2025年秋季学期偏微分方程作业一

截止时间：2025年11月27日下课前

作业题 1 (习题1.1.2). 解方程$x\partial_t u + t\partial_x u = 0$ ($t, x \in \mathbb{R}$), $u(0,x) = e^{-x^2}$. 并说明tOx平面中哪些部分的解由初值唯一确定？

作业题 2 (习题1.1.3). 考虑方程$3u_y + u_{xy} = 0$.

(1) 计算方程的通解.（提示: 令$v = \partial_y u$.）

(2) 若假设$u(x,0) = e^{-3x}$, $u_y(x,0) = 0$, 方程的解是否存在？是否唯一？

作业题 3 (习题2.1.1). 证明方程$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$的解必定满足“平行四边形法则”，即$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$, 其中 A, B, C, D 构成 xOt-平面上的平行四边形，其边界方程为$x \pm ct =$ 常数.

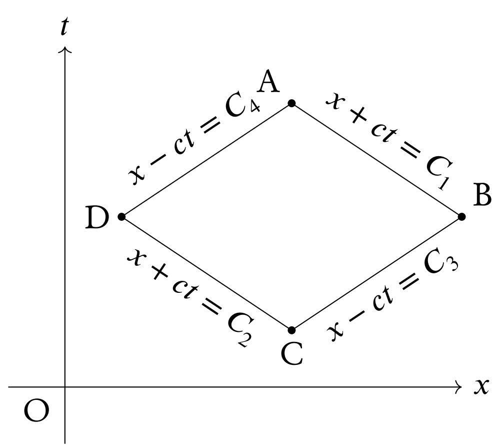

图 1: 习题2.1.1图

作业题 4 (习题2.1.2). 考虑方程 $20u_{tt} - u_{tx} - u_{xx} = 0$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}$).

(1) 计算通解。（提示：因式分解方程左边的微分算子）

(2) 假设初值是 $u(0,x) = x$, $\partial_t u(0,x) = e^{-x} + \frac{1}{4}$, 计算方程的解$u(t,x)$.

作业题 5 (习题2.1.3). 考虑第一象限中一个扇形区域内的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > x > 0; \\ u(t,t) = \varphi(t),\ u_x(t,0) = \psi(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

(1) 通过将初值φ, ψ代入通解$u(t,x) = F(x-t) + G(x+t)$, 计算$u(t,x)$ (用φ, ψ表示).

(2) 对哪些(t,x), $u(t,x)$的值完全由初值φ, ψ在$[0,1]$区间内的部分决定?

作业题 6 (习题2.1.4). 考虑一维波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) & t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 是给定的常数, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 定义

$$K(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x,\ P(t) := \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

证明:

(1) $K(t) + P(t)$是守恒量，并据此证明方程平方可积解的唯一性。

(2) 当t充分大时，有$K(t) = P(t)$. （提示：使用达朗贝尔公式）

本题中的记号$C_c^\infty(\mathbb{R})$是指全体具有紧支集的光滑函数，即$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{Spt}\, f$是紧集$\}$, 其中$\mathrm{Spt}\, f := \overline{\{f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.

作业题 7 (习题2.2.3). 设函数$u(t,\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} - \sigma t)}$, 其中$\sigma \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. 对如下方程具有该形式的解, 计算$\sigma$与$|\boldsymbol{y}|$之间的关系（该关系称作“色散关系”）。

(1) 波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$.

(2) Klein-Gordon方程 $\partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0$.

(3) Schrödinger方程 $i\partial_t u + \Delta u = 0$.

(4) Airy方程 $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$.

作业题 8 (习题2.3.3). 证明：对任意常数$D \in \mathbb{R}$, 如下方程至多只有一个光滑解 $u \in C^\infty([0,T] \times$

[0, 1]).

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & t \in (0,T), x \in (0,1); \\ u(0,x) = \varphi(x),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) & x \in [0,1]; \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{0.1}$$

作业题 9 (问题2.2.1，选做). 考虑二维波动方程的初值问题

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0\ \ (t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2), \qquad u(0,\boldsymbol{x}) = 0,\ \ \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})\ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

其中初值$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(1) 用积分的极坐标表示证明

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_{\partial B(\boldsymbol{0},1)} \psi(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r.$$

(2) 证明: 存在常数$C > 0$（不依赖ψ），使得如下估计成立

$$|u(t,\boldsymbol{x})| \le \frac{C}{\sqrt{t}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right).$$

(2)的提示：把(1)右边的积分$\int_0^t$拆成$\int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$. 第二部分的估计和三维情况类似。对第一部分，把$r \le t - \varepsilon$带进(1)中的分母，然后取$\varepsilon > 0$充分小去得到要证的结果。