Evans Ch7 Notes (Draft)

章俊彦
PB13001112
zhangjy9610@gmail.com.

7.0: 预备知识 1

7.1: 二阶抛物方程弱解 6
Definition 6
存在唯一性 (Galerkin Method) 7
正则性 13

7.2: 抛物极大值原理 22
弱极大值原理 22
强极大值原理 23

7.3: 二阶双曲方程弱解 25
Definition 25
存在唯一性 (Galerkin Method) 26
正则性 33
二元PDE典型形式 38

7.4: 有限传播速度 41
余面积公式及推论 41
有限传播速度 44

7.5: 一阶双曲方程组 49
消失粘性法 (Vanishing Viscosity Method) 49

*7.6: 半群方法 60
基本性质 60
Hille-Yosida定理及应用, 实例 65

*7.7: Strichartz非端点估计 73
Schrödinger方程的非端点估计 73
d≥3时, 能量次临界的半线性Schrödinger方程H^1局部适定性 77
抽象Strichartz估计 84

*注意:
(1) 7.0节在课本5.10节，结论比证明重要114514倍。范数换成绝对值后所有结论都是显然的。
(2) 普通班进度是到本讲义7.3或7.4节结束。
(3) 7.3节证明全部建议跳过，但须记住双曲方程正则性比抛物方程差。
(4) 7.1节Galerkin方法极其重要
(5) 本讲义跳过抛物Harnack不等式
(6) 粘性法对学椭圆方程/几何分析的同学很重要。

(7) 粘性法对学PDE的同学都很很重要

Ch7 发展方程弱解理论
抛物

§7.0 预备知识

I. 以Banach空间为值域的函数.

设 $f:[0,T]\to X$, $T>0$, X是Banach空间(赋予范数$\|\cdot\|$).

Def: (1) (简单函数) $s:[0,T]\to X$ 称作简单函数，若s有形式

$$s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i \qquad 0\le t\le T$$

其中$\{E_i\}$是$[0,T]$的Lebesgue可测子集，$u_i\in X$

(2) (强可测) $f:[0,T]\to X$ 称作强可测，若存在简单函数列 $s_k:[0,T]\to X$，使得 $s_k(t)\to f(t)$ a.e. $t\in[0,T]$.

(3) (弱可测) $f:[0,T]\to X$ 称作弱可测，若 $\forall u^*\in X^*$，映射

$$[0,T]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\langle u^*, f(t)\rangle$$

是Lebesgue可测的

(4) 称 $f:[0,T]\to X$ 的取值是几乎可分的，若存在Lebesgue零测集 $N\subset[0,T]$，使得 $\{f(t)\mid t\in[0,T]-N\}$ 可分(具有可数稠子集).

Thm 7.0.1 (Pettis引理). $f:[0,T]\to X$ 强可测 $\Longleftrightarrow$ f弱可测且取值几乎可分.

证明 见Yosida的泛函分析 □

Def（定义积分）

(1) $S(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i$ 是简单函数，则 $\int_0^T s(t)\,dt := \sum_{i=1}^{m} m(E_i)\cdot u_i$.

(2) 对强可测函数 $f:[0,T]\to X$，称 f 可和 (summable)（可以理解为实变中的"可积"），是指 $\exists\ \{s_k\}_1^\infty$ simple. s.t.

$$\int_0^T \|s_k(t)-f(t)\|\,dt \to 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

(3) 若 f 可和，则 $\int_0^T f(t)\,dt := \lim_{k\to\infty}\int_0^T s_k(t)\,dt$

□

Thm 7.0.2 (Bochner).

$f:[0,T]\to X$ 强可测，则 f 可和 $\Longleftrightarrow$ $t\mapsto \|f(t)\|$ 可和.

along. $\left\|\int_0^T f(t)\,dt\right\| \le \int_0^T \|f(t)\|\,dt$.

$$\langle u^*, \int_0^T f(t)\,dt\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t)\rangle\,dt \quad \forall u^*\in X^*$$

□

Ⅱ. 时空 Sobolev 空间

Def: (1) $L^p([0,T];X) = \left\{u:[0,T]\to X \text{ 强可测} \;\middle|\; \|u\|_{L^p([0,T];X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$

$1\le p<\infty$

$L^\infty([0,T];X) = \left\{\cdots\cdots \;\middle|\; \|u\|_{L^\infty([0,T];X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t} \|u(t)\| < \infty\right\}$

$C([0,T];X) = \left\{u:[0,T]\to X \text{ 连续} \;\middle|\; \|u\|_{C([0,T];X)} := \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\| < \infty\right\}$

(2) $u\in L^1(0,T;X)$，称 $v\in L^1(0,T;X)$ 是 u 的弱导数，若(记作 $u'=v$)，

若 $\int_0^T \phi'(t)u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall \phi\in C_c^\infty(0,T)$

(3) $W^{1,p}(0,T;X)=\left\{ u\in L^p(0,T;X) \,\middle|\, u'\in L^p(0,T;X) \right\}$.

$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \Big\| \|u(t)\| + \|u'(t)\| \Big\|_{L^p_t}$

Thm 7.0.3 (抽象空间中的基本运算)

$u\in W^{1,p}(0,T;X)$. $1\le p\le\infty$ 则

(1). $u\in C([0,T];X)$ (modify 一个零测集后).

(2) $u(t)=u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$. $\quad 0\le s\le t\le T$

(3). $\sup\limits_{0\le t\le T}\|u(t)\|\le C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

证明：只需证(2)即可

将 u 延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R};X)$ 上. $u^\varepsilon=\underline{\eta_\varepsilon} * u$.
IR上的磨光子.

则 $(u^\varepsilon)'=\eta_\varepsilon * u'$ on $(\varepsilon, T-\varepsilon)$.

$\varepsilon\to0$ 时: $\quad u^\varepsilon\to u \quad$ in $L^p(0,T;X)$

$\qquad (u^\varepsilon)'\to u \quad$ in $L^p_{loc}(0,T;X)$.

由于 $u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(s)+\int_s^t u^{\varepsilon\prime}(\tau)\,ds$. $\quad$ a.e. $0<s<t<T$

令 $\varepsilon\to0$. 由于 $t\mapsto\int_0^t u'(\tau)\,d\tau$ 连续 知:

$$u(t)=u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$$

□

Thm 7.0.4 (更多基本运算). $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

则 (1) $u\in C([0,T];L^2(U))$ (差一个零测集).

(2). $t\mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ 绝对连续. 且 $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$ a.e. $0\le t\le T$

(3). $\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right)$.

证明: (1) 将 u 延拓到 $[-\sigma, T+\sigma]$ 上. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

则对 $\varepsilon,\delta>0$

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon-u^\delta,\ u^\varepsilon-u^\delta\rangle_{L^2}$$

$$= 2\langle u^{\varepsilon\prime}(t)-u^{\delta\prime}(t),\ u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\rangle_{L^2}$$

积分,

$$\Rightarrow \|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)-u^\delta(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau)-u^{\delta\prime}(\tau),\ u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

$\forall 0\le s,t\le T$ 都对.

Fix $s\in(0,T)$: $u^\varepsilon(s)\to u(s)$ in $L^2(U)$.

$$\therefore \limsup_{\varepsilon,\delta\to0}\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 \le \underset{=0}{\lim_{\varepsilon,\delta\to0}}\int_0^T \|u^{\varepsilon\prime}(\tau)-u^{\delta\prime}(\tau)\|_{H^{-1}(U)}^2 + \|u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}^2\, d\tau.$$

$\Rightarrow \{u^\varepsilon(t)\}$ 是 $C([0,T];L^2(U))$ 中的 Cauchy 列.

所以 $\exists v\in C([0,T];L^2(U))$, $u^\varepsilon(t)\to v$ in $C([0,T];L^2(U))$

又: $u^\varepsilon(t)\to u(t)$ a.e. t $\Rightarrow u=v$ a.e.

类似可得 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau)\rangle d\tau$.

令 $\varepsilon\to 0$. 由 $u=v$ a.e. 知

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau.$$

$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 \in AC[0,1]$. $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = 2\langle u', u\rangle$. $\quad 0\le s,t\le T$

对上式积分 即有：

$$\cancel{\sup\|u(t)\|}\ T\|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2\, ds + CT\|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2}^2 \lesssim_T \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2.$$

□

Thm 7.0.5 U 有界开. ∂U 光滑, $m\in\mathbb{N}$.

$u\in L^2(0,T;H^{m+2}(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^m(U))$. 则有:

(1) $u\in C([0,T];H^{m+1}(U))$. (modify 一个零测集后).

(2) $$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \lesssim_{T,U,n} \|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2})} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m)}.$$

证明: 我们只证 $m=0$ 的情形. 其余的, 只需考虑 u 的导数.

此时 $u\in L^2(0,T;H^2)$, $u'\in L^2(0,T;L^2)$.

将 u 延拓为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 $L^2(0,T;H^2)$ 函数 $\bar u$. spt $\bar u\subset\subset V$.

$$\|\bar u\|_{H^2(V)} \le C\|u\|_{H^2(U)}$$

$$\frac{d}{dt}\|D\bar u\|_{L^2}^2 = 2\langle D\bar u', D\bar u\rangle = -2\langle \bar u', \Delta\bar u\rangle$$
$$\le C\left(\|\bar u'\|_{L^2(V)}^2 + \|\bar u\|_{H^2(V)}^2\right)$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^1(U)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}\right).$$

$$\Rightarrow u\in C([0,T];H^1(U))$$

□.

§7.1 二阶线性抛物方程弱解理论.

本节考虑的方程为

$$(*)\quad \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T. \\ u = 0. & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g. & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

$f: U_T\to\mathbb{R}$. $g: U\to\mathbb{R}$ 给定; $u: \overline{U_T}\to\mathbb{R}$ 是未知函数

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u.$$

$$\text{or} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij}u + \cdots\cdots$$

L 一致抛物的. $\{a^{ij}\}$ 实对称正定.

7.1.1 弱解定义:

设 $f\in L^2(U_T)$, $g\in L^2(U)$, a^{ij}, b^i, $c\in L^\infty(U_T)$.

Def: 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 是初边值问题(*)的弱解, 若成立: ① $\langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$.

② $u(0)=g$.

其中 $B[u,v;t]=\int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}v+cuv\,dx$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$, a.e. $t\in[0,T]$

注：① $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不再表示内积，而是对偶空间 (H^{-1}) 的元素与原先空间 (H_0^1) 的元素之间的作用.

② 定义中的 $u(0)=g$ 是有意义的 因 Thm 7.0.3 表明 $u\in C([0,T];L^2)$

□

7.1.2. 解的存在唯一性 (Galerkin截断 ⇒ 能量估计 ⇒ Gronwall 不等式).

$$(*)\begin{cases} u_t+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

Main steps:

①：构造逼近解序列 $\{u_m\}$，满足 $\begin{cases}\text{有限维截断而来.} \\ H_0^1 \text{ 的标准正交基测试，满足弱解条件} \\ \exists! \text{ (由ODE知识)}\end{cases}$

②：能量估计： $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 一致有界.

$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理，存在弱极限 u, v.

希望是解.

③ $u'=v$ a.e.

(u, u') 满足弱解定义.

Step 1: 构造逼近解序列:

设 $\{w_k\}\subseteq C^\infty$ 是 $\begin{cases} L^2(U) \text{ 标正基} \\ H_0^1(U) \text{ 正交基} \end{cases}$.

Fix $m\in\mathbb{Z}_+$. ~~令 若存在~~

- 若 $u\in H_0^1$ 是弱解，则可以展开作 $u=\sum_{k=1}^{\infty} d^k(t)w_k$.

代入弱解定义即有: $\langle \sum_{k=1}^{\infty} d^{k'}(t)w_k, w_l\rangle + B[\sum_{k=1}^{\infty} d^k(t)w_k, w_l; t] = \langle f, w_l\rangle$ $\forall l$.

$$\Longrightarrow\quad d^{l'}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{e_{kl}(t)}_{\text{系数}}d^k(t) = f^l(t) := \langle f, w_l\rangle \quad \forall l.$$

常值

此时，令 $u_m=\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)w_k$ 则 $d_m^{l'}(t)+\sum_{k=1}^{m} e_{kl}d_m^k(t) = f^l(t)$ $1\le k,l\le m$. $\cdots(\#)$

$f^l\in L^2([0,T])$.

$e^{kl}:=B[w_k,w_l;t]=\int a^{ij}\partial_{x_i}w_k\partial_{x_j}w_l\,dx$.

$\Rightarrow u\in H^1_{loc}[0,T]\subseteq C[0,T]$ (作为 t 的函数). $\in C^\infty[0,T]$.

Claim: $u_m(0)=g_m=\sum_{k=1}^{m}(g,w_k)w_k$.

$(\Leftrightarrow d_m^k(0)=(g,w_k))$

Claim 由 (#) 的存在唯一性 直接得证.

即存在绝对连续的 $\vec{d}_m(t)=(d_m^1(t),\dots,d_m^m(t))$ 满足 $\begin{cases}(\#)\\ \text{claim}\end{cases}$

a.e. $t\in[0,T]$.

#

Step 2: 能量估计:

Thm 7.1.1: $\exists$ 仅依赖于 U,T,L 的常数 $C>0$ s.t.

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_m(t)\|_{L^2(U)}+\|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}+\|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{L^2(U)}\right).$$

Proof: Fix $m \in \mathbb{Z}_+$

由 Step1: $\forall k \le m$. 有:

$$\langle u_m', w_k \rangle + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k).$$

两边乘以 $d^k(t)$, 对k求和有:

$$\underbrace{\langle u_m', u_m \rangle}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2} + B[u_m; u_m; t] = (f, u_m).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u_m \partial_j u_m \, dx = (f, u_m) - \int \sum_i b^i (\partial_i u_m) \cdot u_m \, dx - \int c u_m^2 \, dx$$

L-一致椭圆 $\Rightarrow$

Hölder

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon \|Du_m\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|u_m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2.$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 有:

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

Fact (Gronwall 不等式).

- η 非负. $\eta \in AC[0,T]$, 且对a.e. t 有: $\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$. ($\phi, \psi$: 非负 on $[0,T]$)

则 $\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$. $0 \le t \le T$

在此: $\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(U)}^2$, $\xi(t) = \|f\|_{L^2}^2$.

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le Ce^{Ct}\left(\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-cs}\eta(s)\,ds\right).$$

$$\le e^{CT}\left(\|g_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)$$

$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le C_T\left(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right) \qquad 0\le t\le T$

下面再估计 $\|Du_m\|_{L^2}^2$

由: $\|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$.

对t积分: $\int_0^T \|Du_m(t)\|_{L^2}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \le C_T\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

下面再估计 $\|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$.

$u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k u_k \Rightarrow u_m' = \sum_{k=1}^m d_m^{k\prime}(t)\, u_k$.

先估计 $\|u_m'(t)\|_{H^{-1}}$

Fix $t\in[0,T]$.

$\forall v\in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)}\le 1$

前m维截断.

$$\langle u_m', v\rangle = \langle u_m'(t), v_m\rangle$$

$$= B[u_m, v_m; t] + (f, v_m).$$

$$\le \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|Dv_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|f\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1}$$

因 $\|v\|_{H_0^1}\le 1$

对v取sup

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{H^{-1}}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 = \int_0^T \|u_m'(t)\|_{H^{-1}}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)$$

Step 3: 弱解存在性.

Thm 7.1.2: (*) 弱解存在.

pf: 由 Thm 7.1.1 有: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 中一致有界

$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理 及 习题5,6 结论有

Ex5:
$$\left.\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H_0^1) \\ u_k' &\rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = u'$$

Ex6:
$$\left.\begin{aligned} &H \ \text{Hilbert.} \\ &u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H). \\ &\big\|\|u_k(t)\|\big\|_{L^\infty_t} \le C \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \big\|\|u(t)\|\big\|_{L^\infty} \le C$$

有: $\exists$ 子列 $u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$.

$u_{m_l}' \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$.

如今我们待证的是:

(i): $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1$

(ii): $u(0) = g$.

Claim: $\forall v \in L^2(0,T;H_0^1(U))$. $\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u,v;t]\, dt = \int_0^T (f,v)\, dt$.

check: 设 $v \in C_c^1(0,T;H_0^1(U))$. $v = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k$. $d^k \in C^\infty$ $1 \le k \le N$.

取 $m \ge N$. 对 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$.

两边乘以 d^k ~~再积分~~ 再对k求和有

$$\langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = (f, v).$$

积分: $\int_0^T \langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = \int_0^T (f,v)\, dt$.

取 $m=m_l$. 令 $l\to\infty$. 由弱收敛的结果有:

$$\int_0^T \langle u',v\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\,dt \quad \forall v\in L^2(0,T;H_0^1)$$

由 $C_c^1 \overset{dense}{\subset} L^2$.

<u>claim holds.</u>

~~这样: $\langle u'$~~

下证: $\forall v\in H_0^1(U)$. a.e. $t\in[0,T]$ 成立. $\langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

为此. 取 $\forall v\in H_0^1(U)$. $\eta(t)\in C^\infty[0,T]$. 则 $\eta v\in L^2(0,T;H_0^1(U))$.

$$\int_0^T \langle u',\eta v\rangle + B[u,\eta v;t]\,dt = \int_0^T (f,\eta v)\,dt.$$

$$\forall\eta \iff \int_0^T \eta(t)\cdot\big(\langle u',v\rangle + B[u,v;t] - (f,v)\big)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \text{ 成立}. \ \forall v\in H_0^1(U).$$

这样 (i) 成立. $\overset{\text{Thm 7.0.4}}{\Longrightarrow} u\in C([0,T];H_0^1)$

再证 (ii). $u(0)=g$.

取 $v\in C^1([0,T];H_0^1)$, $v(T)=0$. 则.

$$\int_0^T \big(\langle u',v\rangle + B[u,v;t]\big)\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt.$$

$$\int_0^T \langle u_m',v\rangle\,dt \overset{\text{分部积分}}{=} \langle u_m(t),v(t)\rangle - \langle u_m(0),v(0)\rangle - \int_0^T \underset{\langle \underset{H^{-1}}{v'},\ \underset{H_0^1}{u_m}\rangle}{\cancel{\langle u_m, v'\rangle}}\,dt.$$

取 $m=m_l$. $l\to\infty$ 代入有: $\quad u_{m_l}(0) = g_{m_l} \xrightarrow[l]{} g$ in H_0^1

$$\int_0^T -\langle v',u\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\,dt + (g, v(0)).$$

由 $v(0)$ 任意. 同(i) 有 $u(0)=g$. #

Step 4: 唯一性

Thm 7.1.3: (*)弱解唯一.

证: 只用证 $f=g=0$ 时，只有零解 (因方程是线性的)

取弱解定义中 $v=u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + B[u,u;t] = \langle u', u\rangle + B[u,u;t] = 0$$

$$\text{而 } B[u,u;t] = \int \sum a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u + \sum b^i u\,\partial_i u + cu^2\,dx$$

$$\overset{\text{同 Step 2}}{\geq} \theta\|Du\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|Du\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^2}^2 \leq C\|u(t)\|_{L^2}^2$$

由 Gronwall 不等式 及 $u(0)=0$ 知 $\|u(t)\|_{L^2}^2 \equiv 0$, $u\equiv 0$.

$u\in C([0,T];H_0^1)$

□

7.1.3 正则性. 对(*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u(0)=g & \text{on } \partial U \end{cases}$

在下定正则性的结论之前，我们先要通过一些形式推导来预测最终的结论.

对热方程: $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,T] \\ u(0) = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(u_t-\Delta u)^2\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u\cdot u_t + (\Delta u)^2\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\nabla u_t\cdot\nabla u + (\Delta u)^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int|Du|^2\,dx + \int u_t^2 + \int|\Delta u|^2 = \int f^2\,dx.$$

对t积分可得：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|\Delta u|^2\,dx\,dt$$

$$\le \int|\nabla u(0)|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dx\,dt$$

$$\lesssim \int|\nabla g|^2\,dx+\int_0^T\int|f|^2\,dx\,dt$$

所以，对弱解，我们预测：$g\in H_0^1,\ f\in L_t^2L_x^2 \Rightarrow u\in L_t^2H_0^1,\ u'\in L_t^2H_x^{-1}$

$$\Longrightarrow u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$$

$$\uparrow \quad u'\in L^2(0,T;L^2)$$

观察上面的式子表示什么东西！

进一步地，~~若g再对~~ 令 $\tilde u=u_t$.

$$\Rightarrow \begin{cases}\tilde u_t-\Delta\tilde u=\tilde f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \tilde u=\tilde g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad \begin{aligned}\tilde f&=\partial_t f\\ \tilde g&=f(\cdot,0)+\Delta g\\ &=\partial_t u(\cdot,0)\end{aligned}$$

两边乘以 $\tilde u$.

$$\Rightarrow \tilde u\cdot\partial_t\tilde u-\tilde u\Delta\tilde u=\tilde f\tilde u$$

和 $\frac12\frac{d}{dt}\|\tilde u\|_{L^2}^2$　　分部积分后会变成 $\int|\nabla\tilde u|^2$

对t积分，x积分

$$\Rightarrow \frac12\int_0^T\frac{d}{dt}\|\tilde u\|_{L^2}^2\,dt+\int_0^T\int|\nabla u_t|^2\,dx\,dt \lesssim \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx)$$

~~又：sup~~

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2\,dx\,dt$$

$$\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx\right)$$

但 $\sup_{0\le t\le T}\|f(\cdot,t)\|_{L^2}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}+\|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$ ⇐ (Thm 7.0.3).

又：$-\Delta u = f - \partial_t u$

所以. $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 dx \leq C \int f^2 + |\partial_t u|^2 dx$ （椭圆正则性）.

$$\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\nabla^2 u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx dt$$

$$\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 dx \right)$$

$\square$

由此，我们可以预测.

$$g \in H^2,\quad f' \in L^2(0,T;L^2) \Rightarrow \left.\begin{aligned} &u \in L_t^\infty H_x^2 \\ &u' \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_0^1 \\ &u'' \in L^2(0,T;H^{-1}) \end{aligned}\right\} \text{观察上式的结论}$$

关于热方程，本身具有更好的光滑效应.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u_0 = g \in L^2 \end{cases}$$

这个把L2换成Lp也是对的(1<p<∞)

由Fourier变换有：$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$.

$$\Rightarrow \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \| \langle \xi \rangle^s \hat{u}(t,\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$(\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$= \| \underbrace{(e^{-t|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s)}_{\text{有界Fourier乘子}} \hat{g} \|_{L^2}$$

Mikhlin-Hörmander乘子定理

$$\lesssim \|g\|_{L^2} \qquad \forall s>0$$

对自由热方程. $g \in L^2 \Rightarrow u \in C^\infty$

$\square$

Thm 7.1.4 (抛物方程正则性定理).

(1) 设 $g\in H_0^1(U)$, $f\in L^2(0,T;L^2(U))$. 设 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

是 (*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$

那么有: $u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$. $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$

$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$.

(2) 若 $g\in H^2(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2)$. $u'\in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H_0^1)$.

$u''\in L^2(0,T;H^{-1})$.

且

$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$

$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$.

证明: (1) 类似之前的证明可得. $\forall m\in\mathbb{Z}_+$.

(1.1) 逼近解 u_m 满足.

$$(u_m', u_m') + \underbrace{B[u_m, u_m'; t]}_{\shortparallel} = (f, u_m').$$

$$\int_U \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u_m \partial_j u_m'\,dx + \int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u_m u_m' + c u_m u_m'\,dx.$$

而 $\int \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u_m \partial_j u_m'\,dx = \int \frac{d}{dt}\left(\sum a^{ij}\partial_i u_m \partial_j u_m\right) - \underbrace{\sum a^{ij}\partial_i u_m' \partial_j u_m}_{左}\,dx.$

从而 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$

(2).

由 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \quad 1 \leq k \leq m.$

$\Downarrow$ 对t求导

$(u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

$\Downarrow$ 乘以 $d_m^{k\prime}(t)$，对k求和.

$\forall m \in \mathbb{Z}_+. \quad (u_m'', u_m') + B[u_m', u_m'; t] = (f', u_m').$

$\Downarrow$ 令 $\widetilde{u_m} = u_m'$ 　　则 $\widetilde{u_m}(0) = u_m'(0) = -Lu_m(0) + f(0).$

$(\widetilde{u_m}', \widetilde{u_m}) + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}; t] = (f', \widetilde{u_m}).$

2.1

由 Thm 7.1.1 (能量估计). 有

$\sup_{0\leq t\leq T} \|\widetilde{u_m}(t)\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{u_m}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)}$

$\leq C\left(\|f'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|\widetilde{u_m}(0)\|^2_{L^2}\right).$

$\leq C\left(\|f'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_m(0)\|^2_{H^2} + \|f(0)\|^2_{L^2}\right).$

$\leq C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\underset{\sim}{\overset{u_m(0)}{\cancel{g}}}\|^2_{H^2}\right)$ ✓

如何用g的H^2控制这项?

~~$u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k. \in C^\infty(\bar{U})$.~~

~~其中 … 取 … 为~~

设 $-\Delta$ 在$H_0^1(U)$ 中有特征函数系 $\{w_k\} \subset C^\infty(\bar{U})$. 　$\Delta u_m = 0 \text{ on } \partial U.$

~~$\therefore \|u_m(0)\|^2_{H^2(U)}$~~ 　$u_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U}).$

$\int \Delta u_m(0)\Delta u_m(0) \overset{\text{分部积分}}{=} \int |D^2 u_m|^2 dx - \sum_{i,j}\int n_i \partial_i u_m \partial_j^2 u_m + n_j \partial_i u_m \partial_i\partial_j u_m \, dS.$

$$\Rightarrow \int \sum_{ij} a^{ij}\,\partial_i u_m\,\partial_j u_m'\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\int \sum a^{ij}\,\partial_i u_m\,\partial_j u_m\,dx}_{\overset{!!}{A[u_m]}}.$$

因此:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}A[u_m] = (f,u_m') - \sum_i\int b^i\,\partial_i u_m\,u_m'\,dx - \int c\,u_m u_m'$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2}\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon\|u_m'\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 有:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}A[u_m] \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

积分可得. $\forall t\in[0,T]$.

$$\int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \underbrace{A[u_m]}_{\ge\theta\|Du_m\|^2} \le C\left(\int_0^T\|f\|_{L^2}^2\,dt + \int_0^T\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\,dt + A[u_m(0)]\right)$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2 + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2\right)$$

用Thm 7.1.1 $\|g\|_{L^2}^2 + \|Dg\|_{L^2}^2$

$$\Rightarrow \int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|Du_m(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \cancel{\|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2 + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|u_m'(t)\|_{L^2}^2\,dt + \sup_{0\le t\le T}\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right)$$

令 $m\to\infty$ (取成子列 m_l) 即得 $\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$ 的估计 ← 用到了习题6.

$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

(1.2)

余下要估计 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}$.

由于 $(u',v) + B[u,v;t] = (f,v)\quad \forall v\in H_0^1(U)$.

$B[u,v;t] = (f-u',v)\quad \forall v\in H_0^1(U)\quad$ a.e. $t\in[0,T]$

由椭圆方程正则性结论. $\|u\|_{H^2} \le C(\|f\|_2 + \|u'\|_{L^2})$ a.e. $0\le t\le T$

但：

$$0 \le \|\partial_i w_k\|^2_{L^2(\partial U)} \overset{\text{Ch5. Ex.9}}{\le} C\|w_k\|_{L^2(\partial U)} \|D^2 w_k\|_{L^2(\partial U)} = 0$$

这步是错误的！！！

$\Rightarrow \int_{\partial U}$ 项消失.

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|\Delta \tilde{u}_m(0)\|^2_{L^2}$$

$$= C(\Delta \tilde{u}_m(0), \Delta \tilde{u}_m(0))$$

$$\overset{\text{两次分部积分}}{=} C(g_m, \Delta^2 \tilde{u}_m(0))$$

$$\overset{(u_m(0), w_k) = (g, w_k)}{=} C(g, \Delta^2 \tilde{u}_m(0))$$

$$= C(\Delta g, \Delta \tilde{u}_m(0))$$

$$\le C\|\Delta g\|_{L^2} \|\Delta \tilde{u}_m(0)\|_{L^2}$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} C\left(\|g\|^2_{H^2} + \frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2}\right).$$

注：这步的证明实际上利用的是椭圆正则性定理。根据条件，我们可以将$\mathbf{u_m(t,x)}$写成$\sum \mathbf{d_m^k(t) w_k(x)}$，令$t=0$. 那么$\Delta u_m(0)=\sum d_m^k(0)\lambda_k w_k(x)$，边值为0.根据椭圆正则性定理，有：$\|u_m(0)\|^2_{H^2} \leqslant \|u_m(0)\|^2_{L^2}+\|\Delta u_m(0)\|^2_{L^2}$. 代入表达式，并利用$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\ldots$可以得到想要的式子。

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|g\|^2_{H^2}$$

这样：$\sup_{0\le t\le T} \|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|u_m'\|^2_{H_0^1}\, dt \le C\left(\|f\|^2_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H^2}\right).$

~~从而 (1) 证毕.~~

$$\overset{m=m_l\to\infty}{\Longrightarrow} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$$

(2-2) 下面再估计 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}$.

首先 Fact (习题9). $\exists \beta>0, \nu\ge 0$ s.t. $\beta\|u\|^2_{H^2} \le (Lu, -\Delta u) + \nu\|u\|^2_{L^2}$.

由于：$B[u_m, w_k] = (f-u_m', w_k)$. $1\le k\le m$.

乘以 $d_m^k\lambda_k$ 求和，有：$B[u_m, -\Delta u_m] = (f-u_m', -\Delta u_m)$.

$$B[u_m, -\Delta u_m] = (Lu_m, -\Delta u_m).$$

$$\Rightarrow \beta\|u_m\|^2_{H^2} \overset{\text{Fact}}{\le} (Lu_m, -\Delta u_m) + \nu\|u_m\|^2_{L^2}$$

$$= (f-u_m', -\Delta u_m) + \nu\|u_m\|^2_{L^2}$$

$$\le \|f\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \|u_m'\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2.$$

$$\le \varepsilon \underbrace{\|\Delta u_m\|_{L^2}^2}_{\|D^2 u_m\|_{L^2}^2 \le \|u_m\|_{H^2}^2} + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2\right) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2.$$

取 $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$. 有:

$$\|u_m\|_{H^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

$\|u_m\|_{H^2}$ 不可能 $=\infty$ (椭圆正则性保证).

对t积分.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \le C\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

$H^1 \hookrightarrow L^\infty$ (dim=1).

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

~~对t积~~

$$\overset{(1.1)+(2.1)}{\le} C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right).$$

$m = m_l \to \infty$ 即得 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \le C(\ - - - - .)$

回顾6

(2.3) 最后估计 $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, 不用证明 u_m'' 存在.

$(u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

Fix any $v \in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$.

$$\|u_m''\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |\langle u_m'', v\rangle|.$$

$$\cancel{= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \left|\langle f' - B[u_m', v; t], v\rangle\right|}$$

$v = v^1 + v^2 \in \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_m\} \oplus \mathrm{Span}\{w_{m+1}, \dots\}$.

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \left|\langle f', v^1\rangle - B[u_m', v^1; t]\right|$$

$$\le \sup_{\|w\|_{H_0^1}\le 1}\left(\|f'\|_{L^2}\|v^1\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1}\|v^1\|_{H_0^1}\right)$$

$$\le \cancel{\sup}\ \|f'\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1}$$

再用 (2.1) 有:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}\right)$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right).$$

由引理5, 令 $m=m_l\longrightarrow\infty$ 有

$$\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C\left(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$$

□

更高正则性可由归纳法得出, 此处不再证明:

Thm 7.1.5 (高阶正则性)

设 $g\in H^{2m+1}(U)$, $\frac{d^k f}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))$.

$g_0=g\in H_0^1(U)$. $g_1=f(0)-Lg_0\in H_0^1(U),\dots,$ $g_m=\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}-Lg_{m-1}\in H_0^1(U)$.

则 $\frac{d^k u}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))$ $\quad 0\le k\le m+1$.

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}$$

$$\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)}\right).$$

□

Thm 7.1.6:

$g\in C^\infty(\bar U)$, $f\in C^\infty(\bar U_T)$. 且 $\forall m\in\mathbb{Z}_+$, $\begin{cases} g_0 = g\in H_0^1(U) \\ g_m = \dfrac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}} - g_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases}$

则初边值问题(*)有唯一解 $u\in C^\infty(\bar U_T)$

□.

§7.2. 极大值原理.

本节将跳过 Harnack 不等式. 令 $Lu = -\sum_{ij} a^{ij}u_{x_ix_j} + \sum b^i u_{x_i} + cu$.

7.2.1 弱极大值原理.

Thm 7.2.1 $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar U_T)$. $c=0$ in U_T. $\Gamma_T = \bar U_T - U_T$.

(1) 若 $u_t + Lu \le 0$. in U_T. 则 $\max_{\bar U_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.

(2) 若 $u_t + Lu \ge 0$ in U_T 则 $\min_{\bar U_T} u = \min_{\Gamma_T} u$.

<u>证明</u>: 只证(1).

先设 $u_t + Lu < 0$ in U_T.
设 $(x_0,t_0)\in \bar U_T$. $u(x_0,t_0) = \max_{\bar U_T} u$.

· 若 $0<t_0<T$. 则 $(x_0,t_0)\in U_T$ 内部

$\Rightarrow \partial_t u(x_0,t_0) = 0$

又: $Lu \ge 0$ at (x_0,t_0). (这与课本6.4节 thm 1 中证明类似)

$\Rightarrow \partial_t u + Lu \ge 0$. 与假设矛盾.

· 若 $t_0 = T$. 则 $u_t \ge 0$ at (x_0,t_0) (因 u 在 (x_0,t_0) 达最大值).

同样有 $Lu\ge 0$. 推出矛盾.

一般情况. 即 $u_t + Lu \le 0$ 令 $u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$. $\varepsilon>0$.

则 $u^\varepsilon_t + Lu^\varepsilon = u_t + Lu - \varepsilon < 0$ in U_T

$\Rightarrow \max_{\bar U_T} u^\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. $\varepsilon\to 0$ 即得结论

□.

对 $c\geq 0$，我们也有类似的结论

Thm 7.2.2：（弱极大值原理，$c\geq 0$） $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$　　$c\geq 0$ in U_T

(1) 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T，则 $\max\limits_{\bar{U}_T} u\leq \max\limits_{\Gamma_T} u^+$.

(2) 若 $\partial_t u+Lu\geq 0$ in U_T，则 $\min\limits_{\bar{U}_T} u\geq -\max\limits_{\Gamma_T} u^-$

(3) 　　$=0$　　则 $\max\limits_{\bar{U}_T}|u| = \max\limits_{\Gamma_T}|u|$

□.

Thm 7.2.3：Harnack 不等式

$u\in C_1^2(U_T)$ 满足 $u_t+Lu=0$ in U_T.
　　　　　　　　$u\geq 0$ in U_T.

$V\subset\subset U$ 连通，则 $\forall\ 0<t_1<t_2\leq T$　$\exists C>0$ s.t. $\sup\limits_V u(\cdot,t_1)\leq C\inf\limits_V u(\cdot,t_2)$

□.

7.2.2. 强极大值原理.

设 $t_0\in[0,T]$，$U_{t_0}=U\times[0,t_0]$.

Thm 7.2.4（强极大值原理） $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c=0$ in U_T. U是连通集.

(1) 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T. u在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的最大值. 则 u是U_{t_0}上的常值函数.

(2). ……　$\geq$　……………………最小值

以上，假设 L的系数是光滑的.

证明：只证(1). 设 $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. v满足

$$\begin{cases}\partial_t v+Lv=0 & \text{on } W_T\\ v=u & \text{on } \bar{W}_T-W_T=:\Delta_T.\end{cases}$$

由弱极大值原理. $u\leq v$.　　令 $M=\max\limits_{\bar{U}_T} u$. ~~$u\leq v\leq M=$~~

则 $v=M$ at ~~t_0, x_0~~ (x_0,t_0).

$\tilde{v}:=M-v$. 则 $c=0\Rightarrow \begin{cases}\partial_t\tilde{v}+L\tilde{v}=0\\ \tilde{v}\geq 0\end{cases}$ in W_T.

任取 $V\subset\subset W$. $x_0\in V$. V连通.　$0<t<t_0$

由Harnack不等式. $\max\limits_V \tilde{v}(\cdot,t)\leq C\inf\limits_V \tilde{v}(\cdot,t_0)\leq \tilde{v}(x_0,t_0)=0$

$\Rightarrow \tilde{V}=0$ on $V\times\{t\}$. $\forall\, t\in(0,t_0)$.

$\forall V\subset\subset W$.

$\Rightarrow \tilde{V}=0$ in W_{t_0}

$\Rightarrow V=M$ in W_{t_0}, $v=u$ on Δ_T $\Rightarrow u=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$, $\forall W\subset\subset U$ $\Rightarrow u=M$ on U_{T_0}

□.

Thm 7.2.5 ($c\geq 0$ 的强极大值原理). $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c\geq 0$ in U_T. U连通

(1) 若 $u_t+Lu\leq 0$ in U_T, u 在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$中的(非负)最大值. 则 u 在 U_{t_0} 中是常数.

(2). ≥ 0 (非正)最小值.

Proof: 只证(1). $M:=\max\limits_{\bar{U}_T} u \geq 0$.

$u_t+Lu\leq 0$ in U_T.

若 $M=0$. 则由Thm 7.2.4即可.

若$M>0$. 同7.2.4.选取. $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. $K:=L-c\,Id$.

$$\begin{cases} v_t+Kv=0 & \text{in } W_T. \\ v=u^+ & \text{on } \Delta_T. \end{cases}$$

$0\leq v\leq M$

on $\{u\geq 0\}$. 有 $u_t+Ku\leq -cu\leq 0$.

那么由弱极大值原理. $u-v\leq 0$

$\Rightarrow V=M$ at (t_0,x_0)

同7.2.4

令$\tilde{v}=M-v$ 则 $\partial_t\tilde{v}+K\tilde{v}=0$ 且. $\tilde{v}\geq 0$ in W_T

任取 $V\subset\subset W$, $x_0\in V$. V连通. $0<t<t_0$. 由Harnack不等式知.

$V=u^+=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$. 又$M>0$. 故 $u\equiv M$ on $\partial W\times[0,t_0]$ □

§7.3 二阶双曲方程的弱解理论

$U_T := U \times (0,T]$, $T>0$. $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集.

考虑初边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g,\ \partial_t u = h & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$f: U_T \to \mathbb{R}$. $g, h: U \to \mathbb{R}$ 给定.

$u: \overline{U_T} \to \mathbb{R}$ 未知.

· $Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}\left(a^{ij}(x,t)\,\partial_{x_i} u\right) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)\,\partial_{x_i} u + c(x,t)\,u$.

· L 满足 $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$. $\forall (x,t)\in U_T$. $\xi \in \mathbb{R}^n$. for some $\theta>0$.

则称 $\partial_t^2 + L$ 为一致双曲的.

· $a^{ij} = \delta_{ij}$. $b^i = c = 0$. $L = -\Delta$. 则化为波方程 $\Box u = 0$, $\Box = \partial_t^2 - \Delta$.

7.3.1 弱解定义

设 $\begin{cases} a^{ij}, b^i, c \in C^1(\overline{U_T}). \quad a^{ij} = a^{ji} \\ f \in L^2(U_T) \\ g \in H_0^1(U),\ h \in L^2(U). \end{cases}$

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\,\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u \cdot v + c(\cdot,t)\,uv\,dx.$$

$\forall u,v \in H_0^1(U)$, $0 \leq t \leq T$.

<u>Definition</u> 称 $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ (且 $u' \in L^2(0,T;L^2(U))$, $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$) 是 $(*)$ 的弱解，若：① $\langle u'', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v \in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

② $u(0) = g$. $u'(0) = h$.

<u>Rmk</u>：事实上 $u \in C([0,T];L^2(U))$, $u' \in C([0,T];H^{-1}(U))$. 所以谈论逐点值是有意义的.

为何如此定义？

· 形式推导：分部积分即有

$$(u'',v) + B[u,v;t] = (f,v) \qquad 0\le t\le T \qquad v\in H_0^1(U)$$

⇒ u_{tt}'' 可以表示为 $u_{tt} = \underbrace{g^0}_{f-\sum b^i\partial_i u - cu} + \sum_{j=1}^{n}\partial_j g^j$, $\quad g^j = \sum_i a^{ij}\partial_i u.$

⇒ 应该使u满足 $u''\in H^{-1}(U)$ (a.e. $t\in[0,T]$)

□

7.3.2 弱解存在唯一性（Galerkin逼近）

$$(*)\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ \partial_t u = h \quad u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

与7.1类似，选取 $-\Delta$ 的特征函数 (适当化) $\{w_k\}$ 作为 $\begin{cases} L^2(U)\text{的标准正交基} \\ H_0^1(U)\text{的正交基} \end{cases}$.

Fix $m\in\mathbb{Z}_+$. 取 $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\, w_k$.

问：如何选取 d_m^k 满足需求？

希望：

$$(\#)\begin{cases} d_m^k(0) = (g, w_k), \\ d_m^{k\prime}(0) = (h, w_k) \\ (u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k). \quad 0\le t\le T. \quad 1\le k\le m. \end{cases}$$

$$\left(\text{因 } g = \sum (g,w_k)w_k \right) \qquad h = \sum (h,w_k)w_k.$$

Step 1: 构造逼近解序列

Thm 7.3.1（逼近解序列的构造）.

$\forall m\in\mathbb{Z}_+$. 存在唯一具有形式 $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$ 的函数 u_m，使(#)三式成立.

注意到.

$$B_1 = \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j} \, dx.$$

$$= \int_U \sum_{i,j} \partial_t \left(a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \right) dx - \int_U \sum_{i,j} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$- \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u'_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx - \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx.$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j}(t) \, dx - C \|u_m\|_{H_0^1}^2.$$

$$|B_2| \leq C \left(\|u_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u_m'\|_{L^2(U)}^2 \right).$$

↑ Cauchy-Schwartz.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\|u_m'(t)\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx \right)$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right).$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right).$$

↑ L一致椭圆

令 $\eta(t) = \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 + \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx.$

$\xi(t) = \|f(t)\|_{L^2}^2.$

$$\Rightarrow \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

Proof: 设 $u_m(t)=\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$.

则 $(u_m'', w_k) = d_m^{k''}(t)$.

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{B[w_k, w_l; t]}_{e^{kl}(t)}$$

$f^k(t) := (f(t), w_k)$.

则 (#) $\Longleftrightarrow \begin{cases} d_m^{k''}(t) + \sum_{k=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^l(t) = f^k(t). \\ d_m^k(0) = (g, w_k). \\ d_m^{k'}(0) = (h, w_k) \end{cases}$

由ODE存在唯一性定理即得

$\square$.

~~7.3.2 能量估计~~

Step 2: 证明逼近解序列一致有界.

Thm 7.3.2 (能量估计) $\exists C=C(U,T,L)>0$ s.t.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}\right) + \|u_m''(t)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}$$

$$\le C\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\right). \qquad \forall m\in\mathbb{Z}_+.$$

Proof: (#) 中, 两边乘以 $d_m^{k'}(t)$, 对 k 求和可得:

$$\underbrace{(u_m'', u_m')}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2}} + B[u_m, u_m'; t] = (f, u_m'). \qquad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

$$B[u_m, u_m'; t] = \underbrace{\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j}\, dx}_{B_1} + \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{m x_i} u_m' + c u_m u_m' dx}_{B_2}$$

由 Gronwall 不等式

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)\,ds\right) \qquad 0 \le t \le T$$

$$\eta(0) = \|u_m'(0)\|_2^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m x_i}(0)\, u_{m x_j}(0)\, dx$$

$$\le C\left(\|h\|_{L^2}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right)$$

$$\Longrightarrow \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m x_i}(t)\, u_{m x_j}(t)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

L-一致椭圆

$$\Longrightarrow \sup_{0\le t\le T}\left(\cancel{\|u_m(t)\|_{H_0}^2} \; \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \|u_m'(t)\|_{L^2}^2\right) \le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L_t^2L_x^2}^2\right)$$

再估计 $\|u_m''\|_{L_t^2H_x^{-1}}$.

Fix $v \in H_0^1(U)$, $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ $\qquad v = \underset{\text{Span}\{w_k\}_1^m}{v^1} + v^2 \in \left(\text{Span}\{w_k\}_1^m\right)^\perp$

$$\langle u_m'', v\rangle = (u_m'', v)$$

$$= (u_m'', v_1) + \underbrace{(u_m'', v_2)}_{0}$$

$$= (f, v_1) - B[u_m, v_1; t]$$

$$|\langle u_m'', v\rangle| \le C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(U)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\right)$$

对 t 积分

$$\int_0^T \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2\, dt \le C\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\, dt$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2L_x^2}^2\right)$$

Step3: 解的存在唯一性 (Banach-Alaoglu).

Thm 7.3.3 (*) ∃! weak sol.

证: 由 7.2.2 及习题 5 知.

∃子列 $\{u_{m_l}\}$ $u \in L^2(0,T;H_0^1)$ $u' \in L_t^2 L_x^2$. $u'' \in L_t^2 H_x^{-1}$.

s.t. $u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $L_t^2 H_{0x}^1$

$u_{m_l}' \rightharpoonup u'$ in $L_t^2 L_x^2$

$u_{m_l}'' \rightharpoonup u''$ in $L_t^2 H_x^{-1}$.

取 $v = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k$. $d^k \in C^\infty$ 设 $m \geq N$.

在 $(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ 两边乘以 $d^k(t)$. 对k求和.

对t积分有

$$\int_0^T \langle u_m'', v\rangle + B[u_m, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt.$$

$m = m_l$. $l \to \infty$

$$\Rightarrow \int_0^T \langle u'', \vec{v}\rangle + B[u, \vec{v}; t]\,dt = \int_0^T (f, \vec{v})\,dt. \quad \forall \vec{v} \in L^2(0,T;H_0^1)$$

因 $\{\sum_{k=1}^N d^k(t) w_k\}_{N=1}^\infty$ dense ~~in~~

$\vec{v} = \eta v$, $v \in H_0^1 \cap C_c^\infty$, $\eta \in L^2(0,T)$

$$\Rightarrow \langle u'', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v). \quad \forall v \in H_0^1(U) \text{ a.e. } t \in [0,T]$$

$\{ u \in C([0,T];L^2)$, $u' \in C([0,T];H^{-1})$.

如今还需验证 $u(0) = g$ $u'(0) = h$.

$\forall v \in C^2([0,T];H_0^1)$. $v(T) = v_0'(T) = 0$. 对t分部积分2次有:

$$\int_0^T \langle v'', u\rangle + B[u, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt - (u(0), v'(0)) + \langle u'(0), v(0)\rangle$$

同样

$$\int_0^T \langle v'', u_{m_l}\rangle + B[u_{m_l}, v; t]\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt - (u_{m_l}(0), v'(0)) + \langle u_{m_l}'(0), v'(0)\rangle$$

$l \to \infty$ 即得.

下面证明唯一性：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u|_{\partial U} = 0 & \forall t\in[0,T] \\ u(0)=0,\ \partial_t u(0)=0 \end{cases}$$

只有零解.

Fix $s\in[0,T]$. $v(t) := \int_t^s u(\tau)\,d\tau \cdot \chi_{\{s\geq t\leq T\}}(t)$

则 $\forall t\in[0,T]$, $v(t)\in H_0^1(U)$. 进而由弱解定义知：

$$\int_0^s \langle u'', v\rangle + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

由 $u'(0)=v(s)=0$. 分部积分有

$$\int_0^s -(u',v') + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

$$\xRightarrow{v'=-u} \int_0^s \langle u',u\rangle - B[v',v;t]\,dt = 0.$$

$\cdot$ $\langle u',u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2$.

而 $B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot v + c v\cdot v\,dx$.

$$\frac{d}{dt}B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t\partial_i v\partial_j v + \boxed{2a^{ij}\partial_i v_t\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i_t\partial_i v\cdot v + 2b^i\partial_i v_t\cdot v + c_t v\cdot v + 2cv_t\cdot v}\,dx$$

$b^i\partial_i v\cdot v_t$ -1 $b^i\underset{u}{\partial_i v_t}\cdot v$.

$= 2B[v',v;t]$

~~这一行~~ $\Rightarrow +\int_U\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t\,\partial_i(v)\,\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i_t\,\partial_i(v)\cdot v + c_t\cdot(v)\cdot v\right)dx$

$+\int_U\left(\sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot(-\underset{u}{v_t}) - \sum_{i=1}^n b^i\,\partial_i u\cdot v\right)dx$ (因 $-v'=u$) ~~分部积分~~

最后一项分部积分

$= 2B[v',v;t] + D[v,v;t] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\,u\,dx$. ~~$\int_U \sum_{i=1}^n b^i_{x_i} v_t u$~~

$- \int_U \sum_{i=1}^n \left(b^i_{x_i}u\cdot v + b^i u\cdot v_{x_i}\right)dx$ ~~$-\int_U \sum_{i=1}^n b^i v_t u_{x_i}$~~

$= 2B[v',v;t] + C[u,v;t] + D[v,v;t]$.

其中 $C[u,v;t] := -\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i v \cdot u + \frac{1}{2} b^i_{x_i}\, uv \,dx$ $\quad \forall u,v\in H_0^1(U)$

$D[u,v;t] := \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_t u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i_t u_{x_i} v + c_t uv\,dx$.

$$\Rightarrow \int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}B[v,v;t]\right)dt$$

$$= -\int_0^s C[u,v;t] + D[v,v;t]\,dt.$$

左边 $= \frac{1}{2}\|u(s)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}B[v(0),v(0);t]}_{\gtrsim \|v(0)\|_{H_0^1}}$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + \|v(0)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\le C\left(\int_0^s \|v\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2 + \|v(0)\|_{L^2(U)}^2\right)$$

令 $w(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$. 则 $v(t) = w(s) - w(t)$. $\quad \forall 0\le t\le T$.

从而

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\le C\left(\int_0^s \|w(t)-w(s)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(U)}^2\,dt + \|w(s)\|_{L^2(U)}^2\right)$$

$$\le C\int_0^s 2\|w(t)\|_{H_0^1}^2 + \underbrace{2\|w(s)\|_{H_0^1}^2}_{拿出去} + \|u(t)\|_{L^2}^2\,dt + \|w(s)\|_{L^2}^2$$

$\|w(s)\|_{L^2} \le \int_0^s \|u(t)\|_{L^2}$

$$\le 2sC\|w(s)\|_{H_0^1}^2 + C\int_0^s \|w\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2}^2\,dt.$$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + (1-2sC)\|w(s)\|_{H_0^1}^2 \le C\int_0^s \|w\|_{H_0^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2\,dt.$$

选 T_1, 使 $1-2T_1C_0 \ge \frac{1}{2}$ 则 $s\in[0,T_1]$ 时,

$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1}^2 \le C\int_0^s \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1}^2\,dt$. 由 Gronwall 不等式

有 $u\equiv 0$ in $[0,T_1]$. 再在 $[T_1,2T_1]$, $[2T_1,3T_1]$ …… 以此类推即可

7.3.3. 正则性、

与抛物方程类似，我们先对最简单的双曲方程(波方程)进行形式推导来预测正则性结果。

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

u是速降解。

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^2+u_t^2\,dx\right)=2\int_{\mathbb{R}^n}Du\cdot Du_t+u_t u_{tt}\,dx$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} 2\int u_t\cdot(u_{tt}-\Delta u)\,dx$$

$$=2\int u_t\cdot f\,dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx$$

~~由Gronwall不等式知.~~

~~对t积分. ($\forall 0\leq t\leq T$).~~

$$\leq 1\cdot\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|Du|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}f^2.$$

$$\cancel{\int_0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|Du(t)|^2dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(t)\,dx\,d\tau-\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(0)\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}|Du(0)|^2dx}$$

$$\cancel{\leq\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx\,d\tau+\int}$$

令 $\eta(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2(t)+|Du(t)|^2\,dx$. $\psi(t)=\int f^2(t)\,dx$. 则 $\eta'(t)\leq\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$, $\phi(t)=1$.

则由Gronwall不等式知.

$$\eta(t)\leq C(t)\left(\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\,ds\right)$$

对t取sup.

$$\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T}\int|Du(t)|^2+|u_t(t)|^2\,dx\leq C_T\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}h^2\,dx\right)$$

从而 对波方程

$$\|u\|_{L^\infty_t H^1_0}+\|u_t\|_{L^\infty_t L^2_x}\lesssim_T\|f\|_{L^2_t L^2_x}+\|g\|_{H^1_0}+\|h\|_{L^2}.$$

再考虑更高正则性：

令 $\tilde{u} = u_t$. 则 $\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u}(0) = \tilde{g} := h \\ \partial_t \tilde{u}(0) = \tilde{h} := u_{tt}(\cdot,0) = f(\cdot,0) + \Delta g. \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{f} = f_t$

则由之前的形式推导，有：

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx \le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 + f(\cdot,0)^2 dx\right)$$

而：$\sup_{0\le t\le T} \|f(\cdot,t)\|_{L^2} \le C\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}\right)$

由Sobolev嵌入.

又：$-\Delta u = f - u_{tt} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_{tt}^2 \, dx. \quad \forall 0\le t\le T.$

平方，对 x 积分，左边分部积分2次.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 + |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx$$
$$\le C_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + f_t^2 \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 dx.$$

$\square$

从而 $\cancel{g \in H^2}$

$$\|u(t)\|_{L_t^\infty H_x^2} + \|u'(t)\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u'\|_{L_t^2 H_0^1}$$
$$+ \|u''\|_{L_t^2 H_x^{-1}} \lesssim \|f\|_{H_t^1 L_x^2} + \|g\|_{H^2}.$$

下面证明双曲方程的正则性定理，要注意下面出现的 $\{w_k\}$ 是 Ch6.7 中构造的 $-\Delta$ 的特征函数系，是 L^2 的标准正交基，H_0^1 的正交基。

Thm 7.3.4：

(1). 设 $g\in H_0^1(U)$，$f\in L_t^2L_x^2([0,T]\times U)$，设 $u\in L^2(0,T;H_0^1)$，$u'\in L^2(0,T;H^{-1})$ 是双曲方程

$$\begin{cases} \partial_{tt}u+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ \left.\begin{matrix} u=g \\ u_t=h \end{matrix}\right\} & \text{on } U\times\{t=0\}. \end{cases}$$

的弱解。

则：$u\in \cancel{L^2(0,T;H^2(U))\cap} L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u'\in L^\infty(0,T;L^2(U))$

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u'(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}$

$\le C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2(U)})$.

(2). 若还有：$g\in H^2(U)$，$h\in H_0^1(U)$，$f'\in L^2(0,T;L^2(U))$

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2(U))$，$u'\in L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u''\in L^\infty(0,T;L^2(U))$，$u'''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

且 $\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}+\|u''(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

$+\|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C(\|f\|_{H_t^1L_x^2}+\|g\|_{H^2}+\|h\|_{H^1})$.

证明：在 Thm 7.3.2 中，已证明：

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1}+\|u_m'(t)\|_{L^2}\right)\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2}\right)$$

令 $m=m_l\to\infty$，由 $u_{m_l}\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$

$u_{m_l}'\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H^{-1})$

知 (1) 成立。

(2) 令 $\widetilde{u_m} = u_m'$.

则 ~~由弱解之定义有~~ 由逼近解的构造有

$$(\widetilde{u_m}'', w_k) + B[\widetilde{u_m}, w_k] = (f', w_k) \qquad 1 \le k \le m.$$

两边乘 $d_m^{k''}$. 对 k 从 1 到 m 求和. 因 $\widetilde{u_m} = u_m' = \sum d_m^{k'} w_k$.

$$\Longrightarrow (\widetilde{u_m}'', \widetilde{u_m}') + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}'] = (f', \widetilde{u_m}')$$

与 Thm 7.7.2 类似.

令 $A[u,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx. \quad u, v \in H_0^1(U)$.

则有 $$\frac{d}{dt}\left(\|\widetilde{u_m}'\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}]\right) \le C\left(\|\widetilde{u_m}'\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}] + \|f'\|_{L^2}^2\right). \quad \cdots (*)$$

下面先估计 (2) 中除了 u''' 的项.

由于 $B[u_m, w_k] = (f - u_m'', w_k)$.

两边. 乘 $\lambda_k d_m^k(t)$

$$\Rightarrow B[u_m, \underbrace{\lambda_k u_m}_{\overset{\text{对}k\text{求和}}{\Longrightarrow} -\Delta u_m}] = (f - u_m'', \lambda_k u_m)$$

$-\Delta w_k = \lambda_k w_k$ $\quad \overset{\text{对}k\text{求和}}{\Longrightarrow}$

$$B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m'', -\Delta u_m)$$

$$= (Lu_m, -\Delta u_m).$$

由习题 7.9 知

$\exists \beta > 0. \ \gamma \ge 0$, s.t. $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$. 有:

$$\beta \|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_m\|_{H^2(U)}^2 \le C(Lu_m, -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C\, B[u_m, -\Delta u_m] + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C(f - u_m'', -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\le C\left(\|f\|_2^2 + \|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

这里. 对 $u_m'' \Delta u_m$ 先用 Hölder 变成 $\|u_m''\|_2 \|\Delta u_m\|_2$. 再用 Young. $\le \varepsilon \underbrace{\|\Delta u_m\|_2^2}_{\varepsilon\text{充分小，在左边吸收}} + C(\varepsilon) \|u_m''\|_2^2$.

又：$\widetilde{u_m} = u_m'$

对(*)由用 Gronwall 有：

~~$\|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{H^1}^2 \le C\|f'\|_{H_t L_x^2}^2 + \|\Delta g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2$~~

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_m''\|_{L^2(U)}^2 + \|u_m'(t)\|_{H^1(U)}^2$$

$$\le C_T\Big(\underbrace{\|u_m''(0)\|_{L^2}^2}_{\|f(\cdot,0)+\Delta g} + \|u_m'(0)\|_{H^1(U)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}\Big)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2)}\right)$$

Sobolev嵌入 $d=1$, $H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\le C_T\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2\right).$$

u''' 估计与抛物方程 u'' 类似，略去

□

Rmk：波方程的正则性到不了抛物方程那么高（只有 $L_t^\infty H_0^1$，没有 $L_t^2 H_x^2$）

这是因为，抛物正则性证明过程中，在证得 $u \in L_t^\infty H_0^1$，$u' \in L_t^2 L_x^2$ 后，

可以利用 $(u', v) + B[u, v] = (f, v)$ $\forall v \in H_0^1(U)$ a.e. $t \in [0,T]$

$\Rightarrow$ $B[u, v] = (\underbrace{f - u'}_{\in L^2(U)}, v)$ a.e. $t \in [0,T]$ 再用椭圆方程正则性定理得 $u \in L_x^2$

但双曲方程的推导中不能证得 $u'' \in L_t^2 L_x^2$，只有 $L_t^2 H_x^{-1}$

从而 $B[u, v] = (f - u'', v)$ 中，$f - u'' \in H^{-1}$，不在 L^2 中。

不能证得 $u'' \in L_t^2 L_x^2$ 的原因在于：

· 抛物方程中证明 $u_m' \in L_t^2 L_x^2$ 时，用了 $(u_m', u_m') + B[u_m, u_m'] = (f, u_m')$.
这直接是 u_m' 的 L^2 范数．

而在双曲方程中，只有 $\underbrace{(\widetilde{u_m}', \widetilde{u_m}')}_{\text{只是 } \frac{d}{dt}\|u_m'\|_{L^2}^2} + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}'] = (f', u_m')$.

导致后面用 Gronwall 不等式时出不来 $\|u_m''\|_{L^2 L^2}$，只有 u_m' 的估计．

事实上，波方程、Schrödinger 方程等色散方程，其正则性和光滑性远比抛物方程差很多．色散方程常讨论的都是低正则性问题，但抛物方程并不如此．

□

本节最后，我们不加证明地~~引入~~叙述高阶正则性的结果.

Thm 7.3.5:

(1) 设 $g\in H^{m+1}(U)$, $h\in H^{m}(U)$, $\frac{d^k f}{dt^k}\in L^2_t H^{m-k}_x$.

且 $g_0:=g\in H_0^1$ & $h_1:=h\in H_0^1$

$$\begin{cases} g_{2l}:=\dfrac{d^{2l-2}f(\cdot,0)}{dt^{2l-2}}-Lg_{2l-2}\in H_0^1 & \text{if } m=2l \\ h_{2l+1}:=\dfrac{d^{2l-1}}{dt^{2l-1}}f(\cdot,0)-Lh_{2l-1}\in H_0^1, & \text{if } m=2l+1 \end{cases}$$

成立，则

$$\frac{d^k u}{dt^k}\in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)).\qquad 0\le k\le m+1.$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L^\infty H^{m+1-k}(U_T)}\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L^2_t H^{m-k}_x}+\|g\|_{H^{m+1}(U)}+\|h\|_{H^m(U)}\right)$$

(2) $g,h\in C^\infty(\bar U)$, $f\in C^\infty(\bar U_T)$. 上述条件对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都满足.

则 $\exists!$ $u\in C^\infty(\bar U_T)$ 成为原方程的解.

□

~~7.3.4: 手~~

7.3.4: 二元PDE的约化.

考虑: $\sum_{i,j=1}^2 a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^2 b^i\partial_i u+cu=0$. $a^{ij}=a^{ji}$. $(x_1,x_2)\in U\subset\mathbb{R}^2$.

问：上述方程能否通过变量替换，化成常见形式？

设: $y=\Phi(x)$ i.e. $y_1=\phi^1(x_1,x_2)$, $y_2=\phi^2(x_1,x_2)$. $u(x)=v(\Phi(x))$. $v(y)=u(\chi(y))$. $\chi:=\Phi^{-1}$.

从而 $\partial_{x_j}u=\sum_{k=1}^2\partial_{y_k}v\,\partial_{x_j}\Phi^k$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^2\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l+\sum_{k=1}^2\partial_{y_k}v\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi^k.$$

代入(*)，有：

$$(*) = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \sum_{k,l=1}^{2} \partial_{y_k}\partial_{y_l} v \cdot \partial_{x_i}\phi^k \partial_{x_j}\phi^l \quad + \text{一堆一阶及零阶项}.$$

$$= \cancel{\sum_{i,j}} \sum_{k,l=1}^{2} \widetilde{a_{kl}}\, \partial_{y_k}\partial_{y_l} v + \cdots, \quad \widetilde{a_{kl}} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \phi^k_{x_i} \phi^l_{x_j} \qquad \cdots (\#).$$

对(#)，为了使它的形式尽可能简洁，我们需要选取合适的 ϕ.

* 例如，若我们希望 $\widetilde{a}^{11} = \widetilde{a}^{22} = 0$.

则这要求 ~~$0 = a^{11}(\partial_{x_1} v)^2$~~

$$0 = a^{11}(\partial_{x_1}\phi^1)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}\phi^1\partial_{x_2}\phi^1 + a^{22}(\partial_{x_2}\phi^1)^2$$

$$0 = a^{11}(\partial_{x_1}\phi^2)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}\phi^2\partial_{x_2}\phi^2 + a^{22}(\partial_{x_2}\phi^2)^2$$

即 ϕ^1, ϕ^2 是方程：

$$a^{11}(\partial_{x_1}u)^2 + 2a^{12}\partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}u + a^{22}(\partial_{x_2}u)^2 = 0 \quad \text{in } U \qquad \cdots (**)$$

的解

• 再假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 且 $\det A = a^{11}a^{22} - (a^{12})^2 < 0$. 此时我们称 (*) 是双曲的. 据此条件，我们对 (**) 作分解如下.

$$a^{11}\cdot(**) = \left(a^{11}\partial_{x_1}u + \left(\sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} + a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right)\cdot\left(a^{11}\partial_{x_1}u + \left(-\sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} + a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right) \qquad \cdots (***)$$

$$= 0.$$

(***) 是如下2个方程之乘积：

(#1) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u + \left(a^{12} + \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u = 0$

(#2) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u + \left(a^{12} - \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u = 0.$

如今：让 ϕ^1 为 (#1) 的解，且 $\nabla\phi^1 \neq 0$，则 ϕ^1 沿直线 $\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}^1 = a^{11} \\ \dot{x}^2 = a^{12} + \sqrt{(a^{12})^2 - a^{11}a^{22}} \end{cases}$ 为 const.

让 ϕ^2 为 (#2) 的解，且 $\nabla\phi^2 \neq 0$，则 ϕ^2 沿直线 $\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}^1 = a^{11} \\ \dot{x}^2 = a^{12} - \sqrt{\cdots} \end{cases}$ 为 const.

这称作 (*) 的"特征线".

使得 $\tilde{a}^{12} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \partial_{x_i}\varphi^1 \partial_{x_j}\varphi^2 \neq 0$ in U

从而 (*) 化为

$$\partial_{y_1 y_2} v + \underbrace{\cdots}_{\text{一阶项、零阶项}} = 0$$

这称作 (*) 的第一典则形式.

若又令 $z_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$\Rightarrow \quad \partial_{z_1}^2 w - \partial_{z_2}^2 w + \cdots = 0.$ 这称作第二典则形式.

§7.4: 有限传播速度

7.4.1: 预备知识1: 余面积公式及其推论

(coarea)

Def (Jacobian of a Lipschitzian map).

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为Lipschitz的映射. $Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 & \cdots & \partial_{x_n} f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f^m & \cdots & \partial_{x_n} f^m \end{pmatrix}$, 若f在x处可微

定义 对 $\mathcal{L}^n$-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 定义f的Jacobian为

$$Jf(x) := [\![Df(x)]\!]$$

其中, 对线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $[\![L]\!] := \begin{cases} \sqrt{\det(L^* \circ L)} & n \le m \\ \sqrt{\det(L \circ L^*)} & n \ge m \end{cases}$

~~Thm 7.4~~

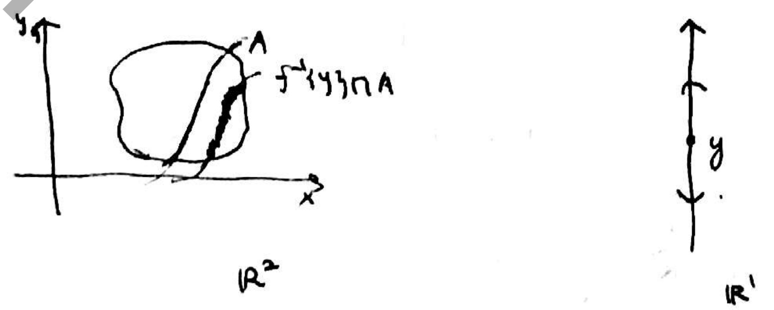
Lemma 7.4.1 (余面积公式). $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是Lipschitz函映射. $n \ge m$.

则 $\forall\, \mathcal{L}^n$-可测集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 有: $\displaystyle\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy$.

证明见 L.C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and FINE Properties of Functions, Revised Version. CRC Press, 2015. □

Rmk: ① 当f是线性映射时, lem 7.4.1 可以看作"斜着的" Fubini Thm.

② 一般地, 可以看作"弯曲的 Fubini 定理".



Jf 之积分

$\parallel$

在弯曲切片的将来性函数对 $\mathcal{H}^{n-m}$ 求积分
再将切片积分.

③ 若令 $A = \{Jf = 0\}$ 则 $\mathcal{H}^{n-m}(\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\}) = 0$. $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$

这与Sard定理 ($f \in C^k$, 则对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 有 $\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\} = \varnothing$). 类似

得到 $\mathcal{H}^{n-m}$ 零测, f只需Lip即可.

Corollary 7.4.1 (水平集的积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. $n \geq m$. 则 $\forall$ $\mathcal{L}^n$-可积的 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

有:

(1) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ $\mathcal{H}^{n-m}$-可积. 对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 成立.

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$

Rmk: $\forall y \in \mathbb{R}^m$. $f^{-1}\{y\}$ 闭 从而 $\mathcal{H}^{n-m}$-可测. 因此 (2) 是合法的.

~~证明~~

首先有以下引理.

lemma 7.4.2: $f: X \to [0, \infty]$ 为 μ-可测函数 则 $\exists$ μ-可测集 $\{A_i\}_1^\infty \subseteq X$.

s.t. $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

Pf: 令 $A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$.

$$A_k = \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}.$$

从而 $f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

又: 若 $f(x) = \infty$ 则 $\forall k$. $x \in A_k$

若 $0 \leq f(x) < \infty$. 则 对 无穷多个 n. $x \notin A_n$.

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}.$$

#.

回到 cor 7.4.1: 不妨 $g \geq 0$. 则 由 lem 7.4.2 有: $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

for some $\mathcal{L}^n$-可测集 $\{A_k\}_1^\infty$

则 $\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx \overset{\text{MCT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{A_k} Jf \, dx.$

$$\overset{\text{coarea formula}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy.$$

□ 42

lem 7.4.3 (水平集积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip.

(1) $$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\})\,dt$$

(2). 若 $\operatorname{essinf} |Df|>0$. 且 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-可积. 则

$$\int_{\{f>t\}} g\,dx = \int_t^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right) ds.$$

特别地: $$\frac{d}{dt}\int_{\{f>t\}} g\,dx = -\int_{\{f=t\}} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}.\quad \mathcal{L}^1\text{-a.e. } t\in\mathbb{R}.$$

Pf: (1) 在 Coarea formula 中. 令 $m=1$. 并注意 $Jf = |Df|$.

(2) (3): $E_t := \{f>t\}$

由上一引理知

$$\int_{E_t} g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_t} \cdot \frac{g}{|\nabla f|} Jf\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} \chi_{E_t}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,ds.$$

$$= \int_t^\infty \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right) ds$$

□.

7.4.2：双曲方程的有限传播速度.

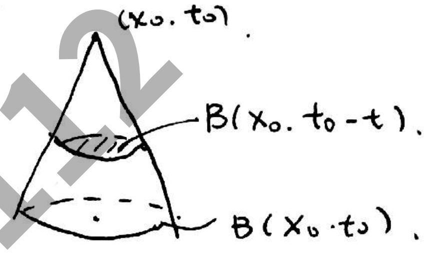
· 波动方程的有限传播速度.

设 $u \in C^2$ solves $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Fix $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$.

定义 $K(x_0, t_0)$ 为顶点的"倒向光锥".

$$K(x_0, t_0) := \left\{ (x,t) \;\middle|\; 0 \le t \le t_0,\ |x - x_0| \le t_0 - t \right\}.$$



Thm 7.4.1 (波方程的有限传播速度).

$u = u_t = 0$ on $B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$

则 $u = 0$ on $K(x_0, t_0)$.

Rmk：这说明：$B(x_0, t_0)$ 之外的扰动，对光锥内的解没有影响.

Pf：$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0 - t)} (\partial_t u(x,t))^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx$, $0 \le t \le t_0$.

$$E'(t) = \int_{B(x_0, t_0 - t)} \partial_t u \cdot \partial_t^2 u + \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \, dS$$

分部积分

$$= \int_{B(x_0, t_0 - t)} \partial_t u \, \underbrace{(\partial_t^2 u - \Delta u)}_{0} \, dx + \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \partial_t u \, dS - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \, dS$$

$$= \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \frac{\partial u}{\partial n} \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dS$$

$$\le \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 + (\partial_t u)^2}{2} - \frac{(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2}{2} \, dS \le 0$$

$$\Rightarrow 0 \le E(t) \le E(0) = 0$$

□

·双曲方程的有限传播速度.

仍然先看波方程:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \cancel{\{t=0\}}\,(0,\infty). \qquad \cdots(*)$$

我们考虑方程的"振荡解"

Fix $\varepsilon>0$. 希望找形如 $u^\varepsilon(x,t)=e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}}a^\varepsilon(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$ $t\geq 0$. $\cdots$(#)

其中, p^ε 是相函数. 实值函数 $a^\varepsilon(x,t)$ 是振幅. 形如(#)的解称作 "geometric optics ansatz".

波方程的振荡解, 可以理解为研究相函数在 $\varepsilon\to 0$ 时对应的 PDE.

下面是具体的形式推导.

(#)代入(*).

$$0=\partial_t^2 u^\varepsilon-\Delta u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i\partial_t^2 p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon - a^\varepsilon\left(\frac{\partial_t p^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2+\frac{2i\,\partial_t p^\varepsilon\,\partial_t a^\varepsilon}{\varepsilon}+\partial_t^2 a^\varepsilon\right)$$

$$- e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}}\left(\frac{i\Delta p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon-\frac{|\nabla p^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}a^\varepsilon+2i\frac{\nabla p^\varepsilon\cdot\nabla a^\varepsilon}{\varepsilon}+\Delta a^\varepsilon\right)$$

可约去 $e^{i\frac{p^\varepsilon}{\varepsilon}}$, 取实部

$$\Longrightarrow\ a^\varepsilon\left((\partial_t p^\varepsilon)^2-|\nabla p^\varepsilon|^2\right)=\varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\varepsilon-\Delta a^\varepsilon\right).$$

$\varepsilon\to 0$ 时, 假设有 $p^\varepsilon\to p$, $a^\varepsilon\to a\neq 0$

$$\Longrightarrow\ p_t\pm|\nabla p|=0. \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty). \qquad \cdots(**)$$

(**)可以视作 $\varepsilon\to 0$ 时, (#)在(**)确定的特征线附近高度聚集.

对一般的二阶双曲方程 $\partial_t^2 u-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l}u=0$. in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ $\cdots$(***)

$a^{lk}=a^{kl}$.

我们仍希望寻找形式(#)的解.

$$\partial_{x_k}u^\varepsilon=e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon+\partial_{x_k}a^\varepsilon\right).$$

$$\Rightarrow \partial_{x_kx_l}u^\varepsilon=e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_l}p^\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon+\partial_{x_k}a^\varepsilon\right)$$

$$+e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\left(\partial_{x_kx_l}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon+\partial_{x_k}p^\varepsilon\,\partial_{x_l}a^\varepsilon\right)+\partial_{x_kx_l}a^\varepsilon\right).$$

约去 $e^{\frac{i\rho}{\varepsilon}}$ 取实部有

$$a^2\left((\partial_t\rho^\varepsilon)^2-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\rho^\varepsilon\partial_l\rho^\varepsilon\right)=\varepsilon^2\left(\partial_t^2a^\varepsilon-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l a^\varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \rho_t\pm\left(\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\rho\,\partial_l\rho\right)^{\frac{1}{2}}=0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

#.

下面考虑 (***) $\partial_t u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的光滑解.

$$Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u.$$

Fix $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，我们对此方程，希望找到类似于"波方程的"光锥" C. 其顶点为 (x_0,t_0). s.t. 只要 $u=\partial_t u=0$ on $C_0:=C\cap\{t=0\}$

就有：$u\equiv 0$ in C.

由上面对振荡解的讨论，我们可以猜测 所求的区域 C 是形如 $\{p=0\}$ 这样的水平集. p 是 Hamilton-Jacobi 方程 $p_t-\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}p_{x_i}p_{x_j}\right)^{\frac{1}{2}}=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解.

分离变量 $p(x,t)=q(x)+t-t_0$.

q 满足：
$$\begin{cases}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}q_{x_i}q_{x_j}=1\\ q>0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n-\{x_0\}.\\ q(x_0)=0\end{cases}$$
$(\Rightarrow \nabla q\neq 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\})$.

* 例如. $L=-\Delta$ 时. $q(x)=|x-x_0|$.

于是我们所求的"光锥"应为.

$$K:=\{(x,t)\mid p(x,t)<0\}=\{(x,t)\mid q(x)<t_0-t\}.$$

$\forall t>0$. 令 $K_t=\{x\mid q(x)<t_0-t\}=K$ 在 t 时刻的横截面

$(\Rightarrow \partial K_t\in C^\infty$ 且 $\mathcal{H}^{n-1}$-可测$)$

下面证明对称双曲型方程的~~解的~~有限传播速度.

Thm 7.4.2 设 $u\in C^\infty$ 是 $\partial_t^2 u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解 若 $u=\partial_t u=0$ on K_0.

则 $u=0$ in K.

Rmk: 从而: 若 $u(0)=g$. $\partial_t u(0)=h$. 则 $u(x_0,t_0)$ 仅与 g,h 在 K_0 中的取值有关.

Pf: 令 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,dx.$

$$E'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,dx\right).$$

余面积公式

cor 7.4.2

$$=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u_t\,dx.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\left((\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\right)\frac{1}{|\nabla\rho|}\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$=:I_1-I_2.$$

对 I_1: 第二项分部积分可得:

$$I_1=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\partial_t u\cdot\partial_j(a^{ij}\partial_i u)\,dx.$$

$\vec{n}$ 为 ∂K_t 的单位外法向

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^i\cdot u_t\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\cancel{-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}}$$

$$=\int_{K_t}\partial_t u\cdot\left(\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\left(\partial_j a^{ij}\partial_i u+a^{ij}\partial_i\partial_j u\right)\right)\,dx.$$

加起来为0.

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1};$$

$$=-\int_{K_t}\partial_t u\cdot\sum_{i,j=1}^n\partial_j a^{ij}\cdot\partial_i u\,dx+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

那么.

$$|A| \le \left|\int_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \cdot n^j\right| \cdot |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left(\sum a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum a^{ij} n^i n^j\right)^{\frac{1}{2}} |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

这里用到了：
$A=(a^{ij})$ 为实对称阵. a^{ij}非负
则.
$$\left|\sum_{ij} a^{ij} x_i y_j\right| \le \left(\sum_{ij} a^{ij} x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{ij} a^{ij} y_i y_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

∂K_t上. $q = t_0 - t$.
$n = \nabla q / |\nabla q|$

则
$$\sum_{i,j} a^{ij} n^i n^j = \sum_{i,j}^{n} \frac{a^{ij} q_{x_i} q_{x_j}}{|\nabla q|^2} = \frac{1}{|\nabla q|^2}$$

$$= \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} |u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz (第一项).

$$\le \int_{K_t} u_t^2 + C \int_{K_t} \cancel{a^{ij} \partial_i u \partial_j u} \, |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial K_t} \frac{|u_t|}{|\nabla q|} \left(\sum_{ij} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}$$

L椭圆

$$\le C\left(\int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) dx + \int_{\partial K_t} \cdots\cdots$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le C E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} \left((\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$= C E(t) + B$$

$\Rightarrow \dot{E}(t) = A - B \le C E(t)$, $E(0) = 0$ $\xRightarrow{\text{Gronwall不等式}}$ $E(t) \equiv 0 \quad 0 \le t \le t_0$.

$\Longrightarrow u \equiv 0$ in K.

□

§7.5：一阶双曲方程组

7.5.1：消失粘性法：

考虑：
$$\begin{cases}\partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_j \vec{u} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ \vec{u}(0)=\vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases} \qquad \cdots (*)$$

$\vec{u}=(u^1,\dots,u^m):\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ 为未知函数.

$B_j:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to M^{m\times m}$. ~~方矩阵~~ $j=1,2,\dots,n$.

$\vec{f}:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$.

$\vec{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

给定.

$$\vec{B}(x,t;y):=\sum_{j=1}^{n} y_j B_j(x,t) \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t\ge 0.$$

Def (1) 若 $B(x,t;y)$ ($m\times m$ 方阵) $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\ge 0$. 可对角化. 则称 (*) 是双曲的.

这说明. (*) 是双曲的. 若 $\forall x,y,t$. $B(x,t;y)$ 有 m 个实特征值 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_m$.
且对应特征向量构成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基

(2). 称 (*) 是对称双曲方程组，若 $B_j(x,t)$ 是对称阵.

称 (*) 是严格双曲的. 若 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $y\ne 0$, $\forall t\ge 0$, $B(x,t;y)$ 有 m 个不同的实特征值 $\lambda_1(x,t;y)<\cdots<\lambda_m(x,t;y)$.

Motivation：波方程的行波解 (travelling wave).

设 $f=0$. $B_j(x,t;y)$ 是常系数矩阵. 则

$$\sum_{j=1}^{n} y_j B_j = B(y) \text{ 仅与 } y \text{ 有关}.$$

寻求 (*) 的行波解，即希望 $\vec{u}$ 有形式 $\vec{u}(x,t)=\vec{v}(y\cdot x-\sigma t)$. $x\in\mathbb{R}^n$, $t\ge 0$

上式代入 (*). $\Rightarrow$ $\left(-\sigma I+\sum_{j=1}^{n} y_j B_j\right)\vec{v}'=0$.

$\Rightarrow$ $\vec{v}'$ 是 $B(y)$ 关于特征值 σ 的特征向量.

双曲条件保证(*)有m个不同的行波解(∀方向 y)，它们应为 $(y\cdot x-\lambda_k(y)t)\vec{r}_k(y)$
其中 $\lambda_1(y)\le\cdots\le\lambda_m(y)$ 是 $B(y)$ 的特征值，$\{\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_m\}$ 是对应特征向量，
$|y|=1$ 时，特征值即为波速。

□

下面我们引入所谓的"消失粘性法"来证明对称一阶双曲组初值问题的存在唯一性。

考虑

$$(*)\quad\begin{cases}\partial_t\vec{u}+\sum_{j=1}^{n}B_j\partial_{x_j}\vec{u}=\vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \vec{u}=\vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad T>0.$$

并假设 (1): $B_j(x,t)$ 是对称阵 $\forall j$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,T]$

(2) $B_j\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,T];\ \mathbb{M}^{m\times m})$.

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}\left(|B_j|,\ |\partial_x B_j|,\ |\partial_t B_j|,\ |\partial^2_{x,t}B_j|\right)<\infty\quad \forall j.$$

(3) $\vec{g}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

$\vec{f}\in H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T))\to\mathbb{R}^m$.

定义: (1) 双线性形式: $B[\vec{u},\vec{v};t]:=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}\left(B_j(\cdot,t)\partial_{x_j}\vec{u}\right)\cdot\vec{v}\,dx$

$\forall\, 0\le t\le T$, $\vec{u},\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

(2). 称 $\vec{u}\in L^2(0,T;H^1)$, $\vec{u}'\in L^2(0,T;L^2)$ 是(*)的弱解若

(i). $(\vec{u}',\vec{v})+B[\vec{u},\vec{v};t]=(\vec{f},\vec{v})$ $\quad\forall\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$, a.e. $t\in[0,T]$

(ii) $\vec{u}(0)=\vec{g}$.

消失粘性法的基本思路是，在原方程加入较小的(第2)抛物项，

例如

$$(\#^{\varepsilon})\begin{cases} \partial_t \vec{u}^{\varepsilon} - \varepsilon \Delta \vec{u}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u^{\varepsilon} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \vec{u}^{\varepsilon}(0) = \vec{g}^{\varepsilon}(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \\ 0<\varepsilon\le 1. \quad \vec{g}^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * \vec{g} \end{cases}$$

$(\#^{\varepsilon})$ 被视为原方程的逼近，我们试图先用不动点方法证明 $(\#^{\varepsilon})$ 的解（称作原方程的逼近解）具有存在唯一性，再用能量估计与 Banach-Alaoglu 定理证明 $(*)$ 方程的解的存在唯一性.

↑此时 取子列 $\varepsilon_k \to 0$ ↑所谓"粘性消失".

Step 1：逼近解存在唯一性：

Thm X.5.1：$\forall \varepsilon>0$. $(\#^{\varepsilon})$ 存在唯一解 $\vec{u}^{\varepsilon} \in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m))$
且 $\vec{u}^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m))$.

Proof：我们采用压缩映射原理的方法. 因此. 我们要

① 构造函数空间 X.

② 构造解映射 J：$u \mapsto Ju$. 使之成为 X 到自身的压缩映射

③ 利用压缩映射原理，得不动点 $\vec{u}$ 即为方程的局部解

④ 再设法变成整体 $(0,T]$ 上的解

(1.1) 为确定 X，我们先要对方程进行先验估计，即先大致判断 u 会落在什么空间中.

$(\#^{\varepsilon})$ 中的难处主要是高阶项，因此，我们把低阶项 $\sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u^{\varepsilon}$ 挪到右边去. 变成

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}^{\varepsilon} - \varepsilon \Delta \vec{u}^{\varepsilon} = \vec{f} - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} \vec{u}^{\varepsilon} \\ \vec{u}^{\varepsilon}(0) = g. \end{cases} \quad \cdots (\#\#^{\varepsilon}).$$

这样就变成一个非齐次热方程.

我们先考虑一般的热方程

$$\begin{cases}\partial_t u - \varepsilon\Delta u = f\\ u(0)=g.\end{cases}$$

由Du'Hamel原理：

$$u(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds.$$

其中 $e^{\varepsilon t\Delta}g(x) := \cancel{\int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}} \left(e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\hat{g}\right)^{\vee}$.

∧: Fourier变换

∨: 反Fourier变换.

• $$\|e^{\varepsilon t\Delta}g\|_{H^s} = \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\cdot\hat{g}(\xi)\,\langle\xi\rangle^s\|_{L^2}$$

$$= \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\langle\xi\rangle^s\,\hat{g}(\xi)\|_{L^2}$$

$$\lesssim \|\langle\xi\rangle^s\,\hat{g}(\xi)\|_{L^2} = \|g\|_{H^s}.$$

又: $$e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\langle\xi\rangle^s = e^{-\varepsilon t|\xi|^2}\langle(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}}\underbrace{((\varepsilon t)^{\frac{1}{2}}\xi)}_{=\eta}\rangle^s$$

$$= e^{-\eta^2}\langle(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}}\eta\rangle^s$$

$$\lesssim (\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}}$$

原方程初值 $g\in H^1 \Rightarrow e^{\varepsilon t\Delta}g \in L_t^\infty H_x^1$

• 非齐次项估计:

$$\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(y,s)\,dy\,ds$$

$\phi(t,x)$设作热方程基本解

$$= \int_0^t \phi(\cdot,\varepsilon(t-s)) * f(s)\,ds.$$

$\Rightarrow \cancel{\|\int_0^t e^{-\varepsilon t}}$

$\Rightarrow$

广义Minkowski不等式

$$\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2_x} \le \int_0^t \left\|\cancel{e^{\varepsilon(t-s)}}\,\phi(\cdot,\varepsilon(t-s)) * f(s)\right\|_{L^2_x} ds.$$

卷积 Young不等式

$$\le \int_0^t \|\phi(\cdot,\varepsilon(t-s))\|_{L^1_x}\,\|f(s)\|_{L^2_x}\, ds.$$

$\|f*g\|_q \le \|f\|_p\|g\|_r$

$1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$

$$= C_\varepsilon\int_0^t \|f(s)\|_{L^2_x}\, ds$$

$y=\frac{x}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$ $\|\phi\|_{L^1_y}=\text{const}$.

$$\le \begin{cases} CT\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ C_\varepsilon\,\|1\|_{L^2_t}\,\|f\|_{L^2_t L^2_x} = C_\varepsilon T^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2_t L^2_x} \end{cases}$$

$$\nabla_x u^\varepsilon = \nabla_x\int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(x-y,s)\,dy\,ds$$

$$= \int_0^t \nabla_x\phi_\varepsilon(y,t-s)\, f(x-y,s)\,dy\,ds$$

可以直接算出 $\le(\varepsilon(t-s))^{-\frac{1}{2}}$. 有限的 → 类似于正态分布的一阶矩 $E|X|$.

$$\le \int_0^t \|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^1_x}\,\|f\|_{L^2}\, ds$$

同上

$$\le C_\varepsilon \begin{cases} T\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ T^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L^2_t \cancel{H^1_x} L^2_x} \end{cases}$$

而原方程中 $f\in H^1_{t,x}$. t方向上 由 $H^1_t\hookrightarrow L^\infty_t$ 知 $f\in L^\infty_t \cancel{H^1_x} L^2_x$

$\Rightarrow f\in L^2_t\cancel{H^1_x}L^2_x$. $t<\infty$

这样 我们~~证明了~~大致可以猜测 $X=L^\infty_t H^1_x$

(1.2) 令 $X = L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n))$ ~~我们证明其是~~

形式推导表明

$$(\#\#^\varepsilon) \Longleftrightarrow u^\varepsilon(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j u^\varepsilon_{x_j}(s)\right) ds$$

令 $T: u \mapsto e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u(s)\right) ds.$

我们证明 T 是 $X \to X$ 的压缩映射.

- $\mathrm{Im}\, T \subseteq X$. 由先验估计(1.1)

$$\|Tu\|_X \lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|f\|_{L_t^\infty H_x^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^2}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \left(\|f\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}\right)$$

$$< \infty$$

- 再证 T 压缩: $\forall u, v \in X$

$$Tu - Tv = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} B_j \partial_j (u-v)(s)\, ds,$$

$$\|Tu - Tv\|_{L_t^\infty H_x^1} \le C(\varepsilon) \cdot T^{\frac12} \|u-v\|_{L_t^\infty H_x^1}.$$

还用(1.1)

$$< \frac12 \|u-v\|_X.$$ provided choosing $C(\varepsilon) T^{\frac12} < \frac12$.

$\Rightarrow \exists T_1$ s.t. $[0,T_1]$上.

$T: L_t^\infty H_x^1 \longrightarrow L_t^\infty H_x^1$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$ 是压缩映射

$\therefore$ $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$上, $(\#\#^\varepsilon)$ 有唯一解 u^ε. 再在 $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, … 依此类推即可

(1.3) 再证 $u^\varepsilon \in L^2(0,T;H^3)$. $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

实际上. 令 $\tilde{f} = f - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a.e. $0 \le t \le T$.

由抛物正则性定理. $u^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^2)$, $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

这样 $\sum B_j \partial_{x_j} u \in L^\infty(0,T;H^1)$.

$\Rightarrow \tilde{f} \in H^1$ a.e. $t \in [0,T]$

$\Rightarrow u^\varepsilon \in L^\infty_t H^3_x$. 证毕.

再用抛物正则性定理.

□

这样我们证明了(##ε), 即逼近解的存在唯一性 ($\forall \varepsilon$).

下面我们证明, 逼近解序列在某些自反空间中一致有界. 再用 Banach-Alaoglu 定理. 得子列 $u^{\varepsilon_k} \to u$ as $k \to \infty$ ($\varepsilon_k \to 0$). 从而证明解的存在唯一性.
该套路我们已经反复用过.

Step 2: 能量估计:

Thm 7.5.2: $\exists\, C > 0$ s.t. $\forall\, 0 < \varepsilon \le 1$.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|u^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}\right)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))} + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))}\right)$$

证明. 先算第一项, 拆成 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|Du^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ 分别估计.

(2.1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2\right) = (u^\varepsilon, u^{\varepsilon\prime})$

$$= \left(u^\varepsilon,\ f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon \Delta u^\varepsilon\right).$$

$|(u^\varepsilon, f)| \le \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$

$|(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)| \xlongequal[\text{(采用}C_c^\infty\text{函数逼近)}]{\text{分部积分}} -\varepsilon\|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le 0.$

再算：$\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)$.

先设 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$.

$$\left(v, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v\right) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (B_j \partial_{x_j} \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} B_j^{11} & \cdots & B_j^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_j^{m1} & \cdots & B_j^{mm} \end{pmatrix}}_{\text{实对称阵}} \begin{pmatrix} \partial_{x_j} v_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_j} v_m \end{pmatrix} \right) \underset{\text{点乘}}{\cdot} (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m B_j^{1i} \cdot \partial_{x_j} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m B_j^{mi} \cdot \partial_{x_j} v_i \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m B_j^{ki} \cdot (\partial_{x_j} v_i) \cdot v_k.$$

用了 B_j 实对称
$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\partial_{x_j} (B_j^{ki} v_i v_k) - \partial_{x_j} B_j^{ki} \cdot v_i v_k \right) dx.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} (B_j v \cdot v)\, dx - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx.$$

由于 v 紧支，故：上式第一项 $= 0$

上式绝对值 $\le \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx \right| \le C\|v\|_{L^2}^2.$

(2)

下面再估计 $v=u^{\varepsilon'}$ 的 L^2 范数.

(##²) 两边对 t 求导:

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon\Delta v + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v = f' - \sum_{j=1}^n \partial_t B_j \partial_{x_j} u^{\varepsilon} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v = f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} g^{\varepsilon} + \varepsilon\Delta g^{\varepsilon} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

同上可得:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{L^2}^2 \le C\Big(\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\Delta g^{\varepsilon}\|_{L^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2H_x^1}^2 + \|f'\|_{L_t^2L_x^2}^2\Big)$$

又由磨光与分部积分可得: $\|\Delta g^{\varepsilon}\|_{L^2}^2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2$ $\quad (g^{\varepsilon}=\eta_\varepsilon * g)$.

又: $\|f(0)\|_{L^2}^2 \le C(\|f\|_{L_t^2L_x^2}^2 + \|f'\|_{L_t^2L_x^2}^2)$.

则 $\sup_{0\le t\le T} \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{L^2}^2 \le C(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L_t^2H_x^1} + \|f'\|_{L_t^2L_x^2})$.

□

Step 3: 存在唯一性.

Thm 7.5.3:

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

在之前~~的条~~件下, 弱解∃!

Proof: 由 Thm 7.5.2 知, $\{u^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L_t^2H_x^1$ 一致有界.

$\{u^{\varepsilon'}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L_t^2L_x^2$ 一致有界.

由于 Banach-Alaoglu 定理, ∃弱收敛子列:

$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } L_t^2H_x^1$

$u^{\varepsilon_k'} \rightharpoonup u' \quad \text{in } L_t^2L_x^2$

再由 C_c^∞ 函数逼近 H^1 函数 $\quad (H_0^s(\mathbb{R}^d)=H^s(\mathbb{R}^d))$.

则
$$\left|\left(u^\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon\right)\right| \le C\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}.$$

这样：
$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le C\left(\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|f\|_{L^2}^2\right).$$

再由Gronwall不等式即得：
$$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} \le C\left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}+\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$
(因 $\|g^\varepsilon\|_{L^2}\le\|g\|_{L^2}$)

(2.2): $\cancel{\frac{d}{dt}}$ 下面估计 $\|Du^\varepsilon\|_{L^2}$.

Fix $k\in\{1,2,\dots,n\}$. $\quad v^k:=\partial_{x_k}u^\varepsilon$.

对(##)两边对 x_k 求导 有：
$$\begin{cases}\partial_t v^k-\varepsilon\Delta v^k+\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}v^k=\partial_{x_k}f-\sum_{j=1}^n\partial_{x_k}B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ v^k=\partial_{x_k}g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$$

同(2.1)可得：
$$\frac{d}{dt}\|v^k\|^2_{L^2}\le C\left(\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}+\|\nabla f\|^2_{L^2}\right).$$
$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}\le \text{右}.$$

再由Gronwall不等式即有.
$$\sup_{0\le t\le T}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}\le C\left(\|\nabla g\|^2_{L^2}+\|f\|^2_{L^2}\right).$$

于是
$$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}\le C\left(\|g\|_{H^1}+\|f\|_{L^2_tH^1_x}\right).$$

由弱解定义. $\forall v \in C^1([0,T]; H^1)$.

$$\int_0^T (u^{\varepsilon'}, v) + \varepsilon\, Du^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt. \quad \cdots (\#)$$

取 $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ (as $k \to \infty$)

由弱收敛 $\Longrightarrow$ $$\int_0^T (u', v) + B[u, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt. \quad \forall v \in C^1([0,T]; H^1) \quad \cdots (\#\#)$$

$$\Longrightarrow (u', v) + B[u, v; t] = (f, v). \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

设 $v(T) = 0$.

则 (#) $\xRightarrow{\text{分部积分}}$ $$\int_0^T (-u^\varepsilon, v') + \varepsilon\, Du^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt + (g^\varepsilon, v(0))$$

$\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$.

$$\Longrightarrow \int_0^T (-u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\, dt + (g, v(0))$$

~~分部积分~~ ~~$\Longrightarrow \int_0^T (-u, v')$~~

又对 (##) 分部积分

$$\Longrightarrow -\int_0^T (u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\, dt + (u(0), v(0))$$

$\Longrightarrow u(0) = g$ ，存在性证毕

再证唯一性. 只用考虑 (*) 在 $f = g = 0$ 时是否只有解 $u = 0$

令 $v = u \Longrightarrow \forall$ a.e. $0 \le t \le T$ $\quad (u', u) + B[u, u; t] = 0$.

由 $B \Longrightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 \le -B[u, u; t] \le C \|u(t)\|_{L^2}^2$.

再由 Gronwall 不等式即得

□

§ 7.6 半群方法 ~~与 Schrödinger 半群的 Strichartz 估计~~

7.6.1：预备知识：

设 X 是实 Banach 空间，(可能无界的) 线性算子 $A: D(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{子空间}}}{\subseteq} X \to X$.

考虑：$(*)\begin{cases} \cancel{A: D}(A) \\ u'(t) = Au(t) & t \geq 0. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

key point ① A 满足什么条件时，ODE$(*)$ 有唯一解 u？($\forall$ initial data $u_0 \in X$)

② 许多 PDE 可以抽象为 $(*)$ 的形式

Def (算子半群) 设 $u(t) := S(t)u_0$. $(t \geq 0)$

(1) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是：$X \to X$ 是算子半群，若
一族有界线性算子

① $S(0)u_0 = u_0$ $\quad \forall u_0 \in X$

② $\forall t, s \geq 0$, $u_0 \in X$ $\quad S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0$

③ $t \longmapsto S(t)u_0$ 是 $[0, +\infty) \to X$ 的连续映射 ($\forall u_0 \in X$)

(2) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 为压缩半群，若 $\forall t \geq 0$ $\|S(t)\| \leq 1$.

□

压缩半群可以用来刻画 $(*)$ 生成的 flow
在 X 上

Def (无穷小生成元, infinitesimal generator) 设 $\{S(t)\}$ 是压缩半群.

令 $D(A) := \left\{ u \in X \;\middle|\; \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{S(t)u - u}{t} \text{ 在 } X \text{ 中存在} \right\}$

$$Au := \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \qquad \forall u \in D(A)$$

则称 $A: D(A) \to X$ 是半群 $S(t)$ 的无穷小生成元.

□

Thm X.6.1:（微分性质）设 $u\in D(A)$ 则

(1) $\forall t\geq 0$. $S(t)u\in D(A)$

(2) $AS(t)u=S(t)Au$. $\forall t\geq 0$.

(3). $t\longmapsto S(t)u$ $\forall t>0$ 是可微的.

(4) $\frac{d}{dt}S(t)u=AS(t)u$. $\forall t>0$.

Proof: ~~设 (1) 是~~

(1)(2): 设 $u\in D(A)$.

$$\text{则}\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)\left(S(t)u\right)-S(t)u}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0^+}\frac{S(t+s)u-S(t)u}{s}$$

$$=S(t)\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)u-u}{s}=S(t)Au.\ \exists$$

$$\Rightarrow S(t)u\in D(A)$$

$$A(S(t)u)=S(t)Au.$$

(3)

claim: $\lim_{h\to 0}\frac{S(t)u-S(t-h)u}{h}=S(t)Au.$

$$\frac{S(t)u-S(t-h)u}{h}-S(t)Au$$

$$=S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right)-S(t)Au.$$

$$=S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}-Au\right)+\left(S(t-h)-S(t)\right)Au.$$

$$\underbrace{\frac{S(h)u-u}{h}-Au}_{\text{A的定义}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0,\ 0}\qquad \underbrace{\left(S(t-h)-S(t)\right)}_{\text{连续性}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0,\ 0}$$

$\to 0$ as $h\to 0$.

(4)：由(3)易知

$$\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h} \longrightarrow S(t)Au \quad \text{as } h\to 0^+ .$$

□

Thm 7.6.2

(1) $D(A) \underset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2) A是闭算子，即 满足 $\forall u_n \in D(A)$, $\left.\begin{matrix} u_n \to u \\ Au_n \to v \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ~~$Au = v$~~ ~~$\forall\in$~~ $u\in D(A)$ 且 $Au=v$.

证明：(1) Fix $u\in X$. $\quad u^t := \int_0^t S(s)u\,ds$. 则 $\frac{u^t}{t} \to u$ in X as $t\to 0^+$. (由连续性).

只用证 $u^t\in D(A)$ 即可. $(\forall t>0)$

$$\forall h>0 \quad \frac{S(h)u^t-u^t}{h} = \frac{1}{h}\left(S(h)u^t - u^t\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^t S(s)u\,ds - \int_0^t S(s)u\,ds\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^t \left(S(s+h)-S(s)\right)u\,ds.$$
$$= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} - \int_0^h\right) S(s)u\,ds.$$
$$\xrightarrow{h\to 0^+} S(t)u-u.$$

$\Rightarrow u^t\in D(A)$.

$Au^t = S(t)u-u$.

$\Rightarrow D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2). 为证A闭 设 $u_k\in D(A)$. $u_k \longrightarrow u$ in X

$Au_k \longrightarrow v$ in X.

要证：$u\in D(A)$ $\quad v=Au$.

$$\xRightarrow{7.6.1} S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)\,Au_k\,ds$$
$$\xRightarrow{k\to\infty} S(t)u-u = \int_0^t S(s)\,\cancel{Au}\,v\,ds.$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,ds = v. \Rightarrow \begin{matrix} u\in D(A) \\ v=Au \end{matrix}.$$

□

设 $A: D(A) \longrightarrow X$ 为闭算子

Def: (1) (预解集 Resolvent set) $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I \ \text{1-1 \& 满射}\}$.

(2). $\lambda \in \rho(A)$. 则定义对应的预解算子 $R_\lambda: X \to X$ 为:

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

~~Fact~~

Recall: 闭图像定理: 闭线性算子是有界的.

$\Rightarrow$ $R_\lambda: X \to D(A) \subseteq X$. 是有界线性算子

进一步地: $A R_\lambda u = R_\lambda A u$.

Thm 7.6.3

(1). 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$. 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(2) 若 $\lambda > 0$ 则 $\lambda \in \rho(A)$.

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \quad \forall u \in X$$

(R_λ为$S(t)$的Laplace变换)

$$\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$$

Pf. (1) Trivial.

(2) $\lambda > 0$. $\|S(t)\| \le 1$. 知(2)中积分式有定义.

$$\tilde{R}_\lambda u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt.$$

$\forall h > 0, u \in X$.

$$\frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)u - S(t)u)\, dt\right)$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u \, dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}\right) S(t) u \, dt$$

$$= -e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u.$$

$$\longrightarrow -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u. \quad \Rightarrow A\tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u \quad \forall u \in X$$

claim: $A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$

若 claim 成立. 则:

$$\forall u\in D(A).\quad A\widetilde{R_\lambda}u = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt = \widetilde{R_\lambda}Au.$$

$$\Rightarrow \widetilde{R_\lambda}(\lambda I - A)u = u.$$

又: $\lambda I - A$ 1-1 & onto.

$$\Rightarrow \lambda\in\rho(A).\quad \widetilde{R_\lambda} = R_\lambda.$$ ∎

余下只用证 claim.

先证明: 对 $\int_0^M$. A 可与之换序:

$\forall M\in\mathbb{R}_+$. 将 $[0,M]$ 作分割:

$$[0,M] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left[\frac{j}{2^k}M, \frac{j+1}{2^k}M\right]$$

由 $I_k(t) := \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda t_j}S(t_j)u\cdot\chi_{t\in[t_{j-1},t_j]} \rightrightarrows e^{-\lambda t}S(t)u$. as $k\to\infty$

↑simple functions

及 A 闭 知:

$$A\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^M I_k(t)\,dt\right)$$

$$\overset{A闭}{=} \lim_{k\to\infty} A\int_0^M I_k(t)\,dt.$$

$$\overset{I_k\ simple}{=} \lim_{k\to\infty}\int_0^M AI_k(t)\,dt$$

$$\overset{A闭}{\underset{MCT}{=}} \int_0^M \lim_{k\to\infty} AI_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^M Ae^{-\lambda t}S(t)u\,dt \overset{A\ linear}{=} \int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

又：$e^{-\lambda t}$ rapidly decays，
$\|S(t)\| \le 1$.
A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u\,dt \xrightarrow[\exists]{M\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u\,dt.$$

$$\Rightarrow A\left(\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u\,dt\right) \xrightarrow{M\to\infty} A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u\,dt\right).$$

therefore "$\|$" holds.

$\|$ 刚刚已证.

$$\int_0^M e^{-\lambda t} A S(t) u\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} A S(t) u\,dt.$$

$\|$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$$\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) A u\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) A u\,dt$$

□.

下面来对压缩半群的生成元进行刻画.

Thm 7.5.4 (Hille-Yorsida).

A 为 X 上稠定的闭算子. 则 A 是 $S(t)$ 的生成元 $\Longleftrightarrow$ (压缩半群)

$\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$. $\forall \lambda > 0$.

Pf: $\Rightarrow$: By thm 7.6.3

$\Leftarrow$: 设 A 闭、稠定, $\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$.
$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$

下面构造 A 生成的压缩半群.
直接构造是困难的, 因此我们先找一族好的 (便于计算).
先求 A_λ 的生成的半群 再令 $\lambda \to \infty$ 来证明.

令 $A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda$. $(\lambda>0)$.

这称作 A 的正则化逼近

<u>claim</u>: $\cancel{A_\lambda u}\ A_\lambda u \to Au$.

若 claim 对. 则令. $S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda}$.

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)\| \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k.$$

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$ $\rightarrow \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1$. $\Rightarrow \{S_\lambda(t)\}$ 是压缩半群

S_λ 生成元: A_λ. $D(A_\lambda) = X$. 此为易见.

直接算

由于 A_λ 是 R_λ 的"多项式". 故 R_λ. R_μ 可交换 $\Rightarrow A_\lambda$. A_μ 可交换.

$\Rightarrow \cancel{A_\lambda S_\mu}\ A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu$. $\forall t>0$.

$$\Rightarrow S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(S_\mu(t-s) S_\lambda(s) u\right) ds.$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s). S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u)\, ds$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \le t \underbrace{\|A_\lambda u - A_\mu u\|}_{\text{回去}} \to 0 \quad \text{as } \lambda.\mu\to\infty$$

因 $A_\lambda u \to Au$. as $\lambda\to\infty$ (by claim).

故 $\{A_\lambda u\}_{\lambda>0}$ Cauchy.

$\Rightarrow \{S_\lambda(t)u\}_{\lambda>0}$ 是柯西列:

$\therefore \exists\ S(t)u := \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$. $\forall t\ge 0$. $u\in D(A)$.

又: $\left.\begin{array}{l}\|S_\lambda\|\le 1 \\ A\ 稠定\end{array}\right\}$ BLT Thm $\Rightarrow \forall u\in X$ $\quad S(t)u \overset{\exists}{=} \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$.

$\forall t.\ \forall\ I\subset\subset[0,\infty)$.

且 $S(t)$ 是压缩半群

下面证明 A是$\{S(t)\}$真的无穷小生成元:

设 B为生成元.

则: $Bu = \lim_{t\to0^+} \frac{S(t)u-u}{t}$ $\forall u\in D(A)$.

而 $S_\lambda(t)u-u = \int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda u\, ds$.

$$\|S_\lambda(s) A_\lambda u - S(s) Au\| \le \|S_\lambda(s)\|\cdot\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s)-S(s))Au\| \to 0$$

$\uparrow \lambda\to\infty$

$\forall u\in D(A)$.

故.令$\lambda\to\infty$ 由DCT.

$S(t)u-u = \int_0^t S(s)Au\, ds$. $\forall u\in D(A)$

$D(A)\subseteq D(B)$.

$\Rightarrow \lim_{t\to0^+}\frac{S(t)u-u}{t} \overset{\exists}{=\!=} Bu$. $\forall u\in D(A)$.

$\| \; Au$.

又若$\lambda>0$. $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$.

则 $X=(\lambda I-A)D(A) = (\lambda I-B)D(A)$.

$\Rightarrow (\lambda I-B)\big|_{D(A)}$ 1-1 & onto. $\Rightarrow D(A)=D(B)$.

$\Rightarrow A=B$

$\Rightarrow$ A为$\{S(t)\}_{t\ge0}$的生成元.

最后我们只用证claim: $\forall u\in D(A)$. $A_\lambda u\to Au$. as $\lambda\to\infty$

$$A_\lambda u = -\lambda u+\lambda^2 R_\lambda u = \lambda(\lambda R_\lambda u-u) = \lambda(AR_\lambda u) = \lambda(R_\lambda Au).$$

$$\|\lambda R_\lambda u-u\| \le \|R_\lambda\|\cdot\|Au\| \le \frac{1}{\lambda}\|Au\|\to0.$$

$\Rightarrow \lambda R_\lambda u\to u$ as $\lambda\to\infty$ $\forall u\in D(A)$.

A稠定

$\|\lambda R_\lambda\|\le1$.

$\Rightarrow \forall u\in X$. $\lambda R_\lambda u\to u$

$\Rightarrow$ ~~$A_\lambda u$~~ $A_\lambda u = \lambda R_\lambda Au \to Au$. □

7.6.2 二阶方程中的應用

I. 考虑抛物方程

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{0\} \end{cases}$$

L的系数与t无关. $\partial U \in C^\infty$

取 $X = L^2(U)$. $D(A) = H_0^1 \cap H^2$ $Au := -Lu$.

则 A 为 X上的 无界算子.

Thm 7.5.5: A生成了L^2上的一个 γ-压缩半群

即 Hille-Yosida 的条件換为 $(\gamma,\infty) \subset \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda > \gamma$.

Pf: $D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$. ✓.

再证: A是闭算子. + 預解式估计 + $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$

① A闭? 设 $u_k \in D(A)$. $\begin{matrix} u_k \to u \\ Au_k \to f \end{matrix}$ in $L^2(U)$.

由正则性定理:

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \le C\, \|Au_k - Au_l\|_{L^2} + \|u_k - u_l\|_{L^2}$$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow u_k \to u \quad \text{in } H^2. \\ \Rightarrow u \in D(A). \end{matrix}\right\} \Rightarrow Au_k \to Au$ (因 $A = -L$).

$\Rightarrow f = Au$. ✓.

② $(\gamma,\infty) \subset \rho(A)$? $\forall \lambda \ge \gamma$.

$\begin{cases} (L+\lambda I)u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 在H_0^1中 $\exists 1$ weak sol (given $f \in L^2$).

$\xRightarrow{\text{正则性Thm}}$ ~~$Au = Au = f$~~ $u \in H^2 \cap H_0^1 \Rightarrow u \in D(A)$.

$\Rightarrow$: $\lambda u - Au = f$. $\therefore$ $(\lambda I - A): D(A) \to X$. 1-1 & onto. $(\forall \lambda \ge \gamma)$.

$\Rightarrow [\gamma,\infty) \subset \rho(A)$

③ : $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\quad \lambda>\gamma$.

Consider $B[u,v]+\lambda(u,v)=(f,v)$. $\quad \forall v\in H_0^1(U)$. $\quad \cdots$ (#).

由 能量估计 (in Lax-Milgram).

$\exists \beta>0,\ \gamma\ge 0$ 使 $\forall u\in H_0^1$ $\quad \beta\|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]+\gamma\|u\|_{L^2}^2$

~~$\forall\lambda>\gamma$. $\Rightarrow (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$.~~

(#) 中. 令 $v=u$.

$$B[u,u]+\lambda(u,u)=(f,u) \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.$$

$$\ge (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2$$

又因 $u=R_\lambda f$

故 $\|R_\lambda f\|_2 \le \frac{1}{\lambda-\gamma}\|f\|_2$ $\quad \forall f\in L^2$ $\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\quad \forall\lambda>\gamma$. □

Rmk: 半群方法提供了形如 (*) 方程构造解的途径. 但 a^{ij}, b^i, c 要与 t 无关.

II 对双曲方程

$$(**)\quad \begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u(0)=g \quad \partial_t u(0)=h. & \text{in } U. \end{cases}$$

$L=-\sum_{i,j}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)+cu$. $\quad c\ge 0$. $\quad a^{ij}=a^{ji}$.

令 $v=\partial_t u$

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_t v = -Lu & \text{in } U_T. \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u(0)=g & \text{in } U. \\ v(0)=h & \end{cases}$$

如何选择 A?

- $\exists \beta>0$ $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]$ $\forall u \in H_0^1$

- Take $X = H_0^1 \times L^2$

$$\|(u,v)\|_X := \sqrt{B[u,u] + \|v\|_2^2}$$

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$$

$$A(u,v) := (v, -Lu)$$

类似可证，A 满足 Hille-Yosida Thm

故有

Thm X.6.6:

如上算子 A 生成了 $H_0^1 \times L^2$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}$

□

X.6.3: 实例:

设 Φ 是热方程的基本解，即 $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$\forall t>0$，令

$$[S(t)g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$S(0)g = g$

则: $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

~~Check~~:

· $S(t)$ 是 L^2 上的压缩半群

· $\|S(t)g\|_{L^2} = \|\Phi * g\|_{L^2}$

$$\le \|\Phi\|_{L^1}\|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(t)\| \le 1.$$

· $\widehat{S(t+s)g} = \cancel{\widehat{\Phi(x-y,t+s)} * g}\,(\xi)$.

$\widehat{\Phi}(\xi, t+s)\,\widehat{g}(\xi)$.

$$= \widehat{\Phi}(\xi,t)\,\widehat{\Phi}(\xi,s)\,\widehat{g}(\xi) = \widehat{S(t)S(s)g}$$

· $t \mapsto S(t)g$ 连续性:

$\|S(t+h)g - S(t)g\|_{L^2} \le \|S(h)g - g\|_{L^2}$.

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,h)\,g(y)\,dy - g(x) \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,h)\,(g(y)-g(x))\,dy \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,h)\,(g(x-y)-g(x))\,dy \right\|_{L^2_x}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,h)\,\|g(x-y)-g(x)\|_{L^2_x}\,dy.$$

$\downarrow 0$ (平移连续性).

$\xrightarrow{DCT} 0$.

· $S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩半群，因在 $t=0$ 处不连续

令 $g(x) = \chi_{\{x>0\}}$, $g(0)=0$

$$(S(t)g)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dy. \qquad (S(t)g)(0) = \frac{1}{2} \quad \forall t>0$$

$\Rightarrow \|S(t)g - g\|_{L^\infty} \ge \frac{1}{2}$ $\square$.

· 热方程 C^∞ 正则性:

Lemma 7.6.7: 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

归纳定义 $D(A^k):=\{u\in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u\in D(A)\}$ $(k\geq 2)$

证明:若 $\exists k$. $u\in D(A^k)$. 则 $\forall t\geq 0$ $S(t)u\in D(A^k)$

Pf: $\forall j\in\{1,2,\dots,k-1\}$. 要证: $A^j S(t)u\in D(A)$.

i.e. $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)A^jS(t)u-A^jS(t)u}{s}$ $\exists$

$$\frac{S(s)A^jS(t)u-A^jS(t)u}{s}$$

$$=\frac{S(s)S(t)A^ju-S(t)A^ju}{s}$$

$$=\frac{S(t+s)(A^ju)-S(t)(A^ju)}{s}$$

归纳假设 $A^ju\in D(A)$.

$\Rightarrow$ exists (以及 $S(0)=Id$).

□

Prop 7.6.8: $X=L^2$. 若 u 是 $\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u(0)=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$ 的

半群解. $(g\in C_c^\infty(U))$. 则 $u(\cdot,t)\in C^\infty(U)$, $\forall 0\leq t\leq T$.

Pf: ~~$\forall k\in\mathbb{N}$ 注意到~~.

半群解: $u(x,t)=e^{t\Delta}g=:S(t)g$.

由: $\forall k\in\mathbb{N}$. $D(\Delta^k)=H_0^{2k}$ (Take $A=\Delta$).

由 lem 7.6.7 知 $\forall t\geq 0$. $u(\cdot,t)=S(t)g\in H_0^{2k}(U)$. $\forall k$

$\Rightarrow u\in C^\infty$

□

§7.7 常系数线性发展方程的Fourier方法：Strichartz估计

7.7.1：Schrödinger方程的Strichartz估计（非端点）

考虑 (*) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0) = g & \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases}$

若 u, f, g 均是Schwartz函数，则由Fourier变换法可得：($f=0$)

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}(\xi).$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}\right)^{\vee}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}} g(y)\,dy =: e^{it\Delta}g.$$

$f \neq 0$ 时，由Du'Hamel原理

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{it\Delta}g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds.$$

若 f 是非线性函数 $f(x,t,u)$，则原方程化作积分方程

即 $$u(t,x) = e^{it\Delta}g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x,u,s)\,ds.$$

因此，要对Schrödinger方程的解进行估计，尤其是需要对半线性、非线性Schrödinger方程的适定性/长时间行为进行研究时，我们应分别搞清楚 $\begin{cases} e^{it\Delta}g \text{ 项} \\ \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \text{ 项} \end{cases}$ 的 $L^q_t L^r_x$ 范数的估计，此为Schrödinger方程最基本的时空估计。

在叙述结果之前，我们先证明一个简单的衰减估计.

Lemma 7.7.1 (Schrödinger 方程衰减估计).

$\cancel{\forall 2\le q}\ \forall r\in[2,+\infty]\quad \|e^{it\Delta}g\|_{L^r_x}\lesssim t^{-d(\frac12-\frac1r)}\|g\|_{L^{r'}_x}$

Proof: 由 $\{e^{it\Delta}\}$ 是酉算子知. $e^{it\Delta}: L^2\longrightarrow L^2$ with bdd $=1$.

又: $e^{it\Delta}g(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac d2}}e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}}g(y)dy.$

$$|e^{it\Delta}g(x)|\lesssim t^{-\frac d2}\|g\|_{L^1}.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\Delta}g\|_{L^\infty}\lesssim t^{-\frac d2}\|g\|_{L^1}$$

故: $e^{it\Delta}: L^1\longrightarrow L^\infty$ with bdd $\lesssim t^{-\frac d2}$.

由 Riesz-Thorin 插值. 有 $\forall r\geq 2$.

$$\|e^{it\Delta}g\|_{L^r}\lesssim t^{-d(\frac12-\frac1r)}\|g\|_{L^{r'}}.$$

□

下设 $d\in\mathbb{Z}_+$. $2^*=\frac{2d}{d-2}$. $(q,r)\neq(2,2^*)$.

我们证明所谓"非端点" Strichartz 估计.

Thm 7.7.2 (Strichartz).

设 q.r 满足 $\frac2q+\frac dr=\frac d2$ (称作"容许对", admissible pair).

$(q,r,d)\neq(2,\infty,2)$. $(q,r)\neq(2,2^*)$.

则: (1) $\left\|\int_{\cancel{\mathbb{R}}\,0}^{t}e^{i(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{L^2_x}\lesssim\|f\|_{L^{q'}_tL^{r'}_x}$.

(2) $\cancel{\|\int}\ \|e^{it\Delta}f\|_{L^q_tL^r_x}\lesssim\|f\|_{L^2}$.

(3) $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{L^q_tL^r_x}\lesssim\|f\|_{L^{\tilde q'}_tL^{\tilde r'}_x}$.

(q,r), $(\tilde q,\tilde r)$ 是任何上述容许对.

"$'$" 代表 dual index.

在证明之前我们不加证明地给出如下引理，该引理将 $\int_0^t$ 的估计化作 $\int_{\mathbb{R}}$ 的估计.

Lemma 7.7.2 (Christ-Kiselev 引理).

设 Y, Z 是Banach空间, $K(t,s)$ 是取值于 $\mathcal{L}(Y,Z)$ 的连续函数. $-\infty\le a\le b\le+\infty$. $Tf(t)=\int_a^b K(t,s)f(s)\,ds$.

设 $\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)}\le C\|f\|_{L^p((a,b);Y)}$.

令 $Wf(t)=\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds$ 则 $1\le p<q\le\infty$ 时

$$\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)}\le\frac{2^{-2(\frac1p-\frac1q)}\cdot 2C}{1-2^{-(\frac1p-\frac1q)}}\|f\|_{L^p((a,b);Y)}$$

令 $a=-\infty$. $b=+\infty$

$K(t-s)=e^{it\Delta}$

$Z=L^r$. $Y=L^{r'}$ 即可. □

Proof of Thm 7.7.1:

先证明 $\tilde{q}=q$, $r=\tilde{r}$ 的情形

(1) $\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds\right\|_{L_t^qL_x^r}$.

广义Minkowski

$$\le\left\|\int_{\mathbb{R}}\|e^{i(t-s)\Delta}f(s)\|_{L^r}\,ds\right\|_{L_t^q}$$

衰减估计

$$\lesssim\left\|\int_{\mathbb{R}}|t-s|^{-d(\frac12-\frac1r)}\|f(s)\|_{L^{r'}}\,ds\right\|_{L_t^q}$$

$$=\left\|\,|\cdot|^{\overbrace{-d(\frac12-\frac1r)}^{}}_{\underset{\sigma}{\shortparallel}}*\|f(\cdot)\|_{L^{r'}}\right\|_{L_t^q}$$

Hardy-Littlewood-Sobolev不等式 $\||\cdot|^{-\sigma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$, $0<\sigma<d$. $\frac1q+1=\frac1r+\frac{\sigma}{d}$

$\lesssim\|f\|_{L_t^\lambda L_x^{r'}}$ 而 $\begin{cases}\frac{\sigma}{d}+\frac1\lambda=1+\frac1q\\ \sigma=d(\frac12-\frac1r)\end{cases}\Rightarrow\lambda=q'$

一般地：

(1): $$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\right\|_{L_x^2}^2$$

$$= \left\|\int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds\right\|_{L_x^2}^2$$

$$= \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds,\ \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(t)\, dt \right\rangle$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}} \left\langle e^{-is\Delta} f(s),\ e^{-it\Delta} f(t) \right\rangle_x ds\, dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\langle f(s),\ \overline{\int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt} \right\rangle_x ds.$$

Mixed-Norm Hölder $\le \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \left\| \int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_t^{q} L_x^{r}}$

(3) 在 $q=\tilde{q}$, $r=\tilde{r}$ 时的情形 $\lesssim \|f\|^2_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$

(2). $$\|e^{it\Delta} g\|_{L_t^q L_x^r(I\times\mathbb{R}^d)}.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}\le 1} \left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (e^{it\Delta} g)(t,x)\, \overline{h(t,x)}\, dx\, dt \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}\le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle e^{it\Delta} g,\ h\rangle_x\, dt \right|.$$

$$= \sup_h \left| \cancel{\int_{\mathbb{R}}} \left\langle g.\ \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)} \right\rangle_x \cancel{dt} \right|$$

$$\le \sup_h \|g\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h \right\|_{L^2}.$$

$$\overset{(1)}{\lesssim} \sup_h \|g\|_{L^2} \|h\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}} \le \|g\|_{L^2}.$$

(3) $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_t^q L_x^r}$

$$\le \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\, h(t,x)\, dx\, dt \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left| \underline{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle e^{i(t-s)\Delta} f(s)}, h(t) \rangle_x\, dt\, ds \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)\, dt \right\rangle_x \right|.$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_x^2}.$$

$$\overset{(2)}{\lesssim} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \le 1} \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}.$$

□.

借此，我们证明半线性次临界 Schrödinger 方程，

其 H^1 强解的 Local-Wellposedness.

X.X.2: Local well-posedness of subcritical NLS ~~semi~~ in $d \ge 3$.

~~何为 subcritical?~~

~~Endpoint case: $2 \le p \le \frac{2d}{d-2}$.~~

~~在证明中有一步要求: $\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$:~~

Consider (NLS) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times I. \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) & \cancel{\text{in } H^s(\mathbb{R}^d)} \end{cases}$

那么:

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0 \underset{H^1}{-} i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(|u|^{p-1}u\right)(s)\,ds \quad \cdots \quad (*)$$

Thm 7.7.2: (LWP for subcritical NLS in $d\geq 3$).

$0<p-1<\frac{4}{d-2}$ 时. NLS在$H^1(\mathbb{R}^d)$中局部适定. 即解∃, !, 对初值连续依赖.

证明之前. 我们不加证明地给出要用的引理:

Lemma 7.7.3:

$f(u)=|u|^{p-1}u$. 则 $|f(u)-f(v)| \lesssim_p |u-v|\left(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)$.

$|\nabla f(u)| \lesssim |u|^{p-1}|\nabla u|$

In fact. this can be derived by the local Lipschitzian property of f.

□

lemma 7.7.4:

X, Y是Banach空间. X自反. $X\hookrightarrow Y$. ~~其中~~ $1<p,q\leq\infty$

· f_n在$L^p(I,Y)$中一致有界

· $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ in Y. for a.e. $t\in I$.

则 $f\in L^p(I,X)$. $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^p}$.

□

Proof of Thm 7.7.2:

Step 1: 局部存在性:

Fix $M,T>0$. (q,r)是容许对.

令 $X=\left\{u\in L^\infty((-T,T);H^1(\mathbb{R}^d))\cap L^q_tW^{1,r}_x \;\middle|\; \begin{array}{l}\|u\|_{L^\infty((-T,T);H^1)}\leq M \\ \|u\|_{L^q_tW^{1,r}_x}\leq M\end{array}\right\}$

$d(u,v)=\|u-v\|_{L^q_tL^2_x}+\|u-v\|_{L^q_tL^r_x}$

希望 (X,d)是完备的度量空间

这只用证 $(X,d) \underset{闭}{\subseteq} L_t^q L_x^r$

设 $\{u_n\} \subset X$ $\quad u_n \to u$ in $L_t^q L_x^r$ $\quad u \overset{?}{\in} X$

注意：u_n bdd in $L_t^q W_x^{1,r} \cap L_t^\infty H_x^1$

$H^1 \hookrightarrow L^r$ $\quad \|u_n(t)\|_{L^r} \le C\|u_n(t)\|_{H^1} \lesssim 1$ a.e.

$\Rightarrow$ ∃ 弱收敛子列 $u_n \rightharpoonup v$ in L^r.

$\Rightarrow u = v$ in $L_t^q L_x^r$. $\cancel{u_n \rightharpoonup v}$

再用 lem 7.7.4 即可.

下面用压缩映射原理证明 Step 1：

令 $J: u \longmapsto e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds$.

要证：$J:(X,d) \to (X,d)$ 是压缩映射

$$\cancel{\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty L_x^2} = \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(f(u)(s) - f(v)(s)\right) ds\right\|_{L_t^\infty L_x^2}}$$

$$\cancel{\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|f(u) - f(v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}}$$

$$\cancel{\overset{\text{lemma}}{\lesssim} C\left\|\left(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)(u-v)\right\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}}$$

先证 $J(X) \subseteq X$

$\forall u \in X$

$$\|Ju\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_t^q W_x^{1,r}} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\langle\nabla\rangle f(u)\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \qquad \langle\nabla\rangle = (1+|\nabla|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\||u|^{p-1}\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}.$$

Hölder

$$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\left\|\,\|u\|_{L^r}^{p-1}\,\|\langle\nabla\rangle u\|_{L^r}\right\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$$

刚才提出要求：

$$\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$\overset{\parallel}{1-\frac{1}{r}} \Rightarrow r = p+1.$$

下面希望 $H^1 \hookrightarrow L^r$ 则由Sobolev嵌入定理知：

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \iff r \leq \frac{2d}{d-2}$$

$$\iff p-1 \leq \frac{4}{d-2} \quad \text{临界指标.}$$

只考虑 $p-1 < \frac{4}{d-2}$，否则要涉及 endpoint Strichartz估计.

接着. 上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left\| 1 \cdot \|u\|^{p-1}_{H^1_x} \|u\|_{W^{1,r}_x} \right\|_{L^{q'}_t(-T,T)}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|u_0\|_{H^1} + \|1\|_{L_t^{(1-\frac{2}{q})^{-1}}} \|u\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} \|u\|_{L^q_t W^{1,r}_x}$$

$$\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\infty} + \left(1-\frac{2}{q}\right).$$

$r < \frac{2d}{d-2}$ 时. $1-\frac{2}{q} > 0$ (subcritical).

上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} M^p$.

Take $M = 2C\|u_0\|_{H^1}$.

$CT^{1-\frac{2}{q}} M^p < \frac{M}{4}$ 时.

上式 $\leq \frac{3}{4}M$.

对 $L^\infty_t H^1_x$ 成立. $\Rightarrow T(X) \subseteq X$.

再证T压缩: $\|Tu - Tv\|_{L^\infty_t L^2_x} \overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} \|f(u)-f(v)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}$

$$\lesssim \left\| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) |u-v| \right\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}$$

$$\overset{\text{同上}}{\leq} CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} + \|v\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} \right) \|u-v\|_{L^q_t L^r_x}$$

$$\leq CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot 2M^{p-1} \cdot d(u,v).$$

换成 $L_t^q L_x^r$ 也对

取 $CT^{1-\frac{2}{q}} M^{p-1} \ll 1$. 再用压缩映像原理即有 $L_t^q L_x^r \cap L_t^\infty L_x^2$ 的 local existence

下证 H^1 中 $\exists!$ 仍对.

$p \le 2$ 要用别的方法, 我们在此略去.

$\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty H_x^1}$ 要估计

$$\lesssim \|\langle\nabla\rangle(|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}} \quad (p>2)$$

$$\overset{同上}{\lesssim} \cancel{CT^{1-\frac{2}{q}}\left(\|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^q L_x^r} + \|\langle\nabla\rangle v\|_{L_t^q L_x^r}\right)\left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}\right)\|u-v\|_{L_t^\infty H_x^1}}$$

$$+ CT^{1-\frac{2}{q}} \|\langle\nabla\rangle(u-v)\|_{L_t^q L_x^r} \cdot \left(\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1}\right).$$

$$\lesssim \underbrace{CT^{\frac{1}{4}} M^2}_{取\alpha<\frac{1}{2}} d(u,v) \quad 即可.$$

Step 2: ~~loc local~~ 对初值连续依赖:

设 $u_{0,n} \to u_0$ in H^1. u_n, u 是以 $u_{0,n}, u_0$ 为初值的解.

则 $u_n \to u$ in $C_t^0 H_x^1$ → 因 u 的表达式自动保证连续性 (控收 A.C.).

$$u - u_n = e^{it\Delta}(u_0 - u_{0,n}) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(f(u) - f(u_n)\right)(s)\,ds.$$

$$\|u-u_n\|_{L_t^q L_x^r} \overset{\text{Strichartz}}{\le} C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L^2} + C\|f(u) - f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L_x^2} + CT^{1-\frac{2}{q}}\left(\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1} + \|u_n\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1}\right)\|u-u_n\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{H_x^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} C(\|u_0\|_{H^1}) \cdot \|u_n - u\|_{L_t^q L_x^r}$$

~~取~~ T 充分小 即 $CT^{1-\frac{2}{q}}C(\|u_0\|_{H^1})<\frac{1}{2}$ 即可.

$L_t^\infty L_x^2$ 也对 下估计 H^1 norm.

$$\nabla u_n - \nabla u = e^{it\Delta}(\nabla u_{n,0} - \nabla u_0) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\nabla(f(u)-f(u_n))ds$$

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2}$$

$$+ C\|\nabla(f(u)) - \nabla f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\lesssim C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1}$$

$$+ C\||u|^{p-1}\nabla(u-u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$+ C\|(|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1})\nabla u_n\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1}$$

$$+ C\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1}\|\nabla u - \nabla u_n\|_{L_t^q L_x^r} T^{1-\frac{2}{q}}$$

$$+ \|(\underline{|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1}})\nabla u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$p>2$. 用中值 Thm.

$1<p\le 2$ $|x|^{p-1}$ Hölder 连续.

$\lesssim |u_n - u|^{p-1}$.

$\to 0$ as $n\to\infty$ (T 充分小).

这样 ~~local well~~ p 局部适定性 完成证明.

□

Remark.

$$(NLS)\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\ \mu=\pm1 \\ u(0)=u_0 & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(1) 半线性Schrödinger的Well-posedness与p, d, μ均有关.

我们在Step1中某步用Hölder时出现了$p-1<\frac{4}{d-2}$.

① 此为"能量次临界"NLS.

$d\geq 3$. 次临界NLS 有H^1 Global Well-posedness.

$d\leq 2$. 需另外做. 因Strichartz估计不一定对.
(主要在endpoint case).

问: 如何 local $\longrightarrow$ global?

Answer: 利用守恒律.

$$E_0(u)=\|u\|_2^2$$

$$E_1(u)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{2\mu}{p+1}|u|^{p+1}\,dx.$$

② Energy-critical?

利用Keel-Tao端点Strichartz估计. 例如$d=3$, $p=5$.
有$L_t^\infty H_x^1\cap L_t^{10}W_x^{1,\frac{30}{13}}$
适定. $\begin{cases}\text{小初值}\Rightarrow \text{global}\\ \text{大初值}\Rightarrow \text{local}\end{cases}$

③ 超临界: 未知.

(2) 关于Strichartz估计.

端点情形: 见: ($d\geq 3$, $d\leq 2$只对径向函数对. 否则有反例).

Marcus Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates, American Journal of Mathematics, 1998.

这要用到 双端点, 三端点插值. 故不作介绍.

(3) 事实上. 不仅有Schrödinger方程有Strichartz估计.
对其它常见的色散方程(KdV, Airy, Wave). 也有结论.
这都是抽象Strichartz估计与插值空间的推论.

□

Thm 7.7.3（抽象 Strichartz 估计）

设 $U(t): L_x^2 \to L_x^2$ 是一族单参数的有界线性算子（一致有界的）．X 自反 Banach．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 在 X，X^* 中稠密．

假设：$\|U(t)U^*(t')f\|_{X^*} \lesssim |t-t'|^{-\gamma}\|f\|_X$．

$$\|U(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(X^*)} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} U^*(t)\Phi(t,\cdot)\,dt\right\|_{L^2} \lesssim \|\Phi\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}X}.$$

证明与 Schrödinger 方程的完全类似．$(U(t)=e^{it\Delta})$．

实际上，这用到的最核心的想法是，

* 设 H Hilbert．Y 自反．

$T: H \to Y$ bdd．$T^*: Y^* \to H$．

若 T 自伴，则 $\|TT^*\|_{Y^*\to Y} = \|T\|_{H\to Y}^2$．

而在 Strichartz 估计中，TT^* 远比 T 容易估计．

□

Corollary：波方程 Strichartz 估计

取 $\gamma=(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$．$s=\frac{d+1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$．$0<\gamma<1$．

则 $\|W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_{x\,2}^{-s,p}} + \|\partial_t W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_2^{-s-1,p}}$

$$\lesssim \|f\|_{\dot{B}_2^{s,2}} + \|g\|_{\dot{B}_2^{-1,2}}.$$

其中 $\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}} := \left\|2^{ks}\|P_k f\|_{L^p}\right\|_{l_k^q}$（$P_k$ 为 Littlewood-Paley 投影）

$W(t)f = \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f}{\sqrt{-\Delta}}$．i.e. $\widehat{W(t)f} = \frac{\sin(t|\xi|)f}{t|\xi|}$．

$\partial_t W(t)f = \cos(t\sqrt{-\Delta})f$．

Proof:

$$\partial_t W(t)\cdot P_k f = \cos(t\sqrt{-\Delta})\, P_k f$$

$$= \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} + e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{2}\, P_k f.$$

而 $e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f := \left(e^{it|\xi|}\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi)}}{\widehat{P_k f}} \right)^{\vee}$

φ为支于$\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$的$C_c^\infty$-bump

$$= \int e^{it|\xi|}\, e^{ix\cdot\xi}\, \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

$$\overset{\eta=2^{-k}\xi}{=} \int e^{i2^k t|\eta|}\, e^{i2^k x\eta}\, \varphi_0(\eta)\, \hat{f}(2^k\eta)\, 2^{kd}\, d\eta$$

$$= \int e^{i2^k t|\eta|}\, e^{i2^k x\eta}\, \widehat{P_0 f(2^k\cdot)}\, d\eta.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_{L^1}.$$

对$W(t)f$项:

$$\left\| \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty_x} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} - e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \underbrace{\left\| \frac{P_k}{\sqrt{-\Delta}} g \right\|_{L^1}}_{\approx\, 2^{-k}\|P_k g\|_{L^1}}.$$

故: $\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k}\cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_{L^1}.$

$\| \cdots\cdots \|_{L^2} \lesssim \|P_k f\|_{L^2}.$

By Riesz-Thorin Interpolation:

$$\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)} \|P_k f\|_{L^{p'}}$$

$(2<p<\frac{2d}{d-2})$ 按要求插值 $\theta = \frac{2}{p}$ $\;=\; 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})k}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})} \|P_k f\|_{L^{p'}}$

$\Rightarrow$

$$2^{-\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})k}\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p}$$

$$\lesssim \underset{\substack{\uparrow\\ s(t)}}{2^{-sk}}\, t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|P_k f\|_{L^{p'}}$$

乘以 2^{sk}，取 l_k^2

$$\Rightarrow \Big\| \|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p_x} 2^{ks}\Big\|_{l^2_k} =: \cancel{\|P f\|}\ \|\cos(t\sqrt{-\Delta})\|_{\dot B^{s,p}_2}$$

$$\downarrow$$

$$\lesssim t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{\dot B^{-s,p'}_2}$$

在抽象Strichartz中，对应 $X^* = \dot B^{s,p}_2$ $\nu=(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

□

Rmk: 发展方程的调和分析(Fourier)方法

好处：方便处理导数，与精细正则性，便于构造函数空间。

有众多分析工具可用。

注意：此时不应将导数视作~~微~~差商的极限。

而应视作 $|\nabla|^s f = (|\xi|^s \hat f(\xi))^\vee$.

即在频率空间中视作前面乘以一个多项式乘子。

这样即可刻画分数阶导数。

坏处：变系数难做，涉及2个函数乘积的估计

Other Methods:
- Paraproduct
- Conservation law (例如 Morawetz估计)
- 变分或其它方法