

Ch 6 二阶线性椭圆方程

§ 6.1 弱解的定义

本章只考虑如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}, \quad \text{其中 } U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ 开},$$

$$u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ 给定.}$$

其中 L 具有两种形式之下：

$$\textcircled{1} \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(x) \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \partial_i u + c(x)u. \quad (\text{散度形式})$$

$$\textcircled{2} \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b^i(x) \partial_i u + cu. \quad (\text{非散度形式})$$

Rmk : 若 $a^{ij} \in C^1$, 则 $\textcircled{1}$ 又可以写成 $\textcircled{2}$

$$\textcircled{2'}: Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x) \partial_i u + c(x)u, \quad \tilde{b}^i = b^i - \sum_{j=1}^n \partial_j a^{ij}.$$

事实上, 散度形式常用于研究弱解的存在性, 唯一性, 正则性.

非散度形式常用于研究极大值原理

下设 $a^{ij} = a^{ji}$

Def: 称微分算子 L (如上) 是一致椭圆的, 若 $\exists \theta > 0$ s.t. $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{成立: } \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2. \quad \text{a.e. } x \in U. \quad \text{该条件称作一致椭圆条件.}$$

从而, 椭圆算子 L 的最高次系数矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ 特征值 $\geq \theta$. (实对称)

$$\text{例如. } a^{ij} = \delta_{ij}, \quad b^i = c = 0 \Rightarrow L = -\Delta.$$

下设 $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U), f \in L^2(U)$.

Def: (1) 双线性形式 $B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u \cdot v + cuv \, dx$
 $\forall u, v \in H_0^1(U)$.

(2). 称 $u \in H_0^1(U)$ 是 (*) $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解, 若 $\forall v \in H_0^1(U)$.

成立 $B[u, v] = (f, v)_{L^2}$, 该式称作 (*) 的变分形式.

更一般地, 考虑

$$(\#) \quad \begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \quad \begin{array}{l} L \text{ 为 } \textcircled{1} \text{ 的形式} \\ f^i \in L^2(U) \end{array}$$

令 $f = f^o - \sum_{i=1}^n \lambda_i f^i \in H^-(U) = (H_0^1(U))^*$.

例：称 $u \in H_0^1(U)$ 是 (*) 的弱解，指的是 $B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

$$f = \int_U f^o v + \sum_{i=1}^n \lambda_i f^i \delta_i v.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $H^-(U)$ 与 $H_0^1(U)$ 的作用.

Remark : (1) 上述定义事实上都可以直接由分布理论的角度来理解,

即在 D' 中, $L_u = f \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty, \langle L_u \cdot \varphi \rangle = \langle f \cdot \varphi \rangle$, 再写成作用
程式的形状, 并注意到 C_c^∞ dense in H_0^1 即可.

(2) 同理, $\partial U \in C^1$ 时, 我们可以定义 $\begin{cases} L_u = f \text{ in } U \\ u = g \text{ on } \partial U \end{cases}$ 的弱解,

实际上, 我们只须设 $w \in H^1(U)$, $T_r w = g$. $\tilde{u} = u - w$ 即可

§ 6.2 Lax-Milgram 定理及其在椭圆方程弱解存在定理.

Thm 6.2.1: 设 H 是 Hilbert 空间, $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ 是双线性映射.

且 $\exists \alpha, \beta > 0$, 使 ① $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\| \quad (\text{Boundedness}) \quad \forall u, v \in H$.

② $|B[u, u]| \geq \beta \|u\|^2 \quad (\text{Coercivity}). \quad \forall u \in H$.

例. 任给定 H 上的有界线性泛函 $f: H \rightarrow \mathbb{R}$,

都存在唯一 $u \in H$, 使 $B[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H$.

Proof : Step 1: Riesz 表示定理:

Fix $u \in H$, 则 $v \mapsto B[u, v]$ 是 H 上的有界线性泛函, 于是由 Riesz 表示定理,

存在唯一 $w \in H$, s.t. $B[u, v] = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in H$.

下面希望, 存在 $A: u \mapsto w$, 去证明 $\begin{cases} A: H \rightarrow H \text{ 是有界线性算子.} \\ A \text{ 是一一映射.} \\ \text{Im } A \subset H^\perp, \quad 0 = (\text{Im } A)^\perp. \end{cases}$

Step 2: $A: H \rightarrow H$ 有界线性.

线性显然, 因为 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad u_1, u_2 \in H$.

$$\langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle = B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]$$

$$= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v]$$

$$= \lambda_1 \langle A u_1, v \rangle + \lambda_2 \langle A u_2, v \rangle = \langle \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2, v \rangle$$

$\Rightarrow A$ 线性

有界: $\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \cdot \|Au\|$
 $B[\cdot, \cdot]$ 有界性条件①

$\Rightarrow \|A\| \leq \alpha.$

Step 3: A 是 1-1 的, 且 $\text{Im } A$ 闭

$\forall w \in \overline{\text{Im } A}$, 取 $v_n \in H$. s.t. $w = \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n$ in H .

由 Coercivity ②: $\forall n, p \in \mathbb{Z}_+$.

$$\begin{aligned} \beta \|v_{n+p} - v_n\|^2 &\leq |B[V_{n+p} - V_n, V_{n+p} - V_n]| \\ &= |\langle A(V_{n+p} - V_n), A(V_{n+p} - V_n) \rangle| \\ &\leq \|V_{n+p} - V_n\| \cdot \|AV_{n+p} - AV_n\|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|V_{n+p} - V_n\| \leq \frac{1}{\beta} \|AV_{n+p} - Av_n\| \rightarrow 0. \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ 为 H 中的柯西数列. $\exists v^* \in H$. $v_n \rightarrow v^*$ in H .

由 A 连续 (Step 2), 有 $w = Av^* \in \text{Im } A \Rightarrow \text{Im } A$ 闭]

Step 4: $(\text{Im } A)^\perp = \{0\}$; 设 $w \in (\text{Im } A)^\perp$. 由 $\langle Av, w \rangle = 0$
 $\Rightarrow B[v, w] = 0$

令 $v=w$ 有 $\beta \|w\|^2 \leq 0 \Rightarrow w=0$

因此, A 是 $H \rightarrow H$ 的 有界线性满射.

$\exists ! w \in H$.

再由 Riesz 表示定理, $\forall v \in H$. $\langle f, v \rangle = (w, v)$

由 Step 2-4 有 $Au=w$ ($\exists u \in H$)

$$\Rightarrow B[u, v] = \langle Au, v \rangle = \langle w, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Step 5:
 w 为 1-1 性 若 \tilde{u} 也满足. 则 $B[u - \tilde{u}, v] = 0 \quad \forall v \in H$.

取 $v=u-\tilde{u}$ 则有 $u=\tilde{u}$.

□

3

Thm 6.2.2 (能量估计), $\exists \alpha, \beta > 0$ $\gamma \geq 0$ s.t.

$$\textcircled{1} \quad |B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$

$$\textcircled{2} \quad \beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_2^2 \quad \forall u, v \in H_0^1(U).$$

Proof: 直接计算即可

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_\infty \int_U |D_u|^i |D_v|^j dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \int_U |D_u|^i |v| dx + \|c\|_\infty \int_U |u| |v| dx \\ &\leq C \left(\|Du\|_2 \|Dv\|_2 + \|Du\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right) \\ &\leq C (\|u\|_2 + \|Du\|_2) \# (\|v\|_2 \|Dv\|_2) \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_0^1}. \quad \text{for some } \alpha > 0. \end{aligned}$$

$$B[u, u] = \int_U \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u}_{\Theta} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u u + c u^2 dx.$$

$$\geq \Theta \underbrace{\int_U |Du|^2}_{\frac{1}{2} \|Du\|_2^2} - \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \int_U |D_u| |u| dx - \|c\|_\infty \int_U u^2 dx.$$

Hölder $\geq \Theta \int_U |Du|^2 - C_1 \|Du\|_2 \|u\|_2 - C_2 \|u\|_2^2$

Young $\geq \Theta \int_U |Du|^2 - C_1 \varepsilon \|Du\|_2^2 - C_1 \cdot \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_2^2 - C_2 \|u\|_2^2$

$$\Rightarrow (\Theta - C_1 \varepsilon) \|Du\|_2^2 \leq B[u, u] + (C_1 + \frac{1}{4\varepsilon} + C_2) \|u\|_2^2$$

$\frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\Theta}{2}$ 即有: $\frac{\Theta}{2} \|Du\|_2^2 \leq B[u, u] + C_3 \|u\|_2^2$
两边加上 $\frac{\Theta}{2} \|u\|_2^2$ 即得

注意3. 若 $\gamma > 0$, 则 $B[\cdot, \cdot]$ 并不符合 Lax-Milgram 定理的条件. 因此, 在叙述弱解的存在性定理时, 应作出改动.

Thm 6.2.3 (第一存在定理).

$$\exists \gamma > 0 \text{ s.t. } \forall f \in L^2(U), \text{ 有: } (**) \begin{cases} L_u + \mu u = f & \text{in } U, \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

存在唯一的弱解 $u \in H_0^1(U)$.

Proof: 由 6.2.2 中 γ . 取 $\mu > \gamma$. $B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v)$. $\forall u, v \in H_0^1(U)$

$$L_\mu u := L_u + \mu u$$

且 L_μ 是 ~~一致~~ 一致有界的.

$B_\mu[\cdot, \cdot]$ 满足 Lax-Milgram Thm 的条件

Fix $f \in L^2(U)$. $\langle f, v \rangle := (f, v)_{L^2}$. $v \mapsto (f, v)$ 是 $H_0^1(U)$ 上的有界线性泛函 (等价范数为 $\|f\|_{L^2}$).

由 Lax-Milgram 定理. $\exists! u \in H_0^1(U)$

$$B_\mu[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad v \in H_0^1(U). \quad u \text{ 是 } (*) \text{ 的弱解. } \square$$

Remark: $H_0^1 \rightarrow H^{-1}$.

类似地, 我们可以证明. $\forall f^i \in L^2(U) \quad (0 \leq i \leq n)$.

$$\exists! \text{ 弱解 } u. \text{ of } \begin{cases} L_u + \mu u = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i & \text{in } U, \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

□

§ 6.3 Fredholm = 紧 - 与弱解存在性.

本节只讨论 Hilbert 空间的结论，- 并且 Banach 空间 Fredholm 定理，
参见

Haim Brezis : Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs,
chapter 6.

or 张恭庆上册 Ch 4. 1 - 4.3.

6.3.1: 紧算子: 有界线性算子.

设 X, Y 是实 Banach 空间, 称 $K: X \rightarrow Y$ 是紧算子, 若 K 将 X 中任何有界集 B , 映成 Y 中的 $\overline{\text{紧集}}$ $K(B)$.

不难证明, “这等价于” 对任何 X 中的 $\overline{\text{有界序列}} \{u_n\}$, $\{Ku_n\}$ 在 Y 中有子列 $\{Ku_{n_j}\}$ 收敛.

Prop 6.3.1 (紧算子的基本性质).

(1). 若 $x_n \rightarrow x$ in X . 则 $Kx_n \rightarrow Kx$ in Y .

(2). 若 $K_1: X \rightarrow Y$, $K_2: Y \rightarrow Z$ 有一个是紧算子, 另一个是有界线性算子; 则 $K_2 \circ K_1: X \rightarrow Z$ 是紧算子

(3). 若 H 是 Hilbert 空间, 则 $K: H \rightarrow H$ 是紧算子, 则 $K^*: H \rightarrow H$ 也是紧算子.

Proof: (1) $x_n \rightarrow x$ in X . 要证: $Kx_n \rightarrow Kx =: y$ in Y .

反证: 若不然, 则 $\exists \epsilon_0 > 0$, 正整数列 $\{n_k\} \rightarrow \infty$ s.t. $\|Kx_{n_k} - y\| \geq \epsilon_0$

claim: (For

Fact: (Corollary of Banach-Steinhaus Thm).

$x_n \rightarrow x$ 则 $\|x_n\|_X$ 有界

又因 K 紧, 故存在子列 $\{n_{k_j}\} \rightarrow \infty$ s.t. $Kx_{n_{k_j}} \rightarrow \text{某 } z \in Y$

希望: $Kx_{n_{k_j}} \rightarrow y$ in Y . 从而 $y = z$. (因 $Kx_{n_{k_j}} \rightarrow z$, 强极限存在则必弱极限) $\Rightarrow Kx_{n_{k_j}} \rightarrow y$

check this: $\forall y \in Y$.

$$\langle y^*, Kx_{n_{k_j}} - y \rangle = \langle K^*y^*, x_{n_{k_j}} - x \rangle \xrightarrow{x_{n_{k_j}} \rightarrow x} 0$$

(1) 为证.

$$\begin{aligned} &\text{check: } \\ &\|Kx_{n_{k_j}} - y\| \geq \epsilon_0 \end{aligned}$$

即

if

$$(2) X \xrightarrow{K_1} Y \xrightarrow{K_2} Z$$

若 K_1 紧， $\{u_n\}$ 在 X 中的有界序列在 Y 中有收敛子列 $\{K_1 u_n\}$

又 K_2 連續，故 $\{(K_2 \circ K_1) u_n\}$ 在 Z 中有收敛子列 $\Rightarrow K_2 \circ K_1$ 紧。

K_2 紧，類似。

(3) 設 $\{u_n\}$ 是 H 中的有界列。由 H 自反，據 Banach-Alaoglu 定理知，

存在弱收斂子列 $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in H

$$\text{要証: } K^* u_{n_j} \rightarrow K^* u$$

$$\text{check: } \|K^* u_{n_j} - K^* u\|^2 = \langle K^* u_{n_j} - K^* u, K^* u_{n_j} - K^* u \rangle$$

$$= \left\langle K \underbrace{(K^* u_{n_j} - K^* u)}_{\text{由 } K^* \text{ 線性}}, u_{n_j} - u \right\rangle$$

由 K^* 線性， $K^* u_{n_j} \rightarrow K^* u$

再由 K 紧， $K K^* u_{n_j} \rightarrow K K^* u$

$$\rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty$$

Thm 6.3.2 (Fredholm Alternative).

$K: H \rightarrow H$ 紧 (H 为可分 Hilbert 空間)，則

$$(1) \dim N(I-K) < +\infty, \text{ 其中 } N(I-K) = \{x \in H \mid (I-K)x = 0\}$$

$$(2) \text{Im}(I-K) \neq \emptyset$$

$$(3) \text{Im}(I-K) = N(I-K^*)^\perp.$$

$$(4) N(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ran Im}(I-K) = 0.$$

$$(5) \dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)^\perp.$$

Proof: (1). 反設 $\dim N(I-K) = +\infty$ ，在 $N(I-K)$ 中，可以找到林正交基 $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\text{且 } Ku_n = u_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{又: } m \neq n \text{ 时. } \|u_m - u_n\|^2 = \|u_m\|^2 - 2 \frac{\langle u_m, u_n \rangle}{\sqrt{m}} + \|u_n\|^2$$

$$\Rightarrow \|Ku_m - Ku_n\| = \sqrt{2}, \quad \forall m \neq n.$$

这与 K 的緊性矛盾 (因为 $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 一致有界， K 紧，故 $\{Ku_n\}$ 在 H 中有

(1) 为紧子列。

但上式
表明这不可能)

(2) 令 $\{v_k\}_1^\infty \subset \text{Im}(I-K)$, $v_k \rightarrow v$ (均为非零元).

则 $\exists \{u_k\} \subseteq N(I-K)^\perp$ s.t. $u_k - Ku_k = v_k$.

希望: 在 H 中, $u_k \rightarrow u$, 且 $u - Ku = v \in \text{Im}(I-K)$.
若有

则 claim: $\exists \gamma > 0$ s.t. $\|u - Ku\| \geq \gamma \|v\|$.

若 claim 对, 则 $\|v_m - v_n\| \geq \gamma \|u_m - u_n\| \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+$.

claim 证明如下:

反证. 若 claim 不对, 则 $\forall \gamma > 0$ 存在 $u_k \in N(I-K)^\perp$.

$$\begin{cases} \|u_k\| = 1, \\ \|u_k - Ku_k\| < \frac{\gamma}{K} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_k - Ku_k \rightarrow 0$$

但 $\{u_k\}_1^\infty$ 在 H 中一致有界, H 完备, 故由 Banach-Alaoglu 定理.

存在子列 $u_{k_j} \rightarrow u$ in H .

由于 K 是紧算子, 故 $Ku_{k_j} \rightarrow Ku$ in H .

$$\text{又 } u_k - Ku_k \rightarrow 0$$

$$\text{故 } u_{k_j} \rightarrow Ku = u \Rightarrow u \in N(I-K) \Rightarrow \forall j. (u_{k_j}, u) = 0$$

令 $j \rightarrow \infty$ 有 $u = 0$. 而 $\|u_{k_j}\| = 1$. 这不可能. claim 对.

于是 (2) 得证.

(3) 的成立只需注意到如下事实:

$$\overline{\text{Im } A} = N(A^*)^\perp \quad \forall \text{ 有界线性 } A: H \rightarrow H.$$

再结合 (2): $\text{Im}(I-K)$ 闭合.

(4) \Rightarrow : 先设 $N(I-K) = \{0\}$ 反设 $\text{Im}(I-K) \neq H$.

则 $H_1 = (I-K)(H) \subsetneq H$ 是 H 的真闭子空间(由 (2)).

$H_2 = (I-K)^2(H) \subsetneq H_1$ (因 $I-K$ 是单射, 故 $N(I-K) = 0$)

$H_k = (I-K)^k(H) \subsetneq H_{k-1} \subsetneq \dots \subsetneq H$ 是 H 的真闭子空间

$\forall k \in \mathbb{Z}_+$ 选取 $u_k \in H_k$, $\|u_k\|_H = 1$, $u_k \in H_{k+1}^\perp$.

$$\text{而 } \forall k > l: Ku_k - Ku_l = u_k - u_l + (Ku_k - u_k) - (Ku_l - u_l)$$

$$H_k \nsubseteq H_l \nsubseteq H_{l+1} \nsubseteq H_l. \Rightarrow u_k, Ku_k - u_k, Ku_l - u_l \in H_{l+1}^\perp$$

$$\text{但 } u_k \in H_{l+1}^\perp, \|u_k\|_H = 1 \quad 8$$

若 $\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$. 但因 $\{u_k\}$ 有解, 在 H 中必有收敛子列
 $\rightarrow \{Ku_k\}$ 必有(3)的收敛子列

故 (4) \Rightarrow 对.

不可能有 k, l , $k \neq l$

$\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$ 不成立!

\Leftarrow : 若 $H = \text{Im}(I - K)$ 由 (3): $N(I - K^*) = \{0\}$.

由 Prop (3) 有 K^* 紧, 故 $\Rightarrow \text{Im}(I - K^*) = H$.

\Rightarrow 但 $N(I - K) = R(I - K^*)^\perp = \{0\} \Rightarrow (4)$ 得证.

(5). 先证 $\dim N(I - K) \geq \dim \text{Im}(I - K)^\perp$. 若这成立, 则由 $\text{Im}(I - K^*)^\perp \subset N(I - K)$

有 $\dim N(I - K^*) \geq \dim \text{Im}(I - K^*)^\perp$

$$= \dim N(I - K)$$

$K \leq K^*$ 换一下, 又有反向不等式, 进而 (5) 得证.

为此, 我们用反证法: 反设 $\dim N(I - K^*) < \dim \text{Im}(I - K)^\perp$.

由 \exists 有界线性映射 $A: \mathbb{R}^{M(I-K)} \rightarrow \overline{\text{Im}(I-K)^+}$. 1-1 且不满.

延拓: $Au = 0 \quad \forall u \in N(I - K)^\perp$.

从而 A 是 H 上的有穷秩算子, 进而是紧算子.

$\Rightarrow K + A$ 紧.

Claim: $N(I - (K + A)) = \{0\}$.

check: 若 $u \in N(I - (K + A))$, 则 $u - Ku = Au \in \text{Im}(I - K)^\perp$.

$u \in N(I - K) \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

$\Rightarrow u \in \text{Im}(I - K)^\perp \Rightarrow u = 0$. (因 A 1-1).

在 $N(I - K)$ 上.

故 $K = K + A$, 对 K 用 (4)

得 $\text{Im}(I - (K + A)) = H$. 但这不可能, 因为如果 $v \in \text{Im}(I - K)^\perp$.

但 $v \notin \text{Im} A$.

则 $v - (Ku + Au) = v$ 无解

$\text{Im}(I - K)^\perp = N(I - K)$.

这表明 $v \notin \text{Im}(I - (K + A))$. 矛盾!

□

下面来看，如何将 Fredholm 二项式用于证明第二存在定理。

Def：(1) L 的伴随算子 L^* 定义如下：设 $b^i \in C^1(\bar{U})$ 。

$$L^*v := -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i (a^{ij} \partial_j v) - \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v + (c - \sum_{i=1}^n b^i b^i) v.$$

(2). 伴随双线性形式： $B^*: H_0^1(U) \times H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\langle v, u \rangle \mapsto B[u, v] \quad \forall u, v \in H_0^1(U).$

(3) 称 $v \in H_0^1(U)$ 是伴随方程 $\begin{cases} L^*v = f & \text{in } U \\ v = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解，是指 $B^*[v, u] = (f, u)$ $\forall u \in H_0^1(U)$.

Rank： L^* 的定义是自然的，因为形式上正确。

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle \quad (\text{伴随的形式})$$

$$\sum_{i,j} \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j v + \sum_i \int_U b^i \partial_i u \cdot v + \int_U c u v$$

!! 分部积分；边界项 vanishing.

$$-\sum_{i,j} \int_U \partial_i (a^{ij} \partial_j v) \cdot u - \sum_i \int_U \partial_i (b^i v) \cdot u + \int_U c u v.$$

$$\left\langle u, -\sum_{i,j} \cancel{\int_U a^{ij} \partial_i (a^{ij} \partial_j v)} - \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v + (c - \sum_i b^i b^i) v \right\rangle$$

$$\langle u, L^*v \rangle.$$

由此 B^* 的定义也是自然的。

□

Thm 6.3.3 (弱解存在性定理).

(1). 以下两条恰好成立一条.

(a) : $\forall f \in L^2(U)$, 存在唯一的方程 (*) $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 存在唯一的弱解 $u \in H_0^1(U)$.

(b) : 对齐次方程 (#) $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$, 存在唯一的弱解 $u \neq 0$,

(2). 若 (b) 成立, 则 (#) 的弱解空间 $N \subset H_0^1(U)$ 是有穷维的, 且维数等于以下伴随方程的弱解空间 $N^* \subset H_0^1(U)$: (#)*: $\begin{cases} L^* v = 0 & \text{in } U \\ v = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$.

(3) (*) 有弱解 $\Leftrightarrow (f, v) = 0 \quad \forall v \in N^*$.

(a), (b)

Proof: 首先处理一些记号问题

在第一存在定理中, 取 $\mu = v$.

令双线性形式 $B_v[u, v] = B[u, v] + v(u, v)$.

$$L_v u := L_u + v u$$

由第一存在定理, $\forall g \in L^2(U) \exists ! u \in H_0^1(U)$ s.t. $B_v[u, v] = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

在该式成立时, 我们记 $u = L_v^{-1} g$

Observation: $u \in H_0^1(U)$ 是 (*) 的弱解.

$\Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(U), B_v[u, v] = \langle vu + f, v \rangle$ (两边加上 $v u$ 即可)

$\Leftrightarrow u = L_v^{-1}(vu + f) \Leftrightarrow u - vL_v^{-1}u = L_v^{-1}f$.

令 $Ku = vL_v^{-1}u$. $h = L_v^{-1}f$.

则 $\Leftrightarrow (I - K)u = h$.

希望证明: $K: L^2(U) \rightarrow L^2(U)$ 是紧算子.

若能的證明 $K: L^2 \rightarrow L^2$ 當 .

則由 Thm 6.3.2 (Fredholm = $\text{dim } N(I-K) < \infty$) 當：

(α') $\forall h \in L^2(U)$, $(I-K)U = h$ 有唯一解 $u \in L^2(U)$ (若 $N(I-K) = 0$ 的 case)

當

(β') $\Rightarrow U - Ku = 0$ 在 $L^2(U)$ 有解 . (若 $N(I-K) \neq 0$)

若 (α') Case: $(\alpha') \Leftrightarrow (\beta')$ 有唯一解 $u \in H_0^1(U)$.

又: ~~若~~ (α') 有解 $\Leftrightarrow \langle h, v \rangle = 0 \quad \forall v$ satisfies $v - Kv = 0$

$$\text{而 } \langle h, v \rangle = \frac{1}{\rho} \langle Kf, v \rangle = \frac{1}{\rho} \langle f, K^*v \rangle = \frac{1}{\rho} \langle f, v \rangle. \text{ 故由 } (\Rightarrow) \langle f, v \rangle = 0.$$

若 (β') Case: $\cancel{N(I-K) \neq 0} \Leftrightarrow \cancel{\text{Im}(I-K) = 0}$

$$\cancel{N(I-K^*)^\perp}$$

$$N(I-K) \neq 0 \Rightarrow \dim N(I-K) = \dim N(I^* - K^*)^\perp$$

$$\text{即 } \dim N = \dim N^*.$$

□

§ 6.4: 紧算子的谱 (Hilbert空间). 解的第3存在定理.

本节证明如下定理:

Thm 6.4.1 (第3存在定理) *

(1) 存在一个至多可数集 $\Sigma \subset \mathbb{R}$, 使 $\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 有唯一弱解 $\Leftrightarrow \lambda \notin \Sigma$.
对每个给定的 $f \in L^2(U)$.

(2). 若 $|\Sigma| = +\infty$, 则 $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列单不减且趋于 $+\infty$ 的序列.

□.

在此之前, 我们证明紧算子的谱定理. (附录 7.27 及 Thm 6).

Def. 设 $A: X \rightarrow X$ 是有界线性算子. (X 为 Banach 空间)

(1) A 的 预解集 (resolvent set) 为 $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I \text{ 是一映射且是满射}\}$.

(2). A 的 谱 (spectrum). $\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A)$

• $\eta \in \rho(A)$. 则由闭图像定理, $(A - \eta I)^{-1}: X \rightarrow X$ 是有界线性算子.

(3). 称 $\eta \in \sigma(A)$ 为 A 的 特征值, 若 $N(A - \eta I) \neq \{0\}$, 特征值全体记作 $\sigma_p(A)$, 又称“点谱”

(4). 若 η 是特征值 $w \neq 0$. $Aw = w$. 则称 w 是 特征向量.

Thm 6.4.2 (紧算子的谱) 设 H 为无穷维可分 Hilbert 空间, $K: H \rightarrow H$ 紧算子.

证 (1) $0 \in \sigma(K)$

(2) $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$

(3) $\sigma(K) - \{0\}$ 是有限集 或是一个趋于 0 的序列.

Proof: (1) 反证: 若 $0 \notin \sigma(K)$. 则 $K: H \rightarrow H$ 是 双射. (注意 $\sigma(K)$ 定义)

$Id = K \circ K^{-1}$. 是一个紧算子与连续线性算子的复合
从而也是紧算子.

但 Id_H 是紧算子 $\Leftrightarrow \dim H < +\infty$ (否则, 考虑 H 中的单位球面 B).

矛盾!

$Id(B) = B$. 但 B 紧则 B 为紧
从而 $\dim H < +\infty$)

(2). 设 $\eta \neq 0$. $\eta \in \sigma(K)$. 反设 $N(K - \eta I) = \{0\}$.

由 Fredholm = 拟 - , 有: $\Rightarrow Im(K - \eta I) = H \Rightarrow \eta \in f(K)$. 与 $\eta \in \sigma(K)$ 矛盾!

用子

(3). 若 $\sigma_p(K) - \{0\}$ 不是有限集时, $\sigma(K) - \{0\}$ 由 $\eta_k \rightarrow \eta = 0$ 组成.
的凝聚点只有

设 $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma(K) - \{0\}$ 互不相同. $\eta_k \rightarrow \eta$. 下证 $\eta = 0$.

由 $\eta_k \in \sigma_p(K)$, 则 $\exists w_k \neq 0$. $Kw_k = \eta_k w_k$.

设 $H_k = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$. 则 $H_k \subsetneq H_{k+1} \subsetneq \dots$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

又注意到. $(K - \eta_k I)H_k \subseteq H_{k+1}$. ($k \geq 2$).

对每个 k , 我们取 $u_k \in H_k \cap H_{k+1}^\perp$. $\|u_k\| = 1$.

$k > 1$ 时. 因 $H_k \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq H_k$. 因此.

$$\left\| \frac{Ku_k}{\eta_k} - \frac{Ku_v}{\eta_v} \right\| = \left\| \frac{(Ku_k - \eta_k w_k)}{\eta_k} \right\| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow K} \left\| \frac{(Ku_v - \eta_v w_v)}{\eta_v} \right\| + \left\| u_k - u_v \right\| \geq 1.$$

若 $\eta \neq 0$. 则这与 K 的紧性矛盾, 因 K 将有界集映射到紧集, 但 $\{\frac{u_k}{\eta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 并不列紧

□

回到方程中. Thm 6.4.1 中所述的 Γ , 称作 L 的谱.

Proof of 6.4.1:

$$(*) \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \quad \text{由 Fredholm 定理 - " } N(I-K) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(I-K) = H" \\ \text{知, (*) 存在唯一弱解. } \Leftrightarrow \begin{cases} Lu - \lambda u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \\ \text{给定 } f \in L^2(U) \text{ 时,} \quad \text{只有唯一弱解 } u = 0. \quad \text{弱.} \end{math>$$

现取 γ 为 Thm 6.2.2 (Lax-Milgram in H^1)

中的 $\gamma > 0$, 且设 $\lambda > \gamma$, $\Leftrightarrow \forall \gamma > 0$ - given.

$$(*) \Leftrightarrow u = L_{\gamma}^{-1}(\lambda + \gamma)u. \quad \begin{matrix} \uparrow \\ Ku = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma} Ku. \end{matrix} \quad (\#). \quad \begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda + \gamma)u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \\ \text{只有唯一弱解 } u = 0. \quad \text{弱.} \quad \text{dy.} \end{math>$$

K 是紧密算子: $L^2(U) \rightarrow L^2(U)$.

如今若 $u = 0$ 是 (#) 的唯一弱解. 则 $\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \notin \sigma_p(K)$ (否则该方程有非零弱解).
Recall 特征值定义.

所以. (*) 有唯一弱解 (given $f \in L^2(U)$).

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \notin \sigma_p(K).$$

而 $\sigma_p(L)$ 是有限集，是至多以 0 为极限点。

因此 (*) 有解 \Leftrightarrow (given $f \in L^2(U)$). \Leftrightarrow 存在 λ_k 且 $\lambda_k \rightarrow +\infty$ 且 $\lambda_k \rightarrow +\infty$ (因 $\frac{v}{\lambda_k}$ 有界 $\rightarrow 0$)
 $\lambda > -\gamma$.

Thm 6.4.3. (逆等价有界性).

$\lambda \notin \Sigma$. 则 $\exists C > 0$ s.t. $\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$. 其中 $f \in L^2(U)$, $u \in H_0^1(U)$

是 $\left\{ \begin{array}{ll} L_u = \lambda u + f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{array} \right.$ 的弱解。

注: C 仅与 λ , U , L 的系数有关. $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}(L)$ 时 $C \rightarrow +\infty$.

Proof: 由 $\lambda_k \in \sigma_p(L) \subset L^2(U)$, $\{u_k\} \subset H_0^1(U)$ s.t.

$\left\{ \begin{array}{ll} L_{u_k} = \lambda_k u_k + f_k & \text{in } U \\ u_k = 0 & \text{on } \partial U \end{array} \right.$ (weakly).

$\left\{ \begin{array}{l} \|u_k\|_{L^2} \\ \frac{\|u_k\|_{L^2}}{\|f_k\|_{L^2}} \end{array} \right. > k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$ 不妨 $\|u_k\|_{L^2} = 1$.

又 $f_k \rightarrow 0$ in $L^2(U)$. 由 6.2 节能量估计. $u_k \in H_0^1(U)$ 中 $\frac{1}{2}$ 有序列.

由 Banach-Alaoglu 定理. 存在 $u_k \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$.

$\Rightarrow H_0^1(U) \hookrightarrow H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$. (U 有界).

故 $u_{k_j} \rightarrow u$ in $L^2(U)$. (累等子将弱收敛化成强收敛).

$\Rightarrow u$ 是 $\left\{ \begin{array}{ll} L_u = \lambda u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{array} \right.$ 的弱解 \leftarrow Recall 弱解的定义
 弱收敛

由 $\lambda \notin \Sigma$ 知. $u=0$.

但 $u_k \rightarrow u$ in $L^2(U) \Rightarrow \|u\|_{L^2(U)} = 1$. $\sqrt{?}$!

□.

3.6.5 正则性:

设 L 是二阶带有偏导子，满足一致有偏导条件。

$$Lu = f \quad \text{in } U.$$

从上看出， u 不仅求了 2 阶导。如果 $f \in L^2(U)$, 那么按理来说 $u \in H^2(U)$
 $H^0(U)$

我们之前所学的理论只能证明到 $u \in H_0^1(U)$, 那么 u 是否真的能做到 $\in H^2(U)$ 呢？
 本节将给出肯定的回答。

进一步， $f \in C^\infty$, 是否有 $u \in C^\infty$? 在我们没有建立起上面的结论时，是无法回答该问题的。(具体证明，见 Stein 沈祖昌 Ch3. Thm 2.14, 利用弹性偏微分方程的基本解 (parametrix).)

设 $L_u = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$. 为方便起见。

$u \in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解。

Thm 3.5.1 (内部正则性)

设 $a^{ij} \in C^1(U)$, $b^i, c \in L^\infty(U)$, $1 \leq i, j \leq n$, $f \in L^2(U)$.

设 $u \in H^1(U)$ 是 $Lu = f$ in U 的弱解, 且 $u \in H^{1, loc}(U)$.

且 $\forall V \subset \subset U$, $\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$

证明: $u \in H^1(U)$ 是 $Lu = f$ 的弱解. 由 $\forall v \in H_0^1(U)$

$$B[u, v] = (f, v).$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx = - \int_U \tilde{f} v \, dx, \quad \tilde{f} = f - \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u - cu. \quad \dots (*)$$

* 由于 $u \in H^2(V)$ 目前我们不知道 $u \in H^2(V) \cap C^1(\bar{V})$, 所以不能对 u 求二阶弱导数.

为了证明 $u \in H^2(V)$, 且 $D_h^2 u \in L^2(V)$, 我们考虑估计 $D_h u$ 的差商, 再由差商的性质. 即得 $D_h^2 u \in L^2(V)$. 在证明的过程中, 会遇到分部积分, 但往往 Sobolev 不等式不一定可以分部积分 (Recall: 分部积分依赖于 Leibniz Rule, 无法成立). 需要一个 C^∞ , 一个 $W^{k,p}$ 或两个都是 $W^{k,p} \cap L^\infty$). 所以我们将引入一些光滑的截断函数来避免该问题.

* Fix $\bar{U} \subset\subset U$. 取开集 W . $V \subset\subset W \subset\subset U$. 取 $\zeta \in C^\infty$

$$\begin{cases} \zeta = 1 & \text{on } V \\ \zeta = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n - W \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

* 设 $|h| > 0$ 充分小, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. 在 $B[u, v] = (f, v)$ 中的 v 为:

$$①: v = -D_k^h (\zeta^2 D_k^h u). \quad \text{其中. } D_k^h u(x) = \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}.$$

由(*)知左边.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx. \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j (D_k^h (\zeta^2 D_k^h u)) \, dx. \end{aligned}$$

差商的“ <u>分部积分</u> ”公认: <u>形式上的对称</u>	$\int_U u \cdot D_k^h v = - \int_U D_k^h u \cdot v \quad (\text{展开看, 只是 } \zeta \text{ 是量纲提})$
--	--

$$\rightarrow = \sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_i D_k^h (a^{ij} \partial_i u) (\partial_j (\zeta^2 D_k^h u)). \quad (v^h(x) := v(x+he_k)).$$

差商与系数互换(自证).

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ii,h} (D_k^h \partial_i u) \partial_j (\zeta^2 D_k^h u) + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u \cdot \partial_j (\zeta^2 D_k^h u) \, dx.$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ii,h} D_k^h \partial_i u \cdot \zeta^2 D_k^h \partial_j u$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} D_k^h \partial_i u \cdot \cancel{D_k^h u} \cdot 2\zeta \partial_j \zeta + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u D_k^h \partial_j u \zeta^2 \\ + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u D_k^h u \cdot 2\zeta \partial_j \zeta \, dx$$

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} D_k^h \partial_i u \cdot D_k^h \partial_j v \cdot \zeta^2 dx$$

$$\geq \underbrace{\Theta \int_U \zeta^2 |D_k^h D_u|^2 dx}_{\text{由 } -\frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \text{ 及 } \zeta^2}$$

$$A_2 := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} (D_k^h \partial_i u) (D_k^h \partial_j v) + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u \cdot (D_k^h \partial_j v) \zeta^2 dx$$

$$\leq C \int_U |\zeta| \underbrace{|D_k^h D_u| \cdot |D_k^h u|}_{\text{由 Hölder+Young } (\frac{2}{3}\varepsilon)} + \zeta \underbrace{|D_k^h D_u|}_{\text{由 Hölder+Young } (\frac{2}{3}\varepsilon)} |D_u| + \zeta \underbrace{|D_k^h u| \cdot |D_u|}_{\text{由 Hölder+Young }}$$

$$\leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h D_u|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h D_u| + |D_k^h u| dx$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{=} \int_U C \left(\|D_k^h D_u\|_2^2 \|D_k^h u\|_2^2 + \|D_k^h D_u\|_2 \|D_u\|_2 \|D_k^h u\|_2 + \|D_k^h u\|_2 \|D_u\|_2 \right)$$

$$\stackrel{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|D_k^h D_u\|_2^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|D_k^h u\|_2^2$$

$$+ \varepsilon \|D_k^h D_u\|_2^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|D_u\|_2^2 + \|D_k^h u\|_2^2 + \|D_u\|_2^2$$

$$\leq 2\varepsilon \|D_k^h D_u\|_2^2 + \frac{C}{\varepsilon} \left(\|D_k^h u\|_{2,w}^2 + \|D_u\|_{2,w}^2 \right)$$

$$\text{由 } A = \sum_{i,j}^n \int a^{ij} \partial_i u \partial_j v = \int \tilde{f} v dx$$

$$\frac{1}{2} A_1 + A_2 \geq \frac{\Theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h D_u|^2 dx \geq C \int_U |D_u|^2 dx \quad \dots (2)$$

$$\therefore A = A_1 + A_2 \geq \frac{\Theta}{2} \sum_{i,j} a^{ij} = \frac{\Theta}{4}$$

$$\text{估计 } B = \int \tilde{f} v.$$

$$|B| = C \int_U (|f| + |Du| + |u|) |v| dx.$$

$$\leq C \|f + Du + u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_U |v|^2 dx = \int_U |D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \\ &\leq C \int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \\ &= C \int_W |\zeta^2 D D_k^h u|^2 dx + \cancel{\text{交叉项}} |\zeta^2| \cdot |D_k^h u|^2 dx \\ &\leq C \int_U |Du|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &\stackrel{\text{long way}}{\leq} \varepsilon \|v\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|f + Du + u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_U |f|^2 + u^2 + |Du|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\because \varepsilon = \frac{\theta}{4} \quad \text{有 } |B| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + C \int_U |f|^2 + u^2 + |Du|^2 dx \quad \dots (3)$$

结合②③有

$$\int_U |D_k^h Du|^2 dx \leq \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx.$$

$$\Rightarrow Du \in H_{loc}^1(U) \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_{loc}^2(U), \\ \|u\|_{H^2(U)} \leq C (\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}) \end{array} \right. \dots (4)$$

下面希望④右边的 $\|u\|_{H^1(U)}$ 能被 $\|u\|_{H^1(U)}$ 补充

$$\text{注意: } V \subset W \subset U \quad \text{则 } \|u\|_{H^2(W)} \leq C (\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{A^1(W)})$$

Cut-off function ζ : $\begin{cases} =1 & \text{in } W \\ \text{spt } \zeta \subset U \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} \in C^\infty.$

令 $V = \zeta^2 u$.

$$\text{左} \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j (\zeta^2 u) dx = \int_U (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) \cdot \zeta^2 u dx.$$

$$\text{左边} = \sum_{i,j} \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j u \cdot \zeta^2 dx + \int_U a^{ij} \partial_i u \cdot (2\zeta \partial_j \zeta) \cdot u dx.$$

$$\text{右边} = \int_U \zeta^2 u (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) dx$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j u \cdot \zeta^2 dx. \quad \dots \textcircled{5}$$

$$= \int_U \zeta^2 u (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) - \sum_{i,j} \int_U a^{ij} \partial_i u (2\zeta \partial_j \zeta) u dx$$

$$\textcircled{5} \text{ 左边} \geq \theta \int |\zeta|^2 |Du|^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{右边} &\leq C \int |u| \cdot |f| + |u| \cdot |Du| + |u|^2 \\ &\leq C \left(\|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|Du\|_{L^2} \right) + C \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right) + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|Du\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

$$\theta^2 \cdot \varepsilon = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{有: } \int_U |\zeta|^2 |Du|^2 dx \leq C \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right).$$

$$\text{这样, 两边加上 } \int_U |\zeta|^2 |u|^2 dx. \text{ 有 } \|u\|_{H^1(W)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right)$$

于是待证式成立.

□

接下来我们利用归纳法来证明更高的正则性结果.

Thm 6.5.2: 设 $m \in \mathbb{N}$, $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$. $f \in H^m(U)$.

$u \in H^1(U)$ 是 $L_u = f$ in U 的弱解. 则 $u \in H_{loc}^{m+2}(U)$.

$$\left\{ \forall V \subset \subset U, \|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(V)} \right) \right.$$

证明: 对 $m \in \mathbb{Z}$ 内, $m=0$ 即是 Thm 6.5.1.

设对某 $m \in \mathbb{Z}$ 成立.

对 $m+1$. 假设 $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+2}(U)$. $f \in H^{m+1}(U)$.

$u \not\in L_u = f$ in U 的 H^1 弱解.

由归纳假设知. $\overline{\{u \in H_{loc}^{m+2}(U)\}}$

$$\left\{ \forall V \subset \subset U, \|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(V)} \right) \right.$$

Fix $V \subset \subset W \subset \subset U$. 设 $|\alpha| = m+1$ 是任一多重指标.

$$\tilde{v} \in C_c^\infty(W), v := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v}.$$

代入 $B[u, v] = (f, v)$.

$$\text{有: } \sum_{i,j} \int a^{ij} \partial_i u (-1)^{|\alpha|} \partial_j (D^\alpha \tilde{v}) dx = \sum_{i,j} (-1)^{|\alpha|} \int f D^\alpha \tilde{v} - \sum_i b^i \partial_i u \cdot D^\alpha \tilde{v} - c \partial^\alpha \tilde{v}.$$

分部积分可得.

$$B[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\tilde{f}, \tilde{v}).$$

$$\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W).$$

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\substack{i,j \\ i+j=\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left(- \sum_{i,j=1}^n (D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta \partial_i u) \right)$$

$$\downarrow \quad \tilde{u} = \begin{cases} u & \text{在 } W \\ 0 & \text{在 } W^c \end{cases}$$

$$\beta \leq \alpha.$$

$$+ \sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta \partial_i u$$

$$+ D^{\alpha-\beta} c \cdot D^\beta u.$$

$$\text{由 } \tilde{u} \not\in \| \tilde{u} \|_{H^2(W)} \leq C (\| \tilde{f} \|_{L^2(W)} + \| \tilde{u} \|_{L^2(W)}) \text{ (Thm 6.5.1).}$$

$$\leq C (\| f \|_{H^{m+1}(U)} + \| u \|_{L^2(U)}).$$

$$\tilde{u} = D^\alpha u, |\alpha| = m+1.$$

$$\Rightarrow u \in H^{m+3}(V)$$

$$\|u\|_{H^{m+3}(V)} \lesssim \|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}$$

□

由 Morrey 插入定理易得：

Thm 6.5.3 : a) i. b). c) $\in C^\infty(U)$, $f \in C^\infty(U)$.
 $u \in H^1(U)$ 为 $L_u = f$ in U 的弱解. 则 $u \in C^\infty(U)$.

□

下面讨论边界正则性，相关结论证明的套路是，先证区域为 $B^*(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$ 时成立。

对一般的开区域 U ，通过“边界拉直”，化成 $B^*(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$ ，来得到结论。 $U \rightarrow B^*(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$
 的映射是一个微分同胚，故直观上看结果是正确的，但严格的证明却会陷入繁杂的计算中。

*证明建议跳过

Thm 6.5.4 (到达 H^2 正则性)

设 $a^{ij} \in C^1(\bar{U})$, $b^i, c \in L^\infty(U)$, $1 \leq i, j \leq n$, $f \in L^2(U)$. 设 $u \in H_0^1(U)$ 是

方程 $\begin{cases} L_u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解, $\exists v \in C^2$. 则 $\begin{cases} u \in H^2(U) \\ \|u\|_{H^2(U)} \leq C (\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \end{cases}$

证明：Claim $L_u = f$ a.e. in U .

Claim 的成立是显然的，因 $u \in H_{loc}^2(U)$ (by Thm 6.5.1)，及 $v \in C^\infty(U)$ 有

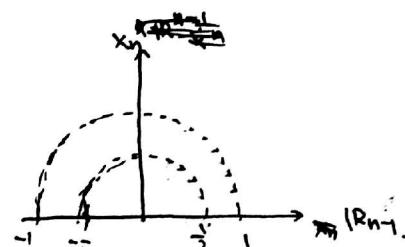
$$B[u, v] = (f, v) \Rightarrow (L_u, v) = (f, v) \quad \forall v \in C^\infty(U) \Rightarrow L_u = f \text{ a.e.}$$

下面先证明 $U = B^*(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$ 的情况（边界拉直后）。

Step 1: 设 $U = B^*(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$, $V = B^*(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}_+^n$.

选取 $\zeta \in C^\infty(U)$, s.t. $\zeta = 1$ in $B(0, \frac{1}{2})$, $0 \leq \zeta \leq 1$.

Spt $\zeta \subseteq B(0, 1)$.



$$u \text{ 为弱解} \Rightarrow \sum_{i,j} \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j v = \int_U \tilde{f} v. \quad \tilde{f} = f - \sum_i b^i \partial_i u - cu \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

$$\text{且 } v = -D_K^h (\zeta^2 D_K^h u) \quad |k| \leq m. \quad \text{左图 6.5.1 布}$$

$$\int_V |D_K^h D_K^h u|^2 dx \leq c \int_U (|f|^2 + |u|^2 + |Du|^2) dx \quad |k| \leq m-1.$$

$$\Rightarrow \|\partial_i \partial_j u\|_{L^2(V)}^2 \leq c \left(\|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2 + \|Du\|_{L^2(U)}^2 \right) \quad \forall i+j \leq 2m.$$

22

\Rightarrow 对 $u_{x_n x_n}$ 的估计:

由于 $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$. 取 $\xi = e_n$ 有 $a^{nn} > \theta$

$$\therefore \theta \leq \partial_n u \leq |a^{nn}| \partial_n u$$

由于 $L_u = f$ a.e.

$$\text{故 } a^{nn} \partial_n^2 u = - \sum_{i+j \leq n} \partial_j (a^{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu + f - \partial_n u. \quad \text{即 } \partial_n^2 u = \dots$$

$$\Rightarrow |\partial_n^2 u| \leq \text{上面各项绝对值之和}$$

$$\Rightarrow \|\partial_n^2 u\|_{L^2}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2)$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^2(U)}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \quad \leftarrow \text{Rmk: 这里应仿照 6.5. 最后一步.}\right. \\ \text{书上没说, 因为右边有 } \|Du\|_{L^2}^2 \text{ 不能直接用反向不等式收掉!}$$

Step 2: 对于 $\forall U \subset \mathbb{R}^n$, $\partial U \in C^2$, $\exists x^0 \in \partial U$.

找一个 φ (可取坐标系)

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\} \\ r > 0, \quad \varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \in C^2.$$

坐标系: $y = \varphi(x)$

$$x = \psi(y)$$



选取 $s > 0$ 使得 $s.t. \quad U' = B(0, s) \cap \{y_n > 0\} \subseteq \varphi(U \cap B(x^0, r))$

$$V' := B(0, \frac{s}{2}) \cap \{y_n > 0\}.$$

令 $u'(y) = u(\psi(y))$. ($\Leftrightarrow u(x) = u'(\psi(x))$). (后面会证 $|\det D\psi| = 1$)

由于 ψ 是微分同胚, 故 $u' \in H^1(U')$. $u' = 0$ on $\partial U' \cap \{y_n = 0\}$
(We omit the details)

下面 claim: u' 是方程 $L' u' = f'$ in U' 的弱解, 即

$$f'(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(\psi(y)).$$

$$(*) \quad \dots \quad L' u' := - \sum_{k=1}^n \partial_k (a^{k1} u') \partial_y^k - \sum_{t,s=1}^n \partial_{y_s} (a^{ts} \partial_y^t u') + \sum_{r=1}^n b^r \partial_{y_r} u' \\ + c(\psi(y)) u'(\psi(y))$$

$$\forall y \in U', \quad t, s \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

证明 claim 2. 我们解释一下为什么如此构造 L' , 事实上, 这是坐标的直接结果.

真解:

$$\text{由于 } \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n (b^i \partial_i u v + c u v) dx = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U).$$

作变量代换 $x = \gamma(y)$, $u'(y) = u(\gamma(y))$, $v'(y) = v(\gamma(y))$. 则上式有:

$$I - I' = \sum_{i,j=1}^n \int_{U'} \underbrace{\sum_{r,s=1}^n a^{ij}(\gamma(y))}_{\text{!!}} \cdot \frac{\partial u'(\gamma(y))}{\partial y_r} \frac{\partial \phi^r}{\partial x_i}(\gamma(y)) \cdot \frac{\partial v'(\gamma(y))}{\partial y_s} \frac{\partial \phi^s}{\partial x_j}(\gamma(y)) dy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad (\text{而 } u(x) = u'(\phi(x))) \\ \gamma(y) = x$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a^{ij}(\gamma(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x_i}(\gamma(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x_j}(\gamma(y)) \cdot \frac{\partial u'}{\partial y_r}(y) \frac{\partial v'}{\partial y_s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\gamma(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x_i}(\gamma(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x_j}(\gamma(y)) \right)}_{\text{!!} \ a'^{rs}} \frac{\partial u'}{\partial y_r}(y) \frac{\partial v'}{\partial y_s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a'^{rs} \partial_y r u' \partial_y s v'$$

$$\text{同理, } I - I' = \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n b^i(\gamma(y)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x_i}(\gamma(y)) \right)}_{\text{!!} \ b'^r} \frac{\partial u'}{\partial y_r} v(\gamma(y)) dy.$$

$$= \sum_{r=1}^n b'^r \cancel{\int_{U'} \partial_y r u' \partial_y s v' dy}$$

为证明 claim, 我们要证的是

① L' 是满足一致都有圆条件的.

② $u(x) = u'(\phi(x))$, $v(x) = v'(\phi(x))$, 是否有 $B'[u', v'] = (f', v')_{L^2(U')}$?

$$\text{即 } B'[u', v'] = \int_{U'} \sum_{r,s=1}^n a'^{rs} \partial_y r u' \partial_y s v' \\ + \sum_{r=1}^n b'^r \partial_y r u' \cdot v' \\ + c' u' v' dy.$$

先证(2):

直接计算有:

$$B'[u', v'] = \sum_{r,s} \int_{U'} \sum_{r,s} a'^{rs} \frac{\partial u'}{\partial y^r} \frac{\partial v'}{\partial y^s} + \sum_{r=1}^n b'^r \frac{\partial u'}{\partial y^r} v' + c'u'v' dy.$$

$$\stackrel{y=\phi(x)}{=} \sum_{r,s} \int_U a'^{rs} \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \cdot \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial x^l}(x) \frac{\partial \psi^l}{\partial y^s}(\phi(x)) dx.$$

$$+ \sum_r \int_U b'^r \underbrace{\sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x))}_{dx} + \int_U c'u v dx.$$

$$= \int_U \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s=1}^n \sum_{k,l=1}^n a^{ij} \delta_{rs} \underbrace{\frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}}_{\text{cancel}} \underbrace{\frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \frac{\partial \psi^l}{\partial y^s}(\phi(x))}_{\text{cancel}} \partial_{x^k} u \cdot \partial_{x^l} v \cdot dx.$$

$$+ \int_U \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n b^i(\phi(x)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\phi(x)) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) + \int_U c'u v dx.$$

$$\stackrel{\cancel{a^{rs} b'^r}}{=} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{x^i} u \partial_{x^j} v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x^i} u \cdot v + c'u v dx$$

$$= B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)} = (f', v')_{L^2(U')}$$

注: 最后一步成立, 是因为 $|\det D\phi| = |\det D\psi| = 1$ (38页)

(#) 的 check

$$\text{再证(1). } \forall y \in U' \cdot \xi \in \mathbb{R}^n \quad \phi^r(\psi(y)) = y^r$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \psi^i}{\partial y^s} = \frac{\partial y^r}{\partial y^s} = \delta_{rs}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(x) \cdot \frac{\partial \psi^i}{\partial y^s}(\phi(x)) = \delta_{rs}$$

$$\text{由 } \psi^k(\phi(x)) = x^k \Rightarrow \frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} = \delta_{ki}.$$

#.

$$\text{再证(1). } \forall y \in U' \cdot \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} \sum_{r,s=1}^n a'^{rs} \xi_r \xi_s &= \sum_{r,s=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \delta_{rs} \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j} \xi_r \xi_s \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\sum_{r,s=1}^n \xi_r \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i} \right) \left(\sum_{s=1}^n \xi_s \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j} \right) \\ &\stackrel{\eta = \xi \cdot D\phi}{=} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \eta_i \eta_j \geq \theta |\eta|^2. \end{aligned}$$

26

由 Step 1:

$$\begin{aligned}\|u'\|_{H^2(U')} &\leq C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')}) \\ &\stackrel{\uparrow}{\leq} C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \\ \text{且 } f \in L^2(U) \text{ 时, } (\text{写开, 即是变量替换}) \quad &\end{aligned}$$

事实上, 有 $|\det D\phi| = |\det D\psi| = 1$. 事实上此为显见.

由附录 P 711

$$y_i = x_i =: \Phi^i(x).$$

$$y_n = x_n - r(x_1 \dots x_{n-1}) =: \phi^n(x).$$

$$\text{由 } D\phi = \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \right\}_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\frac{\partial r}{\partial x^1} & \dots & -\frac{\partial r}{\partial x^{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\phi = 1.$$

对称, 因此

□

Theorem 6.5.5 (高阶泛函小生)

(1) $m \in \mathbb{Z}_+$. $a^i, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U})$, $f \in H^m(U)$.

$u \in H_0^1(U) \Rightarrow \begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解. $\partial v \in C^{m+2}$.

$$\begin{cases} u \in H^{m+2}(U) \\ \|u\|_{H^{m+2}(U)} \end{cases} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

(2) $a^i, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$, $f \in C^\infty(\bar{U})$.

$u \in H_0^1(U) \Rightarrow \begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解. $\partial v \in C^\infty$

由 $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Omit the proof.

□ 25

§6.6. 经典时的极大值原理

本节考题. $L_u = -\sum_{ij=1}^n a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x_i} u + cu$. $a^{ij} = a^{ji}$. L: $\begin{cases} \text{对称} \\ \text{连续} \end{cases}$.

出发点: C^2 函数 u 在 U 中的 x_0 点达最大. $\Rightarrow D_u(x_0) = 0$.
 $D^2 u(x_0) \leq 0$.

弱极大向量理

Thm 6.6.1 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. $c=0$ in U .

(1) 若 $L_u \leq 0$ in U , 则 $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$. \leftarrow 下解的极大值原理

(2) 若 $L_u \geq 0$ in U , 则 $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u$. \leftarrow 上解的极小值原理

Proof: (1) 先设 $L_u < 0$. 且 $\exists x_0 \in U$. $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$

在 x_0 处有 $D_u(x_0) = 0$. $D^2 u(x_0) \leq 0$; $\overset{x_0}{\rightarrow}$
 为了导出矛盾 (因为要证明 $x_0 \in \partial U$). 我们应该设法证明 $L_u \geq 0$ ~~at x_0~~ .

为此, 设法将 L “对角化”

~~设~~ $A = (a^{ij}(x_0))$ 为实对称正定方阵, $O = (O_{ij})$ (正交矩阵) s.t. $OA^T = \begin{cases} OAO^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \\ OO^T = I. \end{cases}$
 $d_k > 0$.

$$\therefore y = x_0 + O(x - x_0)$$

$$\Rightarrow x - x_0 = O^T(y - x_0).$$

$$\Rightarrow \partial_{x_i} u = \sum_{k=1}^n \partial_{y_k} u \cdot O_{ki}. \quad \underset{k=1}{\overset{n}{\sum}}$$

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} u = \sum_{k,l=1}^n \partial_{y_k} \partial_{y_l} u \cdot O_{ki} O_{lj}.$$

$$\therefore \text{在 } x_0 \text{ 处. } \sum_{ij=1}^n a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u = \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{y_k} \partial_{y_l} u \cdot O_{ki} O_{lj}.$$

$$= \sum_{k=1}^n d_k \cdot \partial_{y_k}^2 u \underset{\substack{\uparrow \\ D_u(x_0) \leq 0}}{\leq} 0.$$

$$\therefore \partial_{y_k}^2 u \leq 0.$$

于 y -轴上:

$$L_u = -\sum_{j=1}^n a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x_i} u \geq 0. \quad (\because D_u(x_0) = 0)$$

这与 $L_u < 0$ 矛盾. 因此 (1) 在 $L_u < 0$ 时得证.

对一般情况(只有 $L_u \leq 0$). 令 $U^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x}$ $x \in U$. $\lambda > 0$ 为待定常数.
 $\varepsilon > 0$.

$a^{ij}(x) \geq 0$, 这由一致有向条件. 取 $\bar{e}_i = e_i$ 即得.

$$\begin{aligned} \bar{L}_\varepsilon L_u^\varepsilon &= L_u + \varepsilon \underbrace{\bar{L}_\varepsilon(e^{\lambda x_1})}_{\geq 0} \rightarrow \text{直接计算} \\ &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} (-\lambda^2 a'' + \lambda b') \\ &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} (-\lambda^2 \theta + \|\vec{b}\|_{L^\infty} \lambda) \\ &< 0 \quad \text{in } U. \end{aligned}$$

(因为 $\lambda^2 \theta > \|\vec{b}\|_{L^\infty} \theta$)

由 $\bar{L}_\varepsilon L_u \leq 0$ in Case 1.

$\max_{\bar{U}} U^\varepsilon = \max_{\partial U} U^\varepsilon$. $\varepsilon \rightarrow 0$, 由 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ in, $\max_U u = \max_{\partial U} u$

(2). u 换成 $-u$ 即可. \square

Thm 6.6.2 ($C \geq 0$ 的弱极大值原理).

设 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. $C \geq 0$ in U .

(1) 若 $L_u \leq 0$ in U . 则 $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$

(2) ~~进等地~~, 若 $L_u \geq 0$ in U . 则 $\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-$
~~类似地~~

(3) 于是. $L_u = 0$ in $U \Rightarrow \max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|$.

Proof: (1) 设 u 为下例 ($L_u \leq 0$). $V_i = \{x \in U \mid u(x) > 0\}$. 则

$$ku := L_u - Cu \leq -Cu \leq 0 \quad \text{in } V_i$$

k 符合 Thm 6.6.1 (1) 的条件. 故 $\max_{\bar{V}_i} u = \max_{\partial V_i} u = \max_{\partial U} u^+$. (若 $V \neq \emptyset$).

若 $V = \emptyset$. 则结论平凡. (2) (3) \square 理

\square

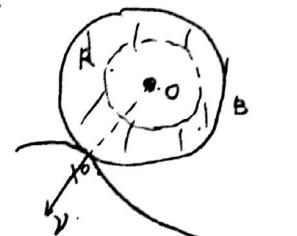
强极大值原理.

Lemma (Hopf) $u \in C^2(\bar{U}) \cap C^1(\bar{U})$, $c=0$ in \bar{U} . $L_u \leq 0$ in \bar{U} 且 $\exists x^0 \in \partial U$ s.t. $u(x^0) > u(x)$
 再假设 U 在 x^0 处满足 "内球条件": \exists 开集 $B \subset U$, $x^0 \in \partial B$.

则

(1). $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$. ν 为 B 在 x^0 处的外法向.

(2). 若 $c \geq 0$ in \bar{U} . 则 加上 $u(x^0) \geq 0$ 的条件. (1) 仍对.



证明: 由(2), 我们只须证(1), 其证明过程中蕴含(1).

首先 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) \geq 0$ 是易见的, 因为 $\forall x \in U$, $u(x^0) > u(x)$.

我们希望构造 $V(0)$ s.t. $u + \varepsilon V$ 满足 $\frac{\partial}{\partial \nu}(u + \varepsilon V)(x^0) \geq 0$.

$$\text{于是 } \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) \geq -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \nu}(x^0) > 0.$$

这需要: $\frac{\partial V}{\partial \nu} < 0$ at x^0 , 同时, 我们还需 $\forall x \in U$

\exists 圆 $B = B(0, r)$.

$$R := B(0, r) - B(0, \frac{r}{2})$$

$$\sum V(x_i) = e^{-\lambda|x_i|^2} - e^{-\lambda r^2}. \quad \text{by } \partial_i V = e^{-\lambda|x_i|^2} (-2\lambda x_i).$$

$$\partial_{ij} V = e^{-\lambda|x_i|^2} (4\lambda^2 x_i x_j - 2\lambda \delta_{ij}).$$

$$\Rightarrow L_V = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \underbrace{(4\lambda^2 x_i x_j - 2\lambda \delta_{ij})}_{+c(e^{-\lambda|x_i|^2} - e^{-\lambda r^2})} e^{-\lambda|x_i|^2} + \sum_{i=1}^n b^i (-2\lambda x_i) e^{-\lambda|x_i|^2}$$

$$\leq \frac{e^{-\lambda|x_i|^2}}{e^{-\lambda|x_i|^2} (-\theta|x_i|^2 \cdot 4\lambda^2 + 2\lambda \text{Tr} A - 2\lambda \sum_{i=1}^n b^i x_i + c)} \quad \text{# if } A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\leq e^{-\lambda(\frac{r}{2})^2} \left(-\theta \left(\frac{r}{2}\right)^2 4\lambda^2 + 2\lambda \text{Tr} A + 2\lambda \left(\frac{b}{r} + c\right) \right) \leq 0$$

由于上面的 ≤ 0 , 只要入充分大 (关于入是二次凸数, 二次项系数为负) 即可.

由于 $u(x^0) > u(x) \quad \forall x \in U$ $\therefore \exists \varepsilon > 0$ s.t. $u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon V(x)$, $\forall x \in B(0, \frac{r}{2})$
 又 $u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon V(x)$, $x \in \partial B(0, r)$ (因 $V(x)$ 是一个有界凸数).

$\Rightarrow \begin{cases} L(u + \varepsilon V - u(x^0)) = L_u + \varepsilon L_V - L_u(x^0) = -L_u(x^0) = -c u(x^0) \leq 0 \quad \text{in } R \\ u + \varepsilon V - u(x^0) \leq 0 \quad \text{on } \partial R. \end{cases}$

由弱极值原理, $u + \varepsilon v - u(x^*) \leq 0$ in \mathbb{R} .

$$\text{又: } u(x^*) + \varepsilon v(x^*) - u(x^*) = 0$$

$$\text{即 } u_{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial r}(x^*) \geq 0 \quad (\text{因为向外走, } u + \varepsilon v - u(x^*) \nearrow)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial r}(x^*) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} v(x^*) = -\frac{\varepsilon}{r} Dv(x^*) \cdot x^* = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0.$$

径向函数在球面上的外切向量 = 径向导数

□

Hopf 引理用于证明强极值原理

Thm 6.6.3 (强极值原理) 设 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, $C \geq 0$ in U .
 U 连通有界开集.

(1) 若 $\max_{\bar{U}} u \leq 0$ in U , 且 $\max_{\bar{U}} u$ 在 U 内达到, 则 $u = \text{const}$ in U .

(2), $\max_{\bar{U}} u > 0$ $\min_{\bar{U}} u$

Proof: 令 $M = \max_{\bar{U}} u$.
 $C := \{x \in U \mid u(x) = M\}$.
 $V := \{x \in U \mid u(x) < M\}$.

反证.

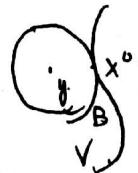
若 $\exists x \in V \mid u(x) \neq M$ in U . 则 $V \neq \emptyset$.

choose $y \in V$. $\text{dist}(y, C) < \text{dist}(y, \partial U)$.

$B := \text{以 } y \text{ 为心, } \text{大于 } V \text{ 的最大的球.}$

则 $\exists x^* \in C, x^* \in \partial B$.

由于 V 满足内球条件, 由 Hopf 引理, $\frac{\partial u}{\partial r}(x^*) > 0$. ~~且~~



但 u 在 x^* 处达 max. (因 $u(x^*) = M$) 故 $D_u(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) = D_u(x^*) \geq 0$).
 矛盾!

□ 证毕.

Thm 6.6.4. $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, $C > 0$ in U . U 有界连通开集.

(1) 若 $\max_{\bar{U}} u \leq 0$ in U . 且 u 在 \bar{U} 内达最大值, 则 $u = \text{const}$ in U 上的

(2) $\max_{\bar{U}} u > 0$ $\min_{\bar{U}} u$

□

30

Harnack 不等式:

Theorem 6.6.5. $u_{>0}$ 是 $L_{u=0}$ in U 的 C^2 解. $V \subset \subset U$ 是连通集. $\exists C > 0$ 使.

$$\sup_U u \leq C \inf_V u.$$

证明建议跳过
书上的公式 (26) 不等号反了

Remark: (1) 通常只给出 $a^{ij} \in C^\infty$, $b^i = c = 0$ 的证明

(2) 一般参见 草书青、林芳华的椭圆方程讲义

或 Gilbarg, Trudinger 的椭圆方程讲义

(3). 一般的方法会用到 John-Nirenberg 不等式(调和分析)

Proof: 不妨 $u_{>0}$ in U . 否则考虑 $u + \varepsilon (\varepsilon > 0)$.

$$\forall v = \log u.$$

$$Lu = 0 \text{ 即 } \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j u = 0. \quad \text{由 } u = e^v \text{ 知 } \partial_i u = e^v \partial_i v \\ \partial_i \partial_j u = \partial_i (e^v \partial_j v)$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n a^{ij} e^v (\partial_i \partial_j v + \partial_i v \partial_j v) = 0 \quad = e^v \partial_i v \partial_j v + e^v \partial_i \partial_j v.$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j v + \partial_i v \partial_j v = 0 \quad \text{in } U.$$

$$\text{令 } w := \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i v \partial_j v = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j v.$$

$$\text{Claim: } - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \partial_k \partial_l w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \leq -\frac{\theta}{2} |D^2 v|^2 + C |Dv|^2.$$

$$\text{其中 } b^k := -2 \sum_{l=1}^n a^{kl} \partial_l v \quad 1 \leq k \leq n.$$

先设 claim 正确.

球半径为 r .

$$\text{令 } z = \zeta^4 w \quad \begin{cases} \text{希望借 } z \text{ 来估计 } |Dv| \text{ 在任何 } V \subset \subset U \text{ 上都有界.} \\ \text{这样, } \forall x_1, x_2 \in V, \text{ 有 } |V(x_2) - V(x_1)| \leq \sup |Dv| r \leq C. \end{cases}$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta = 0 \text{ on } \partial V \quad \Rightarrow u(x_2) \leq u(x_1) e^C.$$

R一般的 $V \subset \subset U$. 用球覆盖及 V 紧即 \overline{V} , 就证到了 Harnack 不等式.

设 z 在 $x_0 \in U$ 处达到最大值. 则 $Dz(x_0) = 0 \Rightarrow \forall k, \zeta^4 \partial_k w + 4\zeta^3 \partial_k w \cdot \partial_k z = 0$
 $\Rightarrow \forall k, \zeta \partial_k w + 4\partial_k \zeta w = 0$

在 x_0 处有:

$$\partial_k z = \zeta^4 \partial_k w + 4\zeta^3 w \partial_k \zeta$$

$$\partial_k \partial_k z = 4\zeta^4 \partial_k \partial_k w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta \partial_k w + 12\zeta^3 \partial_k \zeta w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta w$$

$$+ 4\zeta^3 \partial_k \zeta \partial_k w$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k z + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k z = \zeta^4 \left(-\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \right)$$

$$+ C(|D^2 w| + |\zeta^4 w|) + |\zeta^4 w|$$

从而

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k z + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k z \\
 & = -\sum_{k=1}^n a^{kk} (\zeta^4 \partial_k \partial_k w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta \partial_k w + 12\zeta^2 \partial_k \zeta \partial_k \zeta w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta w) \\
 & \quad + \sum_{k=1}^n b^k (\zeta^4 \partial_k w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta w) \\
 & = \zeta^4 \left(-\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \right) \\
 & \quad - 12\zeta^2 \sum_{k=1}^n \partial_k (\zeta \partial_k \zeta \partial_k \zeta) \cdot w \\
 & \quad + -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^n (\zeta^3 \partial_k \zeta) \partial_k w \\
 & \quad - 4 \sum_{k=1}^n \zeta^3 \partial_k \partial_k \zeta w + 4 \sum_{k=1}^n b^k \zeta^3 \partial_k \zeta w. \\
 & = \zeta^4 \left(-\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \right) + O(\zeta^3 |Dw| + \zeta^2 |w|) + |Dv| \zeta^3 w. \quad |b^k| \leq C |Dw|
 \end{aligned}$$

而在 x_0 处由已达到 \max . 故 $\partial_k z = 0$ 在 x_0 .

$\{\partial_k \partial_k z\}$ 负定. 又因 $\{a^{kk}\}$ 正定.

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k z \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore 0 \leq \zeta^4 \left(-\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_k w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \right) \\
 & \quad + C' (\zeta^3 |Dw| + \zeta^2 |w|) + |Dv| \zeta^3 |w|. \quad \cdots (*) \\
 & \text{claim} \quad \zeta^4 \left(-\frac{\theta}{2} |D^2 v|^2 + C |Dv|^2 \right) + C' \zeta^2 |Dv|^2 + C' \zeta^4 |w|^2 + O(\zeta^3 |Dw| + \zeta^2 |w|) \\
 & \leq \zeta^4 \left(-\frac{\theta}{2} |D^2 v|^2 + C |Dv|^2 \right) + C' \zeta^2 |Dv|^2 + C' \zeta^4 |w|^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow C \zeta^4 |w|^2 \leq \frac{\theta}{2} \zeta^4 |D^2 v|^2 \leq C(\varepsilon) \zeta^2 |Dv|^2 + \varepsilon \zeta^4 |w|^2. \\
 & \quad \text{因 } w = -\sum a^{ij} \partial_i \partial_j v. \\
 & \quad \Rightarrow C \zeta^4 |w|^2 \leq C \zeta^2 |Dv|^2 + C' \zeta^4 |w|^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow C \zeta^4 |w|^2 \leq \frac{\theta}{2} \zeta^4 |D^2 v|^2 \\
 & \quad \uparrow \\
 & \quad w = -\sum a^{ij} \partial_i \partial_j v. \\
 & \quad \Rightarrow C \zeta^4 |Dv|^2 + C' \zeta^2 |Dv|^2 + C' \zeta^4 |w|^2 + O(\zeta^3 |Dw| + \zeta^2 |w|)
 \end{aligned}$$

将 claim 带入(*)有:

ζ_{Dv}

$$0 \leq \zeta^4 \left(-\frac{\theta}{2} |Dv|^2 + C |Du|^2 \right) + C' \zeta^3 |Dw| + C' \zeta^2 w + \underline{\zeta^3 |Du| w} . \quad \text{at } x_0.$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} \zeta^4 |Dv|^2 \leq C \zeta^4 |Du|^2 + C' \zeta^3 |Dw| + C' \zeta^2 w + \zeta^3 |Du| w . \quad \text{at } x_0$$

$\zeta'' \zeta^4 w^2$ $w = \sum a^{ij} \partial_j v \partial_i v$ $\cdots (**)$

$$\cdot \zeta^3 |Dv| (w = (\zeta^2 |Dv|) (\zeta) \cdot w)$$

$$\leq w \left(\varepsilon \zeta^4 |Dv|^2 \right) + w \cdot C(\varepsilon) \zeta^2 .$$

\uparrow Young.

$$\leq \frac{\varepsilon}{\theta} \zeta^4 w^2 + C(\varepsilon) w \cdot \zeta^2 .$$

$\theta |Dv|^2 \leq w$ ($w = \sum a^{ij} \partial_j v \partial_i v$)

• 对 $\zeta^3 |Dw|$ 取: 由 $\zeta \partial_k w + 4 \partial_k \zeta \cdot w = 0$ 知. $|\partial_k w| \leq C |w|$.

$$\text{故. } \zeta^3 |Dw| \lesssim \zeta^2 |w| .$$

$$\cdot \zeta^4 |Dv|^2 \leq \zeta^2 |Dv|^2 \leq \frac{\zeta^2}{\theta} w .$$

∴ 代入(**) 有

$$\zeta^4 w^2 \leq C_1 \varepsilon \zeta^4 w^2 + C_2 \zeta^2 w . \quad \text{故取 } \varepsilon \text{ 小使 } C_1 \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$\text{有 } \zeta^4 w^2 \leq C \zeta^2 w \Rightarrow \zeta = \zeta^4 w \leq C \zeta^2 \leq C . \quad \text{at } x_0 .$$

$$\text{由于 } \zeta \text{ 在 } x_0 \text{ 处达 max.} \Rightarrow |Du| \leq c \quad \text{in } V .$$

\uparrow $\theta |Dv|^2 \leq w = \zeta^4 w \text{ in } V .$

这样我们在 claim 成立的情况下证明了结论.

下面证明 claim:

$$-\sum_{k=1}^n a^{kl} \partial_k \partial_l w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \leq -\frac{\theta^2}{2} |D_v|^2 + C |D_v|^2.$$

直接计算. 由 $w = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j v = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i v \partial_j v$

$$\Rightarrow \partial_v w = -\sum_{i,j=1}^n \partial_v (a^{ij}) \partial_i \partial_j v - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i \partial_j \partial_v v$$

$$\Rightarrow \partial_v w = \sum_{i,j=1}^n \partial_v a^{ij} (\partial_i v \partial_j v) + 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_v \partial_i v \partial_j v$$

$$\Rightarrow \partial_k \partial_v w = \left| \sum_{j=1}^n \partial_k \partial_v a^{ij} \partial_i v \partial_j v + \sum_{j=1}^n \partial_k a^{ij} \partial_k \partial_i v \partial_j v \right| \rightarrow i \in R.$$

$$\left| + 2 \sum_{i,j=1}^n \partial_k a^{ij} \partial_v \partial_i v \partial_j v \right| + \left| 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_v \partial_i v \partial_k \partial_j v \right. \\ \left. + 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_k \partial_v \partial_i v \partial_j v \right|$$

$$= 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_k \partial_v \partial_i v \partial_j v + 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (\partial_v \partial_i v) \partial_k \partial_j v$$

$$+ R.$$

$$|R| \leq C(|D_v|^2 + |D_v| |D^2 v|)$$

$$\leq C(\varepsilon) |D_v|^2 + \varepsilon |D^2 v|^2. \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Young

$$\text{从而 } -\sum_{k=1}^n a^{kl} \partial_k \partial_l w = -R - 2 \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_k \partial_i v \partial_j v + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (\partial_k \partial_i v) (\partial_j \partial_l v) \right)$$

$$= -R - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a^{kl} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (\partial_k \partial_i v) (\partial_j \partial_l v) - 2 \sum_{k=1}^n a^{kl} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_k \partial_i v \partial_j v$$

$$\leq R + 2 \theta^2 |D_v|^2 + 2 \theta^2 |D_v|^2. \quad \dots (\#)$$

$$\frac{1}{L - \frac{2 \theta^2 |D_v|^2}{L}} = R - 2 \theta^2 \sum_{i,l=1}^n a^{il}$$

$$= R - 2 \sum_{i,l=1}^n a^{il}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} a^{kl} \partial_j \partial_k v \partial_i \partial_l v \geq \theta^2 \sum_{i,j} (\partial_j \partial_i v)^2 = \theta^2 |Dv|^2 \quad (L-\text{稳定有界})$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{k=1}^n a^{kk} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_k \partial_i \partial_l v \partial_j v \\ &= -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_j v \sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_i \partial_k \partial_l v \\ &= -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_j v \left(\partial_i \left(\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_l v \right) - \sum_{k=1}^n \partial_i a^{kk} \partial_k \partial_l v \right) \\ &= -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_j v \left(\partial_i w + -\sum_{k=1}^n \partial_i a^{kk} \partial_k \partial_l v \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b^i \partial_i w + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a^{ij} \partial_i a^{kk} \partial_j v \partial_k \partial_l v \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^n a^{jj} \partial_j v \end{aligned}$$

代入 (#).

$$\begin{aligned} & \text{有 } -\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_l w \leq -R - \theta^2 |Dv|^2 + -\sum_{i=1}^n b^i \partial_i w - \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a^{ij} \partial_i a^{kk} \partial_j v \partial_k \partial_l v \\ & \Rightarrow -\sum_{k=1}^n a^{kk} \partial_k \partial_l w + \sum_{k=1}^n b^k \partial_k w \leq |R| - \theta^2 |Dv|^2 \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n |a^{ij} \partial_i a^{kk} \partial_j v \partial_k \partial_l v|. \\ & \leq |R| - \theta^2 |Dv|^2 + C \frac{|Dv| |D^2 v|}{\sum |D^2 v|^2 + C(\varepsilon) |Dv|^2 - \theta^2 |Dv|^2}. \\ & \stackrel{\text{Young}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} |D^2 v|^2 + C(\varepsilon) |Dv|^2. \end{aligned}$$

claim it's!

□

35

预备知识：对称算子的谱与柯西积分小刻画

1. 对称算子。设 H 是复 Hilbert 空间

Def：设 A 是 $H \rightarrow H$ 的有界线性算子，称 A 对称；若 $\forall x, y \in H$, $(Ax, y) = (x, Ay)$ $\forall x, y \in H$

易见 A 对称 $\Leftrightarrow A = A^*$

e.g. 设 $\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$

则 $A: u(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \kappa(x, y) u(y) d\mu(y)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的对称算子

□

Prop：(1). A 对称 $\Leftrightarrow \forall x \in H$. $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

(2). A 对称，则 $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. 且 $\|(xI - A)^{-1}x\| \leq \frac{\|x\|}{|\operatorname{Im} \lambda|}$
 $(\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \neq 0)$

(3). 设 $H_1 \subset H$ 是闭不变子空间. A 是 H 上的对称算子. $\text{Re } A|_{H_1} \in H_1$
上的对称算子.

(4). 若 A 对称. $\lambda, \lambda' \in \sigma_p(A)$. $\lambda \neq \lambda'$. 则 $N(\lambda I - A) \perp N(\lambda' I - A)$.

(5). 若 A 对称. 则 $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

Proof：(1). 令 $a(x, y) = (Ax, y)$. $\forall x, y \in H$.

则 $a(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的共轭双线性泛函.

(Ax, x) 是由 a 引起的二次型.

A 对称 $\Leftrightarrow a(x, y) = \overline{a(y, x)}, \forall x, y \in H$.

$\Rightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$.

\Leftarrow : 若 $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. 则 $\overline{q(x+y)} = \overline{q(x+y)}$.

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(x, y) + \overline{a(y, x)} = \overline{a(x, y)} + \overline{a(y, x)} \\ -a(x, y) + \overline{a(y, x)} = \overline{a(x, y)} - \overline{a(y, x)} \end{array} \right. \Rightarrow a(x, y) = \overline{a(y, x)}$

36

(2) 若 A 对称 ~~且要证 A 的谱是实值~~

设 $\lambda = \mu + i\nu$ $\nu \neq 0$. $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

则 $\|(\lambda I - A)x\|^2 = \|(\mu I - A)x\|^2 + |\nu|^2 \|x\|^2$
 $\geq |\nu|^2 \|x\|^2$. $\forall x \in H$.

此外. $R(\lambda I - A) = H$.

这是因为 $R(\lambda I - A)^\perp = N(\bar{\lambda}I - A^*) = N(\bar{\lambda}I - A)$

$= \overline{N(\bar{\lambda}I - A)}^\perp = \{0\}$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$)

~~若 A 的谱是实值.~~

~~我们有:~~ $m = \inf_{u \in H} (A u, u)$

$\|u\|_H = 1$

$M = \sup_{u \in H} (Su, u)$.

$\|u\|_H = 1$

~~设 $\eta > M$, $\forall x \in H$~~

$(\eta x - Ax, x) \geq (\eta - M) \|x\|^2$ $\forall x \in H$.

故由 Lax-Milgram 定理: $\eta I - A$ 1-1 + onto $\Rightarrow \eta \in \rho(A)$.

同理. $\eta < m$ 时. $\Rightarrow \eta \in \rho(A)$ 故 $\sigma(A) \subset [m, M]$

~~由(2)得证)~~

(3)

(4) 设 $x \in N(\lambda I - A)$. $x' = N(\lambda' I - A)$. $\lambda \neq \lambda'$.

则 $\lambda(x, x') = (Ax, x') = (x, Ax') = \lambda'(x, x')$

$\Rightarrow x \perp x'$. $(x, x') = 0$

(5). $C := \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ $C \leq \|A\|$ 易见. \Rightarrow 证:

注意到. $\operatorname{Re}(Ax, y) = \frac{1}{4} ((Ax+y, x+y) - (Ax-y, x-y))$

$$\leq \frac{C}{4} \|x+y\|^2 + \frac{C}{4} \|x-y\|^2 \leq C. \quad (x, y \in H)$$

$\|x\| = \|y\| = 1$

~~设 $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = 1$.~~

s.t. $\alpha(Ax, y) = |(Ax, y)| \Rightarrow |(Ax, y)|$

$\leq (Ax, \bar{y})$

$\leq \operatorname{Re}(Ax, \bar{y}) \leq C$.

□ 37

- 在 Hilbert 空间上，紧对称算子的谱和算子结构在某种程度上可以与有穷维的实对称阵类比。
- 正交换对称化，对角元是特征值
- 二次型在 $\|x\|=1$ 上的临界值

Thm 1 : A 是紧对称算子。 $\exists x_0 \in H$ $\|x_0\|=1$, s.t. $|(\lambda x_0, x_0)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$

Proof : 设 S_1 为 H 的单位球面

$$\text{不等式 } \sup_{x \in S_1} |(Ax, x)| = \sup_{x \in S_1} (Ax, x) =: \lambda \quad \text{证毕}$$

$$\text{令 } f(x) = (Ax, x), S_1 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{取 } \{x_n\} \subset S_1, f(x_n) \rightarrow \lambda.$$

$$\|x_n\|=1, \text{ 存在弱收敛子列 (还记作 } x_n) \quad x_n \rightharpoonup x_0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 1, \\ A \text{ 紧} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & Ax_n \rightarrow Ax_0 \\ & f(x_n) \rightarrow (Ax_0, x_0), \text{ as } n \rightarrow \infty \\ & \therefore (Ax_0, x_0) = \lambda. \end{aligned}$$

下证 $\|x_0\|=1$ 否则 $\|x_0\|<1$.

$$(Ax_0, x_0) \leq \|A\| \|x_0\|^2 = \lambda \|x_0\|^2 < \lambda, \text{ 矛盾!}$$

于是我们证明了, $\exists x_0 \in S_1$, s.t. $(Ax_0, x_0) = \sup_{x \in S_1} (Ax, x)$ (由 λ 为临界值).

再证 $Ax_0 = \lambda x_0$. 设证之.

$$\text{令 } \varphi_y(t) = \frac{(A(x_0+ty), x_0+ty)}{(x_0+ty, x_0+ty)}$$

$$t=0 \text{ 时, } \varphi_y(0) \geq \max \Rightarrow \varphi_y'(0)=0, \text{ 且 } \varphi_y'(0) = \operatorname{Re}(y, Ax_0 - \lambda x_0) = 0 \quad \text{by } y \in H$$

$$\Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0.$$

设 A 是 H 上的紧对称算子, 由紧算子谱理论, $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$

若 $\{\lambda_n\}$ 中有无穷多个不同的 λ_n , 则 $\lambda_n \rightarrow 0$.

如今, 我们证明了 $\lambda_n \in \mathbb{R}$. 此外, 我们证明 " A 可对角化".

Thm 2 (Hilbert-Schmidt) 若 A 是 H 上的对称算子, 则有至多可数个非零的, 只可能以 0 为聚点的实数 $\{\lambda_i\}$, 它们是 A 的特征值, 并对应于一组标准正交基 $\{e_i\}$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } x &= \sum_i (x, e_i) e_i \\ A x &= \sum_i \lambda_i (x, e_i) e_i \end{aligned}$$

Proof: $\forall \lambda \in \sigma_p(A) - \{0\}$. 设 $N(\lambda I - A)$ 的一组标准正交基 $\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{\dim N(\lambda I - A) = \dim N(A)}$

若 $0 \in \sigma_p(A)$. 则设 $N(A)$ 的正交基为 $\{e_i^{(0)}\}$. (可能不可数).

$$\text{令 } \{e_i\} = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A) - \{0\}} \{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{\dim N(\lambda I - A)}$$

$$\{e_i\} = \begin{cases} \{e_i\} & 0 \notin \sigma_p(A) \\ \{e_i\} \cup \{e_i^{(0)}\} & 0 \in \sigma_p(A) \end{cases}$$

$M = \text{Span}\{e_i\}$. 在 M 上, 题中表达式成立.

下证 $M^\perp = H$. 反证若 $M^\perp \neq \{0\}$ 设 $\tilde{A} = A|_{M^\perp}$

• \tilde{A} 无特征值. $\Rightarrow \tilde{A} \neq 0$

$$\text{但. } \|\tilde{A}\| = \sup_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} |(\tilde{A}x, x)| = 0. \quad \text{矛盾.}$$

□.

Rmk: 特征值全体. 由谱定理 $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|, \dots$

$$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

$$\text{Claim: } \|A - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i\| \leq |\lambda_{n+1}| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

事实: check: $\forall x \in H$. $\|Ax - \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i\|$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i \right\| \\ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |\lambda_{n+1}| \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |\lambda_{n+1}| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

(2) 紧对称算子可对角化, 其特征值具有极值性质.

$$|\lambda_n| = \sup \left\{ |(Ax, x)| \mid x \perp \text{Span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}, \|x\|=1 \right\}$$

$\lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$ 的特征向量.

$$\lambda_1^+ > \dots > \lambda_{n-1}^- \quad \lambda_1^- < \dots < \lambda_n^-$$

39

Thm 3: 极大极小刻画. 设 A 是紧对称算子, 对应有特征值 $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \dots \geq 0 \geq \dots \geq \lambda_2^- \geq \lambda_1^-$

$$\lim \lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

E_{n-1} 是 H 的任一 $n-1$ 随机事件之商

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Pf:
只正希 $\frac{3}{8}$.

$$\text{設 } x = \sum a_j^+ e_j^+ + \sum a_j^- e_j^-.$$

$$|\lambda_j| \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_j \lambda_j^+ |a_j^+|^2 + \sum_j \lambda_j^- |a_j^-|^2}{\sum_j |a_j^+|^2 + \sum_j |a_j^-|^2} = \boxed{1}$$

$$\hat{\mu}_n = \inf_{E_n} \sup_{\substack{x \in E_n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

① $\lambda_n^+ \leq \mu_n$: 因为 $\forall E_{n-1}$. 在 $\text{Span}\{e_1^+ \dots e_n^+\}$ 中. $\exists x_{n-1} \neq 0$ s.t. $x_n \perp E_{n-1}$.

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ |a_{j1}|^2}{\sum_{j=1}^n |a_{j1}|^2} \geq \lambda_n^+$$

$$(2) \lambda_n^+ > \mu_n: \text{If } E_{n-1} = \text{Span}\{e_1^+, \dots, e_{n-1}^+\}, \Rightarrow \lambda_n^+ = \sup_{\substack{x \in E_{n-1} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

该定理用于 14.13 题 (见张恭庆泛函 4.4~4.5 节). $\geq m$.

1

§ 6.7 对称算子特征值与特征函数.

1. 对称算子有固符. $L_u = -\sum_{i,j=1}^n (\alpha^{ij} \partial_{ij} u) \quad \alpha^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$

L 满足一致对称条件, $\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$

U 是连通集.

Thm 6.7.1: (对称算子的特征值)

(1) L 的特征值是实数的

(2) L 的特征值(可重数). 可写为 $\Sigma = \{\lambda_k\}_1^\infty, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_k \rightarrow +\infty$

(3) 存在 $L^2(U)$ 的标准正交基 $\{w_k\}_1^\infty$. 其中 $w_k \in H_0^1(U)$ 是 L 关于 λ_k 的特征函数.

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k & \text{in } U \\ w_k = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

Rmk: 由正则性理论. $w_k \in C^\infty(U)$.

若 $\partial v \in C^\infty$, 则 $v \in C^\infty(\bar{U})$

Proof: 设 $S = L^{-1} : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$ 不是线性算子.

Claim: S 是对称算子.

Proof of the claim: 任选 $f, g \in L^2(U)$.

$$Sf = u \Rightarrow u \in H_0^1(U) \text{ 为 } \begin{cases} Lu = f & \text{in } U \text{ 的弱解} \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

$$Sg = v \Rightarrow v \in H_0^1(U) \text{ 为 } \begin{cases} Lv = g & \text{in } U \text{ 的弱解} \\ v = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Sf, g) = (u, g) = B[u, u] = B[u, v] = (f, v) = (f, Sg). \quad \forall f, g \in L^2(U).$$

$$\therefore (Sf, f) = (u, f) = B[u, u] \geq 0 \quad \forall f \in L^2(U).$$

所以, 由对称算子的谱理论, S 的全体特征值为正实数
且特征函数构成 $L^2(U)$ 的标准正交基

$$\text{而 } \exists \eta \neq 0. \quad Sw = \eta w \Leftrightarrow Lw = \lambda w \quad \lambda = \frac{1}{\eta}$$

于是(1)-(3)成立

□

41

Def: 在 Thm 1 中的 λ_1 为 L 的 主特征值.

这个定理结论很重要!

Thm 6.7.2: (λ_1 的变号原理).

$$(1) \lambda_1 = \min \left\{ B[u, u] \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{L^2(U)} = 1 \right\}$$

(2). 进一步地, (1) 中的 \min 仅在 u 取 w_1 时达到. $w_1 \geq 0$ in U

$$\begin{cases} w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } U \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

(3). 若 $u \in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} u = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$, 则 u 是 w_1 的倍数.

Rank: (1) (3) 说明 λ_1 是单重特征值. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$

(2). Rayleigh 公式. $\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{B[u, u]}{\|u\|_{L^2(U)}^2}$.

Proof:

(1). Fact: $B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|_{L^2}^2 = \lambda_k$.

$$B[w_k, w_l] = \lambda_k (w_k, w_l) = 0 \quad k \neq l.$$

由 $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $L^2(U)$ 的标准正交基. 于是. $\forall u \in H_0^1(U)$. $\|u\|_{L^2(U)} = 1$.

$$u \text{ 可以写成 } u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k. \quad d_k = (u, w_k)_{L^2}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = 1$$

由上: $\left\{ \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交集, 内积为 $B[\cdot, \cdot]$.

Claim: $\left\{ \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交基.

这只需要: $B[w_k, u] = 0 \quad \forall k. \Rightarrow u = 0$. 但此为显然.

Fix k 因 $B[w_k, u] = \sum_{j=1}^{\infty} B[w_k, d_j w_j] = d_k \lambda_k (w_k, w_k) = 0$.
 $\Rightarrow d_k = 0$.

$$\Rightarrow u = 0$$

#

42

从而

$$\text{从而 } u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \quad \mu_k = B\left[u, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right] = d \in \sqrt{\lambda_k}.$$

从而该级数为绝对收敛 in $H_0^1(U)$.

$$\Rightarrow B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1. \quad \text{若 } d_k^2 < \Rightarrow u = w_1. \quad \text{从而 (1) 成立.}$$

$$(2). \text{ claim: 若 } u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} = 1. \text{ 则 } u \text{ 是 } \begin{cases} L_u = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \text{ 的弱解} \Leftrightarrow B[u, u] = \lambda_1.$$

\Rightarrow 显然.

$$\Leftarrow \text{若 } B[u, u] = \lambda_1. \quad \sum d_k^2 = (u, w_k).$$

$$\text{我们有 } \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k. \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{若 } B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k. \\ \Rightarrow d_k = 0. \quad \text{因 } \lambda_k > \lambda_1, \forall k > 2. \end{aligned}$$

$$\text{因 } \lambda_1 \text{ 重数有限, 故. } u = \sum_{k=1}^m (u, w_k) w_k. \quad m \in \mathbb{Z}_+ \text{ 有限.}$$

$$L_{w_k} = \lambda_1 w_k.$$

$$\Rightarrow L_u = \sum_{k=1}^m (u, w_k) L_{w_k} = \lambda_1 u. \quad \text{claim 证毕.} \quad \blacksquare$$

$$\text{下面证明: 若 } u \in H_0^1(U) \text{ 是 } \begin{cases} L_u = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \text{ 的弱解, 且 } u \neq 0. \text{ 由}$$

$$\text{要令 } u > 0 \text{ in } U \text{ 要令 } u < 0 \text{ in } U. \quad \text{为证该结论. 不妨令 } \|u\|_{L^2} = 1. \quad \text{令 } \alpha = \int_U (u^+)^2 dx, \beta = \int_U (u^-)^2 dx$$

$$\text{由 } u^{\pm} \in H_0^1(U). \quad D_u^+ = \underset{\text{a.e.}}{D_u X \{u \geq 0\}}, \quad D_u^- = \underset{\text{a.e.}}{D_u X \{u \leq 0\}}$$

$$\text{故. } B[u^+, u^-] = 0$$

$$\lambda_1 = B[u, u] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-]$$

$$\geq \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 + \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2 = \lambda_1 (\alpha + \beta) = \lambda_1.$$

$$\text{故 } \lambda_1 = \Rightarrow B[u^{\pm}, u^{\pm}] = \lambda_1 \|u^{\pm}\|_{L^2}^2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{u^{\pm}} = \lambda_1 u^{\pm} & \text{in } U \\ u^{\pm} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \Rightarrow \text{weakly.}$$

又由 $u^+ \in C^\infty$ 由正补性定理, $u^+ \in C^\infty(U)$.

$$\Rightarrow Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geq 0 \text{ in } U$$

$\Rightarrow u^+$ 是 L 的上解, 又由 U 连通 故据强极值原理有

$$u^+ > 0 \quad \text{in } U \quad \text{or} \quad u^+ = 0 \quad \text{in } U.$$

$\forall u^-$ 也有此结论.

最后, 若 u, \tilde{u} 均是 $\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的非平凡解,

$$\text{则 } \int_U u \tilde{u} dx \neq 0.$$

$$\Rightarrow \exists \chi \in \mathbb{R} \quad \int_U u - \chi \tilde{u} dx = 0. \quad \text{但 } u - \chi \tilde{u} \text{ 又是上述方程的解.}$$

$$\text{由上一结论知. } u = \chi \tilde{u} \quad \text{in } U$$

于是入单

□

2. 非对称椭圆算子的特征值理论

设 $Lu = -\sum_{ij} a^{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu. \quad a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$

$$U \text{ 题界连通开集, } \partial U \in C^\infty, \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad c > 0 \text{ in } U$$

这里 L 不再 ~~对称~~, 于其形式相伴, 但仍有一些结论成立.

我们不再给出证明:

Thm 6.7.3. 1), 存在 L 的一个实特征值 λ_1 , 满足 $\lambda_1 > 0$ 在 ∂U 且若 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是另一特征值, 必有 $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_1$.

2). 存在对应于 λ_1 的特征函数 w_1 , $w_1 > 0$ in U

3). λ_1 是单重特征值, 即 若 u 满足 $\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

的解, 则 u 为 w_1 的倍数.

44 □