2025年秋季学期偏微分方程作业四

极大值原理、格林函数

截止时间：2026年元月5日下课前

作业题1–9是必做题，作业题10是选做题。

作业题 1 (习题4.1.3). 设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是单调递增函数, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$是有界区域, 常数$T > 0$. 设$u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u) = 0, & \text{in } \Omega_T \\ u(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}), & t = 0,\ \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} \\ u(t, \boldsymbol{x}) = g(t, \boldsymbol{x}), & t \ge 0, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中φ, g是给定的有界光滑函数。

(1) 设$f \in C^1$, **叙述并证明**微分算子$\mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u + f(u)$的比较原理。

(2) 如果只假设f连续，证明上述方程解的唯一性。(提示：可以用能量法。)

作业题 2 (习题4.1.4). 考虑一维热方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in } [0, +\infty) \times (0, \pi), \qquad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \ (t \ge 0).$$

(1) 证明: 对任意$a \in \mathbb{R}$, $v(t, x) = a e^{-t} \sin x$满足上述方程。

(2) 若初值选取为$u(0, x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$, 证明：对应的解满足$e^{-t} \le \max\limits_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \le \frac{\pi}{2} e^{-t}$.

提示: (2)可以用比较原理，可以联想(1)中解的初值是什么。

作业题 3 (习题4.2.3，下调和函数的弱极值原理). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是有界开集（未必是区域）。函数$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$是$\Omega$中的**下调和函数**, 即$-\Delta u \le 0$在$\Omega$内恒成立。

(1) 证明：对任意球$B(\boldsymbol{x}, r) \Subset \Omega$，成立$u(\boldsymbol{x}) \le \fint_{B(\boldsymbol{x}, r)} u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$.

(2) 证明：$\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

(3) 证明：若$v \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$是$\Omega$内的调和函数，则$|\nabla v|$在$\partial\Omega$上达到最大值。

提示：(1)模仿调和函数平均值原理的证明。(2) 先证明$-\Delta u < 0$的情况，对一般情况考虑扰动$u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$. (3) 计算$\Delta(|\nabla v|^2)$并证明它非负。

作业题 4 (习题4.2.5，选做). 设$\Omega := B(\boldsymbol{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$, $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$满足

$$\Delta u - 2u = 1 \quad \text{in } \Omega,\ \ u|_{\partial\Omega} = g(\boldsymbol{x}).$$

这里g是$\partial\Omega$上的连续函数，证明：存在常数$C > 0$使得$\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \le \max\limits_{\partial\Omega} |g| + C$.

提示：选取充分大的常数$\lambda > 0$, 使得$\Delta(u^2 + \frac{\lambda}{4}|\boldsymbol{x}|^2) \ge 0$.

作业题 5 (习题4.2.6). 设$u \in C^3(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$是开集$\Omega$内的非负调和函数, 球$B(\boldsymbol{x}_0, R) \Subset \Omega$.证明：对任意$1 \le i \le d$有$|\partial_{x_i} u(\boldsymbol{x}_0)| \le \dfrac{d}{R} u(\boldsymbol{x}_0)$.

提示：$u \geqslant 0$表明$u = |u|$，思考在模仿命题4.2.9的证明过程中如何利用这个事实得到我们想要的结论。

作业题 6 (习题4.2.8). 设u是$\mathbb{R}^d$中的调和函数。证明：若u满足以下两条件中任一个，则u是常数。

(1) $\exists$ 常数 $C > 0, p > 0$ 使得 $|u(\boldsymbol{x})| \le C\left(\log(1 + |\boldsymbol{x}|^p) + 1\right)\ \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

(2) $\exists$ 常数 $C \in \mathbb{R}$, $u(\boldsymbol{x}) \ge C\ \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

作业题 7 (习题4.3.5). 设$u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ $(i = 1, 2)$是如下方程的解

$$-\Delta u_i + c_i(\boldsymbol{x}) u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u_i|_{\partial\Omega} = g_i(\boldsymbol{x}).$$

若$c_2(\boldsymbol{x}) \ge c_1(\boldsymbol{x}) \ge 0$和$g_1(\boldsymbol{x}) \ge g_2(\boldsymbol{x}) \ge 0$恒成立，证明：$u_1(\boldsymbol{x}) \ge u_2(\boldsymbol{x})$在$\overline{\Omega}$上恒成立。

提示：先证明$u_i \ge 0$, 再考虑$u_1 - u_2$满足的方程和边值条件。

作业题 8 (习题5.2.1). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \ge 2)$是边界光滑的有界区域，定义$D := \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega\}$为$\Omega$的直径。记$\Phi(\boldsymbol{x})$为Laplace方程的基本解（见讲义上的定义3.3.1）。今固定$\boldsymbol{x} \in \Omega$, 证明：

(1) 格林函数$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$是唯一的，且满足$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} = -1$;

(2) 当 $d \ge 3$ 时, 对任意$\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \Omega$有$0 < G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$成立;

(3) 当 $d = 2$ 时, 对任意$\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \Omega$有$0 < G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{D}$成立.

提示：(1)边值为1且在有界区域Ω中调和的函数只能是常值函数1. (2)-(3)思考怎么用极大值原理，本题(2)是以前的考试原题。

作业题 9 (习题5.2.3，球上的Harnack不等式). 设u是闭球$\overline{B(\boldsymbol{0}, R)} \subset \mathbb{R}^d$上的非负调和函数。

(1) 结合讲义上的公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2} \frac{R - |\boldsymbol{x}|}{(R + |\boldsymbol{x}|)^{d-1}} u(\boldsymbol{0}) \le u(\boldsymbol{x}) \le R^{d-2} \frac{R + |\boldsymbol{x}|}{(R - |\boldsymbol{x}|)^{d-1}} u(\boldsymbol{0})$$

(2) 用(1)证明：$\forall r \in (0, R)$, 成立不等式 $\sup\limits_{B(\mathbf{0},r)} u \leq (\frac{R+r}{R-r})^d \inf\limits_{B(\mathbf{0},r)} u$.

作业题 10 (问题4.1.1，选做). 习题4.1.4中，假设初值$u(0,x) = u_0(x) \in C^1([0,\pi])$且满足$u_0(0) = u_0(\pi) = 0$，证明：存在常数$C > 0$，使得对应的解满足 $\sup\limits_{x\in[0,\pi]} |u(t,x)| \leq Ce^{-t}$.

提示：将$u_0(x)$与习题4.1.4(1)初值的常数倍相比较，这是本题假设初值C^1的原因所在。