Evans Ch5 Notes (Draft)

章俊彦
PB13001112
zhangjy9610@gmail.com

Prerequisites: 数学分析. 实分析. 泛函分析.

Ch 5 Sobolev 空间

Evans 笔记整理 .

部分定理证明与课堂笔记/课本有出入.

主要参考了: Lawrence C. Evans, R.F. Gariepy : Measure Theory and Fine Properties of Functions, chapter 4.

§5.1 弱导数.

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集

Def: 设 $u, v \in L^1_{loc}(U)$, α 是多重指标, 称 v 为 u 的 α 阶弱导数. 若 $\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx$ $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$.

lemma (弱导数的唯一性). u 的 α 阶弱导数, 若存在, 则唯一. (a.e.)

证明: 设 $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ 均为 U 的 α 阶弱导数.

$$\int_U u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v}\phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

令 $w = v - \tilde{v}$

$$\Rightarrow \int_U w\phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$ 下面只用证 $w \overset{a.e.}{=} 0$ in U.

为此, 引入一族磨光子 $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. ~~$U_\varepsilon = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$~~ 下设 ε 充分小, 使 $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. ($U$ 开, 这必可做到). 固定 $x \in U$

则
$$w(x) = \int_U w(x) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy$$
$$= \int_U (w(x) - w(y)) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy + \underbrace{\int_U w(y)\eta_\varepsilon(y-x) \, dy}_{=0} \quad \text{因 } \eta_\varepsilon \in C_c^\infty(U).$$
$$= \int_{U \cap B(x,\varepsilon)} (w(x) - w(y)) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy.$$

$$\Rightarrow |w(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} |w(x) - w(y)| \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy$$ 其中 $\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, $\int \eta = 1$.

$$\le \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{C}{\varepsilon^n} |w(x) - w(y)| \, dy$$

$$\approx ⨍_{B(x,\varepsilon)} |w(x) - w(y)| \, dy \xrightarrow{a.e.} 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+$$
↑由 Lebesgue 微分定理.

□

§5.2. 索伯列夫(Sobolev)空间.

刻画: L^p 函数的"可微","可积"性

弱导数.

Def (1) $W^{k,p}(U) = \{ u: U \to \mathbb{R} \in L^1_{loc}(U) \mid \forall |\alpha| \le k.\ D^\alpha u \in L^p(U) \}$

$H^k(U) := W^{k,2}(U)$.

(2) $\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p$. $\quad \forall\ 1 \le p \le +\infty$.

(3) $u_m \longrightarrow u$ in $W^{k,p}(U)$. if $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} \to 0$ as $m \to \infty$

$u_m \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$. if $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(V)} \to 0$ as $m \to \infty$ $\forall V \subset\subset U$.

注: 称 $V \subset\subset U$. 若 $\bar{V}$ 紧且 $\bar{V} \subseteq U$, 又称 V 关于 U 相对紧.

(4) $W_0^{k,p}(U) = C_c^\infty(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中~~的模量下~~取闭包.

即: $u \in W_0^{k,p}(U) \iff \exists \{u_m\} \in C_c^\infty(U)$. $u_m \to u$ in $W^{k,p}(U)$.

$\iff u \in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha u = 0$. on ∂U $\forall |\alpha| \le k-1$.

用5.5节的Trace定义.

Example (1) $U = B^\circ(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$. $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ $\quad x \in U - \{0\}$. $\quad \alpha > 0$.

若 $u \in W^{1,p}(U)$. 则须 $\partial_{x_i}u \in L^p$.

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \cdot 2x_i \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$= \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \ne 0).$$

$$\Rightarrow |Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$$

① check $Du(x)$ 是 u 的一阶弱导数.

$\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ 固定 $\varepsilon > 0$.

这里 $\vec{n} = (n_1 \cdots n_n) = \frac{x}{|x|}$

$$\Rightarrow \int_{U - B(0,\varepsilon)} u \phi_{x_i}\, dx = -\int_{U - B(0,\varepsilon)} \partial_{x_i} u\, \phi\, dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \phi\, \underbrace{n^i}_{外(内)向} dS$$

$|Du(x)| \in L^1(U) \Leftrightarrow (\alpha+1) < n$

此时 $\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi n^i \, dS\right| \le \|\phi\|_{L^\infty}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha}\, dS \le C\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$ as $\varepsilon\to 0^+$

$\therefore \int_U u\phi_{x_j}\,dx = -\int_U \partial_{x_j}u\,\phi\,dx.$ $\forall \phi\in C_c^\infty(U)$. $0\le\alpha<n-1$

② $Du\in L^p$?

$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(U) \Leftrightarrow (\alpha+1)p<n.$

从而 $u\in W^{1,p}(U) \Leftrightarrow \alpha < \frac{n-p}{p}$

特别. $p\geq n$ 时 $u\notin W^{1,p}(U)$ □.

Example (2) $\{r_k\}\overset{\text{dense}}{\subset} U = B^\circ(0,1)$ $u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|x-r_k|^{-\alpha} \in W^{1,p}(U)$

$\Leftrightarrow \alpha<\frac{n-p}{p}$ (尽管 u 会在U的稠密集上无界)

□

下面讨论 Sobolev 函数的基本运算.

Thm 5.2.1: $u,v\in W^{k,p}(U)$. $|\alpha|\le k$. 则

(1). $D^\alpha u\in W^{k-|\alpha|,p}(U)$. $D^\beta(D^\alpha u)=D^\alpha(D^\beta u)=D^{\alpha+\beta}u$ $\forall |\alpha|+|\beta|\le k$.

(2) $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 则 $\lambda u+\mu v\in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha(\lambda u+\mu v)=\lambda D^\alpha u+\mu D^\alpha v$. $|\alpha|\le k$.

(3). V 开 $\subseteq U$ $u\in W^{k,p}(V)$

(4) $\zeta\in C_c^\infty(U)$, 则 $\zeta u\in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha(\zeta u)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta\zeta\, D^{\alpha-\beta}u$

(5) ~~f.g. k=1~~ $k=1$时 若还有 $u,v\in L^\infty(U)$ 则 $uv\in W^{1,p}(U)\cap L^\infty(U)$.
$\partial_i(uv)=\partial_i u\cdot v+\partial_i v\cdot u$.

(4)(5) 表明 Sobolev 函数不再完全满足 Leibniz's rule

Sobolev 空间并不一定是个 Banach 代数.

证明：(1) ~ (3) 略.

(4)：对 $|\alpha|$ 归纳：

$|\alpha|=1$ $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$.

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx = \int \Big(\underbrace{D^\alpha(\zeta\phi)}_{\in C_c^\infty(U)} - D^\alpha\zeta\cdot\phi\Big)\cdot u \, dx.$$

捆一起

因 $\zeta\phi \in C_c^\infty(U)$，故 leibniz 法则正确.

$$\overset{\text{弱导数定义}}{=} -\int_U \left(\zeta (D^\alpha u)\phi + u (D^\alpha \zeta)\phi\right) dx$$

$$= -\int_U (\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta)\phi \, dx \qquad \therefore |\alpha|=1 \text{ 对.}$$

设 $|\alpha| \le l$ 都对. $l<k$. 则对 $|\alpha|=l+1$ 时. 设 $\alpha=\beta+\gamma$, $|\beta|=l$, $|\gamma|=1$.

则 $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$.

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx = \int_U \underbrace{\zeta u}_{\in W^{l,p}} D^\beta(\underbrace{D^\gamma \phi}_{\in C_c^\infty}) \, dx$$

$$\overset{\zeta u \text{ 的 } \beta \text{ 阶弱导数定义，归纳假设}}{=} (-1)^{|\beta|}\int_U \Big(\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma} D^\sigma\zeta \, D^{\beta-\sigma}u\Big)\cdot D^\gamma\phi \, dx$$

$$\overset{\text{由 } D^\sigma\zeta\cdot D^{\beta-\sigma}u \text{ 的 } \gamma \text{ 阶弱导数定义，归纳假设}}{=} (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_U \sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma} D^\gamma\left(D^\sigma\zeta\cdot D^{\beta-\sigma}u\right)\cdot\phi \, dx$$

$$\underset{\alpha=\beta+\gamma}{\overset{\rho=\sigma+\gamma}{=}} (-1)^{|\alpha|}\int_U \sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left(D^\rho\zeta \, D^{\alpha-\rho}u + D^\sigma\zeta \, D^{\alpha-\sigma}u\right)\phi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_U \Big(\sum_{\sigma\le\alpha}\binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma\zeta \, D^{\alpha-\sigma}u\Big)\phi \, dx.$$

□

(5) $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$. $\operatorname{spt}\phi \subset V \subset\subset U$. $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$. $g^\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$. check

$$\int (\partial_{x_i}\phi) f g \, dx = \int_V f g \phi_{x_i} \, dx \overset{?}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i}$$

$$\overset{\text{需用到 } f^\varepsilon, g^\varepsilon \in C^\infty}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \left(\partial_{x_i} f^\varepsilon g^\varepsilon + f^\varepsilon \partial_{x_i} g^\varepsilon\right)\phi \, dx.$$

$$= -\int_V (\partial_{x_i} f\cdot g + f\cdot\partial_{x_i} g)\phi \, dx$$

$$= -\int_U \left((\partial_{x_i} f)\cdot g + f(\partial_{x_i} g)\right)\phi \, dx$$

check: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i} = \int_V fg\phi_{x_i}\,dx$

$$\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i} - fg\phi_{x_i}\,dx$$

$$= \int_V f^\varepsilon (g^\varepsilon - g)\phi_{x_i}\,dx + \int_V (f^\varepsilon - f) g\phi_{x_i}\,dx.$$

$$\le \cancel{\int_V f^\varepsilon \phi_{x_i}\,dx}\ \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \|f^\varepsilon\phi_{x_i}\|_{L^{p'}(V)} + \|g\|_{L^\infty}\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)}\|\phi_{x_i}\|_{L^{p'}(V)}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$　　把L^∞提出来

$f,g\in L^\infty$ 用在这儿

$\to 0$ as $\varepsilon\to 0^+$.

□

Thm 5.2.2　Sobolev空间 $W^{k,p}(U)$是Banach空间　$1\le p\le\infty$.　$k\in Z_+$.

证明：仅欠证三角不等式与完备性.

(1°) 三角不等式：$u,v\in W^{k,p}(U)$.　~~$D^\alpha u = u_\alpha$~~

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha(u+v)\|_p$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p = \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

(2°) 完备性. 设$\{u_m\}$为$W^{k,p}(U)$中的柯西列. 则各阶弱导数$\{D^\alpha u_m\}$为$L^p(U)$中的柯西列. 因L^p是Banach空间. 则 $\forall\alpha$, $\exists u_\alpha\in L^p(U)$ s.t.

$D^\alpha u_m\to u_\alpha$ in L^p as $m\to\infty$.　$\forall|\alpha|\le k$.

特别地. $u_m\to u$ in $L^p(U)$　($\alpha=0$时).

余下证明：$u\in W^{k,p}(U)$.　$D^\alpha u = u_\alpha$.　$\forall|\alpha|\le k$.

$\forall\phi\in C_c^\infty(U)$

$$\int_U u\cdot D^\alpha\phi \underset{\text{用Hölder}}{=} \lim_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha\phi = \lim_{m\to\infty}\int_U (-1)^{|\alpha|}\,\underset{\sim}{D^\alpha u_m}\cdot\phi\,dx$$

$$\underset{\text{用Hölder}}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_U u_\alpha\phi\,dx.$$

因 $\left|\int_U u_m D^\alpha\phi - \int_U u D^\alpha\phi\right| \le \underbrace{\|u_m-u\|_{L^p}}_{\to 0}\underbrace{\|D^\alpha\phi\|_{L^{p'}}}_{<\infty}$

$\to 0$ as $m\to\infty$

□.

§5.3. Sobolev 函数的光滑逼近.

套路 $\begin{cases} \text{内部：用磨光子作卷积} \\ \quad \text{单位分解(局部化)}. \\ \text{边界：用 } U \text{ 有界开. } \partial U \text{ 紧,} \\ \quad \text{利用有限覆盖. 用} \\ \quad \text{有限个球 盖住边界} \end{cases}$

1. 内部逼近. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开. $k \in \mathbb{Z}_+$

$U_\varepsilon = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$. $1 \le p < \infty$

Thm 5.3.1

$u \in W^{k,p}(U)$. $1 \le p < \infty$. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ in U_ε. 则

(1) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. $\forall \varepsilon > 0$

(2) $u^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$ $\varepsilon \to 0$.

证明: (1) $\cancel{\partial_{x_1} u^\varepsilon =}$ Fix $x \in U_\varepsilon$. h 充分小. $x + he_i \in U_\varepsilon$.

$$\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_V \frac{u(y)}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] dy$$

$(V \subset\subset U, V$开$)$.

由于 $\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \underset{\text{一致}}{\rightrightarrows} \frac{1}{\varepsilon}\partial_{x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$. on V.

从而 $\underbrace{\partial_{x_i} u^\varepsilon(x)}_{\text{经典导数}}$ $\exists$. 且 $= \int_U \partial_{x_i}\eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy = (\partial_{x_i}\eta_\varepsilon * u)(x)$

对任意阶导数 同理. (1) 得证.

(2) Step 1: ~~弱导数也有~~ $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ in U_ε.

因为: $\partial_x^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_U u(y)\, \partial_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, dy$.

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_U u(y)\, \partial_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

$$\overset{\text{弱导数定义}}{=} (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}\int_U \partial_y^\alpha u(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy$$

$$= (D^\alpha u * \eta_\varepsilon)(x). \quad \text{in } U_\varepsilon.$$

Step 2: 逼近. $\forall V\subset\subset U$. $\partial^\alpha u^\varepsilon \to \partial^\alpha u$ in $L^p(V)$. $\forall|\alpha|\le k$

$$\cancel{\partial^\alpha u^\varepsilon(x)} \equiv \|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0$$

□

Thm 5.3.2: (全局逼近, 不到边).

U 有界开. $u\in W^{k,p}(U)$. $1\le p<\infty$. 则 $\exists\, u_m \in \underbrace{C^\infty(U)}_{不同\ C^\infty(\bar U)}\cap W^{k,p}(U)$. s.t. $u^m\to u$ in $W^{k,p}(U)$.

想法: 局部化. 化成 5.3.1, ~~即~~

5.3.1中. U_ε 在 $\varepsilon\to0^+$ 时不断变大 (趋于U).

如何~~利用每~~将每个U_ε的结果, 累加成U上的结果?

将U分解成一堆U_ε 叠在一起 一段一段叠加. → 无穷个叠加, 如何保证光滑性?

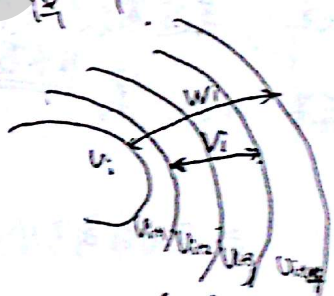
此过程会用到 单位分解 → 单位分解的局部有限性质!

证明:

令 $U_i = \{x\in U \mid \mathrm{dist}(x,\partial U) > \frac1i\}$ $U=\bigcup_{i=1}^\infty U_i$.

$V_i = U_{i+3} - \overline{U_{i+1}}$.

取 $V_0 \subset\subset U$. $U=\bigcup_{i=0}^\infty V_i$.



W_i 比 V_i 多出来的两小段, 是给卷积的支集留空余. 因 $\eta_\varepsilon * f$ 的支集 $\subseteq \mathrm{spt}\,\eta_\varepsilon + \mathrm{spt}\, f$.

设 $\{\zeta_i\}_{i=0}^\infty$ 是 服从于 $\{V_i\}_{i=0}^\infty$ 的单位分解. 即.

$0\le\zeta_i\le1$ $\zeta_i\in C_c^\infty(V_i)$

$\sum_{i=0}^\infty \zeta_i = 1$ on U

每一点的小邻域内, 只有有限个 ζ_i 不为0 ← locally finite!

切令. $\forall\, u\in W^{k,p}(U)$. $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ (by Thm 5.2.1), $\mathrm{spt}(\zeta_i u)\subseteq V_i$. → 这步完成了局部化.

令 $u^i = \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ Fix $\delta>0$. choose $\varepsilon_i>0$ 充分小, 使.

$$\begin{cases} \|u^i - u\zeta_i\|_{W^{k,p}(U)} \le \frac{\delta}{2^{i+1}} & i=0,1,\dots \\ \mathrm{spt}\, u^i \subseteq \underline{W_i} = U_{i+4} - \overline{U_i} \supseteq V_i \end{cases}$$

← 是locally approximate.

如此选取 W_i 的原因如上图.

令 $v=\sum_{i=0}^{\infty} u^i$. $v\in C^\infty(U)$, 因每点局部邻域均是有限和

$\forall V\subset\subset U$. $v=\sum_{i=0}^{\infty} u^i$ 为有限和.

利用 locally finite

从局部 (local)

↓

整体 (global).

而 $u=\sum_{i=0}^{\infty} u\zeta_i$ 则 $\forall V\subset\subset U$.

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(V)} \le \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i-\zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)}$$
$$\le \delta$$

$$\Rightarrow \sup_{V\subset\subset U}\|v-u\|_{W^{k,p}(V)} \le \delta \Rightarrow \|v-u\|_{W^{k,p}(U)} \le \delta.$$

让 δ 取遍 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, 即得一列 $\{u_m\}$

□

Thm 5.3.3 (到边的逼近). 设 U 有界, $\partial U\in C^1$ (Lipschitz 足够.) $u\in W^{k,p}(U)$. $1\le p<\infty$.

则 $\exists u_m\in C^\infty(\bar U)$. s.t. $u_m\to u$ in $W^{k,p}(U)$.

想法: $\bar U$ 的内部, 其逼近已经在 5.3.2 完成. 余下只须估计边界

由 U 有界 $\Rightarrow \partial U$ 紧 $\xRightarrow{\text{有限覆盖}}$ 可以有有限个小开集盖住. (即下面证明中的 $V_1,\dots V_N$).

再用一个大开集 V_0 盖住里面即可.

$\Rightarrow$ 只用在每个小 V_i $(1\le i\le N)$ 上做逼近.

证明: Fix $x^0\in\partial U$. 由于 $\partial U\in C^1$ 知. ~~$\exists r>0$~~. 下面这句话是定义.

$\exists r>0$. $\exists C^1$函数 $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ s.t.

$$U\cap B(x^0, r) = \{x\in B(x^0,r) \mid x_n>\gamma(x_1\dots x_{n-1})\}$$

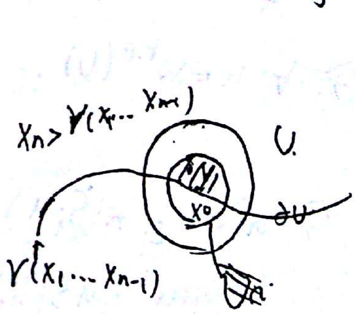
可能交换了坐标顺序

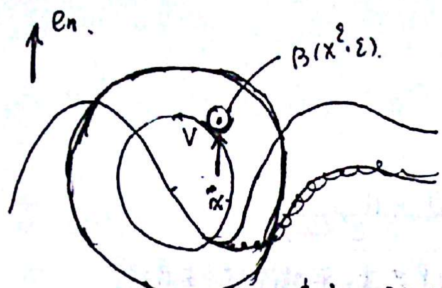
$$V = B(x^0,\tfrac{r}{2})\cap U.$$

令 $x^\varepsilon = x+\lambda\varepsilon e^n$ $x\in V$. $\varepsilon>0$.

则对固定的充分大的 $\lambda>0$. 球 $B(x^\varepsilon,\varepsilon)\subseteq U\cap B(x^0,r)$

$\forall x\in V$. $\forall\varepsilon>0$ 充分小, $x_n \ge \gamma(x_1\dots x_{n-1})$





注: 在 $x^\varepsilon = x+\lambda\varepsilon e^n$ 中. λ,ε 的选取上.

为什么说 λ 要够大?　　例如 $\lambda = \mathrm{Lip}\,\gamma + 2$.

事实上. $\partial U\in C^1$. ∂U 紧 $\Rightarrow \partial U$ Lipschitz, 我们让 λ 比 γ 的Lipschitz const 大一些就行.

边界Lipschitz保证了, 它不会"剧烈振荡", 例如" "

这样. 我们把 x 往上这么"撑" $\lambda\varepsilon e_n$ 这么多, 再把 ε 取小, 就防止了 $B(x^\varepsilon,\varepsilon)$ 跑到 U 外面去.

这为下面用卷积 ~~进行时~~ "腾出了足够多的空间"

下面开始逼近.

令 $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$.

$v^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * u_\varepsilon)(x)$. 则 $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar V)$.

claim: $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

若claim对的话, 我们在"盖住边界的小开集"上, 就完成了逼近, 再把内部估计加上去就好, 具体如下:

取 $\delta>0$, ~~固定~~.

因 ∂U 紧 故存在有限个点 $x_i^0\in\partial U$ $(1\le i\le N)$ $r_i>0$. s.t.

$$\partial U \subseteq \bigcup_{i=1}^N B^\circ\left(x_i^0, \frac{r_i}{2}\right).$$

记 $V_i = U\cap B^\circ(x_i^0,\frac{r_i}{2})$ 则每个 V_i 上. 由claim. 存在 $v_i\in C^\infty(\bar V_i)$ s.t. $\|v_i-u\|_{W^{k,p}(U)}\le\delta$

再取 $V_0\subset\subset U$ s.t. $U\subseteq\bigcup_{i=0}^N V_i$ 把内部包住. 且 $\exists\, v_0\in C^\infty(\bar V_0)$ $\|v_0-u\|_{W^{k,p}(V_0)}\le\delta$

如今 $\{V_0, B^\circ(x_1^0,\frac{r_1}{2}),\dots,B^\circ(x_N^0,\frac{r_N}{2})\}$ 是 $\bar U$ 的有限开覆盖,

设 $\{\zeta_i\}_0^N$ 是服从于如上开覆盖的单位分解. 令 $v=\sum_{i=0}^N v_i\zeta_i \in C^\infty(\bar U)$.

又因 $\sum\zeta_i=1$ 故 $\sum_0^N \zeta_i u = u$　　$\sum\zeta_i v_i = v$.

从而 $\|D^\alpha u - D^\alpha v\|_{L^p(U)} \le \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)}$

$$\le C\sum_{i=0}^N \|v_i-u\|_{W^{k,p}(V_i)} = C(N+1)\delta.$$ √

余下证明claim.

Claim的证明:

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

第2项由L^p范数平移连续性即得.

第一项: 只证 $\alpha=0$ 的 case. 其余类似.

$$v^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) - u(x^\varepsilon).$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)} \eta\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) u(x+\lambda\varepsilon e^n - w)\, dw - u(x+\lambda\varepsilon e^n).$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)} \eta\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)\big(u(x+\lambda\varepsilon e^n - w) - u(x+\lambda\varepsilon e^n)\big)\, dw.$$

$$\overset{w/\varepsilon = z}{=} \int_{B(0,1)} \eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\, dz.$$

$$\|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} = \|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V\cap B(x^0,\frac{r}{2}))}$$

$$= \Big\| \big\|\eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\big\|_{\underset{\text{in } B(0,1)}{L^1_z}} \Big\|_{\underset{\text{in } V\cap B(x^0,\frac{r}{2})}{L^p_x}}$$

$$\overset{\text{积分Minkowski不等式}}{\le} \Big\| \big\|\eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\big\|_{L^p_x} \Big\|_{L^1_z}$$

$$= \Big\| \eta(z)\, \|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \Big\|_{L^1_z}$$

$$= \int_{B(0,1)} |\eta(z)| \cdot \|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x}\, dz.$$

$\varepsilon \to 0^+$ 时. 由 L^p norm 平移连续性 $\|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \to 0$.

又: $\left.\begin{array}{l} \|\eta(z)\|_{L^\infty} = 1 \\ \|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \le 2^p \|u\|_{L^p_x} < \infty \end{array}\right\}$ 所以. 由控制收敛定理 知. 上式积分 $\to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$. □

claim的证明 ~~由直接计算可得~~

~~$\forall |\alpha| \le k$~~

$$\cancel{\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}}$$

~~由 L^p 函数平移连续性即得~~

~~Thm 5.2.1 得~~

~~$\to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$~~

下面讨论Sobolev函数的链式法则，证明中常用这些结果 □

Thm 5.3.4 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开，$1 \le p \le +\infty$.

(1) 若 $f \in W^{1,p}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, ~~$F(0)=0$~~ 则 $F(f) \in W^{1,p}(U)$.（U无界要 $F(0)=0$.）

且 $\partial_{x_i} F(f) = F'(f)\,\partial_{x_i} f$ $\mathcal{L}^n$-a.e. $1 \le i \le n$.

(2) 若 $f \in W^{1,p}(U)$，则 $f^{\pm}, |f| \in W^{1,p}(U)$. 且

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f>0\} \\ 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f \le 0\} \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f \ge 0\} \\ -Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f<0\} \end{cases}$$

(3) $Df = 0$ on $\{f=0\}$ $\mathcal{L}^n$-a.e.

证明：(1) 设 $\phi \in C_c^\infty(U)$, $\operatorname{spt}\phi \subseteq V \subset\subset U$, $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$.

$$\int_U F(f)\phi_{x_i}\,dx = \int_V F(f)\phi_{x_i}\,dx$$

check: $\left|\int_V (F(f^\varepsilon) - F(f))\phi_{x_i}\,dx\right| \le \int_V \|F'\|_\infty |f^\varepsilon - f| \cdot |\phi_{x_i}|\,dx \le \|F'\|_\infty \|f^\varepsilon - f\|_{L^p} \|\phi_{x_i}\|_{L^{p'}} \to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$ in V.

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_V F(f^\varepsilon)\phi_{x_i}\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_V F'(f^\varepsilon)\,\partial_{x_i} f^\varepsilon \cdot \phi$$

分部积分

$$= -\int_V F'(f)\,\partial_{x_i} f \cdot \phi\,dx = -\int_U F'(f)(\partial_{x_i} f)\phi\,dx.$$

类似 5.2.189(5) check

抽一项出去

$|F(f) - F(0)| \le \|F'\|_{L^\infty} |f|$ $\overset{f \in W^{1,p}}{\Longrightarrow}$ $F(f) - F(0) \in L^p$.

若 $F(0)=0$ 或 $\mathcal{L}^n(U) < \infty \Rightarrow F(f) \in L^p$

又：$\partial_i F(f) = F'(f)\,\partial_i f \in L^p \Rightarrow F(f) \in W^{1,p}$.

(2). Fix $\varepsilon>0$. 令 $F_\varepsilon(r)=\begin{cases}\sqrt{r^2+\varepsilon^2}-\varepsilon & r\geq 0\\ 0. & r<0\end{cases}$

则 $F_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R})$. $F_\varepsilon'\in L^\infty(\mathbb{R})$.

故由(1). $\forall\phi\in C_c^\infty(U)$.

$$\int_U F_\varepsilon(f)\,\partial_{x_i}\phi\,dx=-\int_U F_\varepsilon'(f)\,\partial_{x_i}f\cdot\phi\,dx$$

$$\varepsilon\to 0.\quad \int_U f^+\phi_{x_i}\,dx=-\int_{\underbrace{U\cap\{f>0\}}_{\leq 0\text{ 部分不起作用}}}\partial_{x_i}f\,\phi$$

故(2)的 Df^+ 得证.

而 $f^-=(-f)^+$. $|f|=f^++f^-$ 故其余可得.

(3) 由(2)立得. □

~~另一个利用逼近的例子如~~下:

~~Thm 5.3.5 (Lipschitz = $W^{1,\infty}$)~~.

~~设 $f:U\to\mathbb{R}$~~.

§5.4 迹.

设 $\partial U\in Lip$ (or C^1). $u\in W^{1,p}(U)$.

· 若 $u\in C(\bar U)$ 则 $u|_{\partial U}$ 是有定义的. 但若 $u\in W^{1,p}(U)$. 由于 $\mathcal{L}^n(\partial U)=0$. 我们直接谈论 $u|_{\partial U}$ 没有意义. 但迹定理保证了其在积分式中的意义.

Thm 5.4.1. U bdd 开. ∂U Lipschitz $1\leq p<+\infty$

(1) $\exists$ 有界线性算子 $T: W^{1,p}(U)\longrightarrow L^p(\partial U;\underbrace{\mathcal{H}^{n-1}}_{\partial U\text{上的 }n-1\text{ 维 Hausdorff 测度}})$. s.t. $Tf=f$ on ∂U. $\forall f\in W^{1,p}(U)\cap C(\bar U)$

(2) 进一步地, $\forall\phi\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. $f\in W^{1,p}(U)$. 有.

$$\int_U f\,\mathrm{div}\phi\,dx=-\int_U Df\cdot\phi\,dx+\int_{\partial U}(\phi\cdot\underbrace{\vec n}_{\partial U\text{的单位外法向}})Tf\cdot d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(分部积分公式推广).

Def: 如上的 Tf 称作 f 在 ∂U 上的迹, 其~~定义~~取值域可以在 $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial U$ 零测的意义下修改.

Rmk: 事实上, $\forall\ \mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $x\in\partial U$,

$$\fint_{B(x,r)\cap U}|f-Tf(x)|\,dy\to 0 \quad \text{as } r\to 0.$$

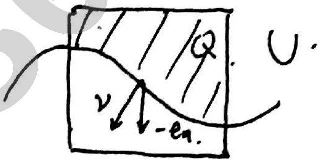
从而 $Tf(x)=\lim\limits_{r\to 0}\fint_{B(x,r)\cap U} f\,dy$ (证明需用 Coarea Formula. 见 Evans 的 ~~Measure~~ Measure Theory and Fine Properties of Functions, Ch Section 5.3).

证明: 先设 $f\in C^1(\bar U)$. 由 $\partial U\in \mathrm{Lip}$ 知, $\forall x\in\partial U$, $\exists r>0$, $\exists$ Lip 函数 $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$

使得 $U\cap Q(x,r)=\{y\mid \gamma(y_1\cdots y_{n-1})<y_n\}\cap Q(x,r)$. ($x$ 为中心, r 为边长的方体.)

记 $Q=Q(x,r)$.

若有 $f\equiv 0$ on $U-Q$. 注意到



~~$-e_n\cdot\nu\geqslant\left(1+(\mathrm{Lip}\,\gamma)^2\right)^{-\frac12}$~~

$$-e_n\cdot\nu=\cos\langle -e_n,\nu\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\langle -e_n,\nu\rangle}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{Lip}\,\gamma)^2}}\quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. on } Q\cap\partial U \quad\cdots(*)$$

固定 $\varepsilon>0$, 令 $\beta_\varepsilon(t)=\sqrt{t^2+\varepsilon^2}-\varepsilon$, $t\in\mathbb{R}$.

则
$$\int_{\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,d\mathcal{H}^{n-1}=\int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,d\mathcal{H}^{n-1}\overset{\text{由}(*)}{\leq} C\int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)(-e_n\cdot\nu)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$=C\int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)\cdot(-\nu^n)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\overset{\text{Gauss-Green}}{=}-C\int_{Q\cap U}\partial_{y_n}(\beta_\varepsilon(f))\,dy\leq C\int_{Q\cap U}|\beta_\varepsilon'(f)|\cdot|Df|\,dy$$

$$\overset{|\beta_\varepsilon'|\leq 1}{\leq} C\int_U|Df|\,dy$$

$\varepsilon\to 0^+$ 由 $f\in C^1$ 知 $\int_{\partial U}f\,d\mathcal{H}^{n-1}\leq C\int_U|Df|\,dy$

若 $f\neq 0$ in $U-Q$. 我们将 ∂U 用有限个小方块覆盖，类似于逼近到边的定理（用单位分解）.

有 $\int_{\partial U}|f|\,d\mathcal{H}^{n-1}\leq C\int_U |Df|+|f|\,dy.\quad \forall f\in C^1(\bar{U})$

$1<p<\infty$ 时　$|f|$ 换成 $|f|^p$

$$\int_{\partial U}|f|^p\,d\mathcal{H}^{n-1}\leq C\int_{U} |Df|\cdot|f|^{p-1}+|f|^p\,dy$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} C\int_U |Df|^p+|f|^p\,dy\quad \forall f\in C^1(\bar{U}).$$

如今, $\forall f\in C^1(\bar{U})$, 令 $Tf=f|_{\partial U}$ 即为所求之迹.

对 $f\in W^{1,p}(U)$. 上述 $C^1(\bar{U})\to L^p(\partial U;\mathcal{H}^{n-1})$ 可连续延拓为

$W^{1,p}(U)\to L^p(\partial U;\mathcal{H}^{n-1})$ 的有界线性算子（由逼近到边）+B.L.T.定理.

且 $Tf=f|_{\partial U}\quad \forall f\in W^{1,p}(U)\cap C(\bar{U})$.

从而 (1) 获证

(2) 用一列 $\{f_m\}$ ~~$\in C^1(\bar{U})$~~ $\in C^1(\bar{U})$ 逼近 即可.

对 f_m, 由散度定理即有

$$\int_U f_m\,\mathrm{div}\phi\,dx=-\int_U Df_m\cdot\phi\,dx+\int_{\partial U}(\phi\cdot\nu)Tf_m\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$m\to\infty$ 时, 估计:

$$\left|\int_U f_m\,\mathrm{div}\phi-\int_U f\,\mathrm{div}\phi\right|\leq\int_U|f_m-f||\mathrm{div}\phi|$$

$$\leq\|f_m-f\|_{L^p}\|\mathrm{div}\phi\|_{L^{p'}}\to 0.$$

其式右边同理. Tf 那项 in L^p norm 利用 $\|Tf\|_{L^p(\partial U)}\leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$ 控制.

□

Thm 5.4.2. U bdd. $\partial U \in C^1$

$u \in W^{1,p}(U)$. 则 $u \in W_0^{1,p}(U) \Leftrightarrow Tu=0$ on ∂U. (零迹定理).

证明: $\Rightarrow$. $u \in W_0^{1,p}(U)$

则 $\exists\, u_m \in C_c^\infty(U)$ ② $u_m \to u$ in $W^{1,p}(U)$

$Tu_m = 0$ on ∂U

又因 $T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ 有界. 故 $Tu=0$.

$\Leftarrow$: $Tu=0$ on ∂U.

~~①边界拉直~~: 不妨直接设 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, 且紧支于 $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

$\left\{ Tu=0 \right.$ on $\partial \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$.

故 $\exists\, u_m \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. s.t. $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ ← 逼近定理

$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$

如今. 若 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \geq 0$.

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x',0)| + \int_0^{x_n} |\partial_{x_n} u_m(x',t)|\, dt.$$

p次方. 积分

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',x_n)|^p dx' \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p dx' \cancel{+ x_n^{p-1} \int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x',t)|^p dx'dt} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^{x_n} |\partial_{x_n} u_m(x',t)|\, dt\Big)^p dx' \Big)$$

积分Minkowski

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p dx' + C\Big(\int_0^{x_n} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_{x_n} u_m(x',t)|^p dx'\Big)^{\frac{1}{p}} dt\Big)^p$$

Hölder

$$\leq (\qquad\qquad) + C.\Big(\int_0^{x_n} 1^{p'}\Big)^{\frac{p}{p'}} \Big(\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_{x_n} u_m(x',t)|^p dx' dt\Big)^{\frac{p}{p}}$$

$$= C\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x',t)|^p dx' dt\Big)$$

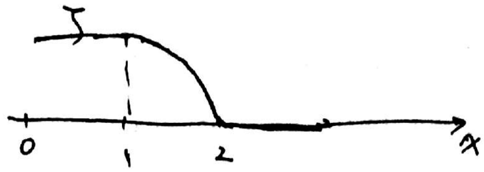
$m \to +\infty$ 有 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dt$.

$\cdots (*)$ a.e. $x_n > 0$

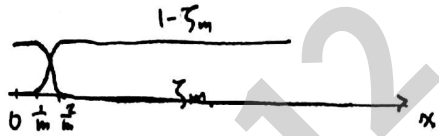
下面 设 $\zeta\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ s.t. $\zeta=1$ on $[0,1]$

$=0$ on $(2,+\infty)$.

$0\le\zeta\le 1$.



$$\begin{cases}\zeta_m(x):=\zeta(m\,x_n). & x\in\mathbb{R}^n_+ \\ w_m=u(x)(1-\zeta_m)\end{cases}$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\partial_{x_n}w_m=\partial_{x_n}u(1-\zeta_m)-mu\zeta' \\ D_{x'}w_m=D_{x'}u(1-\zeta_m)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^n_+}|Dw_m-Du|^p\le C\int_{\mathbb{R}^n_+}|\zeta_m|^p|Du|^p\,dx\longrightarrow I_1$$

$$+Cm^p\int_0^{\frac{2}{m}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u|^p\,dx'\,dt\longrightarrow I_2.$$

$m\to\infty$ 时 $I_1\to 0$. 因为 $\zeta_m\ne 0$ on $[0,\frac{2}{m}]\ni x_n$.

$$I_2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{用}(*)}}{\le} C\underbrace{m^p\left(\int_0^{\frac{2}{m}}t^{p-1}dt\right)}_{\text{消去了}}\left(\int_0^{\frac{2}{m}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'\,dx^n\right).$$

$$\le C\,\ell\int_0^{\frac{2}{m}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'\,dx_n\longrightarrow 0.\qquad\text{as } m\to\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{从而 } Dw_m\longrightarrow Du \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n_+). \\ \text{又 } w_m\longrightarrow u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n_+)\end{array}\right\}\Rightarrow w_m\longrightarrow u \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

~~又 $w_m=0$ $(0<x_n<$~~

但 $0<x_n<\frac{1}{m}$ 时 $w_m=0$. u_m 12是 $W^{1,p}$ 光滑. 再 令 $u_m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ 为 w_m 的光滑逼近即可. (用对角线法则).

这样 $u_m\to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ $\Rightarrow u\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$

$\square$.

§5.5 延拓

$1\le p\le\infty$　　U 有界开

Thm 5.5.1　$\partial U\in C^1$. 设 V 为有界开集 $U\subset\subset V$. 则存在有界线性算子

$$E: W^{1,p}(U)\to W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

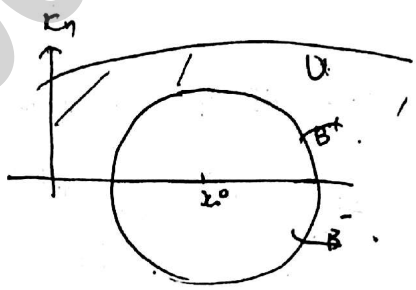
s.t. $\forall u\in W^{1,p}(U)$,
$$\begin{cases}(1)\ Eu=u \text{ a.e. in } U.\\ (2)\ \operatorname{spt} Eu\subseteq V.\\ (3)\ \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.\end{cases}$$

证明:

Step 1: 边界拉直的局部情况

Fix $x^0\in\partial U$. 并设 ∂U 在 x^0 的附近平坦, 含于 $\{x_n=0\}$

设 $\exists$ 开球 B, 以 x^0 为中心, r 为半径. s.t. $\begin{cases}B^+=B\cap\{x_n\ge 0\}\subseteq\bar U\\ B^-=B\cap\{x_n\le 0\}\subseteq\mathbb{R}^n-U\end{cases}$



先设 $u\in C^1(\bar U)$.

令 $\bar u(x)=\begin{cases}u(x) & x\in B^+\\ -3u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)+4u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2}) & x\in B^-\end{cases}$

claim: $\bar u\in C^1(B)$. 只须计算 $\{x_n=0\}$ 处的导数.

设 $u^\pm:=\bar u|_{B^\pm}$.

$$\partial_{x_n}u^-(x)=3\partial_{x_n}u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)-2\partial_{x_n}u(x_1,\dots,x_{n-1},-\tfrac{x_n}{2})$$

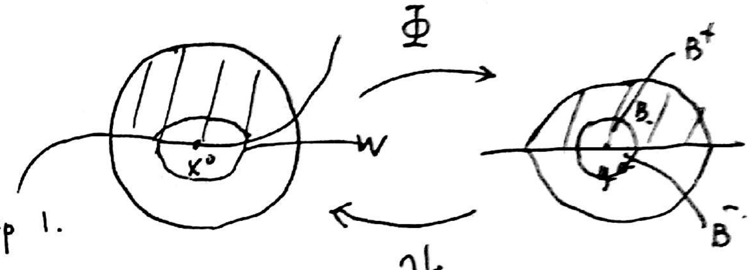
$\Rightarrow$ on $\{x_n=0\}$ $\begin{cases}\partial_{x_n}\bar u(x)=\partial_{x_n}u^+(x)\\ u^+=u^-\\ \partial_{x_i}u^+=\partial_{x_i}u^-\end{cases}$ $\boxed{\text{in } \{x_n=0\}}$ $\Rightarrow$ $u\in C^1(B)$.

$$\Rightarrow \|\bar u\|_{W^{1,p}(B)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

Step 2: 拉回去. 若对一般的 $\partial U\in C^1$, 则 $\exists$ C^1 mapping Φ, 其逆为 Ψ. s.t. Φ 将 ∂U 在 x^0 附近拉直.

令 $y=\Phi(x)$, $x=\Psi(y)$ $u'(y)=u(\Psi(y))$

取 B B^+, B^- 如右图



则 u' 可从 B^+ 上延拓到 B 上，成为 $\bar{u}'$. 且 $\bar{u}'\in C^1$ by step 1.

且 $\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \le c\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$

令 $W=\Psi(B)$. 则 u 可延拓到 W 上，成为 $\bar{u}$. $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(W)}$

(注：成立这样不讨论是因为)

Step 3: ~~延拓到 R~~ 考虑整个 ∂U (局部 → 整体). (套路：单位分解).

因 ∂U 紧，则 $\exists\, x_1^0,\dots,x_N^0\in\partial U$，开集 $W_1,\dots,W_N$,

s.t. u 在 W_i 上的延拓为 $\bar{u}_i$

$\partial U\subseteq\bigcup_{i=1}^N W_i$

再取 $W_0\subset\subset U$ s.t. $U\subseteq\bigcup_{i=0}^N W_i$

设 $\{\zeta_i\}_0^N$ 是服从于 $\{W_i\}_0^N$ 的 P.O.U. 令 $\underline{\bar{u}=\sum_{i=0}^N\zeta_i\bar{u}_i}$ $(\bar{u}_0=u)$ 希望这是所求

$\Rightarrow \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

且 $\exists V$, $\mathrm{spt}\,\bar{u}\subset V\supset\supset U$.

Step 4: 逼近：以上. 令 $Eu=\bar{u}$，即得到了 $u\in C^\infty(\bar{U})$

已假设 $1\le p<+\infty$ 则 $\|Eu_m-Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le c\|u_m-u_l\|_{W^{1,p}(U)}$

$\forall u\in W^{1,p}(U)$ $\exists\, u_m\to u$ in $W^{1,p}(U)$
$u_m\in C^\infty(\bar{U})$

$\Downarrow$

故 $Eu_m\longrightarrow\bar{u}=:Eu$.
不依赖 u_m 选取. □

~~p=∞: 利用 $W^{1,\infty}$ = Lipschitz 证~~.
~~见 Measure Theory and Fine Properties of Functions~~.

Rmk: $k\ge 2$ 时 以上构造不适用.

§5.6. Sobolev 嵌入

Gagliardo Sobolev 不等式 $1\le p<n$ 时

能否找到 $q\in[1,\infty)$. s.t. $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Motivation: 如何确定 q ? ⟶ 套路: scaling invariant

choose $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$u\ne 0$

对 $\lambda>0$. 令 $u_\lambda(x)=u(\lambda x)$ $\quad x\in\mathbb{R}^n$.

对 $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Du_\lambda|^p dx = \lambda^p\int_{\mathbb{R}^n}|Du(\lambda x)|^p dx = \lambda^{p-n}\int_{\mathbb{R}^n}|Du(y)|^p dy.$$

对 λ $\|u\|_q\le C\|Du\|_p$. 有

$$\|u\|_{L^q}\le C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

希望不能依赖于 λ

$$\Rightarrow 1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0. \quad \Rightarrow \quad q=\frac{np}{n-p}=:p^*.$$

Thm 5.6.1 (Gagliardo – Nirenberg – Sobolev 不等式)

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \qquad \forall u\in C_c^1(\mathbb{R}^n) \qquad 1\le p<n.$$

证明: 先证 $p=1$ 时. 即 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. $\forall u\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

则 $1<p<n$ 时. 令 $v=|u|^\gamma$. (γ 待定) $\gamma>1$.

则
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma\cdot\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\int_{\mathbb{R}^n}|D|u|^\gamma|\,dx=\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|Du|\,dx.$$
$$\le\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Thm 5.6.3 ($W^{k,p}$ 嵌入).

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 有界开, $\partial U \in C^1$. $u \in W^{k,p}(U)$. $k < \frac{n}{p}$. $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

则 $u \in L^q(U)$. $\|u\|_{L^q(U)} \le C \|u\|_{W^{k,p}(U)}$.

证明: $k < \frac{n}{p}$. 则 $\forall |\alpha| \le k$. 因 $D^\alpha u \in L^p$. 故由GNS不等式.

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(U)} \quad \forall |\beta| \le k-1$$

$\Rightarrow u \in W^{k-1,p^*}(U)$.

重复 $\Rightarrow u \in W^{k-2,p^{**}}(U) \Rightarrow \cdots\cdots u \in W^{0,p^{*k个*}}(U) = L^q(U)$. $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$

□

Thm 5.6.2 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).

$U \subset \mathbb{R}^n$ 有界开. $\partial U \in C^1$. $1 \le p < n$. $u \in W^{1,p}(U)$. 则 $u \in L^{p^*}(U)$

$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

证明: 设 $\partial U \in C^1$ 则 $\exists$ 延拓 $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$\bar{u} = u$ in U.

$\mathrm{Spt}\, \bar{u}$ 紧.

$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

$\bar{u}$ 紧支 $\therefore \exists u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \bar{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

由 Thm 5.6.1 $\|u_m - u_l\|_{p^*} \le C\|Du_m - Du_l\|_p \to 0$.

$\Rightarrow u_m \to \bar{u}$ in L^{p^*}.

又 $\|u_m\|_{p^*} \le C\|Du_m\|_p$ $\quad m \to +\infty$

故 $\|\bar{u}\|_{L^{p^*}} \le C\|D\bar{u}\|_{L^p}$ □

于是，我们取 $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$ $\Rightarrow$ $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$. 这样 $\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$.

从而化为
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

余下证明 $p=1$ 的情况

由于 u 紧支，故 $\forall\ 1\le i\le n$，$x\in\mathbb{R}^n$.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1\dots x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\, dy_i$$

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1\dots y_i, \dots x_n)|\, dy_i \qquad 1\le i\le n$$

~~X2 有 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函~~

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1\dots y_i\dots x_n)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

~~在~~ 对 x_1 积分.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

~~积分Minkowski~~ ~~广义~~ $n-1$元Hölder
$$\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

再对 x_2 积分.

$$\iint |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1\, dx_2 \ \cancel{\le \left(\iint |Du|\, dy_1\, dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i\ne 2} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2}$$

$$= \int \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_2.$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{n-1\text{ 次. 用Hölder (}n-1\text{元)}} dx_2$$

$$\le (\qquad\qquad) \cdot \left(\iint |Du|\, dy_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \prod_{i=3}^n \left(\iiint |Du|\, dx_1\, dx_2\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

重复以上过程 $\Rightarrow$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \prod_{i=1}^n \left(\int\dots\int |Du|\, dx_1\dots dy_i\dots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \left(\int |Du|\, dx\right)^{n/n-1}$$

Thm 5.6.3. ($W_0^{1,p}$ 估计)

U有界开. $u\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. $1\le p<n$. 则 $\|u\|_{L^q(U)}\le \|Du\|_{L^p(U)}$ $\forall\, q\in[1,p^*]$.

目 特别: $\|u\|_{L^p(U)} \le C\|Du\|_{L^p(U)}$.

证明: $u\in W_0^{1,p}(U)$. 则 $\exists\,\{u_m\}\in C_c^\infty(U)$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$

s.t. $u_m\to u$ in $W^{1,p}(U)$.

在 $\mathbb{R}^n-\bar{U}$ 上, 对 u_m 进行零延拓

由 Thm 5.6.1 有 $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \le C\|Du\|_{L^p(U)}$.

又 $\mu(U)<+\infty$. 由 Hölder 不等式即有 Thm 5.6.3 成立. $1\le q\le p^*$

□

Rmk: $p=n$ 时. $u\in W^{1,n}(U) \underset{n>1}{\not\Rightarrow} u\in L^\infty(U)$.

eg: $u(x)=\log\log(1+\frac{1}{|x|})$. $U=\mathring{B}(0,1)$. $u\notin L^\infty(U)$ 显然.

$$而\ \partial_{x_i}u(x)=\frac{1}{\log(1+\frac{1}{|x|})}\cdot\frac{-\frac{x_i}{|x|^3}}{1+\frac{1}{|x|}}$$

$$\Rightarrow |Du(x)| = \frac{1}{\log(1+\frac{1}{|x|})}\cdot\frac{\frac{1}{|x|^2}}{1+\frac{1}{|x|}}$$

$$=\frac{1}{|x|(|x|+1)\log(\frac{1}{|x|}+1)}$$ (在0处没有奇性).

$\Rightarrow |Du(x)|\in L^n(U)$. 而 $u(x)\in L^n(U)$ 显然

□.

Rmk: $\overset{k=2}{\cancel{k\ge 1}}$. $U=\mathbb{R}^n$ 时, 却有 L^∞ 的嵌入 (见 20 题).

↑ 用Fourier刻画.

Morrey 嵌入. $n<p<\infty$, 我们证明, modify 一个零测集之后, $u\in W^{1,p}(U)$ 事实上是 Hölder 连续的.

Thm 5.6.4 (Morrey不等式). $n<p\le\infty$. 则 $\exists C$. $\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ ($\forall u\in C^1(\mathbb{R}^n)$. $\gamma=1-\frac{n}{p}$)

证明: 需要证明2条: ① $|u(x)-u(y)|\lesssim |x-y|^{\gamma}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ $(x\neq y)$

② $|u(x)|\lesssim \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.

Proof of ①: $r:=|x-y|$. 记 $W=B(x,r)\cap B(y,r)$.

$$|u(x)-u(y)| = ⨍_W |u(x)-u(y)|\,dz$$

↑ 改写成常数的积分平均(注意 x,y 与 z 无关).

$$\le ⨍_W |u(x)-u(z)|\,dz + ⨍_W |u(y)-u(z)|\,dz.$$

· $$⨍_W |u(x)-u(z)|\,dz = \frac{|B(x,r)|}{|W|}\cdot\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|u(x)-u(z)|\,dz$$

$$\le C\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|u(x)-u(z)|\,dz$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{z=x+tw}{=}} \frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}|u(x)-u(x+tw)|\,t^{n-1}\,dt\,dS_w$$

$$= \frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}\left|\int_0^t \frac{d}{ds}u(x+sw)\,ds\right| t^{n-1}\,dt\,dS_w.$$

放大

$$\le \frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}\int_0^r \frac{|Du(x+sw)|\,s^{n-1}}{s^{n-1}}\,ds\; t^{n-1}\,dt\,dS_w$$

$$\overset{y=x+sw}{=} \frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\; t^{n-1}\,dt.$$

$$= \underbrace{\frac{C}{|B(x,r)|}\cdot\frac{r^n}{n}}_{\approx 1}\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy$$

$$\le C'\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \le C\|Du\|_{L^p(B(x,r))}\cdot\left\|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right\|_{L_y^{p'}(B(x,r))}.$$

而 $\cancel{\frac{1}{|x|^{n-1}} \in L^{p'}(B(0,r))} \quad \cancel{\iff (n-1)p'}$

$$\left\| \frac{1}{(x-y)^{n-1}} \right\|_{L^{p'}(B(x,r))}$$

$$= \left(\int_{\partial B(0,1)} \int_0^r \frac{1}{\rho^{(n-1)p'}} \rho^{n-1} \, d\rho \, dS_w \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$$

$$\iff (n-1)(p'-1) < 1.$$

$$\iff p > n \qquad \left(\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} \right).$$

故: $$⨍_W |u(x)-u(z)| \, dz \le C \underbrace{r^{1-\frac{n}{p}}}_{\left\|\frac{1}{|\cdot|^{n-1}}\right\|_{L^{p'}(B(x,r))}} \|Du\|_{L^p} \qquad \cancel{\left(r^{1-\frac{n}{p}}\right)} \checkmark$$

Proof of ②:

$$|u(x)| = \frac{1}{|B(x,1)|} \int_{B(x,1)} |u(x)| \, dy$$

$$\le C \Big(\underbrace{\int_{B(x,1)} |u(x)-u(y)| \, dy}_{\text{与①类似}} + \underbrace{\int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy}_{\text{用 } u \text{ 的 } L^p \text{ norm 控制}} \Big).$$

$$\int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy = \int |\chi_{B(x,1)} u(y)| \, dy$$

$$\le \|\chi_{B(x,1)}\|_{p'} \|u\|_p \le C \|u\|_p.$$

$$\int_{B(x,1)} |u(x)-u(y)| \, dy \underset{\text{与①类似}}{\le} C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

$$\le C \|Du\|_p \, \|(x-y)^{1-n}\|_{L^{p'}(B(x,1))}$$

$$\le C \|Du\|_p$$

于是 $|u(x)| \le \cancel{\|Du\|_p \; W}$ $\|u\|_{W^{1,p}}$ 由①②即成立Morrey不等式 □

Thm 5.6.5 (Morrey嵌入) U有界开 $\partial U\in C^1$ $u^*\in C^{0,\gamma}(\bar U)$. 则

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \le \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$ (延拓+光滑逼近)

证明: ① 由延拓定理, $u\in W^{1,p}(U)$ 延拓成 $\bar u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases}\bar u = u \quad a.e. \quad in \quad U\\ \operatorname{spt}\bar u\subset V\subset\subset \mathbb{R}^n\\ \|\bar u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.\end{cases}$$

② 存在$\mathbb{R}^n$中的光滑函数 $\bar u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\bar u_m\to\bar u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

由Morrey不等式: $\|u_m-u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_m-u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.

又由Hölder space 完备. 故 $\exists u^*\in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$u_m\to u^* \quad in \quad C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

从而 $\bar u = u^*$ a.e. in U.

u^* 为u的连续修正.

$$\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}} \le C\|u_m\|_{W^{1,p}}$$

$m\to+\infty$ 有

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\bar u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \qquad n<p<\infty.$$

$p=\infty$ 是易见的. □

Thm 5.6.6 (Morrey嵌入). 若 $k>\frac{n}{p}$. U有界开 $k\in\mathbb{Z}_+$. $\partial U\in C^1$.

$u\in W^{k,p}(U)\Rightarrow \begin{cases} u\in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar U). \quad \gamma=\begin{cases}1-\{\frac{n}{p}\} & \frac{n}{p}\notin\mathbb{Z}\\ \text{任何0,1之间的正数.} & \frac{n}{p}\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar U)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(U)}\end{cases}$

Omit the proof. □

$\le C\cdot\|Du_m\|_{L^1(V)}\cdot\varepsilon \underset{\text{Hölder}}{\le} C\|Du_m\|_{L^p(V)}\,\varepsilon$ （对 $u_m\in W^{1,p}(V)$ 直接用逼近定理）

$\therefore$ ~~$\|Du_m\|_{L^1(V)}$~~ $\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}\le C\varepsilon$

$0\le\theta\le1$

$$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)}\underset{\text{Hölder}}{\le}\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}^{\theta}\ \|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}\qquad \left(\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{p^*}=\frac{1}{q}\right)$$

$$\le C\varepsilon^\theta\ \|u_m^\varepsilon-u_m\|_{p^*}^{1-\theta}$$

$$=C\varepsilon^\theta\ \|u_m*\eta_\varepsilon-u_m\|_{p^*}^{1-\theta}$$

$$\le C\varepsilon^\theta\left(\|u_m*\eta_\varepsilon\|_{p^*}+\|u_m\|_{p^*}\right)^{1-\theta}$$

$$\underset{\text{卷积Young}}{\le}C\varepsilon^\theta\left(\|u_m\|_{L^{p^*}}\|\eta_\varepsilon\|_{L^1}+\|u_m\|_{p^*}\right)^{1-\theta}$$

$$\le C'\varepsilon^\theta\ \to0\ \text{ as }\varepsilon\to0^+\ \text{ 对 } m \text{ 一致}.$$

故对任何 $\delta>0$，$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)}<\delta$，关于 m 一致.

Step 2：对固定 $\varepsilon>0$.

(2.1) $\{u_m^\varepsilon\}$ 一致有界：

$$|u_m^\varepsilon(x)|\le\int_{B(x,\varepsilon)}\eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\,dy\le\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le}C\|\eta\|_\infty\frac{1}{\varepsilon^n}\cdot\|u_m\|_{L^q(V)}$$

$$\le C\frac{1}{\varepsilon^n}<+\infty.$$

与 m 无关.

(2.2) 等度连续.

$$|Du_m^\varepsilon(x)|=|D\eta_\varepsilon*u_m|\le\|D\eta_\varepsilon\|_\infty\|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\le C\varepsilon^{-(n+1)}\quad ✓$$

由 Ascoli-Arzela 引理，$\exists\{u_m^\varepsilon\}$ 子列 $u_{m_k}^\varepsilon$ 在 L^∞ 中收敛

$\Rightarrow u_{m_k}^\varepsilon$ 在 $C(U)$ 中收敛. 欲证 L^q 收敛，只用证 L^q-Cauchy.

这由 $\{u_{m_k}^\varepsilon\}$ 在 L^∞ Cauchy + U 有界 即得. ✓

~~Ch §5~~

Rmk: $p=n$ 时. Sobolev空间 $W_0^{1,n}(U) \hookrightarrow L^{\varphi}(U)$. (Orlicz空间)

其中 $\varphi(x)=e^{|x|^{\frac{n}{n-1}}}-1$, $L^{\varphi}=\{f \text{可测} \mid \int_U \varphi(\frac{|f(x)|}{M})\,d\mu<+\infty,\ \text{for some } M>0\}$

$\|f\|_{L^{\varphi}} := \inf\{M>0 \mid \int_X \varphi(\frac{|f(x)|}{M})\,d\mu\} <+\infty.$

证明见 Gilbarg, Trudinger: Elliptic PDE of 2nd order. Ch 7.8~7.9 □

§5.7 紧嵌入.

Def: X, Y Banach. 称 $X \subset\subset Y$. 若

(1) $\|u\|_Y \le C\|u\|_X \quad \forall u\in X$.

(2). X 中任何有界集, 在 Y 中相对紧(列紧).

Thm 5.7 (Rellich-Kondrachov).

设 $U\subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开 $\partial U\in C^1$ $1\le p<n$. 则 $W^{1,p}(U)\subset\subset L^q(U)$. $1\le q<p^*$.

证明: 只用验证紧性, 嵌入由GNS不等式保证.

$\Updownarrow$

任意 $W^{1,p}$ ~~(U)~~ 的有界序列是 L^q 中的~~收敛~~列紧序列

$\Uparrow$

Ascoli-Arzela 引理 $\Leftarrow \begin{cases}\text{一致有界}\\ \text{等度连续}\end{cases}$ $\boxed{\text{check these!}}$

设 $\{u_m\}$ ~~在~~ $W^{1,p}(U)$ 中有界, 要证 $\exists\{u_{m_k}\}$ converges in L^q

Step 1: 将 u_m 光滑化, ~~证明~~

$u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$ 要证 $\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)} \to 0$. as $\varepsilon\to 0$ uniformly in m.

若 u_m smooth

$|u_m^\varepsilon-u_m| \le \int \eta_\varepsilon(y)\,|u_m(x-y)-u_m(x)|\,dy$

$\le \int |\eta_\varepsilon(y)|\cdot \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x-ty)\,dt\right|\,dy$

$\le \int_0^1 \int |\eta_\varepsilon(y)|\cdot|y|\cdot|Du_m(x-ty)|\,dy\,dt.$

$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)} \underset{\text{Tonelli}}{\overset{\cancel{\text{Fubini}}}{\le}} \int_0^1 \int |\eta_\varepsilon(y)|\cdot\|Du_m(\cdot-ty)\|_{L^1(V)}\,|y|\,dy\,dt.$ $\quad \tilde{\eta}_\varepsilon(z)=z\,\eta(z)$

$\le \|Du_m\|_{L^1(V)} \int |\eta_\varepsilon(y)|\cdot|y|\,dy \le \varepsilon\|Du_m\|_{L^1(V)}\int \tilde{\eta}_\varepsilon(y)\,dy$

Step 3: 转回 $\{u_m\}$

$$\|u_{m_k}-u_{m_l}\|_{L^q(V)} \le \|u_{m_k}-u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \quad (\le\delta\ \text{与}m\text{无关})$$
$$+\|u_{m_k}^\varepsilon-u_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \quad \text{这项}k,l\to\infty\text{时趋于}0$$
$$+\|u_{m_l}^\varepsilon-u_{m_l}\|_{L^q} \quad (\le\delta\ \text{与}m\text{无关}).$$

$$\Rightarrow \limsup_{k,l\to\infty}\|u_{m_k}-u_{m_l}\|_{L^q(V)}\le 2\delta.$$

$\delta=1$. 存在一列 $u_{m_{1,1}},\dots\dots,u_{m_{1,n}},\dots\dots$

$\delta=\frac12$. $\quad u_{m_{2,1}},\dots\dots,u_{m_{2,n}},\dots$

~~由对角线~~ $u_{m_j}:=u_{m_{j,j}}$ 即可. (对角线法则). □

§5.8. Poincaré 不等式:

$\langle u\rangle_U:=\frac{1}{|U|}\int_U f\,dy.$

Thm 1: U 有界连通开集. $\partial U\in C^1$. $1\le p\le\infty$ $u\in W^{1,p}(U)$. 则 $\exists\, C>0$

$$\|u-\langle u\rangle_U\|_{L^p(U)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

证明: 反证法: 否则. $\exists$ 一列 $\{u_k\}\in W^{1,p}(U)$ s.t. $\|u_k-\langle u_k\rangle\|_{L^p(U)}>k\|Du_k\|_{L^p(U)}$.

$$v_k:=\frac{u_k-\langle u_k\rangle_U}{\|u_k-\langle u_k\rangle_U\|_{L^p(U)}}.\qquad \langle v_k\rangle_U=0.\quad \|v_k\|_{L^p(U)}=1\quad \|Dv_k\|_{L^p(U)}<\frac1k.$$

由 Rellich-Kondrachov 定理. $\exists$ 子列 $v_{k_j}\to v_{\in L^p}$ in $L^p(U)$

$$\Rightarrow \langle v\rangle_U=0.\quad \|v\|_{L^p(U)}=1.$$

~~由 $\|Dv_k\|_p$~~ 下面证明 $Dv=0$ a.e.

~~$\sup_{\phi\in L^{p'}}\int$~~

因 $\|Dv_k\|_p<\frac1k\to 0$

$$\forall\phi\in C_c^\infty(U).\ \int_U \partial_{x_i}\phi\cdot v \overset{\text{Hölder}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_U v_{k_j}\partial_{x_i}\phi\,dx=-\lim_{k_j\to\infty}\int_U D_{x_i}v_{k_j}\cdot\phi\,dx=0.$$

从而 $v\in W^{1,p}(U)$. $Dv=0$ a.e.

Claim: $v=$ const a.e. in U.

Pf:

令 $v^{\varepsilon} = \eta_\varepsilon * v \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

$Dv^\varepsilon = (Dv)^\varepsilon$

$\Rightarrow Dv^\varepsilon = 0$ a.e. in U_ε.

又因 U 连通. 故 $\forall \varepsilon>0$. $v^\varepsilon(x) = \overset{\text{const}}{C_\varepsilon}$ in U_ε.

因 $v^\varepsilon \to v$ a.e. in U. as $\varepsilon\to 0$ $\Longrightarrow$ ~~严格的argue应是: 子列 a.e. 收敛. 再证各子列极限相同~~ (否则.

$\therefore$ 对 a.e. $x\in U$. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} v^\varepsilon(x) = v(x)$. ☒

这样 v const. $\langle v\rangle_U = 0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow \|v\|_{L^p(U)}=0$. 矛盾! □

Corollary: $U=B(x,r)$. $1\le p\le\infty$ 则 $\exists C>0$.

$$\|u-\langle u\rangle_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \le Cr\|Du\|_{L^p(B(x,r))}, \quad \forall u\in W^{1,p}(B^\circ(x,r)).$$ □

§5.9 Sobolev 函数的可微性.

Thm 5.9.1 U 有界开. $\partial U\in C^1$. 则 $u:U\to\mathbb{R}$ Lipschitz $\Longleftrightarrow u\in W^{1,\infty}(U)$.

~~* 设 $U=\mathbb{R}^n$ 否则用延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上~~ 设 $U=\mathbb{R}^n$. u 紧支.

证明: $\Longrightarrow$ $D_i^h u(x) := \dfrac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$.

则 $\|D_i^h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \mathrm{Lip}(u)$.

$\Rightarrow \exists h_k\to 0$, $v_i\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.t. $D_i^{h_k} u \rightharpoonup v_i$ in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

local不能去掉
因为利用了区域测度 $<\infty$ 时. L^∞ 一定 L^2.

$\Rightarrow \forall \phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\,\partial_{x_i}\phi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\cdot \lim_{h_k\to 0} D_i^{-h_k}\phi\, dx \overset{DCT}{=} \lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k}\phi\cdot u\, dx = -\lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} D_i^{h_k}u\cdot\phi\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} v_i\cdot\phi\, dx.$$

$\Rightarrow \partial_{x_i}u = \underset{\in L^\infty(\mathbb{R}^n)}{v_i}$ weakly $\Rightarrow u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

⟸：令 设 $u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 则由 Morrey 不等式知 u 是 Hölder连续的 (modify一个零测集) ⟹ u 连续.

这步必要.

令 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

$u^\varepsilon \rightrightarrows u$ as $\varepsilon\to 0^+$.

$\|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

因 $|u^\varepsilon(x)-u(x)|$

$$= \cdots = \int_{\mathbb{R}^n}\eta(y)\,(u(x-\varepsilon y)-u(x))\,dy$$

$u^*\in C^{0,\gamma}$

$$\overset{u=u^*\ a.e.}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\eta(y)\,(u^*(x-\varepsilon y)-u^*(x))\,dy.$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$. 再用DCT即可.

$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$. $x\neq y$. 有 $u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)=\int_0^1 \frac{d}{dt}u^\varepsilon(tx+(1-t)y)\,dt$

$$=\int_0^1 Du^\varepsilon(tx+(1-t)y)\,dt\cdot(x-y).$$

$$\Rightarrow \cancel{\|Du^\varepsilon} \ |u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)| \le \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x-y| \le \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x-y|.$$

$\varepsilon\to 0^+$. 利用 $u^\varepsilon\rightrightarrows u$ 有

$$|u(x)-u(y)| \le \|Du\|_{L^\infty}|x-y|.\quad \forall x\neq y$$

Rmk: 此处证 ⟸ 应改为 $u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$ 一致收敛到函数 U 则 $\begin{cases} U \text{ 点点 Lipschitz} \\ U=u \text{ a.e. 即可} \end{cases}$

Def: 称 $u: U\to\mathbb{R}$ 在 x 处可微. 若 $\exists a\in\mathbb{R}^n$.

$$u(y)=u(x)+a\cdot(y-x)+o(|y-x|) \quad \text{as } y\to x.$$

$$\text{i.e.}\quad \lim_{y\to x}\frac{|u(y)-u(x)-a\cdot(y-x)|}{|y-x|}=0.$$

#.

Thm 5.9.2. $u\in W^{1,p}_{loc}(U)$. $n<p\le+\infty$. 则 u a.e. 可微 in U.
$Du=$ 弱 Du a.e.

证明: 只用证 $n<p<\infty$ 时,

在 Morrey 不等式证明中有:

$$|u(y)-u(x)| \le C r^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,2r)}|Du(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}} \quad y\in B(x,r).\quad \forall u\in C^1(U) \Downarrow \forall u\in W^{1,p}(U).$$

如今 $\forall u\in W^{1,p}_{loc}(U)$. a.e. $x\in U$. 由 Lebesgue 微分定理. $⨍_{B(x,r)}|Du(x)-Du(z)|^p\,dz\to 0$ as $r\to 0$.

任何固定这样一个点 $x\in U$，令 $v(y)=u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x)$　　$r=|x-y|$

代入 Morrey 不等式的估计中的 u.

$$\Rightarrow |u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x)|$$

$$\le Cr^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,2r)}|Du(x)-Du(z)|^p\,dz\right)^{1/p}$$

$$\le Cr\left(⨍_{B(x,2r)}|Du(x)-Du(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}=o(r)=o(|x-y|)$$

as $r\to0^+$.

□

作为推论.

Thm 5.9.3 (Rademacher 定理). u is locally Lipschitz

$\Downarrow$

u a.e. 可微.

□

差商与弱导数. $u: U\to\mathbb{R}$　$L^1_{loc}(U)$.　$V\subset\subset U$.

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}\qquad 1\le i\le n.\quad x\in V.\quad 0<|h|<\mathrm{dist}(V,\partial U).$$

$$D^h u := (D_1^h u,\dots,D_n^h u).$$

Thm 5.9.4: (1) $1\le p<\infty$　$u\in W^{1,p}(U)$. 则 $\forall V\subset\subset U$.　$\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}$

$(\exists C>0.\ \forall 0<|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial U))$

(2) $1<p<\infty$ 时.　$u\in L^p(V)$. 且 $\exists C>0$ s.t. $\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C$　$\forall |h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial U)$

则　$u\in W^{1,p}(V)$.　$\|Du\|_{L^p(V)}\le C$.　但 $p=1$ 不对 (5.12题)

Proof: (1). $1\le p<\infty$ 先设 $u\in C^\infty(U)$.

$$u(x+he_i)-u(x) = h\int_0^1 \partial_i u(x+he_i\cdot t)\,dt$$

$$\Rightarrow |u(x+he_i)-u(x)| \le |h|\int_0^1 |Du(x+the_i)|\,dt$$

$$\Rightarrow \int_V |D^h u|^p\,dx \le C\sum_{i=1}^n \int_V\int_0^1 |Du(x+the_i)|^p\,dt\,dx$$
$$\overset{\text{Tonelli}}{=} C\sum_{i=1}^n \int_0^1\int_V |Du(x+the_i)|^p\,dx\,dt$$
$$\le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

对 $u\in W^{1,p}(U)$. 找一列 $u_n\in C^\infty(U)$. $\|u_n-u\|_{W^{1,p}(U)}\to 0$

而 $\|D^h u_n\|_p \longrightarrow \|D^h u\|_p$ 故(1)成立.

(2). 首先. 差商的"分部积分公式"

$$\int_V u(x)\left[\frac{\phi(x+he_i)-\phi(x)}{h}\right]dx = \int_U\left[\frac{u(x)-u(x-he_i)}{h}\right]\phi(x)\,dx$$

$\forall \phi\in C_c^\infty(V)$ 即 $\int_V u\,D_i^h\phi\,dx = -\int_V D_i^{-h}u\cdot\phi\,dx$.

由 $\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C \Rightarrow \sup_h \|D_i^{-h}u\|_{L^p(V)}<+\infty$

$1<p<\infty$ 时. 由 Banach-Alaoglu定理. $\exists\, v_i\in L^p(V)$. 子列 $h_k\to 0$

s.t. $D_i^{-h_k}u \rightharpoonup v^i$ in $L^p(V)$.

$$\Rightarrow \int_V u\,\partial_i\phi\,dx = \int_U u\cdot\partial_i\phi\,dx = \lim_{h_k\to 0}\int_U u\cdot D_i^{h_k}\phi\,dx$$

↑ 控制收敛定理.

$$\overset{\text{差商分部积分公式}}{=} -\lim_{h_k\to 0}\int_V D_i^{-h_k}u\cdot\phi\,dx$$

$$\overset{D_i^{-h_k}u \rightharpoonup v_i}{=} -\int_V v^i\phi\,dx = -\int_U v_i\phi\,dx$$

$\Rightarrow v_i = \partial_i u$ weakly.

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow Du\in L^p(V)\\ &u\in L^p(V)\end{aligned}\right\}\Rightarrow u\in W^{1,p}(V)$$

□

§ 5.10. Sobolev 空间的 Fourier 刻画. $H^s(\mathbb{R}^d)$.

5.10.1: Fourier 变换与缓增分布.

<u>Def</u> (Schwartz class).

$$S(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \|f\|_{N,\alpha}<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \text{多重指标 } \alpha \right\}.$$

其中 $\|f\|_{N,\alpha} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$

不难验证: (1) $f\in S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall\alpha,\ \partial^\alpha f\in L^p$, $1\le p\le+\infty$

(2) $(S(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{N,\alpha})$ 是 Fréchet 空间.

(3) $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则 $f\in S(\mathbb{R}^d) \iff x^\beta\partial^\alpha f$ bdd $\forall\alpha,\beta$ $\iff \partial^\alpha(x^\beta f)$ bdd $\forall\alpha,\beta$.

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的 Fourier 变换.

$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 时, 定义 $\mathcal{F}: f(x)\longmapsto \hat f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$.

则该积分显然是存在的.

不难证明: $f, g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 时.

(1) $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i\xi\cdot y}\hat f(\xi)$, $\tau_y \hat f(\xi) = \widehat{e^{2\pi i y\cdot x} f(x)}$

(2) 设 T 为 $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 的非奇异线性变换. 令 $S:=(T^t)^{-1}$ 则 $\widehat{f\circ T}(\xi) = \frac{1}{|\det T|}\hat f(S(\xi))$

特别: 若 T 是旋转, 则 $\widehat{f\circ T} = \hat f\circ T$.

若 $Tx = \frac{x}{t}$ $(t>0)$, 则 $\widehat{f\circ T}(\xi) = t^d \hat f(t\xi)$

$\widehat{f_t}(\xi) = \hat f(t\xi)$. $\quad f_t = \frac{1}{t^d} f\left(\frac{x}{t}\right)$

重要 ✓(3) $\hat f\hat g = \widehat{f*g}$

✓(4) 若 $x^\alpha f\in L^1$ $\forall|\alpha|\le k$ 则 $\hat f\in C^k$, $\partial_\xi^\alpha \hat f(\xi) = \left((-2\pi i x)^\alpha f\right)^\wedge(\xi)$.

✓(5) 若 $f\in C^k$, $\partial^\alpha f\in L^1$ $\forall|\alpha|\le k$ 且 $\partial^\alpha f\in C_0$ $\forall|\alpha|\le k-1$. 则 $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha\hat f(\xi)$.

(6) (Riemann-Lebesgue 引理). $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$.

5.10.1

Cor: $\mathcal{F}: S \to S$ 是单射，且连续.

Proof: $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$, $\quad \widehat{x^\alpha \partial^\beta f} = (-1)^{|\alpha|}(2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} \underbrace{\partial^\alpha(\xi^\beta \hat{f})}_{bdd.} \in L^1 \cap C_0 \quad \forall \alpha, \beta$

$\Rightarrow \hat{f} \in C^\infty$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \hat{f} \in S$

$\because \int \frac{dx}{(1+|x|)^{d+1}} < \infty \quad \therefore \|(x^\alpha \partial^\beta f)^\wedge\|_{L^\infty} \le \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^1}$

$= \|\langle \cdot \rangle^{-(d+1)} \cdot \langle \cdot \rangle^{d+1} x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^1}$

$\lesssim \|\langle \cdot \rangle^{-d-1}\|_{L^1} \|\langle \cdot \rangle^{d+1} x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty}$

其中 $\langle x \rangle := 1+|x|$ or $\sqrt{1+|x|^2}$.

$\Rightarrow \|\hat{f}\|_{N,\beta} \lesssim_{N,\beta} \|f\|_{N+d+1,\gamma}$

$\Rightarrow \hat{f} \in S$. 且 $\mathcal{F}$ continuous. $\square$

下面证明：$\mathcal{F}: S \to S$ onto. 进而 $\mathcal{F}: S \to S$ automorphism.

先有引理：

lemma 5.10.1: $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ $a>0$. 则 $\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{a}}$.

Pf: $d=1$ 时. $\frac{d}{dx}(e^{-\pi a x^2}) = -2\pi a e^{-\pi a x^2}$.

$\Rightarrow \hat{f}'(\xi) = (-2\pi i x e^{-\pi a x})^\wedge(\xi) = \frac{i}{a}\hat{f'}(\xi) = \frac{i}{a}(2\pi i \xi)\hat{f}(\xi)$

$= -\frac{2\pi}{a}\xi \hat{f}(\xi)$.

$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -\frac{2\pi}{a}\hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2/a}$.

令 $\xi=0$ 有 $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}$. $\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{a}}$

一般的 d. $\quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi a \sum_{j=1}^d x_j^2} \cdot e^{-2\pi i \sum_j x_j \xi_j} dx$

$= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx_j = a^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi|\xi|^2/a}$. $\square$

如今. 若 $f\in L^1$. 令 $\check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi$.

我们证明. $f\in L^1$ 且 $\hat{f}\in L^1$ 时, $(\hat{f})^\vee = f$. 注意. $(\hat{f})^\vee(x) = \iint_{\mathbb{R}^d\ \mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \xi y} e^{2\pi i \xi x} dy\, d\xi$

不能用Fubini定理. 因被积函数不在 $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

但有:

lemma 5.10.2 (乘法公式) $f, g\in L^1 \Rightarrow \int \hat{f} g = \int f \hat{g}$.

∘ Trivial.

Thm 5.10.1 (Fourier 反变换) $f, \hat{f} \in L^1$ 时. $f \overset{a.e.}{=} (\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Proof: $\forall t>0$. $x\in\mathbb{R}^d$. 令 $\phi_t(\xi) = \exp(2\pi i \xi\cdot x - \pi t^2 |\xi|^2)$.

则由 lemma 5.10.1 有 $\hat{\phi}_t(y) = \exp\left(-\frac{\pi|x-y|^2}{t^2}\right) t^{-d} =: g_t(x-y)$, 其中 $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$

则 $\int \phi_t(\xi) \hat{f}(\xi) \overset{\text{lem5.10.2}}{=} \int f(y) \hat{\phi}_t(y) dy = (f * g_t)(x)$.

$t\to 0$. 由 $\{g_t\}$ 是恒等逼近. 故 $f * g_t \xrightarrow{L^1} f$

又: $\hat{f}\in L^1$. 由DCT. 左边 $\to (\hat{f})^\vee$

$\Longrightarrow f = (\hat{f})^\vee$ a.e. □

Corollary 5.10.2:

(1) $f\in L^1$. $\hat{f}=0$. 则 $f=0$ a.e.

(2) $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ automorphism. □

下面证明 Plancherel Identity.

Thm 5.10.2 (Plancherel) $f\in L^1\cap L^2 \Longrightarrow \hat{f}\in L^2$. 从而 $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}$ 可唯一延拓成 L^2 上的酉等距变换. $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Proof. $X := \{f\in L^1 \mid \hat{f}\in L^1\}$. $X\subseteq L^2$ 是因为 $\hat{f}\in L^1 \Rightarrow f\in L^\infty \overset{f\in L^1}{\Longrightarrow} f\in L^1\cap L^\infty \subseteq L^2$.

In fact. X 在 L^2 中稠. 因 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^1\cap L^2 \subseteq L^2$.

从而. $\forall f, g\in X$. 令 $h = \overline{\hat{g}}$.

由 Thm 5.10.1: $\hat{h}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi}\,\overline{\hat{g}(x)}\,dx$

$= \int \overline{e^{2\pi i x\xi}\hat{g}(x)}\,dx = \overline{g(\xi)}$

从而由 Lemma 5.10.2:

$$\int f\bar{g} \underset{\text{上式}}{=} \int f\hat{h} \underset{5.10.2}{=} \int \hat{f}h = \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}|_X$ 保 L^2 内积 $\Rightarrow$ 令 $g=f$. 有 $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.

$\mathcal{F}(X) = X$

再由 B.L.T 定理. $\mathcal{F}$ 即可唯一延拓到 L^2 上

□.

<u>Remark</u>: 关于 Fourier 变换. 最重要的是"导数"这一观念的转变. 在这我们<u>不应该再将导数视作差商的极限</u>, 而是将导数视作函数的 Fourier 变换乘一个多项式乘子. 即 $(|\xi|^\alpha \hat{f})^\vee = \partial^\alpha f$. □.

下面讨论 L^p 函数的 Fourier 变换.

$1 \le p \le 2$ 时, 我们有 $f \in L^p \Rightarrow \hat{f} \in L^{p'}$.

Thm 5.10.3 (Hausdorff-Young 不等式).

$1 \le p \le 2$ 时. $\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \le \|f\|_p$

该不等式是如下插值定理的推论. 其证明完全是实分析方法. 可参见.

Stein: Functional Analysis. chapter 2.2.

<u>lemma</u> 5.10.3 (Riesz-Thorin 插值).

设 $T: L^{p_0} \to L^{q_0}$ with bdd M_0 i.e. $\|Tf\|_{L^{q_0}} \le M_0\|f\|_{L^{p_0}}$

线性算子

$T: L^{p_1} \to L^{q_1}$ with bdd M_1. $\|Tf\|_{L^{q_1}} \le M_1\|f\|_{L^{p_1}}$

则 $\forall p \in$ ~~∃~~ $[p_0, p_1]$. 设 $0 \le \theta \le 1$ satisfies $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$

就有: $\|Tf\|_q \le M\|f\|_p$. 其中 $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$

$M \le M_0^\theta M_1^{1-\theta}$

□.

$p>2$ 时，$\hat{f}(\cdot)$ 不再是函数，而是广义函数。So 故我们讨论 $\mathbb{R}^d$ 上定义的广义函数（分布）

Def（测试函数）. $D(\mathbb{R}^d) := C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

~~D 上赋予弱* 拓扑.~~ 即

称 $\varphi_n \to \varphi$ in D. 若 φ_n, φ 有公共紧支集 且 $\forall \alpha$，$\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$

Def（分布）. $D'(\mathbb{R}^d) := (C_c^\infty(\mathbb{R}^d))^*$

D' 上赋予弱* 拓扑. 我们称 $F_n \to F$ in D'. 若 $\forall \varphi \in D$, $\langle F_n, \varphi \rangle \to \langle F, \varphi \rangle$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示"作用" or say "pairing".

Remark：分布理论不再关注任何逐点值. 易知任何 L^1_{loc} 函数都是分布. 我们在此均是将其视作 D 上的连续线性泛函，考察 $F \in D'$ 的性质. 均化作用测试函数 φ 去考察 $\langle F, \varphi \rangle$ 的行为.

Example: ① $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subseteq D'(\mathbb{R}^d)$

② Radon 测度.

③ $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$

④ δ $\quad \delta(\varphi) := \varphi(0)$. $\forall \varphi \in D$.

$\tilde{\varphi}(x) := \phi(-x)$.

Fact: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense in $D'(\mathbb{R}^d)$ in weak*-topology

pf In fact. $\forall F \in D'$. set $\{\phi_t\}$ as a family of smooth approximation to Identity.

then $\phi_t * F \to F$ in D'.

$\square$

下面定义分布的基本运算，所有略去的证明可以在以下书中找到

[1] E.M. Stein & R. Shakarchi: Functional Analysis, ch 3. 2011.

[2] G.B. Folland: Real Analysis; Modern Techniques & Its Applications, 1984.

(1) 偏导：$\langle \partial^\alpha F, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle F, \partial^\alpha \varphi\rangle$. （联系：分部积分）

(2) 与 C^∞ 函数相乘：$F\in D'$, $\psi\in C^\infty$. 则 $\langle \psi F, \varphi\rangle := \langle F, \psi\varphi\rangle$

(3) 平移. $\langle \tau_y F, \varphi\rangle = \langle F, \tau_{-y}\varphi\rangle$.

(4) 线性映射. $\det T \neq 0$ 时. $\langle F\circ T, \varphi\rangle := \frac{1}{|\det T|}\langle F, \varphi\circ T^{-1}\rangle$.

~~(5) 卷积~~:

下面定义分布的卷积.

先定义分布的支集：

$$\forall F\in D',\ \operatorname{Spt} F := \Big(\bigcup \{O\subseteq \mathbb{R}^d \text{ 开} \mid \underbrace{F=0 \text{ in } O}_{\text{i.e. } \forall \varphi \text{ spt in } O,\ F(\varphi)=0}\}\Big)^c.$$

可以证明，这与O的选取无关.

(5) 卷积：设 $F\in D'$, $\psi\in D$ 则 定义 $F*\psi$ 为:

$$\langle F*\psi, \varphi\rangle = \langle F, \tilde{\psi}*\varphi\rangle.$$

又可定义为 $(F*\psi)(x) := \langle F, \tau_x\tilde{\psi}\rangle$ （可以证明，此时 $F*\psi\in C^\infty$ 的逐点值有定义）.

两种定义是等价的. 证明见[1] 第102页.

Fact: (1) 设 $\operatorname{Spt} F = C_1$, $\operatorname{Spt} \psi = C_2$. 则 $\operatorname{Spt} F*\psi \subseteq C_1+C_2$.

(2) $F*\delta = \delta*F = F$.

(3) F_1, F_2 若有紧支集，则 $F_1*F_2 = F_2*F_1$ 且良定.

(4) $\partial^\alpha(F*F_1) = (\partial^\alpha F)*F_1 = F*(\partial^\alpha F_1)$. 其中 F, F_1 有一个要紧支.

□

下面定义分布的Fourier变换

D.不再适合作为测试函数 因 $\mathcal{F}(D)\not\subseteq D$

Fact: 若非零函数 $\phi\in C_c^\infty$ 则 $\hat\phi$ 不可能在一个非空开集中恒为0.

check: 若不然，将 ϕ 换成 $e^{-2\pi i\xi_0 x}\phi$ 不妨 $\xi_0=0$

则 $\hat\phi(\xi)=\cancel{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int(-2\pi i\xi\cdot x)^k\phi(x)dx}$

$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha\int(-2\pi i x)^\alpha\phi(x)\,dx$

$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha\partial^\alpha\hat\phi(0)\Longrightarrow\phi=0$ □

$\boxed{\text{此时注意到 } \mathcal{F}:S\to S \text{ 是自同胚}}$. $(S,\|\cdot\|_{\nu,\alpha})$ Frechet

$C_c^\infty\overset{\text{dense}}{\subset}S$

- 我们选取S作为新的测试函数. 并 $\boxed{\text{定义}}$ 其对偶空间 S' 为缓增分布 (tempered distribution)
- S' 上仍赋予弱*拓扑. 即 $F_n\to F$ in S' iff $\forall\varphi\in S$. $\langle F_n,\varphi\rangle\to\langle F,\varphi\rangle$.
- $F\in S'$ 可以看作 $F|_{C_c^\infty}$ 在 S 上的延拓 (BLT定理). $S'\subseteq D'$.

~~称 L_{loc} 的 S' 为 慢~~

- 称 满足 $\forall\alpha$. $|\partial^\alpha\phi(x)|\lesssim_\alpha\langle x\rangle^{N(\alpha)}$ 的函数为慢增函数，例如 $\langle x\rangle^s$.

Fact: (1) 紧支分布 $\mathcal{E}'\subseteq S'$.

(2) $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)\cap\{f\mid\exists N.\int\langle x\rangle^N|f|<\infty\}\subseteq S'$.

(3) $e^{ax}\in S'\iff \mathrm{Re}\,a=0$

(4) $e^{ax}\cos e^x\in S'$.

(5) $F\in S'$. $\psi\in S$. $F*\psi\in C^\infty$ 且 $(F*\psi)(x)=\langle F,\tau_x\tilde\psi\rangle$

$\langle F*\psi,\varphi\rangle:=\langle F,\phi*\tilde\psi\rangle$.

(6) $\langle\partial^\alpha F,\varphi\rangle:=\langle F,\partial^\alpha\varphi\rangle(-1)^{|\alpha|}$.

缓增分布的 Fourier 变换:

$\forall F \in S'$. $\phi \in S$ 定义 $\langle \hat{F}, \phi \rangle := \langle F, \hat{\phi} \rangle$.

Fact: (1) 若 $F \in \mathcal{E}'$ 则 $\langle \check{F}, \phi \rangle := \langle F, \check{\phi} \rangle$.

$\hat{F}$ 是慢增 C^∞ 函数. $\hat{F}(\xi) := \langle F, e^{-2\pi i \xi x} \rangle$

(2) $\hat{\delta} = 1$. $\hat{1} = \delta$ in S'.

(3) $\langle \delta, e^{-2\pi i x \xi} \rangle = 1$.

(4) P 为多项式 则 $\widehat{P(\partial) f} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}$.

$P(\partial) \hat{f} = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}$.

(5) $\widehat{F * \psi} = \hat{F} \hat{\psi}$. □.

(6): $\mathcal{F}: S' \to S'$ 自同胚

5.10.2 非齐次 Sobolev 空间 $H^S(\mathbb{R}^d)$.

Def. $H^S(\mathbb{R}^d) := \{ u \in S'(\mathbb{R}^d) \mid \langle \xi \rangle^S \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$

$\langle \xi \rangle := (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ or $1+|\xi|$.

$\|u\|_{H^S} := \| \langle \xi \rangle^S \hat{u} \|_{L^2}$.

内积 $(u, v)_{H^S} := \int \langle \xi \rangle^{2S} \hat{u} \bar{\hat{v}} \, d\xi$.

Thm 5.10.4.

(1) $H^S(\mathbb{R}^d)$ 是 Hilbert 空间

(2). $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dense}}{\subset} H^S(\mathbb{R}^d)$.

证: (1) 设 $\{u_k\}$ 为 H^S 中的柯西列 即 $\|u_k - u_l\|_{H^S} \to 0$.

$\Rightarrow \| \langle \xi \rangle^S (\hat{u_k} - \hat{u_l}) \|_{L^2} \to 0$

L^2 Banach $\Rightarrow$ $\exists v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\langle \xi \rangle^S \hat{u}_k \to v$ in L^2.

令 $u = \langle \xi \rangle^{-S} v$.

则 $\|u\|_{H^S} = \| \langle \xi \rangle^S \hat{u} \|_2 = \|v\|_{L^2} < \infty$

(2). 只用证 $S \overset{\text{dense}}{\subset} H^S$ 即可. 由 $S \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$.

设 $u \in H^S(\mathbb{R}^d)$. 则 $\langle \xi \rangle^S \hat{u} \in L^2$.

故 $\exists v_k \in S$. $v_k \to \langle \xi \rangle^S \hat{u}$. in L^2.

令 $u_k = (v_k \langle \xi \rangle^{-S})^\vee \in S(\mathbb{R}^d)$ 则 $\|u_k - u\|_{H^S} = \|v_k - \langle \xi \rangle^S \hat{u}\|_{L^2} \to 0$

□.

Fact: $H_0^s(\mathbb{R}^d) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\text{in } H^s} = H^s(\mathbb{R}^d)$ $\quad \forall s \in \mathbb{R}$

Thm 5.10.5 $\quad s \in \mathbb{Z}$ 时 $\quad H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$

Pf. $s=0$ Trivial

$s>0$ 时 $\quad \|u\|_{W^{s,2}}^2 = \sum_{|\alpha|\le s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \overset{\text{Plancherel}}{=} \sum_{|\alpha|\le s} \|\xi^\alpha \hat{u}\|_{L^2}^2$

由: $\langle\xi\rangle^{2s} \lesssim \sum_{|\alpha|\le s} |\xi^{2\alpha}| \lesssim \langle\xi\rangle^{2s}$.

故 $\|u\|_{W^{s,2}}^2 \sim \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi = \|u\|_{H^s}^2$.

$s>0$ 时 consider $H^{-s} \overset{?}{=} W^{-s,2}$.

已知:
$$\begin{array}{ccc} (H^{s}(\mathbb{R}^d))' & = & (W^{s,2})' \\ \|? & & \| \\ H^{-s} & & W^{-s,2}(\mathbb{R}^d) \end{array}$$

故只用证: $H^{-s} = (H^s)'$.

$\supseteq$ $\quad \forall u \in (H^s)'$ $\quad \varphi \in S$ $\quad |\langle u, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{H^s}$
$$\overset{\text{def}}{=} C\|\langle\xi\rangle^k \hat{\varphi}\|_{L^2}$$

令 $\psi = (\langle\xi\rangle^k \hat{\varphi})^\vee$ 则 $\|\psi\|_2 = \|\langle\xi\rangle^k \hat{\varphi}\|_2$.
$\varphi = (\langle\xi\rangle^{-k} \hat{\psi})^\vee$.

$\Rightarrow |\langle u, (\langle\xi\rangle^{-s} \hat{\psi})^\vee\rangle| \lesssim \|\psi\|_{L^2}$.

$$\| \quad |\langle \hat{u}, \langle\xi\rangle^{-s} \hat{\psi}\rangle|$$

$$\| \quad |\langle \langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}, \hat{\psi}\rangle| \qquad \Rightarrow (\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u})^\vee \in (L^2)' = L^2$$

$$\| \quad |\langle (\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u})^\vee, \psi\rangle|. \qquad \Rightarrow \langle\xi\rangle^{-s}\hat{u} \in L^2 \qquad \Rightarrow \hat{u} \in H^{-s}.$$

$\subseteq$: $\forall u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. $\quad v \in H^s(\mathbb{R}^d)$

$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} u \bar{v}\, dx$

$|\langle u, v\rangle| = \left|\int \hat{u}\, \bar{\hat{v}}\, d\xi\right| = \left|\int \langle\xi\rangle^{-s} \hat{u} \langle\xi\rangle^{s} \bar{\hat{v}}\, d\xi\right|$
$$\le \|u\|_{H^{-s}} \|v\|_{H^s} < \infty$$

□

Thm 5.10.6 (Gagliardo–Nirenberg–Sobolev)

$0 \le s < \frac{d}{2}$ 时. $H^s \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ $\quad 2 \le q < 2^* := \frac{2d}{d-2s}$

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

Pf: $\|f\|_{L^q} = \|(\hat{f})^\vee\|_{L^q} \underset{\text{Hausdorff-Young}}{\le} \|\hat{f}\|_{L^{q'}}$

$$= \|\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}\hat{f}\|_{L^{q'}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|\langle\xi\rangle^{-s}\|_{L^r}\|\langle\xi\rangle^{s}\hat{f}\|_{L^2}$$

$$\underset{*}{\le} C\|f\|_{H^s}$$

$s\cdot r > d$. $\quad \frac{1}{q'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}$

$(\Rightarrow \frac{s}{d} > \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$

$\Rightarrow \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{s}{d} = \frac{d-2s}{2d}$)

□

问：临界嵌入 $H^s \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}$ 是否成立？

$0 \le s < \frac{d}{2}$ 时. 成立.

为了证明的简便，我们只对齐次Sobolev嵌入进行证明.

Def: $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in S'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d).\ \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}(\xi)\|_{L^2} < \infty\}$

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Remark: 非齐次Sobolev空间中. $\langle\xi\rangle^s$ 刻画的是前s阶导数全属于L^2 (设$s \in \mathbb{Z}_+$. 二项式展开$\langle\xi\rangle^s$). 齐次Sobolev空间则是刻画最高阶(第s阶导数).

Fact: (1) $s_0 \le s \le s_1$ 时. $\dot{H}^{s_0} \cap \dot{H}^{s_1} \subset \dot{H}^s$.

(2) $\dot{H}^{-s} \underset{s \in \mathbb{Z}_+}{=} \{u \in S'(\mathbb{R}^d) \mid u = \sum_{|\alpha| \le s} \partial^\alpha u_\alpha.\ u_\alpha \in L^2\}$.

~~Prop 5.10.2: $\dot H^s$(~~

(3). $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ 是 Hilbert 空间 $\Leftrightarrow s<\frac{d}{2}$.

(反例: $s\geq\frac{d}{2}$ 时. 设 C 是 $B(0,1)$ 中一个环形. $C\cap 2C=\phi$.

$$\Sigma_n=\mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k(s+\frac{d}{2})}}{k}1_{2^{-k}C}\Big)$$

$$\|\hat{\Sigma}_n\|_{L^1(B(0,1))}=C\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k(s-\frac{d}{2})}}{k}$$

$$\|\Sigma_n\|_{\dot H^s}^2=C\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\lesssim 1.$$

$s\geq\frac{d}{2}$ 时, $n\to\infty$ 时. $\|\hat{\Sigma}_n\|_{L^1}\to\infty$ 矛盾.

~~而~~ 这与 Fact: $|||u|||:=\|\hat u\|_{L^1(B(0,1))}+\|u\|_{\dot H^s}$ $(\dot H^s,|||\cdot|||)$ Banach

$(\overset{\dot H^s\ \text{Hilbert}}{\Rightarrow}.\ \|\hat u\|_{L^1}\lesssim\|u\|_{\dot H^s}.$ 矛盾 $)$.

(4). $s<\frac{d}{2}$ 时. $S_0(\mathbb{R}^d):=\{u\in S(\mathbb{R}^d)\mid \hat u$ 在 $\xi=0$ 附近为0$\}\overset{\text{dense}}{\subseteq}\dot H^s$.

(5) $(\dot H^s)'=\dot H^{-s}$.

看 Thm 5.10.3: $\dot H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. $0\leq s<\frac{d}{2}$, $2^*=\frac{2d}{d-2s}$.

证明之前 我们先证2个引理.

Def (Hardy-Littlewood 极大函数). $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

$$Mf(x):=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy.$$

lemma 5.10.4 (极大函数 L^p 有界性)

(1) $1<p\leq\infty$ 时. $\|Mf\|_p\lesssim_p\|f\|_p$.

(2) $p=1$. 反例 见 Stein 实分析 习题3.4.

(3) 弱 L^1: $\mu\{x:|Mf(x)|>\alpha\}\lesssim\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$. (由Vitali覆盖引理).

Proof: $p=\infty$ 显见. 结合(3) 用 Marcinkiewicz 插值即可.

下面我们不用插值. 直接硬算.

注意到 $\forall f\in L^p$. $\int|f(x)|^p\,dx=\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x:|f(x)|>\alpha\}\,d\alpha$

那么 $\int |Mf(x)|^p dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{Mf(x)|>\alpha\}\, d\alpha$.

$f\in L^p$ $1<p<\infty$ 由于 $L^p\subseteq L^1+L^\infty$ 知 $\exists f_1\in L^1$, $f_\infty\in L^\infty$

s.t. $f=f_1+f_\infty$

不妨取成 $f_1=f\chi_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}$

$f_\infty=f\chi_{\{|f|\le\frac{\alpha}{2}\}}$.

则由于 H-L 极大函数是次线性的. 故 $Mf(x)\le Mf_1(x)+Mf_\infty(x)$.

从而 $\mu\{|Mf(x)|>\alpha\}\le\mu\{x:|Mf_1(x)|>\frac{\alpha}{2}\}+\underbrace{\mu\{x:|Mf_\infty(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}_{0}$.

$$=\mu\{x:|Mf_1(x)|>\tfrac{\alpha}{2}\}$$

$$\overset{\text{弱}L^1}{\le}\frac{A}{\alpha}\|f_1\|_{L^1}$$

$$=\frac{A}{\alpha}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f|$$

从而

$$\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x:|Mf(x)|>\alpha\}$$

$$\le\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\frac{A}{\alpha}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f|\,dx\,d\alpha$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}A\int|f|^p\int_0^{2|f(x)|}p\alpha^{p-2}\,d\alpha\,dx$$

$$=\left(2^{p-1}\cdot\frac{p}{p-1}\cdot A\right)\int|f|^p$$

$\Rightarrow \|Mf\|_p\lesssim A_p\|f\|_p$ $\square$.

下面再证明 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

此为 $\dot{H}^s\hookrightarrow L^{2^*}$ 的一般形式.

Lemma 5.10.5 (H-L-S不等式)

$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $0<\gamma<d$, $1<p<q<\infty$, $\frac{1}{q}+1=\frac{1}{p}+\frac{\gamma}{d}$

则 $\||\cdot|^{-\gamma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{p,q,d} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Proof: $(f*|\cdot|^{-\gamma})(x) = \int f(x-y)\frac{1}{|y|^{\gamma}}\,dy = \underbrace{\int_{|y|>R}}_{I_1} + \underbrace{\int_{|y|\le R}}_{I_2}$

R待定 可与x有关

I_1: 由 $\Rightarrow p' = \frac{p'd}{q}+d > d$

由Hölder.

$$I_1 \le \|f(x-y)\|_{L^p_y}\, \||y|^{-\gamma}\cdot\chi_{\{|y|>R\}}\|_{L^{p'}_y}$$

$$= \|f\|_p \int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{\gamma p'}} \lesssim_{p,q,d} \|f\|_p\cdot R^{-\frac{d}{q}}$$

I_2: 消灭 $|y|^{-\gamma}$ 的奇异性. 作二进分解.

$$I_2 = \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{2^{-(j+1)}R\le|y|\le 2^{-j}R} f(x-y)\cdot\frac{dy}{|y|^{\gamma}} \le \sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{-(j+1)}R\right)^{-\gamma}\int_{2^{-(j+1)}R\le|y|\le 2^{-j}R}|f(x-y)|\,dy$$

$$\le \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{(j+1)\gamma}R^{-\gamma}\underbrace{\boxed{\int_{|y|\le 2^{-j}R}\frac{|f(x-y)|}{(2^{-j}R)^d}}}_{\text{人为构造极大函数!}}(2^{-j}R)^d\,dy$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\gamma}\, 2^{-j(d-\gamma)} R^{d-\gamma} Mf(x) = C R^{d-\gamma} Mf(x).$$

$$\Rightarrow I_1+I_2 \lesssim \|f\|_p\cdot R^{-\frac{d}{q}} + R^{d-\gamma}Mf(x).$$

取 $R = \|f\|_{L^p}^{p/d} \big/ Mf(x)^{p/d}$. 上式 $\lesssim \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}(Mf)^{\frac{p}{q}}$

$$\Rightarrow \|f*\cancel{}|\cdot|^{-\gamma}\|_{L^q} \lesssim \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}\underbrace{\|(Mf)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q}}_{=\|Mf\|_p^{\frac{p}{q}}} \overset{5.10.4}{\lesssim} \|f\|_p^{1}$$

$\square$

~~令 由 H-L-S~~

而 $\widehat{|\cdot|^{-\nu} * f}(\xi) = \widehat{|\cdot|^{-\nu}}(\xi)\hat{f}(\xi)$

$$= C_{d,\nu}|\xi|^{-(d-\nu)}\hat{f}(\xi) =: \hat{g}(\xi).$$

H-L-S $\Rightarrow$ $\|g\|_{L^q} \lesssim \|(|\xi|^{d-\nu}\hat{g})^\vee\|_{L^p}$

取 $p=2$. $s=d-\nu$. 则 $\frac{1}{q}+1=\frac{1}{2}+\frac{\nu}{d}$

$$\Rightarrow q=2^*.$$

$$\Rightarrow \|g\|_{L^{2^*}} \lesssim \|g\|_{\dot{H}^s}.$$

$\square$

下面证明 Morrey 嵌入.

Thm 5.10.8 : $s>\frac{d}{2}$ $s-\frac{d}{2}\notin \mathbb{Z}$ 时. $\dot{H}^s \hookrightarrow C^{k,\rho}$. , $k=[s-\frac{d}{2}]$, $\rho=\{s-\frac{d}{2}\}$.

且 $\forall u\in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. $\sup\limits_{|\alpha|=k}\sup\limits_{x\neq y}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\rho} \lesssim_{s,d} \|u\|_{\dot{H}^s}$.

证明: 只证 $k=0$ 的情况.

$\hat{u}=\hat{u}\chi_{\{|\xi|\le 1\}}+\underset{\sim\sim}{\hat{u}\chi_{\{|\xi|>1\}}}\in L^1 \Rightarrow u$ 有界连续.

~~$\widehat{u_{L,A}}$ ... $\widehat{u_{h,A}}$~~

取 $u_{L,A}=(\hat{\theta}(\frac{\xi}{A})\hat{u}(\xi))^\vee$. $\theta\in S(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\theta}\in C_c^\infty$, $0\le\hat{\theta}\le 1$, $\hat{\theta}$ 在0附近$=0$

$u_{h,A}=u-u_{L,A}$

$|u_{L,A}(x)-u_{L,A}(y)| \le \|\nabla u_{L,A}\|_{L^\infty}|x-y|$

$\|\nabla u_{L,A}\|_{L^\infty} \lesssim \|\widehat{\nabla u_{L,A}}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d}|\xi||\widehat{u_{L,A}}(\xi)|d\xi.$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \Big(\int_{|\xi|\le CA}|\xi|^{2-2s}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{\dot{H}^s}$$

$$\lesssim \frac{A^{1-\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\|u\|_{\dot{H}^s}. \qquad \rho=s-\frac{d}{2}.$$

$\|u_{h,A}\|_{L^\infty} \le \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{u_{h,A}}(\xi)|d\xi \overset{\text{同上}}{\lesssim} \frac{C}{\rho^{\frac{1}{2}}}A^{-\rho}\|u\|_{\dot{H}^s}.$

取 $A=|x-y|^{-1}$ 即可

$\square$

$s=\frac{d}{2}$ 时. 没有 $H^{\frac{d}{2}} \hookrightarrow L^\infty$

但有如下结果

Thm 5.10.9 (Moser-Trudinger). $\exists\, c>0,\ C>0$ s.t. $\forall u\in H^{d/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left\{\exp\left(c\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\dot H^{\frac{d}{2}}}}\right)^2\right)-1\right\} dx \le C.$$

证明见

Bahouri 所著的 ~~Nontin~~ Fourier Analysis and Nonlinear PDE.

Def. $BMO(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \|f\|_{BMO} := \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f-\underbrace{f_B}_{\frac{1}{|B|}\int_B f\,dx}|\,dx < +\infty \right\}$.

$\|c\|_{BMO}=0$ 故 BMO 不是范数.

Thm 5.10.10. 设 $u\in L^1_{loc}\cap \dot H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, 则 $u\in BMO(\mathbb{R}^d)$.

且 $\|u\|_{BMO} \lesssim \|u\|_{\dot H^{\frac{d}{2}}}$.

Proof: 同 Thm 5.10.8 用 High-low 分解.

$$\int_B |u-u_B|\frac{dx}{|B|} \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\le} \|u_{l,A}-(u_{l,A})_B\|_{L^2(B;\frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{|B|^{\frac12}}\|u_{h,A}\|_{L^2}$$

设 B 半径为 R.

则
$$\begin{aligned}\|u_{l,A}-\langle u_{l,A}\rangle_B\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} &\le R\|\nabla u_{l,A}\|_{L^\infty}\\ &\le R\|\widehat{\nabla u_{l,A}}\|_{L^1}\\ &= CR\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{1-\frac{d}{2}}|\xi|^{\frac{d}{2}}|\widehat{u_{l,A}}|\,d\xi\\ &\le CR\cdot A\cdot\|u\|_{\dot H^{\frac{d}{2}}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_B |u-u_B|\frac{dx}{|B|} \le CRA\|u\|_{\dot H^{\frac{d}{2}}} + C(RA)^{-\frac{d}{2}}\left(\int_{|\xi|\ge A}|\xi|^d|\hat u(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac12}$$

第2项用 Plancherel

取 $A=\frac{1}{R}$ 即可

□

Rmk: $H^s_{(\mathbb{R}^d)} \hookrightarrow L^q$ 间是没有紧嵌入的.

可以证明: 设 $f\in H^s(\mathbb{R}^d)$, $f_n(x)=f(x-n)$

则 $f_n \rightharpoonup 0$ in H^s.

若 $H^s \hookrightarrow\hookrightarrow L^q$ 则 $f_n \to 0$ in L^q

但 $\|f_n\|_{L^q} = \|f\|_{L^q} > 0$. 矛盾!

但不同 H^s 之间有紧嵌入.

Thm 5.10.11 $t<s$ 时. 乘一个 Schwartz 函数是 H^s 到 H^t 的紧算子.

Proof: 设 $\varphi\in S$. $\{u_n\}\subset H^s(\mathbb{R}^d)$. $\sup\limits_n \|u_n\|_{H^s} \le 1$.

要证的是: $\exists$ 子列 u_{n_k} s.t. $\{\varphi u_{n_k}\}$ 在 $H^t(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛.

$\exists$ 子列

$u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $H^s(\mathbb{R}^d)$ (By Banach-Alaoglu).

$\|u\|_{H^s} \le 1$.

令 $v_{n_k} = u_{n_k} - u$. 则 $\sup\limits_n \|\varphi v_{n_k}\|_{H^s} \le C$.

要证: $\varphi v_k \to 0$ in $H^t(\mathbb{R}^d)$. 直接计算如下:

$$\int \langle\xi\rangle^{2t} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi|\le R} \langle\xi\rangle^{2t} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|>R} \langle\xi\rangle^{2t} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\le \int_{|\xi|\le R} \langle\xi\rangle^{2t} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi + \frac{\|\varphi v_n\|_{H^s}^2}{(1+R^2)^{s-t}}$$

$\downarrow 0$ as $R\to\infty$. $\forall n$

而 $\widehat{\varphi v_n}(\xi) = \int \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta$

$$= \int \underbrace{\left(\langle\eta\rangle^{-2s}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\right)}_{=:\ \widehat{\psi_\xi}(\eta)} \hat{v}_n(\eta)\langle\eta\rangle^{2s} d\eta$$

$$= (\psi_\xi, v_n)_{H^s}$$

由 $v_n \rightharpoonup 0$ in H^s. 故 $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$. $\widehat{\varphi v_n}(\xi) \to 0$ as $n\to\infty$

下证: $\sup\limits_{\substack{|\xi|\le R\\ n\in\mathbb{Z}_+}} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)| \le M < \infty$ 若能证此, 则由DCT即得结论

Check:

$$|\widehat{\varphi v_n}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)||\hat{v}_n(\eta)|\,d\eta$$

$$\le \|v_n\|_{H^s}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\eta\rangle^{-2s}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2\,d\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\varphi\in S$

$$\lesssim \|v_n\|_{H^s}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\langle\eta\rangle^{-2s}}{\langle\xi-\eta\rangle^{d+2s+2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \|v_n\|_{H^s}\left(\int_{|\eta|\ge 2R} + \int_{|\eta|<2R}\right) \cdots$$

$$\lesssim \|v_n\|_{H^s}\int_{|\eta|\le 2R}\langle\eta\rangle^{2|s|}\,d\eta + \|v_n\|_{H^s}\int_{|\eta|>2R}\langle\eta\rangle^{2|s|}\langle\xi-\eta\rangle^{-d-2s-2}\,d\eta$$

$|\xi|\le R$ 时. $|\xi-\eta|\ge\frac{|\eta|}{2}$. 直接代入计算即可

$\square$

还有一些重要结论.

- Morse Ineq: $\|fg\|_{H^s}\lesssim_{s,d}\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}+\|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty}$

- General GNS: $1<q,r\le\infty$ $\quad 0<\sigma<s<\infty$

  则 $\|u\|_{\dot{W}^{\sigma,p}}\lesssim\|u\|_{L^q}^{\theta}\|u\|_{\dot{W}^{s,r}}^{1-\theta}$ $\quad \frac{1}{p}=\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{r}$

  $\theta=1-\frac{\sigma}{s}$.

- 特别: $s>\frac{d}{2}$. 由 $H^s\hookrightarrow L^\infty$ 知: $\|fg\|_{H^s}\lesssim\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$

  H^s是代数.

以上,前2条要用 Sobolev 空间的 Littlewood-Paley 刻画.

即 $\|u\|_{\dot{W}^{s,p}}\approx\Big\|\,\|P_N u\|_{L^p_x}2^{Ns}\Big\|_{\ell^2_N}$

详见[1] Terence Tao : Nonlinear Dispersive PDE, Appendix A

[2] Bahouri : Fourier Analysis and Nonlinear PDE, ch2.

[3] Loukas, Grafakos : Modern Fourier Analysis_ GTM250.

最后我们证明 H^s 的迹定理，这与 $W^{1,p}(U)$ 的结论不同

Thm 5.10.11：设 $s>\frac{1}{2}$，则 $\gamma: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$

$$\phi \mapsto \gamma(\phi): (x_2 \dots x_d) \mapsto \phi(0, x_2, \dots, x_d)$$

可以连续延拓到：$H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.

证明：设 $x' = (x_2 \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

$$\phi(0, x') = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x'\cdot\xi'} \hat{\phi}(\xi_1, \xi') \, d\xi_1 d\xi'$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{2\pi i x'\cdot\xi'} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi_1, \xi') d\xi_1 \right) d\xi'$$

$$\Rightarrow \widehat{\gamma\phi}(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi_1, \xi') d\xi_1$$

$$|\widehat{\gamma\phi}(\xi')|^2 \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (1+\xi_1^2+|\xi'|^2)^{-s} d\xi_1}_{<\infty \ (s>\frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi_1$$

$$\overset{\xi_1 = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\lambda}{=\!=} \langle\xi'\rangle^{-s+\frac{1}{2}} \underset{\int (1+\lambda^2)^{-s} d\lambda}{\underbrace{C_s}} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi_1$$

$$\Longrightarrow \|\gamma(\phi)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}} \lesssim_s \|\phi\|^2_{H^s}$$

下面设 $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，$\chi(0)=1$.

$$Rv(x) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{2\pi i x'\cdot\xi'} \chi(x_1\langle\xi'\rangle) \hat{v}(\xi') d\xi'.$$

$$\widehat{Rv}(\xi) = \langle\xi'\rangle^{-1} \hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right) \hat{v}(\xi').$$

$$\Rightarrow \|Rv\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi_1|^2+|\xi'|^2)^s \langle\xi'\rangle^{-2} \left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right)\right|^2 |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi$$

$$\leq C_N \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\frac{|\xi_1|^2}{\langle\xi'\rangle^2}\right)^{s-N} \langle\xi'\rangle^{-1} d\xi_1 \right) \langle\xi'\rangle^{2s-1} |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi'$$

N充分大 $\downarrow$

$$\leq C_N \|v\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \gamma R v = v.$$

$\square$