac{d-1}{2}}u(\lambda\boldsymbol{x},\lambda t)$下具有不变性，其中$\lambda>0$. 今假设 $\lambda=e^\tau$ 并定义如下区域变分和函数变分

$$\mathfrak{X}(t,\boldsymbol{x},\tau)=(e^\tau t,e^\tau\boldsymbol{x}),\ w(t,\boldsymbol{x},\tau):=e^{\frac{(d-1)\tau}{2}}u(e^\tau t,e^\tau\boldsymbol{x}).$$

则据定义可以算出

$$\mathbf{v}=(t,\boldsymbol{x}),\quad m=tu_t+\boldsymbol{x}\cdot\nabla u+\frac{d-1}{2}u.$$

据诺特定理，经过漫长的无聊计算，我们可以求得散度型恒等式 $\partial_t p-\operatorname{div}\mathbf{q}=0$, 其中

$$\begin{aligned}p&:=\frac{t}{2}((\partial_t u)^2+|\nabla u|^2)+(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)\partial_t u+\frac{d-1}{2}uu_t,\\ \mathbf{q}&:=\left(tu_t+\boldsymbol{x}\cdot\nabla u+\frac{d-1}{2}u\right)\nabla u+\frac{1}{2}(u_t^2-|\nabla u|^2)\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

该恒等式中证明三维能量临界波动方程的整体解存在性时起到了关键性的作用，具体证明见 Evans [6, 第12.4节].

习题 7.3

习题 7.3.1 (p-拉普拉斯算子的伸缩不变性). 给定$p>0$, 考虑 $I[w]=\int_U|\nabla w|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明:

(1) 极小化子 (假设存在) u 满足p-Laplacian方程$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$.

(2) $I[w]$在变换$x\longmapsto\lambda\boldsymbol{x}$, $u\longmapsto\lambda^{\frac{d-p}{p}}u(\lambda\boldsymbol{x})$ ($\lambda>0$)下保持不变. 令$\lambda=e^\tau$并用诺特定理证明

$$\nabla\cdot\left[\left(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u+\frac{d-p}{p}u\right)p|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla u|^p\boldsymbol{x}\right]=0.\tag{7.3.3}$$

习题 7.3.2 (单调性公式). 设$B(\mathbf{0},r)$落在区域U内部.

(1) 将恒等式(7.3.3)在球$B(\mathbf{0},r)$上积分，并用Gauss-Green公式证明：

$$(d-p)\int_{B(\mathbf{0},r)}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=r\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}|\nabla u|^p-p|\nabla u|^{p-2}(\partial_r u)^2\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},$$

其中 $\partial_r u:=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\cdot\nabla u$ 是u的径向导数.

(2) 证明：$r\to\frac{1}{r^{d-p}}\int_{B(\mathbf{0},r)}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 关于r不减.

问题 7.3

问题 7.3.1 (Almgren单调性公式). 设u是区域$U\subseteq\mathbb{R}^d$上的调和函数，且满足$B(\mathbf{0},R)\subset U$, $u(\mathbf{0})=0$, $u\not\equiv 0$. 对$0<r<R$, 定义

$$a(r):=\frac{1}{r^{d-1}}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}u^2\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},\quad b(r):=\frac{1}{r^{d-2}}\int_{B(\mathbf{0},r)}u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在习题7.3.2的单调性公式中取$p=2$, 可以得到 $b'(r)=\frac{2}{r^{d-2}}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}(\partial_r u)^2\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$.

(1) 证明: $a'(r)=\frac{2}{r^{d-1}}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}u\,\partial_r u\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}=\frac{2}{r}b$.

(2) 证明: $b(r)^2\leqslant\frac{r}{2}a(r)b'(r)$.

(3) 定义频率函数$f:=\frac{b}{a}$, 证明**Almgren 单调性公式** $f'(r)\geqslant 0$ 恒成立. (提示: 用(1)的结论.)

(4) 证明: $\frac{a'(r)}{a(r)}\leqslant\frac{\beta}{r}$, 进而$a(r)\geqslant\gamma r^\beta$对任意$0<r<R$成立。此处 $\beta:=\frac{2b(R)}{a(R)}$, $\gamma:=\frac{a(R)}{R^\beta}$. 该结论给出了非常值调和函数在零点附近增长速率的下界估计。(提示: 先用(3), 再用(1).)

问题 7.3.2 (波动方程的共形能量和Morawetz恒等式). 定义双曲反演(hyperbolic inversion)如下

$$(t,\boldsymbol{x})\longmapsto(\bar{t},\bar{\boldsymbol{x}}):=\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2-t^2},\frac{t}{|\boldsymbol{x}|^2-t^2}\right),\quad\forall|\boldsymbol{x}|\neq t.\tag{7.3.4}$$

据此定义双曲Kelvin变换 $\mathcal{K}u=\bar{u}$ 为 $\bar{u}(t,\boldsymbol{x}):=u(\bar{t},\bar{\boldsymbol{x}})||\bar{\boldsymbol{x}}|^2-\bar{t}^2|^{\frac{d-1}{2}}$.

(1) 证明：若$\partial_t^2 u-\Delta u=0$, 则 $\partial_t^2\bar{u}-\Delta\bar{u}=0$.

(2) 考虑如下区域变分和函数变分

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\boldsymbol{x},\tau):=\gamma(t+\tau(|\boldsymbol{x}|^2-t^2),\boldsymbol{x}),\quad w(t,\boldsymbol{x},\tau):=\gamma^{\frac{d-1}{2}}u(\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x},\tau)),$$

其中 $\gamma:=\frac{|\boldsymbol{x}|^2-t^2}{|\boldsymbol{x}|^2-(t+\tau(|\boldsymbol{x}|^2-t^2))^2}$. 这个过程相当于是对变量$(t,\boldsymbol{x})$作双曲反演，然后再加上$\tau e_0$, 最后再作双曲反演。证明：对应的速度$\mathbf{v}$和乘子$m$分别为

$$\mathbf{v}=(|\boldsymbol{x}|^2+t^2,2t\boldsymbol{x}),\quad m=(|\boldsymbol{x}|^2+t^2)\partial_t u+2t\boldsymbol{x}\cdot\nabla u+(d-1)tu.$$

(3) 证明**Morawetz恒等式** $c_t - \operatorname{div}\mathbf{r} = 0$, 其中

$$\mathbf{r} := \big((|\boldsymbol{x}|^2 + t^2)\partial_t u + 2t\boldsymbol{x}\cdot\nabla u + (d-1)tu\big)\nabla u + t((\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2)\boldsymbol{x}, \tag{7.3.5}$$

$$\begin{aligned} c :=& \frac{(t+|\boldsymbol{x}|)^2}{4}\left(\partial_t u + \partial_r u + \frac{d-1}{2|\boldsymbol{x}|}u\right)^2 + \frac{(t-|\boldsymbol{x}|)^2}{4}\left(\partial_t u - \partial_r u - \frac{d-1}{2|\boldsymbol{x}|}u\right)^2 \\ &+ \frac{t^2+|\boldsymbol{x}|^2}{2}\left(|\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2 + \frac{(d-3)(d-1)}{4|\boldsymbol{x}|^2}u^2\right) - (d-1)\operatorname{div}\left(\frac{|\boldsymbol{x}|^2+t^2}{|\boldsymbol{x}|^2}u\boldsymbol{x}\right). \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Evans [6, 第8.6节] 原话是“After a longish calculation, we derive Morawetz's identity.”

问题 7.3.3 (波动方程的局部能量衰减). 设u是如下波动方程的光滑解

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ in } (0,\infty)\times U, \quad u(t,\boldsymbol{x}) = 0 \text{ on } (0,\infty)\times\partial U, \quad (u,\partial_t u)|_{t=0} = (u_0,u_1)\in C_c^\infty(U). \tag{7.3.7}$$

其中 $U := \mathbb{R}^d\backslash\overline{O}$, $O\subset\mathbb{R}^d$是有界开集，且关于原点是星型域。

回忆当$d = 3, U = \mathbb{R}^3, O = \emptyset$时, 线性波动方程的解具有$O(t^{-1})$的衰减速率。本题的目的是在$U$的有界子区域内建立$O(t^{-2})$的衰减估计，这被称作**波动方程的局部能量衰减 (local energy decay)**. 今假设 $O\subset B(\mathbf{0},R)$, 维数$d=3$.

(1) 证明：由问题7.3.2(3)给出的c和$\mathbf{r}$满足如下关系, 其中ν是∂O的单位内法向量:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U c\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial O}\mathbf{r}\cdot\nu\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant 0.$$

(2) 利用(1)和c的表达式，证明：对任意$t>0$都有

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0},R)\backslash O} & \frac{(t+|\boldsymbol{x}|)^2}{4}\left(\partial_t u + \partial_r u + \frac{d-1}{2|\boldsymbol{x}|}u\right)^2 + \frac{(t-|\boldsymbol{x}|)^2}{4}\left(\partial_t u - \partial_r u - \frac{d-1}{2|\boldsymbol{x}|}u\right)^2 \\ &+ \frac{|\boldsymbol{x}|^2+t^2}{2}(|\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C. \end{aligned}$$

(3) 证明：当$t\geqslant 2R$时，有估计

$$\int_{B(\mathbf{0},R)\backslash O} |\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C}{t^2}, \tag{7.3.8}$$

$$\int_{B(\mathbf{0},R)\backslash O} (\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 + \frac{d-1}{|\boldsymbol{x}|}u\,\partial_r u + \frac{(d-1)^2}{4|\boldsymbol{x}|^2}u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C}{t^2}. \tag{7.3.9}$$

(4) 利用$\frac{u}{|\boldsymbol{x}|}\partial_r u = \operatorname{div}\left(\frac{u^2}{2|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}\right) - \frac{d-2}{2}\frac{u^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$ 和 (3)的第二个不等式证明：

$$\int_{B(\mathbf{0},R)\backslash O} (\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C}{t^2}, \quad t\geqslant 2R.$$

7.4　极小化子的存在性与正则性（暂时鸽置）

4

7.5　山路引理（暂时鸽置）

5

附录 A　常用记号

附录的第一部分记录了本讲义中常用的记号。

A.1　常用符号

- $\mathbb{R}^d = d$维实欧几里德空间$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.
- $\mathbb{R}^d$中的点$\boldsymbol{x}$的坐标记为$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)$.
- 给定集合$U \subset \mathbb{R}^d$，我们记$\partial U = U$的边界, $\overline{U} = U \cup \partial U = U$的闭包.
- $B(\boldsymbol{x}, r) \subset \mathbb{R}^d$ ：以$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$为球心，$r > 0$为半径的开球. $\bar{B}(\boldsymbol{x}, r) =$开球$B(\boldsymbol{x}, r)$的闭包, $\check{B}(\boldsymbol{x}, r) = B(\boldsymbol{x}, r) \backslash \{\boldsymbol{x}\} =$以$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$为球心、$r > 0$为半径的去心开球.
- $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B(\mathbf{0}, 1) = \mathbb{R}^d$中的$(d-1)$维单位球面.
- $\alpha(d) = \mathbb{R}^d$中的单位球体积$= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$. $d\alpha(d) = \mathbb{S}^{d-1}$的表面积.
- $\mathbb{R}^d_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} =$ 上半空间（不含边界）.
- $e_i = (0, \cdots, 0, 1, \cdots, 0) =$ 第i个标准坐标向量。
- 设 U, V 是$\mathbb{R}^d$中的两个开集，我们记$V \Subset U$是指$V \subset \overline{V} \subset U$ 且 $\overline{V}$ 是U的紧子集。此时我们称V紧包含于U.
- 给定$T > 0$和开集$U \subset \mathbb{R}^d$，我们定义U对应的**抛物圆柱**为$U_T := U \times (0, T]$、**抛物边界**为$\Gamma_T := \overline{U}_T \backslash U_T$.

A.2　函数相关的记号

- 函数$u : U \to \mathbb{R}$又写作$u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, \cdots, x_d)$ $(\boldsymbol{x} \in U)$. 我们称u是U内的光滑函数，是指u在U内无穷阶连续可微.
- 设u, v是两个函数，我们记$u \equiv v$是指u恒等于v. 我们记$u := v$是指定义函数u与v相等.
- 函数$u : U \to \mathbb{R}$的支集记作 Spt $u := \overline{\{\boldsymbol{x} \in U : u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.
- 函数u的正部（负部）定义为 $u^+ := \max\{u, 0\}$ $(u^- := -\min\{u, 0\})$. 则有 $u = u^+ - u^-$ 以及

$|u| = u^+ + u^-$ 成立. 符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

- 对向量值函数 $\mathbf{u} : U \to \mathbb{R}^m$, 我们记 $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_m(\boldsymbol{x}))$ $(\boldsymbol{x} \in U)$.
- 若 Σ 是 $\mathbb{R}^d$中的$(d-1)$维超曲面，我们记$\int_\Sigma f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$为函数$f$在$\Sigma$上关于$(d-1)$维曲面测度的积分，其中下标$\boldsymbol{x}$表示的是对$\boldsymbol{x}$变量作积分，在讲义中我们常常忽略它（除非出现多个变量）。设C是$\mathbb{R}^d$中的曲线，我们记$\int_C f\mathrm{d}\ell$为函数f沿着C的（第一型）曲线积分.
- 平均值：
$$⨍_U f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(U)}\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$
$$⨍_{\partial U} f\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\mathrm{Area}(\partial U)}\int_{\partial U} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$
- 集合$E \subset \mathbb{R}^d$的示性函数记作 $\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in E \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin E \end{cases}.$
- 函数f, g在$\mathbb{R}^d$上的卷积记为$f * g$，其定义为积分式（如果收敛）
$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$
- 我们说当$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$时有$f = O(g)$，是指存在常数 C 使得 $|f(\boldsymbol{x})| \le C|g(\boldsymbol{x})|$ 对任意充分靠近$\boldsymbol{x}_0$的点$\boldsymbol{x}$ 成立.
- 我们说当$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$时有$f = o(g)$，是指$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{|g(\boldsymbol{x})|} = 0$.

A.3 求导相关的记号

设有函数 $u : U \to \mathbb{R}$, $\quad \boldsymbol{x} \in U$.

- 偏导数定义为$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{u(\boldsymbol{x}+he_i)-u(\boldsymbol{x})}{h}$（如果极限存在）。我们常将其简记为$\partial_{x_i}u$, $\partial_i u$, u_{x_i}. 类似地，我们可以定义高阶偏导数。
- 高阶偏导数的记号:

1. 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 是多重指标，长度定义为$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$，则偏导数$\partial^\alpha u$定义为

$$\partial^\alpha u(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|}u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}u.$$

2. 给定非负整数k，记$\partial^k u(\boldsymbol{x}) := \{\partial^\alpha u(\boldsymbol{x}) : |\alpha| = k\}$为$u$的全体$k$阶偏导数构成的集合，同时我们把$\partial^k u(\boldsymbol{x})$视作$\mathbb{R}^{d^k}$中的点，其到原点的距离为

$$|\partial^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k}|\partial^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. 若$k=1$，我们将∂u视作向量，并用梯度作为记号

$$\nabla u := (\partial_{x_1}u,\cdots,\partial_{x_d}u) = \text{梯度向量}.$$

4. $u_r := \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\cdot\nabla u$ 是指 u 的径向导数.
5. 若$k=2$, 则

$$\nabla^2 u := \begin{bmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_1x_d} \\ & \cdots & \\ u_{x_dx_1} & \cdots & u_{x_dx_d} \end{bmatrix}$$

表示u的Hessian矩阵. $\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_ix_i} = \mathrm{Tr}(\nabla^2 u)$是Laplace算子作用在$u$上.

- 设 $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$是向量值函数，其偏导数定义如下。

1. 设α为多重指标，则定义$\partial^\alpha\mathbf{u} = (\partial^\alpha u_1,\cdots,\partial^\alpha u_m)$. 类似我们定义$\partial^k\mathbf{u}$ 和 $|\partial^k\mathbf{u}|$.
2. 若 $k=1$, 我们记 $\nabla\mathbf{u} := \begin{bmatrix} \partial_{x_1}u_1 & \cdots & \partial_{x_d}u_1 \\ & \cdots & \\ \partial_{x_1}u_m & \cdots & \partial_{x_d}u_m \end{bmatrix}$ 为$\mathbf{u}$的梯度矩阵.
3. 若 $m=d$, 我们定义向量值函数 $\mathbf{u}$ 的**散度**为

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} := \nabla\cdot\mathbf{u} = \mathrm{Tr}\,\nabla\mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}u_i.$$

4. 若 $m=d=3$, 我们定义向量值函数$\mathbf{u}$的旋度为curl $\mathbf{u} := \nabla\times\mathbf{u} = (\partial_{x_2}u_3-\partial_{x_3}u_2, \partial_{x_3}u_1-\partial_{x_1}u_3, \partial_{x_1}u_2-\partial_{x_2}u_1)$. 若 $m=d=2$, 向量值函数$\mathbf{u}$的旋度则是标量，定义为$\nabla^\perp\cdot\mathbf{u} = -\partial_{x_2}u_1+\partial_{x_1}u_2$.

A.4 函数空间的记号

设 U 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开集.

- $C(U)=\{u:U\to\mathbb{R}|u\text{是连续函数.}\}$
- $C(\overline{U})=\{u\in C(U):u\text{在}U\text{的任何有界子集内都一致连续.}\}$.
- $C^k(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:\partial^\alpha u\text{存在，且在}U\text{上是一致连续的}, \forall 0\le|\alpha|\le k\}$.
- $C^k(\overline{U})=\{u\in C^k(U):\partial^\alpha u\text{在}U\text{的任何有界子集内都一致连续}, \forall 0\le|\alpha|\le k\}$.
- $C^\infty(U)=\{u:U\to\mathbb{R}|u\text{在}U\text{上是无穷阶连续可微的.}\}=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}C^k(U)$. $C^\infty(\overline{U})=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}C^k(\overline{U})$.
- $C_c(U),C_c^k(U),C_c^\infty(U)$ 分别表示 $C(U),C^k(U),C^\infty(U)$ 中具有紧支集的函数全体.
- $C_1^2(I\times U)=\{u:I\times U\to\mathbb{R}:u,\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\partial_{x_j}u,\partial_t u\in C(I\times U),\forall 1\le i,j\le d\}$. 这里 $I\subset\mathbb{R}$是（时间）区间， $U\subset\mathbb{R}^d$ 是区域. 变量一般记为 $t\in I$ 和 $\boldsymbol{x}\in U$.
- $L^p(U)=\{u:U\to\mathbb{R}|u\text{是}U\text{上的Lebesgue可测函数}, \|u\|_{L^p(U)}<\infty\}$ 其中

$$\|u\|_{L^p(U)}:=\left(\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/p},\ (1\le p<\infty).$$

- $L^\infty(U)=\{u:U\to\mathbb{R}|u\text{是}U\text{上的Lebesgue可测函数}, \|u\|_{L^\infty(U)}<\infty\}$ 其中

$$\|u\|_{L^\infty(U)}=\operatorname*{ess\,sup}_U u:=\inf\{M\in\mathbb{R}|\text{集合 }\{\boldsymbol{x}|u(\boldsymbol{x})>M\}\text{ 的Lebesgue测度为零.}\}.$$

- $L^p_{\mathrm{loc}}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}|u\in L^p(V),\quad\forall V\Subset U\}$.
- $\|\partial^k u\|_{L^p(U)}=\||\partial^k u|\|_{L^p(U)}$.
- 函数空间 $C(U\to\mathbb{R}^m),L^p(U\to\mathbb{R}^m)$ 的元素是向量值函数 $\mathbf{u}:U\to\mathbb{R}^m$，且它的每个分量属于标量函数对应的那个函数空间.
- Schwartz 空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d):=\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^d):\|u\|_{(N,\alpha)}<\infty\ \forall N\in\mathbb{N}\text{ 和多重指标 }\alpha\}.$$

该空间上可以定义一族半范数如下

$$\|u\|_{(N,\alpha)}:=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{x}|)^N|\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})|.$$

则 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_{(N,\alpha)})$是Fréchet空间.

附录 B　多变量微积分的常用公式

记号: 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$是$\mathbb{R}^d$中的开集，其边界$\partial\Omega$是$C^1$的（即局部可以写成$C^1$函数图像），$\overline{\Omega}$是$\Omega$的闭包. 记 $N=(N_1,\cdots,N_d)$ 是 $\partial\Omega$的单位外法向量. 记 $\nabla:=(\partial_1,\cdots,\partial_d)$ 为梯度算子、$\Delta:=\partial_{x_1}^2+\cdots+\partial_{x_d}^2=\nabla\cdot\nabla$ 为Laplace算子. 设 $u,v,w:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ 为标量函数，$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^d$为向量值函数. $B(\boldsymbol{x},r)\subset\mathbb{R}^d$ 是以 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ 为圆心，$r>0$为半径的d维开球.

B.1　分部积分公式

本节将承认如下事实成立，谁爱证谁去证。

引理 B.1.1. 设$u\in C^1(\overline{\Omega})$，则有

$$\int_\Omega \partial_{x_i}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}u\,N_i\,\mathrm{d}S,\quad 1\leqslant i\leqslant d.$$

据此引理，我们可得如下结论。

命题 B.1.2. 下述等式成立

1. (散度定理) 设有向量值函数 $\mathbf{u}\in C^1(\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^d)$，则

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\mathbf{u}\cdot N\,\mathrm{d}S.$$

2. (分部积分) 设有函数 $u,v\in C^1(\overline{\Omega})$，则下式成立

$$\int_\Omega \partial_{x_i}u\,v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}uv\,N_i\,\mathrm{d}S-\int_\Omega u\,\partial_{x_i}v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad 1\leqslant i\leqslant d.$$

回忆 $\Delta u:=\mathrm{div}\,(\nabla u)=\nabla\cdot(\nabla u)=\sum\limits_{i=1}^d\partial_{x_i}^2u$. 结合散度定理，我们可证明如下恒等式成立。

命题 B.1.3 (高斯-格林公式及其推论). 设 $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$. 则有 Gauss-Green 公式的如下形式成立.

1. $\int_\Omega\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial N}\,\mathrm{d}S$.

2. $\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial N}\,\mathrm{d}S$.
3. $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N}\,\mathrm{d}S$.

若 $\Delta u = 0$ in Ω, 我们就称 u 是 Ω 中的调和函数. 对调和函数，命题 B.1.3 可以导出下述结论

推论 B.1.4. 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Ω 中的调和函数，则

1. $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial N}\,\mathrm{d}S = 0$.
2. $\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial N}\,\mathrm{d}S$.

当空间维数 $d=3$，我们定义旋度为 $\mathrm{curl}\,\mathbf{u} := \nabla\times\mathbf{u} = (\partial_{x_2}u_3-\partial_{x_3}u_2, \partial_{x_3}u_1-\partial_{x_1}u_3, \partial_{x_1}u_2-\partial_{x_2}u_1)$. 这个量在物理模型中的很多偏微分方程里都会出现，尤其是与流体力学、电磁学相关的方程。

命题 B.1.5 (向量积的微积分恒等式). 设 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in C^2(\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3)$, $f\in C^1(\overline{\Omega})$，则有

1. $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) = 0$.
2. $\nabla\times(f\mathbf{u}) = f(\nabla\times\mathbf{u}) + (\nabla f)\times\mathbf{u}$. 特别地, $\nabla\times(f(|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ 对任意 $f\in C^1(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ 都成立. (因此，静电场是无旋场)
3. 设 Ω 是单连通集. 若 $\nabla\times\mathbf{u} = 0$ in Ω, 则存在**势函数** φ 使得 $\mathbf{u} = \nabla\varphi$.
4. $\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$.
5. $\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$
6. $\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v})$.
7. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}$.
8. $\int_\Omega \nabla\times\mathbf{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\partial\Omega}(\mathbf{u}\times N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$.
9. $\int_\Omega \mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\partial\Omega}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot N\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} + \int_\Omega(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

B.2　积分的极坐标表示、移动区域上的积分

下述引理讲了如何把 d维空间的积分转化为极坐标下的球面积分和对半径的积分，证明参见Stein实分析[14]第六章。

引理 B.2.1 (积分的极坐标表示). 设 $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 在$\mathbb{R}^d$上是Lebesgue可积的，则有

1. 对任意点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^\infty\left(\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,\rho)} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\right)\mathrm{d}\rho.$$

2. 对任意正数 $R>0$ 和点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$, 成立

$$\int_{B(\boldsymbol{x}_0,R)} u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^R\left(\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,\rho)} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\right)\mathrm{d}\rho.$$

积分的极坐标表示实际上是如下“余面积公式”的特例，当然如下定理所述的余面积公式也只是几何测度论中的一个特例，原始版本参见Evans-Gariepy [7] 的第三章。

定理 B.2.2 (余面积公式). 设 $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是Lipschitz连续函数，且假设对几乎处处的$r\in\mathbb{R}$，水平集$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d|u(\boldsymbol{x})=r\}$都是光滑的$(d-1)$维超曲面. 又假设$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$是Lebesgue可积函数，则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})|\nabla u(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\{u=r\}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\right)\mathrm{d}r.$$

引理 B.2.1 可由定理 B.2.2 中取 $u(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ 直接证得. 定理 B.2.2的证明见[7] 的第三章。

接下来我们介绍如何对移动区域上的积分式求导。今考虑一族边界光滑的区域 $\Omega(t)\subset\mathbb{R}^d$，且光滑($C^\infty$)依赖于参数$t\in\mathbb{R}$. 设 $\mathbf{v}$ 是边界 $\partial\Omega(t)$，N是$\partial\Omega(t)$的单位外法向量。

定理 B.2.3. 设 $f=f(t,\boldsymbol{x})$ 是光滑函数，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega(t)} f(\mathbf{v}\cdot N)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}+\int_{\Omega(t)}\partial_t f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

B.3 Grönwall不等式

本节记录Grönwall不等式的两个不同版本，它们在建立发展型偏微分方程的能量估计时起到了至关重要的作用。

定理 B.3.1 (Grönwall不等式的微分版本). 设$\eta:[0,T]\to\mathbb{R}$是非负的绝对连续函数，并满足微分不等式 $\eta'(t)\leqslant\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$. 其中 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0,T]$上非负的Lebesgue可积函数，则有

$$\eta(t)\leqslant e^{\int_0^t\phi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)ds\right],\qquad\forall t\in[0,T].$$

特别地，若在$[0,T]$上成立$\eta'\leqslant\phi\eta$且$\eta(0)=0$, 则η在$[0,T]$上恒为零。

证明. 从微分不等式中，我们得知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s\phi(r)\,\mathrm{d}r}\right)=e^{-\int_0^s\phi(r)\,\mathrm{d}r}(\eta'(s)-\phi(s)\eta(s))\leqslant e^{-\int_0^s\phi(r)\,\mathrm{d}r}\psi(s)$$

对几乎处处的$0\leqslant s\leqslant T$成立。因此对任意的$0\leqslant t\leqslant T$, 由微积分基本定理知

$$\eta(t)e^{-\int_0^t\phi(r)\,\mathrm{d}r}\leqslant\eta(0)+\int_0^t e^{-\int_0^s\phi(r)dr}\psi(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

□

等价地，我们也有积分形式的Grönwall不等式。

定理 B.3.2 (Grönwall不等式的积分形式). 设$\xi(t)$是$[0,T]$上的Lebesgue可积函数，且存在非负常数C_1, C_2 使得对几乎处处的$t\in[0,T]$满足积分不等式 $\xi(t)\leqslant C_1\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s + C_2$. 则有

$$\xi(t)\leqslant C_2\left(1+C_1 t e^{C_1 t}\right), \quad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

特别地，若对几乎处处的$t\in[0,T]$有$\xi(t)\leqslant C_1\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$, 则$\xi$在$[0,T]$上几乎处处等于零。

证明. 令 $\eta(t):=\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$, 则有 $\eta'\leqslant C_1\eta + C_2$ 对几乎处处的$t\in[0,T]$成立。据微分版本的Grönwall不等式有

$$\eta(t)\leqslant e^{C_1 t}\left(\eta(0)+C_2 t\right) = C_2 t e^{C_1 t},$$

于是得到

$$\xi(t)\leqslant C_1\eta(t)+C_2\leqslant C_2\left(1+C_1 t e^{C_1 t}\right).$$

□

注记 B.3.1. 如上两个不等式（尤其是第二个）常用于建立演化方程（尤其是非线性方程）的各类能量估计。特别地，我们在考虑一个演化方程解的长时间存在性时，往往需要对方程建立所谓的“延拓准则”，即类似于“方程的解在T_*时刻还能继续演化下去当且仅当某个量在T_*时刻仍然保持有界”这样的论断。此外，如果$\phi(t)$关于时间t具有衰减性，则我们也可以用Grönwall不等式计算演化方程解的寿命。在实际应用到诸多非线性问题的场景时，尤其是求解非线性方程的过程中对逼近解做一致估计取极限时，我们往往需要更一般形式的Grönwall型不等式，即

$$E(t)\leqslant P(E(0))+P(E(t))\int_0^t P(E(s))\,\mathrm{d}s \Rightarrow \exists T>0,\ \text{使得}\ \sup_{t\in[0,T]} E(t)\leqslant P(E(0)),$$

其中 $P(\cdots)$ 表示一个关于括号内各分量的（具有非负系数的）多项式，详情参见[16, Chapter 2].

附录 C　L^p空间的分析性质

本章附录记录的是L^p空间的基本性质和不等式，L^p函数的光滑逼近以及L^p空间的插值定理。参考的教材是 Evans [6, Appendix B] 和 Folland [8, Chapter 6].

C.1　L^p不等式及其对偶空间

设$(X,\mathcal{M},\mu)$是测度空间，对$1\leqslant p\leqslant\infty$, 我们定义$L^p(X)$如下

$$L^p(X,\mathcal{M},\mu):=\left\{f:X\to\mathbb{C}:f\ \text{可测，且}\ \|f\|_{L^p}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{L^p}:=\begin{cases}\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<\infty\\ \operatorname*{ess\,sup}_X f=\inf\{M:\mu\{\boldsymbol{x}:|f(\boldsymbol{x})|>M\}=0\} & p=\infty\end{cases}.$$

在多数情况下，我们将$L^p(X,\mathcal{M},\mu)$简记作$L^p(\mu)$, $L^p(X)$或者L^p. 当$1\leqslant p\leqslant\infty$时，线性空间 $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$在带有 $\|\cdot\|_X$ 范数时是Banach空间，证明参见 Folland [8, 定理6.6, 6.8].

C.1.1　L^p空间的基本不等式

如下两个不等式是会被反复用到的

- Hölder不等式: $\|fg\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$, 其中 $p^{-1}+(p')^{-1}=1,\ 1\leqslant p,p'\leqslant\infty$.
- Minkowski不等式 (L^p空间的三角不等式): $\|f+g\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

L^p空间满足如下包含关系。

命题 C.1.1. 设$1\leqslant p\leqslant q\leqslant r\leqslant\infty$，则有

(1) $L^p\cap L^r\subset L^q\subset L^p+L^r$;

(2) 若$\mu(X)<\infty$, 则$L^q\subset L^p$, 且有 $\|f\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^q}\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$;

(3) 若存在常数$c_0>0$使得$\inf\{\mu(F):F\in\mathcal{M},F\subset X,\mu(F)>0\}\geqslant c_0>0$, 则 $L^p\subset L^q$. 特别地，我们有$\ell^p(\mathbb{Z})\subset\ell^q(\mathbb{Z})$.

证明. (1) 利用Hölder不等式，我们得到

$$\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^r}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}.$$

这说明$L^p \cap L^r \subset L^q$. 接下来验证$L^q \subset L^p + L^r$. 任给$f \in L^q$, 我们将其分解为两部分 $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$, 其中 $E := \{\boldsymbol{x} : |f(\boldsymbol{x})| > 1\}$. 于是直接计算可得

$$|f\chi_E|^p = |f|^p \chi_E \leqslant |f|^q \chi_E \Rightarrow f\chi_E \in L^p, \qquad |f|^q \chi_{E^c} \geqslant |f\chi_{E^c}|^r \Rightarrow f\chi_{E^c} \in L^r.$$

(2) 若$q = \infty$, 则结论是平凡的. 若$q < \infty$, 据Hölder不等式有

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p \cdot 1 \mathrm{d}\mu \leqslant \||f|^p\|_{L^{q/p}} \|1\|_{L^{q/(q-p)}} = \|f\|_{L^q}^p \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}.$$

(3) 不妨设$\|f\|_{L^p} = 1$, $c_0 = 1$. 则对任意$\varepsilon > 0$, 我们有

$$\mu\{\boldsymbol{x} \in X : |f(\boldsymbol{x})| > 1 + \varepsilon\} \leqslant (1+\varepsilon)^{-p} \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < 1 \Rightarrow \mu\{\boldsymbol{x} \in X : |f(\boldsymbol{x})| > 1 + \varepsilon\} = 0.$$

因此 $\mu\{\boldsymbol{x} \in X : |f(\boldsymbol{x})| > 1 = 0$，进而容易得到 $\int_X |f|^q \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = 1$. □

当$\mu(X) < \infty$时，$L^p(X)$范数会在$p \to \infty$时收敛到$L^\infty(X)$范数。

命题 C.1.2. 设$\mu(X) < \infty$, $f \in L^\infty(X)$. 则$f \in L^p(X)$对任意$p < \infty$成立，且$\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

证明. 不等式的$\leqslant$部分是显然的(命题C.1.1(2)), 即$\limsup\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$. 对不等式的$\geqslant$部分，对任给的$\varepsilon > 0$，据$L^\infty$范数的定义知，存在$\delta > 0$使得

$$\mu\{\boldsymbol{x} : |f(\boldsymbol{x})| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\} \geqslant \delta \Rightarrow \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \delta(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon)^p.$$

因此有 $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon$对任意$\varepsilon > 0$成立。最后令$\varepsilon \to 0$即得结论。 □

注记 C.1.1. 如果函数$f \in L^p \cap L^\infty$ (进而由命题C.1.1(1)知$f \in L^q$对任意$q > p$成立)，则 $\mu(X) < \infty$ 这个条件可以去掉。

C.1.2 L^p范数的等价定义：对偶表示

设p, p'是一对共轭指标，据Hölder不等式知每个函数$g \in L^{p'}$实际上定义了L^p空间上的一个线性泛函$\phi_g(f) := \int_X fg$, 其算子范数不超过$\|g\|_{p'}$. 事实上$g \longmapsto \phi_g$已经“几乎是”$L^{p'}$ 到 $(L^p)^*$的一个等距同构。

命题 C.1.3. 设p, p'是共轭指标，且$1 \leqslant p' < \infty$. 若$g \in L^{p'}$, 则有

$$\|g\|_{L^{p'}} = \|\phi_g\| = \sup\left\{\left|\int_X fg\right| : \|f\|_{L^p} = 1\right\}.$$

若测度μ是半有限(semi-finite)的[1]，则该结论对$p' = \infty$也成立。

证明. 不等式的$\geqslant$是 Hölder 不等式的直接推论。对$\leqslant$部分，当$p' < \infty$时，我们可选取

$$f = \frac{|g|^{p'-1}\operatorname{sgn} g}{\|g\|_{p'}^{p'-1}}.$$

当$p' = \infty$时, 对给定的$\varepsilon > 0$我们考虑$E := \{\boldsymbol{x} : |g(\boldsymbol{x})| \geqslant \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$，则$\mu(E) > 0$. 由于$\mu$是半有限测度，所以存在子集$F \subset E$ 且满足 $0 < \mu(F) < \infty$，此时选取 $f = \mu(F)^{-1}\chi_F \operatorname{sgn} g$ 即可。证明细节可参考Folland [8, Prop. 6.13]. □

反之，若$f \longmapsto \int fg$是L^p空间上的有界线性泛函，则$g \in L^{p'}$在“几乎所有”情况都是对的。

命题 C.1.4 ([8, Theorem 6.14]). 假设如下条件成立

- μ是半有限测度；
- g是X上的可测函数，且满足$fg \in L^1$对任意支于有限测度集上的简单函数 f 成立；
- $M_{p'}(g) := \sup\{|\int fg| : f \text{ 是简单函数 }, \|f\|_{L^p} = 1\} < \infty$.

则有$g \in L^{p'}$，且$M_{p'}(g) = \|g\|_{L^{p'}}$.

据此，我们可得到L^p空间的对偶空间定理。

定理 C.1.5 ([8, Theorem 6.15], L^p空间的对偶空间). 当$1 < p < \infty$时, 对任意$\phi \in (L^p)^*$, 都存在$g \in L^{p'}$使得$\phi(f) = \int fg$对任意$f \in L^p$成立，进而$L^{p'}$和$(L^p)^*$之间是等距同构的。特别地，$L^p(X)$在$1 < p < \infty$时是自反空间。若μ是σ-有限的，则同样的结论对$p = 1$也成立。

根据如上定理，我们可以证明 L^p 范数具有如下等价表达式

$$\boxed{\|f\|_{L^p} = \sup_{\substack{g \in L^{p'} \\ \|g\|_{L^{p'}} \leqslant 1}} \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.} \tag{C.1.1}$$

据此定义，我们可以证明积分Minkowski不等式（又称“广义Minkowski不等式”）

定理 C.1.6 (积分Minkowski不等式). 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ 均为 σ-有限的测度空间，$f : X \times Y \to \mathbb{R}$是一个$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-可测函数

[1]我们称测度μ是半有限的(semi-finite)是指：对任意满足 $\nu(F) = \infty$的集合$F \in \mathcal{N}$, 存在子集 $K \in \mathcal{N}$, $K \subset F$满足$0 < \nu(K) < \infty$.

(1) 若 $f \geqslant 0$ 且 $1 \leqslant p < \infty$, 则有

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})\right)^p \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \left[\int_X f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^p\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right]^{1/p} \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y}).$$

(2) 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f(\cdot,\boldsymbol{y}) \in L^p(\nu)$对几乎处处的$\boldsymbol{y} \in Y$成立，且函数$\boldsymbol{y} \longmapsto \|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{L^p}$属于$L^1(\nu)$, 则 $f(\boldsymbol{x},\cdot) \in L^1(\nu)$对几乎处处的$\boldsymbol{x} \in X$成立，函数$\boldsymbol{x} \to \int_Y f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})$属于$L^p(\mu)$并满足

$$\left\|\int_Y f(\cdot,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})\right\|_{L^p} \leqslant \int_Y \|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{L^p}\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y}).$$

证明. 我们只证明(1)，(2)是(1)和Fubini定理的直接推论(f换成$|f|$).

当$p = 1$时，(1)就是Tonelli定理。当$1 < p < \infty$时，设p'是p的共轭指标，取$g \in L^{p'}(\mu)$满足$\|g\|_{L^{p'}} \leqslant 1$，则由Tonelli定理和Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})\right)|g(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &= \iint_{X\times Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|g(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y}) \\ &\leqslant \|g\|_{L^{p'}} \int_Y \left[\int_X f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^p\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right]^{1/p} \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

上式左边对全体满足$\|g\|_{L^{p'}} \leqslant 1$的$g \in L^{p'}(\mu)$取上确界，再由(C.1.1)即得结论。 □

C.1.3 L^p范数的等价定义：分布函数表示

本节证明：一个函数的L^p范数也可以等价地表示为**对该函数水平集的测度作加权积分**。这本质上是Lebesgue测度等价定义的推广：一种通俗的理解是函数f(不妨设为非负)的Lebesgue积分可以通过划分f的值域而不是f的定义域(黎曼和)来定义。准确地说，设f是$(X,\mathcal{M},\mu)$上的可测函数，我们定义其**分布函数(distribution function)** $\lambda_f : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ 为

$$\lambda_f(\alpha) := \mu\{\boldsymbol{x} \in X : |f(\boldsymbol{x})| > \alpha\}.$$

命题 C.1.7. 分布函数满足如下性质

(1) λ_f是单调递减的右连续函数。

(2) 若$f \leqslant g$, 则 $\lambda_f \leqslant \lambda_g$.

(3) 若 $|f_n|$ 单调递增地收敛到 $|f|$, 则有λ_{f_n}也单调递增地收敛到 λ_f.

(4) 若 $f = g + h$, 则 $\lambda_f(\alpha) \leqslant \lambda_g(\alpha/2) + \lambda_h(\alpha/2)$.

L^p范数的分布函数表示定理叙述如下

定理 C.1.8. 设$0<p<\infty$，则有

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

证明. 注意到我们有 $\lambda_f(\alpha)=\int_X \chi_{\{\boldsymbol{x}:|f(\boldsymbol{x})|>\alpha\}}\,\mathrm{d}\mu$，然后将待证式子右边的积分交换次序(因为被积函数非负、可测，所以由Tonelli定理即可换序)。 □

习题 C.1

习题 C.1.1. 设$1\leqslant p\leqslant r\leqslant\infty$，证明：

(1) $(L^p\cap L^r,\|\cdot\|_{L^p}+\|\cdot\|_{L^r})$是Banach空间。

(2) $(L^p+L^r,\|\cdot\|_{L^p+L^r})$是Banach空间，其中

$$\|f\|_{L^p+L^r}:=\inf\{\|f_0\|_{L^p}+\|f_1\|_{L^r}: f=f_0+f_1, f_0\in L^p, f_1\in L^r\}.$$

习题 C.1.2. 设$1\leqslant p<\infty$.

(1) 若$\|f_n-f\|_{L^p}\to 0$, 则 f_n依测度收敛到f，进而存在子列几乎处处收敛到f.

(2) 若 f_n依测度收敛到f，且存在$g\in L^p$使得$|f_n(\boldsymbol{x})|\leqslant g(\boldsymbol{x})$对任意$n$和a.e. $\boldsymbol{x}$成立，则$\|f_n-f\|_{L^p}\to 0$.

(3) 若$f_n,f\in L^p$满足f_n几乎处处收敛于f，则$\|f_n-f\|_{L^p}$当且仅当$\|f_n\|_{L^p}\to\|f\|_{L^p}$.

习题 C.1.3. 设$\sup\limits_n\|f_n\|_{L^p}<\infty, f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 证明：若$1<p<\infty$，则$f_n\xrightarrow{L^p} f$. 对$p=1$，同样结论是否还成立？

习题 C.1.4. 设$1<p<\infty$，证明：$x_n\xrightarrow{\ell^p(\mathbb{Z})} x$当且仅当$\sup\limits_n\|x_n\|_{\ell^p}<\infty$和$x_n$逐点收敛于$x$同时成立。

习题 C.1.5. 证明：$L^p(\mathbb{R}^d)$ (带有Lebesgue测度) 在$1\leqslant p<\infty$时是可分的，但在$p=\infty$时不可分。

提示：当$p<\infty$时，考虑有理矩形（端点坐标均为有理数）示性函数的有理系数线性组合。当 $p=\infty$时考虑函数$f_r:=\chi_{B(\mathbf{0},r)}$.

习题 C.1.6 (Chebyshev不等式)**.** 证明：若$f\in L^p(0<p<\infty)$, 则对于任意$\alpha>0$有,

$$\mu(\{x:|f(x)|>\alpha\})\leqslant\left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p.$$

习题 C.1.7. 设$(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 是 σ-有限的测度空间，$f: X\times Y\to\mathbb{R}$是$(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$-可测的函数。假设存在$C>0$使得$\int_X|K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\leqslant C$对几乎处处的$\boldsymbol{y}\in Y$成立，$\int_Y|K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})\leqslant C$对

几乎处处的$\boldsymbol{x}\in X$成立. 若$f\in L^p(\nu), 1\leqslant p\leqslant\infty$，证明

$$Tf(\boldsymbol{x}):=\int_Y K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})$$

对几乎处处的$\boldsymbol{x}\in X$是绝对收敛的，且$Tf\in L^p(\mu)$满足$\|Tf\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{L^p}$.

习题 C.1.8. 设$(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 是 σ-有限的测度空间，$K\in L^2(\mu\times\nu)$. 若$f\in L^2(\nu)$, 证明:

$$Tf(\boldsymbol{x}):=\int_Y K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{y})$$

c对几乎处处的$\boldsymbol{x}\in X$是绝对收敛的, 且$Tf\in L^p(\mu)$满足$\|Tf\|_{L^2}\leqslant\|K\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$.

习题 C.1.9. 证明如下结论

(1) $f\in L^p$ 当且仅当 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2^{kp}\lambda_f(2^k)<\infty$.

(2) 若 $f\in L^p$, 则 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^p\lambda_f(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha^p\lambda_f(\alpha)=0$.

问题 C.1

问题 C.1.1 (非升重排). 对X上的可测函数f，其**非升重排** (**decreasing rearrangement**) $f^*:(0,\infty)\to[0,\infty]$定义为

$$f^*(t)=\inf\{\alpha:\lambda_f(\alpha)\leqslant t\}\quad(\text{其中 }\inf\varnothing=\infty)$$

证明如下结论

(1) f^*单调递减。若 $f^*(t)<\infty$, 则 $\lambda_f(f^*(t))\leqslant t$；且若$\lambda_f(\alpha)<\infty$, 则 $f^*(\lambda_f(\alpha))\leqslant\alpha$.

(2) $\lambda_f=\lambda_{f^*}$.

(3) 若$\lambda_f(\alpha)<\infty$对全体$\alpha>0$成立，且$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\lambda_f(\alpha)=0$ (进而$f^*(t)<\infty$对全体$t>0$成立)。设ϕ是$(0,\infty)$上的可测函数，则有$\int_X\phi\circ|f|\,\mathrm{d}\mu=\int_0^\infty\phi\circ f^*(t)dt$. 特别地，对$0<p<\infty$有$\|f\|_{L^p}=\|f^*\|_{L^p}$.

(4) 若$0<p<\infty$，则f的弱L^p范数满足$[f]_{L^p}:=(\sup\limits_{\alpha>0}\alpha^p\lambda_f(\alpha))^{1/p}=\sup\limits_{t>0}t^{1/p}f^*(t)$.

问题 C.1.2 (Schur定理). 证明：$\{x_n\}\subset\ell^1(\mathbb{N})$弱收敛于$x\in\ell^1(\mathbb{N})$当且仅当$\|x_n-x\|_{\ell^1}\to 0$.

C.2 卷积与光滑化

本节讲述：给定一个L^p函数f（不知道它的连续性、可微性），如何利用卷积构造一族光滑函数f_ε来逼近f. 该构造在现代偏微分方程研究中仍然是常用技巧。

定义 C.2.1. 首先我们需要引进下面这些记号:

- 设$U \subset \mathbb{R}^d$是开集，实参数$\varepsilon > 0$，我们记$U_\varepsilon := \{\boldsymbol{x} \in U : \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial U) > \varepsilon\}$.
- 定义**隆起函数** (bump function) $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 如下

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2 - 1}\right) & |\boldsymbol{x}| < 1 \\ 0 & |\boldsymbol{x}| \geqslant 1 \end{cases},$$

  其中常数 $C > 0$ 保证积分值 $\int_{\mathbb{R}^d} \eta \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$. 这里我们称 η 为**标准光滑子** (standard mollifier).
- (光滑子) 对每个实参数 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$\eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right).$$

  并称 η_ε 是参数为 $\varepsilon > 0$ 的光滑子. 利用变量替换公式可以证明 $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$ 以及$\operatorname{Spt} \eta_\varepsilon \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

给定 $f \in L^p(U)$, 其中 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，我们利用卷积和光滑子引进它的一种光滑逼近 $f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := (\eta_\varepsilon * f)(\boldsymbol{x})$。如下定理记录了卷积光滑逼近的若干常用性质。

定理 C.2.1 (光滑子的性质). 设$f : U \to \mathbb{R}$是局部可积函数（即在U的任意紧子集上都是Lebesgue可积的）. 则有

1. $f_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. (这个$U_\varepsilon$不可以换成$U$! 这是因为作卷积后，$\operatorname{Spt} f_\varepsilon$会比$\operatorname{Spt} f$“膨胀出”一圈厚度为$\varepsilon$的区域，这可以通过卷积定义看出来)
2. $f_\varepsilon \to f$ a.e., as $\varepsilon \to 0$.
3. 若$f \in C(U)$, 则在U的任意紧子集上都有一致收敛 $f_\varepsilon \rightrightarrows f$.
4. 若$1 \leqslant p < \infty$ 且 $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$, 则 $f_\varepsilon \to f$ in $L^p_{\text{loc}}(U)$.

证明. 首先证明光滑性，实际上这只要证明一阶导数的存在性，再用数学归纳法递推到任意阶导数即可。固定点 $\boldsymbol{x} \in U_\varepsilon$、分量 $i \in \{1, \cdots, d\}$，则可以取充分小的实数 h，使得 $\boldsymbol{x} + he_i \in U_\varepsilon$。接下来我们计算差商

$$\begin{aligned} \frac{f_\varepsilon(\boldsymbol{x} + he_i) - f_\varepsilon(\boldsymbol{x})}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_U \frac{1}{h} \left(\eta\left(\frac{\boldsymbol{x} + he_i - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) \right) f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_V \frac{1}{h} \left(\eta\left(\frac{\boldsymbol{x} + he_i - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) \right) f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

这里 $V \Subset U$. 而现在我们有如下一致收敛的结论：

$$\frac{1}{h} \left(\eta\left(\frac{\boldsymbol{x} + he_i - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) \right) \rightrightarrows \frac{1}{\varepsilon} \partial_{x_i} \eta\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right) \text{ in } V \quad \text{as } h \to 0.$$

这就表明上述差商的积分数是收敛的，我们记$h \to 0$时上述积分式的极限函数为$\partial_{x_i} f_\varepsilon(\boldsymbol{x})$，其满足

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \int_U \partial_{x_i} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

这就证明了一阶导数存在性，且证明了$\partial_i f_\varepsilon = \partial_i (f * \eta_\varepsilon) = (\partial_i f) * \eta_\varepsilon$.

接下来证明点态收敛，据卷积光滑逼近的定义，我们可以作如下化简：

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| &= \left|\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\varepsilon}\right)|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &\leqslant C ⨍_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} |f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \to 0 \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in U.\end{aligned}$$

上述过程中的最后一步是由Lebesgue微分定理得到（见Stein实分析[14]第三章）。进一步，如果f是连续函数，则对任意紧子集$V \Subset U$，我们可以插入一个开集W 使得 $V \Subset W \Subset U$. 此时 f在$\overline{W}$上是一致连续的，且由Lebesgues微分定理得到的收敛性对每个$\boldsymbol{x} \in \overline{V}$都成立，这样就证明来结论(3).

最后证明(4). 仍然按照上面的方法选取开集 $V \Subset W \Subset U$，首先要证明 $f_\varepsilon \in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. 为此，固定 $\boldsymbol{x} \in V$, 用Hölder不等式可算出

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(\boldsymbol{x})| &= \left|\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right| \leqslant \int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}} |f(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &\leqslant \left(\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|f(\boldsymbol{y})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant 1\cdot\left(\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|f(\boldsymbol{y})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

接下来，两边取p次方并在V上积分可得

$$\begin{aligned}\int_V |f_\varepsilon(\boldsymbol{x})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &\leqslant \int_V\int_{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|f(\boldsymbol{y})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\leqslant \int_W |f(\boldsymbol{y})|^p\left(\int_{B(\boldsymbol{y},\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_W |f|^p < \infty.\end{aligned}$$

在L^p范数$(1 \leqslant p < \infty)$下的收敛则可以由连续函数逼近得到，即给定 V, W 如上和误差 $\delta > 0$, 我们可以找到 $g \in C(W)$ 使得 $\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$. 则

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leqslant \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \leqslant 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)}.$$

利用 (3), 我们有 $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leqslant 2\delta$. □

C.3 L^p空间的算子插值定理

本节给出L^p空间的两个算子插值定理，它们被广泛用于调和分析和偏微分方程的研究中。今假设$(X,\mathcal{M},\mu)$和$(Y,\mathcal{N},\nu)$是σ-有限的测度空间，并取$1\leqslant p,q\leqslant\infty$.

定义 C.3.1. 设$T:L^p\to L^q$是一个算子，我们引入如下定义

- T是**次线性**(**sublinear**)算子，是指$|T(f_0+f_1)(\boldsymbol{x})|\leqslant|Tf_0(\boldsymbol{x})|+|Tf_1(\boldsymbol{x})|$ 以及 $|T(\lambda f)(\boldsymbol{x})|=|\lambda||Tf(\boldsymbol{x})|$ 对全体 $\boldsymbol{x}\in X$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$ 成立;
- T是**强(p,q)型**算子，是指存在常数$C_{p,q}>0$ 使得 $\|Tf\|_{L^q}\leqslant C_{p,q}\|f\|_{L^p}$;
- T是**弱(p,q)型**算子，是指存在常数$C_{p,q}>0$ 使得 $\lambda_{Tf}(\alpha)^{\frac{1}{q}}\leqslant C_{p,q}\alpha^{-1}\|f\|_{L^p}$.

特别地，强(p,q)型算子必是弱(p,q)型算子，弱(∞,∞)型算子定义为强(∞,∞)型算子。

C.3.1 Marcinkiewicz 内插定理

我们首先证明Marcinkiewicz内插定理(Marcinkiewicz's interpolation theorem).

定理 C.3.1 (Marcinkiewicz内插定理). 设$(X,\mathcal{M},\mu)$和$(Y,\mathcal{N},\nu)$是测度空间，指标$1\leqslant p_0,p_1,q_0,q_1\leqslant\infty$满足$p_0\leqslant q_0$, $p_1\leqslant q_1$ 以及 $q_0\neq q_1$ 且有插值关系

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1} \text{ 和 } \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},\quad \text{其中 } 0<\theta<1.$$

若T是$L^{p_0}(\mu)+L^{p_1}(\mu)$到$Y$上可测函数空间的**次线性算子，且同时是弱$(p_0,q_0)$和弱$(p_1,q_1)$的**，则$T$是**强$(p,q)$型**算子。

证明. 我们只证明对角型的Marcinkiewicz内插定理，即$p_0=q_0$ 和 $p_1=q_1$ 同时成立的情况，一般情况仅是计算更复杂，但方法相同，见 Folland [8, 定理6.28].

给定$f\in L^p$和$\alpha>0$，我们把f拆分为f_0+f_1，其中$f_0=f\chi_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}$, $f_1=f\chi_{\{x:|f(x)|\leqslant c\alpha\}}$, 其中常数$c$稍后再确定其取值。于是我们得到$f_0\in L^{p_0}(\mu)$, $f_1\in L^{p_1}(\mu)$. 进一步我们有

$$|Tf(x)|\leqslant|Tf_0(x)|+|Tf_1(x)|\Rightarrow\lambda_{Tf}(\alpha)\leqslant\lambda_{Tf_0}(\alpha/2)+\lambda_{Tf_1}(\alpha/2)$$

接下来考虑两种情况

情况1：$p_1 = \infty$. 取$c = 1/(2A_1)$, 其中 A_1 来自不等式 $\|Tg\|_\infty \leqslant A_1\|g\|_\infty$. 此时 $\lambda_{Tf_1}(\alpha/2) = 0$. 据弱$(p_0, p_0)$的假设，我们有 $\lambda_{Tf_0}(\alpha/2) \leqslant \left(\frac{2A_0}{\alpha}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$, 于是有

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{x|f(x)|>c\alpha\}}|f(x)|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\alpha\\ &= p\,(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/c}\alpha^{p-1-p_0}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\mu = \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

情况2：$p_1 < \infty$. 现在我们有 $\lambda_{Tf_i}(\alpha/2) \leqslant \left(\frac{2A_i}{\alpha}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}$, $\quad i = 0, 1$

仿照情况1的证明即可算出结论

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}|f(x)|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\alpha\\ &\quad + p\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leqslant c\alpha\}}|f(x)|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\alpha\\ &= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

□

Marcinkiewicz内插定理的一个直接应用是证明Hardy-Littlewood极大函数的L^p有界性。

定义 C.3.2 (Hardy-Littlewood极大函数). 对$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，我们定义其Hardy-Littlewood极大函数为

$$Mf(\boldsymbol{x}) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B(\boldsymbol{x}, r)|}\int_{B(\boldsymbol{x},r)}|f(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

根据Hardy-Littlewood极大函数和Vitali覆盖引理(见Stein实分析[14]第三章)，我们得到

命题 C.3.2 ([14, Chapter 3]). Hardy-Littlewood极大算子M是弱(1,1)型和强(∞,∞)型的次线性算子。

据此结合Marcinkiewicz内插定理即得Hardy-Littlewood极大函数的L^p有界性。

定理 C.3.3. 设$1 < p < \infty$, 则

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

其中常数$C\frac{p}{p-1}$可以通过模仿Marcinkiewicz内插定理的证明过程具体算出来。

Hardy-Littlewood极大函数L^p有界性在偏微分方程中有一个极为重要的应用，即为非整数阶Sobolev 空间的临界嵌入定理，它是如下Hardy-Littlewood-Sobolev不等式的一个特例。

定理 C.3.4 (Hardy-Littlewood-Sobolev不等式). 设$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，正数p, q, γ 满足 $0 < \gamma < d, 1 < p < q < \infty$ 和 $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{d}$. 则存在仅依赖$p, q, d$的常数$C > 0$，使得如下不等式成立

$$\||\cdot|^{-\gamma} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明. 我们对卷积定义的积分作适当的截断

$$|\cdot|^{-\gamma} * f(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{y}|>R} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}|^{-\gamma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{|\boldsymbol{y}|\leqslant R} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}|^{-\gamma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} =: I_1 + I_2.$$

其中截断的半径 $R > 0$ 可能依赖于 $\boldsymbol{x}$，它的取值暂且待定。

对I_1，我们注意到定理条件可以推出$\frac{1}{\gamma p'} = \frac{1}{d} - \frac{1}{\gamma q} < \frac{1}{d}$，于是$I_1$可以直接用Hölder不等式控制

$$I_1 \leqslant \|f(\boldsymbol{x}-\cdot)\|_{L^p} \left\||\cdot|^{-\gamma}\chi_{B(\boldsymbol{0},R)^c}\right\|_{L^{p'}} = C\|f\|_{L^p}R^{-\frac{d}{q}}.$$

对I_2，我们通过对球$B(\boldsymbol{0}, R)$作二进分解(dyadic decomposition)，并强行构造出 Hardy-Littlewood 极大函数，来消除原点处的奇性

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-(j+1)}R\leqslant|\boldsymbol{y}|\leqslant 2^{-j}R} |\boldsymbol{y}|^{-\gamma}|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}(2^{-(j+1)}R)^{-\gamma}\int_{2^{-(j+1)}R\leqslant|\boldsymbol{y}|\leqslant 2^{-j}R} |f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\gamma}R^{-\gamma}(2^{-j}R)^d \underbrace{\int_{|\boldsymbol{y}|\leqslant 2^{-j}R} \frac{|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|}{(2^{-j}R)^d}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}}_{\leqslant C_d Mf(\boldsymbol{x})} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\gamma}2^{-j(d-\gamma)}R^{d-\gamma}Mf(\boldsymbol{x}) = CR^{d-\gamma}Mf(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

这样，我们就得到

$$I_1 + I_2 \leqslant C\left(\|f\|_{L^p}R^{-\frac{d}{q}} + R^{d-\gamma}Mf(\boldsymbol{x})\right).$$

令取 $R := \frac{\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{d}}}{Mf(\boldsymbol{x})^{\frac{p}{d}}}$ 使得上式两项的取值相等，这样就推出$I_1 + I_2 \leqslant C\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}(Mf)^{\frac{p}{q}}$. 最后，利用Hardy-Littlewood极大函数的L^p有界性，我们得到最终结论

$$\||\cdot|^{-\gamma} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|I_1 + I_2\|_{L^q} \leqslant C\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}} \underbrace{\|(Mf)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q}}_{=\|Mf\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}} \leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

□

C.3.2　Riesz-Thorin 内插定理

Marcinkiewicz 内插定理的一个缺点是L^p有界性的算子范数缺少显式不等式的计算。然而，如果我们对线性算子把“弱(p_0,q_0)型”的假设加强为“强(p_0,q_0)型”，即可得到一个更精确的内插定理。

定理 C.3.5 (Riesz-Thorin内插定理). 设$(X,\mathcal{M},\mu)$和$(Y,\mathcal{N},\nu)$是测度空间，指标$p_0,p_1,q_0,q_1\in[1,\infty]$. 对 $\theta\in[0,1]$, 我们定义插值指标 p_θ,q_θ 为

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\qquad \frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

若线性算子 $T:L^{p_0}(\mu)+L^{p_1(\mu)}\to L^{q_0}(\nu)+L^{q_1}(\nu)$ **同时是强(p_0,q_0)和强(p_1,q_1)型的**，即满足

$$\|Tf\|_{L^{q_i}}\leqslant M_i\|f\|_{L^{p_i}}\qquad i=0,1,$$

则

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}}\leqslant M_\theta\|f\|_{L^{p_\theta}},\ \ M_\theta:=M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}.$$

若$q_0=q_1=\infty$, 则还要求 ν 是半有限测度。

该定理的证明主要依赖三线引理和复分析中的最大模原理，此处略去，证明细节参见 Folland [8, 定理 6.27].

Riesz-Thorin内插定理的一个应用是证明Fourier变换的强(p,p')有界性$(1\leqslant p\leqslant 2)$, 其结论称作 Hausdorff-Young 不等式 (定理 D.1.10). 另一个重要应用则是卷积的Young不等式。

定理 C.3.6 (卷积Young不等式). 设 $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ 满足 $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$. 设 $f\in L^p,g\in L^r$，则有 $f*g\in L^q$ 以及

$$\|f*g\|_{L^q}\leqslant\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}.$$

证明. 固定$g\in L^r$并定义$Tf:=f*g$. 则由积分Minkowski不等式(定理 C.1.6), 我们得到$\|Tf\|_{L^r}\leqslant M\|f\|_{L^1}$. 又由Hölder不等式可得$\|Tf\|_{L^\infty}\leqslant M\|f\|_{L^{r'}}$. 于是，据Riesz-Thorin内插定理，取 $(p_0,q_0)=(1,r),(p_1,q_1)=(r',\infty)$, 计算所得即为最终结论。 □

习题 C.3

习题 C.3.1. 证明Hardy-Littlewood极大算子不是强(1,1)型的。

提示：若$f\neq 0$，则存在$R>0$使得$\int_{B(\mathbf{0},R)}|f|\geqslant\varepsilon>0$. 然后证明$Mf(\boldsymbol{x})\geqslant C\varepsilon|\boldsymbol{x}|^{-d}$对$|x|>R$成立，这只需注意到$B(\mathbf{0},R)\subset B(\boldsymbol{x},2|\boldsymbol{x}|)$.)

习题 C.3.2. 设B是$\mathbb{R}^d$的有界可测子集，证明：$\int_B Mf\leqslant 2|B|+C\int_{\mathbb{R}^d}|f|\log^+|f|$. 其中 $\log^+t:=\max(\log t,0)$.

习题 C.3.3. 设$\{\eta_\varepsilon\}$是一族逼近恒等，证明：$\sup\limits_{\varepsilon>0}|(\eta_\varepsilon*f)(\boldsymbol{x})|\leqslant\|\eta\|_{L^1}Mf(\boldsymbol{x})$.

附录 D　Fourier变换和分布理论简介

D.1　Fourier变换

给定 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，定义f的**Fourier变换**为如下复值函数

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\xi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{D.1.1}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$. $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_d)$ 被称作“频率变量”. 我们同样可以定义$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$的**Fourier逆变换**

$$\check{f}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{x}\cdot\xi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}. \tag{D.1.2}$$

Fourier变换及其逆变换（作为算子）一般分别被记作$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$.

为什么我们能把 (D.1.2) 称作Fourier“逆”变换呢？这是因为我们有如下反演公式。

命题 D.1.1 (Fourier反演公式). *设$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则存在$f_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (连续函数，且在无穷远处趋于零) 使得 $f = f_0$ a.e. 以及 $f_0 = (\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge$.*

该性质的证明依赖于Riemann-Lebesgue引理和Gauss核的恒等逼近（类似于前一节的卷积光滑逼近，只是紧支光滑函数η换成标准正态分布的密度函数），这里暂时跳过且证明不作要求。

从定义 (D.1.1)看出，$f \in L^1$ 未必蕴含了 $\hat{f} \in L^1$. 人们因此想找到一个更好的函数类，不妨记为X，使得Fourier变换把 X 里面的元素映射到 X 里面的元素，而且Fourier变换在X上可逆。这样的函数空间是存在的，其中一个例子为 **Schwartz函数空间**，其定义如下：

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{(N,\alpha)} < \infty \ \forall N \in \mathbb{N} \text{ 和多重指标 } \alpha\}. \tag{D.1.3}$$

这里的$\|u\|_{(N,\alpha)}$是半范数，定义为

$$\|u\|_{(N,\alpha)} := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{x}|)^N |\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})|.$$

据此，$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{(N,\alpha)})$是Fréchet空间。

粗略地说，Schwartz函数是光滑函数，并且它和它的导数在无穷远处的衰减速率比任意阶多项式衰减都快，比如正态分布高斯核里面的 $e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$ 就是一个Schwartz函数。

命题 D.1.2 (Folland [8, Prop. 8.3 and 8.17]). 对Schwartz函数空间，成立如下结论：

1. 若$f \in C^\infty$, 则 $f \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}^\beta \partial^\alpha f$ 对任意多重指标 α, β 都是有界的, 当且仅当 $\partial^\alpha(\boldsymbol{x}^\beta f)$ 对任意多重指标 α, β 都是有界的。这里$\boldsymbol{x}^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d}$.
2. C_c^∞ 和 $\mathcal{S}$ 都在 L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ 和 C_0 中稠密。

如上定义很难看出Fourier变换和偏微分方程有什么关系。然而，接下来我们证明Fourier变换能把导数和乘子互相转化（对应把常系数线性偏微分方程和常微分方程互相转化），把卷积和乘积相互转化（从而用Fourier变换求得的解往往具有卷积形式）。下面的各个性质中对函数f, g有不同的要求，但是为了行文上的简便，我们在证明这些结论时假设所有函数都是Schwartz函数，一般情况基本可以用$\mathcal{S}$在L^p空间中的稠密性证得。

命题 D.1.3. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则有

1. (导数 $\leftrightarrow$ 乘子) 若 $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ 对任意 $|\alpha| \leqslant k$ 成立，且 $\partial^\alpha f \in C_0$ 对任意 $|\alpha| \leqslant k-1$ 成立, 那么有 $\widehat{(\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha f)}(\boldsymbol{\xi}) = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$. 类似地, 若 $\boldsymbol{x}^\alpha f \in L^1$ 对任意 $|\alpha| \leqslant k$ 成立, 则 $\hat{f} \in C^k$ 且 $((-i\boldsymbol{x})^\alpha f(\boldsymbol{x}))^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \partial_{\boldsymbol{\xi}}^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$.
2. 若 T 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可逆线性变换，且 $S = (T^*)^{-1}$ 是T的转置的逆, 则 $\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ S$. 特别地，我们有
   - (平移) $(f(\boldsymbol{x} - \mathbf{h}))^\wedge(\xi) = e^{-i\mathbf{h}\cdot\xi} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ 对任意 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ 成立.
   - (伸缩) $(f(\lambda \boldsymbol{x}))^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}/\lambda)$ 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立.
   - (对称性) 若 $f, \hat{f} \in L^1$, 则 $\check{f}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(-\boldsymbol{\xi})$. 进而有 $\mathcal{F}^4$ =Id.
3. (卷积 $\leftrightarrow$ 乘积) $\widehat{f * g}(\boldsymbol{\xi}) = (\sqrt{2\pi})^d \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \hat{g}(\boldsymbol{\xi})$. 这里 $(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ 表示 f, g 的卷积. 卷积定义中的积分式收敛一般只需要f, g有一个是L^1的，另一个是L^∞的.
4. (Riemann-Lebesgue 引理) 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ 且满足 $|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})| \to 0$ as $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$.

证明. (1): 为了简便，我们只对一阶偏导数 $\partial^\alpha = \partial_j$ 证明，其中 $j \in \{1, \cdots, d\}$, 一般情况可以反复利用一阶导数的结果得到. 据Fourier变换的定义和分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\widehat{(\partial_{x_j} f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\overset{\partial_j}{=} -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \partial_{x_j}(e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (i\xi_j) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

(1)中第二个恒等式可以类似证得

$$(-ix_j f(\boldsymbol{x}))\hat{}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}(-ix_j)f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\partial_{\xi_j}(e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \partial_{\xi_j}\hat{f}(\boldsymbol{\xi}).$$

(2): 利用Fourier变换的定义和变量替换 $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$, 我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f\circ T}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(T\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = |\det T|^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot T^{-1}\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= |\det T|^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i(S\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = |\det T|^{-1}\hat{f}(S\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

(3): 不妨假设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 于是下面证明过程中的积分式全是收敛的，且可以直接换序。一般情况可由命题 D.1.2的逼近性质给出.

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)}_{(f*g)(\boldsymbol{x})}e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\xi}}e^{-i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= (\sqrt{2\pi})^d\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)}_{\hat{f}(\boldsymbol{\xi})}g(\boldsymbol{y})e^{-i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &= (\sqrt{2\pi})^d\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\hat{g}(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

(4): 再次回忆Fourier变换的定义: $\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 若$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则可以通过如下计算证得连续性：

$$|\hat{f}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{h}) - \hat{f}(\boldsymbol{\xi})| = \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}(e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{h}}-1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{x})||e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{h}}-1|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $|e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{h}}-1| \leqslant 2$ 以及 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 那么对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, 上式最后一个积分里面的被积函数可被 $2|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (不依赖$\mathbf{h}$) 逐点控制。据控制收敛定理，我们可以交换$\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}$ 和 $\int_{\mathbb{R}^d}$ 的顺序从而证得该积分式收敛到零。

下面证明Lebesgue可积函数的Fourier变换在频率空间无穷远处收敛到零。这个证明有一个小

技巧：在相函数中作变量替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}$，把$\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$用 $\boldsymbol{y}$ 变量重写，得到

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}f\left(\boldsymbol{y}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)e^{-i(\boldsymbol{y}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2})\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\overset{e^{-i\pi}=-1}{=\!=\!=}-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}f\left(\boldsymbol{y}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)e^{-i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

两式相加得到

$$2\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\left(f(\boldsymbol{x})-f\left(\boldsymbol{x}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)\right)e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

从而

$$|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|\leqslant\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(\boldsymbol{x})-f\left(\boldsymbol{x}+\frac{\pi\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to 0\qquad\text{as }\boldsymbol{\xi}\to\infty.$$

最后一步取极限用到了L^1范数的平移连续性，即对任意$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$有$\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{x}+\mathbf{h})-f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$，而这里$\pi\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|^2\to 0$就充当了$\mathbf{h}$的角色。 □

显见，命题D.1.3(1)蕴含如下结果

推论 D.1.4 ([8, 推论 8.23]). *$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 都将 $\mathcal{S}$ 连续地映射到 $\mathcal{S}$ 自身。*

下一个引理表明：Fourier变换保持 L^2 内积.

引理 D.1.5. *若$f,g\in L^1$, 则 $\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{\xi})\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$.*

证明. 由Fubini定理，直接代入定义计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{y})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ \overset{\text{Fubini定理}}{=\!=\!=}&\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{y})\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}g(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{y})\hat{g}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

□

下面来证明定理 D.1.1，即Fourier反演公式。在此之前我们需要一个计算性质的引理。

引理 D.1.6. *令 $\Phi(\boldsymbol{x})=e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{2}}$, 则有 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi})=\Phi(\boldsymbol{\xi})$.*

证明. 首先我们考虑一维的情况，据$\hat{\Phi}$的定义可得

$$\hat{\Phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{-i\xi}e^{-ix\xi}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

分部积分一次，得到

$$\hat{\Phi}(\xi)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{i\xi}e^{-ix\xi}(xe^{-\frac{x^2}{2}})\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}\,(-ix\Phi(x))\,\mathrm{d}x.$$

据命题D.1.3 (1)知，上式右边等于 $-\xi^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{\Phi}(\xi)$. 这样我们就得到一个可以求解$\hat{\Phi}$的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{\Phi}+\xi\hat{\Phi}(\xi)=0,\ \ \hat{\Phi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

它的解算出来是 $\hat{\Phi}(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}=\Phi(\xi)$，这里$\hat{\Phi}(0)$值的计算留给读者自己算。

对一般维数 $d>1$, 我们利用 $|\boldsymbol{x}|^2=x_1^2+\cdots+x_d^2$ 和一维的结果得到

$$\hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi})=\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^1}e^{-\frac{x_j^2}{2}}e^{-ix_j\xi_j}\,\mathrm{d}x_j=\prod_{j=1}^{d}e^{-\frac{\xi_j^2}{2}}=\Phi(\boldsymbol{\xi}).$$

□

定理D.1.1的证明. 令 $\Phi(\boldsymbol{x})=e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{2}}$. 给定 $t>0$, 我们考虑对 $(\hat{f})^{\vee}$ 作卷积光滑逼近：

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-t|\boldsymbol{\xi}|^2}e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\sqrt{2t}\boldsymbol{\xi})e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

接下来化简左边，据命题 D.1.3 和引理 D.1.6, 函数 $\varphi(\boldsymbol{\xi}):=e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-t|\boldsymbol{\xi}|^2}$ 的Fourier变换可以写成

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Phi(\sqrt{2t}\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{(\sqrt{2t})^d}\Phi(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\sqrt{2t}}).$$

现在，可以使用引理 D.1.5 得到如下的卷积形式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-t|\boldsymbol{\xi}|^2}e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
=&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(\sqrt{2t})^d}\Phi(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\sqrt{2t}})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\
=&(\eta_{\sqrt{2t}}*f)(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

这里 $\eta(\cdot):=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\Phi(\cdot)\in\mathcal{S}$, $\eta_\varepsilon(\cdot):=\frac{1}{\varepsilon^d}\eta(\frac{\cdot}{\varepsilon})$. 而习题 2.1.1 表明 $\int_{\mathbb{R}^d}\eta=1$，从而$\eta_{\sqrt{2t}}$是一族恒等逼近。

现在我们用定理 C.2.1(4)的类似版本 (见 Folland [8, 引理 8.25]) 可以证得 $f*\eta_{\sqrt{2t}}\xrightarrow{L^1}f$ in L^1,

进而存在子序列几乎处处收敛到f. 另一方面，因为 $\hat{f}\in L^1$, 所以我们用控制收敛定理就可得到想要的极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-t|\xi|^2}e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=(\hat{f})^\vee(x).$$

这就说明 $f=(\hat{f})^\vee$ a.e. 最后，Riemann-Lebesgue引理表明二者都是C_0函数，证毕。 □

推论 D.1.7 ([8, 推论 8.27]). *若$f\in L^1$ 且 $\hat{f}=0$, 则 $f=0$ a.e.*

推论 D.1.8 ([8, 推论 8.28]). *$\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}$ 上的自同胚。*

我们最后以Plancherel定理结束这一小节，它表明Fourier变换是L^2-等距同构。

定理 D.1.9 (Plancherel定理). *若$f\in L^1\cap L^2$, 则 $\hat{f}\in L^2$; 且 $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}$ 可以唯一地延拓为L^2上的酉等距同构。*

证明. 令$\mathfrak{X}:=\{f\in L^1|\hat{f}\in L^1\}$. 由于 $\hat{f}\in L^1$ 蕴含 $f\in L^\infty$, 于是我们知道 $\mathfrak{X}\subset L^2$. 又因为 $\mathcal{S}\subset\mathfrak{X}$, 所以 $\mathfrak{X}$在L^2中是稠密的. 现给定 $f,g\in\mathfrak{X}$, 令 $h=\hat{\bar{g}}$. 则由Fourier反演公式知 $\hat{h}(\xi)=\overline{g(\xi)}$，再用引理D.1.5就可得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}f\bar{g}=\int_{\mathbb{R}^d}f\hat{h}=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}h=\int\hat{f}\bar{\hat{g}}.$$

因此,$\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}}$ 保持了 L^2 内积。特别地，令$g=f$就得到$\mathcal{F}$是L^2酉等距的，即$\|\hat{f}\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$ (Plancherel恒等式). 反演公式表明 $\mathcal{F}(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$，由B.L.T.定理（有界线性泛函的连续延拓定理）得知$\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}}$ 可以唯一地延拓为 L^2 上的酉等距同构. 最后，我们只要证明这个延拓之后的算子与 $\mathcal{F}$ 在 $\mathfrak{X}$ 是一样的，这一步与定理 D.1.1 的证明类似，此处不再赘述。 □

现在，我们对$1\leqslant p\leqslant 2$证明Fourier变换具有$L^p\to L^{p'}$有界性。

定理 D.1.10 (Hausdorff-Young不等式). *设$1\leqslant p\leqslant 2$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, 则存在仅依赖p,d的常数$C>0$使得$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.*

该不等式是Riesz-Thorin内插定理的直接结论：在定理 C.3.5中取 $p_0=q_0=2$, $M_0=1$ 和 $p_1=1$, $q_1=\infty$, $M_1=(2\pi)^{-d/2}$ 即得结论。

习题 D.1

习题 D.1.1. *设$\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$是可测函数，满足$|\varphi|=1$以及$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$对任意$x,y\in\mathbb{R}^d$成立。证明：存在$\xi\in\mathbb{R}^d$使得$\varphi(x)=e^{ix\cdot\xi}$.*

习题 D.1.2 (*海森堡不确定性原理). *给定点$x_0,\xi_0\in\mathbb{R}^d$ 以及函数 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 证明如下海森堡不确定性原理:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|(x-x_0)f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|(\xi-\xi_0)\hat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\geqslant\frac{d^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{D.1.4}$$

这个不等式表明动量和位置不可能同时在给定的动量$\boldsymbol{\xi}_0$和给定的位置ξ_0附近被确定。

提示：只需证明$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{x}_0 = 0$的情况即可，否则考虑$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}_0}$并利用命题D.1.3(2)约化到这一特殊情况。利用Plancherel恒等式可得 $|\boldsymbol{\xi}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 = |\widehat{\nabla f}(\boldsymbol{\xi})|^2$，之后再用Plancherel恒等式和Cauchy-Schwarz不等式证明左边$\geqslant (\int_{\mathbb{R}^d} |(\boldsymbol{x}\cdot\nabla f)f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2$, 最后用$(\nabla f)f = \frac{1}{2}\nabla(f^2)$, 然后分部积分一次。

习题 D.1.3. 证明：不等式

$$\|\{a_n\}\|_{L^q} \leqslant A\|f\|_{L^p}, \quad \text{for all } f \in L^p$$

只可能在$1/p + 1/q \leqslant 1$的情况下成立，其中$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$是$f$的Fourier系数。

提示：令$D_N(\theta) = \sum_{|n|\leqslant N} e^{in\theta}$ 是Dirichlet核，则$N \to \infty$时，我们有$\|D_N\|_{L^p} \approx N^{1-1/p}$对$p > 1$成立，以及 $\|D_N\|_{L^1} \approx \log N$.

习题 D.1.4. 如下是Hausdorff-Young不等式的简单推广

(1) 设 $\{\varphi_n\}$是$L^2(X,\mu)$中的标准序列，并假设$\sup_n |\varphi_n(x)| \leqslant M$. 记 $a_n = \int f\overline{\varphi_n}\,\mathrm{d}\mu$，证明：$\|a_n\|_{L^q} \leqslant M^{(2/p)-1}\|f\|_{L^p(X)}, 1 \leqslant p \leqslant 2, 1/p + 1/q = 1$.

(2) 设$f \in L^p(\mathbb{T}^d)$, $a_n = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. 证明：$\|\{a_n\}\|_{L^q(\mathbb{Z}^d)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$, 其中$1/q \leqslant 1 - 1/p$.

习题 D.1.5. 证明：存在常数$A > 0$使得对任意简单函数f成立不等式$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$，当且仅当$1/p + 1/q = 1$.

提示：设 $f_r(\boldsymbol{x}) = f(r\boldsymbol{x}), r > 0$，则 $\hat{f}_r(\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}/r)r^{-d}$.

习题 D.1.6. 证明：上一题的不等式成立的另一必要条件是 $p \leqslant 2$. 事实上，不等式

$$\int_{|\xi|\leqslant 1} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \leqslant A\|f\|_{L^p}$$

成立蕴含了 $p \leqslant 2$.

提示：设 $f^s(\boldsymbol{x}) = s^{-d/2}e^{-|\boldsymbol{x}|^2/s}, s = \sigma + it, \sigma > 0$，然后令$s = 1/2$, $t \to \infty$.

D.2 分布理论简介

分布（又称“广义函数”）理论的基本思想是：处理作用于“好”函数空间的线性泛函通常比直接处理“坏”函数要容易得多；我们所考虑的“好”函数集合在常见的基本运算下是封闭的（比如分部积分、求导、乘以一个光滑函数、作卷积等），并且这些运算通过对偶性推广到分布。这种精妙的思想经常被用在偏微分方程的理论构建中。

本章附录只讲述$\mathbb{R}^d$上的分布理论的基本知识，这是因为我们的目的仅是讨论何时可以在分布意义下定义Fourier变换。首先我们回忆已经学过包含关系$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$，以及他们

作为Fréchet空间可以定义如下方式的收敛

- $f_n \xrightarrow{C_c^\infty} f$ 是指 $f_n, f \in C_c^\infty$ **有公共支集** K 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\partial^\alpha(f_n - f)\|_{L^\infty} = 0$ 对全体多重指标α皆成立。
- $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ 是指 $f_n, f \in \mathcal{S}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{x}|)^N |\partial^\alpha(f_n - f)| = 0$ 对全体多重指标α和非负整数$N \in \mathbb{N}$皆成立。
- $f_n \xrightarrow{C^\infty} f$ 是指 $f_n, f \in C^\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|\boldsymbol{x}|\leqslant N} |\partial^\alpha(f_n - f)| = 0$ 对全体多重指标α和正整数$N \in \mathbb{N}^*$皆成立。

本章剩余部分，我们记$\mathcal{D} := C_c^\infty$并称之为**测试函数**，同时还引进记号$\mathcal{E} := C^\infty$. 现在我们定义他们的对偶空间

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) := (C_c^\infty(\mathbb{R}^d))^*, \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^*, \quad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) := (C^\infty(\mathbb{R}^d))^*.$$

则可以根据定义验证他们有如下包含关系

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

对偶空间$\mathcal{D}', \mathcal{S}', \mathcal{E}'$都被赋予弱-*拓扑，因为它们分别是 $\mathcal{D} := C_c^\infty$, $\mathcal{S}$ 和 C^∞的对偶空间，即

- $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ 是指 $T_n, T \in \mathcal{D}'$ 且 $\langle T_n, f\rangle \to \langle T, f\rangle$对任意$f \in \mathcal{D}$成立。
- $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ 是指 $T_n, T \in \mathcal{S}'$ 且 $\langle T_n, f\rangle \to \langle T, f\rangle$对任意$f \in \mathcal{S}'$成立。
- $T_n \xrightarrow{\mathcal{E}'} T$ 是指 $T_n, T \in \mathcal{E}'$ 且 $\langle T_n, f\rangle \to \langle T, f\rangle$对任意$f \in \mathcal{E}$成立。

这里的$\langle\cdot,\cdot\rangle$是指对偶空间$X^*$(即$X$上的连续线性泛函)与$X$中元素的配对。

定义 D.2.1. 空间$\mathcal{D}', \mathcal{S}', \mathcal{E}'$中的元素分别称作 **分布(distribution)或广义函数(generalized function)**、**缓增分布(tempered distribution)**、**紧支分布(compactly supported distribution).**

例 D.2.1. 这里我们给出一些常见的例子。

- L^1_{loc}函数都是分布。(事实上，“局部可积”某种程度上可以视作一个分布能视作一个函数的“最低要求”)
- 设$U \subset \mathbb{R}^d$是开集，U上的任何符号Radon测度都是分布，即在U的任意紧子集上取值都有限的符号Borel测度。我们可以定义对应的分布$F \in \mathcal{D}'$为$\langle F, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$.特别地，若$\mu$是总质量为1且仅仅支于原点的测度，则它实际上定义了**原点处的Dirac delta**δ_0，即$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{0})$. 请注意，$\delta$不是函数，它只属于$\mathcal{E}'$.
- 若函数g满足：存在$k > 0$使得$|g(\boldsymbol{x})| \leqslant C(1 + |\boldsymbol{x}|)^k$对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$成立，则称g为**慢增函数(slowly increasing function)**. 事实上，慢增函数必是缓增分布。
- $\log|\boldsymbol{x}| \in \mathcal{S}'$.

- 主值积分$P.V.(\frac{1}{x})$的如下截断属于$\mathcal{E}'$，即

$$\langle u,\varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

D.2.1 分布的基本运算

本节我们介绍如何定义分布的几类基本运算，也就是讨论在何种意义下我们可以“假装”分布可以像正常的函数一样求导、分部积分、计算卷积和傅立叶变换等基本操作。

定义 D.2.2. 分布的求导、乘法（乘以光滑函数）、卷积定义如下。

- （分布导数）设$Tf=\partial^\alpha f$，定义在$C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$上。若$\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，分部积分给出$\int(\partial^\alpha f)\varphi=(-1)^{|\alpha|}\int f(\partial^\alpha\varphi)$；由于$\varphi$具有紧支集，故无边界项。因此，我们可以对任意$F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$通过下式定义其导数$\partial^\alpha F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle\partial^\alpha F,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle F,\partial^\alpha\varphi\rangle.$$

  特别地，通过此方法我们可以定义任意局部可积函数的导数，即使它们在经典意义下不可微；这是分布理论之所以强大的主要原因之一。我们将在下文更详细地讨论这一点。

- （乘以光滑函数）给定$\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$，定义$Tf=\psi f$。则$T^*=T|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$，因此对于$F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$，我们可以通过下式定义乘积$\psi F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle\psi F,\varphi\rangle=\langle F,\psi\varphi\rangle.$$

  此外，若$\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，此公式对任意$\varphi\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$有意义，并将$\psi F$定义为$\mathbb{R}^d$上的分布。

- （平移）给定$y\in\mathbb{R}^d$，令$T=\tau_{\boldsymbol{y}}$.（回顾我们定义了$\tau_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.）由于$\int f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x=\int f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，我们有$T^*=\tau_{-\boldsymbol{y}}|C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$。于是，对于$F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$，我们通过下式定义平移分布$\tau_{\boldsymbol{y}}F\in\mathcal{D}'$:

$$\langle\tau_{\boldsymbol{y}}F,\varphi\rangle=\langle F,\tau_{-\boldsymbol{y}}\varphi\rangle.$$

  例如，位于$\boldsymbol{y}$的点质量是$\tau_{\boldsymbol{y}}\delta$.

- （与线性映射的复合）给定$\mathbb{R}^d$的一个可逆线性变换S，令$V=S^{-1}(\mathbb{R}^d)$并令$Tf=f\circ S$。则$T^*\varphi=|\det S|^{-1}\varphi\circ S^{-1}$，因此对于$F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$，我们通过下式定义$F\circ S\in\mathcal{D}'(S^{-1}(\mathbb{R}^d))$:

$$\langle F\circ S,\varphi\rangle=|\det S|^{-1}\langle F,\varphi\circ S^{-1}\rangle.$$

  特别地，对于$S\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$，我们有$f\circ S=\tilde{f}$，$S^{-1}=S$，且$|\det S|=1$，因此我们通过$\langle\tilde{F},\varphi\rangle:=\langle F,\tilde{\varphi}\rangle$定义分布关于原点的反射，其中$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}):=\varphi(-\boldsymbol{x})$.

- （卷积，第一种方法）给定$\psi \in C_c^\infty$和$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，积分

$$f * \psi(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int f(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int f\left(\tau_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\psi}\right)$$

  对一切$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$有定义。同样的定义适用于$F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$：卷积$F * \psi$是由下式定义的函数：

$$F * \psi(\boldsymbol{x}) = \langle F, \tau_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\psi}\rangle.$$

  由于当$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$时$\tau_{\boldsymbol{x}}\tilde{\psi} \to \tau_{\boldsymbol{x}_0}\tilde{\psi}$在$C_c^\infty$中成立，$F * \psi$是一个连续函数（实际上是$C^\infty$的）。例如，对于任意$\psi \in C_c^\infty$，我们有

$$\delta * \psi(\boldsymbol{x}) = \langle \delta, \tau_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\psi}\rangle = \tau_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\psi}(\boldsymbol{0}) = \psi(\boldsymbol{x}).$$

  因此δ**是卷积的乘法单位元**。

- （卷积，第二种方法）设$\psi, \widetilde{\psi}$如上定义。若$f \in L^1_{\text{loc}}$且$\varphi \in C_c^\infty$，我们有

$$\int (f * \psi)\varphi = \iint f(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int f(\varphi * \widetilde{\psi}).$$

  也就是说，若$Tf = f * \psi$，则T将L^1_{loc}映射到L^1_{loc}中。因此对于$F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$，我们可以通过下式将$F * \psi$定义为$V$上的分布：

$$\langle F * \psi, \varphi\rangle = \langle F, \varphi * \widetilde{\psi}\rangle.$$

  同样地，我们有$\delta * \psi = \psi$，因为

$$\langle \delta * \psi, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi * \widetilde{\psi}\rangle = (\varphi * \widetilde{\psi})(\boldsymbol{0}) = \int \varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \langle \psi, \varphi\rangle.$$

  这两种定义是等价的，证明可参考 Stein [15, Prop. 3.1.1].

附录C.2中我们介绍了卷积光滑逼近的方法，实际上我们有$\{\eta_\varepsilon\}$在$\mathcal{D}'$中弱-*收敛到原点处的Dirac delta分布δ_0.

命题 D.2.1 ([8, Prop. 9.5]). 如下事实成立

(1) $\mathcal{D}$在$\mathcal{D}'$中是稠密的（弱-*拓扑意义下）。
(2) 给定$F \in \mathcal{D}'$以及附录C.2中定义的逼近恒等族$\{\eta_\varepsilon\}$，就有$\eta_\varepsilon * F \rightharpoonup F$在$\mathcal{D}'$中成立。

我们接下来讨论分布支撑（support）的概念。若f是一个连续函数，其支撑集定义为满足$f(\boldsymbol{x}) \neq 0$的点集的闭包。换一种说法，它是使得f在其上消失的最大开集的补集。

定义 D.2.3. 对于分布F，若对任意测试函数$\varphi \in \mathcal{D}$，只要其支撑集包含在某个开集中就有$\langle F, \varphi\rangle = 0$，则称$F$在该开集中消失。因此，我们定义分布$F$的支撑集为使$F$消失的最大开集的补集，并记作$\operatorname{Spt} F$.

注记 D.2.1. 这个定义是无歧义的，因为若F在一族开集$\{\mathcal{O}i\}i \in \mathcal{I}$上均消失，则$F$在其并集$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{O}i$上也消失。事实上，假设$\varphi$是一个测试函数，其支集包含在紧集$K \subset \mathcal{O}$中。由于$\mathcal{O}$覆盖紧集$K$，我们可以选取一个有限子覆盖（在可能重新更改集合$\mathcal{O}_i$的下标后）记为$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{O}_k$。对单位分解应用正则化可得到光滑函数$\eta_k$（$1 \leqslant k \leqslant N$），满足$0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$，$\mathrm{Spt}\,(\eta_k) \subset \mathcal{O}_k$，且当$\boldsymbol{x} \in K$时$\sum_{k=1}^{N} \eta_k(\boldsymbol{x}) = 1$。那么$F(\varphi) = F(\sum_{k=1}^{N} \varphi\eta_k) = \sum_{k=1}^{N} F(\varphi\eta_k) = 0$，因为$F$在每个$\mathcal{O}_k$上消失。因此$F$在$\mathcal{O}$上消失。

注意以下关于分布支集的简单事实：$\partial_x^\alpha F$和$\psi \cdot F$（其中$\psi \in C^\infty$）的支撑集包含在F的支撑集中；Dirac δ函数（及其导数）的支集是原点；最后，当F与φ的支集不相交时，总有$F(\varphi) = 0$。

命题 D.2.2 ([8, Prop. 9.3])**.** 以下事实成立。

- 设F是支集为C_1的分布，$\psi \in \mathcal{D}$且支集为C_2。则$F * \psi$的支集包含于 $C_1 + C_2 := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in C_1, \boldsymbol{y} \in C_2\}$.
- 若F_1和F_2具有紧支集，则$F_1 * F_2 = F_2 * F_1$。（因此有时当仅F_1具有紧支撑时，我们也用$F_1 * F$表示$F * F_1$。）对于Dirac delta-函数δ，有$F * \delta = \delta * F = F$。
- 若F_1具有紧支集，则对任意多重指标α有

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha (F * F_1) = (\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F) * F_1 = F * (\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha F_1).$$

- 若F和F_1的支集分别为C和C_1，且C是紧集，则$F * F_1$的支集包含在$C + C_1$中。

D.2.2 缓增分布及其Fourier变换

从Hausdorff-Young不等式(定理D.1.10)的结论来看，我们甚至无法将$L^p(\mathbb{R}^d)\,(p > 2)$中函数$f$的Fourier 变换定义为一个普通函数。为了扩展Fourier变换的定义，我们必须寻找一类合适的分布，使得$\mathcal{F}$在此类上仍是一个自同构。事实上，我们将选择$\mathcal{S}'$而非$\mathcal{D}'$来定义Fourier变换，因为测试函数集$\mathcal{D}$不满足$\mathcal{F}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$。

命题 D.2.3. 给定不恒为零的$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，则$\hat{\varphi}$在任何非空开集上均不为零。

对于缓增分布，可以验证

命题 D.2.4. 设$F \in \mathcal{S}'$。则存在$N \in \mathbb{N}^*$、多重指标α及常数$C > 0$，使得对所有$\varphi \in \mathcal{S}$有$\langle F, \varphi \rangle \leqslant C\|\varphi\|_{(N,\alpha)}$。因此，给定任意$F \in \mathcal{S}'$，其分布导数也属于$\mathcal{S}'$，且对所有多重指标$\alpha$，$\boldsymbol{x}^\alpha F$也属于$\mathcal{S}'$.

接下来我们定义缓增分布的Fourier变换

定义 D.2.4. 设$F \in \mathcal{S}'$。定义其Fourier变换$\hat{F}$为

$$\langle \hat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \hat{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

类似地我们可以定义Fourier逆变换$\check{F}$如下

$$\langle \check{F}, \varphi \rangle = \langle F, \check{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Fourier反演公式$\varphi = (\widehat{\varphi})^\vee = (\varphi^\vee)^\wedge$即可推广至$\mathcal{S}'$：

$$\langle (\widehat{F})^\vee, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \varphi^\vee \rangle = \langle F, (\varphi^\vee)^\wedge \rangle = \langle F, \varphi \rangle,$$

进而 $(\widehat{F})^\vee = F$, 同理还有$(F^\vee)^\wedge = F$. 因此Fourier变换是$\mathcal{S}'$上的同构。

命题 D.2.5. Schwartz函数的Fourier变换的性质可以继承到缓增分布上。具体而言，对$F \in \mathcal{S}'$如下性质成立

- $\widehat{(\tau_{\boldsymbol{y}} F)} = e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{y}}\widehat{F}, \quad \tau_{\boldsymbol{\eta}}\widehat{F} = \widehat{e^{i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{x}}F}.$
- $\partial^\alpha \widehat{F} = ((-i\boldsymbol{x})^\alpha F)^\wedge, \quad (\partial^\alpha F)^\wedge = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha \widehat{F}.$
- $(F \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1} \widehat{F} \circ (T^*)^{-1} \quad (T \in GL(d, \mathbb{R})),$
- $(F * \psi)^\wedge = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{\psi}\widehat{F} \quad (\psi \in \mathcal{S}).$

特别地，任何紧支撑分布都是缓增的。此外，若$F \in \mathcal{E}'$，则存在另一种定义$\widehat{F}$的方式。事实上，$\langle F, \varphi \rangle$对任何$\varphi \in C^\infty$都有意义，且如果我们取$\varphi(\boldsymbol{x}) = e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}$，则得到一个关于$\boldsymbol{\xi}$的函数，它完全有资格被称为函数$\widehat{F}(\boldsymbol{\xi})$。实际上，这两种定义是等价的：

命题 D.2.6. 若$F \in \mathcal{E}'$，则$\widehat{F}$是C^∞的慢增函数，且由$\widehat{F}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \langle F, E_{-\xi} \rangle$给出，其中$E_\xi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}$。

据此我们断言：任何支于单点的分布必是该点处Dirac δ-函数及其分布导数的有限线性组合。

定理 D.2.7. 设F是支于原点的分布，则F具有如下有限和的形式:

$$F = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha \partial_x^\alpha \delta.$$

即，

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant N} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \, (\partial_x^\alpha \varphi)\, (0), \qquad \text{for } \varphi \in \mathcal{D}.$$

证明依赖于以下断言：

断言. 设F_1是一个支于原点的分布，存在常数M满足以下两个条件:

(1) $|\langle F_1, \varphi \rangle| \leqslant c|\varphi|_{(N,\alpha)}$，对所有$\varphi \in \mathcal{D}$，$N + |\alpha| \leqslant M$成立。
(2) $\langle F_1, \boldsymbol{x}^\alpha \rangle = 0$，对所有$|\alpha| \leqslant M$成立。

则$F_1 = 0.$

断言的证明. 为证明该断言，取$\eta \in \mathcal{D}$，满足当$|\boldsymbol{x}| \geqslant 1$时$\eta(\boldsymbol{x}) = 0$，且当$|\boldsymbol{x}| \leqslant 1/2$时$\eta(\boldsymbol{x}) = 1$，并记$\eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$。由于$F_1$支撑在原点，有$\langle F_1, \eta_\varepsilon \varphi \rangle = \langle F_1, \varphi \rangle$。此外，同理，对所有$|\alpha| \leqslant$

M有$\langle F_1, \eta_\varepsilon \boldsymbol{x}^\alpha\rangle = \langle F_1, \boldsymbol{x}^\alpha\rangle = 0$，因此

$$\langle F_1, \varphi\rangle = \left\langle F_1, \eta_\varepsilon \left(\varphi(\boldsymbol{x}) - \sum_{|\alpha|\leqslant M} \frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}\boldsymbol{x}^\alpha\right)\right\rangle$$

其中$\varphi^{(\alpha)}(0) = \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha \varphi(0)$. 若$R(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \sum\limits_{|\alpha|\leqslant M} \frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}\boldsymbol{x}^\alpha$是余项，则当$|\beta| \leqslant M$时，有$|R(\boldsymbol{x})| \leqslant c|\boldsymbol{x}|^{M+1}$以及 $|\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta R(\boldsymbol{x})| \leqslant c_\beta |\boldsymbol{x}|^{M+1-|\beta|}$.

然而现在又有$|\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x})| \leqslant c_\beta \varepsilon^{-|\beta|}$，且$|\boldsymbol{x}| \geqslant \varepsilon$时有$\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta \eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0$。因此据Leibniz法则，对任意$|\alpha| + N \leqslant M$有$|\eta_\varepsilon R|_{(N,\alpha)} \leqslant c\varepsilon$，而假设(1)给出 $|\langle F_1, \varphi\rangle| \leqslant c'\varepsilon$，令$\varepsilon \to 0$即得所需结论。 □

定理 D.2.7 的证明. 现在我们将上述引理应用于$F_1 = F - \sum_{|\alpha|\leqslant M} a_\alpha \partial_x^\alpha \delta$，其中$M = N + |\alpha|$是命题D.2.4中出现的$N$和$|\alpha|$之和，而$a_\alpha$选为$a_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle F, \boldsymbol{x}^\alpha\rangle$。由于$\langle \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha \delta, \boldsymbol{x}^\beta\rangle = (-1)^{|\alpha|}\alpha!$（当$\alpha = \beta$时）否则为零，于是$F_1 = 0$，定理证毕。 □

一个重要的结论是，每个分布至少局部上可以表示为连续函数及其分布导数的线性组合。Fourier 变换为此提供了一个简单的证明：

命题 D.2.8 (分布的局部结构定理[8, Prop. 9.14])**.**

(1) 若$F \in \mathcal{E}'$，则存在$N \in \mathbb{N}$、常数$c_\alpha(|\alpha| \leqslant N)$，以及当$|\boldsymbol{x}| \to \infty$时趋于零的$f \in C(\mathbb{R}^d)$，使得$F = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha \partial^\alpha f$.

(2) 若$F \in \mathcal{D}'$且V是一个预紧开集（即$\bar{V}$是紧集），则存在如上所述的N, c_α, f，使得在V上成立$F = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha \partial^\alpha f$.

习题 D.2

习题 D.2.1. 令 $H(x) = \chi_{(0,\infty)}$ 为 Heaviside 函数。证明其分布导数是原点处的Dirac δ-函数。

习题 D.2.2. 若 $F \in \mathcal{D}'$ 且一阶分布导数皆为零，即$\partial_j F = 0$ 对 $1 \leqslant j \leqslant d$ 成立。证明: F是$\mathbb{R}^d$ 上的常值函数。(提示：考虑 $F * \eta_\varepsilon$.)

习题 D.2.3. 证明当 $0 < \alpha < d$ 时，$|\boldsymbol{x}|^{-\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的Fourier变换为 $C_{\alpha,d}|\boldsymbol{\xi}|^{\alpha-d}$.

提示：首先证明该函数的Fourier变换在 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ 之外等于一个光滑函数，然后利用伸缩和旋转对称性确定该函数。

习题 D.2.4. $\mathbb{R}^d$ 上的一个分布 F 称为**度为 λ 的齐次分布** (**homogeneous of degree λ**)，是指对任意$r > 0$ 有 $F \circ S_r = r^\lambda F$，其中 $S_r(\boldsymbol{x}) = r\boldsymbol{x}$。证明如下结论。

(1) δ 是度$(-d)$齐次的分布。

(2) 若 F 是度λ齐次分布，则 $\partial^\alpha F$ 是度$(\lambda - |\alpha|)$齐次分布。

(3) 分布 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\chi_{(0,\infty)}(x)\log x\right)$ 不是齐次分布，尽管它在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上与一个度(-1) 齐次函数吻合。

问题 D.2

问题 D.2.1. 设连续函数f是$\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$上度为$(-d)$的齐次函数(即 $f(r\boldsymbol{x}) = r^{-d}f(\boldsymbol{x})$)且在单位球面上均值为零(即 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f\,\mathrm{d}S = 0$)，则 f 在原点附近不是局部可积的（除非 $f = 0$），但如下公式

$$\langle P.V.(f), \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\boldsymbol{x}|>\epsilon} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (\varphi \in C_c^\infty)$$

定义了一个分布 $P.V.(f)$，它在 $\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$上与$f$吻合，并且在习题 D.2.4 的意义下是度$(-d)$齐次的。

提示：对任意 $a > 0$，所指的极限等于 $\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant a} f(\boldsymbol{x})[\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\mathbf{0})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{|\boldsymbol{x}|>a} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，且这些积分绝对收敛。

问题 D.2.2 ([15, 定理 3.2.5]). 假设 $\lambda > d$，则函数 $\boldsymbol{x} \longmapsto |\boldsymbol{x}|^{-\lambda}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 的原点附近不是局部可积的。如下是将其变为分布的方法：

(1) 若 $\varphi \in C_c^\infty$，令P_φ^k为φ 在 $x = 0$ 处的k阶Taylor多项式。给定 $k > \lambda - d - 1$ 和 $a > 0$，定义

$$\langle F_a^k, \varphi\rangle = \int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant a}\left[\varphi(\boldsymbol{x}) - P_\varphi^k(\boldsymbol{x})\right]|\boldsymbol{x}|^{-\lambda}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{|\boldsymbol{x}|>a}\varphi(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{-\lambda}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

则$F_a^k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$且在 $\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上与 $|\boldsymbol{x}|^{-\lambda}$ 吻合。

(2) 若 $\lambda \notin \mathbb{Z}$ 且我们取 $k = [\lambda - d]$ 为不超过$\lambda - d$ 的最大整数，我们可以在 (1) 中令 $a \to \infty$ 得到另一个分布 F，它在 $\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上与 $|\boldsymbol{x}|^{-\lambda}$ 一致：

$$\langle F, \varphi\rangle = \int\left[\varphi(\boldsymbol{x}) - P_\varphi^k(\boldsymbol{x})\right]|\boldsymbol{x}|^{-\lambda}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

(3) 令 $d = 1$ 且令 $k = [\lambda]$ 为不超过 λ 的最大整数。令

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [(k-\lambda)\cdots(1-\lambda)]^{-1}(\operatorname{sgn} x)^k|x|^{k-\lambda} & \text{if } \lambda > k \\ (-1)^{k-1}[(k-1)!]^{-1}(\operatorname{sgn} x)^k\log|x| & \text{if } \lambda = k \end{cases}.$$

则 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，且分布导数 $f^{(k)}$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上与 $|x|^{-\lambda}$ 一致。

(4) 据定理 D.2.7，在 (1)-(3) 中构造的任何两个分布之间的差是 δ 及其导数的线性组合。具体是哪些？

问题 D.2.3 ([15, 定理 3.2.1]). 证明：分布$P.V.(1/x)$ 等于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| \text{ 以及 } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-i0} + \frac{1}{x+i0}\right),$$

其在分布意义下的Fourier变换为 $-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}(\xi)$.

附录 E　线性泛函分析

本附录的最后一部分记录了泛函分析中出现的一些基本概念和常用定理. 相关的证明可以在 Bühler-Salamon [3, Chapter 2-4] 或 Evans [6, Appendix D] 中找到.

E.1　Banach 空间

设 X 表示一个实线性空间.

定义 E.1.1. 如果映射 $\| \quad \| : X \to [0, \infty)$ 满足以下条件, 则称其为**范数 (norm)**:

- (三角不等式) 对所有 $u, v \in X$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$;
- 对所有 $u \in X, \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
- $\|u\| = 0$ 当且仅当 $u = 0$.

下文中, 我们假设 X 是一个赋范线性空间.

定义 E.1.2. 如果赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是完备的, 即 X 中的每个 Cauchy 列都收敛且极限仍属于 X, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 **Banach 空间**.

定义 E.1.3. 如果 X 存在可数稠密子集, 则称 X 是 **可分的 (separable)**.

设 X 和 Y 为实 Banach 空间.

定义 E.1.4. 映射 $A : X \to Y$ 是 **线性算子 (linear operator)**,是指对任意 $u, v \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 满足$A[\lambda u + \mu v] = \lambda A u + \mu A v$. A 的值域记作 $R(A) := \{v \in Y \mid v = Au$ 对于某个 $u \in X\}$, 其零空间（核）记作 $N(A) := \ker(A) = \{u \in X \mid Au = 0\}$. A 的定义域记作 $D(A)$.

称线性算子 $A : X \to Y$ 是 **有界的 (bounded)**是指$\|A\| := \sup\left\{\|Au\|_Y \mid \|u\|_X \leqslant 1\right\} < \infty$. 易证有界线性算子 $A : X \to Y$ 是连续的, 反之亦然.

定义 E.1.5. 如果在X中有$u_k \to u$且在Y中有$Au_k \to v$时可得到$Au = v$成立, 则称线性算子 $A : X \to Y$ 为 **闭算子 (closed operator)**. 等价地, 如果算子 A 的图像 $G(A) := \{(u, v) \in X \times Y \mid x \in D(A), v = Au\}$ 是 $X \times Y$ 的闭线性子空间, 则 A 是闭的. 在子空间 $D(A) \subset X$ 上的图范数是$\|u\|_A := \|u\|_X + \|Au\|_Y$.

如果 X 的每个开子集在 f 下的像是 Y 的开子集, 则称线性算子 $A : X \to Y$ 为 **开映射 (open map)**.

E.1.1 Banach 空间的几何

首先, 我们注意到 Banach 空间是有限维的当且仅当每个有界闭集都是紧的. 这由以下 F. Riesz 引理给出.

引理 E.1.1 (Riesz 引理). 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $Y \subset X$ 是一个不等于 X 的闭线性子空间. 固定常数 $0 < \delta < 1$. 则存在向量 $x \in X$ 使得$\|x\| = 1$, $\inf\limits_{y\in Y} \|x - y\| \geqslant 1 - \delta$.

证明. 取 $x_0 \in X \backslash Y$. 由于 Y 是闭的, 故 $d := \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| > 0$. 选择 $y_0 \in Y$ 使得$\|x_0 - y_0\| \leqslant \frac{d}{1-\delta}$. 现在设$x := \|x_0 - y_0\|^{-1} (x_0 - y_0)$, 则有 $\|x\| = 1$ 且对于任意 $y \in Y$成立下式

$$\|x - y\| = \frac{\|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\| y\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant 1 - \delta.$$

□

有几个定理从不同方面刻画了 Banach 空间的几何特性.

定理 E.1.2 (开映射定理). 设 X, Y 为 Banach 空间, $A : X \to Y$ 为有界满射. 则 A 是开映射.

开映射定理的一个推论是 A 为双射的特殊情况:

定理 E.1.3 (逆映射定理). 设 X, Y 为 Banach 空间, $A : X \to Y$ 为有界双射, 则 $A^{-1} : Y \to X$ 也是有界的.

研究 Banach 空间 X 上的线性算子时, 其定义域往往不是整个空间而是 X 的线性子空间. 在大多数情况下, 定义域是稠密线性子空间.

例 E.1.1. 设$X := C([0, 1])$赋予一致范数, $D(A) := C^1([0, 1])$, 定义线性算子 $A : D(A) \to X$ 为 $Af := f'$ $(f \in C^1([0, 1]))$. 据 Weierstrass 逼近定理, 子空间 $D(A) = C^1([0, 1])$ 在 $X = C([0, 1])$ 中是稠密的. 此外, 由下式定义的 A 的图像

$$G(A) := \{(f, g) \in X \times X \mid f \in D(A), g = Af\}$$

是 $X \times X$ 的一个闭线性子空间. 也就是说, 如果 $f_n \in C^1([0, 1])$ 满足 (f_n, Af_n) 在 $X \times X$ 中收敛到 (f, g), 则 f_n 一致收敛到 f 且 f_n' 一致收敛到 g, 因此 f 是连续可微的且 $f' = g$.

定理 E.1.4 (闭图像定理). 设 X 和 Y 为 Banach 空间, 且 $A : X \to Y$ 为线性算子. 则 A 是有界的当且仅当它的图像是 $X \times Y$ 的闭线性子空间.

闭图像定理断言, 线性算子 $A : X \to Y$ 是连续的当且仅当 A 具有闭图像.

接下来, 我们介绍一致有界原理 (一致有界原理/共鸣定理).

定义 E.1.6. 映射族 $\{f_i\}_{i\in I}$（其中 $f_i : X \to Y_i$, I为角标集合, 且每个映射取值于赋范线性空间 Y_i）被称为 **逐点有界 (pointwise bounded)**的, 是指

$$\sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_{Y_i} < \infty \quad \forall x \in X.$$

定义 E.1.7. 设 X, Y 为赋范线性空间. 如果对于所有 $u \in X$ 都有 $Au = \lim_{t\to\infty} A_n u$, 则称有界线性算子序列 $A_n : X \to Y(n \in \mathbb{N})$ **强收敛 (converge strongly)** 于有界线性算子 $A : X \to Y$.

一致有界定理陈述如下：

定理 E.1.5 (Banach-Steinhaus 定理). 设 X, Y 为 Banach 空间, 且 $A_n : X \to Y, n \in \mathbb{N}$ 为有界线性算子序列. 则以下各项等价:

(1) 对于每个 $u \in X$, 序列 $(A_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Y 中收敛.
(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ 且存在稠密子集 $D \subset X$ 使得对于每个 $u \in D$, $\{A_n u\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中的 Cauchy 列.
(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ 且存在有界线性算子 $A : X \to Y$ 使得 A_n 强收敛于 A, 且 $\|A\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$.

即使 Y 不完备, (1) $\Leftrightarrow$ (3) 的等价性仍然成立. 即使 X 不完备, (2) $\Leftrightarrow$ (3) 的等价性仍然成立.

接下来我们介绍 Hahn-Banach 定理, 其用于研究Banach 空间 X 的子空间上的有界线性泛函, 并表明每个这样的泛函都可以延拓为整个 X 上的有界线性泛函. 即使 X 只是一个实线性空间且有界性被拟半范数的界所取代, 该定理依然成立.

定义 E.1.8 (拟半范数). 设 X 为一个实线性空间. 如果对于任意 $x, y \in X, \lambda \geqslant 0$，函数 $p : X \to \mathbb{R}$ 满足

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

则称其为 **拟半范数 (quasi-seminorm)**. 如果它是一个拟半范数且对所有 $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, 则称其为 **半范数 (seminorm)**. 半范数取非负值, 因为对所有 $x \in X$ 有 $2p(x) = p(x) + p(-x) \geqslant p(0) = 0$. 因此, 半范数相比范数而言，只是不满足非退化性，即可能存在非零元素 $x \in X$ 使得 $p(x) = 0$.

定理 E.1.6 (Hahn-Banach 定理). 设 X 为赋范线性空间, $p : X \to \mathbb{R}$ 为拟半范数. 设 $Y \subset X$ 为线性子空间, $\phi : Y \to \mathbb{R}$ 为线性泛函, 使得对所有 $x \in Y$ 满足 $\phi(x) \leqslant p(x)$. 则存在线性泛函 $\Phi : X \to \mathbb{R}$ 使得

$$\Phi|_Y = \phi, \quad \Phi(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in X.$$

我们在证明线性波动方程局部存在性时将使用的是：

推论 E.1.7. 设 X 为 $\mathbb{R}$ 上的赋范线性空间, $Y \subset X$ 为线性子空间, $\phi : Y \to \mathbb{R}$ 为线性泛函, 且存在 $c \geqslant 0$ 使得对于所有 $x \in Y$ 有 $|\phi(x)| \leqslant c\|x\|$. 则存在有界线性泛函 $\Phi : X \to \mathbb{R}$ 使得

$$\Phi|_Y = \phi, \quad |\Phi(x)| \leqslant c\|x\| \quad \text{对于所有 } x \in X.$$

证明. 在 Hahn-Banach 定理中设 $p(x) := c\|x\|$, 则存在线性泛函 $\Phi : X \to \mathbb{R}$ 满足 $\Phi|_Y = \phi$ 且对所有 $x \in X$ 有 $\Phi(x) \leqslant c\|x\|$. 由于 $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, 由此推导出对所有 $x \in X$ 有 $|\Phi(x)| \leqslant c\|x\|$. □

对于复线性空间, 类似的结果也成立.

推论 E.1.8. 设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的赋范线性空间, $Y \subset X$ 为线性子空间, $\psi : Y \to \mathbb{C}$ 为复线性泛函, 且存

在 $c \geqslant 0$ 使得对于所有 $x \in Y$ 有 $|\psi(x)| \leqslant c\|x\|$. 则存在有界复线性泛函 $\Psi : X \to \mathbb{C}$ 使得

$$\Psi|_Y = \psi, \quad |\Psi(x)| \leqslant c\|x\| \quad \text{对于所有 } x \in X.$$

E.1.2 弱收敛

据 Riesz 引理, 有界性不再像有限维情况（Bolzzano-Weierstrass 定理）那样给出紧性. 然而, 我们可以引入 **弱收敛 (weak convergence)** 和 **弱-* 收敛 (weak-* convergence)** 的概念, 使得在这种"弱"意义下的紧性只要有界性成立就能自动满足. **在我们的 PDE 课程中, 不需要引入弱拓扑. 相反, 我们只需要序列弱收敛.** 本节设 X 是实 Banach 空间.

定义 E.1.9 (弱收敛). 如果对于每个有界线性泛函 $f \in X^*$ 都有 $\langle f, u_k \rangle \to \langle f, u \rangle$, 我们就说序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 弱收敛于 $u \in X$, 记作 $u_k \rightharpoonup u$.

定义 E.1.10 (弱-* 收敛). 如果对于每个 $u \in X$ 都有 $\langle f_k, u \rangle \to \langle f, u \rangle$, 我们就说序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X^*$ 弱-* 收敛于 $f \in X^*$, 记作 $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

易证：若 $u_k \to u$, 则 $u_k \rightharpoonup u$. 事实上任何弱收敛序列都是有界的. 此外如果 $u_k \rightharpoonup u$, 则$\|u\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|$.

定理 E.1.9 (Eberlein-Šmulian). 设 X 为自反 Banach 空间, 并假设序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 是有界的. 则存在子序列 $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $u \in X$ 使得 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ 在 X 中成立.

换句话说, 自反 Banach 空间中的有界序列是弱预紧的. 特别地, Hilbert 空间中的有界序列包含一个弱收敛子序列. 如果我们去掉自反性假设, 我们就有弱-* 收敛.

定理 E.1.10 (Banach-Alaoglu). 设 X 为赋范空间. 则对偶空间 X^*（装备其通常算子范数）中的闭单位球在弱-* 拓扑下是紧的.

Mazur 定理断言 X 的凸闭子集是弱闭的. 此外, 我们有

定理 E.1.11 (Mazur). 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 且 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ 为弱收敛于某个 $x \in X$ 的序列. 则存在由 x_j 的有限凸组合构成的序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, 其形式为 $y_k = \sum\limits_{j\leqslant k} \lambda_j^{(k)} x_j$, 使得 $y_k \to x$ 强收敛, 即 $\|y_k - x\| \to 0$.

E.2 Hilbert 空间

在讲义中，许多情况下我们只需要用基于 L^2 的 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$. 此时Banach 空间还具有内积结构. 设 H 为实线性空间.

定义 E.2.1. 如果映射 $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ 满足以下条件, 则称其为内积:

- $(u, v) = (v, u)$ 对所有 $u, v \in H$,
- 映射 $u \longmapsto (u, v)$ 对于每个 $v \in H$ 是线性的,
- $(u, u) \geqslant 0$ 对所有 $u \in H$,

- $(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$.

由内积定义的范数为 $\|u\| := (u,u)^{1/2}$. Hilbert 空间 H 是赋予了如上内积的 Banach 空间. 如果 H 是复线性空间, 则 $(u,v)=\overline{(v,u)}$.

定义 E.2.2. 设 S 是 H 的子空间, 记$S^{\perp}=\{u\in H \mid (u,v)=0, \forall v\in S\}$ 是与 S 正交的子空间.

对于 Hilbert 空间 H, 可以通过以下定理将其对偶空间 H^* 与 H 等同起来.

定理 E.2.1 (Riesz 表示定理). H^* 可以规范地与 H 等同；更准确地说, 对于每个 $u^*\in H^*$, 存在唯一的元素 $u\in H$ 使得 $\langle u^*, v\rangle=(u,v)$, $\forall v\in H$. 映射 $u^*\longmapsto u$ 是从 H^* 到 H 的线性同构.

应当注意, $H^*\ncong H$ 并不是通过恒等映射实现的!

E.3 紧算子的谱理论

有界线性算子研究中最重要的概念之一是紧算子, 它可以**从有界性中产生紧性**. 紧算子的定义有几种等价方式.

引理 E.3.1. 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $K: X\to Y$ 为有界线性算子. 则以下各项等价:

- 如果 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的有界序列, 则序列 $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有 Cauchy 子序列.
- 如果 $S\subset X$ 是有界集, 则集合 $K(S) := \{Kx \mid x\in S\}$ 具有紧闭包.
- 集合 $\overline{\{Kx \mid x\in X, \|x\|_X\leqslant 1\}}$ 是 Y 的紧子集.

定义 E.3.1 (紧算子). 设 X 和 Y 为 Banach 空间. 有界线性算子 $K: X\to Y$ 被称为:

- **紧算子**: 如果它满足上述引理的等价条件;
- **有限秩 (finite rank)**: 如果其像是 Y 的有限维子空间;
- **全连续 (completely continuous)**: 如果 X 中每个弱收敛序列在 K 下的像在 Y 的范数拓扑中收敛.

命题 E.3.2 (紧≈全连续). 设 X 和 Y 为 Banach 空间. 则每个紧算子 $K: X\to Y$ 都是全连续的. 如果此外 X 是自反的, 则有界线性算子 $K: X\to Y$ 是紧的当且仅当它是全连续的.

命题 E.3.3 (复合与对偶). 设 X, Y 和 Z 为 Banach 空间. 则以下成立:

(1) 设 $A: X\to Y$ 和 $B: Y\to Z$ 为有界线性算子, 且假设 A 是紧的或 B 是紧的. 则 $BA: X\to Z$ 是紧的.

(2) 设 $K_i: X\to Y$ 为紧算子序列, 其在算子范数拓扑下收敛于有界线性算子 $K: X\to Y$. 则 K 是紧的.

(3) 设 $K: X\to Y$ 为有界线性算子, $K^*: Y^*\to X^*$ 为其对偶算子. 则 K 是紧的当且仅当 K^* 是紧的.

E.3.1 Riesz-Fredholm 理论: 紧算子的核与像

设 X 为 Banach 空间, $\mathfrak{C}(X)$ 表示 X 上所有紧算子的集合. 则我们有

定理 E.3.4 (Fredholm 二择一). 设 X 为 Banach 空间, $K \in \mathfrak{C}(X)$. 则

(1) $\dim N(I-K) < \infty$, 其中 $N(I-K) = \{x \in X | (I-K)x = 0\}$.
(2) $R(I-K)$ 是闭的.
(3) $R(I-K) = N(I-K^*)^\perp$ 且 $R(I-K^*) = {}^\perp N(I-K)$.
(4) $N(I-K) = \{0\}$ 当且仅当 $R(I-K) = X$.
(5) $\dim N(I-K) = \dim(N(I-K^*))$.

此处, 对于 $M \subset X$, $F \subset X'$, 我们记

$$^\perp M := \{f \in X' | \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M\}, \quad F^\perp := \{x \in X | \langle f, x\rangle = 0,\ \forall f \in X'\}.$$

注记 E.3.1. Fredholm 二择一用于处理方程 $u - Ku = f$ 的可解性. 它表明要么对于每个 $f \in X$, 方程 $u - Ku = f$ 都有唯一解; 要么齐次方程 $u - Ku = 0$ 存在 n 个线性无关解. 在后一种情况下, 非齐次方程 $u - Ku = f$ 是可解的, 当且仅当 f 满足 n 个正交条件 $f \in N(I-K^*)^\perp$.

E.3.2 Riesz-Schauder 理论: 紧算子的谱

我们最后记录紧算子的谱定理.

定义 E.3.2. 设 X 为 Banach 空间, $A : X \to X$ 是有界线性算子.

- A 的 **预解集 (resolvent set)** 定义为 $\rho(A) := \{\eta \in \mathbb{R} | A - \eta I$ 是 1-1 且满的$\}$.
- A 的 **谱 (spectrum)** 定义为 $\sigma(A) := \mathbb{R} \backslash \rho(A)$.

给定 $\eta \in \rho(A)$, 根据闭图像定理, 我们知道 $(A - \eta I)^{-1}$ 是 X 上的有界线性算子.

- 如果 $N(A - \eta I) \neq \{0\}$, 我们说 $\lambda \in \sigma(A)$ 是 A 的 **特征值 (eigenvalue)**. 所有特征值的集合记为 $\sigma_p(A)$, 称为"点谱".
- 如果 λ 是一个特征值且对于某个 $w \neq 0$ 有 $Aw = \lambda w$, 则我们说 w 是 A 与 λ 关联的 **特征向量 (eigenvector)**.

我们现在有

定理 E.3.5 (Riesz-Schauder). 设 X 为 Banach 空间, $K \in \mathfrak{C}(X)$. 则

(1) $0 \in \sigma(K)$, 除非 $\dim X < \infty$.
(2) $\sigma(K) \backslash \{0\} = \sigma_p(K) \backslash \{0\}$.
(3) $\sigma_p(K)$ 的聚点（如果存在）必须为 0.

E.3.3 Hilbert 空间上的对称算子

设 H 为实 Hilbert 空间.

定义 E.3.3. 如果对所有 $x, y \in H$ 满足 $(Ax, y) = (x, Ay)$, 我们说有界线性算子 $A : H \to H$ 是**对称的** (symmetric). 此处 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 的内积. 显而易见, A 是对称的当且仅当 $A = A^*$.

命题 E.3.6. 设 $A : H \to H$ 为有界线性算子. 则 A 是对称的当且仅当对于任何 $x \in H$ 都有 $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. 在这种情况下, 我们进一步有:

(1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 且对于任何 $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$（满足 $\mathbf{Im}\,\lambda \neq 0$）, 有 $\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{\|x\|}{|\mathbf{Im}\,\lambda|}$.

(2) 设 $H_1 \subset H$ 是 H 的 A-不变闭子空间, 则 A_{H_1} 在 H_1 上也是对称的.

(3) 对于任何 $\lambda, \lambda' \in \sigma_p(A)$ 且 $\lambda \neq \lambda'$, 我们有 $N(\lambda I - A) \perp N(\lambda' I - A)$.

(4) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

现在设 $S : H \to H$ 为线性、有界、对称算子, 并记

$$m := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u), M := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u)$$

命题 E.3.7 (谱的上、下界). 我们有 $\sigma(S) \subset [m, M]$ 且 $m, M \in \sigma(S)$.

证明. 设 $\eta > M$. 则 $(\eta u - Su, u) \geqslant (\eta - M)\|u\|^2 \quad (u \in H)$. 因此 Lax-Milgram 定理断言 $\eta I - S$ 是 1-1 且满的, 故 $\eta \in \rho(S)$. 同理, 若 $\eta < m$, 则 $\eta \in \rho(S)$. 这证明了 $\sigma(S) \subset [m, M]$.

我们接着证明 $M \in \sigma(S)$. 由于配对 $[u, v] := (Mu - Su, v)$ 是对称的, 且对所有 $u \in H$ 有 $[u, u] \geqslant 0$, Cauchy-Schwarz 不等式蕴含 $|(Mu - Su, v)| \leqslant (Mu - Su, u)^{1/2}(Mv - Sv, v)^{1/2}$ 对所有 $u, v \in H$. 特别地, 对于某些常数 C, 有 $\|Mu - Su\| \leqslant C(Mu - Su, u)^{1/2} \quad (u \in H)$.

现在设 $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ 满足 $\|u_k\| = 1 (k = 1, \ldots)$ 且 $(Su_k, u_k) \to M$. 则我们有 $\|Mu_k - Su_k\| \to 0$. 此时若 $M \in \rho(S)$, 则

$$u_k = (MI - S)^{-1}(Mu_k - Su_k) \to 0$$

这产生矛盾. 因此 $M \in \sigma(S)$, 同理 $m \in \sigma(S)$. □

定理 E.3.8 (紧对称算子的特征向量). 设 H 为可分 Hilbert 空间, 并假设 $S : H \to H$ 是紧对称算子. 则存在由 S 的特征向量构成的 H 的可数标准正交基.

证明. 设 $\{\eta_k\}$ 为 S 的非零不同特征值序列. 设 $\eta_0 = 0$. 记 $H_0 = N(S), H_k = N(S - \eta_k I)(k = 1, \ldots)$. 根据 Fredholm 二择一, 有 $0 \leqslant \dim H_0 \leqslant \infty$ 且 $0 < \dim H_k < \infty$.

设 $u \in H_k, v \in H_l$ 且 $k \neq l$. 则 $Su = \eta_k u, Sv = \eta_l v$, 故 $\eta_k(u, v) = (Su, v) = (u, Sv) = \eta_l(u, v)$. 由于 $\eta_k \neq \eta_l$, 我们推导出 $(u, v) = 0$. 因此我们看到子空间 H_k 和 H_l 是正交的.

现在设 $\tilde{H}$ 是包含 $H_0, H_1, \dots$ 的 H 的最小子空间. 因此

$$\tilde{H} = \left\{\sum_{k=0}^{m} a_k u_k \,:\, m \in \{0, \dots\}, u_k \in H_k, a_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

我们接下来证明 $\tilde{H}$ 在 H 中稠密. 显然 $S(\tilde{H}) \subseteq \tilde{H}$. 此外 $S\left(\tilde{H}^{\perp}\right) \subseteq \tilde{H}^{\perp}$：事实上, 若 $u \in \tilde{H}^{\perp}$ 且 $v \in \tilde{H}$, 则 $(Su, v) = (u, Sv) = 0$.

现在算子 $\tilde{S} \equiv S\big|_{\tilde{H}^{\perp}}$ 是紧且对称的. 此外 $\sigma(\tilde{S}) = \{0\}$, 因为 $\tilde{S}$ 的任何非零特征值也将是 S 的特征值. 根据引理, 对于所有 $u \in \tilde{H}^{\perp}$, 有 $(\tilde{S}u, u) = 0$. 但如果 $u, v \in \tilde{H}^{\perp}$,

$$2(\tilde{S}u, v) = (\tilde{S}(u+v), u+v) - (\tilde{S}u, u) - (\tilde{S}v, v) = 0$$

因此 $\tilde{S} = 0$. 由此可见 $\tilde{H}^{\perp} \subset N(S) \subset \tilde{H}$, 从而 $\tilde{H}^{\perp} = \{0\}$. 因此 $\tilde{H}$ 在 H 中稠密.

为每个子空间 $H_k (k = 0, \dots)$ 选择一组标准正交基, 注意到由于 H 是可分的, H_0 具有可数标准正交基. 我们由此获得了一组特征向量的标准正交基. □

在 Hilbert 空间上, 对称紧算子的谱和结构与欧几里得空间中的实对称矩阵非常相似. 特别地, 我们回顾任何实对称矩阵都是可对角化的, 且对角线上的元素正是特征值, 这也意味着实对称矩阵的特征向量给出了欧几里得空间的正交（规范化后为正交规范）基. 此外, 二次型的临界值也是特征值. 这些性质对于 Hilbert 空间上的对称紧算子同样成立.

命题 E.3.9. 设 $A \in \mathfrak{C}(H)$ 对称. 则存在 $x_0 \in H, \|x_0\| = 1$, 使得

$$\lambda := |(Ax_0, x_0)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|, \quad Ax_0 = \lambda x_0.$$

命题 E.3.10. 设 $A \in \mathfrak{C}(H)$ 对称. 则存在至多可数的实数序列 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, 其唯一的可能聚点（如果存在）是 0, 使得 $\{\lambda_k\}$ 正是 A 的特征值. 此外, 存在 H 的标准正交基 $\{e_k\}$ 使得

$$x = \sum_{k\geqslant 1} (x, e_k) e_k, \quad Ax = \sum_k \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

命题 E.3.11 (Courant 极大极小刻画). 设 $A \in \mathfrak{C}(H)$ 对称且具有特征值 $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0 > \cdots \geqslant \lambda_2^- \geqslant \lambda_1^-$. 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^{\perp} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \qquad \lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \max_{\substack{x \in E_{n-1}^{\perp} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

此处 E_{n-1} 可以是 H 的任何 $(n-1)$ 维闭子空间.

参考文献

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F. Sobolev spaces (2nd edition) Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, Elsevier, 2003.

[2] Bahouri, H., Chemin J.-Y., Danchin, R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Vol. 343, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer.

[3] Bühler, T., Salamon, D. A. Functional Analysis. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 191, AMS.

[4] Christ, M., Kiselev, A. Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, **179**(2), 409-425.

[5] Dodson, B. Defocusing Nonlinear Schrödinger Equations. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 217, Cambridge University Press.

[6] Evans, L. C. Partial Differential Equations, 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, 2010.

[7] Evans, L. C., Gariepy, R. F. Measure Theory and Fine Properties of Functions, 2nd edition. CRC press, 2015.

[8] Folland, G. B. Real analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 1999.

[9] Han Qing (韩青), Lin Fanghua (林芳华). Elliptic Partial Differential Equations. Courant Lecture Notes, no. 1, AMS & CIMS.

[10] 姜礼尚、孔德兴、陈志浩.《应用偏微分方程讲义》， 高等教育出版社。

[11] Luk, Jonathan (Luk Winghong 陸穎康) Introduction to Nonlinear Wave Equations. https://web.stanford.edu/~jluk/NWnotes.pdf

[12] Muscalu, C., Schlag, W. Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol. 1. Cambridge studies in advanced mathematics 137, Cambridge University Press, 2013.

[13] Sogge, C. D. Lectures on Non-linear Wave Equations (2nd edition). International Press, 2008.

[14] Stein, E. M., Shakarchi, R. Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert spaces. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 3. Princeton University Press.

[15] Stein, E. M., Shakarchi, R. Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 4. Princeton University Press.

[16] Tao, T. Nonlinear Dispersive and Wave Equations: Local and Global Analysis. CBMS, No. 106, AMS.