Evans Ch7 Notes (Draft)

章俊彦
PB13001112
zhangjy9610@gmail.com.

7.0: 预备知识 - - - - - - - - - - (1)

7.1: 二阶抛物方程弱解 - - - - - - (6)
Definition 6
存在唯一性 (Galerkin Method) 7
正则性 13

7.2: 抛物极大值原理 - - - - - - - (22)
弱极大值原理 22
强极大值原理 23

7.3: 二阶双曲方程弱解 - - - - - - - (25)
Definition 25
存在唯一性 (Galerkin Method) 26
正则性 33
二元PDE典型形式 38

7.4: 有限传播速度 - - - - - - - - (41)
余面积公式及推论 41
有限传播速度 44

7.5: 一阶双曲方程组 - - - - - - - (49)
消失粘性法 (Vanishing Viscosity Method) 49

*7.6: 半群方法 - - - - - - - - - (60)
基本性质 60
Hille-Yosida定理及应用、实例 65

*7.7: Strichartz非端点估计 - - - - - - - (73)
Schrödinger方程的非端点估计 73
d≥3时，能量次临界的半线性Schrödinger方程H^1局部适定性 77
抽象Strichartz估计 84

*注意:
(1) 7.0节在课本5.10节，结论比证明重要114514倍。范数换成绝对值后所有结论都是显然的。
(2) 普通班进度是到本讲义7.3或7.4节结束。
(3) 7.3节证明全部建议跳过，但须记住双曲方程正则性比抛物方程差。
(4) 7.1节Galerkin方法极其重要
(5) 本讲义跳过抛物Harnack不等式
(6) 粘性法对学椭圆方程/几何分析的同学很重要。

章俊彦 PB13001112

Ch7 抛物发展方程弱解理论

§7.0 预备知识

I. 以Banach空间为值域的函数.

设 $f:[0,T]\to X$, $T>0$, X是Banach空间(赋予范数$\|\cdot\|$).

Def: (1) (简单函数) $s:[0,T]\to X$ 称作简单函数，若s有形式

$$s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i \qquad 0\le t\le T$$

其中$\{E_i\}$是$[0,T]$的Lebesgue可测子集. $u_i\in X$

(2) (强可测). $f:[0,T]\to X$ 称作强可测，若存在简单函数列 $s_k:[0,T]\to X$，使得 $s_k(t)\to f(t)$ a.e. $t\in[0,T]$.

(3) (弱可测) $f:[0,T]\to X$ 称作弱可测. 若 $\forall\, u^*\in X^*$，映射

$$[0,T]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\langle u^*,f(t)\rangle$$

是Lebesgue可测的

(4) 称 $f:[0,T]\to X$ 的取值是几乎可分的，若存在Lebesgue零测集 $N\subset[0,T]$，使得 $\{f(t)\mid t\in[0,T]-N\}$ 可分(具有可列稠子集).

Thm 7.0.1 (Pettis引理). $f:[0,T]\to X$ 强可测 $\Longleftrightarrow$ f弱可测且取值几乎可分.

证明 见Yosida的泛函分析

□

章俊彦 PB13001112

Def (定义积分)

(1) $s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i$ 是简单函数，则 $\int_0^T s(t)\,dt := \sum_{i=1}^{m} m(E_i)\cdot u_i$

(2) 对强可测函数 $f:[0,T]\to X$，称 f 可积 (summable)（可以理解为实变中的"可积"）是指 $\exists\{s_k\}_1^\infty$ simple. s.t.

$$\int_0^T \|s_k(t)-f(t)\|\,dt \to 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

(3) 若 f 可积，则 $\int_0^T f(t)\,dt := \lim_{k\to\infty}\int_0^T s_k(t)\,dt$

□

Thm 7.0.2 (Bochner).

$f:[0,T]\to X$ 强可测，则 f 可积 $\iff$ $t\mapsto \|f(t)\|$ 可积.

且有. $\|\int_0^T f(t)\,dt\| \le \int_0^T \|f(t)\|\,dt$.

$$\langle u^*, \int_0^T f(t)\,dt\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t)\rangle\,dt \quad \forall u^*\in X^*$$

□

II. 时空 Sobolev 空间

Def: (1) $L^p([0,T];X) = \{u:[0,T]\to X \text{ 强可测} \mid \|u\|_{L^p([0,T];X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$

$1\le p<\infty$

$L^\infty([0,T];X) = \{\cdots\cdots \mid \|u\|_{L^\infty([0,T];X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t} \|u(t)\| < \infty\}$

$C([0,T];X) = \{u:[0,T]\to X \text{ 连续} \mid \|u\|_{C([0,T];X)} := \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\| < \infty\}$

章俊彦 PB13001112

(2) $u\in L^1(0,T;X)$，称 $v\in L^1(0,T;X)$ 是 u 的弱导数，若（记作 $u'=v$），

若 $\int_0^T \phi'(t)u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\,v(t)\,dt \quad \forall \phi\in C_c^\infty(0,T)$

(3) $W^{1,p}(0,T;X)=\{u\in L^p(0,T;X) \mid u'\in L^p(0,T;X)\}$.

$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \big\| \|u(t)\| + \|u'(t)\| \big\|_{L^p_t}$

Thm 7.0.3（抽象空间中的基本运算）

$u\in W^{1,p}(0,T;X)$. $1\le p\le\infty$ 则

(1). $u\in C([0,T];X)$（modify 一个零测集后）.

(2) $u(t)=u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$. $0\le s\le t\le T$

(3). $\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\| \le C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

证明：只需证(2)即可

将 u 延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R};X)$ 上. $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$.

$\mathbb{R}$ 上的磨光子.

则 $(u^\varepsilon)'=\eta_\varepsilon * u'$ on $(\varepsilon, T-\varepsilon)$.

$\varepsilon\to 0$ 时: $u^\varepsilon\to u$ in $L^p(0,T;X)$

$(u^\varepsilon)'\to u$ in $L^p_{loc}(0,T;X)$.

由于 $u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(s)+\int_s^t u^{\varepsilon\prime}(\tau)\,ds$. a.e. $0<s<t<T$

令 $\varepsilon\to 0$. 由于 $t\mapsto\int_0^t u'(\tau)\,d\tau$ 连续 知:

$$u(t)=u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$$

□

肖俊彦 PB13001112

Thm 7.0.4（更多基本运算）. $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

则 (1) $u\in C([0,T];L^2(U))$ （差一个零测集）.

(2). $t\mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ 绝对连续. 且 $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$

a.e. $0\le t\le T$.

(3). $\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}+\|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right)$.

证明: (1) 将 u 延拓到 $[-\sigma, T+\sigma]$ 上. $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$.

则对 $\varepsilon,\delta>0$

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon-u^\delta, u^\varepsilon-u^\delta\rangle_{L^2}$$

$$=2\langle u^{\varepsilon\prime}(t)-u^{\delta\prime}(t), u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\rangle_{L^2}$$

积分.

$$\Rightarrow \|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)-u^\delta(s)\|_{L^2}^2$$

$$+2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau)-u^{\delta\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

$\forall 0\le s,t\le T$ 都对.

Fix $s\in(0,T)$. : $u^\varepsilon(s)\to u(s)$ in $L^2(U)$.

$$\therefore \limsup_{\varepsilon,\delta\to 0}\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)-u^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 \le \lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_0^T \|u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\|_{H^{-1}(U)}^2$$

$$+\|u^\varepsilon(\tau)-u^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}\, d\tau.$$

$\Rightarrow \{u^\varepsilon(t)\}$ 是 $C([0,T];L^2(U))$ 中的 Cauchy 序列.

所以 $\exists v\in C([0,T];L^2(U))$. $u^\varepsilon(t)\to v$ in $C([0,T];L^2(U))$

又: $u^\varepsilon(t)\to u(t)$ a.e. t $\Rightarrow u=v$ a.e.

章俊彦 PB13001112

类似可得 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau)\rangle d\tau$.

令 $\varepsilon \to 0$. 由 $u = v$ a.e. 知

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau.$$

$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 \in AC[0,1]$. $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = 2\langle u', u\rangle$. $0 \le s, t \in T$

对上式积分 即有:

$$T\|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2 ds + CT\|u'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{L^2}^2 \lesssim_T \|u'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} + \|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)}.$$

□.

Thm 7.0.5 U 有界开. ∂U 光滑, $m \in \mathbb{N}$.

$u \in L^2(0,T;H^{m+2}(U))$, $u' \in L^2(0,T;H^m(U))$. 则有:

(1) $u \in C([0,T];H^{m+1}(U))$. (modify一个零测集后).

(2) $\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \lesssim_{T,U,n} \|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2})} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m)}$.

证明: 我们只证 $m=0$ 的情形. 其余的, 只需考虑 u 的导数.

此时 $u \in L^2(0,T;H^2)$, $u' \in L^2(0,T;L^2)$.

将 u 延拓为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 $L^2(0,T;H^2)$ 函数 $\bar{u}$. spt $\bar{u} \subset\subset V$.

$$\|\bar{u}\|_{H^2(V)} \le C\|u\|_{H^2(U)}$$

$$\frac{d}{dt}\|D\bar{u}\|_{L^2}^2 = 2\langle D\bar{u}, D\bar{u}'\rangle = -2\langle \bar{u}', \Delta\bar{u}\rangle$$

$$\le C\left(\|\bar{u}'\|^2_{L^2(V)} + \|\bar{u}\|^2_{H^2(V)}\right)$$

章俊彦 PB13001112

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H^1(U)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}\right).$$

$$\Rightarrow u \in C([0,T];H^1(U))$$

$\square$.

§7.1 二阶线性抛物方程弱解理论.

本节考虑的方程为

$$(*).\quad \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T. \\ u = 0. & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g. & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$$

$f: U_T \to \mathbb{R}$. $g: U \to \mathbb{R}$ 给定: $u: \overline{U_T} \to \mathbb{R}$ 是未知函数

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u.$$

$$\text{or} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij}u + \cdots\cdots$$

L 一致椭圆. $\{a^{ij}\}$ 实对称正定.

7.1.1 弱解定义:

设 $f \in L^2(U_T)$, $g \in L^2(U)$, $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$.

<u>Def</u>: 称 $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 是初边值问题 $(*)$ 的弱解, 若成立: ① $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ $\forall v \in H_0^1(U)$ a.e. $t \in [0,T]$.

② $u(0) = g$.

章俊彦 PB13001112

其中 $B[u,v;t]=\int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b^i u_{x_i}v+cuv\,dx$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$, a.e. $t\in[0,T]$

注：① $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不再表示内积，而是对偶空间 (H^{-1}) 的元素与原空间 (H_0^1) 的元素之间的作用.

② 定义中的 $u(0)=g$ 是有意义的 因 Thm 7.0.3 表明 $u\in C([0,T];L^2)$

□

7.1.2. 解的存在唯一性 (Galerkin截断 ⇒ 能量估计 ⇒ Gronwall 不等式).

$$(*)\begin{cases} u_t+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

Main steps:

① 构造逼近解序列 $\{u_m\}$，满足
- 由有限维截断而来.
- H_0^1
- 满标正基测试，保留弱形式
- $\exists!$ (由ODE知识)

② 能量估计：$\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 一致有界.
$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理，存在弱极限 u,v.
希望是解

③ $u'=v$ a.e.

(u,u') 满足弱解定义.

章俊彦PB13001112

Step 1：构造逼近解序列：

设 $\{w_k\} \subseteq C^\infty$ 是 $\begin{cases} L^2(U) \text{ 标正基} \\ H_0^1(U) \text{ 正交基} \end{cases}$.

Fix $m \in \mathbb{Z}_+$. ~~令：先特化~~ -

- 若 $u \in H_0^1$ 是弱解，则可以展开作 $u = \sum_{k=1}^{\infty} d^k(t) w_k$.

代入弱解定义即有：$\langle \sum_{k=1}^{\infty} d^{k\prime}(t) w_k, w_l \rangle + B[\sum_{k=1}^{\infty} d^k(t) w_k, w_l; t] = \langle f, w_l \rangle \quad \forall l.$

$$\Longrightarrow \quad d^{l\prime}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{e_{kl}(t)}_{\text{系数}} d^k(t) = f^l(t) := \langle f, w_l \rangle \quad \forall l. \quad \cdots \cancel{(\#)}$$

(常数)

此时，令 $u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$ 则 $d_m^{l\prime}(t) + \sum_{k=1}^{m} e_{kl} d_m^k(t) = f^l(t) \quad 1 \le k, l \le m. \quad \cdots (\#)$

$$f^l \in L^2([0,T]).$$

$$e^{kl} := B[w_k, w_l; t] = \int a^{ij} \partial_{x_i} w_k \partial_{x_j} w_l \, dx$$

$\Rightarrow u \in H^1_{loc}[0,T] \subseteq C[0,T]$ (作为 t 的函数). $\in C^\infty$ ~~(#)~~ $[0,T]$.

Claim: $u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^{m} (g, w_k) w_k$.

$(\Leftrightarrow d_m^k(0) = (g, w_k))$

Claim 由 (#) 的存在性-性直接得证.

即存在绝对连续的 $\vec{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ 满足 $\begin{cases} (\#) \\ \text{Claim.} \end{cases}$

a.e. $t \in [0,T]$.

#

Step 2：能量估计：

Thm 7.1.1：$\exists$ 仅依赖于 U.T.L 的常数 $C > 0$ s.t.

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$$
$$\le C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)} \right).$$

章俊彦 PB13001112

Proof: Fix $m \in \mathbb{Z}_+$

由 Step 1: $\forall k \le m$. 有:

$$\langle u_m', w_k \rangle + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k).$$

两边乘以 $d^k(t)$, 对 k 求和有:

$$\underbrace{\langle u_m', u_m \rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2} + B[u_m; u_m; t] = (f, u_m).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m \, dx = (f, u_m) - \int \sum_i b^i (\partial_i u_m) \cdot u_m \, dx - \int c u_m^2 \, dx$$

L-致椭圆

$$\overset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon \|Du_m\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|u_m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2.$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 有:

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2).$$

Fact (Gronwall 不等式).

- η 非负. $\eta \in AC[0,T]$, 且对 a.e. t 有: $\eta'(t) \le \underbrace{\phi(t)\eta(t) + \psi(t)}_{L^1\text{ 非负 on } [0,T]}$.

则 $\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$. $0 \le t \le T$

在此: $\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(U)}^2$, $\xi(t) = \|f\|_{L^2}^2$.

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le Ce^{Ct}\left(\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-Cs}\eta(s)\,ds\right).$$

$$\le e^{CT}\left(\|g_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)$$

宣俊彦 PB13001112

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le C_T\left(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right) \qquad 0\le t\le T$$

下面再估计 $\|Du_m\|_{L^2}^2$

由: $\|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$.

对t积分: $\int_0^T \|Du_m(t)\|_{L^2}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \le C_T\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

下面再估计 $\|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$.

$$u_m = \sum_{k=1}^m d_k^k u_k \Rightarrow u_m' = \sum_{k=1}^m d_k^{k\prime}(t)\,u_k.$$

先估计 $\|u_m'(t)\|_{H^{-1}}$

Fix $t\in[0,T]$.

$\forall v\in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)}\le 1$

$$\langle u_m', v\rangle = \langle u_m'(t), \underbrace{v_m}_{\text{前m行截断}}\rangle$$

$$= B[u_m, v_m; t] + (f, v_m).$$

$$\le \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|Dv_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|f\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1}.$$

因 $\|v\|_{H_0^1}\le 1$

对v取sup

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{H^{-1}}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 = \int_0^T \|u_m'(t)\|_{H^{-1}}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)$$

章俊彦 PB13001112

Step 3: 弱解存在性.

Thm 7.1.2: (*) 弱解存在.

Pf: 由 Thm 7.1.1 有: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 中一致有界

$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理及习题5.6 结论有

Ex5: $\left.\begin{array}{l} u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H_0^1) \\ u_k' \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow v = u'$

Ex6: $\left.\begin{array}{l} H \text{ Hilbert.} \\ u_k \to u \quad \text{in } L^2(0,T;H). \\ \left\| \|u_k(t)\| \right\|_{L_t^\infty} \le C \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \|u(t)\| \right\|_{L^\infty} \le C$

有: $\exists$ 子列 $u_{m_l} \to u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$.

$u_{m_l}' \to u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$.

如今我们待证的是:

(i): $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1$

(ii): $u(0) = g$.

Claim: $\forall v \in L^2(0,T;H_0^1(U))$. $\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt$.

check: 设 $v \in C_c^1(0,T;H_0^1(U))$. $v = \sum_{k=1}^{N} d_k^k(t) w_k$. $d^k \in C^\infty$ $1 \le k \le N$.

取 $m \ge N$. 对 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$.

两边乘以 d_k^k ~~再积分~~ 再对k求和有

$$\langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = (f, v).$$

积分: $\int_0^T \langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = \int_0^T (f,v)\,dt$.

章俊彦 PB13001112

取 $m=m_l$. 令 $l\to\infty$. 由弱收敛的结果有:

$$\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u, v; t]\,dt = \int_0^T \langle f, v\rangle\,dt \quad \forall v\in L^2(0,T;H_0^1)$$

由 $C_0^1 \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$.

<u>claim holds.</u>

~~这样: $\langle u'$~~

下证: $\forall v\in H_0^1(U)$. a.e. $t\in[0,T]$ 成立. $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f, v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

为此. $\forall v\in H_0^1(U)$. $\eta(t)\in C^\infty[0,T]$. 则 $\eta v\in L^2(0,T;H_0^1(U))$.

$$\int_0^T \langle u', \eta v\rangle + B[u, \eta v; t]\,dt = \int_0^T (f, \eta v)\,dt.$$

$$\overset{\forall\eta}{\Longleftrightarrow} \int_0^T \eta(t)\cdot\left(\langle u', v\rangle + B[u,v;t] - (f, v)\right)dt = 0$$

$$\Longrightarrow \langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f, v) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \text{ 成立}. \quad \forall v\in H_0^1(U).$$

这样 (i) 成立. $\overset{\text{Thm 7.0.4}}{\Longrightarrow} u\in C([0,T];H_0^1)$

再证 (ii). $u(0)=g$.

取 $v\in C^1([0,T];H_0^1)$, $v(T)=0$. 则.

$$\int_0^T \left(\langle u', v\rangle + B[u,v;t]\right)dt = \int_0^T (f, v)\,dt.$$

分部积分.

$$\int_0^T \langle u_m', v\rangle\,dt = \langle u_m(t), v(t)\rangle - \langle u_m(0), v(0)\rangle - \int_0^T \underbrace{\cancel{\langle u_m, v'\rangle}}_{\langle v', u_m\rangle}\,dt.$$

H^{-1} H_0^1

取 $m=m_l$. $l\to\infty$ 代入有:

$u_{m_l}(0) = g_{m_l} \xrightarrow{L} g$ in H_0^1.

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f, v\rangle\,dt + (g, v(0)).$$

由 $v(0)$ 任意. 同 (i) 有 $u(0)=g$.

#

章俊彦 PB13001112

Step 4: 唯一性

Thm 7.1.3: (*)弱解唯一.

证: 只需证 $f=g=0$ 时, 只有零解 (因方程是线性的)

取弱解定义中 $v=u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + B[u,u;t] = \langle u', u\rangle + B[u;u;t] = 0$$

而 $B[u,u;t] = \int \sum a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u + \sum b^i u\,\partial_i u + cu^2\,dx$

$$\overset{\text{由 Step 2}}{\geq} \theta\|Du\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|Du\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^2}^2 \leq C\|u(t)\|_{L^2}^2$$

由 Gronwall 不等式 及 $u(0)=0$ 知 $\|u(t)\|_{L^2}^2 \equiv 0$, $u\equiv 0$.

$u\in C([0,T];H_0^1)$

□.

□.

7.1.3 正则性.

对 (*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u(0) = g & \text{on } \partial U \end{cases}$

在下定正则性的结论之前, 我们先要通过一些形式推导来预测最终的结论.

对热方程: $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,T] \\ u(0) = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(u_t-\Delta u)^2\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u\cdot u_t + (\Delta u)^2\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\nabla u_t\cdot\nabla u + (\Delta u)^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int|\nabla u|^2\,dx + \int u_t^2 + \int|\Delta u|^2 = \int f^2\,dx.$$

章俊彦 PB13001112

对t积分可得:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|\Delta u|^2\,dx\,dt$$

$$\le\int|\nabla u(0)|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dx\,dt$$

$$\lesssim\int|\nabla g|^2\,dx+\int_0^T\int|f|^2\,dx\,dt$$

所以，对弱解，我们预测：$g\in H_0^1$，$f\in L_t^2L_x^2$ $\Rightarrow$ $u\in L_t^2H_0^1$，$u'\in L_t^2H_x^{-1}$

$$\Longrightarrow u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$$

$$\uparrow\quad u'\in L^2(0,T;L^2)$$

观察上面的式子表示什么含义！

进步地，~~若g再对~~ 令 $\tilde u=u_t$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde u_t-\Delta\tilde u=\tilde f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \tilde u=\tilde g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$$

$\tilde f=\partial_t f$.

$\tilde g=f(\cdot,0)+\Delta g$
$=\partial_t u(\cdot,0)$.

两边乘 $\tilde u$.

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde u\cdot\partial_t\tilde u}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde u\|_{L^2}^2}-\underbrace{\tilde u\Delta\tilde u}_{\text{分部积分后会变成}\int|\nabla\tilde u|^2}=\tilde f\tilde u$$

对t积分 $\boxed{\text{x表示}}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\|\tilde u\|_{L^2}^2\,dt+\int_0^T\int|\nabla u_t|^2\,dx\,dt\lesssim\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx)$$

~~又: $\sup_{0\le}$~~

$$\Rightarrow\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2\,dx\,dt$$

$$\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx\right)$$

但 $\sup_{0\le t\le T}\|f(\cdot,t)\|_{L^2}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}+\|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$. ← (Thm 7.0.3).

李俊彦 PB13001112

又：$-\Delta u = f - \partial_t u$

所以. $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 \, dx \le C \int f^2 + (\partial_t u)^2 \, dx$. （椭圆正则性）.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\nabla^2 u|^2 \, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx\, dt$$

$$\le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 \, dx\right).$$

□.

由此，我们可以预测.

$$g \in H^2,\quad f' \in L^2(0,T;L^2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u \in L_t^\infty H_x^2 \\ u' \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_0^1 \\ u'' \in L^2(0,T;H^{-1}). \end{array}\right\} \text{这就是上述的结论.}$$

关于热方程，本身具有良好的光滑效应.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u_{t=0} = g \in L^2. \end{cases}$$

由Fourier变换有：$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$.

$$\Rightarrow \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}(t,\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$(\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$= \|(\underbrace{e^{-t|\xi|^2}\langle\xi\rangle^s}_{\text{有界Fourier乘子}}) \hat{g}\|_{L^2}.$$

Mikhlin-Hörmander乘子定理

$$\lesssim \|g\|_{L^2}. \qquad \forall s>0$$

对于热方程. $g \in L^2 \Rightarrow u \in C^\infty$

□.

章俊彦 PB13001112

Thm 7.1.4 (抛物方程正则性定理).

(1) 设 $g \in H_0^1(U)$, $f \in L^2(0,T;L^2(U))$. 设 $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

是 (*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } \partial U \times \{t=0\} \end{cases}$

那么有: $u \in L^2(0,T;H^2) \cap L^\infty(0,T;H_0^1)$. $u' \in L^2(0,T;L^2(U))$.

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$

$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$.

(2) 若 $g \in H^2(U)$. $f' \in L^2(0,T;L^2(U))$.

则 $u \in L^\infty(0,T;H^2)$. $u' \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H_0^1)$.

$u'' \in L^2(0,T;H^{-1})$.

且

$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$

$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$.

证明: (1) 类似之前的证明可得. $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.

(1.1) 逼近解 u_m' 满足.

$(u_m', u_m') + \underbrace{B[u_m, u_m'; t]}_{\parallel} = (f, u_m')$.

$\int_U \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' \, dx + \int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u_m u_m' + c u_m u_m' \, dx$.

而 $\int \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' \, dx = \int \frac{d}{dt} \left(\sum a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m\right) - \underbrace{\sum a^{ij} \partial_i u_m' \partial_j u_m}_{\text{左}} \, dx$.

章俊彦 PB13001112

从而 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$

(2).

$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \quad 1 \le k \le m.$

$\Downarrow$ 对t求导

$(u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

$\Downarrow$ 乘 $d_m^{k'}(t)$，对k求和.

$\forall m \in \mathbb{Z}_+.\quad (u_m'', u_m') + B[u_m', u_m'; t] = (f', u_m').$

$\Downarrow$ 令 $\tilde{u}_m = u_m'$ 则 $\tilde{u}_m(0) = u_m'(0) = -L u_m(0) + f(0).$

$(\tilde{u}_m', \tilde{u}_m) + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t] = (f', \tilde{u}_m).$

2.1

由 Thm 7.1.1（能量估计）. 有:

$$\sup_{0\le t\le T} \|\tilde{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\tilde{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2$$

$$\le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\tilde{u}_m'(0)\|_{L^2}^2\right).$$

$$\le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\tilde{u}_m(0)\|_{H^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2\right).$$

$$\le C\left(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2(U))} + \|\tilde{u}_m(0)\|_{H^2}^2\right)$$

✓

如何用g的H^2控制这项?

~~$u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m d_k^m w_k \in C^\infty(\bar{U})$.~~

~~其中 d_k^m 满足~~

注 $-\Delta$ 在 $H_0^1(U)$ 中有特征函数系 $\{w_k\} \subset C^\infty(\bar{U})$. $\Delta u_m = 0$ on ∂U.

~~$\therefore \|u_m(0)\|_{H^2(U)}^2$~~ $u_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U}).$

$$\int \Delta u_m \Delta u_m(0) \overset{\text{分部积分}}{=} \int |\nabla^2 u_m|^2 dx - \sum_{i,j} \int n_i \partial_i u_m \partial_j^2 u_m + n_j \partial_i u_m \partial_i \partial_j u_m \, ds.$$

青俊彦 PB13001112

$$\Rightarrow \int \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\int \sum a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m \, dx}_{\overset{!!}{A[u_m]}}.$$

因此:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}A[u_m] = (f, u_m) - \sum_i \int b^i \partial_i u_m u_m' \, dx - \int c u_m u_m'$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2}\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon \|u_m'\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 有:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}A[u_m] \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

积分可得. $\forall t \in [0,T]$.

$$\int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \underbrace{A[u_m]}_{\ge \theta |Du_m|^2} \le C\left(\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 dt + A[u_m(0)]\right).$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2 + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2\right)$$

用Thm 7.1.1

$$\|g\|_{L^2}^2 + \|Dg\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \int_0^t \|u_m'(\tau)\|_{L^2}^2 + \|Du_m(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau.$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \cancel{\|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^2 + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 dt + \sup_{0\le t\le T} \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2$$

$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right).$$

令 $m\to\infty$ 即得 $\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$ 的估计. 用到了习题6.

(取子列 m_i). $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

(1.2)

余下要估计 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}$.

由于: $(u', v) + B[u, v; t] = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

$B[u, v; t] = (f - u', v) \quad \forall v \in H_0^1(U) \quad$ a.e. $t \in [0,T]$

由椭圆方程正则性结论. $\|u\|_{H^2} \le C(\|f\|_2 + \|u'\|_{L^2})$ a.e. $0\le t\le T$

卓俊彦 PB13001112

但：

$$0 \le \|\partial_\nu w_k\|^2_{L^2(\partial U)} \overset{\text{Ch5. Ex. 9}}{\le} C\|w_k\|_{L^2(\partial U)}\|D^2 w_k\|^p_{L^2(\partial U)} = 0$$

这步是错误的！！！

$\Rightarrow \int_{\partial U}$ 项消失.

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|_{H^2}^2 \le C\|\Delta\tilde{u}_m(0)\|_{L^2}^2$$

$$= C(\Delta\tilde{u}_m(0), \Delta\tilde{u}_m(0))$$

$$\overset{\text{两次分部积分}}{=} C(g_m, \Delta^2\tilde{u}_m(0))$$

$(u_m(0), w_k) = (g, w_k)$

$$= C(g, \Delta^2\tilde{u}_m(0))$$

$$= C(\Delta g, \Delta\tilde{u}_m(0))$$

$$\le C\|\Delta g\|_{L^2}\|\Delta\tilde{u}_m(0)\|_{L^2}$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} C\left(\|g\|_{H^2}^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(0)\|_{H^2}^2\right)$$

注：这步的证明实际上利用的是椭圆正则性定理。根据条件，我们可以将 $u_m(t,x)$ 写成 $\sum d_m^k(t)w_k(x)$，令 $t=0$. 那么 $\Delta u_m(0)=\sum d_m^k(0)\lambda_k w_k(x)$，边值为0.根据椭圆正则性定理，有：$\|u_m(0)\|^2_{H^2} \le \|u_m(0)\|^2_{L^2} + \|\Delta u_m(0)\|^2_{L^2}$. 代入表达式，并利用 $0<\lambda_1<\lambda_2\le\dots$ 可以得到想要的式子。

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|_{H^2}^2 \le C\|g\|_{H^2}^2$$

这样：$\sup\limits_{0\le t\le T}\|u_m'(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u_m'\|_{H_0^1}^2\,dt \le C\left(\|f\|^2_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}^2\right)$.

~~从而 (1) 证毕.~~

$\Rightarrow$ $m=m_l\to\infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \le C\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2})$$

(2-2)

下面再估计 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}$.

首先 Fact（习题9）. $\exists\beta>0, \gamma\ge0$ s.t. $\beta\|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2$.

如今：$B[u_m, w_k] = (f - u_m', w_k)$. $1\le k\le m$.

乘以 $d_m^k\lambda_k$ 求和，有：$B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m', -\Delta u_m)$.

$$\| \quad (Lu_m, -\Delta u_m).$$

$$\Rightarrow \beta\|u_m\|_{H^2}^2 \overset{\text{Fact}}{\le} (Lu_m, -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= (f - u_m', -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

肖俊彦 PB13001112

$$\leq \|f\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \|u_m'\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\|\Delta u_m\|_{L^2}^2}_{\|D^2 u_m\|_{L^2}^2 \leq \|u_m\|_{H^2}^2} + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2\right) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$. 有:

$$\underbrace{\|u_m\|_{H^2}^2}_{\text{不可能}=\infty\ (\text{却有固定刻性保证})} \leq C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

对t积分.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq C\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

$H^1 \hookrightarrow L^\infty$ (dim=1).

$$\leq C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

~~对t积~~

(1.1)+(2.1)

$$\leq C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right).$$

$m = m_l \to \infty$ 即得 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq (\quad - - - - - \quad)$

由回忆 6.

(2.3) 余下估计 $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, 不妨记为 u_m'' 来写.

Fix any $v \in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. $\quad (u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$.

$$\|u_m''\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle u_m'', v\rangle|.$$

$$\cancel{= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle f' - B[u_m', v; t], v\rangle|}$$

$$v = v^1 + v^2 \in \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_m\} \oplus \mathrm{Span}\{w_{m+1}, \dots\}.$$

$$\sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \left|\langle f', v^1\rangle - B[u_m', v^1; t]\right| \Longrightarrow$$

肖俊彦 PB13001112

$$\le \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1}\left(\|f'\|_{L^2}\|v^1\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1}\|v^1\|_{H_0^1}\right)$$

$$\le \cancel{\sup_{H}} \|f'\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1}$$

再用 ②11 有:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}\right)$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right).$$

由引理5, 令 $m=m_l \to \cancel{+\infty}\infty$ 有

$$\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C\left(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right).$$

□

更高正则性可由归纳法得出, 此处处不再证明:

Thm 7.1.5 (高阶正则性).

设 $g\in H^{2m+1}(U)$, $\frac{d^k f}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))$.

$g_0=g\in H_0^1(U)$. $g_1=f(0)-Lg_0\in H_0^1(U),\dots,$ $g_m=\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}-Lg_{m-1}\in H_0^1(U)$.

则. $\frac{d^k u}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))$ $\quad 0\le k\le m+1$.

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}$$

$$\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)}\right).$$

□

章俊彦 PB13001112

Thm 7.1.6:

$g\in C^\infty(\bar U)$. $f\in C^\infty(\bar U_T)$. 且 $\forall m\in\mathbb{Z}_+$. $\begin{cases} g_0 = g \in H_0^1(U) \\ g_m = \dfrac{d^m f}{dt^m} - g_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases}$

则初边值问题(*)有唯一解 $u\in C^\infty(\bar U_T)$

□.

§7.2. 极大值原理.

本节将跳过 Harnack 不等式. 令 $Lu = -\sum_{ij} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i b^i u_{x_i} + cu$.

7.2.1 弱极大值原理.

Thm 7.2.1 $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar U_T)$. $c=0$ in U_T. $\Gamma_T = \bar U_T - U_T$.

(1) 若 $u_t + Lu \le 0$. in U_T. 则 $\max_{\bar U_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.

(2) 若 $u_t + Lu \ge 0$ in U_T 则 $\min_{\bar U_T} u = \min_{\Gamma_T} u$.

证明: 只证(1).

先设 $u_t + Lu < 0$ in U_T.

设 $(x_0, t_0)\in U_T$. $u(x_0,t_0) = \max_{\bar U_T} u$.

· 若 $0<t_0<T$. 则 $(x_0,t_0)\in U_T$ 内部

$\Rightarrow \partial_t u(x_0,t_0) = 0$

又: $Lu \ge 0$ at (x_0,t_0). (这与自课本6.4节 Thm 1中证明类似)

$\Rightarrow \partial_t u + Lu \ge 0$. 与假设矛盾.

· 若 $t_0 = T$. 则 $u_t \ge 0$ at (x_0,t_0) (因 u 在 (x_0,t_0) 达最大值)

同样有 $Lu\ge 0$. 推出矛盾.

一般情况. 即 $u_t + Lu \le 0$ 令 $u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$. $\varepsilon>0$.

则 $u_t^\varepsilon + Lu^\varepsilon = u_t + Lu - \varepsilon < 0$ in U_T

$\Rightarrow \max_{\bar U_T} u^\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. $\varepsilon\to 0$ 即得结论

□.

宣俊彦 PB13001112

对 $c\geq 0$，我们也有类似的结论

Thm 7.2.2：（弱极大值原理，$c\geq 0$）$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$ $c\geq 0$ in U_T

(1). 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T 则 $\max\limits_{\bar{U}_T} u\leq \max\limits_{\Gamma_T} u^+$.

(2) 若 $\partial_t u+Lu\geq 0$ in U_T，则 $\min\limits_{\bar{U}_T} u\geq -\max\limits_{\Gamma_T} u^-$

(3) $=0$ 则 $\max\limits_{\bar{U}_T}|u|=\max\limits_{\Gamma_T}|u|$

□.

Thm 7.2.3：Harnack 不等式

$u\in C_1^2(U_T)$ 满足 $u_t+Lu=0$ in U_T.
$u\geq 0$ in U_T.

$V\subset\subset U$ 连通，则 $\forall\, 0<t_1<t_2\leq T$，$\exists C>0$ s.t. $\sup\limits_V u(\cdot,t_1)\leq C\inf\limits_V u(\cdot,t_2)$

□.

7.2.2. 强极大值原理.

设 $t_0\in[0,T]$，$U_{t_0}=U\times[0,t_0]$.

Thm 7.2.4（强极大值原理）$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c=0$ in U_T. U 是连通集.

(1) 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T. u 在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的最大值.

则 u 是 U_{t_0} 上的常值函数.

(2). - - - - - - - - - - - - - - 最小值

以上，假设 L 的系数是光滑的.

证明：只证 (1). 设 $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. v 满足

$$\begin{cases}\partial_t v+Lv=0 & \text{on } W_T\\ v=u & \text{on } \bar{W}_T-W_T=:\Delta_T\end{cases}$$

由弱极大值原理. $u\leq v$. 令 $M=\max\limits_{\bar{U}_T} u$. ~~$u\leq v\leq M$~~

则 $v=M$ at ~~(t_0,x_0)~~ (x_0,t_0).

$\tilde{v}:=M-v$. 则 $c=0\Rightarrow\begin{cases}\partial_t\tilde{v}+L\tilde{v}=0\\ \tilde{v}\geq 0\end{cases}$ in W_T.

任取 $V\subset\subset W$. $x_0\in V$. V 连通. $0<t<t_0$.

由 Harnack 不等式. $\max\limits_V \tilde{v}(\cdot,t)\leq C\inf\limits_V \tilde{v}(\cdot,t_0)\leq\tilde{v}(x_0,t_0)=0$

章俊彦 PB13001112

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ on $V\times\{t\}$ $\forall t\in(0,t_0)$.

$\forall V\subset\subset W$.

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ in W_{t_0}

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow v=M \text{ in } W_{t_0}\\ v=u \text{ on } \Delta_T\end{array}\right\}\Rightarrow u=M \text{ on } \partial W\times[0,t_0]$$

$$\left.\begin{array}{l}\\ \forall W\subset\subset U\end{array}\right\}\Rightarrow u=M \text{ on } U_{T_0}$$

□.

Thm 7.2.5 (c≥0 的强极大值原理). $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c\geq 0$ in U_T.
U连通

(1) 若 $u_t+Lu\leq 0$ in U_T u 在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的非负最大值. 则 u 在 U_{t_0} 中是常数.

(2). ≥ 0 非正最小值.

只证(1).

Proof. $M:=\max_{\bar{U}_T} u \geq 0$.

$u_t+Lu\leq 0$ in U_T.

若 $M=0$. 则由 Thm 7.2.4 即可.

若 $M>0$. 同 7.2.4. 选取. $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. $K:=L-cI_d$.

$$\begin{cases} v_t+Kv=0 & \text{in } W_T.\\ v=u^+ & \text{on } \Delta_T.\end{cases}$$

$0\leq v\leq M$

on $\{u\geq 0\}$. 有 $u_t+Ku\leq -cu\leq 0$.

那么由弱极大值原理. $u-v\leq 0$

$\Rightarrow v=M$ at (t_0,x_0)

同 7.2.4

令 $\tilde{v}=M-v$. 则 $\partial_t\tilde{v}+K\tilde{v}=0$ 且. $\tilde{v}\geq 0$ in W_T

任取 $V\subset\subset W$ $x_0\in V$. V连通 $0<t<t_0$. 由 Harnack 不等式知.

$v=u^+=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$. 又 $M>0$. 故 $u\equiv M$ on $\partial W\times[0,t_0]$ □

肖俊彦 PB13001112

§7.3 二阶双曲方程的弱解理论

$U_T := U\times(0,T]$, $T>0$. $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集.

考虑初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T. \\ u = 0. & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g.\ \partial_t u = h. & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$f: U_T\to\mathbb{R}$. $g, h: U\to\mathbb{R}$ 给定.

$u: \overline{U_T}\to\mathbb{R}$ 未知.

· $Lu := -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a^{ij}(x,t)\,\partial_{x_i}u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\,\partial_{x_i}u + c(x,t)\,u$.

· L 满足 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$. $\forall (x,t)\in U_T$. $\xi\in\mathbb{R}^n$. for some $\theta>0$.

则称 ∂_t^2+L 为一致双曲的.

· $a^{ij}=\delta_{ij}$. $b^i=c=0$. $L=-\Delta$. 则化为波方程 $\Box u=0$, $\Box=\partial_t^2-\Delta$.

7.3.1 弱解定义

设 $\begin{cases} a^{ij}, b^i, c\in C^1(\overline{U_T}). & a^{ij}=a^{ji} \\ f\in L^2(U_T) \\ g\in H_0^1(U), h\in L^2(U). \end{cases}$

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\,\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\cdot v + c(\cdot,t)\,uv\,dx.$$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$, $0\leq t\leq T$.

<u>Definition</u> 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ (且 $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$, $u''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$) 是 $(*)$ 的弱解, 若: ① $\langle u'', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

② $u(0)=g$. $u'(0)=h$.

<u>Rmk</u>: 事实上, $u\in C([0,T];L^2(U))$, $u'\in C([0,T];H^{-1}(U))$. 所以谈论逐点值是有意义的.

章俊彦 PB13001112

为何如此定义？

· 形式推导：分部积分即有

$$(u'',v) + B[u,v;t] = (f,v) \qquad 0\le t\le T \quad v\in H_0^1(U)$$

$\Rightarrow$ u_{tt} 可以表示为 $u_{tt} = \underbrace{g^0 + \sum_{j=1}^n \partial_j(g^j)}_{\parallel} = \sum_1 a^{ij}\partial_i u.$

$f - \sum b^i \partial_i u - cu.$

$\Rightarrow$ 应该使 u 满足 $u''\in H^{-1}(U)$ (a.e. $t\in[0,T]$)

□.

7.3.2 弱解存在唯一性（Galerkin逼近）.

$$(*)\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ \partial_t u = h \quad u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

与7.1类似. 选取 $-\Delta$ 的特征函数（紧致性）$\{w_k\}$ 作为 $L^2(U)$ 的标准正交基，$H_0^1(U)$ 的正交基.

Fix $m\in\mathbb{Z}_+$. 取 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$.

问：如何选取 d_m^k 满足需求？

希望：

$$(\#)\begin{cases} d_m^k(0) = (g,w_k). & (\text{因 } g=\sum (g,w_k)w_k) \\ d_m^{k\prime}(0) = (h,w_k) & h=\sum (h,w_k)w_k. \\ (u_m'',w_k) + B[u_m,w_k;t] = (f,w_k). & 0\le t\le T. \quad 1\le k\le m. \end{cases}$$

Step 1: 构造逼近解序列

Thm 7.3.1（逼近解序列的构造）.

$\forall m\in\mathbb{Z}_+$. 存在唯一具有形式 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 的函数 u_m，使 $(\#)$ 式成立.

肖俊彦 PB13001112

注意到

$$B_1 = \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m_{x_i}} u'_{m_{x_j}} \, dx$$

$$= \int_U \sum_{i,j} \partial_t (a^{ij} u_{m_{x_i}} u_{m_{x_j}}) \, dx - \int_U \sum_{i,j} \partial_t a^{ij} u_{m_{x_i}} u_{m_{x_j}} \, dx$$

$$- \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u'_{m_{x_i}} u_{m_{x_j}} \, dx$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m_{x_i}}(t) u_{m_{x_j}}(t) \, dx - \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t a^{ij} u_{m_{x_i}} u_{m_{x_j}} \, dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m_{x_i}} u_{m_{x_j}}(t) \, dx - C \|u_m\|^2_{H_0^1}$$

$$|B_2| \leq C \left(\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u'_m\|^2_{L^2(U)} \right)$$

Cauchy-Schwartz

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\|u'_m(t)\|^2_{L^2} + \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m_{x_i}}(t) u_{m_{x_j}}(t) \, dx \right)$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(U)} + \|u'_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(U)} \right)$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \int_U \sum_{i,j}^{n} a^{ij} u_{m_{x_i}}(t) u_{m_{x_j}}(t) \, dx + \|f\|^2_{L^2(U)} \right)$$

L一致椭圆

令 $\eta(t) = \|u'_m(t)\|^2_{L^2} + \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m_{x_i}}(t) u_{m_{x_j}}(t) \, dx$

$\xi(t) = \|f(t)\|^2_{L^2}$

$$\Rightarrow \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

肖俊彦 PB13001112

Proof: 设 $u_m(t)=\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$.

则 $(u_m'' \cdot w_k) = d_m''(t)$.

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{B[w_k, w_l; t]}_{= e^{kl}(t)}$$

$f^k(t) := (f(t), w_k)$.

则 (#) $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} d_m^{k''}(t) + \sum_{k=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^{l}(t) = f^k(t). \\ d_m^k(0) = (g, w_k). \\ d_m^{k'}(0) = (h, w_k) \end{cases}$$

由ODE存在唯一性定理即得

□.

~~7.3.2. 能量估计~~

Step 2: 证明逼近解序列一致有界.

Thm 7.3.2 (能量估计). $\exists C = C(U, T, L) > 0$ s.t.

$$\sup_{0\le t\le T} \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|_{L^2(U)} \right) + \|u_m''(t)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}$$

$$\le C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)} \right). \qquad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Proof: (#) 中两边乘以 $d_m^{k'}(t)$, 对 k 求和可得:

$$\underbrace{(u_m'', u_m')}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_{L^2}^2} + B[u_m, u_m'; t] = (f, u_m'). \qquad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

$$B[u_m, u_m'; t] = \underbrace{\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j}'\, dx}_{B_1} + \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{m x_i} u_m' + c u_m u_m' dx}_{B_2}$$

曹俊彦 PB13001112

由 Gronwall 不等式

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s)\, ds\right) \qquad 0 \le t \le T$$

$$\eta(0) = \|u_m'(0)\|_2^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m_{x_i}}(0)\, u_{m_{x_j}}(0)\, dx$$

$$\le C\left(\|h\|_{L^2}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m_{x_i}}(t)\, u_{m_{x_j}}(t)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

L-致和有界

$$\Longrightarrow \quad \sup_{0\le t\le T}\left(\cancel{\|u_m(t)\|_{H_0}^2} \; \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\right) \le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L_t^2L_x^2}^2\right)$$

再估计 $\|u_m''\|_{L_t^2H_x^{-1}}$.

Fix $v \in H_0^1(U)$, $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ $\qquad v = \underset{\text{Span}\{w_k\}_1^m}{v^1} + v^2 \in (\text{Span}\{w_k\}_1^m)^\perp$

$$\langle u_m'', v\rangle = (u_m'', v)$$

$$= (u_m'', v_1) + \underbrace{(u_m'', v_2)}_{=0}$$

$$= (f, v_1) - B[u_m, v_1; t]$$

$$|\langle u_m'', v\rangle| \le C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(U)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\right)$$

对 t 积分

$$\int_0^T \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2\, dt \le C\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\, dt$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2L_x^2}^2\right)$$

章俊彦 PB13001112

Step3：解的存在性与唯一性 (Banach-Alaoglu).

Thm 7.3.3 (*) $\exists!$ weak sol.

Pf：由 7.3.2 及习题 5 知.

$\exists$ 子列 $\{u_{m_l}\}$ $u \in L^2(0,T;H_0^1)$ $u' \in L_t^2 L_x^2$. $u'' \in L_t^2 H_x^{-1}$.

s.t. $u_{m_l} \longrightarrow u$ in $L_t^2 H_x^1$

$u_{m_l}' \longrightarrow u'$ in $L_t^2 L_x^2$

$u_{m_l}'' \longrightarrow u''$ in $L_t^2 H_x^{-1}$

令 $v = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k$. $d^k \in C^\infty$ 设 $m \geq N$.

在 $(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ 两边乘 $d^k(t)$. 对k求和.

对t积分有

$$\int_0^T \langle u_m'', v\rangle + B[u_m, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt.$$

$m = m_l$. $l \to \infty$

$$\Rightarrow \int_0^T \langle u'', \vec{v}\rangle + B[u, \vec{v}; t]\, dt = \int_0^T (f, \vec{v})\, dt. \quad \forall \vec{v} \in L^2(0,T;H_0^1).$$

因 $\left\{\sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k\right\}_{N=1}^{\infty}$ dense ~~in L^2~~

$\vec{v} = \begin{cases} v \in H_0^1 \cap C_c^\infty \\ \tilde{v} \in L^2(0,T) \end{cases}$

$$\Rightarrow \langle u'', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v). \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

a.e. $t \in [0,T]$.

$$\begin{cases} u \in C([0,T]; L^2), \quad u' \in C([0,T]; H^{-1}). \end{cases}$$

如今还需验证 $u(0) = g$ $u'(0) = h$.

$\forall v \in C^2([0,T]; H_0^1)$. $v(T) = v_0'(T) = 0$. 对t分部积分得：

$$\int_0^T \langle v'', u\rangle + B[u, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt - (u(0), v'(0)) + \langle u'(0), v(0)\rangle.$$

同样 $\int_0^T \langle v'', u_{m_l}\rangle + B[u_{m_l}, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt - (u_{m_l}(0), v'(0)) + \langle u_{m_l}'(0), v'(0)\rangle$

$l \to \infty$ 得. ∎

章俊彦 PB13001112

下面证明唯一性：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u|_{\partial U} = 0 & \forall t\in[0,T] \\ u(0)=0,\ \partial_t u(0)=0 \end{cases}$$

只有零解

Fix $s\in[0,T]$. $v(t) := \int_t^s u(\tau)\,d\tau \cdot \chi_{\{s\ge t\ge T\}}(t)$

则 $\forall t\in[0,T]$, $v(t)\in H_0^1(U)$. 进而由弱解定义知.

$$\int_0^s \langle u'', v\rangle + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

由 $u'(0)=v(s)=0$. 分部积分有.

$$\int_0^s -(u',v') + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

$$\xRightarrow{v'=-u} \int_0^s \langle u', u\rangle - B[v',v;t]\,dt = 0.$$

$$\langle u', u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2.$$

而 $B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot v + cv^2 v\,dx$.

$$\frac{d}{dt}B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}\partial_i v\partial_j v + \boxed{2a^{ij}\partial_i v_t\partial_j v} + \sum_{i=1}^n b_t^i\partial_i v\cdot v + \boxed{2b^i\partial_i v_t\cdot v} + c_t v\cdot v + \boxed{2cv\,dx}$$

$b^i\partial_i v\cdot v_t$. $-1\, b^i\partial_i v_t\cdot v$. $\partial_i v_t = \partial_t u$.

$$= 2B[v',v;t]$$

$$\Rightarrow + \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}\partial_i(v)\partial_j v + \sum_{i=1}^n b_t^i\partial_i(v)\cdot v + c_t\cdot(v)\cdot v\right)dx$$

$$- \int_U \left(\sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot(\underbrace{-v_t}_{=u.\ (因\ -v'=u)}) - \sum_{i=1}^n b^i\partial_i u\cdot v\right)dx$$

最后一项分部积分

$$= 2B[v',v;t] + D[v,v;t] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\, u\,dx \cancel{- \int_U \sum_{i=1}^n b^i_{x_i} v_t\cdot u}$$

$$- \int_U \sum_{i=1}^n (b^i_{x_i} u\cdot v + b^i u\cdot v_{x_i})\,dx \qquad \cancel{- \int_U \sum_{i=1}^n b^i v_t\cdot u_{x_i}}$$

$$= 2B[v',v;t] + C[u,v;t] + D[v,v;t].$$

章俊彦 PB13001112

其中 $C[u,v;t] := -\int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot u + \frac{1}{2} b^i_{x_i} uv \, dx$

$D[u,v;t] := \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_t^i u_{x_i} v + c_t uv \, dx$. $\quad \forall u,v \in H_0^1(U)$

$$\Rightarrow \int_0^S \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}B[v,v;t]\right) dt$$

$$= -\int_0^S C[u,v;t] + D[v,v;t] \, dt.$$

左边 $= \frac{1}{2}\|u(s)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}B[v(0),v(0);t]}_{\gtrsim \|v(0)\|_{H_0^1}}$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + \|v(0)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\leq C\left(\int_0^S \|v\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2 + \|v(0)\|_{L^2(U)}^2\right)$$

令 $w(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$. 则 $\underline{v(t) = w(s) - w(t)}$. $\quad \forall 0 \leq t \leq T$.

从而

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\leq C\left(\int_0^S \|w(t)-w(s)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(U)}^2 dt + \|w(s)\|_{L^2(U)}^2\right)$$

$$\leq C\int_0^S 2\|w(t)\|_{H_0^1}^2 + \underbrace{2\|w(s)\|_{H_0^1}^2}_{\text{拿出去}} dt + \|u(t)\|_{L^2}^2 dt + \|w(s)\|_{L^2}^2$$

$\|w(s)\|_{L^2} \leq \int_0^S \|u(t)\|_{L^2}$

$$\leq 2SC\|w(s)\|_{H_0^1}^2 + C\int_0^S \|w\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \, dt.$$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + (1-2SC)\|w(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C\int_0^S \|w\|_{H_0^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \, dt.$$

选 T_1. 使. $1-2T_1C_0 \geq \frac{1}{2}$ 则 $S \in [0,T_1]$ 时.

$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C\int_0^S \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1}^2 \, dt$. 由 Gronwall 不等式

有 $u \equiv 0$ in $[0,T_1]$. 再在 $[T_1, 2T_1]$. $[2T_1, 3T_1]$ .... 以此类推即可 ∎

青俊彦 PB13001112

7.3.3. 正则性.

与抛物方程类似，我们先对最简单的双曲方程（波方程）进行形式推导，来寻找正则性结果.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g,\ u_t = h & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

u是速降解.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 + u_t^2\, dx\right) = 2\int_{\mathbb{R}^n} Du \cdot Du_t + u_t u_{tt}\, dx.$$

分部积分 $= 2\int u_t \cdot (u_{tt} - \Delta u)\, dx.$

$$= 2\int u_t \cdot f\, dx.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx$$

~~由 Gronwall 不等式知.~~

~~对 t 积分. $(\forall 0 \leq t \leq T)$.~~

$$\leq 1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |Du|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2.$$

$$\cancel{\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h_t^2(t)\, dx\, d\tau - \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2(0)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |Du(0)|^2 dx}$$

$$\cancel{\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx\, d\tau + \int}$$

令 $\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2(t) + |Du(t)|^2\, dx$. $\chi(t) = \int f^2(t)\, dx$. 则 $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \chi(t)$

$\phi(t) = 1$.

则由 Gronwall 不等式知.

$$\eta(t) \leq C(t)\left(\eta(0) + \int_0^t \chi(s)\, ds\right)$$

对t和sup.

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \int |Du(t)|^2 + |u_t(t)|^2\, dx \leq G\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} h^2\, dx\right).$$

从而对波方程.

$$\|u\|_{L_t^\infty H_0^1} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_x^2} \lesssim_T \|f\|_{L_t^2 L_x^2} + \|g\|_{H_0^1} + \|h\|_{L^2}.$$

卓俊彦 PB13001112

再考虑更高正则性：

令 $\tilde{u} = u_t$. 则 $\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u}(0) = \tilde{g} := h. \\ \partial_t \tilde{u}(0) = \tilde{h} := u_{tt}(\cdot,0) = f(\cdot,0) + \Delta g. \end{cases}$

$\Rightarrow \{ u_t$

则由之前的形式可得，有：

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx \le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 + f(\cdot,0)^2 dx\right)$$

又：$\sup_{0\le t\le T} \|f(\cdot,t)\|_{L^2} \le C\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}\right)$

由Sobolev嵌入.

又：$-\Delta u = f - u_{tt} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_{tt}^2 \, dx. \quad \forall 0 \le t \le T.$

平方. 对x积分.

左边分部积分2次.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 + |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx.$$

$$\le C_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + f_t^2 \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 \, dx.$$

□

从而 ~~get~~

$$\|u(t)\|_{L_t^\infty H_x^2} + \|u'(t)\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u'\|_{L_t^2 H_x^1}$$

$$+ \|u''\|_{L_t^2 H_x^{-1}} \lesssim \|f\|_{H_t^1 L_x^2} + \|g\|_{H^2}.$$

章俊彦 PB13001112

下面证明双曲方程的正则性定理，要注意插入的 $\{w_k\}$ 是 Ch6.7 中构造的 $-\Delta$ 的特征函数系，是 L^2 的标准正交基 H_0^1 的正交基.

Thm 7.3.4:

(1). 设 $g\in H_0^1(U)$, $f\in L_t^2L_x^2((0,T]\times U)$. 设 $u\in L^2(0,T;H_0^1)$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1})$ 是双曲方程

$$\begin{cases} \partial_{tt}u+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

的弱解.

则: $u\in \cancel{L^2(0,T;H^2(U))}\cap L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u'\in L^\infty(0,T;L^2(U))$

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u'(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}$

$\le C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2(U)})$.

(2). 若还有: $g\in H^2(U)$. $h\in H_0^1(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2(U))$. $u'\in L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u''\in L^\infty(0,T;L^2(U))$. $u'''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

且. $\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}+\|u''(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

$+\|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C(\|f\|_{H_t^1L_x^2}+\|g\|_{H^2}+\|h\|_{H^1})$.

证明: 在 Thm 7.3.2 中. 已证明:

$$\sup_{0\le t\le T}(\|u_m(t)\|_{H_0^1}+\|u_m'(t)\|_{L^2})\le C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2})$$

令 $m=m_l\to\infty$. 由 $u_{m_l}\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$

$u_{m_l}'\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H^{-1})$

知. (1)成立.

肖俊彦 PB13001112

(2) 令 $\widetilde{u_m'} = u_m'$.

则 ~~由弱解定义有~~ 由逼近解的构造有

$$(\widetilde{u_m''}, w_k) + B[\widetilde{u_m}, w_k] = (f', w_k) \qquad 1 \le k \le m.$$

两边乘 $d_m^{k''}$. 对 k 从 1 到 m 求和. 因 $\widetilde{u_m'} = u_m'' = \sum d_m^{k''} w_k$.

$$\Rightarrow (\widetilde{u_m''}, \widetilde{u_m'}) + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m'}] = (f', \widetilde{u_m'})$$

与 Thm 7.7.2 类似.

令 $A[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx. \quad u, v \in H_0^1(U)$.

则有 $\frac{d}{dt}\left(\|\widetilde{u_m'}\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}]\right) \le C\left(\|\widetilde{u_m'}\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}] + \|f'\|_{L^2}^2\right)$. $\cdots (*)$

下面先估计 (2) 中除了 u''' 的项.

由于 $B[u_m, w_k] = (f - u_m'', w_k)$.

两边乘 $\lambda_k d_m^k(t)$

$$\Rightarrow B[u_m, \underbrace{\lambda_k u_m}_{\Delta u_m}] = (f - u_m'', \lambda_k u_m)$$

对 k 求和 $\Rightarrow$

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k \qquad B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m'', -\Delta u_m)$$

$$= (Lu_m, -\Delta u_m)$$

由习题 7.9 知

$\exists \beta > 0, \gamma \ge 0$, s.t. $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$ 有:

$$\beta \|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_m\|_{H^2(U)}^2 \le C(Lu_m, -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C\, B[u_m, -\Delta u_m] + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C(f - u_m'', -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

这里. 对 $u_m'' \Delta u_m$ 先用 Hölder 变成 $\|u_m''\|_2 \|\Delta u_m\|_2$. 再用 Young. $\le \varepsilon \|\Delta u_m\|_2^2 + C(\varepsilon) \|u_m''\|_2^2$

ε 充分小, 本应放边 $\|u\|$.

$$\le C\left(\|f\|_2^2 + \|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

章俊彦 PB13001112

又：$\widetilde{u_m} = u_m'$ 由

对(*)由用 Gronwall 有：

$$\cancel{\|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{H^1}^2 \le C\|f'\|^2_{H_t^1L_x^2} + \|u_m'(0)\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|\widetilde{u_m''}\|^2_{L^2(U)} + \|u_m'(t)\|^2_{H^1(U)}$$

$$\le C_T\left(\|u_m''(0)\|^2_{L^2} + \|u_m'(0)\|^2_{H^1(U)} + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$

$$\le C_T\left(\|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H^2} + \|h\|^2_{H^1} + \|f\|_{H^1(0,T;L^2)}\right)$$

$f(\cdot,0)+\Delta g$

Sobolev嵌入

$d=1$, $H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\le C_T\left(\|f\|^2_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H^2} + \|h\|^2_{H^1}\right).$$

u''' 估计与抛物方程 u'' 类似，略去

□

Rmk：此方程的正则性到不了抛物方程那么高（只有 $L^\infty_t H^1_0$，没有 $L^2_t H^2_x$

这是因为，抛物正则性证明过程中，在证得 $u\in L^\infty_t H^1_0$，$u'\in L^2_t L^2_x$ 后，

可以利用 $(u',v) + B[u,v] = (f,v)$ $\forall v\in H^1_0(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

$\Rightarrow$ $B[u,v] = (\underbrace{f-u'}_{\in L^2(U)}, v)$ a.e. $t\in[0,T]$ 再用椭圆方程正则性定理得 $u\in L^2_x$.

但双曲方程的推导中，不能证得 $u''\in L^2_t L^2_x$，只有 $L^2_t H^{-1}_x$.

从而 $B[u,v] = (f-u'', v)$ 中，$f-u''\in H^{-1}$，不在 L^2 中.

不能证得 $u''\in L^2_t L^2_x$ 的原因在于：

· 抛物方程中证明 $u_m'\in L^2_t L^2_x$ 时，用 $(\underbrace{u_m', u_m'}_{\text{这直接是 } u_m' \text{ 的 } L^2 \text{ 范数}}) + B[u_m, u_m'] = (f, u_m')$.

而在双曲方程中，只有 $(\underbrace{\widetilde{u_m''}, \widetilde{u_m}'}_{\text{只是 } \frac{d}{dt}\|u_m''\|^2_{L^2}}) + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}'] = (f', u_m')$.

导致后面用 Gronwall 不好使时出不来 $\|u_m''\|_{L^2L^2}$，只有 u_m' 的估计.

□

事实上，波方程、Schrödinger 方程与色散方程，其正则性和光滑效应比抛物方程差很多。色散方程常讨论的 P 都是低正则性问题，但抛物方程并不如此.

曹俊彦 PB13001112

本节最后，我们不加证明地~~并~~叙述高阶正则性的结果.

Thm 7.3.5:

(1) 设 $g\in H^{m+1}(U)$, $h\in H^m(U)$. $\frac{d^k f}{dt^k}\in L^2_t H^{m-k}_x$.

且 $g_0 := g\in H_0^1$ 与 $h_1 := h\in H_0^1$

$$\begin{cases} g_{2l} := \frac{d^{2l-2}f(\cdot,0)}{dt^{2l-2}} - Lg_{2l-2}\in H_0^1 & \text{if } m=2l. \\ h_{2l+1} := \frac{d^{2l-1}}{dt^{2l-1}}f(\cdot,0) - Lh_{2l-1}\in H_0^1 & \text{if } m=2l+1 \end{cases}$$

成立，则

$$\frac{d^k u}{dt^k}\in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)). \qquad 0\le k\le m+1.$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L^\infty H^{m+1-k}(U_T)} \le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L^2_t H^{m-k}_x} + \|g\|_{H^{m+1}(U)} + \|h\|_{H^m(U)}\right)$$

(2). $g, h\in C^\infty(\bar U)$. $f\in C^\infty(\overline{U_T})$. 上述条件对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都成立.

则 $\exists!\ u\in C^\infty(\overline{U_T})$ 成为原方程的解.

$\square$

~~7.3.4: 等~~

7.3.4: 二元PDE的分化.

考虑: $\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{2} b^i\partial_i u + cu = 0$. $\qquad a^{ij}=a^{ji}$. $(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$. $U\subset\mathbb{R}^2$.

问: 上述方程能否通过变量替换, 化成常见形式?

设: $y=\Phi(x)$ i.e. $y_1 = \phi^1(x_1,x_2)$, $y_2=\phi^2(x_1,x_2)$. $\qquad u(x)=v(\phi(x))$, $v(y)=u(\chi(y))$. $\chi:=\Phi^{-1}$.

从而 $\partial_{x_i}u = \sum_{k=1}^{2}\partial_{y_k}v\,\partial_{x_i}\Phi^k$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u = \sum_{k,l=1}^{2}\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l + \sum_{k=1}^{2}\partial_{y_k}v\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi^k.$$

章俊彦 PB13001112

代入(*)，有：

$$(*)=\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l \quad + \text{一堆一阶项、零阶项.}$$

$$=\sum_{k,l=1}^{2}\widetilde{a_{kl}}\cdot\partial_{y_k}\partial_{y_l}v+\cdots,\quad \widetilde{a_{kl}}=\sum_{i,j=1}^{2}a^{ij}\phi^k_{x_i}\phi^l_{x_j}\qquad\cdots(\#).$$

对(#)，为了使它的形式尽可能简洁，我们需要选取合适的 ϕ.

* 例如，若我们希望 $\widetilde{a^{11}}=\widetilde{a^{22}}=0$.

则这要求 $\cancel{0=a^{11}(\partial_{x_1}v)^2}$

$$0=a^{11}(\partial_{x_1}\phi^1)^2+2a^{12}\partial_{x_1}\phi^1\partial_{x_2}\phi^1+a^{22}(\partial_{x_2}\phi^1)^2$$

$$0=a^{11}(\partial_{x_1}\phi^2)^2+2a^{12}\partial_{x_1}\phi^2\partial_{x_2}\phi^2+a^{22}(\partial_{x_2}\phi^2)^2$$

即 ϕ^1,ϕ^2 是方程：

$$a^{11}(\partial_{x_1}u)^2+2a^{12}\partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}u+a^{22}(\partial_{x_2}u)^2=0\quad \text{in } U\qquad\cdots(**).$$

的解

- 再假设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 且 $\det A=a^{11}a^{22}-(a^{12})^2<0$. 此时我们称(*)是双曲的. 根据条件，我们对(**)化简如下.

$$a^{11}(**)=\left(a^{11}\partial_{x_1}u+\left(\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}+a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right)\left(a^{11}\partial_{x_1}u+\left(-\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}+a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right)\qquad\cdots(***)$$

$$=0.$$

$\Rightarrow$ (***) 是如下2个方程之乘积：

(#1) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u+\left(a^{12}+\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u=0$

(#2) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u+\left(a^{12}-\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u=0.$

如今：让 ϕ^1 为(#1)的解，且 $\nabla\phi^1\neq0$，则 ϕ^1 沿直线 $\vec{x}=\begin{cases}\dot{x}^1=a^{11}\\ \dot{x}^2=a^{12}+\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\end{cases}$ 为 const.

让 ϕ^2 为(#2)的解，且 $\nabla\phi^2\neq0$，则 ϕ^2 沿直线 $\vec{x}=\begin{cases}\dot{x}^1=a^{11}\\ \dot{x}^2=a^{12}-\sqrt{\cdots}\end{cases}$ 为 const.

这称作(*)的"特征线".

肖俊彦 PB13001112

而 $\tilde{a}^{12} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \partial_{x_i} \phi^1 \partial_{x_j} \phi^2 \neq 0$ in U

从而 (*) 化为

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} V + \cdots = 0$$

一阶项、零阶项

这称作 (*) 的第一类规形式.

若又令 $z_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$\Rightarrow$ $\partial_{z_1}^2 w_1 - \partial_{z_2}^2 w_2 + \cdots = 0$. 这称作第二类规形式.

章俊彦 PB13001112

§7.4：有限传播速度

7.4.1：预备知识1：余面积公式及其推论
(coarea)

Def (Jacobian of a Lipschitzian map).

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为Lipschitz映射. $Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 & \cdots & \partial_{x_n} f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f^m & \cdots & \partial_{x_n} f^m \end{pmatrix}$，若 f 在 x 处可微

对 $\mathcal{L}^n$-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$，之 f 的 Jacobian 为

$$Jf(x) := [\![Df(x)]\!]$$

其中，对线性映线 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$[\![L]\!] := \begin{cases} \sqrt{\det(L^* \circ L)}, & n \le m \\ \sqrt{\det(L \circ L^*)}, & n \ge m \end{cases}$

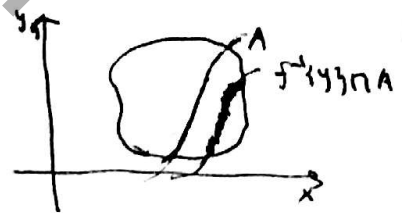
~~Thm 7.4~~

Lemma 7.4.1（余面积公式）. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是Lipschitz映射. $n \ge m$.
则 $\forall \mathcal{L}^n$-可测集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，有：$\int_A Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$.

证明见 L.C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and FINE Properties of Functions, Revised Version. CRC Press. 2015. ∎

Rmk: ① 当 f 是线性映射时，lem 7.4.1 可以看作"拿着in" Fubini thm.

② 一般地，可以看作"弯曲in Fubini 定理".



$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^1$

Jf 之积分
=
弯曲切片的特征性函数对 $\mathcal{H}^{n-m}$ 求积分
再将切片积分.

③ 若令 $A = \{Jf = 0\}$，则 $\mathcal{H}^{n-m}(\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\}) = 0$. $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$

这与 Sard 定理（$f \in C^k$，则对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 有 $\{Jf=0\} \cap f^{-1}\{y\} = \emptyset$）. 其目的得到 $\mathcal{H}^{n-m}$ 零测. f 只需 Lip 即可.

肖俊彦 PB13001112

corollary 7.4.1 (水平集积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. $n \geq m$. 则 $\forall$ $\mathcal{L}^n$-可积的 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

有:

(1) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ $\mathcal{H}^{n-m}$-可积. 对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 成立.

(2). $\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$

Rmk: $\forall y \in \mathbb{R}^m$. $f^{-1}\{y\}$ 闭 从而 $\mathcal{H}^{n-m}$-可测. 因此 (2) 是合法的.

~~引理~~

首先有以下引理.

lemma 7.4.2: $f: X \to [0, \infty]$ 为 μ-可测函数 则 $\exists$ μ-可测集 $\{A_i\}_1^\infty \subseteq X$.

s.t. $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

Pf: 令 $A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$.

$A_k = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}\}$.

从而 $f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

又: 若 $f(x) = \infty$ 则 $\forall k$. $x \in A_k$

若 $0 \leq f(x) < \infty$. 则 对充分大的 n. $x \notin A_n$.

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}$. #.

回到 cor 7.4.1: 不妨 $g \geq 0$. 则 由 lem 7.4.2 有: $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

for some $\mathcal{L}^n$-可测集 $\{A_k\}_1^\infty$

则 $\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx \overset{MCT}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{A_k} Jf \, dx$.

$\overset{\text{coarea formula}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$

$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$.

$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$.

章俊彦 PB13001112

lem 7.4.3 (水平集积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip.

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\}) dt$

(2). 若 $\operatorname{essinf} |\nabla f| > 0$. 且 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-可积. 则

$$\int_{\{f>t\}} g\, dx = \int_t^{\infty} \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds$$

特别地: $\frac{d}{dt} \int_{\{f>t\}} g\, dx = - \int_{\{f=t\}} \frac{g}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1}$. $\mathcal{L}^1$-a.e. $t \in \mathbb{R}$.

Pf: (1) 在 Coarea formula 中. 令 $m=1$. 并注意 $Jf = |\nabla f|$.

(2) (3): $E_t := \{f>t\}$

由上一引理知

$$\int_{E_t} g\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_t} \cdot \frac{g}{|\nabla f|} Jf\, dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} \chi_{E_t} d\mathcal{H}^{n-1} ds.$$

$$= \int_t^{\infty} \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds$$

□.

章俊彦 PB13001112

7.4.2：双曲方程的有限传播速度.

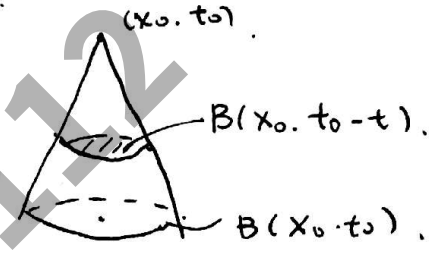
· 波动方程的有限传播速度.

设 $u\in C^2$ solves $\partial_t^2 u-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$.

Fix $x_0\in\mathbb{R}^n$. $t_0>0$.

定义 $K(x_0,t_0)$ 为 (x_0,t_0) 为顶点的"倒向光锥".

$$K(x_0,t_0):=\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0,\ |x-x_0|\le t_0-t\}$$



Thm 7.4.1 (波方程的有限传播速度).

$u=u_t=0$ on $B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$

则 $u=0$ on $K(x_0,t_0)$.

Rmk：这说明：$B(x_0,t_0)$ 之外的扰动，对光锥内的解没有影响.

Pf：$E(t):=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u(x,t))^2+|\nabla u(x,t)|^2\,dx$. $0\le t\le t_0$.

$$E'(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\cdot\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla u_t\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS$$

分部积分

$$=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\,\underbrace{(\partial_t^2 u-\Delta u)}_{=0}\,dx+\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot\partial_t u\,dS$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS$$

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\partial_t u-\frac{1}{2}(\partial_t u)^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dS$$

故

$$\le\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2+(\partial_t u)^2}{2}-\frac{(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2}{2}\,dS\le 0$$

$\Rightarrow 0\le E(t)\le E(0)=0$

□

肖俊彦 PB13001112

· 双曲方程的有限传播速度.

仍然先看波方程:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \{\cancel{t=0}\}\,(0,\infty). \qquad \cdots (*)$$

我们考虑方程的"振荡解".

Fix $\varepsilon > 0$. 希望找形如 $u^\varepsilon(x,t) = e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}} a^\varepsilon(x,t)$. $x \in \mathbb{R}^n$ $t \geq 0$. $\cdots (\#)$

其中. p^ε 是相函数. 实值函数 $a^\varepsilon(x,t)$ 是振幅函. 形如 $(\#)$ 的解 称作

"geometric optics ansatz".

波方程的振荡解, 可以理解为. 在开究相函数在 $\varepsilon \to 0$ 时对应的 PDE.

下面是具体的形式推导.

$(\#)$ 代入 $(*)$.

$$0 = \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}} \Big(\underbrace{\frac{i\partial_t^2 p^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon - a^\varepsilon \Big(\frac{\partial_t p^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2}_{\checkmark} + \frac{2i\,\partial_t p^\varepsilon \partial_t a^\varepsilon}{\varepsilon} + \partial_t^2 a^\varepsilon \Big)$$

$$- e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}} \Big(\frac{i\Delta p^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon - \underbrace{\frac{|\nabla p^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} a^\varepsilon}_{\checkmark} + 2i \frac{\nabla p^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon}{\varepsilon} + \Delta a^\varepsilon \Big)$$

乘约去 $e^{i\frac{p^\varepsilon}{\varepsilon}}$, 取实部

$$\Longrightarrow \quad a^\varepsilon \big((\partial_t p^\varepsilon)^2 - |\nabla p^\varepsilon|^2 \big) = \varepsilon^2 \big(\partial_t^2 a^\varepsilon - \Delta a^\varepsilon \big).$$

$\varepsilon \to 0$ 时. 假设 有 $p^\varepsilon \to p$

$a^\varepsilon \to a \neq 0$

则

$$\Longrightarrow \quad p_t^2 \pm |\nabla p|^2 = 0. \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \qquad \cdots (**)$$

$(**)$ 可以视作 $\varepsilon \to 0$ 时. $(\#)$ 在 $(**)$ 确定的特征线附近高度聚集.

对一般的二阶双曲方程 $\partial_t^2 u - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \partial_{x_k} \partial_{x_l} u = 0$. in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ $\cdots (***)$.

$a^{kl} = a^{lk}$.

我们仍希望寻找形式 $(\#)$ 的解.

$$\partial_{x_k} u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}} \Big(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_k} p^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k} a^\varepsilon \Big).$$

$$\Rightarrow \partial_{x_k x_l} u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}} \Big(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_l} p^\varepsilon \Big) \cdot \Big(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_k} p^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k} a^\varepsilon \Big)$$

$$+ e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}} \Big(\frac{i}{\varepsilon} \big(\partial_{x_k x_l} p^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k} p^\varepsilon \partial_{x_l} a^\varepsilon \big) + \partial_{x_k x_l} a^\varepsilon \Big).$$

章俊彦 PB13001112

约去 $e^{i\frac{p^\varepsilon}{\varepsilon}}$ 取实部有

$$a^2\left((\partial_t p^\varepsilon)^2-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k p^\varepsilon\partial_l p^\varepsilon\right)=\varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\varepsilon-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l a^\varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow\quad p_t\pm\left(\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k p\,\partial_l p\right)^{\frac{1}{2}}=0\qquad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

#.

下面考虑 (****) $\partial_t u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的光滑解.

$$Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u.$$

Fix $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，我们对此方程，希望找到类似于"锥方程的"光锥"$C$. 其顶点为 (x_0,t_0). s.t. 只要 $u=\partial_t u=0$ on $C_0:=C\cap\{t=0\}$ 就有：$u\equiv 0$ in C.

由上面对振荡解的讨论，我们可以猜测所求的区域 C 是形如 $\{p=0\}$ 这样的水平集. p 是 Hamilton-Jacobi 方程 $p_t-\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}p_{x_i}p_{x_j}\right)^{\frac{1}{2}}=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解.

分离变量. $p(x,t)=q(x)+t-t_0$.

$$\begin{cases}q\text{ 满足: } \sum_{i,j=1}^n a^{ij}q_{x_i}q_{x_j}=1\\ q>0\quad\text{in } \mathbb{R}^n-\{x_0\}.\\ q(x_0)=0\end{cases}\qquad(\Rightarrow \nabla q\neq 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\times\{x_0\})$$

* $\boxed{\text{例如. } L=-\Delta \text{ 时. } q(x)=|x-x_0|.}$

于是我们所求的"光锥"应为.

$$K:=\{(x,t)\mid p(x,t)<0\}=\{(x,t)\mid q(x)<t_0-t\}.$$

$\forall t>0$. 令 $K_t=\{x\mid q(x)<t_0-t\}$ = K 在 t 时刻的横截面

$(\Rightarrow \partial K_t\in C^\infty$ 且 ∂ 是 $n-1$ 维可测)

章俊彦 PB13001112

下面证明对称双曲~~线~~方程~~的~~~~余~~有限传播速度.

Thm 7.4.2 设 $u\in C^\infty$ 是 $\partial_t^2 u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解若 $u=\partial_t u=0$ on K_0.

则 $u=0$ in K.

Rmk: 从而: 若 $u(0)=g$. $\partial_t u(0)=h$. 则 $u(x_0,t_0)$ 仅与 g,h 在 K_0 中的取值有关

Pf: 令 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,dx$.

$$E'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,dx\right)$$

余面积公式 cor 7.4.2

$$=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u_t\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\left((\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j u\right)\frac{1}{|\nabla\varphi|}\,d\partial\rho^{n-1}$$

$$=: I_1-I_2.$$

对 I_1: 第二项分部积分可得:

$$I_1=\int_{K_t}\left(\partial_t u\,\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\partial_t u\cdot\partial_j(a^{ij}\partial_i u)\right)dx$$

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^i\cdot u_t\,d\partial\rho^{n-1}$$

$\vec{n}$ 为 ∂K_t 的单位外法向

$$\cancel{-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}}$$

$$=\int_{K_t}\partial_t u\cdot\left(\underbrace{\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\left(\partial_j a^{ij}\partial_i u+a^{ij}\partial_i\partial_j u\right)}_{\text{加起来为0}}\right)dx$$

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\partial_t u\,d\partial\rho^{n-1}$$

$$=-\int_{K_t}\partial_t u\cdot\sum_{i,j=1}^n\partial_j a^{ij}\cdot\partial_i u\,dx+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\partial_t u\,d\partial\rho^{n-1}.$$

章俊彦 PB13001112

那么.

$$|A| \le \left|\int_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right|$$

$$+ \int_{\partial K_t} \left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \cdot n^j\right| \cdot |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right|.$$

$$+ \int_{\partial K_t} \left(\sum a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum a^{ij} n^i n^j\right)^{\frac{1}{2}} |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

这里用到了：
$A=(a^{ij})$ 为实对称阵. a^{ij} 非负
则.
$$\left|\sum_{ij} a^{ij} x_i y_j\right| \le \left(\sum_{ij} a^{ij} x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{ij} a^{ij} y_i y_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

∂K_t 上. $q = t_0 - t$.
$n = \nabla q / |\nabla q|$

$$\le \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right|.$$

$$+ \int_{\partial K_t} |u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

则
$$\sum_{ij} a^{ij} n^i n^j = \sum_{ij}^{n} \frac{a^{ij} q_{x_i} q_{x_j}}{|\nabla q|^2} = \frac{1}{|\nabla q|^2}$$

Cauchy-Schwartz (第一项).

$$\le \int_{K_t} u_t^2 + C \int_{K_t} \cancel{\frac{a^{ij} \partial_i u \partial_j u}{|\nabla u|^2}} \cdot dx + \int_{\partial K_t} \frac{|u_t|}{|\nabla q|} \left(\sum_{ij} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{H}^n$$

L和有界

$$\le C\left(\int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) dx + \int_{\partial K_t} \cdots\cdots$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le C E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial Q_t} \left((\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$= C E(t) + B$$

Gronwall不等式

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{E}(t) = A - B \le C E(t). \\ E(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow E(t) \equiv 0 \quad 0 \le t \le t_0.$$

$$\Longrightarrow u \equiv 0 \quad \text{in } K.$$

□.

章俊彦 PB13001112

§7.5：一阶双曲方程组

7.5.1：消失粘性法：

考虑：
$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_j \vec{u} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \\ \vec{u}(0) = \vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$\vec{u} = (u^1, \dots, u^m) : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ 为未知函数.

$B_j : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to M^{m\times m}$. ~~为矩阵~~ $j = 1, 2, \dots, n$.

$\vec{f} : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$.

$\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

给定.

$$\vec{B}(x,t;y) := \sum_{j=1}^{n} y_j B_j(x,t). \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

Def：(1) 若 $B(x,t;y)$ ($m\times m$ 方阵) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. 可对角化. 则称 (*) 是双曲的.

这说明 (*) 是双曲的. 若 $\forall x, y, t$. $B(x,t;y)$ 有 m 个实特征值 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$.
且对应特征向量构成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基

(2). 称 (*) 是对称双曲方程组，若 $B_j(x,t)$ 是对称阵.
称 (*) 是严格双曲的. 若 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. $y \neq 0$. $\forall t \geq 0$. $B(x,t;y)$ 有 m 个不同的实特征值 $\lambda_1(x,t;y) < \dots < \lambda_m(x,t;y)$.

Motivation：波方程的行波解 (travelling wave).

设 $f = 0$. $B_j(x,t;y)$ 是常系数矩阵. 则

$$\sum_{j=1}^{n} y_j B_j = B(y) \text{ 仅与 } y \text{ 有关}.$$

寻求 (*) 的行波解，即希望 $\vec{u}$ 有形式 $\vec{u}(x,t) = \vec{v}(y\cdot x - \sigma t)$. $x \in \mathbb{R}^n$. $t \geq 0$

上式代入 (*). $\Rightarrow$ $\left(-\sigma I + \sum_{j=1}^{n} y_j B_j\right) \vec{v}' = 0$.

$\Rightarrow$ $\vec{v}'$ 是 $B(y)$ 关于特征值 σ 的特征向量.

肖俊彦 PB13001112

双曲系统 (*) 有 m 个不同的行波解（$\forall$ 方向 y），它们应为 $(y\cdot x-\lambda_k(y)t)\vec{r}_k(y)$，其中 $\lambda_1(y)\le\cdots\le\lambda_m(y)$ 是 $B(y)$ 的特征值，$\{\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_m\}$ 是对应特征向量，$|y|=1$ 时，特征值即为波速。

□

下面我们引入所谓的"消失粘性法"来证明对称一阶双曲组初值问题的存在唯一性。

考虑

$$(*)\quad\begin{cases}\partial_t\vec{u}+\sum_{j=1}^{n}B_j\partial_{x_j}\vec{u}=\vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \vec{u}=\vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad T>0.$$

并假设 (1): $B_j(x,t)$ 是对称阵 $\forall j$. $\forall x\in\mathbb{R}^n$. $t\in[0,T]$

(2) $B_j\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,T];\mathbb{M}^{m\times m})$.

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}\left(|B_j|,|\partial_x B_j|,|\partial_t B_j|,|\partial^2_{x,t}B_j|\right)<\infty\quad\forall j.$$

(3) $\vec{g}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

$\vec{f}\in H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)\to\mathbb{R}^m)$.

定义: (1) 双线性形式: $B[\vec{u},\vec{v};t]:=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}(B_j(\cdot,t)\partial_{x_j}\vec{u})\cdot\vec{v}\,dx$

$\forall\, 0\le t\le T$. $\vec{u},\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$.

(2). 称 $\vec{u}\in L^2(0,T;H^1)$，$\vec{u}'\in L^2(0,T;L^2)$ 是 (*) 的弱解若

(i). $(\vec{u}',\vec{v})+B[\vec{u},\vec{v};t]=(\vec{f},\vec{v})$. $\forall\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$ a.e. $t\in[0,T]$

(ii) $\vec{u}(0)=\vec{g}$.

章俊彦 PB13001112

消失粘性法的基本思路是，在原方程加入较小的(第2)扰动项，

例如

$$(\#^\varepsilon)\quad \begin{cases} \partial_t \vec{u}^\varepsilon - \varepsilon\Delta\vec{u}^\varepsilon + \sum_{j=1}^n B_j\,\partial_{x_j}\vec{u}^\varepsilon = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = \vec{g}^\varepsilon(x). & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$0<\varepsilon\le 1.\quad \vec{g}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \vec{g}$

$(\#^\varepsilon)$ ~~解~~ 被视为原方程的逼近，我们试图先用不动点方法证明 $(\#^\varepsilon)$ 的解(视作原方程的逼近解)具有存在唯一性，再用~~前~~能量估计与 Banach-Alaoglu 定理证明 (*) 方程的解的存在唯一性.

↑此时 取子列 $\varepsilon_k\to 0$ ↑ 所谓"~~粘~~粘性消失".

Step 1：逼近解存在唯一性：

Thm 7.5.1：$\forall\varepsilon>0$. $(\#^\varepsilon)$ 存在唯一解 $\vec{u}^\varepsilon\in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))$ 且 $\vec{u}^{\varepsilon\prime}\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))$.

Proof：我们采用压缩映射原理的方法，因此，我们要

① 构造~~#~~函数空间 X.

② 构造解映射 T：$u\mapsto Tu$. 使之成为 X 到自身的压缩映射.

③ 利用压缩映射原理，得不动点 $\vec{u}$ ~~#~~ 为方程的局部解

④ 再设法变成整体 $(0,T]$ 上的解

(1.1) 为确定 X，我们先要对方程进行先验估计，即先大致判断 u 会落在什么空间中.

$(\#^\varepsilon)$ 中的难处主要是高阶项，因此，我们把低阶项 $\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon$ 挪到右边去. 变成

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u}^\varepsilon - \varepsilon\Delta\vec{u}^\varepsilon = \vec{f} - \sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}\vec{u}^\varepsilon \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = g. \end{cases} \quad \cdots(\#\#^\varepsilon)$$

这样就变成一个非齐次热方程.

肖俊杰 PB13001112

我们先考虑一般的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u = f \\ u(0) = g. \end{cases}$$

由Du'Hamel原理：

$$u(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds.$$

其中 $e^{\varepsilon t\Delta} g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left(e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \hat{g}\right)^{\vee}$.

$\wedge$: Fourier 变换
$\vee$: 反Fourier 变换.

- $\|e^{\varepsilon t\Delta} g\|_{H^s} = \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \cdot \hat{g}(\xi) \langle\xi\rangle^s\|_{L^2}$

$$= \|e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle\xi\rangle^s \hat{g}(\xi)\|_{L^2}$$

$$\lesssim \|\langle\xi\rangle^s \hat{g}(\xi)\|_{L^2} = \|g\|_{H^s}.$$

又: $e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle\xi\rangle^s = e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle (\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{((\varepsilon t)^{\frac{1}{2}}\xi)}_{\eta} \rangle^s$

$$= e^{-\eta^2} \langle (\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \eta \rangle^s.$$

$$\lesssim (\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}}$$

原方程初值 $g \in H^1 \Rightarrow e^{\varepsilon t\Delta} g \in L_t^\infty H_x^1$

- 非齐次项估计:

$$\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(y)\, dy\, ds$$

$\phi(t,x)$ 设作热方程基本解

$$= \int_0^t \phi(\cdot, \varepsilon(t-s)) * f(s)\, ds.$$

$\Rightarrow \cancel{\|\int_0^t e^{\varepsilon t u}}$

章俊彦 PB13001112

$\Rightarrow$

$$\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2_x} \overset{\text{广义Minkowski不等式}}{\le} \int_0^t \left\| \cancel{e^{\varepsilon(t-s)\Delta}}\ \phi(\cdot,\varepsilon(t-s)) * f(s)\right\|_{L^2_x} ds.$$

$\|f*g\|_q \le \|f\|_p \|g\|_r \longrightarrow$ 卷积 Young不等式

$1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$

$$\le \int_0^t \|\phi(\cdot,\varepsilon(t-s))\|_{L^1_x} \|f(s)\|_{L^2_x}\,ds.$$

$y=\frac{x}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$ $\quad \|\phi\|_{L^1_y}=\text{const}$

$$C_\varepsilon \int_0^t \|f(s)\|_{L^2_x}\,ds$$

$$\le \cancel{CT\cdot\min\{\|f\|_{L^\infty_t L^2_x},}$$

$$\begin{cases} CT\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ C_\varepsilon\,\|1\|_{L^2_t}\,\|f\|_{L^2_t L^2_x} \end{cases}$$

$$= C_\varepsilon\, T^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L^2_t L^2_x}.$$

$$\nabla_x u^\varepsilon = \nabla_x \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(x-y,s)\,dy\,ds$$

$$= \int_0^t \nabla_x \phi_\varepsilon(y,t-s)\, f(x-y,s)\,dy\,ds$$

$\longrightarrow$ 可以直接算出 $\lesssim (\varepsilon(t-s))^{-\frac{1}{2}}$. 有限数 $\hookrightarrow$ 类似于正态分布的一阶矩 $\mathbb{E}|X|$.

$$\le \int_0^t \underbrace{\|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^1_x}}\,\|f\|_{L^2}\,ds$$

同上 $\le C_\varepsilon \begin{cases} T\,\|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ T^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L^2_t H^1_x L^2_x} \end{cases}$

而原方程中 $f\in H^1_{t,x}$. t方向上 由 $H^1_t \hookrightarrow L^\infty_t$ 知 $f\in L^\infty_t H^1_x L^2_x$

$(\Rightarrow f\in L^2_t H^1_x L^2_x)$

这样 我们大致可以猜测 $X=L^\infty_t H^1_x$

章俊彦 PB13001112

(1.2) 令 $X = L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n))$ ~~我们证明 u 是~~

形式推导表明

$$(\#\#^\varepsilon) \iff u^\varepsilon(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j u^\varepsilon_{x_j}(s)\right) ds$$

令 $J: u \mapsto e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u(s)\right) ds.$

我们证明 J 是 $X \to X$ 的压缩映射.

- $\mathrm{Im}\, J \subseteq X$. 由先验估计 (1.1)

$$\|Ju\|_X \lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

$$\lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \left(\|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|u\|_{L^\infty_t H^1_x}\right)$$

$$< \infty$$

- 再证 J 压缩: $\forall u, v \in X$

$$Ju - Jv = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} B_j \partial_j (u-v)(s)\, ds.$$

$$\|Ju - Jv\|_{L^\infty_t H^1_x} \leq C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \|u-v\|_{L^\infty_t H^1_x}.$$

还用 (1.1)

$$< \frac{1}{2}\|u-v\|_X.$$ provided choosing $C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \exists T_1$ s.t. $[0, T_1]$ 上.

$J: L^\infty_t H^1_x \longrightarrow L^\infty_t H^1_x$ in $\mathbb{R}^n \times [0, T_1]$ 是压缩映射

$\therefore$ $\mathbb{R}^n \times [0, T_1]$ 上. $(\#\#^\varepsilon)$ 有唯一解 u^ε. 再在 $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, ... 依此类推即可

章俊彦 PB13001112

(1.3) 再证 $u^\varepsilon \in L^2(0,T;H^3)$. $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

实际上. 令 $\tilde{f} = f - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u. \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a.e. $0 \le t \le T$.

由抛物正则性定理. $u^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^2)$, $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

这样 $\sum B_j \partial_{x_j} u \in L^\infty(0,T;H^1)$.

$\Rightarrow \tilde{f} \in H^1$ a.e. $t \in [0,T]$

$\Rightarrow u^\varepsilon \in L^\infty_t H^3_x$. 证毕.

再用抛物正则性定理.

□

这样我们证明了(##*), 即逼近解的存在唯一性 ($\forall \varepsilon$).

下面我们证明, 逼近解序列在某些自反空间中一致有界. 再用 Banach-Alaoglu 定理得子列 $u^{\varepsilon_k} \to 0$ as $k \to \infty$ ($\varepsilon_k \to 0$). 从而证明解的存在唯一性.

该套路我们已经反复用过.

Step 2: 能量估计:

Thm 7.5.2: $\exists$ $C>0$ s.t. $\forall 0<\varepsilon\le 1$.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|u^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}\right)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))} + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))}\right)$$

证明. 先算第一项, 拆成 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|Du^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ 分别估计:

章俊彦 PB13001112

(2.1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2\right) = (u^\varepsilon, u^{\varepsilon\prime})$

$$= \left(u^\varepsilon, f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon \Delta u^\varepsilon\right).$$

$$|(u^\varepsilon, f)| \le \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$$

$$|(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)| \xrightarrow[\text{(利用}C_c^\infty\text{函数逼近)}]{\text{分部积分}} -\varepsilon\|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le 0.$$

再算: $\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)$.

先设 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$.

$$\left(v, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v\right) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (B_j \partial_{x_j} \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\begin{pmatrix} B_j^{11} & \cdots & B_j^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_j^{m1} & \cdots & B_j^{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_j} v_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_j} v_m \end{pmatrix}\right) \cdot (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

实对称阵 点乘

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m B_j^{1i} \cdot \partial_{x_j} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m B_j^{mi} \cdot \partial_{x_j} v_i \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m B_j^{ki} \cdot (\partial_{x_j} v_i) \cdot v_k$$

用了 B_j 实对称

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\partial_{x_j}(B_j^{ki} v_i v_k) - \partial_{x_j} B_j^{ki} \cdot v_i v_k\right) dx.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}(B_j \vec{v} \cdot v)\, dx - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx.$$

由于 v 紧支, 故: 上式第一项 $= 0$.

上式绝对值 $\le \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx\right| \le C\|v\|_{L^2}^2$.

章俊彦 PB13001112

(22)

下面再估计 $v=u^{\varepsilon\prime}$ 的 L^2 范数.

(##²) 两边对 t 求导:

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon\Delta v + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v = f' - \sum_{j=1}^n \partial_t B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v = f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} g^\varepsilon + \varepsilon\Delta g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

同上可得:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2}^2 \le C\Big(\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2_tH^1_x} + \|f'\|_{L^2_tL^2_x}\Big).$$

又由通过与分部积分可得: $\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2$. $(g^\varepsilon = \eta_\varepsilon * g)$.

又: $\|f(0)\|_{L^2}^2 \le C\big(\|f\|_{L^2_tL^2_x}^2 + \|f'\|_{L^2_tL^2_x}^2\big)$.

则 $\sup_{0\le t\le T} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \le C\big(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L^2_tH^1_x} + \|f'\|_{L^2_tL^2_x}\big)$.

□.

Step 3: 存在性-性.

Thm 7.5.3:

$$(*)\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

在之前~~条件下~~弱解 ∃!

Proof: 由 Thm 7.5.2 知. $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2_tH^1_x$ 一致有界.

$\{u^{\varepsilon\prime}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2_tL^2_x$ 一致有界.

由 Banach-Alaoglu 定理. 弱收敛子列:

$$u^{\varepsilon_k} \longrightarrow u \quad \text{in } L^2_tH^1_x$$

$$u^{\varepsilon_k\prime} \longrightarrow u' \quad \text{in } L^2_tL^2_x$$

章俊彦 PB13001112

再由 C_c^∞ 函数逼近 H^1 函数 $(H_0^s(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d))$.

则

$$\left|\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)\right| \le C\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)}.$$

这样: $\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2} \le C\left(\|u^\varepsilon\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2}\right)$.

再由 Gronwall 不等式即得:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} \le C\left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$

(因 $\|g^\varepsilon\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2}$)

(2.2): ~~$\frac{d}{dt}$~~ 下面估计 $\|Du^\varepsilon\|_{L^2}$.

Fix $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. $v^k := \partial_{x_k} u^\varepsilon$.

对 (##) 两边对 x_k 求导, 有:

$$\begin{cases} \partial_t v^k - \varepsilon\Delta v^k + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v^k = \partial_{x_k} f - \sum_{j=1}^n \partial_{x_k} B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon. & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v^k = \partial_{x_k} g^\varepsilon. & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}. \end{cases}$$

同 (2.1) 可得:

$$\frac{d}{dt}\|v^k\|^2_{L^2} \le C\left(\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2} + \|\nabla f\|^2_{L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2} \le \text{右}.$$

再由 Gronwall 不等式即有.

$$\sup_{0\le t\le T} \|Du^\varepsilon(t)\|^2_{L^2} \le C\left(\|\nabla g\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2}\right).$$

于是. $\sup_{0\le t\le T} \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1} \le C\left(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L^2_t H^1_x}\right)$

章俊彦 PB13001112

由弱解定义. $\forall v \in C^1([0,T]; H^1)$

$$\int_0^T (u^{\varepsilon\prime}, v) + \varepsilon D u^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt. \quad \cdots (\#)$$

取 $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ (as $k \to \infty$)

由弱收敛 $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^T (u', v) + B[u, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt$. $\forall v \in C^1([0,T]; H^1)$ $\cdots (\#\#)$

$\Longrightarrow$ $(u', v) + B[u, v; t] = (f, v)$. $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ a.e. $t \in [0,T]$

设 $v(T) = 0$.

则 $(\#) \xRightarrow{\text{分部积分}}$ $\displaystyle\int_0^T (-u^{\varepsilon p}, v') + \varepsilon D u^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon, v; t]\, dt$

$$= \int_0^T (f, v)\, dt + (g^\varepsilon, v(0)).$$

$\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$.

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^T (-u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\, dt + (g, v(0))$.

~~分部积分~~ $\Longrightarrow$ $\cancel{\displaystyle\int_0^T (-u, v')}$

又对 $(\#\#)$ 分部积分

$$\Longrightarrow -\int_0^T (u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v)\, dt + (u(0), v(0))$$

$\Longrightarrow u(0) = g$, 存在性证毕.

再证唯一性. 只需考虑 $(*)$ 在 $f = g = 0$ 时是否只有解 $u = 0$

~~令~~ 令 $v = u \Longrightarrow \forall$ a.e. $0 \le t \le T$ $(u', u) + B[u, u; t] = 0$.

~~$\Longrightarrow B$~~ $\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = -B[u, u; t] \le C\|u(t)\|_{L^2}^2$.

再由 Gronwall 不等式即得

□

章俊彦 PB13001112

§7.6 半群方法 ~~与 Schrödinger 半群的 Strichartz 估计~~

7.6.1：预备知识：

设 X 是实 Banach 空间，(可能无界的) 线性算子 $A: D(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{子空间}}}{\subseteq} X \to X$.

考虑：$(*)\begin{cases} \cancel{A: D(A)} \\ u'(t) = Au(t) & t \geq 0. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

key point ① A 满足什么条件时，ODE$(*)$ 有唯一解 u？($\forall$ initial data $u_0 \in X$)

② 许多 PDE 可以抽象为 $(*)$ 的形式

Def (算子半群) 设 $u(t) := S(t)u_0$. $(t \geq 0)$

(1) 称 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是：$X \to X$ 是算子半群，若
一族有界线性算子.

① $S(0)u_0 = u_0$ $\quad \forall u_0 \in X$

② $\forall t, s \geq 0$. $u_0 \in X$. $S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0$

③ $t \mapsto S(t)u_0$ 是 $[0, +\infty) \to X$ 的连续映射 ($\forall u_0 \in X$)

(2) 称 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 为压缩半群，若 $\forall t \geq 0$ $\|S(t)\| \leq 1$.

□

压缩半群可以用抽象 $(*)$ 生成的 flow
在 X 上

Def (无穷小生成元, infinitesimal generator) 设 $\{S(t)\}$ 是压缩半群.

令 $D(A) := \left\{ u \in X \,\middle|\, \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ 在 } X \text{ 中存在} \right\}$

$$Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \qquad \forall u \in D(A)$$

则称 $A: D(A) \to X$ 是半群 $S(t)$ 的无穷小生成元.

□

章俊彦 PB13001112

Thm 7.6.1: (微分性质) 设 $u \in D(A)$ 则

(1) $\forall t \geq 0$. $S(t)u \in D(A)$

(2) $AS(t)u = S(t)Au$. $\forall t \geq 0$.

(3). $t \longmapsto S(t)u$ $\forall t > 0$ 是可微的.

(4) $\frac{d}{dt} S(t)u = AS(t)u$. $\forall t > 0$.

<u>Proof</u>: ~~设 (1) 是已.~~

(1)(2): 设 $u \in D(A)$.

则 $\lim_{s \to 0^+} \frac{S(s)(S(t)u) - S(t)u}{s}$.

$= \lim_{s \to 0^+} \frac{S(t+s)u - S(t)u}{s}$

$= S(t) \lim_{s \to 0^+} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au$. $\in D$

$\Rightarrow S(t)u \in D(A)$

$A(S(t)u) = S(t)Au$.

(3)

<u>claim</u>: $\lim_{h \to 0} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au$.

$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au$.

$= S(t-h)\left(\frac{S(h)u - u}{h}\right) - S(t)Au$.

$= S(t-h)\left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au\right) + \left(S(t-h) - S(t)\right)Au$.

A的定义 $\downarrow$ as $h \to 0$. 0

连续性 $\downarrow$ as $h \to 0$. 0

$\to 0$ as $h \to 0$.

李俊彦 PB13001112

(4): 由(3)易知.

$$\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h} \longrightarrow S(t)Au \quad \text{as } h\to 0^+.$$

$\square$

Thm 7.6.2

(1) $D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2) A是闭算子, 即 满足 $\forall u_n\in D(A)$ $\left.\begin{array}{l} u_n\to u \\ Au_n\to v \end{array}\right\} \Rightarrow$ ~~$Au=v$~~ $u\in D(A)$ 且 $Au=v$.

证明: 所fix $u\in X$. $u^t := \int_0^t S(s)u\,ds$. 则 $\frac{u^t}{t}\to u$ in X as $t\to 0^+$. (由连续性).

只用证 $u^t\in D(A)$ 即可. $(\forall t>0)$

$\forall h>0$. $$\frac{S(h)u^t-u^t}{h} = \frac{1}{h}(S(h)u^t-u^t)$$
$$= \frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^t S(s)u\,ds - \int_0^t S(s)u\,ds\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^t (S(s+h)-S(s))u\,ds.$$
$$= \int \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} - \int_0^h\right) S(s)u\,ds.$$
$$\xrightarrow{h\to 0^+} S(t)u-u.$$

$\Rightarrow u^t\in D(A)$.

$Au^t = S(t)u-u$.

$\Rightarrow D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2). 为证A闭 设 $u_k\in D(A)$. $u_k\to u$ in X

$Au_k\to v$ in X.

要证: $u\in D(A)$ $v=Au$.

$$\xrightarrow{7.6.1} S(t)u_k-u_k = \int_0^t S(s)Au_k\,ds$$
$$\xrightarrow{k\to\infty} S(t)u-u = \int_0^t S(s)v\,ds.$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,ds = v. \Rightarrow \begin{array}{l} u\in D(A) \\ v=Au. \end{array}$$

$\square$.

章俊彦 PB13001112

设 $A: D(A) \longrightarrow X$ 为闭算子

Def: (1) (预解集 Resolvent set) $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I \ \ 1\text{-}1 \ \& \ 满射\}$.

(2). $\lambda \in \rho(A)$. 则定义对应的预解算子 $R_\lambda: X \to X$ 为:

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

~~Fact~~

Recall: 闭图像定理: 闭线性算子是有界的.

$\Rightarrow$ $R_\lambda: X \to D(A) \subseteq X$. 是有界线性算子

进一步地: $A R_\lambda u = R_\lambda A u$.

Thm 7.6.3.

(1). 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$. 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(2) 若 $\lambda > 0$ 则 $\lambda \in \rho(A)$.

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \quad \forall u \in X \quad (R_\lambda 为 S(t) 的 Laplace 变换).$$

$$\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$$

Pf: (1) Trivial.

(2). $\lambda > 0$. $\|S(t)\| \le 1$. 知(2)中积分式有意义.

$$\tilde{R}_\lambda u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt.$$

$\forall h > 0$. $u \in X$.

$$\frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)u - S(t)u)\, dt\right).$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u \, dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}\right) S(t) u \, dt$$

$$= -e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u.$$

$$\longrightarrow -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u. \quad \Rightarrow A\tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u.$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u \quad \forall u \in X$$

章俊彦 PB13001112

claim: $A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$

若 claim 成立. 则:

$\forall u\in D(A)$. $A\widetilde{R_\lambda}u = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt.$$

$$= \widetilde{R_\lambda}Au.$$

$\Rightarrow \widetilde{R_\lambda}(\lambda I - A)u = u.$

又: $\lambda I - A$ 1-1. 2 onto.

$\Rightarrow \lambda\in\rho(A)$. $\widetilde{R_\lambda} = R_\lambda$.

余下只用证 claim.

先证明: 对 $\int_0^M$. A 可与之换序:

$\forall M\in\mathbb{R}_+$. 将 $[0,M]$ 作等分:

$$[0,M] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left[\frac{j}{2^k}M, \frac{j+1}{2^k}M\right].$$

由 $I_k(t) := \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda t_j}S(t)u\cdot\chi_{t\in[t_{j-1},t_j]}$. $\Rightarrow e^{-\lambda t}S(t)u$.

simple functions as $k\to\infty$

及 A 闭. 知:

$$A\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^M I_k(t)\,dt\right)$$

$$\overset{A\text{闭}}{=} \lim_{k\to\infty} A\int_0^M I_k(t)\,dt.$$

I_k simple.

$$= \lim_{k\to\infty}\int_0^M AI_k(t)\,dt$$

$$\overset{A\text{闭}}{\underset{MCT}{=}} \int_0^M \lim_{k\to\infty} AI_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^M Ae^{-\lambda t}S(t)u\,dt \overset{A\text{ linear}}{=} \int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

肖俊彦 PB13001112

又：$e^{-\lambda t}$ - rapidly decays

$\|S(t)\| \le 1$.

A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \xrightarrow[\exists]{M\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u \, dt.$$

$$\Rightarrow A\left(\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u \, dt\right) \xrightarrow{M\to\infty} A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt\right)$$

therefore "||" holds.

|| 因为闭算子.

$$\int_0^M e^{-\lambda t} AS(t) u \, dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t) u \, dt.$$

||

$$\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) Au \, dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) Au \, dt$$

□.

下面来对压缩半群的生成元进行刻画.

Thm 7.5.4 (Hille-Yorsida).

A为X上稠定的闭算子. 则 A是压缩半群 $S(t)$ 的生成元 $\Longleftrightarrow$

$\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$. $\forall \lambda > 0$.

Pf: $\Rightarrow$: By thm 7.6.3

$\Leftarrow$: 设A闭、稠定, $\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$.

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$

下面构造A生成的压缩半群.

直接构造是困难的, 因此我们先找一族算子 $\{A_\lambda\}$ (便于计算).

先求 A_λ 的生成半群, 再令 $\lambda\to\infty$ 来证明.

章俊彦 PB13001112

令 $A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda$. $(\lambda>0)$.

这称作 A的正则化逼近

Claim: $\cancel{A_\lambda u} \; A_\lambda u \to Au$.

若claim 对. 则令. $S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda}$.

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)\| \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k.$$

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$ $\quad \to \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1$. $\Rightarrow \{S_\lambda(t)\}$ 是压缩半群

S_λ 生成元: A_λ. $\quad D(A_\lambda) = X$. 此为易见.

直接算

由于 A_λ 是 R_λ 的"多项式". 故 R_λ, R_μ 可交换 $\Rightarrow A_\lambda, A_\mu$ 可交换.

$\Rightarrow$ ~~$A_\lambda S_\mu$~~ $A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu$. $\quad \forall t>0$.

$$\Rightarrow S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(S_\mu(t-s) S_\lambda(s) u\right) ds.$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s) S_\lambda(s) (A_\lambda u - A_\mu u)\, ds$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \le t \underbrace{\|A_\lambda u - A_\mu u\|}_{\text{四}} \to 0 \quad \text{as } \lambda, \mu \to \infty$$

因 $A_\lambda u \to Au$. as $\lambda \to \infty$ (by claim).

故 $\{A_\lambda u\}_{\lambda>0}$ Cauchy.

$\Rightarrow \{S_\lambda(t)u\}_{\lambda>0}$ 是柯西列:

$\therefore \exists\, S(t)u := \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$. $\quad \forall t \ge 0$. $u \in D(A)$.

又: $\left.\begin{array}{l}\|S_\lambda\| \le 1 \\ A\text{稠定}\end{array}\right\}$ BLT Thm $\Rightarrow \forall u \in X$ $\quad S(t)u \overset{\exists}{=} \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$.

$\forall t$. $\forall$ $I \subset\subset [0,\infty)$.

且 $S(t)$ 是压缩半群

章俊彦 PB13001112

下面证明 A 是 $\{S(t)\}$ 的无穷小生成元:

设 B 为生成元.

则: $Bu = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)u-u}{t}$. $\forall u\in D(A)$.

而 $S_\lambda(t)u-u = \int_0^t S_\lambda(s)\, A_\lambda u\, ds$.

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \le \|S_\lambda(s)\|\cdot\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s)-S(s))Au\| \to 0. \quad \uparrow_{\lambda\to\infty} \quad \forall u\in D(A).$$

故令 $\lambda\to\infty$ 由DCT.

$$S(t)u-u = \int_0^t S(s)Au\, ds. \quad \forall u\in D(A)$$

$D(A)\subseteq D(B)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}}_{=Au} \overset{\exists}{=} Bu. \quad \forall u\in D(A).$$

又若 $\lambda>0$. $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$.

则 $X=(\lambda I-A)D(A) = (\lambda I-B)D(A)$.

$\Rightarrow (\lambda I-B)\big|_{D(A)}$ 1-1 & onto. $\Rightarrow D(A)=D(B)$.

$\Rightarrow A=B$

$\Rightarrow A$ 为 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 的生成元.

最后我们只需证 claim: $\forall u\in D(A)$. $A_\lambda u\to Au$. as $\lambda\to\infty$

$$A_\lambda u = -\lambda u + \lambda^2 R_\lambda u = \lambda(\lambda R_\lambda u - u)$$
$$= \lambda(AR_\lambda u) = \lambda(R_\lambda Au).$$

$$\|\lambda R_\lambda u - u\| \le \|R_\lambda\|\cdot\|Au\| \le \frac{1}{\lambda}\|Au\| \to 0.$$

$\Rightarrow \lambda R_\lambda u\to u$ as $\lambda\to\infty$ $\forall u\in D(A)$. $\Rightarrow$ $\forall u\in X$. $\lambda R_\lambda u\to u$.

A 稠定

$\|\lambda R_\lambda\|\le 1$.

$\Rightarrow$ ~~$A_\lambda u \to \lambda R_\lambda Au$~~

$$\underset{\lambda R_\lambda Au}{\overset{A_\lambda u}{\shortparallel}} \to Au. \quad \square$$

章俊彦 PB13001112

7.6.2 二阶方程中的应用

I. 考虑抛物方程

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{0\} \end{cases}$$

L的系数与t无关. $\partial U \in C^\infty$

取 $X = L^2(U)$. $D(A) = H_0^1 \cap H^2$ $Au := -Lu$.

则 A 为 X 上的无界算子.

Thm 7.5.5: A生成了L^2上的一个 γ-压缩半群.

即 Hille-Yosida 的条件换为 $(\gamma,\infty) \subset \rho(A)$.

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda > \gamma$.

Pf: $D(A) \overset{dense}{\subset} L^2$. ✓

再证: A是闭算子. + 预解式估计 + $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$

① A闭? 设 $u_k \in D(A)$. $u_k \to u$. $Au_k \to f$ in $L^2(U)$.

由正则性定理:

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \le C \|Au_k - Au_l\|_{L^2} + \|u_k - u_l\|_{L^2}$$

$\Rightarrow u_k \to u$ in H^2.

$\Rightarrow u \in D(A)$.

$\Rightarrow Au_k \to Au$ (因 $A = -L$).

$\Rightarrow f = Au$. ✓

② $(\gamma,\infty) \subset \rho(A)$? $\forall \lambda \ge \gamma$.

$$\begin{cases} (L+\lambda I)u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

在 H_0^1 中 $\exists$1 weak sol (given $f \in L^2$).

正则性Thm $\Rightarrow$ ~~$Au = f$~~ $u \in H^2 \cap H_0^1 \Rightarrow u \in D(A)$.

即: $\lambda u - Au = f$. $\therefore (\lambda I - A): D(A) \to X$. 1-1 & onto. $(\forall \lambda \ge \gamma)$.

$\Rightarrow (\gamma,\infty) \subset \rho(A)$

章俊彦 PB13001112

③: $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\nu}$ $\lambda>\nu$.

Consider $B[u,v]+\lambda(u,v)=(f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$. ...(#).

由 能量估计 (in Lax-Milgram).

$\exists \beta>0, \nu>0$ 使 $\forall u\in H_0^1$ $\beta\|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]+\nu\|u\|_{L^2}^2$

$\forall \lambda>\nu$

$\Rightarrow$ ~~$(\lambda-\nu)\|u\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$~~

(#) 中. 令 $v=u$.

$B[u,u]+\lambda(u,u)=(f,u) \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$.

$\Rightarrow$ $(\lambda-\nu)\|u\|_{L^2}^2$

又因 $u=R_\lambda f$

故 $\|R_\lambda f\|_2 \le \frac{1}{\lambda-\nu}\|f\|_2$ $\forall f\in L^2$ $\Rightarrow$ $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\nu}$ $\forall\lambda>\nu$. □.

Rmk: 半群方法提供了形如 (*) 方程构造解的途径. 但 a^{ij}, b^i, c 要与 t 无关.

II 对双曲方程

$$(**)\quad \begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u(0)=g,\ \partial_t u(0)=h. & \text{in } U. \end{cases}$$

$L=-\sum_{i,j}\partial_i(a^{ij}\partial_j u)+cu$. $c\ge 0$. $a^{ij}=a^{ji}$.

令 $v=\partial_t u$

$\rightarrow$ $\partial_t v=-Lu$ in U_T. 如何选择 A?

$u=0$ on $\partial U\times[0,T]$.

$u(0)=g$, $v(0)=h$ in U.

肖俊彦 PB13001112

- $\exists \beta > 0$. $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]$ $\forall u \in H_0^1$

- Take $X = H_0^1 \times L^2$.

$$\|(u,v)\|_X := \sqrt{B[u,u] + \|v\|_2^2}$$

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$$

$$A(u,v) := (v, -Lu)$$

类似可证. A 满足 Hille-Yosida Thm.

故有

Thm 7.6.6:

如上算子 A 生成了 $H_0^1 \times L^2$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}$

□.

7.6.3: 实例:

设 Φ 是热方程的基本解, 即 $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$\forall t > 0$. 令

$$[S(t)g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy. \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

$$S(0)g = g.$$

则: $\{S(t)\}_{t \ge 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群.

不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

~~check~~:

章俊彦 PB13001112

· $S(t)$ 是 L^2 上的压缩半群

· $\|S(t)g\|_{L^2} = \|\phi * g\|_{L^2}$

$$\le \|\phi\|_{L^1} \|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(t)\| \le 1.$$

~~$t \mapsto S(t)$~~

· $\widehat{S(t+s)g} = \widehat{\phi(x-y)}\ \cancel{\widehat{\phi(x-y,\ t+s)}}\ \widehat{g}(\xi)$.

$\widehat{\phi}(\xi, t+s)\ \widehat{g}(\xi)$.

$$= \widehat{\phi}(\xi, t)\ \widehat{\phi}(\xi, s)\ \widehat{g}(\xi) = \widehat{S(t)S(s)g}$$

· $t \mapsto S(t)g$ 连续性:

$$\|S(t+h)g - S(t)g\|_{L^2} \le \|S(h)g - g\|_{L^2}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, h)\, g(y)\, dy - g(x) \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, h)\, (g(y) - g(x))\, dy \right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y, h)\, (g(x-y) - g(x))\, dy \right\|_{L^2_x}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y, h) \cdot \|g(x-y) - g(x)\|_{L^2_x}\, dy.$$

$\downarrow 0$ (平移连续性).

$\xrightarrow{DCT} 0$.

· $S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩半群，因在 $t=0$ 处不连续

令. ~~$g(x,y) = \chi_{\{x>0,\ y>0\}}$~~ $g(x) = \chi_{\{x>0\}}$. $g(0) = 0$.

$$(S(t)g)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy. \qquad (S(t)g)(0) = \frac{1}{2} \quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \|S(t)g - g\|_{L^\infty} \ge \frac{1}{2}$$

□. 71

章俊彦 PB13001112

· 热方程 C^∞ 正则性:

Lemma 7.6.7: 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

归纳定义 $D(A^k) := \{u \in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u \in D(A)\}$ $(k \geq 2)$

证明: 若 $\exists k$. $u \in D(A^k)$. 则 $\forall t \geq 0$ $S(t)u \in D(A^k)$

Pf: $\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. 要证: $A^j S(t) u \in D(A)$.

i.e. $$\lim_{s \to 0^+} \frac{S(s) A^j S(t) u - A^j S(t) u}{s} \quad \exists$$

$$\frac{S(s) A^j S(t) u - A^j S(t) u}{s}$$

$$= \frac{S(s) S(t) A^j u - S(t) A^j u}{s}$$

$$= \frac{S(t+s)(A^j u) - S(t)(A^j u)}{s}$$

归纳假设 $A^j u \in D(A)$.

$\Rightarrow$ exists (以及 $S(0) = Id$).

□

Prop 7.6.8: $X = L^2$. 若 u 是 $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u(x,0) = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$ 的

半群解. $(g \in C_c^\infty(U))$. 则 $u(\cdot, t) \in C^\infty(U)$. $\forall 0 \leq t \leq T$.

Pf: ~~$\forall k \in \mathbb{N}$. 证明到.~~

半群解: $u(x,t) = e^{t\Delta} g =: S(t) g$.

由: $\forall k \in \mathbb{N}$. $D(\Delta^k) = H_0^{2k}$ (Take $A = \Delta$).

由 lem 7.6.7 知 $\forall t \geq 0$. $u(\cdot, t) = S(t) g \in H_0^{2k}(U)$. $\forall k$

$\Rightarrow u \in C^\infty$

□

章俊彦 PB13001112

§7.7 常系数线性发展方程的Fourier方法：Strichartz估计.

7.7.1：Schrödinger 方程的Strichartz 估计（非端点）.

考虑 $(*)\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \\ u(0)=g & \text{on } \mathbb{R}\{0\}\times\mathbb{R}^d \end{cases}$

若 u、f、g 均是Schwartz函数，则由Fourier变换法可得：

$\hat{u}(t,\xi)=e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)$. $f=0$.

$$\Rightarrow u(t,x)=\left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}\right)^{\vee}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}}g(y)\,dy=:e^{it\Delta}g.$$

$f\neq 0$ 时. 由Du'Hamel原理

$$\Rightarrow u(t,x)=e^{it\Delta}g-i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds.$$

若 f 是非线性函数 $f(x,t,u)$. 则原方程化作积分方程

$$\text{或}\quad u(t,x)=e^{it\Delta}g-i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(x,u,s)\,ds.$$

因此，要对Schrödinger 方程的解进行估计，尤其是需要对半线性、非线性 Schrödinger 方程的适定性/长时间行为进行研究时，我们应分别搞清楚 $\begin{cases} e^{it\Delta}g\text{项} \\ \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds\text{项} \end{cases}$ 的 $L_t^qL_x^r$ 范数的估计，此为Schrödinger 方程最基本的时空估计.

在叙述结果之前，我们先证明一个简单的衰减估计.

肖俊彦 PB13001112

Lemma 7.7.1 (Schrödinger 方程衰减估计).

$\forall r \in [2, +\infty]$ $\quad \|e^{it\Delta} g\|_{L_x^r} \lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L_x^{r'}}$

Proof: 由 $\{e^{it\Delta}\}$ 是酉算子知. $e^{it\Delta}: L^2 \longrightarrow L^2$ with bdd $= 1$.

又: $e^{it\Delta} g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}} g(y)\,dy$.

$$|e^{it\Delta} g(x)| \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \|g\|_{L^1}.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\Delta} g\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \|g\|_{L^1}$$

故: $e^{it\Delta}: L^1 \to L^\infty$ with bdd $\lesssim t^{-\frac{d}{2}}$.

由 Riesz-Thorin 插值. 有 $\forall r \geq 2$.

$$\|e^{it\Delta} g\|_{L^r} \lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L^{r'}}.$$

$\square$

下设 $d \in \mathbb{Z}_+$. $2^* = \frac{2d}{d-2}$. $(q, r) \neq (2, 2^*)$.

我们证明所谓"非端点" Strichartz 估计.

Thm 7.7.2 (Strichartz).

设 q, r 满足 $\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}$ (称作"容许对", admissible pair).

$(q, r, d) \neq (2, \infty, 2)$. $\quad (q, r) \neq (2, 2^*)$.

则: (1) $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$.

(2) $\|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{L^2}$.

(3) $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$.

(q, r), $(\tilde{q}, \tilde{r})$ 是任何上述容许对.

"$'$" 代表 dual index.

章俊彦 PB13001112

在证明之前我们不加证明地给出如下引理，该引理将 $\int_0^t$ 的估计化作 $\int_{\mathbb{R}}$ 的估计.

Lemma 7.7.2 (Christ-Kiselev 引理).

设 Y, Z 是 Banach 空间，$K(t,s)$ 是取值于 $\mathcal{L}(Y,Z)$ 的连续函数.

$-\infty \le a \le b \le +\infty$. $Tf(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds$.

设 $\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)} \le C \|f\|_{L^p((a,b);Y)}$.

令 $Wf(t) = \int_a^t K(t,s) f(s)\, ds$. 则 $1 \le p < q \le \infty$ 时.

$$\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)} \le \frac{2^{-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \cdot 2C}{1-2^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \|f\|_{L^p((a,b);Y)}.$$

令 $a=-\infty$. $b=+\infty$

$K(t-s) = e^{it\Delta}$

$Z = L^r$. $Y = L^{r'}$ 即可.

□.

Proof of Thm 7.7.1:

先证明 $q=\tilde{q}$. $r=\tilde{r}$ 的情形

(1) $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_t^q L_x^r}$.

广义 Minkowski

$$\le \left\| \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} f(s)\|_{L^r} ds \right\|_{L_t^q}$$

衰减估计

$$\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f(s)\|_{L^{r'}} ds \right\|_{L_t^q}$$

$$= \left\| |\cdot|^{-\underbrace{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}_{\sigma}} * \|f(\cdot)\|_{L^{r'}} \cdot \right\|_{L_t^q}$$

Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 $\||\cdot|^{-\sigma} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$, $0<\sigma<d$. $\frac{1}{q}+1 = \frac{1}{r}+\frac{\sigma}{d}$

$$\lesssim \|f\|_{L_t^\lambda L_x^{r'}} \quad \text{而} \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{d} + \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{1}{q} \\ \sigma = d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}) \end{cases} \Rightarrow \lambda = q'$$

卓俊彦 PB13001112

一般地：

(1)：$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2}^2$

$= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2}^2$

$= \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(t)\, dt \right\rangle$

$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \langle e^{-is\Delta} f(s), e^{-it\Delta} f(t) \rangle_x\, ds\, dt$

$= \int_{\mathbb{R}} \left\langle f(s), \overline{\int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt} \right\rangle_x ds$

Mixed-Norm Hölder $\leq \|f\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{r'}} \left\| \int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_t^q L_x^r}$

(3) 在 $q=\tilde{q}$, $r=\tilde{r}$ 时的情形

$\lesssim \|f\|^2_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$

(2). $\|e^{it\Delta} g\|_{L_t^q L_x^r(I\times\mathbb{R}^d)}$

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (e^{it\Delta} g)(t,x)\, \overline{h(t,x)}\, dx\, dt \right|$

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle e^{it\Delta} g, h \rangle_x\, dt \right|$

$= \sup_h \left| \int_{\mathbb{R}} \langle g, \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h\, dt} \rangle_x \right|$

$\leq \sup_h \|g\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h \right\|_{L^2}$

$\overset{(2)(1)}{\lesssim} \sup_h \|g\|_{L^2} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq \|g\|_{L^2}$.

卓俊彦 PB13001112

(3) $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_t^q L_x^r}$

$$\leq \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\, h(t,x)\, dx\, dt \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle e^{i(t-s)\Delta} f(s), h(t) \rangle_x\, dt\, ds \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)\, dt \right\rangle_x \right|.$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_x^2}.$$

$$\overset{(2)}{\lesssim} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}.$$

$\square$.

借此，我们证明半线性次临界 Schrödinger 方程，

类 H^1 强解的 Local-Wellposedness.

又. 又Ω: Local well-posedness of subcritical ~~semi~~ NLS, in $d \geq 3$.

~~何为 subcritical?~~

~~Endpoint case: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$.~~

~~在证明中有一步要求: $\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + 1$:~~

Consider (NLS) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times I. \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) \ \cancel{\text{in } H^s(\mathbb{R}^d)} \end{cases}$

章俊彦 PB13001112

那么：

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^{p-1}u)(s)\,ds \quad \cdots (*)$$

H^1

Thm 7.7.2: (LWP for subcritical NLS in $d\geq 3$).

$0<p-1<\frac{4}{d-2}$ 时. NLS在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中局部适定. 即解 $\exists, !$, 对初值连续依赖.

证明之前. 我们不加证明地给出要用的引理：

Lemma 7.7.3:

$f(u)=|u|^{p-1}u$. 则 $|f(u)-f(v)| \lesssim_p |u-v|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})$.

$|\nabla f(u)| \lesssim |u|^{p-1}|\nabla u|$

In fact. this can be derived by the local lipschitzian property of f. □.

lemma 7.7.4:

X, Y 是 Banach 空间 X 自反. $X \hookrightarrow Y$. 且. $1<p, q\leq\infty$

· f_n 在 $L^p(I,Y)$ 中一致有界

· $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ in Y. for a.e $t\in I$.

则 $f\in L^p(I,X)$. $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}$.

Proof of Thm 7.7.2: □.

Step 1: 局部存在性：

Fix $M, T>0$. (q,r) 是容许对.

令 $X=\left\{ u\in L^\infty((-T,T);H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^q W_x^{1,r} \;\middle|\; \begin{array}{l} \|u\|_{L^\infty((-T,T);H^1)}\leq M \\ \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}}\leq M \end{array} \right\}$

$d(u,v) = \|u-v\|_{L_t^q L_x^2} + \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$

希望. (X,d) 是完备的度量空间

章俊彦 PB13001112

这只用证 (X,d) 闭 $L_t^q L_x^r$

设 $\{u_n\}\subset X$ $u_n \to u$ in $L_t^q L_x^r$ $u \overset{?}{\in} X$

注意 · u_n bdd in $L_t^q W_x^{1,r} \cap L_t^{\frac{4}{n-2}} H_x^1$

· $H^1 \hookrightarrow L^r$ $\|u_n(t)\|_{L^r} \le C\|u_n(t)\|_{H^1} \lesssim 1$ a.e.

$\Rightarrow \exists$ 弱收敛子列 $u_n \rightharpoonup v$ in L^r.

$\Rightarrow u=v$ in $L_t^q L_x^r$

再用 Lem 7.7.4 即可.

下面用压缩映射原理证明 Step 1:

令 $J: u \longmapsto e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds$.

要证: $\forall J: (X,d)\to(X,d)$ 是压缩映射

$$\cancel{\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty L_x^2} = \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(f(u)(s) - f(v)(s))\,ds\right\|_{L_t^\infty L_x^2}}$$

$$\cancel{\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|f(u)-f(v)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}}$$

$$\cancel{\overset{\text{lemma}}{\lesssim} C\|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})(u-v)\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}}$$

先证 $J(X)\subset X$

$\forall u\in X$

$$\|Ju\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_t^q W_x^{1,r}} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\langle\nabla\rangle f(u)\|_{L_t^{\tilde{q}'}L_x^{\tilde{r}'}} \qquad \langle\nabla\rangle = (1+|\nabla|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\,|u|^{p-1}\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{\tilde{q}'}L_x^{\tilde{r}'}}$$

$$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\|\,\|u\|_{L^r}^{p-1}\|\langle\nabla\rangle u\|_{L^r}\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$$

肖俊彦 PB13001112

刚才这步要求：

$$\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$\overset{\shortparallel}{1-\frac{1}{r}} \quad \Rightarrow \quad r = p+1.$$

下面希望 $H^1 \hookrightarrow L^r$ 则由 Sobolev 嵌入定理知：

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \iff r \leq \frac{2d}{d-2}$$

$$\iff p-1 \leq \frac{4}{d-2} \quad \text{临界指标}$$

只考虑 $p-1 < \frac{4}{d-2}$，否则要涉及 endpoint Strichartz 估计.

接着上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left\| 1 \cdot \|u\|_{H^1_x}^{p-1} \|u\|_{W^{1,r}_x} \right\|_{L^{q'}_t(-T,T)}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|u_0\|_{H^1} + \|1\|_{L_t^{(1-\frac{2}{q})^{-1}}} \cdot \|u\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} \|u\|_{L^q_t W^{1,r}_x}.$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\infty} + \left(1-\frac{2}{q}\right).$$

$r < \frac{2d}{d-2}$ 时，$1-\frac{2}{q} > 0$ (subcritical)

上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} M^p$.

Take $M = 2C\|u_0\|_{H^1}$.

$CT^{1-\frac{2}{q}} M^p < \frac{M}{4}$ 时.

上式 $\leq \frac{3}{4}M$.

对 $L^\infty_t H^1_x$ 成立. $\Rightarrow J(X) \subseteq X$.

再证 J 压缩：$\|Ju - Jv\|_{L^\infty_t L^2_x} \overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} \|f(u) - f(v)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}$

$$\lesssim \left\| \left(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right) |u-v| \right\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}$$

$$\overset{\text{同上}}{\leq} CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} + \|v\|^{p-1}_{L^\infty_t H^1_x} \right) \|u-v\|_{L^q_t L^r_x}$$

$$\leq CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot 2M^{p-1} \cdot d(u,v).$$

章俊彦 PB13001112

换成 $L_t^q L_x^r$ 也对

取 $CT^{1-\frac{2}{q}} M^{p-1} \ll 1$. 再用压缩映像原理即有 $L_t^q L_x^r \cap L_t^\infty L_x^2$

的 local existence

下证 H^1 中, ∃! 仍对.

$p \le 2$ 要用别的方法, 我们在此略去.

$\|J_u - J_v\|_{L_t^\infty H_x^1}$ ~~中是估计~~

$$\lesssim \|\langle\nabla\rangle(|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \quad (p>2)$$

~~同上~~ $\lesssim CT^{1-\frac{2}{q}}(\|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} + \|\langle\nabla\rangle v\|_{L_t^q L_x^r})$

$\cancel{(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1})\|u-v\|_{L_t^\infty H_x^1}}$

$$+ CT^{1-\frac{2}{q}} \|\langle\nabla\rangle(u-v)\|_{L_t^q L_x^r} \cdot (\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1}).$$

$$\lesssim \underbrace{CT^{\frac{1}{4}} M^2}_{\text{取}<\frac{1}{2}} d(u,v) \quad \text{即可.}$$

Step 2: ~~local~~ 对初值连续依赖:

设 $u_{0,n} \to u_0$ in H^1. u_n, u 是 w.r.t $u_{0,n}$, u_0 为初值的解.

则 $u_n \to u$ in $C_t^0 H_x^1$

因 u 的表达式自动保证连续性 (程序 A.C.).

$$u - u_n = e^{it\Delta}(u_0 - u_{0,n}) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(f(u) - f(u_n))(s)\,ds.$$

Strichartz.

$$\|u-u_n\|_{L_t^q L_x^r} \le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L^2} + C\|f(u) - f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{L_x^2} + CT^{1-\frac{2}{q}}(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|u_n\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1}) \|u-u_n\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\le C\|u_0 - u_{0,n}\|_{H_x^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot C(\|u_0\|_{H^1}) \cdot \|u_n - u\|_{L_t^q L_x^r}$$

章俊彦 PB13001112

T 充分小，即 $CT^{1-\frac{2}{q}} C(\|u_0\|_{H^1}) < \frac{1}{4}$ 即可.

$L_t^\infty L_x^2$ 也对　下估计 H^1 norm.

$$\nabla u_n - \nabla u = e^{it\Delta}(\nabla u_{n,0} - \nabla u_0) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \nabla(f(u)-f(u_n))ds$$

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2}$$
$$+ C\|\nabla(f(u)) - \nabla f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\lesssim C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1}$$
$$+ C\||u|^{p-1}\nabla(u-u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$
$$+ C\|(|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1})\nabla u_n\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1}$$
$$+ C\|u\|^{p-1}_{L_t^\infty H_x^1} \|\nabla u - \nabla u_n\|_{L_t^q L_x^r} T^{1-\frac{2}{q}}$$
$$+ \|(\underline{|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1}})\nabla u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$p>2$. 用中值 Thm.
$1<p\le 2$　$|x|^{p-1} \times$ Hölder 连续.
$\lesssim |u_n - u|^{p-1}$.

$\to 0$ as $n\to\infty$　(T 充分小).

这样 ~~local-poly~~ p
所以连续性完成证明.

□

章俊彦 PB13001112

Remark.

$$(NLS)\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=\mu|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\ \mu=\pm1 \\ u(0)=u_0 & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(1) 半线性 Schrödinger 的 Well-posedness 与 p. d. μ 均有关.

我们在 Step 1 中某步用 Hölder 时也说了 $p-1<\frac{4}{d-2}$.

① 此为"能量次临界 NLS.

$d\geq3$. 次临界 NLS. 有 H^1 Global Well-posedness.

$d\leq2$. 需另外做. 因 Strichartz 估计不一定对.
(主要在 endpoint case).

问: 如何 local $\longrightarrow$ global?

Answer: 利用守恒律:

$$E_0(u)=\|u\|_2^2$$

$$E_1(u)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{2\mu}{p+1}|u|^{p+1}\,dx.$$

② Energy-critical?

利用 Keel-Tao 端点 Strichartz 估计. 例如 $d=3$. $p=5$.
有 $L_t^\infty H_x^1\cap L_t^{10}\mathbb{W}_x^{1,\frac{30}{13}}$
适定. $\begin{cases}\text{小初值}\Rightarrow\text{global}\\ \text{大初值}\Rightarrow\text{local}.\end{cases}$

③ 超临界: 未知.

(2) 关于 Strichartz 估计.

端点情形: 见: ($d\geq3$, $d\leq2$ 只对径向函数对. 否则有反例).

Marcus, Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates, American Journal of Mathematics, 1998.

这要用到双端点, 三端点插值. 故不作介绍.

(3) 事实上. 不仅有 Schrödinger 方程有 Strichartz 估计.

对其它常见的色散方程 (KdV. Airy. Wave). 也有结论.

这都是抽象 Strichartz 估计的与插值空间的推论.

□

肖俊彦 PB13001112

Thm 7.7.3 (抽象 Strichartz 估计)

设 $U(t): L^2_x \to L^2_x$ 是一族单参数的有界线性算子. X 自反 Banach.
一参数有界的

$S(\mathbb{R}^d)$ 在 X, X^* 中稠密.

假设: $\|U(t)U^*(t')f\|_{X^*} \lesssim |t-t'|^{-\gamma}\|f\|_X$.

$$\|U(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(X^*)} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} U^*(t)\Phi(t,\cdot)\,dt\right\|_{L^2} \lesssim \|\Phi\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}X}.$$

证明与 Schrödinger 方程的完全类似. $(U(t)=e^{it\Delta})$

实际上, 这用到的最核心的想法是:

* 设 H Hilbert. Y 自反.

$T: H \to Y$ bdd. $T^*: Y^* \to H$.

若 T 自伴, 则 $\|TT^*\|_{Y^*\to Y} = \|T\|^2_{H\to Y}$

而在 Strichartz 估计中, TT^* 远比 T 容易估计. □

Corollary: 波方程 Strichartz 估计

取 $\gamma = (d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. $s=\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. $0<\gamma<1$.

则 $\|W(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}_t \dot{B}^{-s,p}_{x\,2}} + \|\partial_t W(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}_t \dot{B}^{-s+1,p}_{2}}$

$$\lesssim \|f\|_{\dot{B}^{s,2}_2} + \|g\|_{\dot{B}^{-1,2}_2}$$

其中 $\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_{\ell}} := \left\| 2^{ks}\|P_k f\|_{L^p} \right\|_{\ell^q_k}$ (P_k 为 Littlewood-Paley 投影).

$$W(t)f = \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f}{\sqrt{-\Delta}}. \quad \text{i.e.} \quad \widehat{W(t)f} = \frac{\sin(t|\xi|)f}{t|\xi|}.$$

$$\partial_t W(t)f = \cos(t\sqrt{-\Delta})f.$$

章俊彦 PB13001112

Proof:

$$\partial_t W(t)\cdot P_k f = \cos(t\sqrt{-\Delta})\, P_k f$$
$$= \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} + e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{2} P_k f.$$

而 $e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f := \left(e^{it|\xi|} \cdot \widehat{P_k f} \right)^{\vee}$.

$\widehat{P_k f} = \varphi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi)$. φ 为支于 $\{\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$ 的 C_c^∞-bump

$$= \int e^{it|\xi|} e^{ix\cdot\xi} \varphi(\tfrac{\xi}{2^k}) \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$
$$\overset{\eta = 2^{-k}\xi}{=} \int e^{i2^k t|\eta|} e^{i2^k x\eta} \varphi_0(\eta) \hat{f}(2^k\eta)\, 2^{kd}\, d\eta$$
$$= \int e^{i2^k t|\eta|} e^{i2^k x\eta} \widehat{P_0 f(2^k\cdot)}\, d\eta.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_{L^1}.$$

对 $W(t)f$ 这:

$$\left\| \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty_x} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} - e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty}$$
$$\lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \frac{P_k}{\sqrt{-\Delta}} g \right\|_{L^1}.$$

故: $\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|g\|_{L^1} \lesssim 2^{k} \|P_k g\|_{L^1}$.

$\|\cdots\cdots\|_{L^2} \lesssim \|P_k f\|_{L^2}$.

By Riesz-Thorin Interpolation:

$$\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)} t^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)} \|P_k f\|_{L^{p'}}.$$

$(2 < p < \frac{2d}{d-2})$ 按要求插值 $\theta = \frac{2}{p}$ $= 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})k} t^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})} \|P_k f\|_{L^{p'}}$

章俊彦 PB13001112

$\Rightarrow$

$$2^{-\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})k}\,\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^{p'}}$$

$$\lesssim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{选大}}}{2^{-sk}}\; t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|P_k f\|_{L^{p'}}$$

乘以 2^{sk}. 取 l_k^2

$$\Rightarrow \Big\|\,\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{\underset{L_x^{p'}}{\text{原}}}\cdot 2^{ks}\Big\|_{l_k^2} =: \cancel{\|P_k f\|}\;\|\cos(t\sqrt{-\Delta})\|_{\dot{B}^{s,p}_{2}}$$

$$\downarrow$$

$$\lesssim t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{\dot{B}^{-s,p'}_{2}}$$

在抽象 Strichartz 中. 对应. $X^* = \dot{B}^{s,p}_{2}$. $\quad \nu = (d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

$\square$.

Rmk: 发展方程的调和分析(Fourier)方法

好处: 方便处理导数. 与精细正则性, 仅与构造函数空间.

有众多分析工具可用.

注意: 此时不应将导数视作差商的极限.

而应视作 $|\nabla|^s f = \left(|\xi|^s \hat{f}(\xi)\right)^\vee$.

即在频率空间中视作乎前面乘以一个多项式乘子.

这样即可刻画分数阶导数.

坏处: 变系数难做, 涉及2个函数积的估计.

Other Methods: $\begin{cases} \text{Paraproduct}, \\ \text{Conservation law (例如 Morawetz 估计)} \\ \text{变分或其它方法}. \end{cases}$

章俊彦 PB13001112