# 2015年春季学期实分析期末试卷

2015.06.22

**注：前五题选做四题，最后三题是必做题**

1.(15分)设$1 \le p < q < r < +\infty$,证明:$L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$.

2.(15分)$f$在$\mathbb{R}^d$上可积,且不恒为0.证明:极大函数$f^*(x) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$.

3.(15分)设$\{K_\epsilon\}$是一族“逼近恒等”(Approximation to Identity),证明:存在常数$C > 0$,使得对任意$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 成立不等式$\sup_{\epsilon>0} |(f * K_\epsilon)(x)| \le Cf^*(x)$.

4.(15分)设$F(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数,证明:$\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$的充要条件是$F$绝对连续.

5.(15分)设$\mathcal{A}$是集合$X$上的一个代数,$\mu_0$是$\mathcal{A}$上的准测度(pre-measure).在$X$的任一子集$E$上定义$\mu_*$作

$$\mu_*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(E_j) : E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}, \forall j\}$$

证明:$\mu_*$是$X$上的一个外测度,满足:

(1)$\mu_*(E) = \mu_0(E), \forall E \in \mathcal{A}$;

(2)$\mathcal{A}$中任一集合均是Caratheodory可测的.

6.(10分)$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,对$\alpha > 0$,定义$E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$,证明:$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \int_0^{+\infty} m(E_\alpha)d\alpha$.

7.(15分)已知一个结论:若$f$是$\mathbb{R}$上的实值函数,且有周期1与$2\pi$,则$f$恒为常值.

今假设$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$(即在$\mathbb{R}$上局部可积),且有周期1与$2\pi$,试利用Lebesgue微分定理去证明存在常数$c \in \mathbb{R}$,使得$f(x) = c \ \ a.e.$

8.(15分)函数$f(x)$满足:(1)$\forall \epsilon > 0, f(x)$在$[\epsilon, 1]$绝对连续;(2)$\int_0^1 x|f'(x)|^p dx < \infty, \ \forall p > 2$.

证明:$\lim_{x \to 0} f(x)$存在.

**注:第2、3、4题分别是课本第3章的习题4、17、16题，第5题是课本第6章引理1.4，第6题是课本第2章的习题19.**