微分方程 2 与调和分析课程学习建议

微分方程 2

一、预备知识：不需要微分方程 1

1、实分析：积分收敛定理、Holder/Young/Minkowski/Gronwall 不等式、卷积光滑化逼近、Lebesgue 微分定理。

2、泛函分析：Riesz 表示定理（及其推论 Lax-Milgram 定理）、紧算子的谱理论（Fredholm 二择一）、对称紧算子的谱、弱收敛的相关性质（见 Evans 附录 D）。

二、教材与参考书

教材: Lawrence C. Evans: Partial Differential Equtaions (2^{nd} edition).

参考书：没有。

三、学习顺序：

1、基本内容（普通班）

第五章（Sobolev 空间）：5.1~5.7、5.8.1（Poincaré 不等式）、5.8.3（W1,∞=Lipschitz, 课本该定理证明出现大跳步，详见 2017 年微分方程 2 期中考试第三题）、5.9.1（H^{-1} 空间）；

第六章（二阶线性椭圆方程）：6.1、6.2（存在性定理）、5.8.2（差商极限逼近导数）、6.3（正则性）、6.4（极大值原理）、6.5.1（对称椭圆算子的谱）；

第七章（线性发展方程）：7.1（抛物方程弱解的 Galerkin 方法）、波方程的存在性证明（见 Luk Winghong (Jonathan)的波方程讲义第 4 节 https://web.stanford.edu/~jluk/NWnotes.pdf）、7.2.4（双曲方程有限传播速度）。

（附）第 5-7 章用到泛函的地方：

5.7 需要弱收敛和紧算子定义（附录 D.4+D.5 的第一条定义）

6.2.2 需要 Lax-Milgram 定理(6.2.1 讲了, 需要 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理结论)

6.2.3 需要附录 D.5（紧算子的谱 Fredholm 二择一，真正用上的是 726 页最下方那个 Remark，类似线性方程组存在唯一解/齐次方程有非零解二择一）

6.5.1 需要附录 D.6（对称紧算子的谱，联想实对称方阵特征值的结论，一模一样）

7.1 节需要自反空间的 Banach-Alaoglu 定理（自反 Banach 空间中，有界序列必有弱收敛子列）

（附）第 5-7 章可以跳过的部分：

5.3.3 整体光滑逼近的证明（知道思路即可，先有限覆盖边界，然后用个大球盖里面）；

5.4 节的延拓定理证明；

5.5 节的零迹定理的证明（但结论在第六章习题用到）；

5.6.3（高阶 Sobolev 不等式）的所有证明；

6.3、7.1 节的所有高阶正则性证明（数学归纳法即可）和边界正则性证明（边界附近进行局部拉直，化成上半平面的情况）；

6.4、7.1 节的所有 Harnack 不等式证明；

7.2 节除了双曲方程的有限传播速度其它全部跳过。（全部照搬 7.1，但须注意双曲方程正则性结果和抛物方程不一样）

2、进阶的基础知识：

我认为，微分方程 2 **这门课本身并不涉及过难、过于专业的例子，其内容并无法直接应用到研究中。**它的**目的是让学生了解 PDE 的基本语言和基本方法，为以后读懂 PDE 相**

关的专著、论文打下必要的基础。

真正的研究中涉及的 PDE 大多是非线性的，并且非线性项也各有不同，方程的种类也各有不同。而非线性方程的估计总是发源于线性方程的估计，所以这门课涉及的线性方程理论（第 5-7 章）是不可或缺的。但是，如果整个学期都聚焦于第 5~7 章的线性方程理论的话，即使学完了这些内容，也不知道如何能够将它们应用到实际的 PDE 问题中。所以，我们理应在课上接触更多的例子，来看在具体的问题中是如何运用这些 PDE 和泛函分析基础知识的。**要记住，PDE 问题的核心绝对不是冗长的计算，而是那些统领性的 idea、如何发现本质困难项、如何巧妙地化解本质困难项**（例如选取合适的坐标系、进行适当的变量替换、交换一些导数等等）。**一味地死算永远绕不开本质困难项；相反，若是有了正确的观察与构造，一些毫不起眼的实分析习题结论，也能起到四两拨千斤的效果！初学者在学会计算之后，切勿陷入并沉迷于那些无关紧要的细节。**

若以 Evans 的书为教材的话，可以选取 7~12 章的部分内容进行教学。

1、 消失粘性法：7.3 节的 Vanishing viscosity method

对于一阶双曲组（或者传输方程），有时直接求解或者证明存在性、正则性做不出来。此时，我们光滑化原方程，并塞入抛物项 $\varepsilon\Delta u$，构造逼近解。之后，证明逼近解满足关于 ε 一致的先验能量估计（即假设逼近方程的解存在，然后证明其满足某个上界，以帮助我们预判这个解会存在于何种函数空间），并构造合适的函数空间（借助先验估计）和压缩映射，用压缩映射原理证明（这是一个证明 PDE 解的局部存在性时极其常用的套路）逼近解存在，再用一致估计得出弱极限，证明弱极限是原方程的（弱）解。若要得到强解，则可以在正则性阶数稍低的函数空间里证明强收敛，再利用弱强唯一性得出两个极限是一样的，从而之前的弱收敛就变成了强收敛。例如，之前已经证得 H^s 中逼近解序列一致有界，进而存在弱收敛子列，设该弱极限为 u；之后，设法证明 H^{s-1}（或其它低阶的函数空间）中该子列会强收敛，这可以直接蕴含 H^s 中的强收敛。

粘性法在很多双曲方程（例如欧拉方程）、传输方程中极其有用，因为它们本身没有正则性的结论，性质很差，加入一个抛物项利于我们从逼近方程或者线性化方程来构造性质较好的逼近解，同时抛物项避免了导数损失，从而避免解的正则性损失。

2、 傅立叶方法：

书上 7.3 节的例子并不好，可以换成证明 3D 质量临界的 Schrodinger 方程（$iu_t+\Delta u=\pm|u|^{4/3}u$）解的局部存在性（需要少量调和分析知识补充，但不是主体）。利用插值得出自由方程解 L^p 范数衰减估计，再利用 TT*方法+Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式得出 Strichartz 估计，即对方程齐次/非齐次部分的时间-空间 L^qL^r 估计，这个估计是用来确定方程解的存在于何种函数空间 X 的。之后，再将原方程化成积分方程，方程的解等价于解映射的不动点存在性，所以只需证明解映射是 $X\to X$ 的压缩映射，再利用压缩映射原理即可。而整体解存在性则需要守恒量与 scaling。

注：有关 Sobolev 空间的傅立叶刻画、Besov 空间等理论，最好另外学习，并且要会 Littlewood-Paley 理论才好理解。关于傅立叶刻画，可看 Folland 实分析第 9 章，或者 Bahouri 的 Fourier Analysis and Nonlinear PDE 一书的前两章（查结论）；这部分的理解，可看 Tao 的非线性色散方程一书的附录 A。

3、 变分法（第八章）：

变分的核心想法是把某个能量泛函的临界点（极小化子）等价于方程（也是该能量泛函的 Euler-Lagrange 方程）的解。

第八章前三节讨论的是基本定义与极小化子存在性、正则性，但注意正则性的估计不能推广到高阶，否则非线性的结构会被破坏（线性项求导仍是线性项，但非线性项求导之后，

初始满足的限制条件可能不再满足）。第四节讨论的是某些限制条件下的极小化子，其中有一些重要的例子，例如到球面的调和映照、流体中的 Stokes 问题。

8.5 节则是引入了翻山定理（Mountain-Pass），去讨论 Euler-Lagrange 方程其他的解有何性质，这节的例子$-\Delta u=\pm|u|^{p-1}u$ 零边值问题在 $p<$临界指标$(n+2)/(n-2)$的情况（证明解存在）可与 9.4 节 $p>(n+2)/(n-2)$（证明星型域上只有 0 解）的情况放在一起学，后者是利用 8.6 节的诺特定理导出了 Derrick-Pohozaev 恒等式从而导出矛盾。而临界指标的情况正对应着著名的 Yamabe 问题，这又与 Sobolev 这又与不等式的最佳常数扯上了关系。此外，这一节里面提到的 Palais-Smale 条件在 PDE 中很重要，可用于其它方程的证明中。例如 3D 质量临界的散焦 Schrodinger 方程的散射猜想证明的关键步骤就用到了它。

8.6 节非常的重要，诺特定理给出了构造方程守恒律、单调量的方法，这些是我们将方程问题化繁为简的重要工具。同时，一个物理系统总是会有一些守恒律，这也符合我们的认知。我们在一些 PDE 的证明中，经常会看见乘一个很神奇的项，进行分部积分等若干操作之后就能构造出我们想要的守恒量、单调量。这些乘子的构造，实际上可以通过诺特定理给出：前提是你需要知道区域的移动和函数的变化。很多微分方程中有用的估计都可由诺特定理导出，例如波动方程的 Morawetz 恒等式就是由诺特定理，将波方程这个二阶方程化为一阶方程。

4、其它非变分方法（第九章）：

单调量与不动点法（不止压缩映射原理，拓扑学中的 Brouwer 不动点定理、吉洪诺夫不动点定理）、上下解方法、移动平面法（椭圆方程）、梯度流方法（凸分析）。

5、非线性波动方程（第 12 章）

Evans 避开了使用傅立叶分析，所以有一个 L^4L^{12} 估计没有证明。这套理论也可以利用傅立叶方法+Strichartz 估计完成。但第 12 章前面的波方程能量守恒、惠更斯原理等内容是重要的，它们也为后面证明波方程存在性提供帮助。

四、关于进度

我认为基本内容（线性方程弱解理论）应该在两个半月之内结束（Sobolev 空间及其傅立叶刻画一个月，椭圆方程 3 周，抛物方程 2-3 周）。后一个半月选讲第 8~12 章的部分内容（波方程 1 周、粘性法 1 周、变分法+9.4 节一个月）。

调和分析初学建议

一、预备知识：

（1）实分析（主要）：积分收敛定理、基本的L^p不等式；

（2）泛函分析中的各种基本定义（只需要知道定义）；

二、参考书：

[1] Javier Duoandikoetxea: Fourier Analysis, GSM 19, AMS (2000);

[2] Loukas Grafakos: Classical/Modern Fourier Analysis, GTM 249/250;

[3] 苗长兴：调和分析及其在偏微分方程中的应用；

[4] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.1, 2014;

[5] Elias M. Stein: Harmonic Analysis, 1993;

[6] Elias M. Stein: 奇异积分和函数的可微性, 1971;

[7] Thomas Wolff: Lecture Notes on Harmonic Analysis, 2003.

建议：主要看[1], [4], 震荡积分和限制性估计看[5]; [2], [6]用来查细节; [3]用来看中文对应，可以当做中文工具书，不要拿来“学”调和分析；[7]是一份短小精悍的讲义，内容比较全，利于快速了解调和分析的知识构架。

三、学习顺序：

第一部分：古典调和分析（研究核心：奇异积分）

（1）傅立叶变换、H-L极大函数（包括Riesz-Thorin插值、Marcinkiewicz插值），这是后继作各类估计的基本工具。

参考：Folland实分析的第8、9章相关内容，后者参考[1]的第二章；

（2）Calderon-Zygmund奇异积分（卷积型）：Calderon-Zygmund分解是这里最重要的技术。另外还有一些关于奇异积分逐点收敛的结果（齐次核+cδ）。

参考：[4]的第7章前3节，细节可查[6].

（3）H^1与BMO空间：C-Z奇异积分算子没有L1, L∞这两个端点有界性，所以我们考虑修改函数空间。这部分是作为（2）的补充。但BMO空间在后继的学习，乃至多线性调和分析的估计中都会用到（见[4]第二卷前2章）。

参考：[1]的第6、7章。

（4）几乎正交原理——Littlewood-Paley理论（乘子观点的奇异积分、频率空间局部化思想）熟知卷积经过傅立叶变换后变成乘子形式，所以这部分的Mikhlin-Hormander乘子定理可以看作是乘子版本的C-Z奇异积分定理，而这在部分（流体/色散）PDE的估计中往往比C-Z定理更加实用。同时，Littlewood-Paley理论的核心想法就是“频率局部化”（|ξ|的大、小直接影响了函数的性质，需要分别估计）、“几乎正交”（Littlewood-Paley投影只与相邻的有穷个有交），所谓“几乎”一词的含义，可参考Stein实分析第四章的习题23，或者直接看Cotlar引理的内容。

参考：[4]的第8.1, 8.2, 8.5, 9.1, 9.2, 9.3节。

（5）T1定理（非卷积型奇异积分）可以视作奇异积分部分的结束。T1定理（及其衍生的Tb定理）在水波方程中也会用到。更重要的是，其证明过程中衍生出的工具，便是多线性调和分析中仿积（Paraproduct）、多线性乘子定理（Coifman-Meyer定理等）的雏形。可以说，这是一个走向多线性调和分析的定理，承上启下。

参考：[1]第9章、[2]的第二册。

第二部分：近现代调和分析（震荡积分）
参考：[5]的第8~10章，没有书比这写得更好了。简要了解可以看[4]的第4、11章。
第一型震荡积分：衰减估计与固相法。
第二型震荡积分：傅立叶限制性估计。其来源可以看成是色散方程的解，但背后隐藏与联系的东西，却是当今调和分析四大猜想（傅立叶限制性猜想、局部光滑性猜想、Kakeya猜想、Bocher-Riesz猜想）。

四、关于进度：
一学期应该上完第一部分+第二部分的第一型震荡积分+Tomas-Stein限制性估计。其中，傅立叶变换基本性质、广义函数、L^p插值定理、H-L极大函数的L^p有界性最好在高等实分析课程中完成，以便直接进入调和分析的主题内容。

五、对这门课的个人理解
这门课可以往两个方向走，一是纯调和分析，二是调和分析在其它领域（尤其是PDE、解析数论）的应用。**但这门课的内容一定是要为直击前沿服务，无论如何都不应该过于纠结在基础知识上。**例如奇异积分、Littlewood-Paley等内容，课上讲授标准的情况和一些重要的例子就足以，其他的可以适当设置为习题。

由于本人是PDE壬，并不太懂纯粹的调和分析，但纯调和分析关注的问题绝不会离开几乎互相等价的“四大猜想”：Fourier限制性估计、Bochner-Riesz猜想、Sogge局部光滑性猜想、Kakeya旋针猜想。因此，若是从纯调和分析角度出发，震荡积分显然应该成为教学的重中之重，而且固相法、Tomas-Stein限制性估计也只是这个方向最简单的东西。例如Carleson-Sjolin定理、Bochner-Riesz乘子定理等内容都可以拿来讲授。但时刻记住，平方函数和极大函数永远是你不能忘记的工具，它们常常是证明L^p有界性证明中的重要桥梁。甚至可以提及L^2-decoupling这种近年才发展出的新技术（误）。但无论如何，关键在于把想法和关键技术讲出来。

若是以应用在PDE上为主，那么Muscalu-Schlag的第一卷更加重要，同样重要的还有Tao的调和分析讲义（可以在他的主页下载）、及其色散方程那本书的附录A。

调和分析方法用在PDE上主要是用于不可压流体（稳定性、NS正则性）的研究和色散方程的研究。主要用到的是震荡积分和仿微分运算（Paradifferential Calculus）的运用。前者不用多说，后者则是把Littlewood-Paley分解玩出了花。仿积是在证明T1定理，以及多线性调和分析研究中的一个工具，其目的就是为了完成多个函数乘积的各类估计。理论中，这与Coifman-Meyer乘子定理、Lipschitz曲线上的柯西积分等等都有关联。PDE应用中，Bony仿积分解，及其衍生出的Kato-Ponce乘积/交换子估计非常非常重要。这也是微积分中的莱布尼茨法则与链式法则在分数阶导数时的直接推广，这些工作主要由加藤敏夫（Kato Tosio）、Ponce、Kenig等人完成。近年，李栋给出了加细的估计与端点估计，非常实用。此外，一些常用的函数空间也是来自于调和分析，例如色散方程常出现的Besov空间，或者用于构造想要的函数空间。