

# 中国科学技术大学 2025–2026学年第一学期偏微分方程期末考试试题解析

考试时间：2026年元月16日 14:30–17:00      开课院系：数学科学学院

**试题 1 (15分).** 设  $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$  是给定的有界函数, 用格林函数方法求如下方程的有界解.

$$\Delta u = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad u = g \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega).$$

解. 给定  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ , 记它关于平面  $\{x_3 = 0\}$  的对称点为  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, -x_3)$ . 因此我们取格林函数为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}|} \right).$$

现在可以用格林函数表示方程的解为

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y, \quad N = (0, 0, -1).$$

代入格林函数表达式得到

$$\frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{y_3=0} = -\partial_{y_3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{1}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

因此解的表达式为

$$u(\mathbf{x}) = \frac{x_3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(y_1, y_2, 0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_y = \frac{x_3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(y_1, y_2, 0)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2.$$

□

**试题 2 (20分).** 考虑热方程的初值问题  $\partial_t u - \Delta u = 0$  ( $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ),  $u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ).

(1) (15分) 用傅立叶变换方法求出有界解  $u(t, \mathbf{x})$  的表达式。

(2) (5分) 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得对任意  $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立  $|u(t, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq C\sqrt{t}$ .

解. (1) 对  $\mathbf{x}$  变量作傅立叶变换, 并记  $u(t, \mathbf{x})$  的傅立叶变换为  $\hat{u}(t, \xi)$ . 据傅立叶变换性质得到常微分方程

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi).$$

两边乘以  $e^{t|\xi|^2}$  (积分因子法), 左边变成  $\frac{d}{dt}(e^{t|\xi|^2} \hat{u})$ , 这样就可算出热方程解的傅立叶变换为

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi).$$

下面计算上式的傅立叶逆变换，注意到对 $\Phi(\mathbf{x}) = e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$ ，有 $\hat{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi)$ 成立。现在有 $e^{-t|\xi|^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2t}|\xi|)^2}{2}} = \hat{\Phi}(\sqrt{2t}\xi)$ ，据傅立叶变换的伸缩性质知 $(\hat{\Phi}(\sqrt{2t}\xi))^\vee = \frac{1}{(\sqrt{2t})^d} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2t})^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$ 。把它代回 $\hat{u}$ 的表达式，并利用 $\widehat{f * g} = (\sqrt{2\pi})^d \hat{f} \hat{g}$ ，就得到解的表达式

$$u(t, \mathbf{x}) = (\hat{\Phi}(2t \cdot) \phi)^\vee(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} ((\hat{\Phi}(2t \cdot))^\vee * \varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

(2) 令 $K(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$ 为热核，则有

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{y}) K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) K(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \xrightarrow{y=\sqrt{t}\mathbf{z}} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}+\mathbf{z}|^2}{4}} \varphi(\mathbf{x} + \sqrt{t}\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

又因为热核在全空间上的积分为1，所以作差得到

$$u(t, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{z}|^2}{4}} [\varphi(\mathbf{x} + \sqrt{t}\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x})] d\mathbf{z}.$$

据有限增量定理得

$$|u(t, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{z}|^2}{4}} \cdot \sqrt{t} |\mathbf{z}| \cdot \sup_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi| d\mathbf{z} \leq C\sqrt{t}.$$

□

**试题 3-1 (20分).** 用分离变量法求解方程，其中 $\omega > 0$ 是常数。

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \sin 2x \cos x \cos(\omega t) & t > 0, x \in (0, \pi), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0, \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

**解析.** 本题选自章老师班上的作业题(讲义习题3.1.6)，更换了数字。

解. 分离变量法。齐次Dirichlet边界条件对应特征函数 $\sin(nx)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，故将解展开为 $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx)$ 。据积化和差公式，方程右端项可写为 $f(t, x) = (\sin x + \sin 3x) \cos(\omega t)$ 。若将其展开为正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx)$ ，则据三角函数的正交性知只有 $n = 1$  和  $n = 3$  时， $f_n(t) = 1 \cdot \cos(\omega t) = \cos(\omega t)$ ，其余 $f_n$  ( $n \neq 1, 3$ ) 皆为零。

此时方程可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + n^2 T_n(t)] \sin(nx) = \cos(\omega t) (\sin x + \sin 3x).$$

比较系数得  $T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$ , ( $n \neq 1, 3$ ),  $T_1''(t) + T_1(t) = \cos(\omega t)$ ,  $T_3''(t) + 9T_3(t) = \cos(\omega t)$ . 初始条件为  $u(0, x) = 0$ ,  $u_t(0, x) = 0$ , 故  $T_n(t) \equiv 0$  ( $n \neq 1, 3$ ). 下面分别求解  $n = 1$  和  $n = 3$  的情形。

**解法一：常数变易法** 对常微分方程  $T_n''(t) + n^2 T_n(t) = f_n(t)$ ,  $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ , 通过常数变易法可解得

$$T_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(n(t - \tau)) d\tau.$$

这步的具体过程是令  $T_n(t) = C_n(t)y_n(t) + D_n(t)z_n(t)$ , 这里  $y_n(t) = \cos(nt)$ ,  $z_n(t) = \sin(nt)$ . 代入方程后求解  $C'_n(t)y_n(t) + D'_n(t)z_n(t) = 0$  和  $C'_n(t)y'_n(t) + D'_n(t)z'_n(t) = f_n(t)$  得到  $C_n(t)$ ,  $D_n(t)$  的表达式, 此处略去。

将  $f_1(t) = f_3(t) = \cos(\omega t)$  代入, 得到  $n = 1, 3$  时有

$$T_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^t \cos(\omega\tau) \sin(n(t - \tau)) d\tau = \frac{1}{2n} \int_0^t [\sin((\omega - n)\tau) + nt) + \sin(nt - (\omega + n)\tau)] d\tau.$$

- $\omega \neq 1, 3$  时, 直接计算积分得到  $T_n(t) = \frac{1}{\omega^2 - n^2}(\cos(nt) - \cos(\omega t))$  ( $n = 1, 3$ ).
- $\omega = 3$  时: 若  $n = 1$ , 则仍可以直接计算; 若  $n = 3$ , 则积分式中第一项与  $\tau$  无关, 计算可得

$$T_3(t) = \frac{1}{6}t \sin 3t, \quad T_1(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

- $\omega = 1$  时: 若  $n = 3$ , 则仍可以直接计算; 若  $n = 1$ , 则积分式中第一项与  $\tau$  无关, 计算可得

$$T_1(t) = \frac{1}{2}t \sin t, \quad T_3(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

**解法二：待定系数法** 我们待定  $T_n''(t) + n^2 T_n(t) = f_n(t)$ ,  $T_n(0) = T_n'(0) = 0$  的解为

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) + C_n \cos(\omega t).$$

- $\omega \neq 1, 3$  时可解得  $C_n = -\frac{1}{\omega^2 - n^2}$ ,  $A_n = -C_n$ ,  $B_n = 0$ , 从而  $T_n(t) = \frac{1}{\omega^2 - n^2}(\cos(nt) - \cos(\omega t))$  ( $n = 1, 3$ ).
- $\omega = 3$  时: 若  $n = 1$ , 则仍可以按照非共振的情况计算; 若  $n = 3$  则重新待定  $T_3 = A_3 \cos(3t) + B_3 \sin(3t) + t(C_3 \cos 3t + D_3 \sin 3t)$ . 此时可解得  $A_3 = B_3 = C_3 = 0$ ,  $D_3 = \frac{1}{6}$ . 所以

$$T_3(t) = \frac{1}{6}t \sin 3t, \quad T_1(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

- $\omega = 1$  时: 若  $n = 3$ , 则仍可以按照非共振的情况计算; 若  $n = 1$  则重新待定  $T_1 = A_1 \cos t + B_1 \sin t + t(C_1 \cos t + D_1 \sin t)$ . 此时可解得  $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ ,  $D_1 = \frac{1}{2}$ . 所以

$$T_1(t) = \frac{1}{2}t \sin t, \quad T_3(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t).$$

因此，方程的解为

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega t) - \cos t}{1 - \omega^2} \sin x + \frac{\cos(\omega t) - \cos 3t}{9 - \omega^2} \sin 3x, & \omega \neq 1, 3; \\ \frac{t}{6} \sin 3t \sin 3x + \frac{\cos t - \cos 3t}{8} \sin x, & \omega = 3; \\ \frac{\cos t - \cos 3t}{8} \sin 3x + \frac{t}{2} \sin t \sin x, & \omega = 1. \end{cases}$$

□

**试题 3-2 (20分).** 用分离变量法求解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0, \pi), \\ u(t, 0) = 2t, u(t, \pi) = 0 & t \geq 0, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 1 + \cos x & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

**解析.** 本题选自赵老师班上的作业题(周蜀林教材习题4.41(5)), 凑了一组满足相容性条件的初边值条件。

解. 第一步: 齐次化边界条件。令  $v(t, x) = u(t, x) - (1 - \frac{x}{\pi}) \cdot 2t$ , 计算可得  $v$  满足如下具有齐次Dirichlet边界条件的齐次波动方程

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0, \pi), \\ v(t, 0) = 0, v(t, \pi) = 0 & t \geq 0, \\ v(0, x) = 0, v_t(0, x) = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1 & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

第二步: 分离变量求解  $v$ 。考虑具有变量分离形式的解  $X(x)T(t)$ , 代入  $v$  的方程得到  $T''X - X''T = 0$ , 进而得到存在常数  $\lambda \in \mathbb{R}$  使得

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

解得  $\lambda = n^2 (n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $X_n = \sin nx$ . 于是系数  $T_n$  满足常微分方程  $T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$ , 解得  $T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt$ . 至此我们得到

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin(nx).$$

第三步: 通过  $v$  的初值确定  $A_n, B_n$ . 令  $t = 0$ , 据  $v(0, x) = 0$  和傅立叶系数唯一性得知全体  $A_n$  皆为零。再通过  $v_t$  的傅立叶级数计算可得

$$v_t(0, x) = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx.$$

所以只要计算 $\psi(x) := \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1$ 的傅立叶级数展开即可，即

$$B_n = \frac{1}{n} \psi_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (\cos x + \frac{2x}{\pi} - 1) \sin nx \, dx.$$

直接计算如下

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos x \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)] \, dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2n}{n^2-1} & n \text{ 为偶数} \end{cases}. \\ \int_0^\pi \frac{2x}{\pi} \sin nx \, dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(-\frac{\cos nx}{n})' \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx - \frac{2x \cos nx}{\pi n} \Big|_0^\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \\ \int_0^\pi \sin nx \, dx &= \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} -\frac{2}{n} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}. \end{aligned}$$

代入 $B_n$ 表达式可得

$$B_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{4}{\pi n^2(n^2-1)} & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

进而方程的解为

$$u(t, x) = (1 - \frac{x}{\pi}) \cdot 2t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2(4k^2-1)} \sin(2kt) \sin(2kx).$$

□

**试题 4-1 (20分).** 设 $u(t, x)$ 满足如下热方程，初值 $\varphi \in C([0, \pi])$ 分段可微且满足相容性条件 $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ .

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (t > 0, x \in (0, \pi)), \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in [0, \pi]).$$

(1) (15分) 若 $\varphi(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ , 证明：对任意 $t \geq 0$ 有 $e^{-t} \leq \max_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-t}$ .

(2) (5分) 若已知存在常数 $C > 0, a > 1$ 使得 $\max_{x \in [0, \pi]} |u(t, x)| \leq Ce^{-at}$ 对任意 $t \geq 0$ 成立，则初值 $\varphi(x)$ 在开区间 $(0, \pi)$ 内是否一定有零点？证明你的结论。

**解析.** 本题选自章老师班上作业题(讲义习题4.1.4)，并增加第二问。第一问的做法即为比较原理：我们注意到最小特征值 $\lambda = 1$ 的特征函数 $A \sin x$ 对应的解为 $Ae^{-t} \sin x$ ，而给定的初值可以被 $\sin x$ 和 $\frac{\pi}{2} \sin x$ 从下方、上方分别界住，因此直接使用比较原理就完事了。第二问则是从分离变量所得的正弦级数展开直接看出：因为 $\sin nx$ 模态对应的衰减是 $e^{-n^2 t}$ ，因此若给定的衰减率为 $e^{-at}$  ( $a >$

1)时, 我们就必须让 $n = 1$ 的傅立叶系数为零, 这说明 $\int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx = 0$ , 而 $\sin x$ 在 $(0, \pi)$ 恒为正, 所以 $\varphi$ 必须在 $(0, \pi)$ 内变号, 进而必有零点。

证明. (1) 注意到 $\sin x \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \sin x$ . 而初值为 $A \sin x$ 时, 方程的解为 $Ae^{-t} \sin x$ . 据热方程的比较原理, 我们得到 $e^{-t} \sin x \leq u(t, x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-t} \sin x$ 对任意 $t \geq 0, x \in [0, \pi]$ 恒成立。从而得到对任意 $t \geq 0$ 有 $e^{-t} \leq \max_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-t}$ .

(2) 据分离变量法, 可得

$$e^{at} u(t, x) = a_1 e^{(a-1)t} \sin x + e^{(4-a)t} \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{(4-n^2)t} \sin nx.$$

对固定的 $t > 0$ , 上式右端的级数是一致收敛的。若要想一致有界, 则必须 $a_1 = 0$ . 这就说明

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx = 0.$$

而 $\sin x$ 在开区间 $(0, \pi)$ 内恒为正, 所以 $\varphi(x)$ 必须在 $(0, \pi)$ 内有零点, 否则 $a_1$ 非零。  $\square$

**试题 4-2 (20分).** 设 $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ 是单位开球, 记 $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_1}$ . 已知 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是如下定解问题的解

$$-\Delta u + c(\mathbf{x})u = 0 (\mathbf{x} \in \Omega), \quad u = g(\mathbf{x}) (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 1.$$

其中 $c(\mathbf{x}) \geq 0$ 且在 $\overline{\Omega}$ 上局部有界(即在 $\overline{\Omega}$ 的任一紧子集上都有界)。

(1) (15分) 证明:  $\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| \leq \max\{1, \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g(\mathbf{x})|\}$ .

(2) (5分) 若 $c = 0, g = 0$ , 如上方程是否必有解? 若有, 请构造一个例子; 否则请证明不存在。

**解析.** 本题选自赵老师班上的作业题(周蜀林教材习题2.27), 并增加第二问。本题是极大值原理的直接应用, 第二问只要想到基本解的性质就很简单了。

证明. (1) 证法一: 令 $M = \max \left\{ 1, \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g(\mathbf{x})| \right\}$ . 我们证明在 $\Omega$ 上 $u(\mathbf{x}) \leq M$ 和 $u(\mathbf{x}) \geq -M$ .

首先证明 $u(\mathbf{x}) \leq M$ . 用反证法, 假设存在 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 使得 $u(\mathbf{x}_0) > M$ . 对 $R > 1$ , 记 $\Omega_R := B(\mathbf{0}, R) \setminus \overline{B_1}$ . 因为 $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 1 \leq M$ , 所以存在 $R_0 > 0$ , 当 $|\mathbf{x}| \geq R_0$ 时,  $u(\mathbf{x}) \leq \frac{u(\mathbf{x}_0)+M}{2} < u(\mathbf{x}_0)$ .

今取 $R > \max\{R_0, |\mathbf{x}_0|\}$ , 函数 $u$ 在 $\overline{\Omega_R}$ 上连续, 故在某点 $\mathbf{p} \in \overline{\Omega_R}$ 取到最大值。由于在 $|\mathbf{x}| = R$ 上 $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ , 且在边界 $|\mathbf{x}| = 1$ 上 $u = g \leq M < u(\mathbf{x}_0)$ , 所以 $\mathbf{p}$ 必满足 $\mathbf{p} \in \Omega_R$ . 并且 $u(\mathbf{p}) \geq u(\mathbf{x}_0) > M > 0$ , 也就是说我们实际证明了 $u$ 在 $\Omega_R$ 的内点取到非负最大值。

由于 $\Omega_R$ 是有界连通开集, 据 $g \geq 0$ 的强极大值原理可得 $u$ 在 $\Omega_R$ 中是常数, 由边界条件 $u|_{\partial\Omega} = g$ 及无穷远条件 $u \rightarrow 1$ 可知 $u \equiv 1$ , 显然满足 $u \leq M$ , 这与假设 $u(\mathbf{x}_0) > M$ 矛盾。所以 $u(\mathbf{x}) \leq M$ 在 $\Omega$ 上成立。

同理，可以证明  $u(\mathbf{x}) \geq -M$  在  $\Omega$  上成立。

(1) 证法二：同样作截断计算  $\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2 = 2cu^2 + 2|\nabla u|^2 \geq 0$ . 因为  $u^2$  非负且在无穷远是有界的，所以由下调和函数的弱极大值原理可得  $u^2$  在  $\Omega_R$  的边界上取到非负最大值，即对任意  $\mathbf{x} \in \Omega_R$  成立  $\sup_{\overline{\Omega_R}} u(\mathbf{x}) \leq \max\{\max_{\partial B_1} g^+, \max_{\partial B_R} u^+\}$ .

又因为  $u$  在无穷远处的极限是 1，所以对任意  $\varepsilon > 0$  存在充分大的半径  $R_\varepsilon \gg 1$  使得  $|u - 1| < \varepsilon$  在  $|\mathbf{x}| \geq R_\varepsilon$  时恒成立。所以，对给定的  $\varepsilon > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ，我们取  $R > \max\{|\mathbf{x}|, R_\varepsilon\}$  便有  $\sup_{\overline{\Omega_R}} u(\mathbf{x}) \leq \max\{\max_{\partial B_1} |g|, 1 + \varepsilon\}$ . 因为点  $\mathbf{x}$  是任意的，且  $\varepsilon$  可以任意小，所以令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得结论，同理可以证明  $-u$  的下界。

(2) 必有解，例如  $u(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{|\mathbf{x}|}$ ，即利用位势方程基本解来构造。(这个应该是唯一满足要求的解) □

**试题 5 (15分).** 设常数  $a > 0$ ，函数  $u(t, x)$  是如下有限区间  $(0, 1)$  上的粘性 Burgers 方程的古典解。

$$u_t - au_{xx} + uu_x = 0 \quad (t > 0, x \in (0, 1)), \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

其中初值  $\varphi(x) \in C^2([0, 1])$  满足相容性条件  $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ . 用能量法证明：

(1) (6分) 若  $\varphi(x) = 0$ ，则方程的解  $u(t, x) = 0$ .

(2) (9分) 该方程满足  $\max_{t \geq 0, x \in [0, 1]} |u_x(t, x)| \leq 2026$  的解  $u(t, x)$  是唯一的。

**解析.** 本题需要注意粘性 Burgers 方程不是线性方程，所以第一问并不蕴含第二问。第二问中的  $|u_x|$  一致有界实际上是可以证明的，但这门课所学内容不足以证明它成立。实际上本题还可以用 Cole-Hopf 变换+极值原理证明，但是这个内容并不在课程要求内；另一方面，我们希望考察同学们使用能量法解题。(当然我确实改到有同学用 Cole-Hopf 变换硬解第一题，算对了也给了 6 分。)

证明. (1) 方程两边乘以  $u$  然后积分，分部积分并利用  $u$  的零边值可得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u(t, x)^2 dx + a \int_0^1 (u_x(t, x))^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{3} \partial_x(u^3) dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u(t, x)^2 dx = -a \int_0^1 (u_x(t, x))^2 dx \leq 0.$$

所以  $\int_0^1 u(t, x)^2 dx$  关于  $t$  单调递减，进而  $\int_0^1 u(t, x)^2 dx \leq \int_0^1 \varphi(x)^2 dx = 0$ .

(2) 根据提示可算出  $w$  的方程为  $w_t - aw_{xx} + \frac{1}{2}[(u+v)w_x + (u_x+v_x)w] = 0$ ,  $w$  的边值和初值都为零。 $w$  满足的方程两边乘以  $w$  然后积分得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 w(t, x)^2 dx + a \int_0^1 (w_x(t, x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (u+v)w_x w + (u_x+v_x)w^2 dx = 0.$$

上式前两项不动，对第三个积分中的第一项分部积分且利用零边值可得

$$\int_0^1 (u+v)w_x w dx = - \int_0^1 (u+v)w_x w dx - \int_0^1 (u_x+v_x)w^2 dx \Rightarrow \int_0^1 (u+v)w_x w dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (u_x+v_x)w^2 dx.$$

所以

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 w(t, x)^2 dx = -a \int_0^1 (w_x(t, x))^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 (u_x + v_x) w^2 dx \leq 0 + \frac{1}{4} \int_0^1 (2 \times 2026) w^2 dx.$$

令  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w(t, x)^2 dx$ , 则  $E'(t) \leq 2026E(t)$ . 由 Grönwall 不等式得  $E(t) \leq E(0)e^{2026t}$ , 而  $E(0) = 0$  迫使  $E(t) \equiv 0$ .  $\square$

**试题 6 (15分).** 设  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  是方程  $-\Delta u + u = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) 的 有界解。

(1) (6分) 若  $u$  是径向函数, 即  $u(x)$  的取值仅依赖  $r := |x|$ . 证明:  $u$  必为零。

(2) (9分) 若去掉(1)中“ $u$  是径向函数”的假设, 证明:  $u$  仍然必为零。

提示: 证明(2)可考虑用  $u$  在点  $x$  处的球面平均替代  $u(x)$  本身。本题亦有多种其它解法不依赖该提示, 若用其它方法直接给出(2)的正确证明, 则仍然可得 15 分。请注意, 题设条件不足以使得定义 Fourier 变换的积分式收敛, 本题不允许使用缓增分布的 Fourier 变换及其性质证明结论。

**解析.** 本题的本质是  $(-\Delta)$  的特征值必须非负, 而题给方程若有非零有界解则表明  $-1$  也是特征值, 矛盾。这一点也可以从傅立叶变换考虑, 但是题给条件没有给出任何可积性的信息, 因此需要在缓增分布意义下作傅立叶变换才能得到  $(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = 0$  在缓增分布意义下成立, 进而  $\hat{u}(\xi) = 0$  在缓增分布意义下成立。

考虑径向解 (解法一) 是直接将方程化为常微分方程  $(ru)'' = ru$ , 这个过程与推导  $\mathbb{R}^3$  中波动方程的 Kirchhoff 公式的想法类似; 对非径向解, 我们就固定一点并考虑该点处的球面平均即可化为一样的方程。

此题也可用能量法做 (解法二), 但题目条件没给任何可积性, 因此需要取合适的截断函数。此题还可通过构造辅助函数然后用极大值原理做 (解法三), 当然这可能需要你有“比较集中的注意力”(实际上用  $|x|$  的偶数幂次加基本解来构造辅助函数是并不罕见的技巧)。需注意, 这两个解法的证明和计算过程都是不依赖维数的; 解法一理论上也不依赖维数, 但是对  $d \neq 3$  去解  $\varphi$  的常微分方程就比较复杂。

**证法一:** 球面平均法 (对应原题), 该方法只有三维容易计算. (1) 若  $u$  是径向解, 设  $v(r) = u(x)$ ,  $|x| = r$ . 则由 Laplace 算子的径向部分表达式  $\Delta u(x) = v''(r) + \frac{2}{r}v'(r)$  知, 原方程化作关于  $r$  变量的常微分方程

$$v''(r) + \frac{2}{r}v'(r) = v(r). \quad \boxed{\text{本班同学再写不出来真要打屁股了!}}$$

接下来令  $V(r) := rv(r)$ , 则可得到  $V'(r) = v(r) + rv'(r)$ ,  $V''(r) = 2v'(r) + rv''(r)$ , 进而上述常微分方程在两边同时乘以  $r^2$  之后化为

$$V''(r) = V(r) \Rightarrow V(r) = Ae^r + Be^{-r}.$$

因为  $u$  有界, 所以  $|V(r)|$  在  $r \rightarrow +\infty$  时关于  $r$  只有线性增长, 这表明  $A = 0$ . 另一方面仍由  $u$  的有界性知  $V(0) =$

0, 这迫使 $B = 0$ , 从而方程只有零解。

(2) 固定 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , 定义 $u$ 在 $\partial B(\mathbf{x}, r)$ 上的积分平均  $\varphi(r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$ , 并令 $\varphi(0) = u(\mathbf{x})$ . 下面证明断言. 对 $r > 0$  有  $\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = \varphi(r)$ .

断言的证明并不困难。首先我们计算 $\varphi'(r)$ . 令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^2$ , 则 $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}}$ , 所以

$$\varphi'(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{z} \cdot \nabla u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} dS_{\mathbf{y}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

利用积分的极坐标表示, 得到

$$r^2 \varphi'(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_{\partial B(\mathbf{x}, \rho)} \Delta u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} d\rho.$$

对 $r$ 求导并代入方程, 得到

$$\frac{d}{dr}(r^2 \varphi'(r)) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = r^2 \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = r^2 \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = r^2 \varphi(r).$$

直接计算得 $2r\varphi' + r^2\varphi'' = r^2\varphi$ , 两边除以 $r^2$ 即得断言成立。

接下来令 $\Phi(r) := r\varphi(r)$ , 求二阶导并代入断言后有 $\Phi''(r) = r\varphi''(r) + 2\varphi'(r) = r\varphi(r) = \Phi(r)$ . 而 $\Phi(0) = 0 \cdot u(\mathbf{x}) = 0$ , 解常微分方程得到 $\Phi(r) = A(e^r - e^{-r})$ . 但是 $u$ 有界, 从而 $\varphi$ 有界, 所以 $\Phi$ 至多关于 $r$ 是线性增长的, 因此 $A = 0$ 是唯一可能的选择, 这就得出球面平均 $\varphi \equiv 0$ , 进而也得到 $u(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$ .  $\square$

**证法二:** 能量法, 该方法不依赖维数. 由于没有假设 $u$ 及其各阶导数的 $L^2$ 可积性, 故不能直接乘以 $u$ 然后直接在 $\mathbb{R}^3$ 上积分。先考虑作截断, 令 $E(R) := \text{int}_{B(\mathbf{0}, R)} |\nabla u|^2 + u^2 d\mathbf{x}$ . 一方面, 据移动区域求导公式, 可得

$$E'(R) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} |\nabla u|^2 + u^2 dS_{\mathbf{x}}.$$

另一方面, 在 $E(R)$ 的第一项中分部积分并利用方程, 可得

$$E(R) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} u \frac{\partial u}{\partial N} dS_{\mathbf{x}}.$$

在这个表达式右边用均值不等式, 可得 $E'(R) \geq 2E(R)$ . 若 $u$ 不恒为零, 则存在 $R_0 > 0$ 使得 $E(R_0) > 0$ , 于是求解上述微分不等式得到 $E(R) \geq E(R_0)e^{2(R-R_0)}$ , 它关于半径具有指数增长。

接下来我们证明 $E(R)$ 关于 $R$ 至多只有线性增长, 从而导出矛盾。这需要不出现边界积分项, 为此我们令 $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 是非负、径向的光滑截断函数, 满足 $\zeta|_{|\mathbf{x}| \leq 1} = 1$ ,  $\zeta|_{|\mathbf{x}| \geq 2} = 0$ , 且关于 $|\mathbf{x}|$ 单调不增,  $|\nabla \zeta| \leq C$ 对某个常数 $C > 0$ 成立。再令 $\zeta_R(\mathbf{x}) := \zeta(\mathbf{x}/R)$ , 今在方程两边乘以 $\zeta_R^2 u$ 积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\zeta_R^2 u) \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\zeta_R u)^2 d\mathbf{x}.$$

左边分部积分，并利用 $\nabla(\zeta_R(\mathbf{x})) = \frac{1}{R}\nabla\zeta(\mathbf{x}/R)$ ，整理后得到

$$-\frac{2}{R} \int_{\mathbb{R}^d} \zeta_R u(\mathbf{x}) \nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} (\zeta_R u)^2 + |\zeta_R \nabla u|^2 d\mathbf{x}.$$

对左边用Cauchy-Schwarz不等式得到

$$\begin{aligned} -\frac{2}{R} \int_{\mathbb{R}^d} \zeta_R u(\mathbf{x}) \nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\leq \frac{2C}{R} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) u| |\zeta_R \nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{2}{R} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) u|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\zeta_R \nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{R} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) u|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\zeta_R \nabla u(\mathbf{x})|^2 + |\zeta_R u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

若令 $I(R) := \int_{\mathbb{R}^d} (\zeta_R u)^2 + |\zeta_R \nabla u|^2$ ，则由 $|\nabla \zeta| \leq C$ 就有

$$I(R) \leq \frac{4}{R^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \zeta\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right) u|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{4C^2}{R^2} \int_{R < |\mathbf{x}| < 2R} u^2 d\mathbf{x} \leq \frac{4C^2}{R^2} \cdot \alpha(d)(2^d - 1)R^d \cdot M^2 \leq C'R^{d-2} \quad (M := \max_{\mathbb{R}^d} |u|).$$

又因为 $E(R) \leq I(R)$ ，所以 $E_R \leq C'R^{d-2}$ ，这与 $E(R) \geq E(R_0)e^{2(R-R_0)}$ 矛盾，因此 $E(R) = I(R) \equiv 0$ ，进而 $u \equiv 0$ .  $\square$

**证法三：**构造辅助函数用极大值原理，该方法不依赖维数。这里我们写 $d \geq 3$ 的证明。设 $|u| \leq M$ ，令 $v = |\mathbf{x}|^2 + A|\mathbf{x}|^{2-d}$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ )，其中 $A > 0$ 充分大（实际上 $A > d\sqrt{d}$ 即可）。计算得 $\Delta v = 2d$ ，进而对任意 $\varepsilon > 0$ 有 $Lu := -\Delta u + u = 0 \leq L(\varepsilon v) = \varepsilon(|\mathbf{x}|^2 - 2d + A|\mathbf{x}|^{-1})$ , ( $\forall \mathbf{x} \neq 0$ ).

再考虑区域 $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^2 < |\mathbf{x}| < \varepsilon^{-2}\}$ 。则只要 $\varepsilon > 0$ 充分小，便有 $\varepsilon v \geq u$ 在 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上成立：

- $|\mathbf{x}| = \varepsilon^{-2}$ 时， $\varepsilon v(\mathbf{x}) = \varepsilon^{1-4d} + A\varepsilon^{2d-3} \geq M$ ； $|\mathbf{x}| = \varepsilon^2$ 时， $\varepsilon v(\mathbf{x}) = \varepsilon^5 + A\varepsilon^{5-2d} \geq M$ .

由于算子 $L$ 中的零阶项系数为正，因此由椭圆算子的极大值原理得知 $u(\mathbf{x}) \leq \varepsilon(|\mathbf{x}|^2 + A|\mathbf{x}|^{2-d})$ 在 $\Omega_\varepsilon$ 中恒成立。令 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ 得到 $u \leq 0$ 对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 成立。请注意，到这里不足以推出 $u$ 是常值函数！

同理我们可以证明 $-u$ 和 $u$ 满足同样的结论： $-u \leq 0$ 对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 成立。因此 $u$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ 恒成立，又因为 $u$ 连续，所以 $u$ 必为零。

**注记 1.**  $d = 2$ 的情况实际上更简单，此时令 $v(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 + 5$ ，则 $L(\varepsilon v) = \varepsilon(1 + |\mathbf{x}|^2) \geq 0 = Lu$ . 现在考虑半径为 $R$ 的球 $B(\mathbf{0}, R)$ ，在 $|\mathbf{x}| = R$ 上我们有 $\varepsilon v = R^2 + 5 \geq |u|$  (只需 $R = R_\varepsilon > \sqrt{M/\varepsilon}$ 即可)。这样用极大值原理就得到 $u(\mathbf{x}) \leq \varepsilon(|\mathbf{x}|^2 + 5)$ 对任意 $\mathbf{x} \in B(0, R_\varepsilon)$ 恒成立。再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，以及对 $-u$ 考虑同样的计算即可。

$\square$

**试题 7 (15分，附加题).** 设 $d \geq 2$ ，函数 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是方程 $\Delta^2 u = 0$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ )的非负解。

- (1) (6分) 证明： $\Delta u \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^d$ 恒成立。
- (2) (9分) 证明： $u$ 是次数不超过2的多项式。

提示：回忆平均值原理和梯度估计是怎么证明的，对后者如何利用某些量的非负性？

**解析.** 本题第二问是2025年丘成桐大学生数学竞赛分析与微分方程个人赛决赛试题（丘赛决赛是口试），据说考场上给的提示是本题第一问。在出考题时我是想改编下面这道讲义上未布置的题，然后又想到丘赛决赛题恰好可以这么做，因此就有了这道考题。

**习题4.2.9.** 设 $v$ 是 $\mathbb{R}^d$ 内的调和函数，且存在常数 $C > 0, p > 0$ 使得 $v(\mathbf{x}) \geq -C|\mathbf{x}|^p$ 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 成立，则 $v$ 是次数不超过 $p$ 的多项式。

我们知道如果 $\mathbb{R}^d$ 上的调和函数 $v$ 满足 $|v(\mathbf{x})| \leq C|\mathbf{x}|^p$ ，则由梯度估计很容易得到结论；现在改成单侧的界，结论也是正确的。应用到此题上只需令 $v = \Delta u$ ，则 $v$ 是调和函数；在第一问的基础上，由Liouville定理立刻得到 $v = C$ ，进而借助技巧 $\Delta(|\mathbf{x}|^2) = 2d$ 构造出 $v - \frac{C}{2d}|\mathbf{x}|^2$ 满足习题4.2.9在 $p = 2$ 时的条件。而习题4.2.9的证明与Evans或周蜀林书上的梯度估计没有太大差别，也就是我们上课说的“要证明一个函数是次数不超过 $p$ 的多项式，只需证明其 $[p] + 1$ 阶及以上的导数皆为零”。在下面给出的几个证明中都可以看出：本题第一问是关键步骤（据说是决赛现场给的提示），而它的证明基本是如法炮制平均值原理的推导过程。

网上有人（在评价这届丘赛试题时）说：“压轴题比较钓鱼，读者首先要证明多调和函数的Nicolesco分解，考试只有40分钟根本来不及完成，也正如颁奖典礼的‘遗憾的是分析没有满分’，作者表示这要是能满分就无敌了。”然而解决此题只需要修改平均值原理和梯度估计的证明，所以这题也根本不是网上所说的“钓鱼题”。事实上丘赛决赛口试是难在“40分钟要大致解决三道难题”，对知识面的“广度”和“对重要定理证明方法/重要工具从思想层面上的把握”要求非常高，而并非从犄角旮旯翻出一些罕为人知的内容。该年口试难在同期题目还有泛函分析(H)考过两次(2016、2024)的知名结论（是Grothendieck证明的）

“ $L^2([0, 1])$ 的闭子空间如果落在 $C([0, 1])$ 里，则必是有限维的。”

当然这道题也有很多证法，大部分泛函书上给出的是利用闭图像定理证明，但实际上也有纯实变方法（几乎不依赖任何泛函分析）的证明。

在阅卷过程中，我改到本班有一位同学几乎做对了这道题，最终给了他12分（扣分扣在第一问），他也是今年两个班245位同学中唯一一位获得总评100分的。值得一提的是，他证明第二问的方法比下述证法一（我出考题时写的证法）要简单，因此在这里记录为证法二。本班除了一位同学附加题获得12分之外，另有7位同学获得5-8分不等，至少证得了一部分“本质进展”。另外，从赵老师班的梁儒彬助教那里我得知了23级李恩涵同学在决赛现场给出的用Harnack不等式的做法，在征求到他的同意后我把他的证明放到证法三予以展示，该方法也是非常巧妙。

**总之科大同学应该相信自己的能力，不要轻易受他人言论影响，更不要畏难。** 对能力较强的同学来说，在适度超前学习的过程中逐步拓宽知识面也是提升数学素养的一种途径，而参照丘赛大纲和往年题确实也是一种可取的方法（这也是当年我们在信息、资源相对缺乏情况下的学习方法之一），当然如果能在竞赛中获得奖项就更好了。

**证法一.** (1)先证明： $\Delta u \geq 0$ 恒成立。固定 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ，定义 $u$ 在点 $\mathbf{x}$ 处的球面平均 $\varphi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$ 。

解法一：模仿调和函数平均值原理的证明可得

$$\varphi'(r) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{y}) dS_y \stackrel{\text{散度定理}}{=} \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{r}{d} \oint_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

又因为 $\Delta u$ 是调和函数，所以据平均值原理得 $\varphi'(r) = \frac{r}{d} \oint_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{r}{d} \Delta u(\mathbf{x})$ .

下面用反证法：假设存在点 $\mathbf{x}$ 使得 $\Delta u(\mathbf{x}) < 0$ 。此时在 $\varphi'(r) = \frac{r}{d} \Delta u(\mathbf{x})$ 的两边对 $r$ 积分可得 $\varphi(r) = \varphi(0) + \frac{r^2}{2d} \Delta u(\mathbf{x})$ . 注意到等式右边是二次项系数为负的二次函数，所以当 $r$ 充分大时右边必定为负值。但左边 $\varphi(r)$ 是 $u$ 的球面平均，据条件 $u \geq 0$ 知道 $\varphi \geq 0$ 必定成立，矛盾。所以必有 $\Delta u \geq 0$ 恒成立。

解法二：模仿第六题第二问证明可得 $\varphi''(r) + \frac{d-1}{r} \varphi'(r) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u dS = \Delta u(\mathbf{x})$ . 解该常微分方程同样可得 $\varphi(r) = \varphi(0) + \frac{r^2}{2d} \Delta u(\mathbf{x})$ . 后面同解法一。

(2) 欲证明 $u$ 是次数不超过2的多项式，只要证明 $u$ 的 $\geq 3$ 阶偏导数皆为零即可。由(1)得知， $\Delta u$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负调和函数，所以必为常值(习题4.2.8(2))，即存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得 $\Delta u = C$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上恒成立。接下来令 $v = u - \frac{C}{2d}|\mathbf{x}|^2$ , 则

$$v(\mathbf{x}) \geq -\frac{C}{2d}|\mathbf{x}|^2, \quad \Delta v = 0.$$

据梯度估计，任给一点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ , 对正整数 $k \geq 3$ 和阶数为 $k$ 的多重指标 $\alpha$ , 我们有

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha v(\mathbf{x}_0)| &\leq \frac{C_k}{r^{d+k}} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |v(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \frac{C_k}{r^{d+k}} \left[ \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \frac{C}{2d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} \right] \\ &= \frac{C_k}{r^{d+k}} \left[ \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{C}{2d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} \right] \quad (\text{这里用到 } u \geq 0) \\ &= \frac{C_k}{r^{d+k}} \left[ \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{C}{d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} \right] \quad (\text{这里用到 } u = v + \frac{C}{2d}|\mathbf{x}|^2). \end{aligned}$$

由于 $v$ 是调和函数，据平均值原理得 $\int_{B(\mathbf{x}_0, r)} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha(d)r^d v(\mathbf{x}_0)$ . 而上式最后一个积分可以直接估计：注意到 $B(\mathbf{x}_0, r) \subset B(\mathbf{0}, |\mathbf{x}_0| + r)$ , 因此有

$$\int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} \leq \int_{B(\mathbf{0}, |\mathbf{x}_0| + r)} |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} = \frac{d\alpha(d)}{d+2} (|\mathbf{x}_0| + r)^{d+2}.$$

将以上估计代入梯度估计就得到：对正整数 $k \geq 3$ 和阶数为 $k$ 的多重指标 $\alpha$ 成立不等式

$$|\partial^\alpha v(\mathbf{x}_0)| \leq C_k \left[ r^{-k} \alpha(d) v(\mathbf{x}_0) + \frac{2d\alpha(d)}{d+2} \cdot \frac{(|\mathbf{x}_0| + r)^{d+2}}{r^{d+k}} \right].$$

令 $r \rightarrow \infty$ , 因为 $\mathbf{x}_0$ 是已经固定的点，所以可以看出上式在 $k \geq 3$ 时必将趋向于0，这就证明了 $u$ 的3阶及以上各阶偏导数皆为零。  $\square$

证法二（该方法(2)来自本班最高分同学的答卷）. (1) 同解法一。

(2) 由(1)得知,  $\Delta u$  是  $\mathbb{R}^d$  上的非负调和函数, 所以必为常值(习题4.2.8(2)), 即存在常数  $C \in \mathbb{R}$  使得  $\Delta u = C$  在  $\mathbb{R}^d$  上恒成立。又因为  $u$  是光滑函数, 所以对该方程求导知  $u$  的任意阶偏导数皆为  $\mathbb{R}^d$  上的调和函数。接下来证明  $u$  的  $\geq 3$  阶偏导数皆为零即可。设  $1 \leq i, j, k \leq d$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d, R > 0$ , 对  $\partial_j \partial_k u$  用梯度估计得

$$|\partial_{ijk}^3 u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d}{R} \max_{\partial B(\mathbf{x}_0, R)} |\partial_{jk}^2 u(\mathbf{x}_0)| = \frac{d}{R} |\partial_{jk}^2 u(\mathbf{y}_0)|, \quad \text{for some } \mathbf{y}_0 \in \partial B(\mathbf{x}_0, R).$$

接下来继续对  $\partial_k u$  在  $\mathbf{y}_0$  处用梯度估计, 再用平均值原理得: 存在  $\mathbf{z}_0 \in \partial B(\mathbf{y}_0, R)$  使得

$$|\partial_{ijk}^3 u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d^2}{R^2} |\partial_k u(\mathbf{z}_0)| = \frac{d^2}{R^2} \left| \oint_{B(\mathbf{z}_0, R)} \partial_k u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|.$$

分部积分可得

$$\oint_{B(\mathbf{z}_0, R)} \partial_k u(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = \frac{1}{\alpha(d)R^d} \int_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} u(\mathbf{z}) N_k(\mathbf{z}) \, dS_{\mathbf{z}} = \frac{d}{R} \oint_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} u(\mathbf{z}) N_k(\mathbf{z}) \, dS_{\mathbf{z}},$$

进而

$$|\partial_{ijk}^3 u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d^3}{R^3} \left| \oint_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} u(\mathbf{z}) N_k(\mathbf{z}) \, dS_{\mathbf{z}} \right| \leq \frac{d^3}{R^3} \oint_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} |u(\mathbf{z})| \, dS_{\mathbf{z}} \stackrel{u \geq 0}{=} \frac{d^3}{R^3} \oint_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} u(\mathbf{z}) \, dS_{\mathbf{z}}.$$

而据(1)的证明过程知  $\oint_{\partial B(\mathbf{z}_0, R)} u(\mathbf{z}) \, dS_{\mathbf{z}} = u(\mathbf{z}_0) + \frac{C}{2d} R^2$ , 代入上式并令  $R \rightarrow \infty$  知, 对任意的  $1 \leq i, j, k \leq d$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  有  $\partial_{ijk}^3 u(\mathbf{x}_0) = 0$ , 这说明  $u$  的  $\geq 3$  阶偏导数皆为零, 所以  $u$  是次数不超过2的多项式。□

证法三: 用 Harnack 不等式 (该解法来自去年的参赛选手李恩涵同学)。 (1) 同解法一。

(2) 令  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \frac{C}{2d} |\mathbf{x}|^2$ , 则有  $\Delta v = 0$  恒成立, 且  $v$  具有单侧二次函数下界  $v(\mathbf{x}) \geq -\frac{C}{2d} |\mathbf{x}|^2$ . 现在只需证明存在(充分大的)常数  $A > 0$  使得  $v(\mathbf{x}) \leq A(1 + |\mathbf{x}|^2)$ , 就可结合单侧下界即可推出  $|v(\mathbf{x})| \leq A(1 + |\mathbf{x}|^2)$ , 进而据 Liouville 定理知  $v$  是次数不超过2的多项式。

构造函数  $f_r(\mathbf{x}) = v(r\mathbf{x}) + \frac{C}{d} r^2$ , 则调和函数  $f_r(\mathbf{x}) > 0$  对  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1), r > 0$  恒成立。据 Harnack 不等式有

$$\sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})} f_r(\mathbf{x}) \leq C' f_r(\mathbf{0}) \leq C' \left( v(\mathbf{0}) + \frac{C}{d} r^2 \right) \Rightarrow v(r\mathbf{x}) \leq C' v(\mathbf{0}) + \frac{C}{d} (C' - 1) r^2.$$

今对任意给定的  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , 我们选取  $r = 2|\mathbf{y}|$ ,  $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{r}$ , 进而  $|\mathbf{x}| = \frac{1}{2}$ . 于是就有

$$v(\mathbf{y}) \leq C' v(\mathbf{0}) + \frac{4C}{d} (C' - 1) |\mathbf{y}|^2 \leq C' v(\mathbf{0}) + \frac{4CC'}{d} |\mathbf{y}|^2, \text{ 即为所求。}$$

□

失败的尝试：从径向解到球面平均。这个证法是我在印完试卷回办公室的路上想到的（因为想到第六题用了这个方法所以试了一下），后来算了一下，感觉这是一种失败的想法，因为球面平均关于半径的增长率并非函数本身的增长率，用球面平均代替径向解的方法是在 $r \rightarrow 0$ 时好用，而非 $r \rightarrow \infty$ 。

我们采用第六题的思想，先计算径向有界解，然后再用球面平均替代径向解。设 $v = \Delta u$ ，则 $\Delta v = 0$ 。利用Laplace算子的径向部分表达式，我们可得两个常微分方程

$$v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r) = 0, \quad u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) = v(r).$$

首先可以直接算出 $v$ 的表达式  $v(r) = \begin{cases} A \ln r + B & d = 2 \\ Ar^{2-d} + B & d \geq 3 \end{cases}$ 。然后将其代入 $u$ 的方程，讨论如下情况

- $d = 2$ . 此时 $u$ 满足的方程可化简为 $\frac{1}{r}(ru')' = A \ln r + B$ ，把 $r$ 乘过去并积分得到

$$u'(r) = \frac{A}{2}r \ln r + \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{4}\right)r + \frac{C}{r} \Rightarrow u(r) = C_1 + C_2r^2 + C_3 \ln r + C_4r^2 \ln r.$$

- $d \geq 3$ , 此时 $u$ 满足的方程可以化简为 $\frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}u')' = \frac{A}{r^{d-2}} + B$ ，也即 $\frac{d}{dr}(r^{d-1}u'(r)) = Ar + Br^{d-1}$ ，积分得到 $r^{d-1}u'(r) = \frac{A}{2}r^2 + \frac{B}{d}r^d + C$ ，进而

$$u'(r) = \frac{A}{2}r^{3-d} + \frac{B}{d}r + Cr^{1-d}.$$

所以此时需要进一步讨论 $3-d = 0, -1, \leq -2$ 三种情况，也就是 $d = 3, 4, \geq 5$ 的情况：

- $d = 3$ , 此时 $u(r) = C_1 + C_2r^2 + \frac{C_3}{r} + C_4r$ .
- $d = 4$ , 此时 $u(r) = C_1 + C_2r^2 + C_3 \ln r + \frac{C_4}{r^2}$ .
- $d \geq 5$ , 此时 $u(r) = C_1 + C_2r^2 + C_3r^{2-d} + C_4r^{4-d}$ .

由于我们考虑的是方程的古典径向解，因此我们不允许方程的解在原点( $r = 0$ )爆破，因此我们必须删去 $r$ 的负幂次和 $\ln r$ 这样的项；又因为 $u$ 非负，所以 $r$ 的正奇数幂次也要删去。综上所述，无论维数 $d \geq 2$ 到底是多少，满足条件的径向解只可能是 $u(r) = C_1 + C_2r^2$ 的形式。

对非径向的情况，我们固定 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ，定义 $u$ 在点 $\mathbf{x}$ 处的球面平均 $\varphi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$ 。则 $\varphi(r) = C_1 + C_2r^2$ 。（所以我们绕了这么大的弯子才得到一些初步结论）。请注意这并不足以推出 $u$ 具有相同的阶（考虑反例 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ），我们仍然需要证明 $\int_{B(0, R)} |u| d\mathbf{x} = \int_{B(0, R)} |u| d\mathbf{x} \leq CR^{d+2}$ ，之后再用证法二中(2)的梯度估计。□