2019年秋季学期高等实分析期末考试

整理人：邵锋　fshao99@gmail.com

2020年元月7日　8:30-11:00　主讲教师:赵立丰

本学期的教材是: Gerald B. Folland: Real Analysis.

1. 设μ是LCH(局部紧Hausdorff)空间X上的Radon测度, $1 \le p < \infty$. 证明: $C_c(X)$在$L^p(\mu)$中是稠密的.

(以下结论可以不加证明地使用：1. 简单函数在L^p空间中是稠密的；2. Radon测度在它的所有σ-有限集上是内正则的。)

2. 令$I \in C_0(X \to \mathbb{R})^*$，证明：存在正泛函$I^\pm \in C_0(X \to \mathbb{R})^*$使得$I = I^+ - I^-$.

3. 设$F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，证明存在正整数$N$、常数$C_\alpha$和函数$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$使得

$$F = \sum_{|\alpha| \le N} C_\alpha \partial^\alpha f.$$

4. （1）令L为Fokker-Planck算子: $Lu = \Delta_x u + \frac{1}{2} x \cdot \nabla_x u + u$, 写出$Lu$的傅立叶变换的表达式；

（2）令$\mu \in M(\mathbb{R}^2)$($\mathbb{R}^2$上的复Radon测度), $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to M(\mathbb{R}^2)$是抛物方程:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u & = 0 \ \ in \ \ (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} & = \mu \end{cases}$$

的解，证明存在常数$C > 0$使得

$$\|u\|_{L^q} \le C t^{-(1-\frac{1}{q})} \|\mu\|, \ \ \forall 1 < q \le \infty.$$

5. （1）证明 p.v.$(\frac{1}{x})$是$\mathbb{R}$上的缓增分布；

（2）计算 x·p.v.$(\frac{1}{x})$.

6. (1) 若$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 令$T\phi = u * \phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty()$. 证明: T是$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$的连续线性映射，且$T$与平移交换: $\tau_x T = T \tau_x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.（提示：Fréchet空间上的闭图像定理仍然成立。）

(2) 设$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$是连续线性映射，且满足$\tau_x T = T \tau_x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 证明：存在唯一的分布$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$使得$T\phi = u * \phi$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.（提示：定义分布$u$满足: $\langle u, \phi \rangle = (T\tilde{\phi})(0)$.）