USTC基础数学修课指南

山顶洞投资研究中心 出品

第一版

前言

这份学习指南[1] 旨在为中国科学技术大学想学习基础数学的同学们提供一些课程学习上的建议，包括但不仅限于：课程修读顺序、课程主要内容、教材与参考书的选取、课程的拓展方向、以及少量前沿简介。众所周知，数院官网上的基础数学方向培养计划最后更新于2011年，近8年来的调整都没有体现。同时，课程学习上的具体困难、重点内容、以及更重要的选课建议也没有被明确地、详细地指出。这些方面，清华大学数学系就做得比较好。相比之下，我们认为可以编写一套适用于中科大同学的学习指南。完成这份指南的都是近年中科大数学专业的学生，目前在博士生阶段或者高年级本科生阶段，没有邀请任何老师参与编写这份指南。

作者列表（按姓氏拼音字母排序）：

分析与微分方程：罗宇杰(14)、马骁(14)、王翌宇(16)、章俊彦(13)；

代数与数论：毛天乐(14)、牟卓群(13)、单逸(16)、肖宇(17)；

几何与拓扑：龚禹霖(15)、胡家昊(13)、李明阳(16)、王翌宇(16)；

组合与图论：黄一轩(16)、荆一凡(12)、马岳(14)、袁晓璠(13)；

概率论：姚东(13)、章俊彦(13)。

本学习指南只讲到“本研贯通”的水平为止(对应科大的MA04, MA05级别的课程)，再往后同学们需要根据自己将来研究的方向进行学习，因此没有必要指出。同时，这份指南面向的是任何一个对基础数学感兴趣的科大同学，并不是仅仅那些成绩非常好的大佬们。指南中参考书的选取、课程内容的介绍均是以合理的难度进行。

指南的第一部分给出了**基于科大培养计划和课程设置的**修课流程图。当然，这个流程图只是大致列了一下科大常年开设课程的修读顺序，所以也没必要完全按照流程来走，更没必要也没时间每个方向都学一遍。

指南的第二部分介绍的是数学分析、线性代数这两大最基本、也是最重要的基础课。负责这两部分的作者在撰写学习建议时非常谨慎，因为这是数学学院任何一个学生（包括非基础数学方向）都必须迈过去的坎。我们并不主张一开始就学得太难，不建议过于重复性的刷题，更不建议一开始就强调过多的奇技淫巧。相反，我们认为积累实例，理解并记住数学分析、线性代数里的基本语言、具体计算和证明方法是更加重要的。我们也不主张在数学分析、线性代数的学习中就加入过多的实分析、泛函分析、拓扑学、微分流形的初步知识：它们可以作为阅读材料出现，但是并不适合给大多数同学作为这一阶段的学习内容。与其半讲不讲地介绍这些所谓的“升级知识”，不如先让同学们打好基本功，学完数分、线代之后直接去系统地学习那些深入的知识。

指南的第三部分主要介绍的是本科二、三年级的基础课程，且大多为必修课。相比数分、线代而言，同学们会在这些课程上遇到非常明显的难度提升。因此，我们认为这部分的重点是理清课程的主要内容，方便同学们把握课程的脉络，这样再去进行理解、计算、证明，就有了“动机”。这部分开始，我们不建议同学们大量做题，完成作业题是基本，但做掉书上所有课后习题已经可以算“超额完成任务了”。这部分更重要的还是形成自己的理解，消化证明的技术，为后继学习做好准备。

指南的第四部分主要介绍的是本硕贯通的课程，主要适合正常进度下的大三、大四、或是研究生低年级修读。这些课程没有必要全学，同学们可以根据自己的兴趣，结合培养计划的要求来修读。我们的理解是，本硕贯通课程**理应**快速承接本科生课程，并且为将来阅读文献、做问题提供**必需的公共基础知识**。我们建议同学们从这个阶段开始需要逐渐抛下对GPA的执念（此时成绩也差不多定型了），转变观念，进行“按需”学习，也就是要开始考虑以后进入什么领域、对什么方向感兴趣、具体感兴趣的点在哪里。除了必须掌握的内容和作业以外，其它部分则根据课程的需要、自己的兴趣与以后做研究的需求来学习，并不是说教材上写了什么就非得学什么。此外，在本章每一小节最后，加入了一些博士在读的作者们了解到的前沿知识简介，供大家了解，这部分也是以后学习指南更新的重点。

我们本来还想加一节，给高年级本科生们讲述一些当下研究的热点，看看真正的研究与我们在课堂或是书籍中学到的东西有何不同，入门这些东西要学习些什么。但我们目前都还只是刚步入研究的博士生和以及尚未步入研究的高年级本科生，大多仅对自己所在的小方向较为了解。因此还是不要班门弄斧比较好。

我们需要着重提醒低年级同学的地方主要有两方面。一方面，也许你会从这份指南上学到很多看上去“高大

[1]本指南**不包括“解析几何”、“代数学基础”两门课**。作者中的一部分成员建议科大的培养计划删除这两门课，将内容并进其它课程进行下一轮改革。

上”的名词。这并不是坏事，**但更重要的是在本科前中期打下坚实的基本功，不要沦为一个只会说名词却对基本技术都一无所知的“名词党”**。有了扎实的基本功、足够的积累，到高年级或是博士生阶段，你才能够去真正体会与理解那些前沿的内容。另一方面，同学们不要因为学习遇到困难而气馁。近代数学家们一两百年的心血凝聚为同学们一两年的学习，自然是非常难的。不理解证明方法、搞不出具体计算是学习中再正常不过的现象。你可以请教同学，也可以查阅书籍或者网络，切勿一味闷着头想，更不要因为自己感觉问题过于trivial而害怕发问！此外，同学们也需要通过不断的学习来寻找真正适合的道路，这是大学期间非常重要的一点。无论数学内外，各个方向或是领域都无高低贵贱之分，同学们不要陷入某些固化的思维，一定要时刻保持清醒，作出自己的判断。

此外，**做研究和上课、读书都是完全不一样的，不要“沉迷于”欣赏所谓的“美妙之处”**：你在课本或是各类“数学名著”中看到的都一个个光鲜亮丽的结论，并时不时能见到一些很巧妙的证明。但你可曾想过前人们从零开始到最终证明这些结论、形成一个体系，背后“堆积”了多少篇默默无闻的文章？这背后的 dirty work 往往是你难以想象的复杂。这一点也许你开始阅读一些比较新的文献之后，就会有所体会。举个不是很恰当的例子：“L^2函数的傅立叶级数 a.e.收敛到函数本身”这一看似平凡的问题却在上世纪60年代才被 Carleson解决，当时的文章长度是在50-100页这个规模，但你现在在调和分析教材上看到的证明不会超过20页，甚至不超过10页。

另一点需要注意，有些同学会以为我非得把所有基础课的所有内容都学完了、学扎实了，再开始接触研究。这是不现实的，因为**你永远也学不完所谓的基础知识**。即便是到了研究的阶段，我们也是边做问题边学技术，边接触新东西。（当然你要是只会那些本科生的基础课，那还是很难步入研究的。）**对基础数学的同学而言，到了高年级或是读研之后，上某某课已经不是你的首要任务，这个时候要开始考虑以后的学术道路了**。大家到高年级之后，去联系校内外的老师学一些自己兴趣方向上的深入内容，读一些文献与专著，就会有所体会。尽管本科阶段接触到的这些深入知识大概率不是你以后研究的方向，但是这也是在培养你阅读文献的能力，促进你对自己兴趣的进行深入的思考与挖掘。

一线研究的热点在随着时间不断变化，这也是我们放弃写这一块的原因之一。也许在将来的某一天，如今具有发展前景的方向，其主要问题也被人们解决了。同学们要记住，走向数学研究，除了要有扎实的基本功之外，最好能够选择一个有发展前景的方向入手并选择一个合适的导师，而**不宜走入已经发展到基本成熟而只剩边边角角+极难问题的方向**（当然你要是能解决XX大猜想就当我没说）。**更不要盲目跟风，看见一些大佬都去学某个方向就觉得自己也非得去跟着学，这种心态是不对的**。此外，研究课题的选取也非常重要，至少我们研究的问题要是当下关心的问题或是重要的问题，而不是你自己瞎编一堆毫无根据的条件自圆其说。可以看见，**走学术道路有很多因素都需要你去斟酌，也需要不少运气成分。要做到这些很难，但机会往往只给那些有准备的人。**

结合科情科况，我们提醒大家不要太早堵死自己未来的道路，一些数学之外的因素同样非常重要。

- 英语一定要好好学：无论你在国内还是国外，在英语国家还是非英语国家，英语都是你在数学世界里面用于交流的共同语言（当然和中国人交流肯定说中文了）：讲报告、听报告、写论文等等地方，你的表达能力、遣词造句能力，对你做出来的工作都是非常重要的。这个年代并不提倡闭门造车，做出来了好的结果更需要合理地宣传。

- GPA需要注意：任何一门课（包括普物、政治课、体育课、公选课等等）考个六七十分对你未来只有坏处没有好处。我们并不提倡只为GPA学习，但这是你走向下一步的硬性指标。

- 不要盲目跟风：任何时候都要有自己的判断，不要看见别人学什么，也觉得自己该学什么。摸索出适合自己的道路是本科期间更为重要的事情，否则只能是东施效颦了。

- 锻炼搜索信息能力：上面已经提到，一味的闭门造车大概率是没有前途的。遇到自己有疑惑的，可以去查阅书籍和网络；对某方面有感兴趣，更是可以去查阅那些经典的文献，或是咨询老师与前辈们，获取更多更广泛的信息，而不是只拘泥于眼前的东西。单凭一个本科生的阅历，想在各方面做出有远见的判断是很难的。因此信息搜索能力，无论是对同学们未来的发展去向，还是对同学们眼界、格局的塑造，都是非常非常重要。

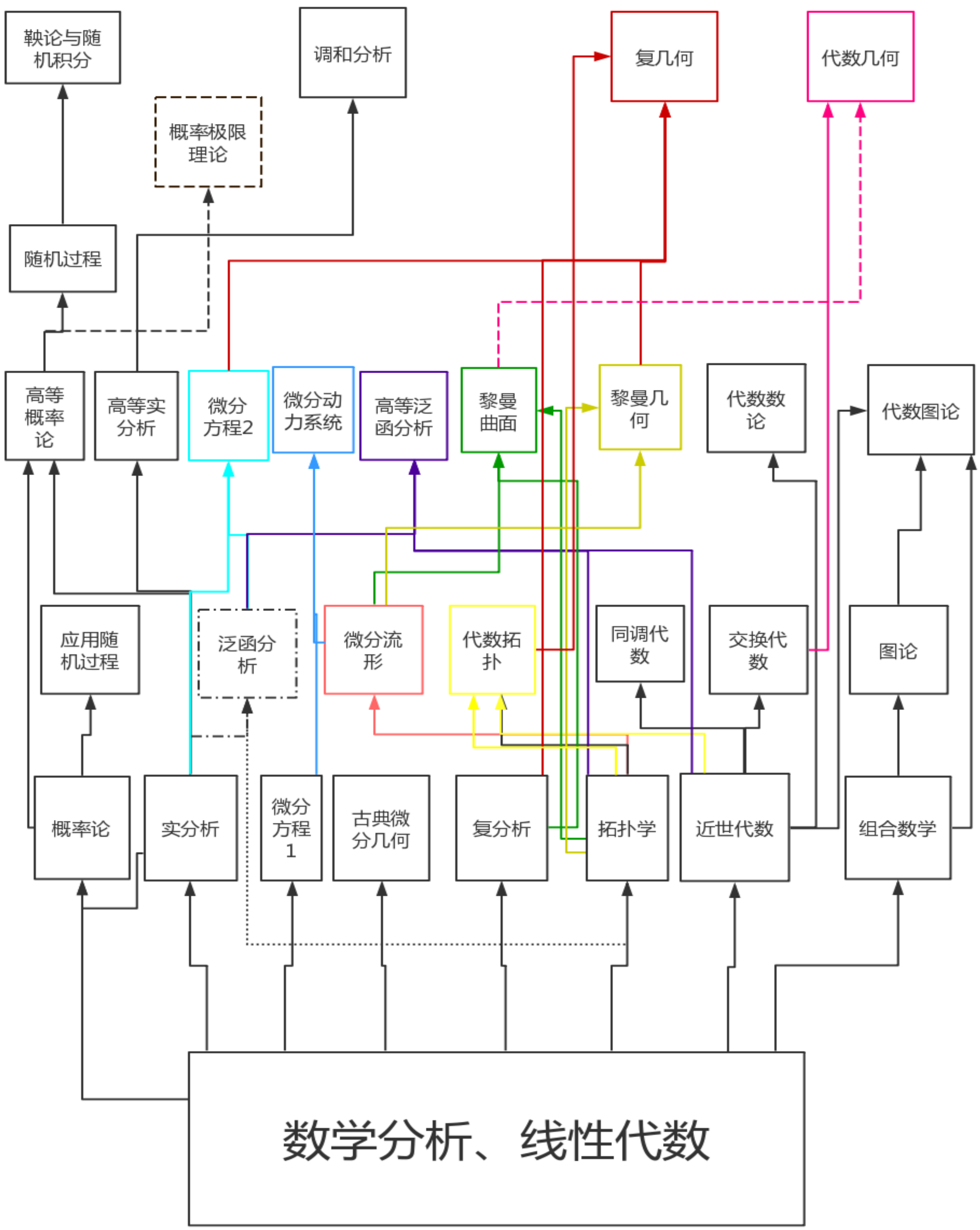
最后，我们欢迎各方的批评指正，本指南也会不定期地继续更新。引用麻老师的一句话，祝大家在科大期间“发现兴趣，生活愉快”。

山顶洞投资研究中心（迫真）

目录

1 基础课程学习顺序

以下课程的名称均是以科大开设的课程为准。
这只是一个粗略的流程图，课程修读的先后顺序仅供参考。



2 一切的根基：数学分析、线性代数

在此之前，我们假设学生没有认真接触过任何大学数学。

2.1 数学分析

建议教材：常庚哲、史济怀：数学分析教程（第三版），中国科学技术大学出版社。

主要参考书：

[1] 谢惠民、钱定边、易法槐、恽自求：数学分析习题课讲义；

[2] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, 2nd edition, AMS, 附录部分和第2章;

[3] Elias M. Stein: Fourier Analysis, an Introduction, Chapter 2-6.

次要与进阶参考书：

[4] B. A. Zorich: 数学分析（第二册）；

[5] 汪林：数学分析中的问题与反例；

[6] Walter Rudin: 数学分析原理；

[7] Spivak: 流形上的微积分，齐民友、路见可（译）。

学习建议：

数学分析是近现代数学的根基之一，也是大学期间最重要的基础课。其内容是严格地介绍如下三部分内容：单变量微积分（数分A1）、多变量微积分（数分A2）、无穷级数（数分A3）。此外，入门级的Fourier（傅立叶）分析也应放在数学分析的学习中。任广斌老师曾经说过一句话：分析是极限的艺术。实际上，整个数学分析课程都在围绕“什么是极限”这个话题，用严格的$\epsilon-\delta$语言展开：

- 单变量微积分（数学分析A1）

  这一部分的主要参考书是[1]，查阅各种反例可以参考[5]. 单变量微积分部分早已是标准内容，没什么好补充的。练习的时候，以史济怀的课本习题为主，[1]可以做一些例题，参考题太难了，没有必要去做。

  1. 极限 $\to$ 连续 $\to$ 可微（光滑性）

  从数列极限（离散）出发，我们可以得到函数的极限，从而定义函数的连续性；对函数的差商取极限，我们可以得到函数的可微性。当然，其严谨性由ϵ-δ语言保证。**新生需要学会的第一件事就是“用严格的数学语言去刻画证明中的任何结论”**，例如$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 你不能潦草地说“$n$很大时，$x_n$充分靠近$x$”，因为你并没有严格地解释什么叫“靠近”，因此你应该使用ϵ-N语言去严格刻画这件事情：任给（误差容忍度）$\epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，使得对任意$n > N$（在抛掉前有限项之后），都有$|x_n - x| < \epsilon$（$\{x_n\}$剩下的项在误差容忍度ϵ下差不多是常值序列）。由数列极限得到的一系列实数系完备性定理，也是需要认真学习的部分。**熟悉$\epsilon-\delta$语言比去做那些奇技淫巧的计算重要得多**。这在后面学习无穷级数（函数项级数的一致收敛性）、实分析与概率论（各种收敛性证明和测度论证明用到114514次）会得到充分的体现。

  2. 微分 $\xleftrightarrow{\text{逆运算}}$ 积分

  给定可微函数f, 若f'可积，则必有$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.因此我们可以说求导和积分是一对（相差一个常数的意义下）互逆的运算。这一部分有很多工具是以后都会用到的。例如：Taylor展开（相当于用多项式逼近一个可微函数）、L'Hospital（洛必达）法则、各类积分的计算，以及勒贝格可积性定理等等。计算上，1^∞型极限在取ln之后大概率可以用洛必达法则做出来，而积分的基本计算技巧也需要掌握。但切勿沉迷于计算花里胡哨的怪异积分，因为这可能会带偏你对数学的认知。此外，Lebesgue可积性定理的证明思路值得学习（连续部分的振幅小+震荡部分的测度小$\to$收敛）。

- 多变量微积分（数学分析A2）

  这一部分的主要参考书是[1], [2]和[7], 查阅反例仍然可以参考[5]. 多变量微分学部分的证明请务必把所有步骤写清楚，不要“意会地”证明。[1]主要用于学习例题里面的基本方法以及基本计算，[7]用于查阅严格化的证明。[4]可以作为拓展书籍，讲了一般的线性赋范空间的情况。

1. $\mathbb{R}^d$上的欧氏拓扑：集合的**基本拓扑性质，需要非常熟练地掌握，请在学习这部分的时候务必不要跳过任何步骤把证明写在纸上！**之后，我们可以定义$\mathbb{R}^d$中的序列收敛，以及多变量函数的连续性。如果你想在此时自学一些点集拓扑，可以去看 Armstrong的基础拓扑学，或者尤承业的《基础拓扑学讲义》前三章，切记完成所有习题并写出过程，这对初学者理清概念是非常重要的。

2. 多变量函数的微分：隐函数定理、反函数定理。多变量函数微分部分最重要的定理就是隐函数定理和反函数定理，它们分别给出了隐式方程局部解的存在性和C^1映射局部逆的存在性。这在后继的学习中极其重要！例如，微分流形中的常秩定理就是隐函数定理的直接翻版。而在微分方程中，隐函数定理更成为了Nash-Moser迭代的基础，而后者是证明偏微分方程解的局部存在性时一个非常强力的方法！总之，隐函数定理蕴含的东西远比课本上展现出的多，其证明的方法也是值得记住的。计算上，条件极值、拉格朗日乘子法都是必须要学会的，并不能忽略。

3. 多变量函数的积分：争议很大，但无论如何**不要拘泥于课本**。这应该是科大这套数分教材比较有争议的部分：没有严格证明积分变量替换公式、只讲了二维、三维的计算、没有引入Lebesgue（勒贝格）测度等等。我个人的观点是：

– 基本的曲线、曲面积分计算肯定要学会，但**不要沉迷于计算各类奇葩区域上的奇葩积分**。

– 课本第13章（场论初步）换成[2]的附录（但球坐标、极坐标等经典例子需要保留），直接默认那些分部积分公式（指Stokes公式、Gauss-Green公式）成立，来推导常用的恒等式。另外，可以把“推导[2]的第2章中某些定理”作为练习。这部分主要是为后面微分方程的学习打下基础。因为，更加常用的是$\mathbb{R}^d$中一般开区域上的积分估计。因此我们需要熟悉$\mathbb{R}^d$中分部积分的计算，以免到学偏微分方程的时候才后悔莫及。

– **不宜太早引入Lebesgue测度和积分理论**（尤其是大班教学）：和数学分析里面的黎曼积分相比，勒贝格测度与积分理论完全是一个新的体系。尽管建立起勒贝格测度与积分理论之后很多黎曼积分里面复杂的问题可以轻松化解，但在学生尚未掌握好数学分析的时候又塞给学生一套完全不一样的东西，并不是明智之举。

– **不宜学习Jordan测度**并用它来证明黎曼积分的变量替换公式：Stein的实分析第一章还专门有个习题告诉你Jordan测度有多垃圾。不要仅仅为了一个积分变量替换公式而接触一个无用的东西，不值得，也没什么用。

• 无穷级数（数学分析A3）

这部分把课本14-16章学好就行，尤其是第15章函数项级数的一致收敛以及幂级数；反常积分则基本是平行内容。参考书[1]中的部分例题可以拿来补充第15章，但很多乱七八糟的判别法可以不用记住（除非以后用到）。课本第18章可以当做阅读材料认识一下Γ函数和Beta函数。另外，笔者认为这部分定理的证明是有必要掌握的，做题更多是积累一些例子并熟悉证明一致收敛的方法。因为无穷级数（函数项级数）**最重要的就是弄清楚“收敛”和“一致收敛”的区别**。笔者就是在学习这部分的时候对“一致”这个概念真正产生了比较深的理解。二者区别就是“一致收敛”需要在“收敛”的基础上对“一致”的那个量再取sup。无穷级数部分虽然简单，但**切勿因为简单就轻视而仅靠考前突击，没有足够功底的话往往会死的很惨！每年的数分A3都有很多人莫名其妙地阴沟翻船。**

• 傅立叶分析入门（数学分析A3）

笔者认为**傅立叶分析的教学长久以来都是缺失的**。这部分的**主要学习资料是[3]的第2、3、5、6章**，涉及傅立叶级数与傅立叶变换的基本性质。傅立叶级数部分我们课本的第17章其实也不错，[1]的这部分其实写得一般，不建议去做。另外笔者认为这部分推导定理的证明非常重要，做题更多是积累一些例子或者一些衍生的结论。

[3]这本书的习题有很多重要的例子，建议大家有选择性地完成。另外，[3]引进了好核(good kernel), 逼近恒等(approximation to identity)的概念。“逼近恒等”是现代分析中被用到无数次的东西，其基本性质请务必认真学习。傅立叶级数部分的主干知识和史济怀先生的书上相差不多。后面傅立叶变换部分，[3]引进了一类非常

重要的函数: Schwartz函数类，这类函数能保证傅立叶变换这个运算的“封闭性”（$\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$是自同胚）。此外，这部分有两个观点务必记住！

- **Fourier变换保L^2范数不变**（类似于Parseval恒等式，实际上傅立叶级数就是$\mathbb{T}^d$上的傅立叶变换，而$\mathbb{T}^d$的频率空间上离散的，所以积分就换成了对整数点的求和），这个观点在后面泛函分析学Hilbert空间时会再次出现。
- **重新审视导数的定义**，之前我们一直视导数作为差商的极限，但傅立叶变换的一条重要性质是导数会变成多项式乘子:$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$，因此我们可以倒过来定义$f$的“$s$阶导数”为$((i\xi)^s\widehat{f}(\xi))^\vee$ ($\vee$是傅立叶逆变换)，这个观点在调和分析与PDE中是非常重要的。

注：数学分析是整个数学专业里面最重要的基础课之一，后面几乎所有的知识都要以此为基础。在学习时，**切勿一味追求高观点而眼高手低不去做题、不去思考，切勿陷进奇技淫巧的题海中，切勿拘泥于课本！**对少部分能力强，想在大一提前修读实分析、复分析的同学，笔者建议一定要在扎实学好数学分析A1的基础之上再具备以下基础知识：$\mathbb{R}^d$的点集拓扑（史济怀数分第八章）、无穷级数（史济怀数分第14、15章）。若是对（硬）分析（例如不等式估计或者一些比较细致的计算）感兴趣，或者以后想学分析、微分方程、概率论等，请优先学习实分析。若是以后想学的方向需要复分析，则优先学习复分析。但是，**提前修课不要一味图快！同年级的必修课不要落下！务必量力而行！！！**

2.2 线性代数

建议教材与参考书：

[1] 李尚志：线性代数（数学专业用），高等教育出版社；

[2] 柯斯特利金：代数学引论（第二卷）·线性代数；

[2] 李炯生、查建国、王新茂：线性代数，中国科学技术大学出版社；

[4] 张贤科：高等代数学、高等代数解题方法，清华大学出版社。

次要与进阶参考书：

[5] 高等代数葵花宝典.pdf;

[6] 陈恭亮、叶明训：线性空间引论，清华大学出版社；

[7] M. Artin: 代数；

[8] 王新茂线性代数讲义；

[9] 詹兴致：矩阵论，高等教育出版社。

学习建议：

1. 总体建议：这门课是数学系课程中最为基础的一门课之一。整体难度并不是很大，但是由于：

（1）线性代数与大学之前的数学课和数学分析有一定区别，从这里开始，我们将慢慢进入抽象的数学；

（2）Jordan标准型理论和有一定的难度，可能需要花一番功夫。

因此不论同学们接下来要学什么方向，希望在学习这门课程时不要太松懈。

接下来是这门课的一些学习心得和建议。首先，建议补一点集合论的知识，比如要熟悉单射，满射，双射，一一对应，可逆映射，映射的原像集这些说法，这将对今后的学习大有裨益。推荐的话，尤承业的《基础拓扑学讲义》引言部分后半段3页的内容足矣，这部分希望能够牢牢掌握，都是最基础的集合知识与运算。（或者部分年的代数学基础课程会讲，但不保证）

2. 学习动机：

（1）解线性方程组：线性方程组是数学中最简单的一类方程组，并且我们有完整的算法可以求出它的解，即线性代数课程最开始要学的“高斯消元法”。但是线性方程组的问题还没有彻底解决：如何不解方程组直接依靠系数判断方程解的存在性？对于某些特殊的线性方程组，有没有公式表达它的解？最简阶梯形中的非零行个数是否唯一？……还有许多类似这样的问题，为此会引入线性空间，矩阵，行列式的概念与方法。使用这些工具，在解决关于线性方程组的一些理论问题时，会轻松不少。而反过来，发展线性空间，矩阵的理论时又离不开解线性方程组。可以说，线性方程组的理论与空间，矩阵的理论相辅相成，共同构造出了线性代数的主干。

（2）解析几何的高维推广：在大一的解析几何课上学过学过三维欧式空间的解析几何，用的方法是点变换/坐标变换等，那么自然会提出一些问题：有没有高维的空间？在高维的空间研究几何能不能用类似的方法？实际上，高维的空间在数学上可以形式地构造出来，并且研究其中的“几何”也确实能够用解析几何中坐标变换的想法（并且是核心想法），而且能够用统一的语言去描述这种“操作”，这就为研究高维的几何带来了极大的便利。

（3）数学对象的抽象化：在高中和大一上的时候已经学过了不少数学对象（集合与元素）以及一些运算操作（映射）。在学习的过程中，可能会发现它们冥冥之中的一些共性，举几个例子：

- 设有极限的全体实数列构成集合S，定义运算lim，其实它是S到$\mathbb{R}$的一个映射，这样的运算有性质
$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n,\lim(c\cdot a_n)=c\cdot\lim a_n,c\in\mathbb{R};$$
- 设$R[a,b]$是区间$[a,b]$上的全体黎曼可积函数，则$\int_a^b\cdot dx$也是一个$R[a,b]\to\mathbb{R}$的映射，并满足
$$\int_a^b f+gdx=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx,\int_a^b cfdx=c\int_a^b fdx,c\in\mathbb{R};$$
- 设$\mathbb{R}_n[x]$为全体次数不超过n的实系数多项式构成的集合。对于多项式$f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$，我们可以定义$\frac{d}{dx}:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$的映射:$f\mapsto\frac{df}{dx}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}ka_kx^{k-1}$. 这样的映射同样满足:
$$d(f+g)/dx=df/dx+dg/dx,d(cf)/dx=cdf/dx,c\in\mathbb{R}.$$

从以上的例子中可以看出上述映射都有一些共性，叫作“线性”。映射的定义域集合上有两种运算：“加法”与“数乘”。经过不少数学家的努力，会发现数学中不少重要的集合，虽然它们具体的元素不同，但是在这里集合上却都能定义“加法”和“数乘”的运算，并且都满足一些运算规律。这些映射也满足一些规律。如果抽象出来这种性质单独研究，得到的结论将会更具有普适性。这也是现代数学的基本研究方法：抽象。

3. 学习内容：

- 工具性内容：线性方程组理论、矩阵与行列式理论；
- 核心内容：线性空间理论、线性变换理论、双线性型理论；
- 工具与核心内容的联系：学习线性代数**切勿孤立地去学某一项理论**，下面列出几点重要联系：

  (1)用矩阵表示线性方程组，系数矩阵与增广矩阵的定义；

  (2)初等方阵与矩阵的乘法、初等变换的关系；

  (3)给定一组基下，可逆方阵与线性空间所有基的关系；

  (4)给定两组基，矩阵与线性空间之间的线性映射的关系；

  (5)矩阵的相抵与线性映射在不同基下的方阵；

  (6)给定一组基，方阵与线性空间的线性变换的关系；

  (7)方阵的相似与线性变换在不同基下的方阵；

  (8)给定一组基，方阵与线性空间的双线性型的关系；

  (9)方阵的相合与双线性型在不同基下的方阵。

4. 学习方法

(1)线性方程组要熟练，少出错，它是线性代数大部分计算的核心；

(2)注重定义和概念的理解，尤其是不同理论中均会涉及的概念，比如矩阵的秩，培养多角度看问题的习惯；

(3)可以尝试自己梳理线代的脉络与思路，包括证明，除去个别繁琐的证明（分块乘法合理性，Binet-Cauchy公式，Jordan标准型理论中关于幂零方阵的Jordan标准型等），大部分证明都能够自己证出，理解后并不是很难。如若一时不太清楚定义，命题的表述和证明，可以先记住，然后多与老师同学探讨，并在之后的学习中联系其他的理论思考。

5. 延伸与拓展阅读：

在学习完教材的基础内容后，可以参考如下内容。当然部分内容可以与线性代数同步学习。

(1)参考书[5]是应试的非常好的材料，记录了一些线性代数的中难题，据传曾是某年北大线性代数习题课助教写的总结。

(2)多重线性代数：这是线性代数中的重要一环，即张量。张量在线性代数中可以用多重线性代数的观点来较为简单的定义，而在模论中则主要会用到泛性质。科大的线代大纲里是不包含张量的，但是到了学微分几何、微分流形、黎曼几何等课程的时候却会大量运用，老师也只会草草讲过。这里推荐[2]的第六章，张量部分。虽然这本书翻译不好，但是第六章的内容还是值得肯定（不过也有内容太多的弊端）。中文的参考书应该可以参考[6]。听说是中法班的参考书，也算是中文书里少有的会特别写对偶空间以及多重线性性的书了。

(3)教材[7]可以用于了解群、环、域的定义：群、环都是现代数学中最为基本的代数定义，它们跟线性空间一样，是对已有事物的抽象化；域则是一种特殊的环。学习群、环不仅是为近世代数做准备，还能深化已经学过的线性代数的理解。如果学过了群环域的基本定义，可以思考如下几个问题：

- 线性代数中的数域跟一般域的区别与联系，线性代数的所有结论能否推广到一般域上。（注意这里有两个概念，一个是域的特征，一个是代数闭域）
- 线性空间的定义中，数域可以换为域，如果换为环呢？特别地，如果换成整数环，我们得到什么？换作域上的一元多项式环，我们又会得到什么？后者与我们学的线性变换有何联系？
- 线性代数中存在大量群的例子，是哪些？

(3)另外如果又有对矩阵技巧感兴趣的同学，可以参考[8]或者[9](进阶书籍)。

(4)后续课程有李代数、群的线性表示理论、同调代数、微分流形、泛函分析等，计算方向则有数值代数。

3 基础知识（对应本科课程）

本节我们假设学生已经学过数学分析、线性代数，故在预修课程中不予列出。

3.1 拓扑学、微分流形

拓扑学

教材与参考书：

[1] 尤承业：基础拓扑学讲义，北京大学出版社；

[2] Munkres: Topology（熊金城教授翻译的中文版《拓扑学》行文很流畅，值得一看）；

[3] 王作勤教授的拓扑学讲义: `http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/19S-Topology/index.html`;

[4] Armstrong: Basic Topology;

[5] Allen Hatcher: Algebraic Topology.

学习建议：

首先我们在这里所提及的是科大本科的拓扑学，这门课主要分为点集拓扑和基本的代数拓扑两部分。这里着重介绍点集拓扑相关内容，代数拓扑后续有着更为详尽的介绍。

笔者认为点集拓扑是现代数学最基础的语言之一，后续的学习中将反复使用点集拓扑的概念，因此一定程度的练习是必要的，主要是为了理解并且学会如何使用这些概念去表述一些数学概念，在这里我特别强调典型的例子在学习点集拓扑中的必要性，点集拓扑中出现的很多概念很多是抽象自我们早已熟悉的空间，特别是欧氏空间或者更为一般的度量空间，例如开闭集、可数性、分离性、紧性等概念都是从欧氏空间的性质出发，去讨论他们在更一般的拓扑空间上的定义。当然掌握一些典型的反例也是必要的，这可以帮助我们理解为什么需要去研究某些看起来性质较差的对象。**但是特别注意请勿沉迷于一些反例的构造，我们应该关注那些比较“自然”的反例。**

以下我从几个角度来介绍一下点集拓扑我们都会学些什么：

1. 典范的例子：度量空间，拓扑流形，拓扑群等等（事实上拓扑流形是可度量化的），他们是定义某些拓扑性质的出发点，也是研究中的重要模板。例如仿紧性这个概念虽然很广泛，但主要还是用在流形上的，他可以导出重要的单位分解定理。

2. 拓扑的构造：在很多问题中我们需要为一个空间引入恰当的拓扑，如何构造新的拓扑空间也是我们需要掌握的重点，例如子空间，用拓扑基生成拓扑（包括乘积拓扑），满足一族映射连续的最强或者最弱的拓扑（此类中包括商映射，以及泛函分析中的弱拓扑等概念），特别地用粘合关系来构造紧曲面是这门课讨论的重要内容之一。

3. 拓扑性质：拓扑性质也就是在同胚下保持不变的性质主要是分离性，可数性，紧性，连通性等，我们可以通过一些例子和定理来理解这些性质，比如说本课中高度非平凡的三个定理: Urysohn引理，Tietze延拓定理和Urysohn度量化定理，其实都主要是对T_4(某种较强的分离性)空间的刻画。**(额外提一句这三个定理的证明对初学者难以掌握，我的建议是先去理解其含义和掌握其应用)**

此外我们应该格外关注紧致性，在度量空间中，我们有紧与列紧等价的性质，最重要的是紧集上的连续函数是可以取到极值的，这使得紧性在分析中非常重要。另一个重要而且非常有用的性质是连通性，特别是要掌握连通性论证(连通空间中一个非空的即开又闭的子空间必然是全空间，这个在几何和分析中都十分常见，比如说在复分析中的最大模原理等等)。

点集拓扑中概念和各种小的性质都非常多，初学并不能完全掌握也是正常的，对此我的建议是在有了初步的掌握以后放开手脚去继续学习更为深入的内容，他们会反过来加深我们对于拓扑概念的理解，而不必一开始就面面俱到。

最后我们谈论一下学过点集拓扑之后可以进一步学些什么：

1. 泛函分析：拓扑学为分析提供了更广阔的背景和更恰当的语言。比如说利用映射族定义的拓扑，可以定义Frechet空间(比Banach空间更广泛的一类拓扑向量空间)，以及其对偶空间上的弱拓扑。包括很多数学分析中的重要定理都可以推广到更一般的情况，例如Weierstrass逼近定理和Arzéla-Ascoli引理等，这都需要借助拓扑的语言。

2. 代数拓扑：这是科大拓扑学这门课的后半部分，而且代数拓扑给出了很多可计算的拓扑不变量，通过学习代拓可以看到我们之前铺垫的那么多语言是如何用来真正解决一些具体的几何问题，例如：闭曲面分类定理等。

3. 微分流形：拓扑流形加上光滑结构就是微分流形，在流形中仿紧性是最为常用的拓扑性质之一，他可以导出从局部到整体的关键定理：单位分解定理。一个有趣的事情是我们可以找到可微的映射与连续映射同伦，这使得我们其实可以用微分的工具去解决拓扑问题。

4. 代数几何：对于代数簇或者环谱赋予Zariski拓扑，这个性质十分糟糕的拓扑某种程度上可以让我们意识到有些性质很奇怪甚至难以想象的拓扑竟然也可能如此重要。我并不太懂代数几何就不多说了（x

5. 拓扑动力系统：这个我就仅仅有所耳闻，王老师讲义中有一个用拓扑动力系统解决算术问题的例子很有趣(在Lec08)，这个方向可以请教科大做相关方向的老师。

微分流形

主要教材与参考书：

[1] 王作勤教授2018年的微分流形讲义，见http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/18F-Manifolds/index.html;

[2] Loring W. Tu: An Introduction to Manifolds (流形导论);

[3] John Lee: Introduction to Smooth Manifold (光滑流形导论), GTM 218, Springer;

[4] Frank W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Group （微分流形与李群基础）;

[5] 陈省身：微分几何讲义，北京大学出版社；

[6] 陈维桓：微分流形初步，高等教育出版社。

进阶参考书将在下面逐一介绍。

学习建议：

这门课与主讲老师关系很大，因此内容也会有所不同，我这里主要介绍的是王作勤教授18年秋开设的微分流形的内容，当然我也认为这些内容都是以后我们学习现代几何的基础。

关于这门课的内容有如下几部分：流形的基本概念、微分拓扑初步、向量场与分布、李群初步(包括纤维丛的初步介绍，18年已删去)、微分形式与流形上的积分、de Rham上同调、辛几何初步（18年已删去）、向量丛上的联络、曲率和Chern Weil 理论简介。这些内容实际上作为一学期的内容来看可以说是非常多的，我们将1, 3, 5作为流形的基本内容介绍，而2, 4, 6, 7分别以四个专题继续详细展开。

- 流形的基本内容：

  关于流形的拓扑结构最重要的是其由仿紧性得到单位分解定理（在光滑情形下将连续函数改为光滑函数），用这个定理我们可以将局部构造过渡到整体，例如构造整体的黎曼度量，联络，定义流形上的积分的时候。

  - 微分结构与切空间：微分结构表示转移映射是光滑的，但一个流形上可能有多种微分结构（在微分拓扑部分结尾有所介绍）。对于切空间和切映射的概念，我们建议大家有尽可能多的理解方式，特别是最好掌握用曲线去计算映射的微分： $df_p(v_p) = d(f \circ r)/dt|_{t=0}$，用这个方法计算涉及矩阵或是一般李群上的时候显得格外方便。
  - 映射的局部性质：这部分最重要的结果就是典范浸入(切映射是单射)/淹没(切映射单射)定理，这两个定理说明在一点处满秩的映射局部可以看作欧氏空间的自然嵌入/投影。不过这里要分清浸入和嵌入的区别(在目标流形上的拓扑的差异)，对于淹没映射(submersion)还有一个重要结果就是正则值的原像是子流形以及要能刻画这个子流形的切空间，这一结果在微分拓扑部分还会继续深入讨论。
  - 向量场与积分曲线：这里特别强调一下流方法，向量场可以生成一个单参数变换群ϕ_t（流）是流形之间的微分同胚，这给制造微分同胚提供了方法，例如我们可以证明移动引理：光滑流形上任意两点p, q存在微分同胚f使得$f(p) = q$。
  - 分布与可积性：本节主要目的是研究存在一个浸入子流形使得其切空间是某个分布的条件，证明的关键思路是通过分布的对合条件构造出可交换的标架，再用流方法得到积分流形（并且是显式计算出的）。这部分我建议大家参考[3]的第9章和第19章，结论很丰富而且证明清晰。关于可积性的理论大家可以在Ana的辛几何和Arnold的经典力学的数学方法中进一步学习，这个领域笔者并不擅长故点到为止。

Ana Canas da Silver: Lectures on Symplectic Geometry. 辛几何方面非常好的入门教材，但是需要指出的是这里的内容距离现在的辛几何相差已经很远了，想进一步了解辛几何推荐了解一下

Mcduff, Salamon: Introduction to Symplectic Topology.

V. I. Arnold: Mathematical Method of Classical Mechanics (经典力学中的数学方法).

– 微分形式与流形上的积分：微分形式由于外微分运算更加灵活，从这一部分开始要涉及到很多流形上的张量的计算，这里特别提及一个技巧，验证有关微分形式的恒等式的时候可以按照如下三步:对函数成立⇒对外微分成立⇒对 wedge product成立。在各种恒等式中 Cartan magic公式有很多用处（尤其是在辛几何中）。

– de Rham上同调理论：这部分有很多代数的内容，例如同调代数中的五引理，Zig-Zag lemma等，但是最关键的还是要理解其几何内涵，例如Mayer-Vietoris序列中的边缘同态，Kunneth公式中的同构以及庞加莱对偶，他们具体的构造都要很清楚而不仅仅是当作一个抽象的代数上的同态。这里补充一点：一个k阶（紧）子流形对应一个$n-k$阶（上同调）紧支上同调类，这件事在后面的示性类和相交理论中都很重要。本节仅仅是一个开端，后续大量精彩的内容可以进一步学习GTM 82。

Bott, Tu: Differential Forms in Algebraic Geometry, GTM 82, Springer.

• 微分拓扑

首先列出两本非常经典的参考书：

Guillemin, Pollback: Differential Topology;

Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint (从微分观点看拓扑，有中文译本).

微分拓扑也是一个非常庞大的话题。受限于笔者所学，只能粗略的介绍一点和微分流形课相关的内容，并且简单提及一些后续的内容。

关于可微映射一个非常重要的结果就是Sard定理，大致可以描述为一个可微映射的像集中“不太好”的点很少（零测集），这给可微映射造成了很强的限制，例如从低维流形到高维流形的可微映射必然是非满射的，这和连续映射有着很大差别，Sard定理本身证明远没有其应用重要，他是微分拓扑中最基础的定理，也是用来证明存在性最重要的手段之一。例如Whitney嵌入定理（n维流形可嵌入$(2n+1)$维流形，浸入$2n$维流形），流形上Morse函数的存在性等等微分拓扑中非常重要的结果。

另一个重要的结果就是管状邻域定理，这是说一个子流形的法丛与这个子流形的某个邻域是微分同胚的，这件事可以用来做Whitney逼近，而其直接推论就是在光滑流形中连续同伦与光滑同伦等价，这件事可以说明我们在研究某些同伦问题的时候可以用光滑映射代替连续映射，这意味着我们可以使用Sard定理等微分的工具，例如n维球面的不超过n阶的同伦群可以用这个方法算出来，以及Milnor所给出的Brouwer不动点和no-hair定理的微分拓扑证明。管状邻域的重要性不止于此，它与示性类有着紧密地关系：紧子流形在其管状邻域的Thom类是这个子流形的Poincare对偶。管状邻域的重要性在GTM82这本书还会有更多体现。

微分拓扑中还有一个值得关注的对象：横截条件（Transversal）和相交理论，作为正则值原像是子流形的推广，微分拓扑中引入了横截条件来刻画$f^{-1}(S)$是X的子流形的条件，特别地S是Y的子流形，如果考虑嵌入$f: X\to Y$，那么横截条件就是描述X和S在Y中是否“规则地相交”(例如相交线)。从这个角度出发可以引出相交数这个同伦不变量，进而用微分拓扑的观点给出了映射度、Euler示性数、Lefschetz数的定义。在 Guillemin-Pollback的书中有着非常详细的论述，并且证明了 Poincare-Hopf定理（向量场的指标和是示性数）、Lefschetz不动点定理（Lefschetz数不等于0等价于映射有不动点）、Hopf映射度定理（球面间映射f,g如果$deg\ f = deg\ g$则 f,g同伦），最后一章证明了Gauss-Bonnet公式。这些漂亮的结果其实在GTM 82中也都有（除了Hopf映射度定理），但是这里提供了一个微分拓扑的观点。

流方法在微分拓扑中的用处：微分拓扑中有很多构造性的方法（例如上文提到的Hopf映射度定理），用流生成微分同胚是最简单的一个，除了可以造微分同胚，还可以给出流形的同伦型（Morse理论：紧流形的同伦型的CW结构由Morse函数的指数给出）。

微分拓扑的后续：

手术理论: C. T. C Wall: Surgery on Compact Manifold. 手术理论可以证明强Whitney嵌入，在h-配边中也有重要应用。

研究微分同胚和同胚的差异：Exotic微分结构，这里有很多非常令人震惊的结果，Milnor证明了七维球面上存在28种微分结构，Donaldson利用Yang-Mills方程证明了$\mathbb{R}^4$中存在不可数种微分结构（其余的$\mathbb{R}^n$都是唯一的）等等，Milnor的原始论文仅有六页还是值得一读的。

其余我有所了解的方向大多与代数拓扑重合，大家可以移步代数拓扑部分。

- 李群与纤维丛：

  王作勤教授13年的李群讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Lie.html;

  Shoshichi Kobayashi(小林昭七), Katsumi Nomizu(野水克己): Foundations of Differential Geometry (微分几何基础).

- 辛几何：

- Chern Weil理论：

3.2 近世代数

建议教材：官方教材是欧阳毅的《代数学II:近世代数》

[1] Joseph Rotman: Advanced Modern Algebra（高等近世代数），主要为群论、环论的第一部分；

[2] Patrick Morandi: Fields and Galois Theory, GTM 167. 域扩张和有限Galois理论部分。

主要参考书：

[3] 冯克勤、李尚志、章璞：季近世代数引论、近世代数三百题，中国科学技术大学出版社；

[4] Thomas Hungerford: Algebra, GTM 73.

次要与进阶参考书：

[5] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra.

学习建议： 这门课主要是学习一些简单的群环域的理论以及Galois理论，但由于科大的教学速度以及代数学基础教学的缺失，普通班基本上只讲到域扩张为止。

注：代数学基础这门课不同老师的教学风格差异很大，笔者认为在学习近世代数前至少要掌握如下两点：

（1）简单的初等数论知识，如整除、同余、素数等概念；

（2）多项式环的简单性质：了解多项式和多项式函数的区别，不可约性（至少要了解$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$上多项式的一些性质）。

近世代数是本科阶段接触的第一门较为抽象的课程，初学会非常不适应，尤其是它与之前的线性代数的风格有较大区别。相比数学课，近世代数在初学时可能更像一门“语文课”，经常会出现大概知道怎么证但是写不清楚的情况。因此除了理解清楚课本的概念与定理外，还应该学习如何把自己的想法表达清楚，这对于后续任何课程学习的帮助都是很大的。学习近世代数大家常遇到的另一问题是：尽管搞清楚了书上的定理，却仍然不会做题。课本习题难度确实很大（注:尽管笔者并不认为做一些怪题除了应付考试外有很大意义），但其中仍然有一些套路，可以对照类似[3]这种有答案的书来学习套路。

代数课程的学习，要将抽象与具体结合，需要动机和实例。这门课的学习动机主要是围绕着五次以上方程不存在根式解的证明。在平时学习中，要多将抽象的概念与定理和熟悉的具体例子结合起来，如：置换群、循环群、线性群、变换群、整数环、多项式环、数域、有限域等，这些例子一定要熟悉。

- 群论：群论部分首先先用了大量篇幅让大家熟悉一些基本概念、同态的三个基本定理，其中需要花一些工夫理解陪集、正规子群、商群（为什么需要定义正规子群？为什么不能像线性空间一样对于一般的子对象做商？）。群论部分最重要的研究方法是群作用，因为单独研究一个群本身是困难的，我们常通过研究一个群在别的对象上的作用来反过来了解群的性质（实际上，很多群我们是先知道它的表现，再知道它的自身结构）。我们可以让群作用在集合上，作用在群、陪集、共轭类上，作用在线性空间上(群的表示)。我们常用的群作用有左乘、右乘的正则作用，共轭作用等。接下来我们利用群作用来得到Sylow定理、有限生成Abel群结构定理这两

个研究、分类群作用的重要定理，我们可以用这两个定理来实现分类有限生成Abel群、分类低阶群、判断给定阶数的群是否为单群等。群论部分的难题很多，大家可以看看三百题上是怎么处理这些的（注：笔者认为，对于做题，不考虑考试的话，rotman的习题难度就足够了）。另外，有关自由群和群的表现，感兴趣的同学可以去了解一下Nielson-Schreier定理和组合群论。

- 环论：环是一个具有两种运算结构的对象，学习了群论之后，要熟悉类似的基本概念并不难。关于环的基本性质我们要会判别一些简单的环是否为整环、ED、PID、UFD，理想是否为素理想、是否为极大理想。本章的重点是关于多项式环的性质。多项式环在代数中非常重要，从线性代数到Galois理论、代数几何，多项式几乎存在于代数的每个角落。在近世代数课程中，我们主要需要掌握高斯引理、爱森斯坦判别法等来判断多项式是否可约。

- 域扩张与Galois理论：这一章主要是讲述了Galois基本定理以及根式可解等价于 Galois群可解这一定理。首先我们需要知道什么样的域扩张是正规的、是可分的、是Galois的，最好要熟记几个不是上述扩张的例子，也要对诸如两个 Galois扩张的复合是否为 Galois扩张之类的问题的答案烂熟于心。关于 Galois群的计算，其实这相当复杂，掌握低阶的扩张的计算以及一些高阶的特例即可。有限域的性质也非常重要，像有限域上的不可约多项式啊、有限域上的线性代数啊，可以平时多加思考。

总而言之，对于非基础数学方向尤其是统计方向的同学来说，这门课可能并没有什么用而且非常难学，建议早点转到管院统计来回避这门课，选这门课的同学，除了认真理解概念完成习题外，可以自己去看看国外的经典教材，例如上方列出的参考书（主要蓝皮书实在是太烂了！），尽管可能对提高成绩没有帮助，但可以陶冶情操，让你认识到这门课并不是那么枯燥无聊。**对于基础数学方向代数、几何方向的同学，这门课所教授的代数内容是远远不够用的**，比方说代数几何里用到的环论知识远远超出了这门课的范围，代数数论里也会用到无穷的Galois扩张，因此需要学习大量的后续代数课程，而近世代数则是让你熟悉这样的抽象语言的第一门课，建议越早学越好！

3.3 常微分方程、古典偏微分方程

常微分方程

建议教材：
[1] 丁同仁、李承治：常微分方程教程，第1-6、8-9章；
主要参考书：
[2] W. Walter: Ordinary Differential Equations, GTM 182;
[3] 朱思铭：常微分方程学习辅导与习题解答；
次要与进阶参考书：
[4] 张芷芬：微分方程定性理论；
[5] 张锦炎：常微分方程几何理论与分支问题。
学习建议：微分方程1这门课中常微分方程的课时只有三个月不到，以计算、求解为主。教材建议用[1]，但[1]有部分地方不够严谨，可以参考[2]。计算实例可以参考[3]，但不要沉迷于奇葩方程的计算中，认真完成课后习题即可。但同学们**切忌掉以轻心**，基本的计算必须加以练习才能熟练掌握，不要等到考前突击。常微分方程部分的主要内容如下：

- 常见常微分方程求解

- 奇解与包络: 主要是寻找那些求解过程中丢失的解

- 常微分方程解的存在唯一性定理(Peano存在性定理)：皮卡(Picard)迭代法

  这部分是这门课最重要的一个部分，里面用压缩映射原理证明存在性的方法会在未来微分方程的学习中反复出现。有一些具体的计算可以参考[3]。

- 高阶微分方程、线性微分方程组的求解

  没什么好说的，套公式就是了。

- 平面动力系统简介

  笔者认为这部分才是常微分方程最精彩的内容，但限于大二学生知识水平有限，无法展开讲述微分动力系统的知识。平面动力系统的相图、Lyapunov稳定性的判断等还是需要掌握。感兴趣的同学可以阅读[4]或[5]，或在科大开设“微分方程与动力系统”这门课的时候去修读。

- 边值问题求解：Sturm-Liouville问题

  也是非常重要的一类问题，学就是了。

笔者不是做微分动力系统的，所以不是太了解ODE的深入知识，所以就此打住。

古典偏微分方程

建议教材：

[1] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations (2nd edition), AMS;

主要参考书：

[2] Gerald B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations（偏微分方程引论）;

[3] W. Strauss: Partial Differential Equations, an Introduction;

[4] 沈大卫微分方程1讲义。

学习建议：这门课每年教材不一样，但笔者认为**[1]的第2、4、3章绝对是最适合的教材且没有之一！**在分块介绍之前，笔者需要再三提醒：**初学时，一定要亲自动笔验算出每一个细节！分部积分不会请对照附录、写成分量计算！**

本科阶段的古典PDE内容大致如下（打星号的是时间不允许的内容，但实际上还是值得一学的）：

- 传输方程：最简单但性质最差的PDE

  没太多好说的，求解很简单。性质差到没有任何特殊结论。

- 拉普拉斯方程：调和函数的平均值原理和极大值原理、格林函数

  这部分主要介绍的是求解$\Delta u = f,\ \Delta := \partial_1^2 u + \cdots + \partial_d^2 u$的边值问题。如果$f = 0$，则我们称这样的$u$为调和函数。调和函数满足平均值性质、极大值原理、梯度估计等诸多有用的性质，其内容和证明建议全部掌握。另外就是边值问题的求解，首先Evans上证明了一般的边值问题解是存在唯一的，其次在一些特殊区域上，格林函数法计算解的表达式（也就是物理上的“电像法”）需要掌握。

- 热方程：傅立叶变换法、热球（平均值）性质、极大值原理

  这部分[1]没有讲傅立叶变换求热方程基本解（貌似第四章有），但这个方法非常重要，需要掌握。其它没有太多可说的，要注意热核本身具有很强的衰减性，这一点要记住。

- 波动方程：求解公式、有限传播速度

  本科阶段的波方程没有太多东西可讲，1、2、3维的求解公式推导过程需要记住。波方程的基本解是个分布（广义函数），因此这门课你是看不到基本解的。另外，波方程的能量守恒（有限传播速度）非常重要，需要记住。

- 方程的求解方法：分离变量、尺度(scaling)变换、*粘性法（奇异摄动）、*固相法

  前面的章节可以看成是对几个基本方程的基本性质的积累，但这一章节则是拔高你在PDE上的思想层次。[1]的第4章，以及后面的第8、9、11章都侧重于PDE的思想方面。分离变量不需多说。Scaling的方法则是可以让你直接看出很多不等式或是坐标变换是否正确：因为我们大部分情况下都需要方程具有scaling不变性！这在后继的学习，甚至PDE的研究中都是非常重要的思想。

  粘性法是讲一阶方程强行加入一个抛物项（相当于耗散/扩散项），再令这项趋于0. 传输方程的性质太差了，相比之下抛物方程（尤其是）热方程在正则性方面显然有更多更好的结论。直接做不出来的能量估计可以用粘性法绕开。这在微分方程2会学到（[1]的7.3节）。粘性法也是现代PDE研究中非常重要的一个方法。

固相法是为了处理一些写成震荡积分形式的解的长时间行为。Evans上基本已经把震荡积分的初步形式给介绍了（包括Morse引理），更多的知识会在调和分析里面学到。

- *一阶方程：Hamilton-Jacobi方程

  此部分对应[1]的第三章（后继是第10章），需要一段时间专门学习。

3.4 （古典）微分几何

建议教材：刘世平教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teaching.html;

主要参考书：

[1] 陈卿、彭家贵：微分几何；

[2] 沈一兵：整体微分几何，高等教育出版社。

[1]是科大出版的教材。[2]上华罗庚班微分几何的主要参考书之一，整体微分几何内容详尽，也是丘赛这部分题目的主要来源。

进阶参考书：

[3] Shoshichi Kobayashi(小林昭七), Katsumi Nomizu(野水克己): Foundations of Differential Geometry (微分几何基础);

[4] Shing-shen Chern (陈省身): A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 45, No. 4 (1944), pp. 747-752;

[5] Tobias Colding, W. Minicozzi II: A Course in Minimal Surface;

学习建议：这门课实际上应该称之为古典微分几何，其语言已经不适用于现代的微分几何学，但是这门课对于大部分方向来说仍然有其重要意义，**特别是不能被微分流形和黎曼几何覆盖**。

这门课的内容大致分为：曲线和曲面的局部理论、活动标架法、曲面的内蕴几何和整体微分几何。如果是华罗庚班，那么整体微分几何部分内容会讲的更多。（这里，我们主要按照刘老师讲义的内容进行讨论）

在曲线和曲面的局部理论这部分计算会非常复杂（首先要理解局部这个概念）。熟练计算是一方面，但是也要恰当的使用一些结论和技巧。比如说球面上曲线的曲率和挠率以及其曲线的Frenet标架（在整体微分几何里也经常用，请参考[2]的27页），旋转曲面、函数图像、管状曲面的Gauss曲率和平均曲率等等（熟悉这些结论不但可以方便计算，也可以用来“猜曲面”）。特别是这部分会提供大量的例子，这些对于以后的学习都是有用的，比如说螺线（唯一的曲率和挠率恒为常数的曲线）、二次曲面、直纹面（单叶双曲面和双曲抛物面都有两种直纹面的看法），典型的极小曲面（比如说旋转面极小曲面：悬链面，直纹面极小曲面：正螺面）等等。

学习这些例子不仅要熟悉他们如何表示、Gauss曲率和平均曲率，最好还要大概知道他们的几何图像是什么样的，并且了解到底曲率是如何影响这个曲面的几何特征的。我个人认为这是学习这门课最关键的地方。我们最多只能想象二维的曲面，因此只有充足的例子我们才能形成更好的几何直观。这里我再次推荐刘老师的讲义，这里面有大量的插图和具体计算可以帮助我们掌握这部分内容。值得一提的一件事，曲面我们通常有三种表达：参数表示$r(u,v)$(r_u, r_v不共线)，作为函数的零点$f^{-1}(0)$(这里还需要∇f在局部上处处非0)和作为函数图像$(x, y, f(x, y))$，在**局部上**这三者等价（隐函数定理）。这件事对于解决某些局部问题很有帮助，例如陈卿，[1]的P27第34题，可以用函数图像表示比较容易解决。

自然标架和正交标架这部分其实某种程度上算是微分几何这门课最有特色的一部分内容，活动标架法的思想我们在后续的学习中还会遇到。本节的主要结果是证明第一基本形式和第二基本形式在合同变换下唯一一个曲面（对比于曲线论中的曲率和挠率唯一决定一条空间曲线）。先来谈一下自然标架，这里首先建议熟悉如何用Einstein求和约定做运算，Christoffel符号的公式最好会背下来，特别是正交参数下的Christoffel符号公式，对于结构方程Gauss方程和Codazzi方程最好掌握其推导，最好能记住正交参数下的形式。在刘老师讲义中第20节，会对这两个结构方程有清晰的几何解释，推荐阅读。

正交标架的理论又称活动标架法，是大数学家E. Cartan所引入的革命性的工具，后续进一步发展就是著名的纤维丛。我们在这里只能初窥其貌，如果想要深入的学习纤维丛我极力推荐[3]这本书。活动标架法的高明之处在于引入了微分形式和外微分运算，用它们给出了一组非常简明的结构方程。这里关于微分形式的运算需要大家熟练掌握。在这里我认为主要有三个内容需要掌握:

- 幺正标架的结构方程，以及如何表示Gauss曲率和平均曲率。
- 如何用第一第二基本形式计算幺正标架中的微分形式(ω_i^j尤其是ω_1^2的表示)，这里我们通常考虑的是正交的参数。
- 测地曲率的概念和几何含义：曲面上测地曲率为0的曲线是测地线。用微分形式表示测地曲率$k_g = (d\theta + \omega_1^2)/ds$(其中$\theta$是曲线切向量与幺正标架中$e_1$的夹角)，这一结果可以导出计算测地曲率的Liouville公式（丘赛曾经出过这个公式的推导）。更重要的是它可以导出局部曲面片的Gauss-Bonnet公式，我们在后面还会再提到这个结果。

关于曲面的内蕴几何这部分其实可以被黎曼几何所覆盖，但是对于学过黎曼几何的同学我也推荐看一下，因为黎曼几何中的很多结论是对于维数大于2的流形才成立的。曲面自身有很多特殊之处，另一个反映曲面特殊之处的结果是陈省身先生所证明的等温坐标系存在性 (即存在局部坐标(x_1, x_2)满足$ds^2 = e^{\phi}(dx_1^2 + dx_2^2)$)也就是说曲面局部是共性等价的，这一结果可以看作复几何中非常深刻的Newlander-Nirenberg定理的推论。

对于初学者而言，内蕴几何可以理解成只考虑一个抽象曲面的第一基本形式，而与反应如何嵌入到$\mathbb{R}^3$的第二基本形式无关。直白的说法就是我们如何通过不离开地球表面去研究地球的几何信息。内蕴几何我认为很重要的一点是需要理解曲面上的导数，也就是现代所谓的联络这个概念，以及对应的几何含义——平行移动。另一方面测地线的性质会深刻地影响曲面局部和整体的性质，这一点会在黎曼几何中有着更为深刻的体现。

整体微分几何这一部分，最重要的结果就是Gauss-Bonnet的公式，这一结果有着非常深刻的含义，曲面的积分是一个分析量，而曲面的示性数是一个拓扑量（实际上是同伦不变量），现代将曲面的积分解释为算子的指标，算子的指标与一个同伦不变量相等，这就是著名的指标定理所揭示的内涵。除了我们在讲义和课本中会学到的经典证明，我推荐大家在有一定黎曼几何的基础后可以阅读陈省身先生的成名作之一[4]——活动标架法的辉煌成就之一。在后面整体微分几何的学习中也能看到Gauss-Bonnet公式的巨大威力。

整体微分几何还有很多有趣的内容，大家可以进一步参考[2]，这些其实都可以看做活动标架法的应用。比如说可以证明Minkowski公式（刻画了Gauss曲率和平均曲率的关系），这是一个在整体微分几何中一个有力的工具，而且在这本书第五章可以看到超曲面的理论，在超曲面上如何运用活动标架法去解决几何问题。特别是对于准备丘赛的同学而言，在准备整体微分几何这部分的时候，这本书是非常重要的参考。

最后我想提及一些极小曲面的内容，极小曲面是平均曲率为0的曲面，而且它的另一个几何含义是固定边界的曲面变分的面积泛函的极小值，这一理论继续延伸就是极小子流形。极小曲面是现代数学的热门领域之一，是几何和分析的交汇处，影响了诸如辛几何（J-全纯曲线定义的动机）、椭圆方程、几何流等等领域，而且在应用和计算数学中也有重要地位。这是一个值得深入了解的领域，这里推荐一本入门极小曲面的经典教材[5]（当然你需要有分析的基础才能阅读这本书）。

3.5 复分析

建议教材与参考书：

[1] 史济怀、刘太顺：复变函数，中国科学技术大学出版社；

[2] Elias M. Stein: Complex Analysis, Chapter 4;

[3] 方企勤：复变函数教程，北京大学出版社；

[4] R. Greene, S. Krantz: Function Theory of One Complex Variable （单复变函数论）, Chapter 6, 8-10;

[5] Walter Rudin: 实分析与复分析。

学习建议：从应付考试角度出发，我推荐把[1]的前五章大部分习题都做一遍。如果是初学者，[3]是相当不错的，特别是全纯开拓。这部分建议不要看[1]的第六章，而是看[2]的介绍。

从学科本身出发，单复变有太多可讲的东西了。因为是基础课，最大的建议就是认真学、好好学。本科的复分析是三块内容：Cauchy的积分理论，Weierstrass的级数理论以及Riemann的几何理论。这三块内容是互相交错的，不过科大普通班Riemman映照定理有可能不讲。学习的时候应该注意，虽然这门课叫作复“分析”，但是其中有不少内容其实是几何的，要从几何的视角去理解。

下面谈一些拓展内容。复分析和实分析其实关系挺密切的，[5]就是在阐述这样的观点。有些复变的深刻定理——比如说Runge逼近定理，是可以用实分析或者说泛函分析的方法去证明的。再比如对某个函数傅里叶变换之后

是一个全纯函数，这时候一些复变的定理可以导出比较有意思的实变结果，例如非零的$L^1(\mathbb{R})$函数及其傅立叶变换永远不可能同时具有紧支集。而[2]的第4、5章则有一些复分析与傅立叶分析中的内容，这与调和分析中的算子插值理论关系密切。1975年解决Tomas-Stein傅立叶限制性估计的Stein复插值定理就是一个纯粹的复分析方法证明的定理。

要注意，学习复变的时候，会遇到很多求和和积分互换顺序，这时候实变的控制收敛定理其实是能用的。若仅局限在数学分析的，复变很多深入知识是没有办法学习的。因此，学习的时候可以去尝试挖掘这两个学科之间的关系。

还有一点要提的是，在学复变的时候不可避免的会碰到一些难以理解的几何上的东西，譬如说多值函数，再比如Picard小定理。对这些对象的研究其实是另外一门学科——黎曼曲面的任务。举个简单的例子：对复变函数开根号，得到的是一个标准的多值函数。如果我们把复平面的负半轴切掉，并且绕成类似于螺旋面的样子，这其实是一个黎曼面。

事实上，黎曼面一个定理指出，黎曼面M上的多值函数其实被M的基本群的特征（character）所确定（类似于Abel-Jacobi定理）。特别地，单连通区域上的所有多值函数都能被单值化。所谓单连通区域，复变的定义当然是用Jordan曲线定理，但是我也要指出真正的定义是基本群平凡。所以我们可以看到复变的一些内容和拓扑（特别是覆叠空间和基本群）有很大关系。再举个例子：双周期函数，其实是环面$\mathbb{C}/\Lambda$上的亚纯函数。Picard小定理本身也是黎曼面里单值化定理的一个推论。所以很多时候，不用特别去关注复变里这个定理的表述或者是定义为什么那么奇怪，感兴趣的可以继续去读黎曼曲面的书。

关于进一步的学习：笔者仅仅列举自己知道的：

1. 多复变函数论：十分优美的学科，特别是层论出现之后。多复变有很多和单复变迥然不同的性质，譬如说Hartogs phenomena。多复变在很多领域有非常大的应用，比如说C^*代数，再比如复几何（关系相当于微积分和微分流形的关系）。

2. 黎曼曲面：具体内容见本指南第四章的对应小节。不过在这我们要额外提一句，Schwarz定理的诸多推广曾经是热门之一，促使了双曲几何（hyperbolic geometry）的发展，不过具体的我也没有了解过。

3. 值分布理论：我只是听说过，但是应该是非常优美的学科。

3.6 实分析

建议教材：

[1] Elias M. Stein: Real Analysis, Princeton Lectures in Analysis, Chapter 1, 2, 6;

[2] Gerald B. Folland: Real Analysis and its applications, Chapter 1, 2, 3, 6节选.

主要参考书：

[3] 王作勤教授的实分析讲义；

[4] 周民强：实变函数、实变函数解题指南，北京大学出版社。

次要与进阶参考书：

[2] 的第6、7、8、9章；

[5] 汪林：实分析中的反例；

[6] Lawrence C. Evans, F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions.

学习建议：科大本科的实分析课程主要讲授勒贝格测度与积分理论，以及函数的微分，最后会介绍一下抽象测度。教材以[1]为主，部分[1]中没有的内容可以参考[2], [3], [4]. 我个人认为，讲完勒贝格测度与积分理论之后，可以尝试直接上抽象测度，然后用符号测度的语言来讲函数的微分，这样更加本质。后一种教学方法在2018年春季王作勤教授的实分析课上出现过，因此并不是不可实施。

但要注意，无论以何种方式学习实分析，一定量的练习与总结是必要的，**初学时写任何证明切勿忽略任何细节**。这门课碰到的函数都是性质很差的（仅仅是可测或者勒贝格可积函数），但它教会你最重要的一点就是**"如何用好函数去逼近坏函数"**。下面列举一些实分析这门课里面重要的点：

- $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度

这部分没有太多可说的，Stein的书[1]引入得更加契合这门课的精神：用好的东西去逼近坏的/未知的东西。周民强的书[4]则是效仿抽象测度直接给了Carathéodory 可测的定义。主要重点是：

1. 勒贝格测度的Borel正则性：任意集合“Borel等测包”的存在性、用开集/闭集去逼近可测集。这些结论的证明可以参考[4]。更多的习题可以参考Stein第一章的28-30题等。这条性质相当于允许我们（某种程度上）用Borel集（这种好的集合）去“代替”一般的可测集。例如我们证明一些结论时，可以先对开集证明，然后推广到Borel集，最后再到一般的可测集，这种方法在学习抽象测度会多次用到!

2. 两个特例：康托(Cantor)集$\mathcal{C}$和不可测集$\mathcal{N}$。没有太多好说的，两类集合的构造和基本性质必须掌握，它们经常作为经典反例出现。请认真完成Stein第一章的1-4、31-36题，都是很重要的性质。

3. 可测函数收敛性、各类点集的刻画：这部分最重要的内容是如何刻画可测函数列的各种收敛、不同种类的收敛性之间蕴含关系的证明。学习这部分时建议参考[4]的3.2节：如何用某些可测集的可列交/并来刻画收敛性。具体地，令$E_n(\epsilon)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}$. 那么

$$f_n \xrightarrow{\text{依测度}} f,\ if\ \ m(E_n(\epsilon))\to 0\ \ \forall\epsilon,$$

$$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f,\ if\ \ m(\underbrace{\limsup_n E_n(\epsilon)}_{\text{可以理解为它发生无穷次}})\to 0\ \ \forall\epsilon,\ \ i.e.,\ m\left(\bigcap_N \bigcup_{n>N} E_n(\frac{1}{k})\right)=0\ \ \forall k.$$

通常，很多学生会忽略掉a.e.收敛里面的$\limsup_n$。而证明一列集合的上极限是零测集，我们的唯一工具就是Borel-Cantelli引理（Stein第一章习题16）。可以看见，如何刻画满足某些性质的点集（指写成可测集的可列交、并）非常重要，而[4]的第一章有一些这样的练习，可以有选择性地加以练习。这部分还有两个重要的结论：Egorov定理与Lusin定理，大家不妨试一下自己证明Egorov定理，当作上面那段话的练习。

- $\mathbb{R}^d$上的勒贝格积分

积分的构造没什么好说的，但要记住：简单函数、阶梯函数可以点态逼近任一可测函数。

1. 积分收敛定理的推导与应用: 用得较多的是Fatou引理和控制收敛定理。其中Fatou引理证明控制收敛定理的方法要会，这可以用来证明广义控制收敛定理（控制函数可以与n有关）。如果Fatou方法仍然解决不了（缺少控制函数），则可以考虑使用Egorov定理。至于与其它收敛性的蕴含关系，只需记住L^p收敛蕴含依测度收敛（Chebyshev不等式），从点态收敛出发证明积分的收敛必须有积分收敛定理。

2. 富比尼(Fubini)定理：记结论比证明重要一万倍。

- L^p空间

1. 牢记几个基本不等式：涉及指标变换就考虑Hölder不等式，会证$L^p\cap L^r\subseteq L^q\subseteq L^p+L^r$，知道何时不同$L^p$空间有直接的蕴含关系（总测度有限；或者测度存在最小正值，例如计数测度）。具体可以参考[2]的第六章。

2. L^p范数的等价表达形式：联想p=1时为什么说勒贝格积分是一层层水平集堆起来求和?

$\|f\|_p=\sup_{\|g\|_{p'}\leq 1}\int fg\,d\mu=\left(\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x:|f(x)|\geq\alpha\}d\alpha\right)^{1/p}$.

- 抽象测度

这部分建议[1]的第六章和[2]的前两章混着看。[2]的第一章无关紧要的东西太多，因此可以考虑以[1]的第六章为主。

1. 抽象测度的构造: 这部分主要记住抽象测度的构造过程。先在X的一个代数$\mathcal{A}$上构造一个准测度(pre-measure)μ_0，再用 Carathéodory延拓定理延拓到σ-代数$\mathcal{M}=\sigma(\mathcal{A})$上成为外测度$\mu^*$，最后再限制在可测集上成为测度$\mu$。

2. 两个特例：实直线上的Borel测度、乘积测度与富比尼定理

两个特例对应的代数（有理区间、“可测矩形的有限并”）、σ-代数分别是什么（Borel σ-代数、乘积σ代数）一定要搞清楚。要注意，乘积σ代数并没有包含所有“乘积可测集”，因为出现了诸如$\mathcal{N}\times\{0\}$这种本该是

二维零测集却不在乘积σ-代数中的反例。换句话说，这里出现了“零测集的子集不一定是可测集”这种不应该出现的情况。因此，我们需要进行“修正”，也就是测度的完备化，这个可以参考[2]的第一章。

富比尼定理的证明在抽象测度里面显得更加本质。其推论：极坐标积分换元公式需要记住，在处理径向问题时非常有用。

- 符号测度: 这部分比较重要的有Radon-Nikodym定理（条件数学期望的本质）、Lebesgue微分定理（点态收敛的极大函数法，在调和分析里面会经常用到）、有界变差(BV)与绝对连续(AC)（牛顿莱布尼茨公式）。我们课内只介绍了$[a, b] \to \mathbb{R}$的有界变差函数，而真正$\mathbb{R}^d$上的有界变差函数并不是直接推广我们所学的定义。具体可以学习[6]这本书入门，BV函数是几何测度论中非常重要的一类函数。

注1：实分析仅是介绍了一套基本语言（测度与积分理论），本身不涉及过硬的计算等等，但是其“由好逼近坏”的思想非常重要；

注2：不要沉迷于周民强上的一些怪题；

注3：若以研究生基础的实分析来要求，则可以继续学习L^p插值理论、傅立叶变换、广义函数与Sobolev空间（[2]的第6-9章）；若需要学习几何测度论有关的知识，则可以用[6]来入门。后继课程：高等实分析/调和分析/微分方程2、（高等）概率论/随机过程/随机分析。

3.7 泛函分析

预修课程：拓扑学的点集拓扑部分（科大的泛函课程不需要），最好修过实分析（熟悉L^p空间及一些测度论的结论）。

建议教材：

[1] Michael Reed, Barry Simon: 现代数学物理方法（第一卷）·泛函分析，前6章。

主要参考书：

[2] Theo Bühler, Dietmar A. Salamon: Functional Analysis, AMS, Chapter 1-4;

[3] 许全华（等）：泛函分析讲义，高等教育出版社；

[4] Haïm Brezis: Functional Analysis;

[5] Walter Rudin: 泛函分析

次要与进阶参考书：

[6] 汪林：泛函分析中的反例；

[7] Paul Halmos, A Hilbert Space Problem Book, GTM 19;

[8] Barry Simon: Operator Theory. A Comprehensive Course in Analysis, Part 4, Chapter 1-3.

参考书的选择上，学校大多数年份用的教材《泛函分析讲义（上册）》（张恭庆）写得很差，可读性不强，并且没有认真讲弱拓扑的部分，除了备考以外没什么用。Rudin的[5]一上来就是拓扑线性空间等非常一般的情况，对初学者并不友好；而Salamon的[2]习题难度太大。综合来看，[1]或[3]作为教材比较合适，因为内容基本都有，行文也并不艰深晦涩。Rudin的[5]不是很适合以后做PDE等硬分析的同学学习。[4]后面有一些与偏微分方程相关的内容，当然你学完泛函直接去学Evans的书也是一样的。汪林的[5]仍然作为查找反例的第一来源；[6]则是有很多Hilbert空间的神奇结论，当然这些问题的难度很多都远超本科泛函分析课程的难度（这本书有中文版《希尔伯特空间问题集》）；而[7]或者 Michael Reed, Barry Simon所著的现代数学物理方法里面的算子分析那本书则是这方面的深入知识，有兴趣的同学可以看看。

学习建议：本科的泛函分析课程内容主要以下几部分：Hilbert空间，Banach空间理论（ Hahn-Banach定理、开映射定理、闭图像定理、共鸣定理等），拓扑线性空间，弱拓扑，紧算子的谱理论。

- Hilbert空间：没太多可说的，很像欧氏空间的直接推广。比较重要的内容是平行四边形法则、Parseval恒等式。

- Banach空间：也就是(无穷维)赋范线性空间。首先一个重要的是Riesz引理(区分一个Banach空间是否无穷维，只需看它的单位球或者单位球面是否是紧的，这个是充要条件)。其次，Banach空间的三大定理（Hahn-Banach

定理、开映射定理、闭图像定理）+共鸣定理是重中之重。尤其是Hahn-Banach 定理，讲述了一个有界线性泛函是如何从子空间延拓到全空间的，它可以用于刻画凸集的分离，进而用于定义凸泛函的次微分。

- 弱(弱*)拓扑：之前提到无穷维Banach空间的单位球(面)不是紧集(进而有界序列未必有收敛子列)，那么我们是否能给Banach空间换一套更弱的拓扑，使得之前的结论再次成立？那么X上的弱拓扑(以及X^*上的弱*拓扑)就给出了答案 (Banach-Alaoglu定理等)。弱拓扑的理解需要先学会拓扑线性空间的基本知识，科大用的张恭庆的书上并没有讲，只讲了序列的弱收敛。因此大家可以看[1]-[5]中任何一本上的介绍（建议[1]. [2], [3], [5]选一本）。这部分非常非常重要，在PDE、随机过程（布朗运动构造、Donsker不变原理等）等学科中会反复用到。
- 紧算子的谱：紧算子某种程度上可以看作方阵的推广(可以用有穷秩算子逼近)，而“谱”则可以视作特征值的推广。这部分的结论有点类似线性代数，学习的时候应该时刻回顾线性代数的结论(尤其是 Hilbert空间上对称紧算子的谱)。此外，Fredholm算子也是非常重要的一类算子，大家可以在[2]的第四章学到。其在椭圆PDE弱解理论中的应用 (Fredholm二择一)则可以直接看Evans的PDE教材第六章。

3.8 概率论、随机过程

概率论

预修课程：最好知道基础的测度论知识，实分析的书上都有，或者参考[3]的第一章。

建议教材：

[1] Grimmett, Stirzaker: Probability and Random Process, Chapter 1-5, 7.答案书是《概率论题解1000例》

主要参考书：

[2] 李贤平：基础概率论；

次要与进阶参考书：

[3] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition.（此书有答案，并且第五版已经面世，都可以在Rick Durrett的主页上免费下载）；

[4] 钟开莱：概率论教程。

学习建议：这门课的内容涉及如下几个方面：

（1）概率空间、随机变量（连续，离散）、期望、方差、独立性、初等条件概率的基本定义；

（2）典型的随机变量：随机游走、正态分布、多元正态分布、Poisson分布；

（3）生成函数与特征函数；

（4）各种收敛的关系（几乎处处收敛，依概率收敛，依分布收敛（弱收敛），L^p收敛等等）。

以上都是必须要掌握的重点内容。当然，自己能知道如何证明中心极限定理和强/弱大数定律会比较好。此外，刘党政老师会另外补充一些关于熵和随机矩阵的知识。

和其他数学分支一样，多做习题，计算例子是很重要的。教材后面的习题可以选些做下（有答案）。如果有时间的话，可以看看[3]的前4章（这本书也是有答案的）或者[4]的对应部分。钟开莱的书[4]相对[3]而言，例子少些，实分析味道更重些（比如，他会介绍概率分布函数可以分解为3部分：纯跳跃部分+绝对连续部分+奇异连续部分，这个其实是抽象测度的勒贝格分解）。

应用随机过程（本科生）

预修课程：实分析、概率论

建议教材与参考书：

[1] Grimmett, Stirzaker: Probability and Random Processes, Chapter 6, 7;（马氏链和鞅论）

[2] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition, Chapter 5, 6, 8.

[3] 徐佩：鞅论与随机积分讲义.

学习建议：这门课的主要内容是：离散状态的马尔可夫链、鞅论、布朗运动与随机积分初步。

- 离散状态马氏链：这包括了离散、连续时间的马氏链，一般是从离散时间马氏链起步。初学这部分时概念比较多，例如persistent state, transient state, period of a state, reversible chain（可反转马氏链）, stationary distribution

（平稳分布）, recurrence time（重现时间）的定义及其相互之间的关系、转移函数的关系。另一个重要的内容是对不可约、具有重现性的非周期马氏链（Irreducible recurrent aperiodic Markov chain）的马氏链收敛定理。这个定理证明用到的coupling（耦合）方法是概率论的重要思想之一。

- 鞅论：Durrett的第五章其实也是很好的（离散）鞅的教材。这部分的内容是标准的：上/下穿不等式、极大值的不等式、（倒向）鞅收敛定理、可选时（或者叫宽停时，英文是optional stopping time）定理。要注意，"停时"这个概念是概率里面独有的，这很难在实分析中见到。此外，基本例子也要知道，例如随机游走的相关计算、几乎处处收敛但不L^1收敛的鞅。鞅是一个有用的技术工具，有时候即使问题没有明显的出现鞅也可以自己构造。

- 布朗运动与随机积分：布朗运动的基本性质（例如强Markov性、反射原理等）当然是必须知道的。还要知道轨道连续的高斯过程的分布是由期望过程和协方差过程唯一决定（布朗运动是特殊的高斯过程）。对于布朗运动存在性的证明可以不做要求，感兴趣的可以看[2]中第八章第一节。对于随机积分需要明白定义的整个过程，其实和实分析构造积分是类似的。对于随机积分的具体计算，基本上记住二次变差过程乘法表$dB_t dB_t = dt, dtdt = 0, dtdB_t = 0$就可以解决大部分你遇到的计算（当然你得先理解这个乘法表）。

3.9 组合数学

教材与参考书：(张先得老师的组合学课程)

[1] Stasys Jukna: Extremal Combinatorics-with Applications in Computer Science;

[2] Reinhard Diestel: Graph Theory, GTM 173, Springer.

学习建议：

组合学的目的是数数，工具也几乎都是数数，主要研究有限的对象。Combinatorics is an area primarily concerned with counting, both as a means and an end in obtaining results, and certain properties of finite structures.

这门课是Introduction to Combinatorics，主要介绍了组合学中经典的几种基础方法，如二项式定理、排列组合、算两次、鸽巢原理（抽屉原理）、容斥原理、生成函数（母函数）等，以及线性代数方法，概率方法、多项式方法等。教学内容大概前半学期着重讲教材的第一章the classsics，也是最基本的内容，后半学期大概介绍性地讲线性代数方法、概率方法、多项式，和一些组合设计相关的topic（zxd老师主要研究方向是组合设计）。

总的来说，**这门课很难的一点在于概念奇多且相互独立，非常繁杂，但是在学习的过程中定义又是次要的，如何根据定理去理解背后的本质更重要，因为本质始终是数数。**这门课的作业比较难，独立完成作业是一件非常耗费时间精力的事情，不太建议死磕过难的作业题，不划算，考试的话会简单许多，基本的套路熟悉就好，学习的过程当中奇技淫巧不是那么的重要。

一些主要内容：

算两次：这个方法是组合学中最重要的方法之一。本质是从对客观对象的两个不同角度的观察建立等式。

二项式定理与组合数恒等式：证明组合数恒等式的常见方法是算两次，对一个多项式进行恒等操作，得到的两个结果中某一项的系数相等，从而建立恒等式。

母函数：母函数方法是一个已知递推关系求数列通项的方法。Catalan数的计算是一个极好的例子。学好数分很重要。

Ramsey问题：这个能理解这个问题的本质难度在哪，再会几个非常简易粗糙的不等式估计就好了。

Combinatorics Nullstellensatz：马后炮是结合希尔伯特零点定理 (Hilbert Nullstellensatz Theorem) 去理解。

概率方法：主要熟悉如何建立合适的概率模型。

4 进阶基础知识（本硕贯通）

这部分我们假设同学们已经学完了前两年半的对应基础课。以下有一部分内容在科大没有开课或者不是每年都能开课，但这些知识仍然对于一部分同学是非常重要的。

4.1 分析与微分方程

在介绍本硕贯通阶段的分析课程之前，笔者建议大家不要再像学数分、线代等本科基础课那样较大量地做题了。当然，针对性的练习仍然必不可少，但习题量相比本科基础课而言应该大幅下降。此时，更重要的是学会这些理论本身（及一部分证明），并知道<u>什么时候该用在合适的地方</u>。

4.1.1 （高等）实分析与测度论

（高等）实分析

预备知识：实分析

建议教材与参考书：

[1] Elias M. Stein: Real Analysis, Chapter 6;

[2] Gerald B. Folland: Real Analysis and its applications, Chapter 1, 3, 6, 8, 9节选；

[3] Elias M. Stein: Functional Analysis, Chapter 1-3.

学习建议：笔者对这块的定位是博士生资格考试的级别，其内容也是标准的实分析基础，也是大多数与分析有关的方向都需要掌握的内容。学会这些内容之后，不同方向所需要的分析知识可能就不一样了。因此，这是最后一门分析方面的公共基础课，其内容大致分如下几部分：

- 抽象测度：请参阅本科实分析的抽象测度部分（略）。教材可选取[1]的第六章前三节和[2]的第一章第五节，或者直接看[2]的第一章和第二章最后一节。

- 符号测度与Riesz表示定理：重点是Radon-Nikodym定理（测度的分解）和Riesz表示定理（$C_c(X)$的对偶是X上的全体符号Radon测度）。教材可选取[1]的6.4节和[3]的1.7节，或直接看[2]的第3、7章相应部分。

- L^p空间与插值定理：这部分的最好用[2]的第六章进行学习，[3]的前两章（第一章只看第1、2、4、7节）可以学到更多的动机（例如关于Hilbert变换的背景）。相比本科阶段的L^p空间内容，这部分新增了两个非常重要的定理：Riesz-Thorin插值定理和Marcinkiewicz插值定理，及其对应的三个极为重要的例子：傅立叶变换（R-插值）、Hardy-Littlewood极大函数（M-插值）、Hilbert变换（奇异积分的最基本例子，M-插值或R-插值都可以）。R-插值没有太多好说的，其标准例子傅立叶变换会在下一部分提及。M-插值在对角线情况的证明要求掌握，因为这是之前本科实分析中提到的
$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} d\alpha$$
的直接应用。**如果要学习调和分析，那么务必牢记这两个插值定理!!!**

- Fourier变换：这部分比较好的学习资料是[2]的第八章。[1]的第4、5章也有介绍，但是比较零散，不如[2]系统。傅立叶变换都是标准的内容，没有太多可说的。

- 广义函数（分布）与索伯列夫(Sobolev)空间：分布理论是这门课另一个非常重要的话题，**高等实分析也是科大唯一一门稍微认真讲了一点分布理论（广义函数）的课程**。这部分最好用[2]的第九章进行学习，[3]的第三章相对而言比较零散，当然后面有些具体的例子还是需要看的，例如拉普拉斯/热方程基本解的推导、齐次分布、仿基本解(parametrix)等等。Sobolev空间可以看[2]的第九章。[2]的第九章也是标准的本硕贯通内容，没有太多可说的，学就是了。

注1：和本节开头一样，学到此时已经没有大量做题的必要了，最重要、也最有用的反而是这套理论本身。笔者在这里挑选出了一些比较有代表性的习题，当然不必每题都做：

[1]第六章命题1.6、习题1-3、8-11、13、15；

[3]第一章1、8、9、11-22、25为基本要求；23、24、26、问题5选做(Orlicz空间)，27、问题6选做(L^p一致凸性)；第二章3、4、6-14；第三章2-4、7-13、15、16、18、19、29，问题1、7、8选做。

[2]第一章18、19、20、22；第二章64；第三章1-3、8、11、12、17；第六章本科实分析级别3-5、7、9、10、15、31、32、34、38、39，研究生课级别13、18、20-22、40、43-45；第八章14-16、18；第九章1、9-11、13-15、16、20、26、30、32、33、36.

以上提到的习题在不同书上会有重复，且[1]+[3]和[2]之间可以互相参考。**以上勾出的习题已经非常非常多了，而且L^p空间与广义函数有相当一部分对于初学者而言难度较高，上手的时候会觉得很难。因此，不要强求自己做多少题，理解你所学的东西是第一步！**

注2：以上内容有一部分是在为调和分析打基础，可以视作调和分析的前置课程。若对几何测度论或概率论感兴趣，请移步本指南后继章节查找。

注3：上课的时候可以不做笔记（如果你分析功底好），但是关键的idea和技术必须要掌握！

几何测度论入门（没有这门课）

建议读物：

[1] Lawrence C. Evans, F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions;

[2] E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.

预备知识：[1] 实分析， [2] 需要[1]。[1]的内容主要是介绍Radon测度、Hausdorff测度等几何测度，面积/余面积公式，Sobolev空间，$\mathbb{R}^d$中的有界变差函数，以及与等周不等式相关的内容，相当于是基础知识。

学习建议：暂缺。

4.1.2 多复变函数论

预修课程：实分析、复分析、泛函分析

教材：Lars Hörmander: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.

学习建议：这是一门很硬的分析课程，如果想要学到东西，务必把书上每一个细节推演或补充明白。你不需要记住任何一个书上的名词，但是你要能把作者展示出的技术给记下来。不要纠结于任何一个人对这个学科的主观评价，想学就翻开课本亲自去体会。

课程内容：该书前四章是硬核分析，核心目标是II.2.6（Pseudo-convexity and Plurisubharmonicity, 即拟凸域、多次调和函数）。后三章有代数几何背景（Transcendental Method in Analytic Geometry），学过一点代数几何的人会在后三章看到很多熟悉的定理，比如 Serre在 Stein 空间的工作和代数几何里面他对于仿射概形刻画的工作对应，以及Kollar对于仿射性质更深层的刻画: Point separation and Maximality of domain. 仿射性质花样百出的刻画也是多复变函数论和代数几何里面极其历史悠久的话题—这其中就包含许多伟大的名字。剩下的比如解析空间上的层论、凝聚层、Oka定理和Cousin问题，如果学过一点点代数几何，都可以找到相关对应。当然这些美妙的对应关系应该是至少自己学过一遍之后带来的一点小小的惊喜，而不应成为让一些读者自大而忽视它们各自精妙的细节的理由。

4.1.3 （高等）泛函分析

预备知识：泛函分析、近世代数（除去西罗定理、域扩张和Galois理论）

建议教材：

[1] Theo Bühler, Dietmar A. Salamon: Functional Analysis, AMS, Chapter 5-7;

参考书：

[2] Michael Reed, Barry Simon: 现代数学物理方法（第一卷）·泛函分析，第7、8章；

[3] Barry Simon: Operator Theory. A Comprehensive Course in Analysis, Part 4, Chapter 5-7;

[4] 郭懋正、张恭庆：泛函分析讲义（下册），北京大学出版社。

学习建议：自从吴劲松老师离开科大后，高等泛函分析这门课已经不能保证常年开设。这门课可以视作泛函分析的后继，其内容主要涉及Banach代数（主要是C^*-代数以及Hilbert空间上正常算子的谱）、无界自伴算子的谱、自伴算子的扰动、算子半群等内容。吴劲松老师还会补充一些有关“自由（非交换）概率论”的内容。

- Banach代数：这部分实际上是为了给出Hilbert空间上有界正常算子的谱族刻画、谱分解定理，其关键步骤是建立所谓的“泛函演算”(Functional Calculus). 这实际上是将一个有界正常算子A的谱集上的连续函数$C(\sigma(A))$，与Hilbert空间上的全体有界正常算子作出“一一对应”，而这个关系正是一个C^*-代数的同构，被称作谱映射定理(Spectral Mapping Theorem). 这其中重要的知识有：Gelfand表示、Stone-Weierstrass定理，以及最后证明的谱映射定理、正常算子的谱定理：Hilbert空间上的有界正常算子可以“酉相似于”（不严格地说）一个（复值的）乘法算子，并可等价表述为，A可以写成谱集上的坐标函数关于投影值测度的积分。特别，紧算子的情形下，就退化为紧算子的谱定理。

- 无界自伴/正常算子：分析中尤其是微分算子，是无界算子（联想 Poincaré不等式不可能倒过来成立）。此时自伴算子也有一个谱定理。例如，任何常系数微分算子酉相似于乘法算子。事实上，实现这一等价的酉算子就是傅立叶变换，该乘法算子是傅立叶乘子。要注意，无界算子的定义域可能不是整个Banach空间，要格外小心。此时“闭算子”就显得很重要：因为我们无法定义无界算子的算子范数，所以这迫使我们考虑算子的图像，引入“闭算子”。关于自伴算子的延拓与扰动，可以看[4]的第六章。

- 算子半群这部分有一个著名的Hille-Yosida定理。当然，更重要的是这部分牵涉到很多实际的例子：例如抛物方程的半群方法、随机过程中的马氏半群、单参数酉群(强连续酉群的表示定理，与Bochner积分、薛定谔方程的解、Birkhoff遍历定理等都有关)、波算子的散射理论等等。

泛函分析的后继内容实际上有很多，例如研究函数空间的几何理论、Banach空间的概率论、算子代数（这也是一个很大的分支）、算子的扰动理论、散射理论课等等。但由于笔者对此没有什么了解，加上科大现在也几乎没有专门做泛函分析的老师，所以与后继学习相关的部分暂缺。

4.1.4 调和分析、半经典分析

调和分析

预备知识：（高等）实分析，主要是Folland实分析的第6、8、9章的内容。

建议教材：

[1] Javier Duoandikoetxea: Fourier Analysis, GSM 19, AMS;（主要）

[2] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.1;（主要）

[3] Elias M. Stein: Harmonic Analysis, 1993.（难度大，震荡积分部分必看）

参考书：

[4] Elias M. Stein: 奇异积分和函数的可微性, 1971;（比较古老，初学奇异积分可以查细节）

[5] Elias M. Stein: Functional Analysis, Chapter 8.（适合浅尝辄止地了解震荡积分）

[6] Thomas Wolff: Lecture Notes on Harmonic Analysis, 2003;（短小精悍的讲义，有助于你快速了解调和分析在干什么，但是行文跳跃）

[7] Loukas Grafakos: Classical/Modern Fourier Analysis, GTM 249/250;（字典，行文极其啰嗦，初学很容易陷进不必要的细节中而迷茫）

[8] Terence Tao: 调和分析讲义（见陶哲轩的课程主页1、课程主页2，不是给初学者看的，适合有基础之后领会思想；行文跳跃，小错误多到需要去Tao的博客上找勘误表）；

[9] Christopher D. Sogge: Fourier Intergals in Classical Analysis, 2nd edition.（面向有基础且想学调和分析的，小错误不少，证明相当跳跃难读，Sogge本人上课比他这本书的叙述要好114514倍）

[10] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.2;（基本是Muscalu用他研究里的方法证明这些定理，有兴趣可以学一学但是的确很难）

[11] 苗长兴：调和分析及其在偏微分方程中的应用，科学出版社。（90年代末至今都值得参考的中文书，内容很全但缺乏动机的讲解，工具书）

学习建议：调和分析这门课有很多种教法，但一个学期的课想兼顾各个方向的确很难做到。这门课可以往两个方向走，一是纯调和分析，二是调和分析在其它领域（尤其是PDE、解析数论）的应用。但这门课的内容一定是要为直击前沿服务，无论如何都不应该过于纠结在基础知识上。

- 奇异积分

  （1）奇异积分的Calderón-Zygmund分解：这是奇异积分最重要的技术，另外还有一些关于逐点收敛的结果（齐次核+cδ）。典例是Hilbert变换和Riesz变换。这部分可以参考：[2]的第7章前3节，细节可查[4].

  （2）端点情况$\mathbf{H}^1$与BMO空间：这部分可以参考[1]的第6、7章。BMO空间在后面还会多次用到，而Hardy空间有专门的理论，可以看[3]的对应章节。如果仅是要学习调和分析基本结论（指不需要T1定理等内容），可以先跳过。

  （3）Littlewood-Paley与几乎正交原理：这部分的 Mikhlin-Hörmander 乘子定理可以看作是乘子版本的C-Z奇异积分定理，这些往往比C-Z定理更加实用(Bernstein不等式)。Littlewood-Paley理论的核心想法就是“频率局部化”和“几乎正交”。“几乎”一词的含义，可参考Stein实分析第四章的习题23，或者直接看 Cotlar引理的内容。参考书：[2]的第8.1, 8.2, 8.5, 9.1, 9.2, 9.3节，有兴趣的同学可以看Tao的非线性色散方程附录A，或者[8]的第六章。**乘子理论请务必要熟悉结论，并在后继学习中反复体会！**

  （4）非卷积型奇异积分的$T1$定理：T1定理（及其衍生的Tb定理）在PDE中也会用到。更重要的是，其证明过程中衍生出的工具，便是所谓的仿积（ Paraproduct）、多线性乘子定理（Coifman-Meyer定理等）的雏形。可以说，这是一个走向多线性调和分析的定理，承上启下。参考：[1]第9章、[7]的第二册。

- 震荡积分：这是目前调和分析一个很重要也是很困难的方向，**至今仍在发展当中**。它曾经在色散方程的色散估计与衰减估计，数论的格点估计等问题中起到了无足轻重的作用。至今仍未解决的调和分析四大猜想也都与震荡积分有不可分割的关系。

  本硕贯通阶段的调和分析还是以介绍震荡积分的基本理论为主。**震荡积分的最好教材就是[3]的第8、9章，[11]的对应部分是由它翻译而来）**。掌握Tomas-Stein限制性估计的TT^*证明比较重要，这是非常关键的技术。感兴趣的话，可以读一读[3]的第九章后半部分，讲了Bochner-Riesz可和性、傅立叶积分算子L^p有界（也可以参考[9]的第二章）。

  （1）第一型震荡积分：固相法、支撑曲面上的傅立叶变换

  自由色散方程的解本身就是一个震荡积分。例如我们考虑$\mathbb{R}^d$上的薛定谔方程$iu_t + \Delta u = 0$，定义曲面$\mathcal{P} := \{(-|\xi|^2, \xi) | \xi \in \mathbb{R}^d\} \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$, 并定义$\mathcal{P}$上的测度$\mu(d\tau, d\xi) := \hat{u_0}(\xi)d\xi$. 此时方程的解可以写成$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{1+d}} e^{i(x\cdot\xi+t\cdot\tau)}\mu(d\tau, d\xi)$, 也就是曲面$\mathcal{P}$上测度$\mu$的傅立叶（逆）变换。支撑曲面上的傅立叶变换也随之成为了震荡积分最初的研究对象，其研究方法就是“固相法”(Stationary Phase Method)，这必须要掌握。

  （2）第二型震荡积分：傅立叶限制性估计

  这部分发源于高斯曲率非零的超曲面上是否能在L^p的意义下给出傅立叶变换在该超曲面上的限制，因为这与色散方程的解直接相关。利用固相法和Knapp反例（见[2]的第11章）, Stein猜想：限制性估计成立的充要条件是$p' > \frac{2d}{d-1}$， $p' \geq \frac{d+1}{d-1}q$.至今，这还没有被完全解决（$d \geq 3$）。1975年，Tomas-Stein限制性估计给出了$p' \geq \frac{2(d+1)}{d-1}$的条件下限制性猜想成立。他们最初用的方法是复插值法，之后TT^*方法大大简化了证明（见[2]的第11章）。此后直到1991年Bourgain的结果才横空出世。每一次的指标推进，都是新技术的成果，例如前几年兴起的L^2-decoupling (Bourgain-Guth)。

学到这个地步，已经没有任何必要去做很多习题。调和分析更多的是作为工具出现，因此掌握定理本身并会使用是更重要的。即便是想学调和分析这个方向，也应该尽快掌握这些基础知识，剑指你的研究方向，早日开始阅读专著和文献才是更重要的。

学习过程中，以下几点需要格外注意：

1. 积累一些反例：例如很多L^p有界性在端点情况不对，反例是什么？这些反例有何具体的意义？不少情况下反例就是一些诸如bump函数、幂函数等很常见的函数，或是构造一些特殊尺度的cap来解决问题，这都是值得思考的。当然，这些例子的验证都需要亲自去完成。

2. 记住几个常见的应用，尤其是与PDE、格点估计有关的问题。

3. 尝试自己去理解并解释“为什么”有些地方需要按那样构造，这些技术的目的是什么。例如，可以问自己Calderón-Zygmund分解的大致目的是什么？Littlewood-Paley理论里面 Bernstein不等式及其一系列114514个推论里面，如何去理解“s阶导数”？极大函数在很多的证明里面都会出现，其目的是什么？不用极大函数过渡，证明会在什么地方崩溃？反复推敲这种问题，有助于理解调和分析的内容。

拓展知识

- 多线性调和分析：Coifman-Meyer定理Lipschitz曲线上的柯西积分公式、双线性Hilbert变换（参考[7]的第二册，或者[10].）.

- PDE向：仿微分运算(Para-differential Calculus)。这部分可以参考[8]的第六章，可以视作Littlewood-Paley理论的应用。 Bernstein不等式（频率局部化估计）、仿积分解是一切的基础。它们可以用来证明s阶的莱布尼茨求导法则、链式法则，其主要结果为Kato-Ponce交换子估计，以及Kenig-Ponce-Vega, 李栋等人后来的加细版本。这些在PDE的研究中是非常强力的工具。

- 调和分析向：调和分析领域里有四个基本问题，都尚未完全解决。这四个问题不论是彼此之间，还是与数学中的其它领域，都有着重要的联系：PDE、傅立叶级数求和、组合数学、解析数论等都与之相关。笔者将对第一条稍作介绍。

  1. 波动方程的先验估计：寻求适当的函数空间，建立波方程的线性时空估计$\Rightarrow$ Sogge局部光滑性猜想。

  容易得知，波方程的先验估计可以归结为半波算子$Hf(x) := e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$的估计。早年，人们利用波方程的基本解与插值得出了具有导数损失的点态的估计:

  $$\|Hf\|_p \lesssim t^{(d-1)(1/2-1/p)}\|(1+\sqrt{-\Delta})^{(d+1)(1/2-1/p)+\epsilon}f\|_{p'};$$

  并且如果我们考虑聚集在单位球面附近的bump函数的例子，容易得出该估计已经是Sharp的，也就是说无法改进。但它在应用上具有局限性——难以研究波方程的低正则性问题。

  直观来看，导数损失是原因是波的“聚集”：即便初值的L^1范数足够小，其L^∞范数也会演化到无穷大。但是，波在某一处的“聚集”时间应该是很短暂的。为了减少正则性的损失，人们引入时间平均，考虑时空估计，即$\|Hf\|_{L_t^qL_x^r([1,2]\times\mathbb{R}^d)}$，这样的估计被称作“局部光滑性估计”(local smmothing estimates). 至1998年，Keel-Tao最终实现了端点Strichartz估计的证明:$\|Hf\|_{L_t^qL_x^r(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}_x^s}$，这里$d(1/2-1/r) = s+1/q$, 且$2/q \leq (d-1)(1/2-1/r)$. 前者由scaling给出，后者则是由Knapp“行波”反例决定：如果初始时刻聚集在一个“扁平的圆柱”上，那么演化长时间之后，半波算子决定的波会发生弥散。

  但Strichartz时空估计仍然不是我们最理想的估计：因为左右两端可积性不同、正则性损失仍然存在。为在低正则性研究中避免这两个问题，Sogge观察到理想估计应该是$\|Hf\|_{L_{t,x}^{2d/(d-1)}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L_x^{2d/(d-1)}}$，因为它与插值、能量估计结合可以获得其它已知估计。但这个是错误的，后来Sogge猜想如下不等式成立：

  $$\|Hf\|_{L_{t,x}^{2d/(d-1)}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|(1+\sqrt{-\Delta})^\epsilon f\|_{L_x^{2d/(d-1)}}.$$

  至今Sogge局部光滑猜想也没被完整证明。而1999年，Wolff构造了反例，指出Sogge猜想里面的导数损失是必然存在的。关于半波算子的更多知识，可以阅读[9]的第四章。

  2. 傅立叶求和/变换的L^p敛散性$\Rightarrow$ 算子$Tf := ((1-|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi))^\vee$是否是$L^p(\mathbb{R}^d)$有界的$\Rightarrow$ Bochner-Riesz猜想；

  3. 震荡积分$\Rightarrow$如上所述的傅立叶限制性估计猜想；

  4. Kakeya问题：Besicovitch集合的构造$\Rightarrow$ Kakeya 极大函数的L^p有界性问题$\Rightarrow$组合几何方法、算术组合方法。

  有关L^2-decoupling, 这里列举一些网上可以找到的笔记：

  Larry Guth: http://math.mit.edu/~lguth/Math118.html;

  Jonathan Hickman, Marco Vitturi: https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~vitturi/lecture_notes/lecture_notes.html;

  Pavel Zorin-Kranich: https://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/SoSe2019/decoupling/.

半经典分析（暂缺）

学习建议：暂缺

4.1.5 偏微分方程

微分方程2（近现代偏微分方程入门）

预修课程：实分析（主要为L^p不等式、积分收敛定理）、泛函分析（主要为压缩映射定理、Riesz表示定理、弱收敛、紧算子及其谱理论）、不需要微分方程1. 建议了解一点高等实分析的内容（虽然并不是必要的）。

建议教材：Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, 2nd edition, AMS, Chapter 5-9.

参考书：无

学习建议：基本内容没有什么好说的，Evans的第5-7章，涉及基本语言(Sobolev空间)、二阶椭圆/抛物/双曲方程的弱解理论，以及极大值原理等内容。**初学时，请务必先做到“能够写出所有的计算细节”，再去考虑进阶的问题!!!** 微分方程2**这门课本身并不涉及过难、过于专业的例子，其内容并无法直接应用到研究中**。它的目的是让**学生了解PDE 的基本语言和基本方法，为以后读懂PDE相关的专著、论文打下必要的基础**。学完这门课和调和分析、泛函分析之后，PDE的“公共基础知识”就算掌握了。更深入的知识，需要视PDE的不同方向来进行针对性的学习。

关于习题：能够完成课本后的习题已经非常好，初学时很多题不会做是很正常的。习题的答案均已上传至笔者的个人主页 (请勿拿出去获利！)。

- 基础知识学习顺序建议：

  第五章（Sobolev 空间）：5.1-5.7、5.8.1（Poincaré 不等式）、5.8.3（$W^{1,\infty}$ = Lipschitz, 课本该定理证明出现大跳步，详见2017年微分方程2期中考试第三题）、5.9.1（H^{-1} 空间）；这部分可以参考Evans的Measure Theory and Fine Properties of Functions的第四章。

  第六章（二阶线性椭圆方程）：6.1、6.2（存在性定理）、5.8.2（差商极限逼近导数）、6.3（正则性）、6.4（极大值原理）、6.5.1（对称椭圆算子的谱）；

  第七章（线性发展方程）：5.10节（时空Sobolev空间）、7.1（抛物方程弱解的 Galerkin 方法）、波方程的存在性证明（见Jonathan Luk的波方程讲义第4节）、7.2.4（双曲方程有限传播速度）。

- 第5-7章可以跳过的部分：5.3.3 整体光滑逼近的证明（知道思路即可，先有限覆盖边界，然后用个大球盖里面）； 5.4节的延拓定理证明； 5.5节的零迹定理的证明（但结论在第六章习题用到）； 5.6.3（高阶 Sobolev 不等式）的所有证明；6.3、7.1 节的所有高阶正则性证明（数学归纳法即可）和边界正则性证明（边界附近进行局部拉直，化成上半平面的情况）；6.4、7.1节的所有 Harnack 不等式证明；7.2 节除了双曲方程的有限传播速度其它全部跳过。（全部照搬 7.1，但须注意双曲方程正则性结果和抛物方程不一样）

拓展内容：

真正的研究中涉及的PDE大多是非线性的，而非线性方程的估计总是需要先有线性估计，所以这门课涉及的线性方程理论（第5-7章）是不可或缺的。但是，如果整个学期都聚焦于线性方程理论的话，即使学完了，也不知道怎么用。所以，我们理应接触更多的例子，来看在具体的问题中是如何运用这些基础知识的。**要记住，PDE问题的核心绝对不是冗长的计算，而是那些统领性的idea、如何发现本质困难项、如何巧妙地化解本质困难项（例如选取合适的坐标系、进行适当的变量替换、交换一些导数等等）。初学者在学会计算之后，切勿陷入并沉迷于那些无关紧要的细节，因为一味地死算永远绕不开本质困难项；相反，若是有了正确的观察与构造，一些毫不起眼的实分析习题结论，也能起到四两拨千斤的效果！**

不同PDE所需的预备知识，所研究的问题相差可能会很大。我们在这一版本的学习指南中，先介绍 Evans 这本书上还有什么值得读一读的东西。有关PDE学习的更多介绍，会在下个版本的学习指南中加入，敬请期待。

Evans书上的其它内容：

- 消失粘性法：7.3 节的 Vanishing viscosity method

对于双曲方程，有时无法直接求解或者获得我们期望的正则性。此时，我们光滑化原方程并塞入抛物项$\epsilon\Delta u$构造逼近解。之后利用标准的先验估计+压缩映射法，得到弱解，在正则性阶数稍低的函数空间里证明强收敛即可得到强解。粘性法在很多双曲方程（例如欧拉方程）、传输方程、几何分析中极其有用，因为它们本身没有正则性的结论，性质很差，加入一个抛物项利于我们构造方程的解，同时抛物项避免了导数损失。

- 调和分析方法：Strichartz时空估计

  书上 7.3 节的例子并不好，可以换成证明 3D 质量临界的 Schrödinger 方程（$iu_t + \Delta u = \mu|u|^{4/3}u$，$\mu = \pm 1$）解的局部存在性（需要少量调和分析知识）。利用插值得出自由方程解 L^p 范数衰减估计，再利用 TT^*方法+HLS不等式得出 $L_t^q L_x^r$ 型的Strichartz 估计，这个估计是色散方程的关键。

- 变分法（第八章）：

  变分的想法是把某个能量泛函的临界点（极小化子）等价于方程（也是该泛函的 Euler-Lagrange 方程）的解。前三节注意正则性估计不能推广到高阶，否则非线性的结构会被破坏。第四节讨论的是限制条件下的极小化子，其中有一些重要的例子：到球面的调和映照、流体 Stokes 问题。8.5、8.6、9.4节讨论的是半线性椭圆方程实则与Yamabe问题以及Sobolev嵌入不等式的最佳常数有关。此外，这一节里面提到的 Palais-Smale 条件在 PDE 中很重要。例如 3D 质量临界的散焦 Schrödinger 方程的散射结论证明的关键步骤就用到了它。

  8.6节诺特定理给出了构造方程守恒律、单调量的方法，这些是我们将方程问题化繁为简的重要工具。一个物理系统总是会有一些守恒律，这也符合认知。我们在一些PDE的证明中，经常会看见乘一个很神奇的项，进行分部积分等操作之后构造出守恒量、单调量。波方程的 Morawetz 恒等式就是一个很好的例子。

- 其它非变分方法（第九章）：单调量与不动点法、上下解方法、移动平面法（椭圆方程）、梯度流方法。

- 非线性波动方程（第 12 章）:Evans 避开了使用傅立叶分析，所以有一个 $L_t^4 L_x^{12}$ 的时空估计没有证明。这套理论也可以利用傅立叶方法+Strichartz 估计完成。但第12章前面的波方程能量守恒、惠更斯原理等内容是重要的，它们也为后面证明波方程存在性提供帮助。其调和分析方法，可以阅读Sogge的 Lecture Notes on Nonlinear Wave Equations，或者方道元老师的非线性波方程讲义。

更多关于偏微分方程学习需要注意的地方

在下一版本的学习指南中，我们将围绕着下述的问题来介绍一些微分方程中的统领性的idea。这些问题是：微分方程来自于哪？给定一个微分方程，它的什么性质是值得去研究的？研究这些方程的主要方法与数学工具有什么？

1. 微分方程从哪里来？

对于常系数线性方程，大致说来主要有四种常见类型，椭圆方程，抛物方程，色散（波）方程，传输方程。他们分别是：

- 椭圆方程

$$\Delta u = 0.$$

  这种方程往往用于刻画某种稳定状态，比如无电荷的静电场。这些状态往往是长时间演化后达到的稳态。

- 抛物方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

  这种方程往往用于刻画某种耗散演化，比如热传导。长时间演化后这种演化往往趋于稳态，这是因为耗散掉了所有的动能。

- 色散（波）方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \text{ or } i\partial_t u - \Delta u = 0.$$

  这种方程往往用于刻画某种振动演化，比如弦振动，水波。长时间演化后这种演化往往不趋于稳态，而是以稳态为中心振动。即使趋于稳态，也是有一些大能量的部分向无穷远处运动。

- 传输方程
$$\partial_t u + \partial_x u = 0.$$
这种方程往往用于刻画某种传输演化，比如一维液体流动。整个系统沿一定速度一直在运动，永不停止。

注意这里这些方程右边都是0，我们叫它齐次（线性）方程。如果不是0，则为非齐次方程。比如非齐次椭圆方程（泊松方程）
$$\Delta u = F.$$
这里 F 的出现往往代表了外力，或者源头的出现。这些方程往往出现于连续介质的物理、化学与工程中。如果介质是匀质的，我们便可以得到上述常系数的（线性）微分方程。如果不是匀质的，那么我们就会遇到变系数的（线性）微分方程。有时候，这些系数或者非齐次项（外力）还与解本身有关，我们就得到非线性方程。

2.怎么解微分方程（存在性理论）？

对于线性方程，证明一个方程存在解的存在性理论已经相当完善。其主要工具是泛函分析与积分变换。对于常系数方程或者给定特殊系数的方程，利用微分方程1课程中的理论，我们常常可以直接利用傅里叶变换将解显式解出。对于变系数的方程，傅里叶变换的方法不再完全有效，此时一些泛函分析的工具就必不可少了。对于变系数线性方程来说，我们主要有以下几种办法来寻找一个解，这些办法绝大部分的情况下只能找到某种意义下的弱解。至于要找到光滑解，我们还需要考虑正则性理论，就是我们下一个要考虑的问题。

- 利用Hahn-Banach定理
- 利用变分法，凸性与紧性
- 利用扰动方法或者迭代方法（压缩映像原理、Nash-Moser迭代）
- 利用算子半群，泛函演算。
- 利用傅里叶变换的变种Galerkin逼近
- 利用紧性（能量法、Boostrap）：核心是能量估计

为什么考虑抽象存在性理论

3. 唯一性与正则性

4. 局部性质与整体性质

5. 渐近(Asymptotic)行为

二阶椭圆方程

预修课程：微分方程1、实分析（主要为L^p不等式、积分收敛定理）、泛函分析（主要为压缩映射定理、Riesz表示定理、弱收敛、紧算子及其谱理论）

教材：

[1] D. Gilbarg, N. Trudinger: Elliptic PDEs of 2nd order.

[2] 韩青、林芳华：Elliptic PDEs.

参考书：

[3] 陈亚浙、吴兰成：二阶椭圆型方程与椭圆型方程组；

学习建议：暂缺。主要内容即为椭圆方程的Schauder估计、弱解与正则性估计 (H^2与$W^{2,p}$)、经典解的极大值原理、De Giorgi-Moser迭代、Krylov-Safanov型估计。G-T是字典类书籍，要不要花功夫去死磕取决于你的方向，以及你导师的意见。若只是查结论的话，[3]其实基本够用了。[1]的篇幅看似巨大，实则行文跳跃，初学者不易看懂。要记住，**切勿无脑埋头死磕[1]这种书！很多时候并不值得。**

几何波方程入门（没有这门课）

建议读物：

[1] Sergei Alinhac: Hyperbolic Partial Differential Equations;

[2] Sergei Alinhac: Geometric Analysis of Hyperbolic PDE;

预备知识：

[1] 微分方程1、实分析；

[2] 需要[1]、微分方程2有关波方程的部分、流形与黎曼几何（主要涉及向量场和曲率的计算）。

学习建议：暂缺。想学习相对论PDE或者几何波方程的同学可以看一下，建议先看[1]。[2]的行文略微跳跃，并且默认你熟悉[1]中不少波方程的结论。笔者也正在学习这些书。

4.1.6 微分动力系统（暂缺）

暂缺。

科大有时会开设“生物数学导论”或者“微分方程与动力系统”(MA05108)等类似课程。

4.1.7 更多关于偏微分方程的内容

偏微分方程涵盖的范围实在太大太大，以至于从事不同类型方程研究的人们彼此可以完全不知道对方在做什么/用什么技术。PDE这个方向经常因为大量无意义灌水人的存在而风评被害，但这并不妨碍PDE这个大熔炉的经久不衰。很多来自物理（例如流体运动、动理学方程、量子力学、广义相对论的数学理论等等）或是几何（例如极小曲面）的模型都需要利用偏微分方程刻画，那么偏微分方程的分析成为研究的重点也是理所当然。

中国在偏微分方程的发展相对其他方向更早一步，PDE界也的确有很多做得好的中国学者：例如第一个破解流体自由边界问题适定性的就是华人数学家邬似珏教授（解决了自由边界不可压无旋水波的适定性问题），几何分析就更多了。青年的PDE研究人员中也有做得好的中国学者，当然他们大多处于博士后阶段或是刚取得教职，以后定会大放异彩。

科大的PDE建设以几何分析、椭圆方程为主，方向并不全，其余的还有做最优传输、色散方程、抛物方程、微分动力系统的老师。流体方程、相对论方程等其它重点方向科大暂时没有，但国内也有一些做得比较好的老师。**科大每学期都会不定期开设PDE专题选讲的课程，学过微分方程2的同学完全可以去听一听，以拓展视野。要知道我们的微分方程2这门课只是讲了一些基本语言，其内容都属于PDE研究中的“基本常识”，因此，更重要的是去体会并理解我们所学的知识是如何被运用的。**例如，笔者在科大就读期间曾经修读过流体方程选讲与色散(Schrödinger)方程选讲，现在也从事偏微分方程的学习与研究，从中也了解到一些近年人们关注的问题。下面笔者列举一些自己了解的方程及其入门基础知识的参考资料：

流体方程：

了解流体PDE的基本Setting，可以看 Andrew Majda, Andrea Bertozzi: Vorticity and Incompressible Flow，或者 Vlad Vicol, Jacob Bedrossian在2015年UC Berkeley暑校的讲义。

1. 流体方程是什么？

Euler方程（无粘性流体）、Naiver-Stokes方程（有粘性流体）刻画了流体本身的运动：

$$\rho(\partial_t + u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = F, \nu \geq 0.$$

其中u是流体的速度场，ν是粘性系数，ρ是流体的密度，p是流体的压力，F是外力，$D_t = \partial_t + u\cdot\nabla$称作“物质导数”。同时，流体满足质量守恒：

$$D_t\rho + \rho\mathrm{div}\,(u) = 0.$$

当ρ是常数时，第二个方程变成$\mathrm{div}\,u = 0$，此时称液体为“不可压流体”，否则称作可压流体。

欧拉和Navier-Stokes方程是$F = 0$的情况，也是刻画各类流体的核心。当F不同时，所表述的流体类型也不同，也就是相当于耦合了不同的物理方程。例如，$F = ge_3$时则是代表水波方程（这一项相当于重力）, $F = \nabla\phi$(ϕ为Δ-基本解)则是带自重力位势的流体，可以描述大质量星体内部的流体运动。此外，还有刻画等离子体(磁流体)、液

晶、弹性力学、相对论流体的情况，它们是欧拉/NS方程分别与(pre-)Maxwell方程组、波映射、弹性方程、爱因斯坦方程耦合所得

边界条件与状态方程的不同对应着不同的流体（是指有无表面张力、液体/气体/其它）。若边界上$\rho = 0$，则刻画的是气体的运动。边界上流体的压力满足$p = \sigma\mathcal{H}$, 称作表面张力方程。这里$\sigma \geq 0$是表面张力系数，$\mathcal{H}$是流体边界的平均曲率。

了解流体PDE的基本Setting，可以看 Andrew Majda, Andrea Bertozzi: Vorticity and Incompressible Flow，或者 Vlad Vicol, Jacob Bedrossian在2015年UC Berkeley暑校的讲义。

2. 流体PDE关注一些什么问题：

科大没有专门做流体PDE的老师，但国内外还是有很多学者从事这方面的工作，其关注问题的类型也很多。例如自由边界问题适定性、小初值整体解的存在性与正则性、无粘阻尼与其它的稳定性问题、奇异性与激波的形成机制、湍流问题、边界层方程、 Beale-Kato-majda爆破准则、定态解等等。下面笔者对这些方面就自己的了解稍作介绍：

（1） Navier-Stokes方程整体正则性问题

这是2016年秋季科大开设的流体方程选讲课的话题之一。欧拉方程的(Hölder)正则性问题则是所谓 Onsager 猜想，这方面我不了解就不多说了。

N-S方程是抛物方程，可以期待它的整体正则性, Terence Tao也在这方面有工作。具体难处，可以阅读他的 博客。$\mathbb{R}^3$上的N-S方程在$\dot{H}^{1/2}$上的小初值整体(温和)解很容易得到，但$\dot{H}^{1/2}$并不是惟一的临界空间：

$$\dot{H}^{1/2} \subset L^3 \subset L^{3,\infty} \subset BMO^{-1} \subset B^{-1}_{\infty,\infty}.$$

换成后面更大的函数空间，3D N-S方程的存在性问题就复杂得多。强/弱L^3整体正则性的有关结果分别在2003、2015年才被人证明出来。可见，这仍是一个很困难的问题。

（2）Beale-Kato-Majda爆破准则

BKM爆破准则是研究欧拉方程长时间行为非常著名也是非常重要的一个结果，大概意思是说，不可压欧拉方程的解的某些高阶Sobolev范数（$\geq \frac{n}{2} + 1$阶）发生有限时间爆破，那么这当且仅当是流体速度场的旋度发生爆破！这和人们的直观印象也较为符和——平缓的洋面上演化出巨大的漩涡。

这个结论被人推广到一些其它的不可压流体（例如等离子体），也有类似结果。但目前自由边界的BKM 爆破准则尚是开放问题，人们猜测的结论是旋度和边界的曲率发生爆破，目前正在被研究中。

（3）Landau阻尼问题

这个问题在过去的几年有较多的进展，但多限于二维的区域$\mathbb{T} \times \mathbb{R}$或者$\mathbb{T} \times [0, 1]$，这也是16秋季流体选讲课的话题之一。具体问题是：在这个“管道”内，给定欧拉方程的一个特解（一般是以单调剪切流为主 monotone shear flow），给予一个扰动，问扰动后是否具有长时间的稳定性？其临界正则性是多少？

如下文章算是这个问题具有代表性的起始作品，后面各种各样的结果，其方法或多或少都源自它们。

[1] J. Bedrossian, N. Masmoudi: Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations, IHES, 2015.

[2] Lin Zhiwu, Zeng Chongchun: Inviscid Dynamical Structures Near Couette Flow, ARMA, 2011.

[3] Christian Zillinger: Linear inviscid damping for monotone shear flows in a finite periodic channel, boundary effects, blow-up and critical Sobolev regularity, ARMA, 2015.

其想法都是构造toy model用ODE去逼近PDE, 再进行一些能量估计。

物理上提出的这类Landau阻尼的问题里面，$\mathbb{R} \times [0, 1]$ 这种无限长管道的稳定性问题迄今为止毫无进展。究其原因，是$\mathbb{T}$的频率空间在除掉0频率（坐标变换要求）之后至少是1，但$\mathbb{R}$上显然做不到。对于其它类型的流体（等离子体，这也是最原始的问题），目前也几乎没有结果。此外，目前大多数的结论都集中在二维，3D情况目前似乎只有NS方程有结果。因此，这仍然是一个等待人们开辟的领域。

（4）湍流问题

目前人们倾向于用$\mathbb{T}^d$上的 Naiver-Stokes方程来刻画湍流。如果学过概率论、随机过程(研)和微分方程2话，可以看这本书： S. Kuksin, A. Shirikyan: Mathematics of 2D Turbulence.

此书主要讨论2D随机NS的基本动力学（吸引子）和概率上的性质（大数定律等），2012年以前的研究进展基本被这本书介绍完毕。书的最后一章提到了3D湍流问题的困难：3D湍流不同的“层”（你可以把它看作一个一个二维的饼叠起来，像千层饼那样）之间相互干扰且难以控制，当时的结果很多都是$\mathbb{T}^2 \times [0,\epsilon]$这种扁平区域上用平面湍流逼近而得。至今3D的情况仍然没有取得突破进展。

（5）自由边界问题：这是笔者自己的研究方向，因此可以讲得稍微详细一些。

众所周知，现实中流体的运动会导致边界也随时间变化，我们也需要解出这个区域。那么，最直接的问题就是：自由边界问题的适定性如何？在此之前，我们需要引入一个非常重要的 Taylor sign条件（无表面张力情况下），即初始时刻在自由边界面上，总压力的法向导数为负 , 也就是$\partial P/\partial N \le -c_0 < 0$。这个条件相当于防止液体“脱出整个流体区域”。已有反例表明这个条件的缺失会导致问题谬定(illposed)。

流体的自由边界问题（主要指欧拉方程）大约从1997年开始有重大突破。主要的经典结果有：

- Wu Sijue（邬似珏）于1997、1999、2007、2009年对不可压无旋水波的适定性问题给出了解答。
- Hans Lindblad 于1998（与Christodoulou）、2004、2005年依次证明了不可压欧拉方程自由边界问题的先验估计（Q-能量法）、局部存在性（Nash-Moser迭代）、可压方程局部存在性。2016、2018年与其学生共同证明了可压方程的一些先验估计、不可压极限和局部存在性。
- Daniel Coutand, Steve Shkoller于2005年利用切向光滑化的方法避开Nash-Moser迭代证明了（有/无表面张力）不可压欧拉方程的局部适定性问题。而后还有一些可压气态方程的局部存在性的结果。

自由边界问题的困难主要在于：撇开固定区域上的困难，人们还需要控制流体边界的正则性。后面给出的参考文献[1]中表明，边界的第二基本形式的正则性成为了能量估计中的最高阶项！实际上这也是可以预料到的，因为我们现实中也能看见一些形如“浪尖”、“水花”这样的“奇异性”出现在水面上。一般而言，自由边界问题要求边界的正则性至少在C^2以上，低于该正则性会出现其它行为。

下面说一说可压与不可压流体的一些区别。

- 不可压流体：“不可压”这个条件看似平凡，但实际上消除了很多困难。例如以下两点都是技术上比较关键的区别：
  - 由于密度不再变化，则可以对欧拉方程求散度导出流体压力的椭圆方程，从而提高正则性。对可压流体而言，压力p满足的是一个波动方程，无法像椭圆方程一样提高正则性；
  - 不可压欧拉方程满足初值无旋度则永远无旋度，这一点可压方程无法做到。
- 可压流体：
  - 如上所述的波方程正则性较椭圆方程更差，因此只能寄希望于波方程右边全是低阶项才有希望得到控制。
  - 多特征速度问题：一些其它的理想可压流体（无耗散）目前几乎是一片空白。究其原因，是因为这些物理方程里面引入的新物理量与流体的速度与压力波耦合严重，导致上面提到的波方程面有另一物理量的更高阶项而无法控制。此外二者的旋度也无法同时产生控制。从波方程的角度来说，这是产生了“（独立的）双（多）特征速度”。即使是在$\mathbb{R}^3$上的固定区域，目前也没有人能做出任何实质性的进展。

若是对自由边界问题感兴趣，可以阅读下面两篇文章，从比较几何的角度体会一下什么叫“边界的估计成为了最高阶项”。

[1] D. Christodoulou, H. Lindblad: On the Motion of the Free Surface of a Liquid, CPAM, 2000;

[2] H. Lindblad, C. Luo: A priori estimates for the compressible Euler equations for a liquid with free surface boundary and the incompressible limit, CPAM, 2018.

而上面提到的切向光滑化方法，则可以参照下面这篇文章

[3] D. Coutand, S. Shkoller: A Simple Proof of Well-posedness of the Free-Surface Incompressible Euler Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, 2010.

（6）奇异性问题：

上面已经提到自由边界问题往往需要边界正则性达到C^2，而今年(2019)已有人证明，$C^{1,\alpha}$正则性的解会在有限时间内演化出"奇异性"。这方面具体工作需要参考Cordoba, Elgindi等人的文献。

（7）激波问题：

在（5）中我们已经提到了可压流体由于密度/压力的变化会产生一个额外的波。实际上可压欧拉方程已经被人证明长时间行为会产生"激波"。这方面的问题往往会归结于波动方程的激波问题。具体可以参考Jared Speck等人关于可压欧拉方程的工作。

（8）其它很多问题：例如边界层问题、定态解附近的稳定性、涡片的存在性等等。

色散方程：

待续

相对论方程：

1. 爱因斯坦方程：有一部分人是用所谓的"Null geometry"在做爱因斯坦方程的问题，需要另学这一套。其关注的问题包括但不限于：特解(Minkowski时空、Kerr解等等)附近的整体稳定性、黑洞的形成等等。这些与波动方程在特解（例如Kerr metric, Minkowski时空）附近扰动后的整体解存在性、稳定性、或者奇异性形成有关。具体可以参考Jonathan Luk, Jared Speck, Oh Sungh-Jin等人的研究。笔者不是很了解就不瞎说了。但是!!！要学习这个方向一定要有人带着学，千万千万**不要自己死磕** Christodoulou-Klainerman 这种巨著，尽管它可能是必过的一道坎。

2. Klein-Gordon方程：同时具有波方程与KdV方程的特性，其散射和衰减性的估计目前仍处于研究当中。

其它各种方程：例如极小曲面方程、调和映射、蒙日-安培方程、抛物方程（热方程、生物数学中的方程等等）、动理学方程（这个法国人做得很多）、最优输运、双曲守恒律等等。

上面提到了偏微分方程往往来自几何或者物理。无论做什么类型的偏微分方程的问题，这几个因素都是需要慎重考虑的：你做的这个问题是否在几何或者物理上被人关心？你加的条件是否是合理的？是否是有物理/几何意义的？瞎编一堆无意义的条件，即使做出来了也只是你的自圆其说，能否得到承认可想而知。

最后，对PDE有兴趣的科大同学可以联系我们：

- 章俊彦：13级数学科学学院，现就读于约翰·霍普金斯大学，邮箱: zhang.junyan@jhu.edu
- 马骁：14级少院、华罗庚班，现就读于普林斯顿大学，邮箱: xiaom@math.princeton.edu

我们也会根据我们在PDE的学习与研究方面的推进来不断更新这方面的内容。

4.2 几何与拓扑

4.2.1 黎曼几何

预备知识：微分流形（主要是局部坐标和张量的计算）、拓扑学。

教材与参考书：

[1] 刘世平教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teaching.html;

[2] 王作勤教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/index.html;

[3] Do Carmo: Riemannian Geometry;

[4] Peter Petersen: Riemannian Geometry, 3rd edition, GTM 171, Springer;

[5] 伍鸿熙：黎曼几何初步;;

[6] Milnor: Morse Theory（莫尔斯理论）;

[7] Frank W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (微分流形与李群基础), GTM 94.

关于参考书的选择：[1], [2]二位老师的讲义都非常值得推荐，要注意[1]在黎曼曲率张量上的定义与其它书有所不同。[3]与科大黎曼几何课程内容较为接近，正文和习题都非常经典。[4]内容齐全、丰富，适合作为工具书参考。[5]对于几何概念的解释非常清楚，推荐阅读。

学习建议：

黎曼几何的研究对象是黎曼流形，这是最基本的几何对象之一，因为通过单位分解我们可以得知任何流形上都存在一个黎曼度量。

这门课通常分成两部分，第一部分主要涉及到的是**曲率张量的计算和测地线的衍生工具**（指数映射，Jacobi场，共轭点、割点和割迹、变分公式与指标形式等）；第二部分主要可以说是前面**所学工具的应用**，给出了很多非常漂亮的定理：诸如曲率控制拓扑的结果，一系列比较定理和一些关于Bochner技巧的专题。

第一部分：关于曲率计算，我建议大家可以特别学习一下移动标架法，尤其是在可以进行逐点计算的时候，可以用测地标架进行计算。而关于测地线这部分，对于测地线我们在几何上理解为能量泛函变分的临界点，而由能量泛函通过第一第二变分公式可以得到我们研究黎曼几何的重要工具比如说指标形式、Jacobi场等等概念。特别地，能量泛函这个概念可以推广到去考虑两个黎曼流形之间$f: M \to N$的能量泛函$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |df|^2\, dVol$的临界点，这就是调和映照。这个概念除了包括了测地线还包括了现代研究的热门领域之一的极小曲面，有兴趣的同学可以继续学习这方面的内容。在这里我再次强烈推荐一下Milnor的“Morse Theory”，可以对上述观点有个更清晰的认识。

第二部分是本课程中非常精彩和优美的一部分，可以看到之前我们学过的工具如何用来解决几何问题。曲率与拓扑的关系一向是现代几何的核心问题。曲率是黎曼几何中是反应局部几何最重要的不变量，拓扑性质反应流形的整体性质。曲率和拓扑的关系将会贯穿整个黎曼几何和复几何的学习和研究当中，这些定理不但结论重要而且证明方法都是非常值得学习的。这里其实大家可以看到正截面曲率(Synge定理)和正Ricci曲率(Bonnet-Myer定理)都会对拓扑产生很强的限制，非正（负）截面曲率也有很多漂亮的结果比如说(Cartan-Hadamard定理和Preissman定理)，但是负Ricci曲率对拓扑是没有限制的（见 Lohkamp, Joachim (1994), “Metrics of negative Ricci curvature”, Annals of Mathematics）。某种意义上正曲率对拓扑限制更强，而负曲率下的拓扑更加“自由”，这一理念广泛存在于微分几何的研究当中。

此后介绍的一系列比较定理，其实本质都是在比较指标形式。这里使用的搬运向量场的技术思路巧妙，两位老师的讲义 [1], [2]和参考书[5]都有很清晰的论证。这里特别提及体积比较定理(Gromov-Bishop)，因为这个定理不仅仅是比较体积而是比较体积的增长速度，这一点可以引出很多应用，比如说以极为初等的方式证明Cheng (郑绍远) 的最大直径定理(Ricci曲率有严格正下界(n-1)k的完备黎曼流形M的最大直径为$\pi/\sqrt{k}$，那么M等距同构于半径为$1/\sqrt{k}$的欧式球面)。此外，在[2]的第24节最后，会涉及体积比较定理在几何群论中的初步应用。

若还有时间则会涉及一些专题，比如说黎曼流形上的Hodge理论，Bochner技巧及其应用(估计第一特征值)，图上的几何分析。

Hodge理论的内容是说k阶调和形式构成的群同构于k阶de rham上同调群，也就是说$\Delta\omega = 0$的解空间完全取决于紧流形的拓扑结构，事实上这一结果可以推广到一般的椭圆复形上，这一话题再深入下去就会走到著名的指标定理。关于黎曼流形上Hodge定理的完整证明可以参考伍鸿熙的《黎曼几何选讲》第一章或者是[7]第五章。

而Bochner技巧则是一种建立椭圆方程和Ricci曲率关系的理论。比如说我们可以有以下形式的Bochner formula:

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = \langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle + |\nabla^2 u|^2 + Ric(\nabla u, \nabla u),$$

这样不难得到关于Laplace算子特征值的估计。

对于Killing field（可以看作等距同构群的李代数的元素），一阶微分形式都有类似的Bochner formula。如果我们应用Bochner formula在一阶微分形式上,结合Hodge Theory我们得到Bochner消灭定理：对于紧黎曼流形$Ric \geq 0$且在一点处为正，那么$H^1(M, R) = 0$. 这可以视作著名的Kodaira消灭定理的黎曼几何版本。

而应用Bochner formula在Killing field上，对于Ric¡0的紧黎曼流形，我们可以得到其没有非平凡Killing field，进而其等距同构群是有限群。另一方面利用Bochner formula可以定义非光滑几何空间（例如图）上的曲率，这被称之为Bakry-Emery曲率，相应的可以建立图上的比较定理等。这一部分在刘老师17年黎曼几何讲义最后有详细介绍。Hodge理论和Bochner技巧在复几何中有更为重要的意义，如果有兴趣继续学习复几何那么这部分内容很值得以看。

最后我们来提及一些在这门课并不是重点但是实际上很值得了解的内容(推荐大家做一下王老师16年黎曼几何[2]的作业题，有很多非常精彩的内容是放在了习题中):

子流形几何：我在黎曼几何前置中几乎没有提到本科的微分几何，因为本科的微分几何除了内蕴几何以外还要考虑如何嵌入到欧氏空间，而黎曼几何这门课几乎是内蕴的。对于一般的子流形几何，在[3]书中有初步的介绍。

李群和齐性空间：[2]习题中有相关介绍，特别地在这里我还是推荐[6]最后一章。

等距同构群与Killing Field:Petersen的黎曼几何有所介绍。

Gauss-Bonnet-Chern公式：我推荐大家直接去阅读陈先生的原始论文"A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds", 会学到很多东西。

拓展与延伸阅读：

1. Milnor: Morse Theory.

强烈推荐阅读，Morse理论在现代几何拓扑中占有非常重要的地位，Milnor这本书是了解这一理论最好的入门作(应该没有之一)。这里看到黎曼几何中的方法如何应用于拓扑之中，特别是最后对于Bott周期定理的证明，令人震撼。特别地，黎曼几何课程中关于向量场的指标形式这部分强烈建议参考这本书。

2. Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov:" A course in Metric Geometry".

度量几何学会讨论不带有光滑结构的度量空间上的几何，这样可以讨论一族黎曼流形收敛的问题，度量几何学也是现代几何热门方向之一，与几何流等领域都有着密切的关系。

3. 伍鸿熙：《黎曼几何选讲》

这是一本专题选讲性质的书，涉及到黎曼流形上的Hodge分解，Holonomy Group等专题。

4. 伍鸿熙: "The Bochner Technique in Differential Geometry"

Bochner技巧专题的书，Bochner技巧是在几何分析中十分常见的技巧，本书后面还会涉及到调和映照这一重要概念。

5. Simon Brendle: "Ricci flow and the sphere theorem".

6. 丘成桐、孙理察：《微分几何讲义》

这本书建议作为讨论班材料阅读，内容上错误很多而且难度很大，最好有老师带着读。

4.2.2 代数拓扑

预备知识：点集拓扑、近世代数群论部分（除去Sylow定理）、代数学模论部分（尤其是PID上有限生成模的结构定理）

建议教材：

[1] Allen Hatcher: Algebraic Topology.

参考书：

[2] Peter May : A Concise Course in Algebraic Topology;

[3] Munkres : Elements of Algebraic Topology;

[4] 姜伯驹：同调论，北京大学出版社。

学习建议：

笔者认为，代数拓扑是学习几何必不可少的一环。这个学科源远流长，上个世纪发展极为迅速，得到了很多非常深刻的结果。

最早的代数拓扑可以说是庞加莱（Henri Poincaré）一手创建的。他在1895年的论文“Analysis Situs”中定义了基本群和同调群。当然，关于同调，其实早在Riemann时期就已经定义了所谓的“多联通”，Betti在1871年就证明了所谓“同调数”的不变性。庞加莱把他们的思想推广，写成了如今代数拓扑最基本的对象。上世纪20年代左右，诺特开始用链复形来研究同调群，同调代数就此诞生。

这篇文章旨在给科大的学生介绍代数拓扑的学习方法和后续的一些领域。

关于教材，我们这里只点评Hatcher的代数拓扑。标准的经典代数拓扑（纯粹从拓扑空间的观点出发），前置只需要点集拓扑和近世代数。科大代数拓扑课程的内容一般是这书的第0-3章，但是这本书每一章的附录都值得阅读，非常有意思。第一章是基本群与覆叠空间，包含了这本书可能需要的最难的点集拓扑（笑）。第二章是奇异同调、胞腔同调，还包括标准的映射度内容，以及总结了同调论的公理。不过那个公理是建立在CW复形上的，标准公理其实不是那个，这个需要注意。第三章是上同调，主要讲上同调环和庞加莱对偶，以及Künneth公式（证明使用了标准的公理验证模式）。第三章的附录很有意思，建议阅读。第四章是整本书的高潮和核心，可惜课程时间不足，科大的代数拓扑课程一般不讲这部分，建议在学完科大的代数拓扑之后自行阅读（如果有兴趣）。

进阶一些，笔者在此提供如下参考资料：

1、同伦论：参考资料：Hatcher第四章。

主要内容是同伦群的计算和应用，以及CW逼近等一些基本的同伦手段，奇异同调群其实是 $\langle X, K(G,n)\rangle$，所以同调论实际上可以是同伦论的分支。这一章将前三章做了统一，非常有意思。

2、微分观点：参考资料：GTM82 Differential Forms in Algebraic Topology. 前置：微分流形、点集拓扑。

其实这不算进阶，代数拓扑完全可以一上来就看这本书，只不过科大不这么教。同调群不止有奇异同调群，还有微分流形的de Rham上同调群以及层的Cech 上同调群。这本书将大多数的代数拓扑抽象的构造，全部翻译成了微分流形的观点，写书水平极高，强烈建议认真读。

3、配边论：暂缺

4、拓扑K理论：参考书为Atiyah : K-Theory. 前置知识：向量丛，Fredholm算子和椭圆微分算子的基本知识（见泛函分析和Evans PDE第六章）。

关于Bott Periodicity的证明，建议阅读Atiyah的论文“Bott Periodicity and the Index of Elliptic Operators”. 读完K理论以后，如果还懂拟微分算子，就可以看Atiyah-Bott指标定理的证明了，论文我相信大多数人都找得到。

5、示性类：参考书是Milnor : Characteristic Classes.

示性类也有两种看法，一种是拓扑的，看成为Grassmanian流形上universal bundle的拉回定义的，这些看法在Milnor这本书上阐述的很好，实际上示性类也可以看成是某种东西的障碍。还有一种是微分的观点，即所谓的Chern-Weil理论，用联络的曲率来描述，这一部分的参考书暂缺。

6、Morse理论：参考书是Milnor : Morse Theory. （有中文译本）

这个理论讲的是流形上的函数如何决定这个流形的拓扑。用Morse理论可以给出流形的CW复形、甚至同调群，也可以用来证明Bott periodicity，用处很广。这个理论继续往下也有很多分支，最基本的是Morse Homology，用同调的语言重写，这部分内容也和动力系统有很大关系。另一个是他的无穷维推广，包括Floer Homology等其他内容。

7、同伦范畴论：暂缺。Emily Riehl近年写过一本这方面的书 http://www.math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy.pdf.

4.2.3 黎曼曲面

预备知识：单复变函数、拓扑学、微分流形（非必需但是建议）

教材与参考书：

[1] 梅加强：黎曼曲面导引；

[2] Miranda: Riemann Surfaces and Algebraic Curves（黎曼曲面与代数曲线）；

[3] S. K. Donaldson: Riemann Surfaces;

[4] Jürgen Jost: Compact Riemann Surfaces（紧黎曼曲面）；

[5] 伍鸿熙、吕以辇、陈志华：紧黎曼曲面引论；

[6] Griffith, Harris: Principal of Algebraic Geometry（代数几何原理）；

[7] Dror Varolin: Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry, GSM 125, AMS;

[8] Wilhelm Schlag: A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces, GSM 154, AMS.

[1]比较通俗易懂（除了单值化定理的证明），初学可以用这一本，也包含了层论的基础知识，以及一些复几何定理。[2]是偏向代数几何的，介绍了很多层论，在代数有关的结果上写的相当不错，可惜在几何上有些略显不足，gap略多。[3]这本书非常的几何，且技术相对比较先进，可以看完梅加强的[1]以后看。给出了Hodge分解和单值化定理非常漂亮的证明，还包含了一些Moduli space和Deformation theory的内容。[4]则是标准的紧黎曼面内容，包含了Teichmuller空间的介绍。[7], [8]适合刚学完单复变向着黎曼曲面过渡，也可以考虑，但[8]的作者本身是做PDE为主的，而不是几何。

学习建议：

黎曼曲面是数学的十字路口，无数概念在这个背景下交汇。笔者没有能力写出这个学科后续所有发展，只提在本科学习时的几点。

黎曼曲面的最主要的几个定理，一个是所谓Uniformization Theorem（单连通黎曼面全纯同胚于$\mathbb{C}, \mathbb{H}, P^1$之一），这个定理给出了复变函数中黎曼映照定理的推广，并且给出了Picard小定理一个非常漂亮的几何证明；当然，这个定理的证明本身比较分析。第二个定理就是所谓的Riemann-Roch定理，这个定理是代数曲线定理的开端。当然，这个定理的一个重要结论就是紧黎曼面范畴、一元代数函数域范畴和一维射影曲线范畴是等价的，这给出了黎曼面三种不同的理解方式。第三个定理是著名的Abel-Jacobi定理，说椭圆曲线可以被上同调所还原，且给出了椭圆曲线的群结构。当然这个定理不止这些用处。可以说，黎曼曲面的有关结果充满了数学的美感。

第一次学，可以跳过Hodge定理和Uniformization theorem的证明，关注于Riemann-Roch定理的应用。注意，要关注代数曲线和黎曼曲面之间的关系，感受几何是如何应用到代数上的。层论是现代数学不可忽视的重要组成部分和有力工具，建议认真学习，这样在之后学习相应结论时不会感到过分难学，例如复几何、代数几何。

这个理论后续发展太多，无法一一描述。很多时候，黎曼面是代数几何和复几何最简单的情形，把这个理论搞清楚对进一步学习还是非常必要的。

4.2.4 复几何

预备知识：复分析（单复变函数）、微分方程2（椭圆方程与抛物方程的弱解性质与极大值原理，Evans第6章和7.1节）、黎曼几何、少量代数拓扑。若关心层论部分的细节，则需要一点同调代数与交换代数（关于正则局部环、depth、同调维数等等）。

教材与参考书：

[1] 萧荫堂：多复变函数论，高等教育出版社；

[2] Griffith, Harris: Principal of Algebraic Geometry（代数几何原理）.

[3] Shoshichi Kobayashi(小林昭七): Differential Geometry of Complex Vector Bundles（复向量丛的微分几何）。

学习建议：

1、关于科大的复几何课程：

张希老师的这门复几何是科大里你可以学到的最近代的几何课。其他几何课，诸如黎曼几何，代数拓扑，实际上已经是上世纪三四十年代的结果。而张希老师的这门复几何，分三个部分，第一部分是基础知识，包括了多复变、Kähler流形、全纯向量丛的联络理论、Hodge理论、一点点的Chern-Weil理论以及层论，内容上可以说很丰富了。第二部分是1982年Uhlenbeck-Yau做的工作，即紧Kahler流形上稳定全纯丛必有Hermitian-Einstein度量，当然证明是选用的1988年Simpson的一个简化证明。第三部分是Yau的成名作，Calabi-Yau定理，即紧Kähler流形上，任何第一Chern类的代表元，都可选取一个Kähler结构使得其Ricci form正好是那个代表元。这个工作是上世纪七十年代的结果。

这门课的优点在于，让大家能够接触到上世纪七八十年代的优秀工作。张希老师上课经常会分享一些自己对数学以及数学界的看法，比如说："年轻人应该关注一些经典而又有活力的领域，比如子流形几何。"上这门课，如果能认认真真学下来，收获是非常大的。希望科大能有更多这种近现代的数学课、讨论班。但是这门课缺点也是十分明显的。一个学期课时是固定的，而张希老师讲这么多内容，就注定了一部分内容不可能细讲。例如说Hodge定理的证明，或者Kodaira嵌入定理的证明，张希老师都没怎么细讲，前面的讲课速度也是快的吓人，选这门课在中期必

须自学一部分内容，需要预先做好心理准备。还有就是张希老师上课经常忘记下课，体验十分不好。如果开一下小差，你就会发现你完全跟不上他的讲课。本课程是使用张希老师自己的讲义，所以你不能不听课，而且我十分建议认真听课，张希老师对基础部分的讲解还是很好的。

2、学习上需要注意的地方：

先在任何一本书上学完复几何的基础知识（多复变函数的基础、近复结构、Kähler流形、 Hodge理论），这里多复变推荐[1]、近复结构的知识大部分书上都有、Hodge理论可以看[2]。此后，立刻转向[3]的学习。[3]这本书是笔者学过最好的讲复向量丛的书，美中不足的是没有 Kodaira嵌入定理的证明。

关于上面提到的课程后两部分，笔者的建议是**直接读原始论文，不要看任何复写的证明**。原始论文包含的动机会被复写的证明所掩盖，对增强数学水平毫无益处。Calabi-Yau定理的话只需要读那篇论文的前25页即可，对于学过椭圆方程的人来说应该不难。如果学过黎曼面和代数几何，有些部分（除子）会理解起来更加清楚，比如说线丛的deg其实就是其对应除子的deg，ample line bundle实际上就是代数几何里面的ample invertible sheaf，并且在复几何里等价于第一陈类 positive definite。这类联系在Griffith-Harris的[2]里比较多。

总之，如果将来想学几何的话，请务必学一学这门课。

4.2.5 有关拓扑学的补充

现代拓扑学的研究涉猎非常广泛。下面笔者列举一些自己了解的方向，加以说明。

1. X-流形是否具有Y-结构:

微分拓扑里一个核心的问题是拓扑流形是否具有光滑结构，如果有的话有多少个？关于这些Milnor有好几篇介绍性的文章回顾拓扑学怎样从18世纪逐渐发展到现在，这些文章已经被翻译成了中文，收录在《Milnor眼中的数学和数学家》 里，对拓扑感兴趣的话这本书非常，非常，非常值得一读。

相比光滑结构，我自己更关心如果一个光滑流形存在某种结构，这种结构会对流形的拓扑有什么限制。比如，什么样的光滑流形具有全纯结构，即它是一个复流形？ 这个问题回答起来异常困难，所以退而求其次，我们可以问什么样的光滑流形具有近复结构，即切丛是复向量丛? 这个问题没有被完全回答，但比直接研究复结构要容易一些。首先，如果M是近复流形，因为切丛是复向量丛，M必须是偶数维流形。其次，切丛的Pontryagin类可以用陈类表示，这给了Pontryagin类一些限制，同时因为流形的很多拓扑量可以用陈类和Pontryagin类计算，这导致近复流形的拓扑量也有很多限制。比如，

定理： 如果S^{2n}是近复流形，那么$n = 1$或$n = 3$.

证明概要： 假设S^{2n}有近复结构，那么因为S^{2n}的欧拉示性数$e(S^{2n}) = 2$, 所以第n个陈类$c_n(S^{2n}) = e(S^{2n}) = 2$. 但是Bott证明了$S^{2n}$上的任何一个复向量丛$E$都满足$(n-1)!|c_n(E)$，从而有$(n-1)!|2$, 所以$n = 1, 2, 3$。

$n = 1$时，S^2是复流形$\mathbb{CP}^1$，从而确实是近复流形。$n = 3$时，将$S^6 \subset \mathbb{R}^7 \subset \mathbb{O}$看成是八元数$\mathbb{O}$的imaginary part里的单位球面，有一个诱导的近复结构，所以S^6也是近复流形，但S^6是不是复流形仍然是一个公开问题。

$n = 2$时，S^4不是近复流形。这是因为S^4的符号差(signature)是0, 故由Hirzebruch符号差定理$0 = p_1/3 = (c_1^2 - 2c_2)/3 = -2c_2/3 = -4/3$导致矛盾。

事实上，人们发现近复流形的拓扑存在相当多的限制，而且至今为止只有在4维有近复流形不是复流形的例子，所以丘成桐就猜想，可能所有复维数大于等于3的近复流形都是复流形，特别地S^6也是复流形。

陈省身和Atiyah都曾经研究过S^6是不是复流形这个问题，目前我知道的是:

- S^6上标准的近复结构不是真正的复结构；
- Claude LeBrun证明了如果S^6上有复结构，那么这个复结构和球面上的标准度量不相容；
- 陈省身去世前证明了一个比LeBrun稍强一些的复结构与一个二形式不相容结果；
- Deligne证明了如果S^6是复流形，那么S^6上没有非常值亚纯函数；
- S^6上的复结构会有一些非平凡的Doubeault上同调；
- Atiyah曾宣称证否了存在性，但他的证明没有被广泛承认。

如果我们愿意放弃考虑一般的复流形，而只考虑一类特殊的具有“好”度量的复流形–Kahler 流形，那么我所知道的研究Kahler流形拓扑的手段有两个–有理同伦理论 (rational homotopy theory)和Frolicher谱序列 (当然还有Hodge package).

- Deligne, Sullivan, Morgan证明了Kahler流形的同伦群的自由部分(free part)可以被它的de Rham上同调完全确定；
- Kahler流形有一个重要的性质:$\partial\bar{\partial}$-引理。利用Frolicher 谱序列，Angella和Tomassini在2013年证明了$\partial\bar{\partial}$-引理是small deformation invariant。这个结果在之前有一个硬核分析的证明，但他们用了几乎纯代数的手段证明，他们这篇文章发表在 Inventiones mathematicae 上。

听说意大利有一些人在研究Frolicher spectral sequence或类似的东西，试图将对近复结构/复结构的研究代数化，听起来这是非常酷的工作。

我还知道一个和流形几何相关的问题，没有真正去认真了解过，但是可以说一说。我们说一个流形是可定向的，是指它的切丛限制在一维骨架上是平凡的；一个流形是自旋流形(spin manifold)是指它的切丛限制在二维骨架上是平凡的。自旋流形的一个性质是：它的一个拓扑不变量，叫$\hat{A}$-亏格，必须是整数 (听说Singer曾经问Atiyah为什么它是整数，然后他们就一起证明了 Atiyah-Singer指标定理)。Atiyah, Hitchin, Lichnerowicz和 Singer证明了如果紧自旋流形具有数量曲率大于0的度量，则它的$\hat{A}$-genus为0。下面这个猜想和他们的结果有一样的形式，据说和拓扑量子场论有关。

猜想： 如果紧String流形具有Ricci curvature大于0的度量，则它的 Witten-genus为0。

String流形是一类比自旋流形更好的流形，$\hat{A}$在自旋流形上的取值是整数，但Witten-genus要复杂得多，它在 String流形上的取值是”拓扑模形式”，我会在后面讲同伦理论的时候大概解释这是什么。

事实上，人们发现近复流形的拓扑存在相当多的限制，而且至今为止只有在4维有近复流形不是复流形的例子，所以丘成桐就猜想：可能所有复维数大于等于3的近复流形都是复流形，特别地S^6也是复流形。

2. 配边理论（Cobordism Theory）

假设(M, X)是(可定向)光滑流形，$f: X \to M$是一个连续映射，那么f将X的基本类 (fundamental class) push-forward成为M的一个同调类，此时我们称这个同调类可以表示为一个流形。

问题(Steenrod) 是不是所有的同调类$H_*(M)$都可以表示为流形?

Thom因为成功回答了这个问题而获得了菲尔兹奖，他的答案是：既是又不是。

- 如果我们考虑$\mathbb{Z}/2$-系数的同调类，即$H_*(M;\mathbb{Z}/2)$里的元素，那么他们确实都可以表示为(或许不可定向)流形;
- 如果考虑$\mathbb{Z}$系数，那么答案是否定的–存在一个7维流形，它有不能被表示为流形的同调类;
- 但是任何一个整系数同调类的某个奇数倍可以被表示为流形。

为了解决Steenrod问题，作为副产品Thom发展了配边理论(Cobordism theory)，后来配边理论发展成了同伦理论很重要的一部分。我们称两个定向流形M, N是定向配边 (oriented cobordant)的，是指$M \sqcup -N$是某个高一维定向流形的边界，这里$-N$是指N配上相反的定向。Thom发现所有流形，模去定向配边这个等价关系之后构成一个分次环–环中的加法是不交并，乘法是卡氏积，零元是空集，单位元是一个点，次数是流形的维数，这个分次环称作定向配边环(oriented cobordism ring)，记作Ω_*^{SO}。如果忘掉定向的话，可以类似的定义不定向配边环Ω_*^{O}。Thom计算了配边环(这相当于在配边等价下分类了所有流形！！)，

- $\Omega_*^{O} \simeq \mathbb{Z}/2[\hat{x}_1, x_2, \hat{x}_3, \ldots, x_4, x_5, x_6, \hat{x}_7, \ldots]$ 是$\mathbb{Z}/2$上的一个有无穷多个生成元的多项式环，$\deg x_i = i$，$\hat{x}_{2^n-1}$表示去掉次数是2^n-1的生成元；
- $\Omega_*^{SO} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^4, \ldots]$是$\mathbb{Q}$上由所有$\mathbb{CP}^{2n}$生成的多项式环。$\Omega_*^{SO}$另外还有一些2-torsion.

如果考虑具有更多结构的流形和相应保持结构的配边的话，还可以定义复配边环(Complex cobordism ring)Ω_*^{U}，自旋配边环(Spin cobordism ring)Ω_*^{Spin}，辛配边环Ω_*^{Sp}等等。其中，Ω_*^{U}和Ω_*^{Spin}已经被计算出来了，Ω_*^{Sp}的自由部

分也早已经被计算出来了，但是它的torsion部分的计算至今没有完成，困难的原因大概在于四元数是非交换的。还有一种叫标架配边环(framed cobordism)Ω_*^{fr}，它同构于球面的稳定同伦群（下面会提到），也没有被完全计算出来。

配边环的计算显然非常重要，因为这就是在分类流形，而且在几何和拓扑里有很多应用。比如对定向配边环的理解就导致Hirzebruch发现了之前证明S^4不是近复流形用到的signature定理。许多菲尔兹奖得主（当然还有很多其他大数学家）都对各种配边环的计算和应用做出过贡献，这其中包括Serre，Thom，Novikov，Milnor，Quillen等。

3. 同伦理论(Homotopy)

拓扑空间有两种最重要的不变量，同调群和同伦群。同调群相对容易计算但是包含更少的信息，同伦群相对难计算但是包含更多的信息。计算同调群有很多工具–长正合列，剪切引理，万有系数定理，(流形的)庞加莱对偶等等，而且有限复形的同调群至多只有有限多个非零。但是计算同伦群就异常困难，即使是最简单的拓扑空间–n维球面–的同伦群都没有被完全计算出来。

事实 目前在所有$S^n(n \geq 1)$中，我们只知道S^1的全部同伦群。

一般来说要计算一个拓扑空间的全部同伦群是几乎不可能的，除非我们发展出新的工具。但是人们在研究球面同伦群的时候发现，**球面的同伦群会”稳定“下来，意思是$\pi_{n+k}S^k$ 在k充分大的时候会保持不变，所以可以定义球面的第n个“稳定同伦群”为$\pi_n^s = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}S^k$**。Serre证明了球面的稳定同伦群除了$\pi_0^s = \mathbb{Z}$以外都是torsion，比如$\pi_1^s = \mathbb{Z}/2, \pi_2^s = \mathbb{Z}/2$。但是计算球面的稳定同伦群也异常困难。

球面同伦群的计算既对代数拓扑本身非常重要，又对几何非常重要。比如，Milnor在构造了7维怪球之后，和Kervaire一起计算了球面的微分结构的个数，难以置信的是球面微分结构的数目竟然和球面的稳定同伦群有关，这导致球面微分结构的数量也不能被完全计算出来！所以为了计算球面的稳定同伦群，人们发展了很多种办法–各种各样的谱序列 (spectral sequence)（如果你不知道谱序列是什么，可以把它想象成长正合列的超级复杂加强版，它有无穷多个page，每个page上都有无穷多个链复形，下一页是上一页链复形的(上)同调）。我听说现在还是有很多人致力于计算球面的稳定同伦群。我知道其中一种办法是利用所谓的Adams-Novikov 谱序列，然而Ravanel不得不发展了另一个所谓的chromatic 谱序列仅仅只是去计算 Adams 谱序列的E_2-page！可以想象这计算是多么困难。

Chromatic 谱序列和复配边环有直接的联系，它的构造基于Quillen的一项工作。Quillen在1969年指出复配边环和一个纯代数对象 Lazard ring $\mathbb{L}$-同构。Quillen的这个工作为代数拓扑和理解陈类提供了一个崭新的观点，它启发了包括 chromatic谱序列在内的不计其数的重要工作，而他1969年写的那篇文章仅仅只有六页！

4. 椭圆上同调(Elliptic Cohomology)

Quillen这项工作的另一个结果是导致了椭圆上同调的发现。Ochanine在80年代首先发现了诸如signature，$\hat{A}$-亏格之类的一些不变量和椭圆积分有关，然后Landweber, Stong利用这个观点，再结合Quillen对复配边环的描述定义了一批新的上同调理论–椭圆上同调，这一批上同调理论对应于一批椭圆曲线。再后来代数几何的观点进入了代数拓扑的研究，导致Hopkins，Miller发现了一个”universal”的椭圆上同调理论tmf（对应于椭圆曲线模空间）–这就是我之前提到的“拓扑模形式”。tmf的研究处在代数几何，代数拓扑，微分几何和数论交汇的地方，我不得不感叹能发现这种的数学的人真的太了不起了。

而更神奇的是，后来Witten假装可以在流形的环路空间上应用指标定理，得到了一些流形的不变量，它们竟然是一些模形式！接着(不确定是不是)Witten定义了一个新的不变量，现在被称作Witten genus，取值于tmf。这个不变量既和正Ricci曲率度量有关，又和物理有某种联系，我希望某一天可以了解它有什么物理含义。

关于椭圆上同调/拓扑模形式有一个悬而未决的大问题：**椭圆上同调有什么几何意义？**这个问题还没被很好地回答，这阻碍了人们应用它来解决几何问题。奇异/CW上同调和K理论在几何/拓扑的应用就非常成功，因为他们有清晰的几何图像。Mark Hovey在他的主页上还列举了一些代数拓扑里的重要问题，其中也包括椭圆上同调的一些问题。如果你对偏代数的拓扑感兴趣非常推荐看一看。

5. 其它

拓扑还有很多其他的研究方向，大多数我都知之甚少。但可以再列举一些我喜欢的拓扑相关的问题。

- 能不能将Pontryagin类用局部组合的方式写出来，即”到底什么是Pontryagin类“？我听说这是Jeff Cheeger的dream problem;
- S^4有没有exotic微分结构? (四维光滑庞加莱猜想是否成立?) 我对这个问题一无所知，只知道在4维的时候手术理论失效了。这个问题似乎非常难，即使四维流形有那么多的光滑不变量(Siberg-Witten, Gauge theory等)也没有成功回答这个问题；

- Borel conjecture, Novikov conjecture.

4.3 代数与数论

4.3.1 代数学（模论、交换代数与表示论初步）

教材：欧阳毅：代数学III——代数学进阶。

参考书：

[1] Joseph Rotman: Advanced Modern Algebra (高等近世代数);

[2] Joseph Rotman: An Introduction to Homological Algebra;

[3] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra;

[4] 宋光天：交换代数导引；

[5] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups (有限群的线性表示), GTM 42, Springer;

[6] William Fulton: Representation Theory: A First Course (表示论基本教程), GTM 129, Springer;

[7] J. L. Alperin, Bell: Groups and Representations (群与表示), GTM 162, Springer.

学习建议：

这门课是科大数院给基础数学方向开出的一门作为近世代数的后续的课程，目的是介绍简单的模论、交换代数、群表示论。首先要搞清定位：这门课本质上还是一门科普性的课程。分三个部分介绍一下这门课的内容。教材使用的欧阳毅老师的代数学3。这本书其实还是不错的，这几年其中的typo也逐渐被消灭完了，读起来基本不会有什么障碍。

- 模论。推荐教材: [1]-[2].可能是因为英雄所见略同，教材第一章和Rotman上的模论部分基本上是大同小异。这一章主要是介绍了作为线性空间在环上的推广：模。学习的时候仍然要掌握那些基本的例子：线性空间、阿贝尔群、自由模、$k[T]$-模等等。介绍了基本的代数结构之后，就要学习如何从已有的对象生成新的对象（这是非常重要的），对于模，我们主要有商模、直和、直积、张量积、Hom等。

  和以前在近世代数里的学习不一样，我们在这些构造里引入了Universal Property:泛性质，从而以模范畴作为基本例子，介绍了所谓的"abstract nonsense"——范畴论，初次学习范畴论会比较难受，会觉得这只是一堆没什么用的废话，在这门课里应该多自己想想在具体的某个范畴里，始对象终对象、直和直积、推出拉回、正向极限/逆向极限、伴随函子分别是什么（建议可以去学习一下可表函子和Yoneda引理）。范畴论的威力会随着学习的不断深入而显现出来。

  回到模范畴里，这门课讲述了内射模、投射模、平坦模三种特殊的模以及其的各种判别法，关于它们的重要性，可以在同调代数里学习导出函子等内容。这章的最后介绍了对PID上的模的刻画，以及类似有限生成阿贝尔群结构定理的PID上有限生成模结构定理，注意这个定理其实可以导出我们熟悉的线性代数中的Jordan标准型。

- 交换代数。推荐教材：[3]-[4]。可能是因为英雄所见略同，教材的第二章和[1]上的交换代数部分也有很大的相似之处。在这门课的这一章的学习中，主要就是了解交换环的性质、局部化、局部性质、Nakayama引理、诺特性等一系列基本的内容。在这一章的后半部分，给出了关于仿射代数几何的一点内容，在这部分我们需要搞清代数集与坐标环的理想之间的对应关系，掌握Zariski拓扑以及可以说是代数几何的大门的定理:Hilbert零点定理(weak与一般情况)。这个定理，给出了根式理想与不可约代数集之间的一一对应(weak:点与极大理想一一对应)，从而把代数对象和几何对象对应了起来，进而交换代数就可以用几何的语言来叙述，这就打开了代数几何的大门。当然，交换代数上这门课只是图个乐，真要仔细学还得去隔壁的交换代数课程。

- 有限群的表示论。推荐教材[5]-[7]。可能是因为英雄所见略同，教材的第三章和[7]的表示论部分也神奇的相似。这一章前几节是关于非交换环的一些性质，没有耐心的可以直接跳过，知道 Wedderburn-Artin定理和Schur引理即可。本章的重点是有限群的不可约$\mathbb{C}$-表示的特征标表，可以看看是怎么推导出诸如行列正交关系、诱导表示里那个互反律（记不得名字了）等性质的。

  至于怎么求特征标表，其实我们也只能算几个低阶的，无非是找线性表示、标准表示(正则表示去掉平凡表示之后的部分)、由子群的表示诱导、由商群的表示诱导，然后剩下的部分就像做数独一样用正交关系搞出来。

个人认为至少得掌握: Abel群、S_4、S_5、A_4、A_5、二面体群的特征标表。学有余力可以去了解一下S_n、A_n、$GL_2(\mathbb{F}_q)$的表示怎么求。

总之，这门课对于代数方向的同学，只能算一门科普课，师傅领进门，剩下的学习就要看自己了。至于这门课有什么用，可以去学下列课程（科大开的课）

后续课程: 交换代数，同调代数，群表示论，代数几何，代数数论。

4.3.2 同调代数

预修课程：线性代数、部分近世代数（群论除去西罗定理、环论）。

建议教材与参考书：

[1] Joseph Rotman: An Introduction to Homological Algebra （同调代数引论）;

[2] Saunders Mac Lane: Categories for the Working Mathematician, 2nd edition, GTM 5;

[3] Sergei I. Gelfand, Yuri I. Manin: Methods of Homological Algebra, 2nd edition;

[4] 章璞：三角范畴与导出范畴;

[5] Weibel: An Introduction to Homological Algebra （同调代数导论）;

[6] Cartan, Eilenberg: Homological Algebra.

学习内容：

由于授课老师的不同，选择材料的不同，这门课的讲授顺序也不同.

1. 范畴论初步：

主要讲初步的范畴论，包括范畴、函子、自然变换的定义，范畴中的一些基本构造：比如积、余积、纤维积、纤维和以及极限、余极限之类的。初学的时候可能会觉得这些构造的定义比较长，一时记不住，或者理解有点困难，但是熟悉之后就会感觉好很多。这之后可能还会讲一点伴随函子，不过最重要的伴随函子的例子在模论中才会首次出现。

范畴是抽象的再抽象，它不仅是一种语言，更是一种考虑问题的模式，学了范畴之后，再学后续内容时，就会考虑所学内容在哪个范畴中考虑。

2. 模论初步：

这部分内容主要是引入模的基本概念。模是线性空间的直接推广，所以在很多情况上，这部分内容感觉会很像线性代数；但模又没有线性空间那样好的性质，需要去认真辨析。

这部分相对来说，定义比较多，做好能整理记忆，并且与之前的线性代数课程对比着学。

在这一部分里，会开始逐步接触到“正合”(exact)的概念，以及Hom函子的左正合以及张量积函子的右正合，以及围绕正合这个概念产生的投射模，内射模，平坦模的概念，这些内容也为导出函子的内容作了铺垫。

前两部分内容如果想迅速入门，除了最开始的推荐参考书外，也可以参考欧阳毅老师的《代数学3》的第一章。

3. Abel范畴：

这部分可以看作是前两部分的结合，它是模范畴的推广，模范畴中所涉及的正合性的概念在这里得到了体现。初学有困难的时候可以参考[2]的相关部分，解释得很清楚，这里就不再介绍这部分的内容了。另外，也可以参考Grothendieck 的著名法语论文 “Sur quelques points d’algère homologique”，也就是在这篇论文中第一次提到 Abel范畴的概念。

4. 同调与上同调：

这是本课程内容的核心，范畴论和模论仅仅是补习线性代数，近世代数中未学习的基本知识。如果只讲同调代数，完全可以前两部分很快带过，从第三部分开始细讲。

这部分主要研究的范畴是复形范畴，最重要的定理是长正合列定理（Long Exact Sequence Theorem），在许多学科中会反复用到，有老师甚至亲切地称它为同调代数基本定理.。这部分内容不多，但学习的时候建议认真对待，长正合列定理是一生只需要证明一次的定理，使用它比证明它更加重要。

5. 导出函子：

学习模范畴中的Hom函子时，我们知道它有左正合性，那么右边“隐藏”的部分去了哪里？答案就在导出函子中。

导出函子的定义在初学时会感觉比较复杂，其实并不，复杂的只是验证定义为什么合理，包括为何与选取XX分解无关，为何$\mathrm{Tor}(A,B)$同构与$\mathrm{Tor}(B,A)$，诸如此类。而它本身不过是取XX分解，删除原对象，作用函子，作同调/上同调。当然理解这个定义确实更要花一番功夫，个人推荐学习导出范畴，从导出范畴的角度理解该定义会更加自然。

Tor与Ext是模范畴中两种最特殊的导出函子，关于它们的具体计算考试或者作业中很容易涉及，但是并不容易，只能课下积累经验，才能在考场上不再害怕.（包括$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模,$\mathbb{C}[x,y]$-模上的一些计算）。关于Ext^1还有模扩张的解释，[1]中也讲了，不再赘述.

6. 谱序列：

这部分内容首先推荐[3]，讲得非常清楚细致。这里就只说一点：比起证明，谱序列更是一种使用工具，会用远远大于会证明。这里面会再一次出现一生只用证明一次的定理，即谱序列的构造。从给定降滤链的链复形的谱序列的构造可以直接得到一般双链复形的两种谱序列构造，它链接了行、列、全复形这几种同调.

对于同调代数课程本身，最重要的就是Grothendieck的谱序列构造，它是研究复合函子的导出函子的关键技术工具.

延伸与拓展内容：

1. 代数拓扑、代数几何、层的上同调：

孤立地学习同调代数会觉得十分无聊，实际上我们需要了解这门课的历史与动机。同调代数最早就是从代数拓扑的研究中来，所以学习代数拓扑中，可以看到同调代数相当多的应用，包括在同调代数课程中本身不会讲的万有系数定理。现代的代数几何也是同理。学习这些课程，才能更好的明白同调代数在其他学科中是如何应用的。

2. 三角范畴与导出范畴：

Abel范畴是同调代数的中心概念，在 Abel范畴中，可以通过“正合分析”的手段去解决问题。但是数学中有许多自然出现的范畴并非 Abel范畴，比如复形的同伦范畴与导出范畴，这时传统的手段就不再有效。然而同伦范畴正是一个三角范畴（第二章的定理）。在三角范畴中，可以用好三角代替正合列，从而类似“正合分析”的方法仍发挥着巨大的作用。

而导出范畴是同伦范畴的某种局部化范畴。在该范畴中，拟同构的链映射(诱导出来的同调对象之间的态射均为同构的链映射)恰为同构。导出范畴的引入简化了原本的同调代数，比如同调代数基本定理与导出函子基本定理在导出范畴中均可以更方便地叙述；又如，在 Abel 范畴中的高阶Ext群可以简单地描述成 Hom 群。然而，导出范畴不止有简化的作用，有许多不变量只能依靠导出范畴定义，所以其在现代数学中占有越来越重要的地位。

3. 特殊环、特殊模：见[1]的第四章；

4. 同调维数；

5. 群的上同调。

其它资料：

Emily Riehl的主页, 及其论著 Category Theory in Context, Category Homotopy Theory, Elements of ∞-Category Theory.

4.3.3 交换代数

参考书：

[1] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra (《交换代数导引》，有中文翻译版);

[2] Hideyuki Matsumura (松村英之): Commutative Ring Theory.

[3] David Eisenbud: Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry, GTM 150, Springer;

学习建议：交换代数作为科大本研同堂的一门基础代数课，课程内容并不复杂，仅仅是这门学问的一个导引。授课内容为：环与模范畴，局部化，诺特环上的准素分解，诺特正规化与希尔伯特零点定理，Nakayama引理和一点维数理论。

Atiyah一书[1]整本也仅一百来页，**正文内容很少，绝大部分（重要）内容掺杂在习题里，自己手推一遍**可以加深印象（当然也有人不喜欢这种写书风格）。大概是包含了直通（现代）代数几何所需的最少的交换代数知识。Matsumura一书[2]比较厚，内容丰富，通篇干货，习题难度与数目适中，**但缺乏动机陈述**。若无相应代数几何或数

论背景知识的话，读起来会比较难受。（就笔者个人而言，里面的证明看几次忘几次）因此我推荐将这本书用作交换代数的“辞典”，遇到不会的性质再翻一翻。其他的参考书还有[3]或者[4]等，都有辞典性质，不建议整本刷完。

初学交换代数可以不管其有什么用，埋头学，记住就行。深入后，知道一点动机/背景会更有利于学习交换代数，这些背景一般来自于代数几何与代数数论。但无论如何，学代数课，一定要心里有相当多的例子，比如诺特/非诺特，整但非UFD等等。交换代数的后续课程也基本上就是代数几何与代数数论，代数几何所需的交换代数更深一些；代数数论需要与其他代数内容结合，典型的就是Galois理论。

4.3.4 代数几何

这部分仅对应科大开设的“代数几何”课程，不是指整个代数几何学科。

参考书：

[1] Robin Hartshorne: Algebraic Geometry, GTM 52, Springer;

[2] 刘青: Algebraic Geometry and Arithmetic Curve;

[3] Vakil: The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry;

[4] Alexander Grothendieck: Éléments de géométrie algébrique (EGA, 法文)，现有部分中文译本（周健译）；

[5] 扶磊：代数几何。

学习建议：这门课的教学内容为：

- （古典）代数簇（仿射，拟仿射，射影，拟射影）、态射、有理映射、以及对应的不变量。
- （现代）拓扑空间上的层，概型的定义，概型之间的态射以及性质，模层，（拟）凝聚层，概型的纤维积、基变换；层的上同调，Cech上同调，Serre的仿射判别法，P^n的各阶上同调，Serre vanishing以及Serre Duality还有曲线的Riemann-Roch formula。

作为一个学期的课程，内容是非常多的，以致于张磊老师在教授的时候放弃了很多与主干无关的知识点。并且这门课高度抽象，只有到譬如$\mathbb{C}$上多项式环这种非常具体的例子才能有比较清晰的几何直观，但是即使在这样好的例子上想要算清楚也是非常不容易的。

关于参考书：[1]推荐看第二章的第6、7、8节以及第三章。[1]第二章前五节的内容建议看[2]的相应部分，尤其是 “separated and proper”那一节，两书讲法完全不一样，我初学根本不知道[1]在干啥⋯⋯）。Vakil[3]我没看过，不做评价。如果你会法语，也可以参考Grothendieck写的EGA [4]，这本书国内以有人翻译了（周健），结论内容全面，无废话，他所参考交换代数书为Bourbaki，每本书都有第零章，专写本书需要的前置知识。缺点是gap不少，且比较难填。也可以参考[5]，其内容上差不多是翻译的EGA，但是补充了不少细节。

学习这门课要注意的是：不要学的太形式，这门课是很抽象的，但是有很多浅显的例子，算一算例子体会一下，对这门课有很大的帮助。如果你同时还在学习代数数论，你可以尝试把代数数论的对象翻译成代数几何的语言，也是有帮助的。

在前半学期学习概型语言时（它就只是一种语言），能处理的手段很有限，直到引入上同调工具后，才有具体计算的方法。

代数几何是一门几何课，如果只学过代数来学这门课的话会非常难受，不知所云，虽然证明推导过程能看懂，但也仅限于“能看懂”的地步，而不清楚他的动机在哪，导致技巧也无法搬运。按W学长的说法，至少应学了黎曼面再看代数几何，这样会有更大的收获。

这门课后续可以学一点代数曲线/曲面，比如椭圆曲线，应用一下自己学过的内容。如果要再深入学习的话可能需要更多的交换代数与同调代数知识，比如谱序列。参考书[5]里面有相应的内容。

4.3.5 代数数论

预备知识：近世代数

推荐教材：

[1]冯克勤：代数数论，第一部分、第三部分。

参考书：

[2] Jürgen Neukirch: Algebraic Number Theory, 与[1]第一部分对应的部分；

[3] Neal Koblitz: p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, GTM 58, Springer;

[4] J. S. Milne: Class Field Theory.

进阶参考：

[5] J. P. Serre: Local Fields,GTM 67, Springer;

[6] Jürgen Neukirch: Cohomology of Number Fields;

[7] Jospeh H. Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves, GTM 106, Springer.

注意事项：

代数数论课程的内容都可以在参考书中的对应部分找到。以下需要注意：

1. 慎重一来就看Neukirch, 这人写的书虽然很好但是语言组织太差，感觉看得头痛就不要作为主教材了。（相性好的抽象大佬可以靠这个加速进度）

2. 如果一个地方看不清楚就多算例子找感觉，[1]的习题都是不错的。

3. 构造性的证明不仅要关心结论，也要看如何构造的。最好自己证明一遍。

4. 不要害怕计算！

5. 在遇见好康的结论之前并没有坦途，数论研究是非常具体的。

6. 若学到群上同调和各种群，那说明老师升级地掺杂了一些类域论。基本可以参考[3]的对应小节以及附录，遇到的一些同调代数知识也可在[3]的第二章附录查阅。喜欢抽象内容的大佬可以看[1], [6].

4.3.6 表示论(暂缺)

该课程自2016年春季之后中断开设。

4.3.7 李代数(暂缺)

4.4 组合与图论

4.4.1 图论(本硕贯通课程)

建议教材与参考书：

[1] 徐俊明：图论及其应用 Chapter 1,2,3,4,5,6【教材】；

[2] Reinhard Diestel: Graph Theory(GTM173), third (2005) edition, Chapter 1,2,4,5,6,10【图论圣经】.

学习建议：

图论是组合数学的一(ban)大(bi)分(jiang)支(shan)。组合数学关心的问题是集合中的对象满足一定规则排列的模式，是研究离散结构(图)的存在、构造、计数、分析、优化问题的学科。在一般课（非马杰）上，组合数学主要聚焦于计数问题，更建构、有定式，与主流数学差异不大。相比之下，图论课上关心的问题更接近真正意义上的组合数学，也因此更注重技巧和方法，学习过程中当将精力更多放在方法与技术的学习与运用，而非定义与定理本身。图论的另一个特征是形象，过度陷入主流数学的纯抽象思考不利于本课程的学习。这门课主要介绍了图论基本概念与相关结论，重点介绍了树、平面图、网络与流、匹配、染色的经典结论与部分应用（由于算法不是本课程重点，以下介绍跳过应用部分，对图论相关算法问题可参考[3]）。

（1）图的基本概念☆☆☆☆☆：

这一部分包括（有向/无向）图与常见概念的定义，路、圈、竞赛图的简单结论，二部图的判定定理，Euler图、Hamilton图的判定与性质，及其他延伸内容（如Turan定理、Ramsey理论）。本部分虽然很杂，但几乎所有内容都是重要的。对于图的相关概念（度、邻居、距离、连通性、多部图、子图、路、圈）及握手引理、二部图判定定理、Euler图判定定理、Turan定理，要记忆并熟练应用。对其他证明较简洁的结论、例题（如：强连通竞赛图点泛圈、以最小度估计直径、Hamilton问题Ore条件证明），要学习其证明思想与技巧。另外，要熟记常见反例Petersen图的性质。本章部分课后习题有较大难度，但也体现了图论组合证明的美妙之处，读者应当留意。

（2）树与图空间☆☆：

本章主要介绍树与森林的概念、图（圈/割）空间及支撑树。读者当理解树作为极大无圈图、极小连通图的性质，知道树是二部图、平面图，知道树/森林的边数、点度等结论。图空间部分内容并不重要且涉及线性空间的知识，此处当留意边割集与键、关联矩阵与邻接矩阵、割空间与圈空间概念的异同与联系，并学会使用线性代数方法计算图的支撑树数目。

（3）平面图☆☆：

这一部分介绍平面图的相关结论。读者需要理解平图中点与面（face）的对偶，知道Euler定理及极大平面图（三角剖分图）并使用其做证明与估计。本章的核心是引入平面图判定定理 (Kuratowski定理)，不过此结论在课内并没有什么应用与拓展。

（4）网络流与连通度☆☆☆：

这一部分主要包括网络流与连通度两部分。网络流部分当重点理解流的定义，熟练记忆并使用最大流最小截定理以及Menger定理的各种形式作为工具。连通度部分要理解并区分点连通度与边连通度、（点）分离集与截边集的概念。

（5）匹配与独立集☆☆☆☆：

本章主要包括匹配与独立/覆盖两部分。匹配部分是重点内容，读者需要掌握Hall定理及Tutte定理的证明，体会证明中对最大匹配性质的使用，记忆它们的常见推论、拓展并会熟练运用。独立集部分了解匹配、独立集、点覆盖、边覆盖的定义、联系与几个相关结论即可。

（6）染色理论☆☆：

染色理论一章分为点染色与边染色。点染色部分当了解定义并关注Brooks定理。此部分缺乏边染色部分那样强的结论，读者要重点学习使用k色临界图的思想（正如平面图部分的极大平面图），习题部分关于色多项式的结论也应当注意。边染色部分的核心是Vizing定理。染色理论一章与匹配与独立集一章有联系，读者当留意。

注：

本课程对于对组合数学感兴趣的同学有启蒙作用。有志于图论方向课题的同学在学习本门课之后，可关注超图理论、拓扑图论、代数图论、极值图论、概率图论、网络流、染色理论等方向，目前科大/中国除了拓扑图论较冷门外，其他方向都能找到合适的导师，其中极值图论较为热门。**组合数学其他方向（如：组合设计、组合矩阵论等）**

及应用/计算数学方向的同学也应当以学习基础课的态度学习本课程。其它方向的同学修此课程更多是起到开拓视野的作用，与其他更适合的课程冲突时应当考虑放弃本课程修读。

其他参考书目：

[3] Alexander Schrijver: A Course in Combinatorial Optimization【图论算法简明】;

[4] Vitaly I. Voloshin: Introduction to Graph and Hypergraph Theory【超图理论简明】;

[5] Chris Godsil, Gordon Royle: Algebraic Graph Theory(GTM207)【代数图论圣经】;

[6] Lowell W. Beineke, Robin J. Wilson: Topics in Topological Graph Theory【拓扑图论介绍】;

[7] 马杰的MA05/MA06课【极值图论前沿开蒙】.

4.4.2 代数图论

教材与参考书：

[1] Chris Godsil, Gordon Royle: Algebraic Graph Theory (GTM207);

[2] Norman Biggs: Algebraic Graph Theory (Second Edition).

授课教授：Jack H. Koolen

本课程介绍了离散数学的一个分支——代数图论的基本内容，即通过代数工具（课程中涉及到的主要是线性代数和最基本的抽象代数）研究图的一些性质。以下仅根据我久远片断模糊的记忆举几个例子。

1. 图的邻接矩阵与特征值
   一个图的（邻接矩阵的）特征值与其本身的性质之间存在一些关系。例如：导出子图的特征值均位于原图的最大和最小特征值之间；一个图的最大特征值介于其最大度与平均度之间；二部图的特征值总成对 $(\lambda, -\lambda)$ 出现；k-正则图绝对值最大的特征值是k等。

2. Perron-Frobenius定理及应用
   结合线性代数中的Perron-Frobenius定理（尤其是对称阵版本）我们可以得到连通图特征值的更多性质。

3. 图的自同构群
   计算某些特殊图类的自同构群。可用于判断图类间的关系，例如，一个Petersen graph并不是Cayley graph。

4. 一些图的划分
   例如Distance Partition，Equitable Partition和对应的商矩阵与原图的特征值之间的关系。

注：作为我系罕见的由外籍教师教授的课程，本课也是准备出国的同学练习课堂听力和口语的绝佳机会。

其它参考资料：

[3] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: Graph Theory (GTM244)
（本书（及练习题）中有极其丰富的各种与图论有关的内容）

[4] http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture22.pdf （介绍了expander和特征值的关系）

4.4.3 概率方法

教材与参考书：

[1] Noga Alon, Joel H. Spencer: The Probabilistic Method (Fourth Edition);

[2] Svante Janson, Tomasz Łuczak, Andrzej Rucinski: Random Graphs.

注：我系并未单独开设此课程，但一些内容在马杰教授的研究生课程《极值与概率图论》中有所涉及。

对随机图的研究有时可以给出一些确定的结论。例如 Erdős (1959) 一个经典的结果：一个图的最小圈长和染色数可以同时趋于无穷大（见[1]第三章末尾）。近年来概率方法在组合图论前沿问题研究中有着极为广泛的应用。

[1] 书中对一些常见的基本方法做了很好的整理总结，很适合作为课程或自学教材使用。每章后的练习题数量不多但质量很高，其中个别问题有较大难度（有标注）。坊间传闻该方向有些教授会让博士生做该书全部习题。

其它参考资料：

[3] http://staff.ustc.edu.cn/~jiema/ExtrGT2016/

[4] http://staff.ustc.edu.cn/~jiema/ExtrGT2017/

（以上为马杰教授《极值与概率图论》（2016，2017）课程主页，均有电子版讲义可供下载。）

4.4.4 算术组合

教材与参考书

[1] Terence Tao, Van Vu: Additive Combinatorics.

注：我系并未开设此课程。该方向为现代组合数学主流方向之一，本节为这个方向做一个简要的介绍。

组合数学研究的是离散的物体的结构，整数作为最为人熟知的离散对象，自然也在组合数学的研究范围内。如果说数论是一门主要研究素数的学科，算数组合学关心所有整数的分布。算数组合（Arithmetic Combinatorics）分为加性组合（Additive Combinatorics）和乘性组合（Multiplicative Combinatorics），前者主要研究阿贝尔群中元素的分布，后者研究环以及非阿贝尔群上的元素分布。

算数组合与纯数学中的其他领域有很多交叉，这个方向运用的主要工具来自极值组合、调和分析、动力系统、代数几何、逻辑、概率论等，这里举两个例子。

第一个例子是Freiman问题。对于群G的子集A，定义$A+A$为A中所有元素对的和组成的集合。Freiman定理说，如果$A+A$可以被常数个A的陪集覆盖，那么A有某种特殊结构（被一个陪集序列包含）。当G为有限torsion的阿贝尔群时，Freiman问题最好的结果使用极值组合的工具证明。当G为一般阿贝尔群时，Freiman问题最好的结果使用调和分析证明。G为一般非阿贝尔群的情况最近被Breuillard, Green和陶哲轩解决，他们的主要工具是逻辑中的非标准分析，并且巧妙的运用李群来代替阿贝尔群中的Bohr set结构。

另一个例子是Szemerédi问题。1936年，Erdős和Turán提出了一个著名猜想，即整数的正密度子集包含任意长的等差数列。这个猜想在1975年左右被Szemerédi用极值组合证明，在证明中Szemerédi应用了一个引理，现在被称为Szemerédi正则性原理，后来成为了极值图论的核心定理之一。1977年，Furstenberg使用动力系统的工具，给出了Erdős-Turán猜想的新证明。应用动力系统的思想，Green和陶哲轩在2004年证明了素数包含任意长的等差数列，解决了这个长达 300多年的猜想。正如上文所说，算数组合并不偏爱素数，因此算数组合学家们认为素数包含任意长等差数列的原因和素数无关，所有分布密度和素数相当的集合都应满足这个性质。实际上，早在1976年Erdős便提出了著名的倒数和猜想，即如果一个整数的子集中所有元素的倒数和发散，这个集合包含任意长的等差数列。这个猜想对长度为3的等差数列至今还是未解决的。1999年Bourgain引入调和分析的工具，通过对Bohr set的分析，给出了倒数和猜想对长度为3的等差数列当时最好的结果，也为这个问题指明了新方向。倒数和猜想对任意长度等差数列的研究，目前最好的进展来自Gowers，在他的证明中他引入了Gowers范数，现在成为了算数组合以及调和分析领域的一个研究热点。应用Gowers范数，Green和陶哲轩将Szemerédi正则性原理推广到一般函数，现在被称为算术正则性引理：对于任意定义在整数集的有界函数，可以把它拆为三个有界函数的和，其中第一个有很强的（李群）结构，第二个是误差项（即L^2范数很小），第三个分布非常均匀（即Gowers范数很小）。

[1]书中对算术组合中加性组合的常见方法（组合方法，分析方法，代数方法，概率方法，几何方法）进行了一个总结。美中不足的是，该书写于2001年，而近些年这个领域进展飞速，因此有一些新思想新工具没有被包含。

4.4.5 其它有趣的内容

- Erdős' Problems on Graphs
  http://www.math.ucsd.edu/~erdosproblems/
  该网页对与图有关的 Erdős 问题做了一个整理，AMAZING!

- 一些有趣的知乎专栏

  - Some Interesting Combinatorial Problems https://zhuanlan.zhihu.com/combinatorics

  - 一些待解决的组合数学问题 https://zhuanlan.zhihu.com/c_1033295288991264768

  作者皆为组合图论方向的在读博士生，内容质量有保障。

- 多项式方法与离散几何
  Polynomial Method是一个比较新比较火的话题。这个名词有时指代组合零点定理（见3.8）的相关内容和应用，有时指代主要用于离散几何中的一些多项式方法。以下仅列出与后者有关的一些资料。
  - Larry Guth 的课程主页（有讲义）`http://math.mit.edu/~lguth/PolynomialMethod.html`
    参考书目：Larry Guth：Polynomial Methods in Combinatorics
    该书是这个领域的经典教材，目前网上并无（清晰合法的）电子版。
  - Terry Tao 的博客 `https://terrytao.wordpress.com/tag/polynomial-method/`
  - Adam Sheffer 的博客 `https://adamsheffer.wordpress.com/pdf-files/`

4.5 概率论

4.5.1 （高等）概率论与随机过程

（高等）概率论

预备知识：实分析、概率论

建议教材：

[1] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 5th edition, Chapter 2, 3, 5.

参考书：

[2] 钟开莱：概率论教程；

学习建议：高等概率论程讲的内容主要是对本科概率论内容作出实分析刻画上的补充。包括集合、测度论性质、积分理论，条件期望和随机变量收敛等等。除了条件期望部分外，其他大部分在实分析中应该接触过。

- 集合与测度论：集合部分包括σ-代数回顾，以及相关的π类, λ类，单调类定理还有$\pi-\lambda$定理（这个定理就告诉我们要想证明某性质对很多东西成立只要证明对于具有某些性质的子集对就行，这极大地简化了证明）。测度论部分还是会回顾概率测度的性质，然后会再讲Borel Cantelli引理(第二B-C引理实际上只要随机变量两两独立就可以了，另外可以多了解几个版本的B-C引理，它们都很有用，见[1]的对应部分)。

- 分布函数与数学期望：基本性质就不说了，值得一提的是变量替换公式的概率论版本，实际上是从一个测度诱导出另一个测度。

- 条件期望：高概里面相对较难的内容是条件数学期望的理解。条件期望存在的基石是 Radon –Nikodym定理。条件数学期望的概率含义是在L^2范数下对某个随机变量进行估计（实际上是L^2正交投影），取条件期望的那个σ-代数可以直观地看作我们已知的信息，这些在很多书上都有讲到。条件数学期望的几条性质（比如塔式法则）一定要很熟练。

- 随机变量收敛：无需多说，需要留意弱收敛的等价刻画（在本科概率论教材的第七章也有）。

随机过程

预备知识：高等概率论

建议教材与参考书：

[1] Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, GTM 274;

[2] I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, GTM 113;

学习建议：这门课主要参考的是GTM 113的鞅论与布朗运动的部分。这本书完全自己读的话还是有点费时间的，薄老师的课会讲到其中一部分。[1]比[2]简单一些，可读性更强一些。

这门课首先会讲随机过程基本概念。一般来说随机过程都是适应的，并且研究的随机过程通常都是 RCLL的（左极限存在，右连续）。随机过程比较重要的地方就是大家会关心他的轨道的性质，而不再是固定时间看随机变量分布。因此，数学上需要知道满足某些性质的随机过程确实存在（比如轨道连续性的随机过程可以通过 Kolmogrov连续性定理构造）。

鞅的部分之前提过，取决于本科应用随机过程内容，这部分可能没有太多新的东西（除了变成连续时间）。布朗运动部分，需要知道构造方法（比如用 Kolmogrov 连续性定理，再如用级数构造）。还有 Donsker不变原理，即随机游走在时间和空间合适的scaling下会收敛到布朗运动。这个证明还有结论都非常地重要！如果做概率论研究的话，这里面涉及到的方法和定理都是以后会碰到的。

前面我们提到有时候会用鞅工具来研究问题，对于布朗运动，课上会构造几种鞅，通过他们可以研究首达时分布，首次击中点分布，等等。

4.5.2 鞅论与随机积分

预备知识：高等概率论、随机过程

建议教材与参考书：

[1] I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, GTM 113;

[2] Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, GTM 274;

[3] 徐佩：鞅论与随机积分讲义

学习建议：鞅论部分前面提到了一些，在这门课里面需要经常遇到局部鞅（local martingale，取递增停时后成为martingale）和半鞅（semi-martingale）。

这门课比较重要的地方就是掌握几个基本工具：B-D-G不等式，Girsanov变换（测度变换，把一个分布不太好确定的过程变成分布已知的过程，比如布朗运动）。鞅表示定理 (Martingale representation)也是很有用的工具（比如彭实戈证明倒向随机微分方程有解就用到了）。还有布朗运动的 Levy判别法的证明和结论也都很有用。另外,这门课会涉及一点Malliavin Calculus的东西，感兴趣的可以自己再去深入了解下。对于这门课的SDE部分，学习的时候可以和常微分方程解存在唯一性进行比较，其实并没有全新的想法。技巧上的话，加停时技巧是有用的工具，因为这可以把一些有singularity的过程变得较好控制，所以经常会用到。

4.5.3 概率极限理论

预备知识：高等概率论

建议教材与参考书：

[1] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition. Chapter 2-5;

[2] 林正炎、陆传荣、苏中根：概率极限理论基础；

[3] Olav Kallenberg: Foundation of Modern Probability.

学习建议：这门课由统计系的胡治水老师在每年春季开设，对概率论里的极限定理作出较为深入的讨论，并讲授离散鞅论。授课内容主要有：大数定律的各种形式、三级数定理、中心极限定理的各种形式、无穷可分分布、稳定分布(Stable Law)、Stein方法与正态逼近、离散鞅论、随机游走的性质*、Donsker不变原理*、Banach空间中的概率极限理论*。(打星号代表选讲)

这门课的内容实际上仅是[2]的一半甚至更少。如果想较为深入地学习概率极限理论，[2]这本书是非常值得一读的，二百多页的篇幅实则记载了相当多的深入知识和较为现代的概念。

- 大数定律：这部分需要掌握弱、强大数定律的充要条件与证明，包括各种形式的Borel-Cantelli引理；此外，0-1律、三级数定理的方法也要求掌握。参考书为[1]的第二章。

- 中心极限定理：这部分会从最简单的iid情况的中心极限定理开始，讲到Lindeberg-Feller CLT, 非iid情况，以及缓变函数有关的CLT(Karamata)，可以参考[1]的第三章和[3]。之后讲了中心极限定理的收敛速度(Berry-Essen不等式)。后面的无穷可分分布与稳定分布族则是关注一个很自然的问题：一列随机变量（或者一个随机变量方阵），其行和在$n \to \infty$的时候的极限分布族是什么？换句话说，也就是问什么样的分布有资格成为随机变量和函数的极限分布？进一步地，收敛于极限分布族中的某一给定的分布，需要怎么样的条件？最后作为补充，老师会讲一些Stein方法，也就是如何处理不独立的随机变量列的方法。

- 离散鞅：没什么好说的。

- Banach空间中的概率论：这部分讲述的是取值于波兰空间(Polish, 即可分Banach空间)的随机变量的概率极限理论。这对于随机过程乃至偏微分方程的概率方法都是至关重要的基础。详细内容可以参见[2]的第六章。

4.5.4 其它有趣的内容

笔者在此列出一些自认为有趣或是重要的内容，这些在课堂上并不一定会出现。

1. 关于马氏链的理论，可以看北师大李增沪老师的讲义第3、4章。另外，泛函分析中的算子半群理论（例如Hille-Yosida定理）也可以看看。

2. 遍历定理：可以看Durrett书的第七章(其实这部分讲的也不算很全，更详细的可以再参考Martin Hairer的讲义。

3. 布朗运动的Donsker不变原理的证明与应用，这用到了Skorohod嵌入定理。

4. GTM 113最后一章有一些关于局部时（local time）的理论，可以了解一下。

5. 关于概率论与PDE的联系，可以看Durrett第五版的第九章了解一些初步内容。当然最基本的Feynman-Kac公式肯定要知道。想了解更多的，可以看一本综述类的书籍 "Stochastic Equations in Infinite Dimensions", 作者是Giuseppe Da Prato， Jerzy Zabczyk. 如今概率论方法被不断应用到PDE中，例如，当下正在研究的（超）临界色散方程的适定性与谬定性问题的首次突破便是引入了随机项（关键是构造不变测度）；$\mathbb{T}^d(d = 2, 3)$上的随机Naiver-Stokes方程与欧拉方程的研究，则被认为与湍流的刻画有关。

6. 对应用概率有兴趣的同学可以看"Essentials of Stochastic Processes"这本书的排队论(Queuing Theory)和数理金融(Math Finance)部分。

7. 对跳跃随机过程的随机积分感兴趣的同学，可以阅读Fima C. Klebaner所著的"Introduction to Stochastic Calculus with Applications"的第九章，此外这本书的第11-14章有很多随机积分在金融、工程与生物上的应用。

4.5.5 有关2016年春季开设的随机分析选讲

2016年的春季学期，科大数院曾经开设过"随机分析"课程（不是管院统计系开的那个随机分析），由徐佩、刘党政、王冉（现就职于武汉大学）三位老师主讲。内容涉及随机矩阵初步（刘党政）、Stein方法（徐佩）、大偏差理论（王冉）。

随机矩阵是刘党政教的，他自己也做这个，除了刘之外国内做随机矩阵的人还有比如北大BICMR的冯仁杰（和韦东奕合作），国外有尹骏(Jun Yin, UCLA)、姚鸿泽(Horng-Tzer Yau,Harvard), Lòszò Erdös（(IST) Austria）,Terence Tao(UCLA)。一些做高维统计理论的人也会关心随机矩阵。

Stein方法部分是徐佩教的，这个是证明分布逼近的有用的工具，比较好的参考书是A. D. Barbour 和 Louis Chen的 "An introduction to stein's method" 。一般来说你希望给出好的Error bound可以参考这本书。国内这方面的一个专家是邵启满教授. Stanford的Sourav Chatterjee也做了不少。反正把这个理论当作一个工具就好。

大偏差理论方面，主要讲义是 S. R. S. Varadhan的讲义（上方课程主页有下载）。做概率问题关心的东西往往有几个层次：Law of large numbers层次，Fluctuations 层次（比如中心极限定理），再就是 Large Deviations 层次（也就是关心小概率事件）。希望了解大偏差应用的同学可以看下 SRS Varadhan的新书 "Large deviations.".Amir Dembo, Ofer Zeitouni的书则可以作为这方面的字典用。

概率论研究的特点就是可做的问题很多，所以需要你有自己的鉴赏力。(这一点和其他分支比如几何是不一样的)。目前美国做概率论的人主要还是做离散部分的比较多。一个最近挺火的研究领域是可积概率(integrable probability), 很多大佬都在搞（除了页面上写着的外，还有 Allan Sly(Princeton), Shirshendu Ganguly(UCB)等）。当然，这个能火多久可能还需要时间的检验。总的来说，有比较强的物理/计算机/生物背景的问题都是很有意义的问题。

对概率论研究有疑问的同学可以与我（姚东，13级数院，现就读于杜克大学）讨论，邮箱是 dy67@duke.edu.