2018年秋季学期高等实分析期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2018.01.02 主讲教师:张安

本学期的教材是: Elliott H. Lieb, Michael Loss: Analysis. Chapter 1-6.

1.(20分) 设$0 < p_0 \le p_0 \le p \le p_1 \le \infty$, 证明如下包含关系：

$$L^{p_0,\infty} \cap L^{p_1,\infty} \subset L^p \subset L^{p,\infty} \subset L^{p_0} + L^{p_1}.$$

2.(10分) 记$(\cdot)^*$是递降对称重排, $g_* := [(g^{-1})^*]^{-1}$, 证明: 对$\mathbb{R}^n$上的任意非负可测函数f, h和正值函数g, 成立不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \ge \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f^*(x)g_*(x-y)h^*(y)dxdy.$$

3.(10分) 设$0 \le f \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 < p < \infty$. 令$f_j := (\mathcal{R} \circ R)^j f, j \in \mathbb{N}^*$, 其中$\mathcal{R} : f \mapsto f^*$是重排算子, R是如下定义的旋转:

$$(Rf)(x) := \left(\frac{2}{|x+e_2|^2}\right)^{2/p} f\left(\frac{2x_1}{|x+e_2|^2}, \frac{|x|^2-1}{|x+e_2|^2}\right), e_2 = (0,1), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

证明:$\|f_j\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$对任意$j$成立, 并且

$$f_j \xrightarrow{L^p} E_f := \frac{\|f\|_{L^p}}{\pi^{1/p}}(1+|x|^2)^{-2/p}.$$

4.(20分) 设$g_a := e^{-a|x|^2}$ $(x \in \mathbb{R}^n, a > 0)$. 证明:对任意$a, b > 0$成立

$$\hat{g_\pi} = g_\pi, g_a * g_b = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{n/2} g_{\frac{ab}{a+b}}.$$

5.(20分) 设$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$分别是Schwartz函数类和缓增分布, 定义“慢增函数”

$$C^\infty_{poly} := \{f \in C^\infty : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha, N_\alpha > 0, s.t. |\partial^\alpha f(x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{N_\alpha}\}.$$

证明: $\mathcal{S}' * \mathcal{S} \subset C^\infty_{poly}$, 且对任意$(u, \phi) \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}, u \hat{*} \phi = \hat{u}\hat{\phi} \in \mathcal{S}'$.

6.(30分) 对任意$s \in \mathbb{R}$, 定义$(-\Delta)^{s/2} u := [(2\pi|\xi|)^s \hat{u}]^\vee$.

(1) 证明: 如上定义在$\mathcal{S}'/\mathcal{P}$上是良好定义的;（关于此空间的定义，请看下页的注释!）

(2) 设δ是0处的dirac测度, 证明: 对任意$0 < s < 3$,

$$(-\Delta)^{s/2} G_s = \delta, \text{ 其中} G_s := (2^s \pi^{3/2})^{-1} \frac{\Gamma(\frac{3-s}{2})}{\Gamma(s/2)} |x|^{s-3}.$$

(3) 证明如下不等式，并存在最佳常数$C > 0$:

$$\|u\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} := \|(-\Delta)^{1/4} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ge C\|u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}.$$

且取到最佳常数是在$E = (1+|x|^2)^{-1}$（包括乘以常数倍、平移和伸缩）的情况下.

整理者注：最后一题的$\mathcal{S}'/\mathcal{P}$定义为

$$\{u \in \mathcal{S}' : (P(\partial)\hat{u})(0) = 0, \text{对任意多项式P成立}\}.$$

意思就是，Fourier变换后不允许有$\xi = 0$处有支于单点的分布。而支于单点的分布是δ及其导数的有穷线性组合$\sum c_\alpha \partial^\alpha \delta$, 作反Fourier变换回去就变成了多项式乘子$\sum c_\alpha x^\alpha$. 所以是“模去所有多项式”。特别地，全体非零常数不可能在$\mathcal{S}'/\mathcal{P}$中，傅立叶变换后若满足$\hat{u}$在$\xi = 0$附近局部可积，则一定落在$\mathcal{S}'/\mathcal{P}$中。