这个文档比较模糊，清晰版可以在我的知乎主页上找到（知乎搜索用户名yx3x）。我的原稿放在家里没带在身边。

Ch7 习题

1. $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\}. \end{cases}$ 至多一个光滑解

Proof: ~~全~~ 设 u_1. u_2 为原方程2个光滑解. $v = u_1 - u_2$ 要证 $v=0$

v 满足 $\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } U_T \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ v = 0 & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$

两边乘以 v. 积分得.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 - \int_U v\,\Delta v = 0$$

分部积分

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 = -\int_U |\nabla v|^2\,dx \leq 0$$

又: $\|v(0)\|_{L^2}^2 = 0$ 故 $\forall t \in (0,T]$. $\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$

$\Rightarrow \|v(t)\|_{L^2} = 0 \quad \underset{v \in C^\infty}{\Rightarrow} \quad v = 0 \quad \text{in } [0,T]$

□

2. 设 u 是如下方程的光滑解.

$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,\infty) \\ u = g & \text{on } \partial U \times \{t=0\} \end{cases}$ 证明: $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(U)} \leq e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$

$\lambda_1 > 0$ 是 $-\Delta$ 的主特征值

Proof: 方程两边乘以 u. 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = -\int_U |\nabla u|^2\,dx$$

又: $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}$ 故 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq -\lambda_1 \|u(t)\|_{L^2}^2$.

由 Gronwall 不等式

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2\lambda_1 t}\|u(0)\|_{L^2}^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|g\|_2^2$$

□

3. 设 u 为 $\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$ 的光滑解，其中 L 为二阶椭圆算子

v 为 $\begin{cases} \partial_t v - L^* v = 0 & \text{in } U_T \\ v = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ v = h & \text{on } U \times \{t=T\}. \end{cases}$ 的光滑解

求证：$\int_U g(x) v(x,0)\, dx = \int_U u(x,T) h(x)\, dx.$

证明：$\int_U u(x,T) h(x) - g(x) v(x,0)\, dx = \int_U u(x,T) v(x,T) - u(x,0) v(x,0)\, dx$

显见，这是关于 t 分部积分出来的边界项

$$上式 = \int_0^T \int_U (\partial_t u) \cdot v + (\partial_t v) \cdot u \; dx\, dt.$$

$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle$

$$= \int_0^T \int_U (\partial_t u) \cdot v + Lu \cdot v - u L^* v + \partial_t v \cdot u \; dx\, dt$$

$$= \int_0^T \int_U \underbrace{(\partial_t u + Lu)}_{0} v + u \cdot \underbrace{(\partial_t v - L^* v)}_{0} \; dx\, dt = 0$$

$\square$

4. (Galerkin Method for Poisson).

$f \in L^2(U)$. $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$ solves $\int_U Du_m \cdot Dw_k\, dx = \int_U f \cdot w_k\, dx$ $\quad 1 \le k \le m$.

证明：$\{u_m\}$ 存在子列，在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛于 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解.

Pf. Step 1: $\{u_m\}$ 在 H_0^1 中一致有界

$\int Du_m \cdot Dw_k\, dx = \int_U f \cdot w_k\, dx$. 两边乘以 d_m^k，对 k 求和有，

$$\int \|Du_m\|_{L^2}^2 = \int_U f u_m\, dx$$

$$C\|u_m\|_{H_0^1}^2 \le \quad \le \|f\|_2 \|u_m\|_{H_0^1} \le \varepsilon \|u_m\|_{H_0^1}^2 + C(\varepsilon) \|f\|_{L^2}^2.$$

ε 充分小 $\Rightarrow \|u_m\|_{H_0^1} \le C\|f\|_{L^2}$ ✓

Step 2: $\exists$ 子列 $u_{m_k} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$,

$Du_{m_k} \rightharpoonup v$ in $L^2(U)$

$v \overset{a.e.}{=} Du$?

$$\forall \varphi \in C_c^\infty \quad \underbrace{\int Du_{m_k} \cdot D\varphi}_{\to \int v \cdot D\varphi} = \int f \varphi$$

$$\| $$

$$-\int u_{m_k} \cdot D^2 \varphi$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$-\int u \cdot D^2 \varphi = \int Du \cdot D\varphi$$

~~问题可转化~~ $\cancel{\int v D\varphi}$

$\square$.

[7.5] 设

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \ \ in \ L^2(0,T;H_0^1(U)), \\ \mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} \ \ in \ L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases}$$

证明:$\mathbf{u}' = \mathbf{v} \ \ in \ L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

证明：我们断言：

Claim: 对任意$\phi \in C_c^\infty(0,T), w \in H_0^1(U)$, 成立:

$$\left\langle \int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt, w \right\rangle = \left\langle -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt, w \right\rangle,$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$代表$H^{-1}(U), H_0^1(U)$中元素之间的作用(pairing).

若Claim获证，那么在$H^{-1}(U)$中(即作为$H_0^1(U)$上的连续线性泛函)成立:

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt.$$

再由时间弱导数定义知

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \mathbf{u}'(t)\phi(t)dt.$$

这样就有$\mathbf{u}' = \mathbf{v} \ \ in \ L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

Claim的证明仍然由直接计算可得: 注意到$t \mapsto \pi(t)w \in L^2(0,T;H_0^1)$, 那么:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt, w \right\rangle &= \int_0^T \langle \phi'(t)\mathbf{u}(t), w \rangle \, dt \\
&= \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \phi'(t)w \rangle \, dt \\
(\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \ \ in \ L^2(0,T;H_0^1(U))) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k(t), \phi'(t)w \rangle \, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k(t)\phi'(t), w \rangle \, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle \int_0^T \mathbf{u}_k(t)\phi'(t)dt, w \right\rangle \\
&= -\lim_{k\to\infty} \left\langle \int_0^T \mathbf{u}_k'(t)\phi(t)dt, w \right\rangle \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k'(t)\phi(t), w \rangle \, dt \\
(\mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} \ \ in \ L^2(0,T;H^{-1}(U))) &= -\int_0^T \langle \mathbf{v}(t), \phi(t)w \rangle \, dt \\
&= \left\langle -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt, w \right\rangle
\end{aligned}$$

6. 设 H 是 Hilbert 空间，$u_k \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H)$，$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u_k(t)\| \le C$，$\forall k\in \mathbb{Z}_+$

证明：$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u(t)\| \le C$

Proof：先证：$\forall 0\le a\le b\le T$，$v\in H$，有：

(hint). $\int_a^b (v, u_k(t))\,dt \le C\|v\|\cdot|b-a|$. （显然）

若 hint 成立，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (v, u_k(t))\,dt \le C\|v\|$$

这样 由 Lebesgue 微分定理 $\xrightarrow{t\text{是}[a,b]\text{中点}}$

对 a.e. $t\in[0,T]$ 成立：$|\langle u_k^{(t)}, v\rangle| \le C\|v\|$

$k\to\infty$，由弱收敛知，$|\langle u, v\rangle| \le C\|v\|$ a.e. $t\in[0,T]$

$\Rightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u(t)\| \le C$.

---

6. H 为 Hilbert 空间. $u_k \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H)$. 且 $\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u_k(t)\| \le C$ $\forall k\in \mathbb{Z}_+$.

求证：$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u(t)\| \le C$

证明：设 $f_{ab}(v) = \int_a^b (v, u(t))\,dt$.

显然 $f_{ab} \in L^2(0,T;H)$.

故 $\lim_{k\to\infty} f_{a,b}(u_k) = f_{a,b}(u) = \int_a^b (u(t), u(t))\,dt$.

而 $f_{a,b}(u_k) = \int_a^b (u_k(t), u(t))\,dt$

$$\le C\int_a^b \|u(t)\|_H\,dt$$

$$\le C\sqrt{b-a}\,\big\|\|u(t)\|_H\big\|_{L_t^2(a,b)}$$

$\overset{k\to\infty}{\Rightarrow} \int_a^b \|u(t)\|_H^2\,dt \le C^2(b-a)$ $\forall a,b\in[0,T]$

$\Rightarrow \|u(t)\|_H \le C$ a.e. $t\in[0,T]$.

除以 $b-a$. 用 Lebesgue 微分定理即可

令 $b\to a$

□

7. 设 u是光滑解：$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in } U\times(0,\infty) \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,\infty) \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$

且函数c 满足 $c \geq \gamma > 0$.

证明：$|u(x,t)| \leq Ce^{-\gamma t}$

Proof：设 $v = e^{\gamma t}u$.

则 $\partial_t v - \Delta v + cv = \gamma e^{\gamma t}u + e^{\gamma t}u_t - e^{\gamma t}\Delta u + ce^{\gamma t}u$

$$= \gamma v + \big(\underbrace{(\partial_t - \Delta + c)u}_{0}\big)e^{\gamma t}$$

$$= \gamma v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \underbrace{(c-\gamma)}_{\geq 0} v = 0 & \text{in } U\times(0,\infty) \\ v=0 & \text{on } \partial U\times[0,\infty) \\ v=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

由弱极大值原理：

$\forall (x,t)\in U_T$,

$$|v(x,t)| = e^{\gamma t}|u(x,t)| \leq \sup_{\Gamma_T} |v(x,t)|$$

$$= \sup_{x\in U} |g(x)|.$$

$$\Rightarrow |u(x,t)| \leq e^{-\gamma t}\|g\|_{L^\infty}$$

8. 若u是7中方程的光滑解：$g \geq 0$，但 c 有界但不一定非负，证明 $u \geq 0$

Proof：令 $v = e^{-(\|c\|_{L^\infty}+1)t}u$.

$$\overset{\text{同7}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + (c + \|c\|_{L^\infty} + 1)v = 0 & \text{in } U\times(0,\infty) \\ v=0 & \text{on } \partial U\times[0,\infty) \\ v=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

由弱极大值原理，$\min_{\bar U_T} v \geq -\max_{\Gamma_T} u^- = -\max_{U} g^-$.

$$g\geq 0 \Rightarrow g^- \equiv 0 \Rightarrow \min_{\bar U_T} v \geq 0 \Rightarrow \min_{\bar U_T} u \geq 0.$$

□

9. 证明 7.1.3 中的 (54).
7.2.3 中的 (59).

Proof:
(54) 是什么? $\forall u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$ 成立: $\beta\|u\|_{H^2}^2 \le (Lu,-\Delta u)+\gamma\|u\|_{L^2(U)}^2$.
$(\exists\beta>0,\ \gamma\ge 0)$.

实际用上的 只是对 Galerkin 逼近序列 用此不等式.

在此,为了方便,我们设 $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$ 在实际构造中 $\Delta u_m=0$ on ∂U.

$\left\{ u\in C^\infty,\ u|_{\partial U}=0.\ \ \underline{\Delta u|_{\partial U}=0}.\right.$

要证: $-\int_U\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i u\,\partial_j(\Delta u)\,dx \ge \frac{\theta}{2}\int_U |D^2u|^2dx - C\int_U|u|^2dx$

①出现三阶导,希望分部积分.

分部积分可得:

$$-\sum_{ij}\int_U a^{ij}\partial_i u\,\partial_j(\Delta u) = -\sum_{ij}\int_U a^{ij}\partial_i u\,\nabla\cdot(\nabla\partial_j u)\,dx$$

$$=\sum_{ij}\int_U \nabla(a^{ij}\partial_i u)\cdot\nabla(\partial_j\nabla u)\,dx - \sum_{ij}\int_{\partial U} a^{ij}\partial_i u\cdot(\partial_j\nabla u)\cdot\vec n\,dS$$

$$=\sum_{ijk}\left(\int_U a^{ij}\partial_{ik}u\,\partial_{jk}u\,dx+\int_U\partial_k a^{ij}\,\partial_i u\,\partial_{jk}u\,dx\right) - I.$$

$$I:=\sum_{ijk}\int_{\partial U} a^{ij}\partial_i u\,\underline{\partial_{jk}u\cdot\cos(\vec n,e_k)}\,dS \qquad \underline{} = \frac{\partial(\partial_j u)}{\partial\vec n}.$$

希望对 I 有何控制?

问题:
- 计算出 u 的所有二阶导数 (along ∂U).
- 如何处理 $\frac{\partial u}{\partial x_n}$. (边界的法向导数)?

手段: 边界拉直 (on 单边值的意义), 写成局部坐标.
- 直接计算. 先求 $\partial_{nn}u$. 再求 $\partial_\alpha\partial_n u$. 再求 $\partial_\alpha\partial_\beta u$.

- 希望的结果. $|I|\le\varepsilon\int_U|D^2u|^2+C_\varepsilon\int_U|u|^2dx$.

迹定理 $\overset{\text{只需}}{\Longleftarrow}$ Young's $|I|\lesssim\int_U|\nabla u|^2dx$

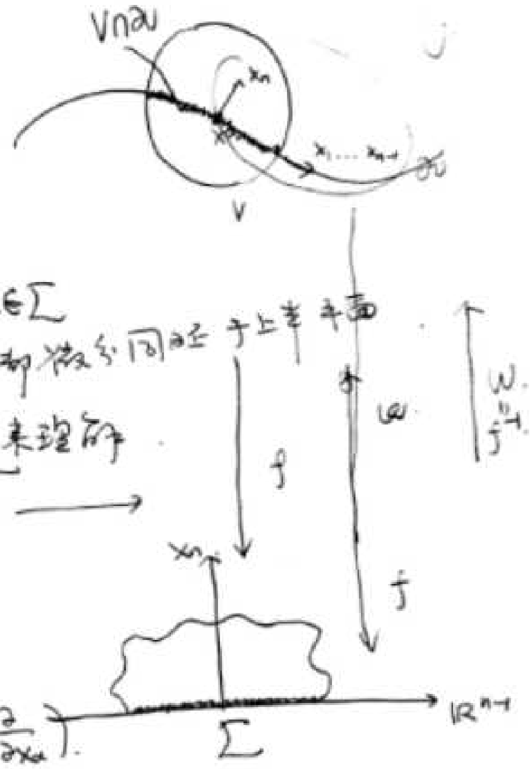
因 I 本身是 ∂U 的积分,要转化为 U 中的积分 只有靠"迹定理" $\overset{\text{迹定理}}{\Longleftarrow}$ $|I|\lesssim\int_{\partial U}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2\underline{dS}$.

$\overset{\text{局部坐标下,法向为}e_n}{\Longleftarrow}$ $|I|\le\sum\int_\Sigma(\partial_{x_n}u)^2\,dx^{n-1}$ ← 于是这成为了我们的目标.

即: 设法用 $\partial_{x_n}u$ 等, 来给出 I 中各个导数(尤其是二阶的)的估计.
$\partial_{x_n}\partial_n u$.

于是，我们现在要做的是，将∂U上的各阶导数用$\partial_{x_n} u$、$\partial\partial_{x_n}^2 u$表示出来。

Step 1：由单位分解（因∂U紧），可以假设a^{ij}的支集包含于某一点$x_0 \in \partial U$的邻域V内。



不妨设：x^0是原点，∂U在x^0处的法向是x_n轴（$\vec{e}_n$）。

$\Sigma = V \cap \partial U$在$x_n$轴上的投影。

记$x_n = w(x')$，$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Sigma$，$w \in C^2(\Sigma)$。

→ 这一段文字其实可以用带边流形之定义来理解，

如同 则存在微分同胚f：

w即是该微分同胚之逆

局部微分同胚于上半平面

$$(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha})$$

Step 2：计算$\partial_\alpha \partial_\beta u$。 $(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha})$

令$v(x') = \partial_n u(\underbrace{x', w(x')}_{})$ → 即$V\cap\partial U$任一点，用局部坐标可写成$(x', w(x'))$

(1°) 求$\partial_n^2 u$。

对上式求导$(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$，

有：$\partial_\alpha v = \partial_\alpha \partial_n u + \partial_n^2 u \cdot \partial_\alpha w$. ⋯ ①

又：$u|_{\partial U} = 0$. 故，$u(x', w(x')) = 0$. $\forall x' \in \Sigma$.

对x_α求导：$\partial_\alpha u + \partial_n u\, \partial_\alpha w = \underline{\partial_\alpha u + v \cdot \partial_\alpha w} = 0$. on $V \cap \partial U$.

对x_β求导，$\partial_\alpha \partial_\beta u + \partial_\alpha \partial_n u\, \partial_\beta w + \partial_\beta v\, \partial_\alpha w + v \cdot \partial_\alpha \partial_\beta w = 0$. ⋯ ②

$1 \le \alpha, \beta \le n-1$.

取$\alpha = \beta$有：$\partial_\alpha^2 u + \partial_\alpha \partial_n u\, \partial_\alpha w + \partial_\alpha v\, \partial_\alpha w + v \cdot \partial_\alpha^2 w = 0$ ⋯ ③

对 α 从 $1\sim n-1$ 求和：

注意到 $\Delta u\big|_{\partial\Omega}=0 \Rightarrow -\partial_n^2 u = \sum\limits_{1\le\alpha\le n-1} \partial_\alpha^2 u$.

有：$-\partial_n^2 u + \sum\limits_{1\le\alpha\le n-1} \partial_\alpha\partial_n u\cdot\partial_\alpha w + \partial_\alpha v\,\partial_\alpha w + v\,\partial_\alpha^2 w = 0$ ⋯④

希腊字母

①代入④. 有：（重复指标代表求和）.

$$-\partial_n^2 u + (\partial_\alpha v - \partial_n^2 u\,\partial_\alpha w)\partial_\alpha w + \partial_\alpha v\,\partial_\alpha w + v\,\partial_\alpha^2 w = 0$$

$$\Rightarrow \partial_n^2 u\left(1+\sum_\alpha(\partial_\alpha w)^2\right) = v\,\Delta_{n-1} w + 2\partial_\alpha v\,\partial_\alpha w$$

$$\Rightarrow \partial_n^2 u = \frac{2\partial_\alpha w}{\sqrt{1+|\nabla_{n-1}w|^2}}\partial_\alpha v + \frac{\Delta w}{\sqrt{1+|\nabla_{n-1}w|^2}} v$$

这样. 对 $\partial_n^2 u$，我们达到了目的，即用 $\partial_\alpha v$. v (i.e. $\partial_\alpha\partial_n u$. $\partial_n u$) 表示.

方便起见. 令. $\sigma_{nn}^{\alpha} = \dfrac{2\partial_\alpha w}{\sqrt{1+|\nabla_{n-1}w|^2}} \in C^1(\Sigma)$

$$T_{nn} = \frac{\Delta w}{\sqrt{1+|\nabla_{n-1}w|^2}} \in C(\Sigma).$$

$$\Rightarrow \partial_n^2 u = \sigma_{nn}^{\alpha}\partial_\alpha v + T_{nn} v. \quad \cdots ⑤$$

上下指标表示求和

(2) 求 $\partial_\alpha\partial_n u$.

⑤代入①. 即有：

α 换成 β. 因为这与①中 α 重复.

$$\partial_\alpha v = \partial_\alpha\partial_n u + \partial_\alpha w\left(\sigma_{nn}^{\beta}\partial_\beta v + T_{nn} v\right).$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha\partial_n u = \partial_\alpha v - \partial_\alpha w\left(\sigma_{nn}^{\beta}\partial_\beta v + T_{nn} v\right).$$

$$= \partial_\beta v\left(\delta_\alpha^\beta - \sigma_{nn}^{\beta}\partial_\alpha w\right) - T_{nn}\partial_\alpha w\cdot v.$$

令. $T_{\alpha n} = T_{nn}\partial_\alpha w \in C(\Sigma)$ $\quad \sigma_{\alpha n}^{\beta} = \delta_\alpha^\beta - \sigma_{nn}^{\beta}\partial_\alpha w \in C^1(\Sigma)$

有：$\partial_\alpha\partial_n u = \sigma_{\alpha n}^{\beta}\partial_\beta v - T_{\alpha n} v$. ⋯⑥

(3°) 求 $\partial_\beta \partial_\alpha u$.

①代入② 有:

$$\partial_{\alpha\beta} u + (\sigma_{\alpha n}^{\nu} \partial_\nu v + \tau_{\alpha n} v) \partial_\beta w + \partial_\beta v \partial_\alpha w + v \partial_\alpha \partial_\beta w = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{\alpha\beta} u = -(\sigma_{\alpha n}^{\nu} \partial_\nu v + \tau_{\alpha n} v) \partial_\beta w - \partial_\beta v \partial_\alpha w - \partial_{\alpha\beta} w \cdot v = 0$$

$$= \partial_\nu v \left(-\sigma_{\alpha n}^{\nu} \partial_\beta w - \delta_\beta^\nu \partial_\alpha w\right)$$

$$+ v \left(-\partial_{\alpha\beta} w - \tau_{\alpha n} \partial_\beta w\right)$$

令 $\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} = -\sigma_{\alpha n}^{\nu} \partial_\beta w - \delta_\beta^\nu \partial_\alpha w$

$\tau_{\alpha\beta} = -\partial_{\alpha\beta} w - \tau_{\alpha n} \partial_\beta w$

$$\Rightarrow \partial_{\alpha\beta} u = \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \partial_\nu v + \tau_{\alpha\beta} v \qquad \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \in C^1(\Sigma) \\ \tau_{\alpha\beta} \in C(\Sigma) \end{array}$$

Step3: 完成估计:

如今, 可以用一些 $C^1(\Sigma)$ 之数 g^α 与 $C^0(\Sigma)$ 之数 h.

表示 I 如下:

$$I = \int_\Sigma v (g^\alpha \partial_\alpha v + hv) \, d\mathcal{H}^{n-1} \cdot |\underbrace{\det w}_{=1}|$$

$$|I| = \cancel{\left|\int_\Sigma \frac{v(g^\alpha \partial_\alpha v^2 + hv^2)}{2}\right|}$$

$$\left|\int_\Sigma \left(\frac{1}{2} g^\alpha \partial_\alpha (v^2) + hv^2\right) d\mathcal{H}^{n-1}\right|$$

分部积分地

$$= \left|\int_\Sigma \left(h - \frac{1}{2}\partial_\alpha g^\alpha\right) v^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}\right| \qquad \text{迹定理}$$

$$\lesssim \int_\Sigma v^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \lesssim \int_{\partial U} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 dS \lesssim \int_U |Du|^2 dx$$

再由 ChS. T9 有 $\int_U |Du|^2 dx \lesssim \|u\|_{L^2} \|D^2 u\|_{L^2} \lesssim \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2$ □

10. 求证：如下方程 至多一个光滑解 $\underset{\sim\sim}{d>0}$ ← 书上应该漏条件了

$$\begin{cases} u_{tt} + du_t - u_{xx} = f & \text{in } (0,1)\times(0,T) \\ u = 0 & \text{on } (\{0\}\times[0,T])\cup(\{1\}\times[0,T]) \\ u(0)=g \quad u_t(0)=h \end{cases}$$

证明：若有2个光滑解 ~~u=u~~ u_1, u_2，令 $v=u_1-u_2$，

则 v 满足
$$\begin{cases} v_{tt} + dv_t - v_{xx} = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,T) \\ v = 0 & \text{on } (\{0\}\times[0,T])\cup(\{1\}\times[0,T]) \\ v(0)=g. \quad v_t(0)=h. \end{cases}$$

令 $E(t) = \frac{1}{2}\|v_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_x\|_2^2$

则 $E'(t) = \int_0^1 v_t v_{tt} + v_x v_{xt}\, dx$

第2项分部积分.

$$= \int_0^1 v_t v_{tt} - v_{xx} v_t\, dx$$

$$= \int_0^1 (-dv_t)\, v_t\, dx$$

$$= -d\int_0^1 v_t^2 \leq 0$$

又 $E(0)=0$，$\therefore E(t)\equiv 0 \Rightarrow v(t) = \text{const}.$

又 $v(0)=0 \quad \therefore v\equiv 0$

□

[7-10] 求证: 如下方程组至多只有一个光滑解，其中d是常数.

$$\begin{cases} u_{tt}+du_t-u_{xx}=f & \text{in } (0,1)\times(0,T) \\ u=0 & \text{on } (\{0\}\cup\{1\})\times(0,T) \\ (u,u_t)=(g,h) & \text{on } (0,1)\times\{t=0\} \end{cases}$$

证明：由于方程是线性的，所以只需证明初值和非齐次项为0时方程只有零解，所以不妨设$f=g=h=0$.

任意固定一个$s\le T$, 令$v(x,t)=\int_t^s u(x,\tau)d\tau$, 则$v_t(x,t)=-u(x,t),\ v(x,s)=0,\ v(1,t)=v(0,t)=0$.

方程两边乘以v并作时空积分，记$U=(0,1)$为x的取值区间，则可得

$$\int_0^s\int_U u_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt+d\int_0^s\int_U u_t(x,t)v(x,t)dxdt-\int_0^s\int_U u_{xx}(x,t)v(x,t)dxdt=0.$$

第三项，分部积分∂_x可得

$$\begin{aligned}-\int_0^s\int_U u_{xx}(x,t)v(x,t)dxdt&=\int_0^s\int_U u_x(x,t)v_x(x,t)dxdt-\int_0^s\underbrace{u_x(1,t)v(1,t)-u_x(0,t)v(0,t)}_{=0}dt\\&=-\int_0^s\int_U v_{tx}(x,t)v_x(x,t)dxdt=-\frac{1}{2}\int_U|v_x(x,t)|^2dx\Big|_{t=0}^{t=s}\end{aligned}$$

而由v的定义知道$v_x(x,s)=0$, 所以上式右边等于$\frac{1}{2}\int_U|v_x(x,0)|^2dx$.

第一项，分部积分∂_t可得

$$\begin{aligned}\int_0^s\int_U u_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt=&-\int_0^s\int_U u_t(x,t)(-u(x,t))dxdt+\underbrace{\int_U u_t(x,t)v(x,t)dx\Big|_{t=0}^{t=s}}_{=0}\\=&\frac{1}{2}\int_U u^2(x,s)dx\end{aligned}$$

第二项，分部积分∂_t可得

$$\begin{aligned}d\int_0^s\int_U u_t(x,t)v(x,t)dxdt=&-d\int_0^s\int_U u(x,t)(-u(x,t))dxdt+\underbrace{\int_U u(x,t)v(x,t)dx\Big|_{t=0}^{t=s}}_{=0}\\=&d\int_0^s\int_U u^2(x,s)dxdt.\end{aligned}$$

令 $F(s)=\int_0^s\int_U u^2(x,s)dxdt$. 则 有 $F'(s)+2dF(s)=-\int_U|v_x(x,0)|^2dx\le 0$, 从 而 $\frac{d}{ds}(e^{2ds}F(s))\le 0$, 这 说 明 $e^{2ds}F(s)\le F(0)=0$. 而另一方面, $F(s)\ge 0$是显见的，所以F恒为0，从而$u=0$.

11. $\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^4 u = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,T). \\ u = \partial_x u = 0 & \text{in } (\{0\}\times[0,T]) \cup (\{1\}\times[0,T]) \\ u = g.\ u_t = h. & \text{on } [0,1]\times\{t=0\} \end{cases}$

存在至多一个光滑解.

Proof:

$V = u_1 - u_2$.

$\Rightarrow \partial_t^2 V + \partial_x^4 V = 0.$

乘以 V_t $\Rightarrow$ $\partial_t V \partial_t^2 V + \partial_t V \partial_x^4 V = 0.$

而: $\partial_t(\partial_t V)^2 = 2\partial_t^2 V \partial_t V.$

$\partial_t(\partial_x^2 V) = 2(\partial_x^2 V \cdot \partial_t \partial_x^2 V)$

所以上式 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\partial_t\left(\|V_t\|_{L^2}^2 + \|V_{xx}\|_{L^2}^2\right) = 0$

积分.

(分部2次.对x)

$\Rightarrow \|V_t\|^2 + \|V_{xx}\|^2 = \text{const.} = t=0$时的值 $= 0$

$\Rightarrow V = 0$.

□.

12: 设 A 为实Banach空间X上的闭算子, 定义域为D(A) ~~预解式~~ 若 $\lambda, \nu \in \rho(A)$

求证: (1) $R_\lambda - R_\nu = (\nu - \lambda) R_\lambda R_\nu$

(2) $R_\lambda R_\nu = R_\nu R_\lambda$.

证明: (1) 不妨 $\lambda \neq \nu$

$R_\lambda - R_\nu = R_\lambda \cdot \underbrace{(\nu I - A) R_\nu}_{\text{Id}} - \underbrace{(\lambda I - A) R_\lambda}_{\text{Id}} R_\nu$

$= (\nu - \lambda) R_\lambda R_\nu$

(2) 调换 λ, ν. 有 $R_\nu R_\lambda (\lambda - \nu) = R_\nu - R_\lambda$.

$= -(R_\lambda - R_\nu)$

$= -(\nu - \lambda) R_\lambda R_\nu$

约掉 $\lambda - \nu$

$\Rightarrow R_\lambda R_\nu = R_\nu R_\lambda$

□

13. Justify the equality

$$A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

used in (16) of §7.4.1. (Hint: Approximate the integral by a Riemann sum and recall A is a closed operator.)

先证明：对 $\int_0^M$. A 可与之换序：

$\forall M \in \mathbb{R}_+$. 对 k 将 $[0,M]$ 作分割：

$$[0,M] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left[\frac{j}{2^k}M, \frac{j+1}{2^k}M\right]$$

由 $I_k(t) := \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda t_j} S(t_j)u\, \chi_{t\in[t_{j-1},t_j]} \rightrightarrows e^{-\lambda t}S(t)u$. as $k\to\infty$

↑simple functions

及 A 闭 知：

$$A\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^M I_k(t)\,dt\right)$$

$$\overset{A\text{闭}}{=} \lim_{k\to\infty} A\int_0^M I_k(t)\,dt$$

$$\underset{I_k\text{ simple}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_0^M AI_k(t)\,dt$$

$$\underset{\text{MCT}}{\overset{A\text{闭}}{=}} \int_0^M \lim_{k\to\infty} AI_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^M Ae^{-\lambda t}S(t)u\,dt \overset{A\text{ linear}}{=} \int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

又：$e^{-\lambda t}$ rapidly decays，
$\|S(t)\| \le 1$.
A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt \xrightarrow[\exists]{M\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)u\,dt.$$

$$\Rightarrow A\left(\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right) \xrightarrow{M\to\infty} A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right)$$

therefore "$\|$" holds.

$\|$ 刚刚已证.

$$\int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt.$$

$\|$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\|$

$$\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt$$

□.

14.

设 ϕ 是热方程的基本解，即 $\phi(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

$\forall t>0$. 令

$$[S(t)g](x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-y,t)g(y)dy. \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

$S(0)g=g$.

则：$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

· $S(t)$ 是 L^2 上的压缩半群

· $\|S(t)g\|_{L^2}=\|\phi * g\|_{L^2}$

$$\leq\|\phi\|_{L^1}\|g\|_{L^2}=\|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(t)\|\leq 1.$$

· $\widehat{S(t+s)g}=\widehat{\phi(x-y,t+s)\,g}(\xi)$.

$\widehat{\phi}(\xi,t+s)\,\hat{g}(\xi)$.

$$=\hat{\phi}(\xi,t)\hat{\phi}(\xi,s)\hat{g}(\xi)=\widehat{S(t)S(s)g}$$

· $t\mapsto S(t)g$ 连续性：

$$\|S(t+h)g-S(t)g\|_{L^2}\leq\|S(h)g-g\|_{L^2}.$$

$$=\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-y,h)g(y)dy-g(x)\right\|_{L^2_x}.$$

$$=\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-y,h)(g(y)-g(x))dy\right\|_{L^2_x}.$$

$$=\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y,h)(g(x-y)-g(x))dy\right\|_{L^2_x}$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y,h)\,\|g(x-y)-g(x)\|_{L^2_x}\,dy.$$

$\downarrow_0$ (平移连续性).

$\overset{DCT}{=}0$.

· $S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩半群，因在 $t=0$ 处不连续

令 ~~$g(x,y)=\chi_{\{x>0,\,y>0\}}$~~ $g(x)=\chi_{\{x>0\}}$，$g(0)=0$

$$(S(t)g)(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dy \qquad (S(t)g)(0)=\frac{1}{2}\quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \|S(t)g-g\|_{L^\infty}\geq\frac{1}{2}$$

□

15. 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq0}$

归纳定义 $D(A^k):=\{u\in D(A^{k-1})\mid A^{k-1}u\in D(A)\}$ $(k\geq2)$

证明：若 $\exists k$，$u\in D(A^k)$，则 $\forall t\geq0$ $S(t)u\in D(A^k)$

Pf. $\forall j\in\{1,2,\dots,k-1\}$，要证：$A^jS(t)u\in D(A)$

i.e. $\lim\limits_{s\to0^+}\dfrac{S(s)A^jS(t)u-A^jS(t)u}{s}$ ∃

$$\frac{S(s)A^jS(t)u-A^jS(t)u}{s}$$

$$=\frac{S(s)S(t)A^ju-S(t)A^ju}{s}$$

$$=\frac{S(t+s)(A^ju)-S(t)(A^ju)}{s}$$

归纳假设 $A^ju\in D(A)$

$\cancel{=}$

$=$ exists (只需 $S(0)=Id$).

□

16. 用 T15 证明：若 u 是 $\begin{cases}u_t-\Delta u=0 & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$ 在 $X=L^2(U)$ 中的半群解

且 $g\in C_c^\infty(U)$，则 $u(\cdot,t)\in C^\infty(U)$　$0\leq t\leq T$

Pf. 先证 $\{S(t)\}_{t\geq0}$ 压缩，此为显见。因在方程两边同乘 u，分部积分有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2}^2)+\|\nabla u\|^2=0.\quad\Rightarrow\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2\leq0$$

$$\Rightarrow\|u(t)\|_{L^2}^2\leq\|u(0)\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow\|S(t)g\|_{L^2}\leq\|g\|_{L^2}\ \forall g\in L^2$$

∴ $\{S(t)\}$ 压缩

而 $g\in C_c^\infty(U)\subset H^{2k}(U)\cap H_0^{2k-1}(U)=D(\Delta^k)$

$k=1$ 是显然的，之后归纳即可。

由 T15 知，$\forall t\geq0$

$$u(\cdot,t)=S(t)g\in H^{2k}(U)\cap H_0^{2k-1}(U).\quad\forall k\in\mathbb{Z}_+$$

由 Sobolev 嵌入知 $u(\cdot,t)\in C^\infty(U)$.

□