

Evans Ch7 Notes (Draft)

7.0:	预备知识	1
7.1:	二阶抛物方程 弱解	6
	Definition.	
	存在唯一性 (Galerkin Method)	7
	正则性	13
7.2:	抛物极大值原理	22
	弱极大值原理	
	强极大值原理	
7.3:	二阶双曲方程 弱解	22
	Definition	
	存在唯一性 (Galerkin Method)	
	正则性 三元PDE 热力学认	
7.4:	有限传播速度	22
	余面积公试及推论	
	有限传播速度	
7.5:	一阶双曲方程组	22
	消失粘性法 (Vanishing Viscosity Method)	
*7.6:	半群方法	22
	基本性质	
	Hille-Yosida 定理及应用、实例	
*7.7:	Strichartz 非端点估计	22
	Schrödinger 方程的非端点估计	
	$d \geq 3$ 时，能量次临界的半线性 Schrödinger 方程 H^1 局部适定	
	抽象 Strichartz 估计	

辛亥考

PB1300112

zhangjy9610@gmail.com.

12

*注意：

- (1) 7.0节在课本5.10节, 结论比证明重要114514倍。范数换成绝对值后所有结论都是显然的。
 - (2) 普通班进度是到本讲义7.3或7.4节结束。
 - (3) 7.3节证明全部建议跳过, 但须记住双曲方程正则性比抛物方程差。
 - (4) 7.1节Galerkin方法极其重要
 - (5) 本讲义跳过抛物Harnack不等式
 - (6) 粘性法对学椭圆方程/几何分析的同学很重要。

Ch7 发展方程弱解理论 抛物

§7.0 预备知识

I. 在 Banach 空间为值域的函数.

设 $f: [0, T] \rightarrow X$, $T > 0$, X 是 Banach 空间(赋予范数 $\|\cdot\|$).

Def: (1) (简单函数) $s: [0, T] \rightarrow X$ 称作简单函数, 若 s 有形式

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i \quad 0 \leq t \leq T$$

其中 $\{E_i\}$ 是 Lebesgue 可测集, $u_i \in X$
 $[0, T]$ 的

(2) (强可测). $f: [0, T] \rightarrow X$ 称作强可测, 若存在简单函数列

$s_k: [0, T] \rightarrow X$, 使得 $s_k(t) \rightarrow f(t)$ a.e. $t \in [0, T]$.

(3) (弱可测) $f: [0, T] \rightarrow X$ 称作弱可测. 若 $\forall u^* \in X^*$, 映射

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle u^*, f(t) \rangle \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{是可测的} \\ \text{Lebesgue} \end{array}$$

(4) 称 $f: [0, T] \rightarrow X$ 的取值是几乎可分的, 若存在 Lebesgue 可测集

$N \subset [0, T]$, 使得 $\{f(t) \mid t \in [0, T] - N\}$ 为 \mathbb{Q} (具有弱弱相等).

Thm 7.0.1 (Pettis 定理). $f: [0, T] \rightarrow X$ 强可测 \Leftrightarrow

f 弱可测且取值几乎可分.

证明 见 Yosida 的泛函分析

□

Def (定义积分)

(1) 若 $s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i(t)} u_i$ 是简单函数, 则 $\int_0^T s(t) dt := \sum_{i=1}^m F_m(E_i) \cdot u_i$.

(2) 对于强可测函数 $f: [0, T] \rightarrow X$, 称 f 可积 (summable) (弱可积, 强可积为实变中的“可积”). 是指 $\exists \{S_k\}_{k=1}^\infty$ simple. s.t.

$$\int_0^T \|S_k(t) - f(t)\| dt \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

(3) 若 f 可积. 则 $\int_0^T f(t) dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T S_k(t) dt$

□

Thm 7.0.2 (Bochner).

$f: [0, T] \rightarrow X$ 强可测, 则 f 可积 $\Leftrightarrow t \mapsto \|f(t)\|$ 可积.

$$\text{strong. } \|\int_0^T f(t) dt\| = \int_0^T \|f(t)\| dt.$$

$$\langle u^*, \int_0^T f(t) dt \rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t) \rangle dt \quad \forall u^* \in X^*$$

□

II. 时空 Sobolev 空间

Def: " $L^p([0, T]; X) = \left\{ u: [0, T] \rightarrow X \text{ 强可测} \mid \begin{array}{l} \|u\|_{L^p([0, T]; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ 1 \leq p < \infty \end{array} \right\}$

$L^\infty([0, T]; X) = \left\{ \dots \right\} \|u\|_{L^\infty([0, T]; X)} := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_\infty$

$C([0, T]; X) = \left\{ u: [0, T] \rightarrow X \text{ 连续} \mid \|u\|_{C([0, T]; X)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_\infty \right\}$

2

(2) $u \in L^1(0, T; X)$, 称 $v \in L^1(0, T; X)$ 是 u 的弱导数, 若 ($\exists u' = v$),
若 $\int_0^T \phi'(t)u(t) dt = - \int_0^T \phi(t)v(t) dt \quad \forall \phi \in C_c^\infty(0, T)$

(3) $W^{1,p}(0, T; X) = \{ u \in L^p(0, T; X) \mid u' \in L^p(0, T; X) \}.$
 $\|u\|_{W^1 P(0, T; X)} := \left\| \|u(t)\| + \|u'(t)\| \right\|_{L_t^p}$

Thm 7.0.3 (抽像空间中的基本运算)

$u \in W^{1,p}(0, T; X).$ ($1 \leq p \leq \infty$)

(1). $u \in C([0, T]; X)$ (modify 一个零测集后).

(2). $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s < t \leq T$

(3). $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)}$.

证明: 只证(2) \Rightarrow \Leftarrow

将 u 延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R}; X)$ 上. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u.$
 IR 上的磨光子.

则 $(u^\varepsilon)' = \eta_\varepsilon * u' \quad \text{on } (\varepsilon, T-\varepsilon).$

$\varepsilon \rightarrow 0$: $u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^p(0, T; X)$

$(u^\varepsilon)' \rightarrow u' \quad \text{in } L_{loc}^p(0, T; X).$

由 $u^\varepsilon(s) = u^\varepsilon(s) + \int_s^t u^\varepsilon'(\tau) d\tau, \quad \text{a.e. } 0 < s < t < T$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 由 $t \mapsto \int_0^t u'(\tau) d\tau$ 在 \mathbb{R} 上连续.

$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(s) ds$

□

3

Thm 7.0, 4 (更多基本运算). $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$, $u' \in L^2(0, T; H^1(U))$

(1) $u \in C([0, T]; L^2(U))$ (差分商的连续性).

(2) $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ 绝对连续. & $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle$
a.e. $0 \leq t \leq T$.

(3) $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2} \leq C \left(\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0, T; H^1(U))} \right)$.

证明: (1) u^ε 在 $[-\sigma, T+\sigma]$ 上. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

取 $\delta > 0$

$$\frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt} \langle u^\varepsilon - u^\delta, \rangle, |u^\varepsilon - u^\delta| \geq \frac{\delta}{2}$$

$$= 2 \langle u^\varepsilon(t) - u^\delta(t), u^\varepsilon(t) - u^\delta(t) \rangle \leq 0$$

积分.

$$\Rightarrow \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)\|_{L^2}^2$$

$$+ 2 \int_s^t \langle u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau), u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau) \rangle d\tau$$

$\forall 0 \leq s, t \leq T$ 且 $\exists \delta$.

Fix $s \in (0, T)$: $u^\varepsilon(s) \rightarrow u(s)$ in $L^2(U)$.

$$\begin{aligned} \therefore \limsup_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 &\leq \lim_{\substack{\varepsilon, \delta \rightarrow 0 \\ 0t}} \int_0^T \|u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\|_{H^1(U)}^2 d\tau \\ &\quad + \|u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u^\varepsilon(t)\} \subset C([0, T]; L^2(U))$ 为 Cauchy 序列.

故 $\exists v \in C([0, T]; L^2(U))$, $u^\varepsilon(t) \rightarrow v$ in $C([0, T]; L^2(U))$.

$\alpha: u^\varepsilon(t) \rightarrow u(t)$ a.e. t $\Rightarrow u = v$ a.e.

$$\text{从 } (1) \text{ 得 } \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + 2 \int_s^t \langle \Delta u^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(\tau) \rangle d\tau.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 则 $u = v$ a.e. 从而

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(s)\|_{L^2}^2 + 2 \int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau) \rangle d\tau.$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 \in AC[0,1]. \quad \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = 2 \langle u', u \rangle. \quad 0 \leq s, t \leq T$$

由上式和(3)即得：

~~$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2 ds + CT \|u'\|_{L^2(0,T;H^1(U))} \|u\|_{L^2(0,T;H^1(U))}$$~~

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2}^2 \lesssim_T \|u'\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;H^1)}^2.$$

Thm 7.0.5 U 有界开. ∂U 光滑, $m \in \mathbb{N}$.

$u \in L^2(0,T; H^{m+1}(U))$, $u' \in L^2(0,T; H^m(U))$. 则有：

(1) $u \in C([0,T]; H^{m+1}(U))$. (modify-T 定理参见 T6).

$$(2) \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \lesssim_{T,U,n} \|u\|_{L^2(0,T;H^m)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m)}$$

证明：对于 (1) 只证 $m=0$ 的情形. 其余同, 只需考虑 u 的导数.

此时 $u \in L^2(0,T; H^2)$, $u' \in L^2(0,T; L^2)$.

将 u 延拓为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 $L^2(0,T; H^2)$ 之函数 \bar{u} . 令 $\bar{u} \in V$.

$$\|\bar{u}\|_{H^2(V)} \leq C \|u\|_{H^2(U)}$$

$$\frac{d}{dt} \|D\bar{u}\|_{L^2}^2 = 2 \langle D\bar{u}, D\bar{u} \rangle = -2 \langle \bar{u}', \Delta \bar{u} \rangle$$

$$\leq C (\|\bar{u}'\|_{L^2(V)}^2 + \|\bar{u}\|_{H^2(V)}^2)$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^1(U)} \leq C \left(\|u\|_{L^2([0,T]; H^2)} + \|u'\|_{L^2([0,T]; L^2)} \right).$$

$$\Rightarrow u \in C([0, T]; H^1(U))$$

□

§ 7.1 一阶线性抛物方程弱解理论

本节考虑的方程为

$$(*) \quad \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$$

$f: U_T \rightarrow \mathbb{R}$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ 给定; $u: \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知函数

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{ij}(t,x) \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) \partial_i u + c(x,t) u.$$

$$a^{ij} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{ij} u + \dots$$

L -算子有因. $\{a^{ij}\}$ 实对称正定.

7.1.1 弱解之义:

设 $f \in L^2(U_T)$, $g \in L^2(U)$, $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$.

Def: 称 $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$, $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ 是初边值问题 (*) 的

弱解, 若成立: ① $\langle u', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U)$
 a.e. $t \in [0, T]$.
 ② $u(0) = g$.

$$\text{其中 } B[u, v; t] = \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + c u v \, dx.$$

$$\forall u, v \in H_0^1(U), \quad a.e. \quad t \in [0, T]$$

注: ① $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 不再表示内积, 而是 H^{-1} 对偶空间的元素与原空间 (H_0') 的元素之间的作用.

② 定义中的 $u(0) = g$ 是有意义的 因 Thm 7.0.3 表明 $u \in C([0, T]; L^2)$

□

7.1.2. 解的存在唯一性 (Galerkin 截断 \Rightarrow 能量估计 \Rightarrow Gronwall 不等式).

$$(4) \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u_0 = g & \text{on } U \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Main steps:

①: 构造逼近解序列 $\{u_m\}$, 满足 由有限维截断而来.
 H_0^1
用标准基测试, 满足弱解条件
且! (由 ODE 知识)

②: 能量估计: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0, T; H_0^1)$ 一致有界.
 $\{u_m'\}$ 在 $L^2(0, T; H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理, 存在 弱极限 u, v .
希望是解

$$③ \quad u' = v \quad a.e.$$

(u, u') 满足弱解定义.

Step 1: 构造逼近解序列:

设 $\{w_k\} \subseteq \mathcal{C}$ 是 $\begin{cases} L^2(U) \text{ 标正基} \\ H_0^1(U) \text{ 正交基} \end{cases}$

Fix $m \in \mathbb{Z}_+$. ~~若解存在~~

• 若 $u \in H_0^1$ 是弱解, 则可以展开为 $u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k$.

代入弱解定义即有: $\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k, w_l \right\rangle + B\left[\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k, w_l; t\right] = \langle f, w_l \rangle$

$$\Rightarrow d^l(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e_{kl}(t) d_k(t) = f^l(t) := \langle f, w_l \rangle \quad \text{A.l.} \quad \#$$

此时, 全 $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 且 $d_m^l(t) + \sum_{k=1}^m e_{kl} d_m^k(t) = f^l(t) \quad 1 \leq k, l \leq m$. $\#$

$$f^l \in L^2([0, T]).$$

$$e^{kl} := B[w_k, w_l; t] = \int a^{ij} \partial_j w_k \partial_j w_l dx.$$

$\Rightarrow u \in H_{loc}^1[0, T] \subseteq C[0, T]$ (作为 t 的连续函数). $\in C([0, T])$.

Claim: $u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m (\#) (g, w_k) w_k$.

$$(\#) (g_m(0)) = (g, w_k)$$

Claim 由 (#) 的存在唯一性 直接得证.

即存在绝对连续的 $\vec{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ 满足 $\begin{cases} (\#) \\ \text{Claim.} \end{cases}$

a.e. $t \in [0, T]$

Step 2: 能量估计:

Thm 7.1.1: 存在常数 $C > 0$ s.t.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0, T; H_0^1)} + \|u_m'\|_{L^2(0, T; H^{-1})} \leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)})$$

$$\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}).$$

Pruf:
由 Step 1: Fix $m \in \mathbb{Z}_t$
 $\forall k \leq m$, 有:

$$\langle u_m', w_k \rangle + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k).$$

两边乘以 $d^k(t)$, 对 k 求和有:

$$\underbrace{\langle u_m', u_m \rangle}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2} + B[u_m; \theta u_m; t] = (f, u_m).$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m \, dx = (f, u_m) - \int_U b^i (\partial_i u_m) \cdot u_m \, dx - \int_U c u_m^2 \, dx$$

L-一致有界

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Hölder}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2} \|u_m\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2} \|u_m\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \|u_m\|_{L^2}^2 \right) \\ &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|Du_m\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon) \|u_m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 有:

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \leq C (\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2).$$

Fact (Gronwall 不等式):

$$\begin{aligned} &\eta \text{ 非负}, \eta \in AC[0, T], \text{ 且对 a.e. } t \text{ 有: } \eta'(t) \leq \underbrace{\phi(t)}_{\substack{\text{L. 非负 on } [0, t] \\ \text{且}}} \eta(t) + \underbrace{\psi(t)}_{0 \leq t \leq T}. \\ &\text{即 } \eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) \, ds} (\eta(0) + \int_0^t \psi(s) \, ds). \end{aligned}$$

$$\text{在此: } \eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(U)}, \quad \psi(t) = \|f\|_{L^2}^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u_m\|_{L^2}^2 &\leq C e^{Ct} \left(\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-cs} \eta(s) \, ds \right), \\ &\leq e^{CT} \left(\|g_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2}^2 \, ds \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C_T (\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2) \quad 0 \leq t \leq T$$

下面再估计 $\|D_{um}\|_{L^2}^2$

$$\text{由: } \|D_{um}\|_{L^2}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2)$$

$$\begin{aligned} \text{对 t 积分: } \int_0^T \|D_{um}(t)\|_{L^2}^2 dt &\leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2) \\ &\leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right). \end{aligned}$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \leq C \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2 \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2).$$

下面再估计 $\|u'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$.

$$u_m = \sum_{k=1}^m d_k^{k'} w_k \Rightarrow u'_m = \sum_{k=1}^m d_k^{k'}(t) w_k.$$

$$\begin{aligned} \text{先估计 } \|u'_m(t)\|_{H^{-1}} \\ \text{Fix } t \in [0,T] \\ \forall v \in H_0(U) \\ &\|v\|_{H_0}(U) \leq \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} \|v\|_2 \text{ 截断.} \\ \langle u'_m, v \rangle &= \langle u'_m(t), v \rangle \\ &= B[u_m, v_m; t] + (f, v_m). \end{aligned}$$

$$\leq \|D_{um}\|_{L^2} \underbrace{\|D_{Vm}\|_{L^2}}_{\leq 1} + \|D_{Vm}\|_{L^2} \underbrace{\|V_m\|_{L^2}}_{\leq 1} + \|f\|_{L^2} \underbrace{\|V_m\|_{L^2}}_{\leq 1}.$$

~~对 v 截断~~

$$\Rightarrow \|u'_m\|_{H^{-1}}^2 \leq C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H^1}^2).$$

$$\Rightarrow \|u'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 = \int_0^T \|u'_m(t)\|_{H^{-1}}^2 dt \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2)$$

Step 3: 弱解存在性.

Thm 7.1.2: (*) 弱解存在.

Pf: 由 Thm 7.1.1 有: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0, T; H_0')$ 中一致有界
 $\{u_m'\}$ 在 $L^2(0, T; H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理及习题 5.6 结论

(Ex5): $\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \quad \text{in } L^2(0, T; H_0') \\ u_k' &\rightarrow v \quad \text{in } L^2(0, T; H^{-1}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v = u'$

(Ex6): H Hilbert.
 $\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \quad \text{in } L^2(0, T; H) \\ \|u_k(t)\|_{L^\infty} &\leq C \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C$

有: $\exists u_m \rightarrow u$ in $L^2(0, T; H_0')$.
 $u_m' \rightarrow u'$ in $L^2(0, T; H^{-1})$.

如今我们待证的是:

(i): $\langle u', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v) \quad \forall v \in H_0'$

(ii): $u(0) = g$.

claim: $\forall v \in L^2(0, T; H_0'(U)) . \int_0^T \langle u', v \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt.$

check: $\exists v \in C_c^1(0, T; H_0'(U)) . \sum_{k=1}^N d_k^k w_k . \quad d^k \in \mathbb{C} \quad 1 \leq k \leq N.$

取 $m > N$. 对 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$.

两边乘以 d^k 再对技术不等式

得: $\int_0^T \langle u_m', v \rangle + B[u_m, v; t] dt = (f, v).$

$m=m_1$. 全 $\rightarrow \infty$. 由弱收敛性定理有:

$$\int_0^T \langle u', v \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T \langle f, v \rangle dt \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1).$$

\uparrow
由 C_c^1 dense L^2 .

claim holds.

~~这样:~~ $\langle u' \rangle$.

下证: $\forall v \in H_0^1(U)$. a.e. $t \in [0, T]$ 成立. $\langle u', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v)$.
 $\forall v \in H_0^1(U)$.

由(i). $\forall v \in H_0^1(U)$. $\eta(t) \in C^\infty([0, T])$. $\forall v \in L^2(0, T; H_0^1(U))$.

$$\int_0^T \langle u', \eta v \rangle + B[u, \eta v; t] dt = \int_0^T (f, \eta v) dt.$$

$$\oplus \int_0^T \eta(t) \cdot (\langle u', v \rangle + B[u, v; t] - (f, v)) dt = 0$$

$$\Rightarrow \langle u', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v) \quad \text{a.e. } t \in [0, T] \text{ 成立.}$$

$\forall v \in H_0^1(U)$.

这样 (i) 成立. $\Rightarrow u \in C([0, T]; H_0^1)$

再证 (ii). $u(0) = g$.

由 $v \in C([0, T]; H_0^1)$, $v(T) = 0$. 由(i).

$$\int_0^T (\langle u', v \rangle + B[u, v; t]) dt = \int_0^T (f, v) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_m, v \rangle dt &= \langle u_m(t), v_m(t) \rangle - \langle u_m(0) - v(0) \rangle \\ &\quad - \int_0^T \underbrace{\langle u_m, v \rangle}_{\substack{\text{ip} \\ H^1 \\ H_0^1}} dt. \end{aligned}$$

$m=m_1$. $\rightarrow \infty$ 代入有:

$$u_m(0) = g_m \xrightarrow{L} g \quad \text{in } H_0^1.$$

$$\int_0^T -\langle v', u \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt + (g)v(0).$$

由 $v(0)$ 任意. 同(i) 有 $v(0) = g$.

Step 4: 稳定性

Theorem 7.1.3: (*) 弱解唯一性

证: 对于 $f = g = 0$ 时, 只有零解 (因方程是线性)

取弱解的定义中, $v = u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_L^2 + B[u, u]_t = \langle u', u \rangle + B[u^*, u]_t = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } B[u, u]_t &= \int \sum a^{ij} \partial_i u \partial_j u + \sum b^i u \partial_i u + c u^2 dx \\ &\stackrel{(2) \text{ Step}^2}{\geq} \theta \|Du\|_L^2 - \varepsilon \|Du\|_L^2 - C(\varepsilon) \|u\|_L^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|u\|_L^2 \leq -\frac{\theta}{2} \|Du\|_L^2 + C \|u\|_L^2 \leq C \|u(t)\|_L^2.$$

由 Gronwall 不等式, 且 $u(0)=0$ 及 $\|u(t)\|_L^2 \leq 0$, $u \equiv 0$.

$$u \in C([0, T]; H_0^1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u(0) = g & \text{on } \partial U \end{array} \right. \\ \end{array} \right\}$$

Theorem 7.1.3 正则性.

在下定正则性的结论之前, 我们先要通过一些形式推导来预示最终的结论.

$$\text{对热方程: } \left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u|_{t=0} = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u \cdot u_t + (\Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\nabla u \cdot \nabla u_t + (\Delta u)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \int |\nabla u|^2 dx + \int u_t^2 + \int |\Delta u|^2 \\ &= \int f^2 dx. \end{aligned}$$

对 t 积分可得：

$$\begin{aligned} & \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\Delta u_t|^2 dx dt \\ & \leq \int |\nabla u(x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx dt \\ & \lesssim \int |\nabla g|^2 dx + \int_0^T \int |f|^2 dx dt. \end{aligned}$$

所以，对弱解我们有： $g \in H_0^1$, $f \in L_t^2 L_x^2 \Rightarrow u \in L_t^2 H_0^1$, $u' \in L_t^2 H_x^{-1}$
 $\Rightarrow u \in L^2(0, T; H^2) \cap L^\infty(0, T; H_0^1)$
 $\uparrow u' \in L^2(0, T; L^2)$
观察上面的式子表示什么？

进一步地，~~若~~再对令 $\tilde{u} = u_t$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \partial_t f. \\ \tilde{g} &= f(\cdot, 0) + \sigma g \\ &= \partial_t u(\cdot, 0). \end{aligned}$$

两边乘 \tilde{u} .

$$\Rightarrow \tilde{u} \cdot \partial_t \tilde{u} - \tilde{u} \Delta \tilde{u} = \tilde{f} \tilde{u}$$

~~且~~ $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}\|_{L^2}^2$ 由弱解会变成 $(\nabla \tilde{u})^2$

对 t 积分得：

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \|\tilde{u}\|_{L^2}^2 dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx dt \lesssim \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 + |f(\cdot, 0)|^2 dx$$

~~且~~ ~~sup~~

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx dt$$

$$\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 + |f(\cdot, 0)|^2 dx \right)$$

$$\text{但 } \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_2 \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} \stackrel{(Thm 7.03)}{\leq}$$

$$\mathcal{D}: -\Delta u = f - \partial_t u$$

$$\text{由 } \nabla^2 u, \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 dx \leq C \int f^2 + (\partial_t u)^2 dx. \quad (\text{有 } \nabla^2 u \text{ 存在性}).$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\nabla^2 u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx dt$$

$$\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 dx \right).$$

□.

由上, 我们可以证明.

$$g \in H^2, f' \in L^2(0, T; L^2) \Rightarrow \begin{cases} u \in L^\infty_t H_x^2 \\ u' \in L^\infty_t L_x^2 \cap L_t^2 H_0^1 \\ u'' \in L^2(0, T; H^{-1}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{关于 } u \text{ 的} \\ \text{估计.} \end{array}$$

关于热方程, 本身具有更好的光滑效应.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \in L^2 \end{cases}$$

由 Fourier 变换 换有: $\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$.

$$\Rightarrow \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \left\| \langle \xi \rangle^s \hat{u}(t, \xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$(\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$= \left\| \underbrace{\left(e^{-t|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s \right)}_{\text{有界 Fourier 系子}} \hat{g} \right\|_{L^2}.$$

Mikhlin-Hörmander 算子理论

$$\lesssim \|g\|_{L^2}. \quad s > 0$$

对自由热方程, $g \in L^2 \Rightarrow u \in C^\infty$

□.

Thm 7.1.4 (抛物方程正则性定理).

(1) 设 $g \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. 设 $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u' \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$

$$\text{是 } (*) \begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{on } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

那么有: $u \in L^\infty(0, T; H^2) \cap L^2(0, T; H_0^1)$, $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

$$\text{且 } \|u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1)} + \|u\|_{L^2(0, T; H^2)} + \|u'\|_{L^2(0, T; L^2)}$$

$$\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2)} + \|g\|_{H_0^1}).$$

(2) 若 $g \in H^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

设 $u \in L^\infty(0, T; H^2)$, $u' \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^1)$,

$$u'' \in L^2(0, T; H^1).$$

且

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; H^2)} + \|u'\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u''\|_{L^2(0, T; H^1)} + \|u'''\|_{L^2(0, T; H^1)}$$

$$\leq C (\|f\|_{H^1(0, T; L^2)} + \|g\|_{H^2}).$$

证明: (1) $\exists m \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.

(1.1) 逼近解 u_m 满足.

$$(u_m', u_m') + \underbrace{B[u_m, u_m'; t]}_{\int_0^t \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' dx} = (f, u_m').$$

$$\int_0^t \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' dx + \int_V \sum_{ij} b^i \partial_i u_m u_m' + c u_m u_m' dx.$$

$$\text{而 } \int_V a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' dx = \int \frac{d}{dt} \cdot (\sum a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m) - \underbrace{\sum a^{ij} u_m' \partial_j u_m}_{\frac{d}{dt}} dx.$$

$$\text{从而 } \|u\|_{L^2(0,T;H^2)} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1})$$

(2).

$$u_m' + B[u_m, w_k; t] = (f \cdot w_k) \quad 1 \leq k \leq m.$$

\downarrow 对于 k

$$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f' \cdot w_k)$$

\downarrow 乘以 $d_m^{k'}(t)$, 对 $k' \neq k$.

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+, \quad (u_m', u_m') + B[u_m, u_m'; t] = (f' \cdot u_m').$$

$$\downarrow \sum \widetilde{u_m} = u_m \quad \text{且} \quad \widetilde{u_m}(0) = u_m(0) = -L(u_m(0)) + f(0).$$

$$(\widetilde{u_m}', \widetilde{u_m}) + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}; t] = (f' \cdot \widetilde{u_m}).$$

(2.1) 由 Thm 7.1.1 (能量不等式). 故:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\widetilde{u_m}(t)\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{u_m}\|_{L^2(0,T;H^2)}^2$$

$$\leq C(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\widetilde{u_m}(0)\|_{L^2}^2).$$

$$\leq C(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\widetilde{u_m}(0)\|_{H^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2).$$

$$\leq C(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2(0))} + \|g\|_{H^2}^2)$$

✓

同时 g 的 H^2 指标是?

~~$u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$~~

~~且 $u_m(0) = g_m$~~

$\nabla^2 u_m(0)$ 有梯度且 $\{w_k\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$. $\nabla u_m = 0$ 在 $\partial\Omega$.

$$\therefore \underline{\|u_m(0)\|_{H^2}^2} \quad u_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_m u_m u_m(0) \\ \Delta u_m u_m u_m(0) = \end{array} \right\} |\nabla^2 u_m|^2 dx - \sum_{i,j} \int n_i \partial_i u_m \partial_j u_m + n_j \partial_i u_m \partial_j u_m ds.$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \sum_j a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} \sum_i a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m dx}_{A[u_m]}.$$

因此：

$$\begin{aligned} \|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A[u_m] &= (f, u_m) - \sum_i \int_{\Omega} b^i \partial_i u_m u_m' dx - \int_{\Omega} c u_m u_m' \\ &\leq C \left(\|f\|_{L^2} \|u_m'\|_{L^2} + \|D u_m\|_{L^2} \|u_m'\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2} \|u_m'\|_{L^2} \right). \\ &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|u_m'\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon) (\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2). \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 有：

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} A[u_m] \leq C (\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2).$$

积分可得. $\forall t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \underbrace{A[u_m]}_{\geq \theta \|Du_m\|^2} &\leq C \left(\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 dt + A[u_m(0)] \right) \\ &\stackrel{\text{Est.}}{\leq} C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0, T; H_0^1)}^2 + \|Du_m\|_{L^2}^2) \\ \Rightarrow \int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 &\cancel{+ \|Du_m(t)\|_{L^2}^2} + \|Du_m(t)\|_{L^2}^2 dt. \quad \downarrow \text{用 Thm 7.1.1} \\ &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0, T; H_0^1)}^2 + \|Du_m\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^2}^2 dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 + \|g\|_{H_0^1(0)}^2) \\ &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 + \|g\|_{H_0^1(0)}^2) \end{aligned}$$

$\hat{\Sigma}_m \rightarrow \infty$ 即得 $\|u'\|_{L^2(0, T; L^2)}$ 的估计. \hookrightarrow 用到了习题 6.
 $(\text{即 } \|\hat{u}\|_{L^2(0, T; L^2)} \geq \|\hat{u}'\|_{L^2(0, T; L^2)})$

①.2

拿下估计 $\|u\|_{L^2(0, T; H^2)}$.

$$\text{由子: } (u', v) + B[u, v; t] = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U).$$

$$B[u, v; t] = (f - u', v) \quad \forall v \in H_0^1(U) \quad \text{a.e. } t \in [0, T].$$

由椭圆方程正则性结论. $\|u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_2 + \|u'\|_{L^2})$ a.e. $0 \leq t \leq T$. 18

但 Ch5. Ex. 9.

$$0 \leq \|D_i w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{\downarrow}{\leq} C \|w_k\|_{L^2(\Omega)} \|D^2 w_k\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

$\Rightarrow \int_{\Omega} D_i w_k \neq 0$.

$$\Rightarrow \|\tilde{u_m}(o)\|_{H^2}^2 \leq C \|\tilde{u_m}(o)\|_{L^2}^2$$

$$= C(\Delta \tilde{u_m}(o), \Delta \tilde{u_m}(o))$$

由 ip. 3:

$$= C(g_m, \Delta^2 \tilde{u_m}(o)).$$

$$(u_m(o), w_k) = (g, w_k)$$

$$= C(g, \Delta^2 \tilde{u_m}(o))$$

$$= C(\Delta g, \Delta \tilde{u_m}(o))$$

$$\leq C \|\Delta g\|_{L^2} \|\Delta \tilde{u_m}(o)\|_{L^2}^2$$

由

$$\leq C(\|g\|_{H^2}^2 + \|\tilde{u_m}(o)\|_{H^2}^2).$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u_m}(o)\|_{H^2}^2 \leq C \|g\|_{H^2}^2$$

这样: $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u_m'\|_{H_0^1}^2 dt \leq C (\|f\|_{H^1(0, T; L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2)$.

~~从而~~ 由定理.

$$m = m_1 \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u'\|_{L^2(0, T; H_0^1)} \leq C \|f\|_{H^1(0, T; L^2)} + \|g\|_{H^2}$$

(2-2)

下面再估计 $\|u\|_{L^\infty(0, T; H^2)}$.

前 Fair (习题 9). $\exists \beta > 0 \nexists \gamma_0$ s.t. $\beta \|u\|_{H^2}^2 \leq (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$.

如今: $B[u_m, w_k] = (f - u_m', w_k), \quad 1 \leq k \leq m$.

求 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k$. 有: $B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m', -\Delta u_m)$.
 求和 \uparrow
 $(Lu_m, -\Delta u_m)$.

$$\Rightarrow \beta \|u_m\|_{H^2}^2 \leq (Lu_m, -\Delta u_m) + \gamma \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\uparrow \text{Fair} = (f - u_m', -\Delta u_m) + \gamma \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \|\Delta u_m\|_{L^2} + \|u_m'\|_{L^2} \|\Delta u_m\|_{L^2} + \gamma \|u_m\|_{L^2}^2.$$

$$\leq \frac{\varepsilon \|\Delta u_m\|_{L^2}^2}{\|D^2 u_m\|_{L^2}^2} + C(\varepsilon) \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \gamma \|u_m\|_{L^2}^2 \right)$$

$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\beta}{2}$. 有:

$$\|u_m\|_{H^2}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2 \right).$$

不唯一解 $\Rightarrow \infty$ (都有因正則性條件).

對 \neq 之.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq C \left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \right)$$

$$H \hookrightarrow L^\infty \text{ (dim=1). } + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$$

$$\leq C \left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \right)$$

$$(1)+(2) \leq C \left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^4(0,T)} \right).$$

$$m=m_t \rightarrow \infty \quad \text{由定理 6.} \quad \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq (\dots)$$

(2.3) 余下估計 $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, 不考慮 u_m'' 之.

$$\text{Fix any } v \in H_0^1(U). \quad \|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1. \quad \langle u_m'', w_k \rangle + B[u_m', w_k] = (f', w_k).$$

$$\|u_m''\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle u_m'', v \rangle|.$$

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} | \langle f' - B[u_m', v]_t, v \rangle |$$

$$V = V^1 + V^2 \subseteq \underbrace{\text{Span}\{w_1, \dots, w_m\}}_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \oplus \text{Span}\{w_{m+1}, \dots\}.$$

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} | \langle f', v^1 \rangle - B[u_m', v^1; t] | \xrightarrow{\text{def}}$$

$$\leq \sup_{\|u\|_{H_0^1} \leq 1} \left(\|f'\|_{L^2} \|v^1\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1} \|v^1\|_{H_0^1} \right)$$

$$\leq \|f'\|_{L^2} + \|u_m'\|_{H_0^1}$$

再用②有：

$$\begin{aligned} \|u_m'\|_{L^2(0, T; H^{-1})} &\leq C(\|f'\|_{L^2(0, T; L^2)} + \|u_m'\|_{L^2(0, T; H_0^1)}) \\ &\leq C(\|f\|_{H^1(0, T; L^2)} + \|g\|_{H^2}). \end{aligned}$$

由习题5，令 $m = m_l \rightarrow +\infty$ 有

$$\|u''\|_{L^2(0, T; H^{-1})} \leq C(\|f\|_{H^1(0, T; L^2)} + \|g\|_{H^2})$$

□

更高正则性可由引理内法得出，此处不再证明：

Thm 7.1.5 (高阶正则性)。

设 $g \in H^{2m+1}(U)$, $\frac{d^k f}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m-k}(U))$.

$g_0 = g \in H_0^1(U)$, $g_1 = f - Lg_0 \in H_0^1(U)$, ..., $g_m = \frac{d^{m+1} f}{dt^{m+1}} - Lg_{m-1} \in H_0^1(U)$.

P.R. $\frac{d^k u}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))$, $0 \leq k \leq m+1$.

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))}$$

$$\leq C \left(\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right)$$

□

Thm 7.1.6:

$$g \in C^\infty(\bar{U}), f \in C^\infty(\bar{U}_T), \text{ 且 } \forall m \in \mathbb{Z}_+, g_m = \frac{d^m f}{dt^{m+1}} - g_{m-1} \in H_0^1(U)$$

则初边值问题(*)有唯一解 $u \in C^\infty(\bar{U}_T)$

□

§ 7.2 极大值原理.

本节将跳过 Harnack 不等式, 令 $L_u = -\sum_{ij} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i b^i u_{x_i} + c u$

7.2.1 弱极大值原理.

Thm 7.2.1 $u \in C^2_c(U_T) \cap C(\bar{U}_T), C=0 \text{ in } U_T, P_T = \bar{U}_T - U_T$

(1) 若 $u_t + L_u \leq 0$ in U_T . 则 $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{P_T} u$.

(2) 若 $u_t + L_u \geq 0$ in U_T . 则 $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{P_T} u$.

证明: \Rightarrow ① ②.

若 $u_t + L_u < 0$ in U_T .
设 $(x_0, t_0) \in U_T, u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$.

· 若 $0 < t_0 < T$. 则 $(x_0, t_0) \in U_T$ 内部.

$\Rightarrow \partial_t u(x_0, t_0) = 0$

又: $L_u \geq 0$ at (x_0, t_0) . (这与课本 6.4 节 Thm (1) 的证明是一致的).

$\Rightarrow \partial_t u + L_u \geq 0$. 与假设矛盾.

· 若 $t_0 = T$. 则 $u_t \geq 0$ at (x_0, t_0) (因 u 在 (x_0, t_0) 达极大值).

同样有 $L_u \geq 0$. 推出矛盾.

- $\frac{\partial u}{\partial t} + f \leq 0$. 由 $u_t + L_u \leq 0$ 令 $u^\varepsilon(x-t) = u(x, t) - \varepsilon t, \varepsilon > 0$.

则 $u_t^\varepsilon + L_u^\varepsilon = u_t + L_u - \varepsilon < 0$ in U_T .

$\Rightarrow \max_{\bar{U}_T} u^\varepsilon = \max_{P_T} u^\varepsilon. \quad u^\varepsilon \rightarrow u$ 即得结论

□

对CIO，我们也有类似结论

$\text{Thm 7.2.2: } (\text{弱极大值原理}) \text{ 原理. } (C>0) \quad u \in C^2(\bar{\Omega}_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$

$c > 0$ in U_T

(1) 若 $\partial_t u + L_u \leq 0$ in U_T , 则 $\max_{\overline{U_T}} u \leq \max_{\overline{\Gamma_T^+}} u^+$.

(2) 若 $\partial_{t+4} u + Lu > 0$ in U_T , 則 $\min_{U_T} u \geq -\max_{U_T} u$

$$(37) \quad = 0 \quad \text{and} \quad \max_{U_T} |u| = \max_{P_T} |u|$$

D

Thm 7.2.3: Harnack 不等式

$$u \in C_1(U_T) \text{ 且 } u_t + Lu = 0 \quad \begin{matrix} \text{in } U_T \\ u \geq 0 \end{matrix}$$

$V \subset U$ 连通, 则 $\forall 0 < t_1 < t_2 \leq T, \exists C > 0$ s.t. $\sup_v u(\cdot, t_1) \leq C \inf_v u(\cdot, t_2)$

四

7.2.2. 强极大值原理

$\exists t_0 \in [0, T] \quad , \quad U_{t_0} = U \times [0, t_0]$

Thm 7.2.4 (强极大值原理). $u \in C^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$. $c = 0$ in U_T . U 是连通集

(1) 若 $\partial_t u + L_u \leq 0$ in U_T , u 在 $(x_0, t_0) \in U_T$ 处达到在 \bar{U}_T 中的最大值.

则 u 是 U_t 上的常值函数.

(2). - .. $\frac{7}{10}$ - - - - - . - - - $\frac{9}{10}$ 小时

以上，假设 L 的系数是光滑的。

证明: 只证(1). 设 $W \subset \subset U$. $x_0 \in W$. V 满足.

$$\begin{cases} \partial_t v + L v = 0 & \text{on } W_T \\ v = u & \text{on } \bar{W}_T =: \Omega_T \end{cases}$$

由弱极大值原理. $u \leq v$.

then $v = M$ at ~~(x_0, t_0)~~ (X_0, t_0) .

$$\tilde{v} := M - v \cdot \log c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_t \tilde{v} + L \tilde{v} = 0 \\ \tilde{v} > 0 \end{cases} \quad \text{in } W_1.$$

惟第 $V \subset W$, $x_0 \in V$, V 连通. $0 < t < t_0$.

由Harnack不等式. $\max_V \tilde{V}(\cdot, t) \leq C \inf_V \tilde{V}(\cdot, t_0) \leq \tilde{V}(x_0, t_0) = 0$

23.

$$\Rightarrow \tilde{v} = 0 \text{ on } V \times \{t\}, \forall t \in (0, t_0).$$

$\forall v \in C^1_{\bar{\Omega}}(W)$

$$\Rightarrow \tilde{v} = 0 \text{ in } W_{t_0}$$

$$\Rightarrow v = M \text{ in } W_{t_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = u \text{ on } \Delta_T \\ v \in C^1(\partial W) \end{array} \right\} \Rightarrow u = M \text{ in } \partial W \times [0, t_0]$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in C^1(W) \\ W \subset U \end{array} \right\} \Rightarrow u = M \text{ in } U_{t_0}$$

12.

Thm 7.2.5 ($C > 0$ 的弱极大值原理) - $u \in C^1(U_T) \cap C(\bar{U}_T), C > 0$ in U_T .
 U 连通
 (非正)

(1) 若 $u_t + Lu \leq 0$ in U_T , u 在 $(x_0, t_0) \in U_T$ 处达到在 U_T 中的弱极大值. 且
 u 在 U_{t_0} 中是 \tilde{u} .

(2). $\exists 0$

(非正)
 \tilde{u} 小于 u .

Proof.: $M := \max_{\bar{U}_T} u \geq 0$.

$u_t + Lu \leq 0$ in U_T .

若 $M = 0$, 则由 Thm 7.2.4 即可.

若 $M > 0$, 由 7.2.4. 选取 $W \subset \subset U$, $x_0 \in W$, $K := L - c \text{Id}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t + Kv = 0 & \text{in } W_T, \\ v = u^+ & \text{on } \Delta_T. \end{array} \right.$$

$$0 \leq v \leq M$$

在 $\{u \leq 0\}$, 有 $u_t + Ku \leq -Cu \leq 0$.

那么由弱极大值原理.

$$u - v \leq 0$$

$$\Rightarrow v = M \text{ at } (t_0, x_0)$$

Thm 7.2.4

$$\tilde{v} = M - v, \quad \partial_t \tilde{v} + K \tilde{v} = 0, \quad \tilde{v} \geq 0 \text{ in } W_T$$

任取 $v \in C^1(W)$, $x_0 \in V$, V 连通, $0 < t < t_0$, 由 Harnack 不等式知.

$$v = u^+ = M \text{ on } \partial W \times [0, t_0]. \quad \forall M > 0, \text{ 使 } u \equiv M \text{ on } \partial W \times [t_0, T]. \quad \square$$

24

§7.3 =阶双曲方程的弱解理论

$U_T := U \times (0, T]$, $T > 0$. $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集.

考虑初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T, \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u = g, \quad \partial_t u = h & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases} \dots (*)$$

$f: U_T \rightarrow \mathbb{R}$, $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ 给定.

$u: \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ 未知.

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} (a^{ij}(x,t) \partial_{x_i} u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) \partial_{x_i} u + c(x,t) u.$$

L 满足 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$, $\forall (x,t) \in U_T$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. for some $\theta > 0$.

则称 $\partial_t^2 + L$ 为一致双曲的.

$$a^{ij} = \delta_{ij}, \quad b^i = c = 0. \quad L = -\Delta. \quad \text{即化为波方程 } \square u = 0, \quad \square = \partial_t^2 - \Delta.$$

7.3.1 弱解定义

设 $a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{U}_T)$, $a^{ij} = a^{ji}$

$$\begin{cases} f \in L^2(U_T), \\ g \in H_0^1(U), \quad h \in L^2(U). \end{cases}$$

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot, t) \partial_{x_i} u \partial_{x_j} v + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) \partial_{x_i} u \cdot v + c(\cdot, t) u v dx.$$

$\forall u, v \in H_0^1(U)$, $0 \leq t \leq T$.

Definition 称 $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ (且 $u' \in L^2(0, T; L^2(U))$, $u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$) 是(*)的弱解, 若: ① $\langle u'', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(U)$

q.e. $t \in [0, T]$

② $u(0) = g$, $u'(0) = h$.

Rmk: 事实上, $u \in C([0, T]; L^2(U))$, $u' \in C([0, T]; H^{-1}(U))$. 所以谈论 25 遥点值是有意义的.

为何如此？

· 形式语言：令积分即有

$$(u'', v) + B[u, v; t] = (f, v) \quad 0 \leq t \leq T, \quad v \in H_0^1(U)$$

$$\Rightarrow u'' \text{ 可以表示为 } u'' = g^0 + \sum_{j=1}^n a_j^j \partial_j(g^j) = \sum_i a^{ij} \partial_i u.$$

$f - \sum_i b^i \partial_i u - cu.$

\Rightarrow 应该使 u 满足 $u'' \in H^1(U)$. (a.e. $t \in [0, T]$)

□.

7.3.2 弱解存在唯一性 (Galerkin逼近).

$$(*) \begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ \partial_n u = h, \quad u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$$

与 7.1 类似. 选取 \triangle 的特征函数 $\{w_k\}$ 作为 $L^2(U)$ 的标准正交基
 $H_0^1(U)$ 的正交基.

$$\text{Fix } m \in \mathbb{Z}_+. \quad \text{取 } u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k.$$

问：如何选择 d_m^k 落实需求？

希望： $d_m^k(0) = (g, w_k), \quad (\text{因 } g = \sum (g, w_k) w_k)$

(#) $\left\{ \begin{array}{l} d_m^k(0) = (h, w_k) \\ d_m^k(t) = (f, w_k) \end{array} \right. \quad h = \sum (h, w_k) w_k.$

$\left\{ (u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k). \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq k \leq m. \right.$

Step 1: 构造逼近解序列

Thm 7.3.1 (逼近解序列的构造).

$\forall m \in \mathbb{Z}_+$. 存在唯一具有形式 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 的函数 u_m , 且 (#) 成立.

注意3:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i} u_{m' x_j} dx \\
 &= \int_U \sum_{i,j} \partial_t (a^{ij} u_{m x_i} u_{m' x_j}) dx - \int_U \sum_{i,j} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m' x_j} dx \\
 &\quad - \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i}' u_{m' x_j} dx \\
 \Rightarrow B_1 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m x_i}^{(t)} u_{m' x_j}^{(t)} dx - \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^n \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m' x_j} dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m x_i} u_{m' x_j}^{(t)} dx - C \|u_m\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned}$$

$$|B_2| \leq C (\|u_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u_m'\|_{L^2(U)}^2)$$

(Cauchy-Schwarz).

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left(\|u_m^{(t)}\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m x_i}^{(t)} u_{m' x_j}^{(t)} dx \right) \\
 & \leq C \left(\|u_m^{(t)}\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u_m^{(t)}\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right). \\
 & \leq C \left(\|u_m^{(t)}\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m x_i}^{(t)} u_{m' x_j}^{(t)} dx + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right)
 \end{aligned}$$

L一致補有圖

$$\begin{aligned}
 \text{令 } \eta^{(t)} &= \|u_m^{(t)}\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m x_i}^{(t)} u_{m' x_j}^{(t)} dx. \\
 \zeta^{(t)} &= \|f^{(t)}\|_{L^2}^2.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \zeta(t)$$

Proof: 设 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$.

$$\text{R}_1(u_m'' \cdot w_k) = d_m''(t).$$

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^m B[w_k, w_k; t]$$

$$f^k(t) := (f(t), w_k).$$

$$\text{R}_1(\#) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_m^{k''}(t) + \sum_{k=1}^m e^{k_1}(t) d_m^l(t) = f^k(t). \\ d_m^k(0) = (g \cdot w_k). \\ d_m^{k'}(0) = (h \cdot w_k) \end{array} \right.$$

由ODE存在唯一性之理即得

□.

2.3.2 能量估计

Step 2: 证明逼近解序列一致有界.

Thm 2.3.2 (能量估计). $\exists C = C(U, T, L) > 0$ s.t.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|_{P(L^2(U))} + \|u_m''(t)\|_{L^2(0, T; H^1(U))}^2 \right)$$

$$\leq C \left(\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)} \right). \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Proof: (#) 中两边乘以 $d_m^{k'}(t)$, 对 k 求和可得:

$$(u_m'', u_m') + B[u_m'', u_m'; t] = (f \cdot u_m'). \quad \text{a.e. } t \in [0, T].$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|_{L^2}^2$$

$$B[u_m, u_m'; t] = \underbrace{\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{m,x_i} u_{m,x_j}' dx}_{B_1} + \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^n b^i u_{m,x_i} u_m' dx}_{B_2} + c u_m u_m' dx$$

由 Gronwall 不等式

$$\eta(t) \leq e^{\sigma_1 t} (\eta(0) + C_2 \int_0^t \tilde{\zeta}(s) ds) \quad 0 \leq t < T.$$

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \|u_m'(0)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{mx_i}^{(0)} u_{mx_j}^{(0)} dx \\ &\leq C \left(\|h\|_{L^2(U)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2 \right). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{mx_i}^{(t)} u_{mx_j}^{(t)}$$

$$\leq C \left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right).$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\frac{\|u_m'(t)\|_{H_0^1}^2}{\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2} + \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 \right) \leq C \left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right).$$

再估計 $\|u_m''\|_{L^2(H_x^{-1})}$.

$$\text{Fix } v \in H_0^1(U), \|v\|_{H_0^1(U)} = 1$$

$$v = \sum_{k=1}^m v_k e_{(\text{Span}\{w_k\})^\perp}$$

$$\begin{aligned} \langle u_m'', v \rangle &= (u_m'', v) \\ &= (u_m'', v_1) + \underbrace{(u_m'', v_2)}_0 \\ &= (f, v_1) - B[u_m, v_2; t]. \end{aligned}$$

$$| \langle u_m'', v \rangle | \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} \right)$$

$$\Rightarrow \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 \right)$$

對 t 積分.

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 dt &\leq C \int_0^T \|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 dt \\ &\leq C \left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2 \right) \end{aligned}$$

Step3: 解的存在唯一性 (Banach-Alaoglu).

Thm 7.3.3 (*) $\exists!$ weak sol.

Pf: 由 7.2.2 及习题 5 知.

\exists 3 族 $\{u_m\}$ $u \in L^2(0, T; H_0')$ $u' \in L_t^2 L_x^2$. $u'' \in L_t^2 H_x^{-1}$.

s.t. $u_m \rightharpoonup u$ in $L_t^2 H_x^{-1}$

u_m' $\rightharpoonup u'$ in $L_t^2 L_x^2$

$u_m'' \rightharpoonup u''$ in $L_t^2 H_x^{-1}$

$$\forall v = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k, \quad d^k \in C^\infty, \quad \exists m \geq N.$$

在 $(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ 两边乘以 $d^k(t)$. 对 $k \in \mathbb{N}$.

对 t 积分有

$$\int_0^T \langle u_m'', v \rangle + B[u_m, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt.$$

$$\begin{aligned} & m = m_v, \quad v \rightarrow \infty \\ & \Rightarrow \int_0^T \langle u'', v \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt. \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0') \\ & \text{因 } \left\{ \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k \right\}_{N=1}^\infty \text{ dense in } H_0'(0, T) \\ & \Rightarrow \langle u'', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v), \quad \forall v \in H_0'(0, T). \\ & \{u \in C([0, T]; L^2), \quad u' \in C([0, T]; H^1), \quad a.e. t \in [0, T]. \end{aligned}$$

如今还需证明 $u(0) = g$, $u'(0) = h$.

$\forall v \in C^2([0, T]; H_0')$. $v(T) = v'_0(T) = 0$. 对 $t \in [0, T]$:

$$\int_0^T \langle v'', u \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt - (u(0), v(0)) + \langle u'(0), v(0) \rangle.$$

$$\text{且 } \int_0^T \langle v'', u_m \rangle + B[u_m, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt - (u_m(0), v(0)) + \langle u_m'(0), v(0) \rangle$$

$\rightarrow \infty$ 得.

下面证明唯一性：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + L u = 0 & \text{in } U \\ u|_{\partial U} = 0 & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = 0, \partial_t u(0) = 0 \end{cases}$$

只有零解

$$\text{Fix } s \in [0, T]. \quad V(u) := \int_t^s u(x) dx \cdot \chi_{\{s \geq t \leq T\}}$$

由 $\forall t \in [0, T], V(t) \in H_0^1(U)$. 进而由弱解定义知.

$$\int_0^s \langle u', v \rangle + B[u, v; t] dt = 0.$$

由 $u(0) = V(s) = 0$. 分部积分得有.

$$\int_0^s -\langle u', v' \rangle + B[u, v; t] dt = 0.$$

$$\stackrel{v' = -u}{\Rightarrow} \int_0^s \langle -u', u \rangle - B[v, v; t] dt = 0.$$

$$\langle u', u \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$$

$$\text{而 } B[v, v; t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i v \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot v + c v \cdot v dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B[v, v; t] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij} \partial_i v \partial_j v + \left[2 a^{ij} \partial_i v \partial_j v \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n b_t^i \partial_i v \cdot v + \left[2 b^i \partial_i v \cdot v \right] + c_t v \cdot v \boxed{+ 2 c v} dx \\ &= 2 B[v', v; t]. \end{aligned}$$

$$\cancel{\text{这样}} \rightarrow + \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a_t^{ij} \partial_i v \partial_j v + \sum_{i=1}^n b_t^i \partial_i v \cdot v + c_t v \cdot v \right) dx$$

$$\cancel{\text{由 } F_0 - F_1 \text{ 和 } p \neq 2} \rightarrow \int_U \left(\sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot (-v_t) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot v \right) dx$$

$$= 2 B[v', v; t] + \cancel{\text{由 } u = v'} D[v, v; t] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v u dx \cancel{\int_U \sum_{i=1}^n b^i v u dx}.$$

$$- \int_U \sum_{i=1}^n (b_{x_i}^i u \cdot v + b^i u \cdot v_{x_i}) dx$$

$$- \int_U \sum_{i=1}^n b^i v u dx.$$

$$= 2 B[v', v; t] + C[u, v; t] + D[v, v; t].$$

$$\text{其中 } C[u, v_{it}] := - \int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot u + \frac{1}{2} b^i_{xx} u v \, dx$$

$$D[u, v_{it}] := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t u_{xi} v_{xj} + \sum_{i=1}^n b^i_t u_{xi} v + c_t u v \, dx.$$

$\forall u, v \in H_0^1(U)$

$$\Rightarrow \int_0^S \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + -\frac{1}{2} B[u, v_{it}] \right) dt$$

$$= - \int_0^S C[u, v_{it}] + D[v, v_{it}] \, dt.$$

\Rightarrow 左边 $= \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} B[v(0), v(0)_{it}]}_{\gtrsim \|v(0)\|_{H_0^1}^2}$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + \|v(0)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\leq C \left(\int_0^S \|v\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2 + \|v(0)\|_{L^2(U)}^2 \right)$$

$$\text{令 } w(t) = \int_0^t u(\tau) \, d\tau. \quad \text{由 } \underline{v(t) = w(s) - w(t)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

从而

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\leq C \left(\int_0^S \|w(t) - w(s)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(U)}^2 \, dt + \|w(s)\|_{L^2(U)}^2 \right)$$

$$\leq C \int_0^S \left(2 \|w(t)\|_{H_0^1}^2 + \frac{2 \|w(s)\|_{H_0^1}^2}{\|u(t)\|_{L^2}^2} + \|u(t)\|_{L^2(U)}^2 \, dt \right) + \|w(s)\|_{L^2}^2.$$

$$\|w(s)\|_{L^2}^2 \leq \int_0^s \|u(t)\|_{L^2}^2 \, dt$$

拿出.

$$\leq 2SC \|w(s)\|_{H_0^1}^2 + C \int_0^S (\|w\|_{H_0^1(U)}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \, dt.$$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + (1-2SC) \|w(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C \int_0^S (\|w\|_{H_0^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \, dt.$$

选 T_1 . 使 $1-2SC > \frac{1}{2}$ 且 $S \in [0, T_1]$ 时.

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C \int_0^S (\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1}^2) \, dt. \quad \text{由 Gronwall 不等式}$$

有 $u \equiv 0$ in $[0, T_1]$. 再在 $[T_1, 2T_1], [2T_1, 3T_1], \dots$ 以此类推即得

7.3.3 正则性 .

与抛物方程类似，我们先对最简单的双曲方程(波方程)进行形式推导，来预测正则性结果。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g, u_t = h & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

\$u\$ 是解.

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 + U_t^2 dx \right) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} Du \cdot D u_t + U_t U_{tt} dx.$$

$$\text{方程} \Leftrightarrow 2 \int U_t \cdot (U_{tt} - \Delta u) dx.$$

$$= 2 \int U_t \cdot f dx.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} U_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx$$

由 Gronwall 不等式知。

~~对 \$t\$ 积分 (\$\forall 0 \leq t \leq T\$)~~

$$\leq 1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} U_t^2 + |Du|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h^2(s) dx ds - \int_{\mathbb{R}^n} U_t^2(0) dx - \int_{\mathbb{R}^n} |Du(0)|^2 dx$$

$$\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx ds + \int$$

$$\hat{\eta}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} U_t^2(t) + |Du(t)|^2 dx. \quad \hat{\chi}(t) = \int f^2(t) dx. \quad \hat{\varphi}(t) = \int h^2(s) ds. \quad \hat{\gamma}'(t) = \hat{\varphi}(t)\hat{\eta}(t) + \hat{\chi}(t).$$

由 Gronwall 不等式知。

$$\hat{\eta}(t) \leq C(t) (\hat{\eta}(0) + \int_0^t \hat{\chi}(s) ds)$$

~~对 \$t\$ 的 sup.~~

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \int |Du(t)|^2 + |U_t(t)|^2 dx \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h^2 dx \right).$$

从而对波方程

$$\|u\|_{L_t^\infty H_0^1} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq \|f\|_{L_t^2 L_x^2} + \|g\|_{H^1} + \|h\|_{L^2}.$$

再考卷更高正确性：

$$\begin{aligned} \text{全 } \tilde{u} &= u_0. \text{ 且} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in } (\mathbb{R}^n \times (0, T]) \\ \tilde{u}(0) = \tilde{g} := h. \end{array} \right. \\ \Rightarrow \tilde{f} &= \tilde{u}'' \\ \partial_t \tilde{u}(0) &= \tilde{h} := u_{tt}(0, 0) = f(0, 0) + \Delta g. \end{aligned}$$

则由之得形式不等式。有：

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_{tt}|^2 + u_{tt}^2 dx &\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^2 g|^2 + |\Delta h|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\ \text{又: } \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_{L^2} &\leq C (\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))}) \\ \text{由 Sobolev 不等式.} \end{aligned}$$

$$x: -\Delta u = f - u_{tt} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_{tt}^2 dx. \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

平方. 对 $x \in \mathbb{R}^n$,
左边分部积分 $\leq 2 \sqrt{2}.$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + |Du_{tt}|^2 + u_{tt}^2 dx. \\ \leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^2 g|^2 + |\Delta h|^2 dx. \end{aligned}$$

□

从而 $\|u\|_{H_x^2}^2$.

$$\|u(t)\|_{L_t^2 H_x^2}^2 + \|u'(t)\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 + \|u'\|_{L_t^2 H_x^1}^2$$

$$+ \|u''\|_{L_t^2 H_x^2}^2 \lesssim \|f\|_{H_t^1 L_x^2}^2 + \|g\|_{H_x^2}^2.$$

下面证明双曲方程的正确性之理，要注意下面出现的 $\{u_m\}$ 是 Ch 6.7 中构造的 L^2 - H^1 的特征函数系，是 L^2 的特征函数 H_0^1 的子基。

Thm 7.3.4:

(1) 设 $g \in H_0^1(U)$, $f \in L_t^2(L_x^2((0, T] \times U))$, 设 $u \in L^\infty(0, T; H_0^1)$, $u' \in L^2(0, T; H^1)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{是双曲方程} \\ \left. \begin{array}{ll} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{in } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{in } U \times \{t=0\} \\ u_t = h & \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \text{的弱解.}$$

R1: $u \in L^\infty(0, T; H^2(U)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(U))$

$u' \in L^\infty(0, T; L^2(U))$

$$\text{且 } \|u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(U))} \leq \|u'(t)\|_{L^\infty(0, T; L^2(U))}.$$

$$\leq C(\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}).$$

(2). 若还有: $g \in H^2(U)$, $h \in H_0^1(U)$, $f' \in L^2(0, T; L^2(U))$

R2: $u \in L^\infty(0, T; H^2(U))$, $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(U))$

$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(U))$, $u''' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(U))$

$$\text{且 } \|u(t)\|_{L^\infty(0, T; H^2)} + \|u'\|_{L^\infty(0, T; H_0^1)} + \|u''(t)\|_{L^\infty(0, T; L^2)}$$

$$+ \|u'''\|_{L^2(0, T; H^{-1})} \leq C(\|f'\|_{H_0^1 L_x^2} + \|g\|_{L^2} + \|h\|_{H^1}).$$

证明: 在 Thm 7.3.2 中. 证明:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u_m(t)\|_{H_0^1} + \|u_m'(t)\|_{L^2}) \leq C(\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2})$$

令 $m = m_l \rightarrow \infty$.

由 $u_m \rightarrow u$ (in $L^2(0, T; H_0^1)$)

$u_m' \rightarrow u$ (in $L^2(0, T; H^1)$)

知. (1) 成立.

(2) 令 $\tilde{u}_m = u_m'$.

则由弱解的构造有

$$(\tilde{u}_m'', w_k) + B[\tilde{u}_m, w_k] = (f', w_k) \quad 1 \leq k \leq m.$$

两边乘 d_m^k . 对 k 从 1 到 m 取和. 因 $\tilde{u}_m' = u_m' = \sum d_m^k u_k$.

$$\Rightarrow (\tilde{u}_m'', \tilde{u}_m') + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m'] = (f', \tilde{u}_m')$$

与 Thm 7.7.2 类似.

$$\text{令 } A[u, v] = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(0),$$

$$\text{则有 } \frac{d}{dt} (||\tilde{u}_m'||_{L^2}^2 + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m]) \leq C (||\tilde{u}_m'||_{L^2}^2 + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m] + ||f'||_{L^2}^2). \quad \cdots (*)$$

下面来估计 (2) 中除了 u''' 的项.

由于 $B[u_m, w_k] = (f - u_m'', w_k)$.

两边乘 $\lambda_k d_m^k(t)$

$$\Rightarrow B[u_m, \lambda_k \tilde{u}_m] = (f - u_m'', \lambda_k \tilde{u}_m)$$

对 k 取和 $\Rightarrow \Delta u_m = \lambda_k \tilde{u}_m$

$$\Rightarrow B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m'', -\Delta u_m).$$

$$= (L_u, -\Delta u_m).$$

由习题 7.9 知

$\exists \beta > 0, \gamma > 0$, s.t. $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$, 有:

$$\beta ||u||_{H^2}^2 \leq (L_u, -\Delta u) + \gamma ||u||_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow ||u_m||_{H^2}^2 \leq C(L_u, -\Delta u_m) + ||u_m''||_{L^2}^2$$

$$= C B[u_m, -\Delta u_m] + ||u_m''||_{L^2}^2$$

$$= C(f - u_m'', -\Delta u_m) + ||u_m''||_{L^2}^2$$

$$\text{这里 } \not\exists \tilde{u}_m'' \Delta u_m \leq C(||f||_{L^2}^2 + ||u_m''||_{L^2}^2 + ||u_m''||_{L^2}^2).$$

先用 Hölder 变成 $||u_m''||_{L^2} \leq \sqrt{\epsilon} ||\Delta u_m||_2^2 + C(\epsilon) ||u_m''||_2^2$.

充分小, 不妨设 $\epsilon < 1$.

$$x = \tilde{u}_m = u_m.$$

对(*)用 Gronwall 有：

$$\begin{aligned} \|u_m''\|_{L_x^2}^2 + \|u_m'\|_{H_x^1}^2 &\leq C \|f^*\|_{H_t^1 L_x^2}^2 + \frac{\|u_m'(0)\|_{H_x^1}^2}{H_t^1 L_x^2} \\ &+ \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m''\|_{L_x^2}^2 + \|u_m'(t)\|_{H_x^1}^2 \\ &\leq C (\|u_m'(0)\|_{L_x^2}^2 + \|u_m'(0)\|_{H_x^1}^2) + \|f'\|_{L_x^2(0, T; L^2)}^2 \\ &\leq C_T (\|f\|_{L_x^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|g\|_{H_x^2}^2 + \|h\|_{H_x^1}^2 + \|f\|_{H_x^1(0, T; L^2)}^2) \\ d=1, H^1 \hookrightarrow L^\infty &\stackrel{\text{Sobolev 插入}}{\leq} C_T (\|f\|_{H_x^1(0, T; L^2)}^2 + \|g\|_{H_x^2}^2 + \|h\|_{H_x^1}^2). \end{aligned}$$

u'' 估计与抛物方程 u'' 类似，略去

□

Rmk：该方程的正则性到不了抛物方程那么高（只有 $L_t^\infty H_x^1$ ，没有 $L_t^2 H_x^2$ ）

这是因为，抛物正则性证明过程中，在证明 $u \in L_t^\infty H_x^1$, $u' \in L_t^2 L_x^2$ 后。

可以利用 $(u', v) + B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in H_x^1(u), \text{ a.e. } t \in [0, T]$

$$\Rightarrow B[u, v] = (f - u', v) \quad \text{再用椭圆方程正则性之理得 } u \in L_x^2.$$

但双曲方程的证明中不能证得 $u'' \in L_t^2 L_x^2$ ，只有 $L_t^2 H_x^1$ 。

从而 $B[u, v] = (f - u'', v)$ 中， $f - u'' \in H_x^1$ 不在 L^2 中。

不能证得 $u'' \in L_t^2 L_x^2$ 的原因在于：

· 抛物方程中证明 $u_m' \in L_t^2 L_x^2$ 时，用 $(u_m', u_m') + B[u_m, u_m'] = (f, u_m')$ 。
这直接是 u_m' 的 L^2 范数。

而在双曲方程中，只有 $(\tilde{u}_m'', \tilde{u}_m') + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m'] = (f', u_m')$ 。

$$\text{只是 } \frac{d}{dt} \|u_m''\|_{L_x^2}^2.$$

导致后面用 Gronwall 不等式时出不来 $\|u_m''\|_{L_x^2}^2$ ，没有 u_m' 的估计。

事实上，波方程、Schrödinger 方程是色散方程，其正则性和光滑性远比抛物方程差很多。色散方程常讨论的 P 都是低正则性问题，但抛物方程并不如此。

□

本节最后，我们不加证明地叙述高阶正确性的结果。

Thm 7.3.5:

$$(1) \quad g \in H^{m+1}(U), \quad h \in H^m(U). \quad \frac{d^k f}{dt^k} \in L^2_t H_x^{m+k}.$$

$$\text{且 } g_0 := g \in H_0^1, \quad h_1 := h \in H_0^1$$

$$\begin{cases} g_{2l} := \frac{d^{2l-2} f(\cdot, 0)}{dt^{2l-2}} - L g_{2l-2} \in H_0^1 & \text{if } m=2l, \\ h_{2l+1} := \frac{d^{2l+1} f(\cdot, 0)}{dt^{2l+1}} - L h_{2l+1} \in H_0^1 & \text{if } m=2l+1. \end{cases}$$

成立，则

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^\infty(0, T; H^{m+k}(U)), \quad 0 \leq k \leq m+1$$

$$\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^\infty H^{m+k}(0, T)} \leq C \left(\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2_t H_x^{m+k}} + \|g\|_{H^{m+1}(U)} + \|h\|_{H^m(U)} \right)$$

(2) $g, h \in C^\infty(\bar{U}), f \in C^\infty(\bar{U}_T)$. 上述条件对任何 $m \in \mathbb{N}$ 都成立。

则 $\exists! u \in C^\infty(\bar{U}_T)$ 成为原方程的解。

7.3.4: 二元 PDE 的线化

7.3.4: 二元 PDE 的线化。

$$\text{考虑: } \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^2 b^i \partial_{x_i} u + cu = 0. \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

问: 上述方程能否通过变量替换, 化成常形式?

$$\text{设: } y = \Phi(x) \quad \text{i.e.} \quad y_1 = \phi^1(x_1, x_2), \quad y_2 = \phi^2(x_1, x_2).$$

$$u(x) = v(\Phi(x)), \quad v(y) = u(\chi(y)), \quad \chi := \Phi^{-1}.$$

$$\text{从而 } \partial_{x_k} u = \sum_{i=1}^2 \partial_{y_i} v \partial_{x_i} \Phi^k$$

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} u = \sum_{k=1}^2 \partial_{y_k} \partial_{y_i} v \cdot \partial_{x_i} \Phi^k \partial_{x_j} \Phi^k + \sum_{k=1}^2 \partial_{y_k} v \cdot \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Phi^k.$$

代入(*)，有：

$$(*) = \sum_{i,j,k} a^{ij} \sum_{l=1}^3 \partial_{y_k} \partial_{y_l} v \cdot \partial_{x_i} \phi^k \partial_{x_j} \phi^l + \text{一堆一阶项, 二阶项}.$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \widetilde{a}_{kl} \partial_{y_k} \partial_{y_l} v + \dots, \quad \widetilde{a}_{kl} = \sum_{i,j} a^{ij} \phi_{x_i}^k \phi_{x_j}^l. \quad \dots (\#).$$

对(#). 为了使它的形式尽可能简洁，我们需要选取合适的 Ψ .

* 例如. 若我们希望 $\widetilde{a}'' = \widetilde{a}^{22} = 0$.

则这要求 $\widetilde{a}''(\partial_{x_1} v)^2$

$$0 = a''(\partial_{x_1} \phi^1)^2 + 2a^{12} \partial_{x_1} \phi^1 \partial_{x_2} \phi^1 + a^{22} (\partial_{x_2} \phi^1)^2$$

$$0 = a''(\partial_{x_1} \phi^2)^2 + 2a^{12} \partial_{x_1} \phi^2 \partial_{x_2} \phi^2 + a^{22} (\partial_{x_2} \phi^2)^2$$

即 ϕ^1, ϕ^2 是方程：

$$a''(\partial_{x_1} u)^2 + 2a^{12} \partial_{x_1} u \partial_{x_2} u + a^{22} (\partial_{x_2} u)^2 = 0 \quad \text{in } U \quad \dots (**)$$

的解

$$a''(\partial_{x_1} u)^2 + 2a^{12} \partial_{x_1} u \partial_{x_2} u + a^{22} (\partial_{x_2} u)^2 < 0. \quad \text{此时找问题.}$$

再假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 且 $\det A = a''a^{22} - (a^{12})^2 < 0$.

(*) 是双曲的. 按此条件. (*) 对 (*) 有解.

$$\begin{aligned} a''(*) &= \left(a'' \partial_{x_1} u + \sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} + a^{12} \right) \partial_{x_2} u = 0. \quad \left(a'' \partial_{x_1} u + (-\sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} + a^{12}) \partial_{x_2} u \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \dots (***)$$

\Rightarrow (*) 是双曲方程之解.

$$(\#1): \quad a'' \partial_{x_1} u + \left(a'' + \sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} \right) \partial_{x_2} u = 0$$

$$(\#2): \quad a'' \partial_{x_1} u + \left(a'' - \sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} \right) \partial_{x_2} u = 0.$$

如今：让 ϕ^1 为 (#1) 的解. 且 $\nabla \phi^1 \neq 0$. 则 ϕ^1 沿直线 $\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}^1 = a^{11} \\ \bar{x}^2 = a^{12} + \sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} \end{cases} \rightarrow \text{const}$.

让 ϕ^2 为 (#2) 的解. 且 $\nabla \phi^2 \neq 0$. 则 ϕ^2 沿直线 $\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}^1 = a^{11} \\ \bar{x}^2 = a^{12} - \sqrt{(a^{12})^2 - a''a^{22}} \end{cases} \rightarrow \text{const}$.

这样作 (*) 的“平行线”.

$$\text{设 } \alpha^{12} = \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \partial_{x_i} \psi^1 \partial_{x_j} \psi^2 \neq 0 \quad \text{in } U$$

从而 (*) 成立.

$$\partial_{x_1} \psi^1 + \dots \stackrel{-\text{项}}{\leftarrow} \text{项} = 0$$

这称作 (*) 的第一类简化形式.

$$\text{若又令 } z_1 = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow w_1 \partial_{z_1}^2 w_1 - \partial_{z_2}^2 w_2 + \dots = 0. \quad \text{这种称作第二类简化形式.}$$

§7.4: 有限传播速度.

7.4.1: 预备知识 I: 余面积公理及其推论 (coarea)

Def (Jacobian of a Lipschitzian map).

$$\text{设 } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ 且 } Df_{(x)} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 & \cdots & \partial_{x_n} f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f^m & \cdots & \partial_{x_n} f^m \end{pmatrix}, \text{ 若 } f \text{ 在 } x \text{ 处 } \bar{y} \text{ 可微}$$

若 f 在 x 处 \bar{y} 可微

对 L^n -a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 定义 f 的 Jacobian J_f .

$$J_f(x) := [Df(x)]$$

$$\text{其中, 对线性映射 } L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. [L] := \begin{cases} \sqrt{\det(L^* \circ L)} & n \leq m \\ \sqrt{\det(L \circ L^*)} & n \geq m \end{cases}$$

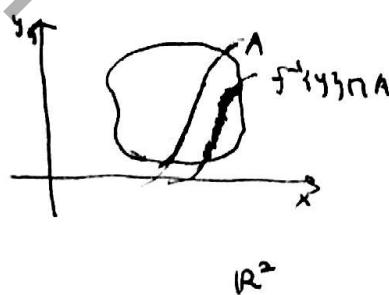
Thm 7.4.1 (余面积公理). $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 Lipschitz 映射. $n \geq m$.

$$\text{R.H.S. } \forall L^n\text{-可积集 } A \subseteq \mathbb{R}^n. \text{ 有: } \int_A J_f \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) \, dy.$$

证明见 L.C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Version. CRC Press. 2015.

Rmk: ① 当 f 是 线性映射 时. Lem 7.4.1 可以看作“单着 in Fubini Thm.

② 一般地, 可以看作“弯曲切片的”.



J_f 之积 \mathcal{H}^{m-n}
弯曲切片的
不性凹板对 H^{n-m} 求积
再将切片积 \mathcal{H}^n .

③ 若全 $A = \{J_f=0\}$ 则 $\mathcal{H}^{n-m}(\{J_f=0\} \cap f^{-1}(y)) = 0$. \forall a.e. $y \in \mathbb{R}^m$

这是 Sard 定理 (fact, 但不是 C^m -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 有 $\{J_f=0\} \cap f^{-1}(y) = \emptyset$). 类似

得到 \mathcal{H}^{n-m} 空集. f 只需 Lip 即可.

Corollary 7.4.1 (水平集的性质)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. $n \geq m$. $\exists \eta \in L^n - \bar{\eta}$ 使 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

且

(1) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ H^{n-m} -可积. 对 L^m -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 成立.

$$(2) \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot J_f dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g dH^{n-m} \right) dy$$

Rmk: $\forall y \in \mathbb{R}^m$. $f^{-1}\{y\}$ 从而 H^{n-m} 可积. 因此 (2) 是合法的.

~~5.2.2~~

首先有以下引理.

Lemma 7.4.2: $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 为 μ -可积函数 则 $\exists \mu$ -可积 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$.

$$\text{s.t. } f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}.$$

Pf: 全 $A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$.

$$A_k = \left\{ x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}.$$

从而 $f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

又: 若 $f(x) = \infty \quad \forall k. \quad x \in A_k$

若 $0 \leq f(x) < \infty$. 则 $x \notin A_n. \quad x \in A_n$.

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}.$$

回到 cor 7.4.1: 不妨 $g \geq 0$. $\exists \eta \in \text{len 7.4.2}$ 有: $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

$$\text{则 } \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot J_f dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{A_k} J_f dx. \quad \text{for some } L^n - \bar{\eta} \text{-可积 } \{A_k\}_{i=1}^{\infty}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^m} dH^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^m} dH^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g dH^{n-m} \right) dy.$$

lem 7. 4.3 (* 平移積分)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lip

$$(1) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\{f=t\}) dt$$

(2). 若 $\text{essinf } |\nabla f| > 0$, 且 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ L^1 -可积, 则

$$\int_{\{f>t\}} g dx = \int_t^{\infty} \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|\nabla f|} dH^{n-1} \right) ds.$$

特别地: $\frac{d}{dt} \int_{\{f>t\}} g dx = - \int_{\{f=t\}} \frac{g}{|\nabla f|} dH^{n-1}, L^1\text{-a.e. } t \in \mathbb{R}.$

Pf: (1) 由 coarea formula, 令 m_1 表示 $\{f=t\}$ 上的 H^{n-1} 测度, 则 $Jf = |\nabla f|$.

(2) (3): $E_t := \{f>t\}$

$$\begin{aligned} \int_{E_t} g dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_t} \cdot \frac{g}{|\nabla f|} Jf dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} \chi_{E_t} dH^{n-1} ds \\ &= \int_t^{\infty} \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} dH^{n-1} \right) ds \end{aligned}$$

□

7.4.2: 双曲方程的有限传播速度.

· 波动方程的有限传播速度.

假设 $u \in C^2$ solves $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Fix $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$.

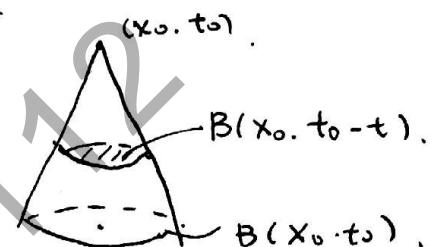
定义 $u(x_0, t_0)$ 为顶点的“倒向光锥”.

$$K(x_0, t_0) := \left\{ (x-t) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x-x_0| \leq t_0-t \right\}.$$

Thm 7.4.1 (波动方程的有限传播速度).

$$u = u_t = 0 \quad \text{on } B(x_0, t_0) \times \{t=0\}.$$

$$\text{即 } u = 0 \quad \text{on } K(x_0, t_0).$$



Remark: 这证明: $B(x_0, t_0)$ 之外的扰动, 对光锥内的解没有影响.

$$\text{pf: } E(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (\partial_t^2 u(x, t))^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

$$E'(t) = \int_{B(x_0, t_0-t)} \partial_t u \cdot \partial_t^2 u + \nabla u \cdot \nabla u_t dx.$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 dS$$

(分部积分)

$$= \int_{B(x_0, t_0-t)} \partial_t u \frac{\partial_t^2 u - \Delta u}{2} dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \partial_t u dS.$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 dS.$$

$$= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dS.$$

$$\text{因此} \quad \leq \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{(\frac{\partial u}{\partial n})^2 + (\partial_t u)^2}{2} - \frac{(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2}{2} dS \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) \leq E(0) = 0}$$

· 双曲方程的有限传播速度.

仍然先看波方程:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} (0, \infty). \quad \dots (*)$$

我们考方程的“振荡解”

$$\text{Fix } \varepsilon > 0, \text{ 希望找形如 } u^\varepsilon(x, t) = e^{i \frac{P^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}} a^\varepsilon(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad \dots (\#)$$

其中, P^ε 是相函数. 实值函数 $a^\varepsilon(x, t)$ 是振幅面. 形如 (#) 的解称作

“geometric optics ansatz”.

波方程的振荡解, 可以理解为. 研究相函数在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时对应的 PDE.

下面是具体的形推导.

(#) 代入 (*).

$$0 = \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = e^{i \frac{P^\varepsilon}{\varepsilon}} \left(i \frac{\partial_t^2 P^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon + a^\varepsilon \left(\frac{\partial_t P^\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + 2i \frac{\partial_t P^\varepsilon \partial_t a^\varepsilon}{\varepsilon} + \partial_t^2 a^\varepsilon \right) - e^{i \frac{P^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}} \left(-i \frac{\Delta P^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon - \frac{|\nabla P^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} a^\varepsilon + 2i \frac{\nabla P^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon}{\varepsilon} + \Delta a^\varepsilon \right)$$

取 $e^{i \frac{P^\varepsilon}{\varepsilon}}$, 取实部

$$\Rightarrow a^\varepsilon \left((\partial_t P^\varepsilon)^2 - |\nabla P^\varepsilon|^2 \right) = \varepsilon^2 (\partial_t^2 a^\varepsilon - \Delta a^\varepsilon).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时. 1 阶项有 $P^\varepsilon \rightarrow P$
 $a^\varepsilon \rightarrow a \neq 0$

且

$$\Rightarrow P_t \pm i \nabla P = 0. \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \quad \dots (**)$$

(**) 可以视作 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时. (#) 在 (**) 确定的特征线附近高度聚集.

$$\text{对一般的二阶双曲方程 } \partial_t^2 u - \sum_{k=1}^n a^{kl} \partial_{x_k} \partial_{x_l} u = 0. \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \left. \begin{array}{l} a^{kl} = a^{lk} \\ a^{kk} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots (***)$$

我们仍希望寻找形如 (#) 的解.

$$\partial_{xx} u^\varepsilon = e^{i \frac{P^\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_k} P^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{xx} a^\varepsilon \right).$$

$$\Rightarrow \partial_{x_k x_l} u^\varepsilon = e^{i \frac{P^\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_k} P^\varepsilon \cdot \left(\frac{i}{\varepsilon} \partial_{x_l} P^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{xx} a^\varepsilon \right) \right)$$

$$+ e^{i \frac{P^\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\frac{i}{\varepsilon} \left(\partial_{x_k x_l} P^\varepsilon \cdot a^\varepsilon + \partial_{xx} P^\varepsilon \partial_{x_l} a^\varepsilon \right) + \partial_{x_k x_l} a^\varepsilon \right).$$

約去 $e^{\frac{i}{\hbar} \int p^i dt}$ 取實部有

$$a^2 \left((\partial_t p^i)^2 - \sum_{k=1}^n a^k \partial_k p^i \partial_i p^k \right) = \varepsilon^2 \left(\partial_t^2 a^i - \sum_{k,l=1}^n a^k \partial_k a^l \partial_l \right)$$

$$\Rightarrow p_t \pm \left(\sum_{k=1}^n a^k \partial_k p^i \partial_i p^k \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

#.

下面考慮 (***) $\partial_t u + L u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 的光滑解.

$$L u = - \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i \partial_j u.$$

Fix $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, 我們對此方程，希望找到类似于“i”的方程的“光解”。C. 其頂點為 (x_0, t_0) . s.t. 只要 $u = \partial_t u = 0$ on $C_0 := C \cap \{t=0\}$ 就有: $u \equiv 0$ in C.

由上面對振蕩解的討論，我們可以猜測，所求的區域C是形如 $\{p=0\}$ 這樣的水平集。

P 是 Hamilton-Jacobi 方程 $p_t - \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} p_{x_i} p_{x_j} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$.
的解。

分离變量: $p(x, t) = q(x) + t - t_0$.

$$\begin{cases} q \geq q_{x_0} & \sum_{i,j=1}^n a^{ij} q_{x_i} q_{x_j} = 1 \\ q > 0 & \text{in } \mathbb{R}^n - \{x_0\}, \\ q(x_0) = 0 \end{cases}$$

$(\Rightarrow \forall q \neq 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times \{x_0\})$

* 例如. $L = -\Delta$ 时. $q(x) = |x - x_0|$.

於是我們所求的“光解”應為.

$$K := \{(x, t) \mid p(x, t) \leq 0\} = \{(x, t) \mid q(x) \leq t_0 - t\}.$$

$\forall t > 0$. 令 $K_t = \{x \mid q(x) \leq t_0 - t\} = K$ 在 t 時刻的本體面

$(\Rightarrow \partial K_t \in C^\infty \text{ 且 } H^{n+1}(\partial K_t))$.

下面证明对称双曲方程的解有有限传播速度.

Thm 7.4.2 设 $u \in C^\infty$ 是 $\partial_t^2 u + L_u = 0$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 的解若 $u = \partial_t u = 0$ on K_0 .

则 $u = 0$ in K .

Rmk: 从而: 若 $u(0) = g$, $\partial_t u(0) = h$. 则 $|u(x_0, t_0)|$ 由 g, h 在 K_0 中的极值有关.

Pf: 令 $E(t) = \frac{1}{2} \int_{K_t} (\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \, dx$.

$$E'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{K_t} (\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \, dx \right)$$

余面积公式

Cor 7.4.3

$$= \int_{K_t} \partial_t u \partial_t u + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \, dx.$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\partial K_t} \left((\partial_t^2 u) + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) \frac{1}{|\tau|} d\sigma^{n-1}.$$

$$=: I_1 - I_2.$$

对 I_1 : 第二项为零积分可得:

$$I_1 = \int_{K_t} \left(\partial_t u \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_t u \cdot \partial_j (a^{ij} \partial_i u) \right) dx.$$

$$+ \int_{\partial K_t} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \cdot n^i \cdot u_t \, d\sigma^{n-1}$$

n 为 ∂K_t 单位外法向

$$-\frac{1}{2} \int$$

$$= \int_{K_t} \partial_t u \cdot \left(\frac{\partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n (\partial_j a^{ij} \partial_i u + a^{ij} \partial_i \partial_j u)}{2} \right) dx.$$

加起来为0.

$$+ \int_{\partial K_t} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \cdot n^j \partial_t u \, d\sigma^{n-1}$$

$$= - \int_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ij} \cdot \partial_i u \, dx + \int_{\partial K_t} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \cdot n^j \partial_t u \, d\sigma^{n-1}.$$

那末

$$|A| \leq \left| \int_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx \right| + \int_{\partial K_t} \left| \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \cdot n^j \right| \cdot |u_t| \, dH^{n-1}.$$

Cauchy-Schwarz.

$$\leq \left| \int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx \right|.$$

$$+ \int_{\partial K_t} \frac{\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} n^i n^j \right)^{\frac{1}{2}}} |u_t| \, dH^{n-1}$$

这里用到了：

$A = (a^{ij})$ 为实对称阵. a^{ij} 非负数.

且

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a^{ij} x_i y_j \right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} y_i y_j \right)^{\frac{1}{2}}$$

∂K_t 上. $t = t_0 - t$.

$$n = \frac{\|\nabla q\|}{\|\nabla q\|}$$

且

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} n^i n^j = \sum_{i,j=1}^n \frac{a^{ij} q_{x_i} q_{x_j}}{\|\nabla q\|^2} = \frac{1}{\|\nabla q\|^2}$$

$$\leq \left| \int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx \right|.$$

$$+ \int_{\partial K_t} |u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\nabla q\|} \, dH^{n-1}.$$

Cauchy-Schwarz (P-12).

$$\leq \int_{K_t} u_t^2 + C \int_{K_t} \frac{a^{ij} \partial_i u \partial_j u}{\|u\|^2} \, dx + \int_{\partial K_t} \frac{|u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right)^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla q\|} \, dH^{n-1}$$

L 不有圆

$$\leq C \left(\int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) dx + \int_{\partial K_t} \dots$$

Cauchy-Schwarz.

$$\leq C E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial K_t} \left((\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) \frac{1}{\|\nabla q\|} \, dH^{n-1}.$$

$$= C E(t) + B$$

Gronwall 不等式

$$\Rightarrow E(t) = A - B \leq C E(t) \quad \begin{cases} \Rightarrow E(t) \equiv 0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ \Rightarrow u \equiv 0 \text{ in } K. \end{cases}$$

$$E(0) = 0$$

□

§7.5: 一阶双曲方程组

7.5.1: 消失粘性法:

$$\text{考虑: } \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^n B_j \partial_j \vec{u} = \vec{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(0) = \vec{g} \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{array} \right. \quad \dots (*)$$

$\vec{u} = (u^1, \dots, u^m): \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为未知函数.

$B_j: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow M^{m \times m}$. ~~对称~~, $j=1, 2, \dots, n$.

$\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{B}(x, t; y) := \sum_{j=1}^n y_j B_j(x, t). \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Def: 若 $\vec{B}(x, t; y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$, 对称化. 则称 $(*)$ 是双曲的.
 $m \times m$ 方阵.

这说明 $(*)$ 是双曲的. 若 $\forall x, y, t$, $\vec{B}(x, t; y)$ 有 m 个实特征值 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$.

且对应特征向量构成 \mathbb{R}^m 的一组基

(1). 称 $(*)$ 是对称双曲方程组, 若 $B_j(x, t)$ 是对称的.

(2). 称 $(*)$ 是严格双曲的, 若 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0, \forall t \geq 0, \vec{B}(x, t; y)$ 有 m 个不同的

实特征值 $\lambda_1(x, t; y) < \dots < \lambda_m(x, t; y)$.

Motivation: 该方程的行波解 (travelling wave).

设 $f = 0$. $B_j(x, t; y)$ 是常系数矩阵. 则

$$\sum_{j=1}^n y_j B_j = B(y) \text{ 与 } y \text{ 有关.}$$

寻求 $(*)$ 的行波解, 即希望 \vec{u} 有形式 $\vec{u}(x, t) = \vec{v}(y \cdot x - \sigma t)$.

$$\text{上式代入 } (*) \Rightarrow \left(-\sigma I + \sum_{j=1}^n y_j B_j \right) \vec{v}' = 0.$$

$\Rightarrow \vec{v}'$ 是 $B(y)$ 关于特征值 σ 的特征向量.

双曲条件下 (*) 有 m 个不同的行波解 (x 方向 y), 它们应为 $(y \cdot x - \lambda_k(y)t) \vec{r}_k(y)$,
 其中 $\lambda_1(y) \leq \dots \leq \lambda_m(y)$ 是 $B(y)$ 的特征值. $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m\}$ 是对应行向量.
 $|y|=1$ 时, 特征值即为波速. \square

下面我们引入所谓的“消失粘性法”来证明对称-双曲初值问题的
 存在唯一性.

考虑
 (*) $\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} \vec{u} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{cases} \quad T > 0.$

并假设 (i). $B_j(x, t)$ 是对称阵. $\forall j, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$

(ii) $B_j \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{m \times m})$.

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} (|B_j|, |\partial_x B_j|, |\partial_t B_j|, |\partial_{x,t}^2 B_j|) < \infty. \quad \forall j.$$

(iii) $\vec{g} \in H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$

$\vec{f} \in H^1(\mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

定义: (1) 双线性形式: $B[\vec{u}, \vec{v}; t] := \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (B_j(\cdot, t) \partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{v} dx$
 $\forall 0 \leq t \leq T, \vec{u}, \vec{v} \in H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

(2). 称 $\vec{u} \in L^2(0, T; H^1)$, $\vec{u}' \in L^2(0, T; L^2)$ 是 (*) 的弱解.

(i). $(\vec{u}', \vec{v}) + B[\vec{u}, \vec{v}; t] = (\vec{f}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$
 $\text{a.e. } t \in [0, T]$

(ii) $\vec{u}(0) = \vec{g}$.

消失粘性法的基本思路是，在原方程加入较小的(第2)项，

例如 $\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{u}^\varepsilon - \varepsilon \Delta \vec{u}^\varepsilon + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} \vec{u}^\varepsilon = \vec{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = \vec{g}^\varepsilon(x). \quad \text{in } \mathbb{R}^n \\ 0 < \varepsilon \leq 1. \quad \vec{g}^\varepsilon = \vec{g} * \vec{\varphi}^\varepsilon \end{array} \right.$

(#²) 被视为原方程的逼近，我们试图先用不动点方法证明 (#²) 的解 (视作原方程的逼近解) 是有存在唯一性，再用能量估计与 Banach-Alaoglu 定理证明 (#) 方程的解的存在唯一性。
 ↑ 此时 取 $\varepsilon_k \rightarrow 0$ 所谓“粘性消失”。

Step 1：逼近解存在唯一性：

Thm 2.5.1: $\forall \varepsilon > 0$. (#²) 存在唯一解 $\vec{u}^\varepsilon \in L^2(0, T; H^3(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m))$
 且 $\vec{u}^\varepsilon' \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m))$.

Proof: 我们采用压缩映射原理的方法。因此，我们要

- ① 构造函数空间 X ，
- ② 构造解映射 T : $u \mapsto Tu$. 使之成为 X 到自身的压缩映射。
- ③ 利用压缩映射原理，得不动点 \vec{u} 为方程的局部解。
- ④ 再设法变成整体 $(0, T]$ 上的解。

① 为确定 X ，我们先要对方程进行先验估计，即先大致判断 u 会落在什么空间中。

(#²) 中的难点主要是高阶项，因此，我们把低阶项 $\sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} \vec{u}^\varepsilon$ 搬到右边去。变成 $\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{u}^\varepsilon - \varepsilon \Delta \vec{u}^\varepsilon = \vec{f} - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} \vec{u}^\varepsilon \\ \vec{u}^\varepsilon(0) = \vec{g}^\varepsilon \end{array} \right. \dots (\# \#^\varepsilon)$

这样就变成一个非齐次热方程。

我们先考虑一般的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u = f \\ u(0) = g \end{cases}$$

由 Du Hamel 原理：

$$u(t) = e^{\varepsilon t \Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s) ds.$$

其中 $e^{\varepsilon t \Delta} g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x \cdot \xi} (\widehat{e^{-\varepsilon t |\xi|^2}} \widehat{g})^V$.

\wedge : Fourier 变换

V : L^2 -Fourier 变换

$$\begin{aligned} \|e^{\varepsilon t \Delta} g\|_{H^s} &= \|e^{-\varepsilon t |\xi|^2} \langle \xi \rangle^s \widehat{g}(\xi)\|_{L^2} \\ &= \|e^{-\varepsilon t |\xi|^2} \langle \xi \rangle^s \widehat{g}(\xi)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\langle \xi \rangle^s \widehat{g}(\xi)\|_{L^2} = \|g\|_{H^s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall: e^{-\varepsilon t |\xi|^2} \langle \xi \rangle^s &= e^{-\varepsilon t |\xi|^2} \left\langle (\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \frac{((\varepsilon t)^{\frac{1}{2}} \xi)^s}{\eta} \right\rangle \\ &= e^{-\eta^2} \left\langle (\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \eta \right\rangle^s \\ &\lesssim (\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

原方程初值 $g \in H^s \Rightarrow e^{\varepsilon t \Delta} g \in L^\infty_t H_x^s$

· 非齐次项估计：

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s) ds &\leq \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(y) dy ds \\ &\quad \phi(t,x) \text{ 作热方程基本解} \\ &= \int_0^t \phi(\cdot, \varepsilon(t-s)) * f(s) ds. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^t e^{\varepsilon s \Delta} f(s) ds}$$

$$\Rightarrow \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L_x^2} \stackrel{\text{Minkowski不等式}}{\leq} \int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta} \phi(\cdot, t-s) * f(s) \right\|_{L_x^2} ds.$$

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_q \rightarrow \stackrel{\text{Young不等式}}{\leq} \int_0^t \|\phi(\cdot, s)\|_{L_x^1} \|f(s)\|_{L_x^2} ds.$$

$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{4\pi t}} \quad \|\psi\|_{L_y^\infty} = \text{const.}$$

$$\leq C \int_0^t \|f(s)\|_{L_x^2} ds$$

$$\leq \begin{cases} CT \cdot \min \left\{ \|f\|_{L_t^\infty L_x^2}, \right. \\ \left. CT \|f\|_{L_t^\infty L_x^2} \right\} \\ C_\varepsilon \|f\|_{L_t^2} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \\ = C_\varepsilon T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^2 L_x^2}. \end{cases}$$

$$\nabla_x u^\varepsilon = \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon(t-s)}} f(x-y, s) dy ds$$

$$= \int_0^t \nabla_x \phi(x-y, t-s) \cdot f(x-y, s) dy ds$$

$$\leq \int_0^t \underbrace{\|\nabla_x \phi\|_{L_x^\infty}}_{\text{可以直角等出 } \lesssim (\varepsilon(t-s))^{-\frac{n}{2}}. \text{ 有限制}} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} ds \quad \xrightarrow{\text{类似拉普拉斯-斯托克斯定理}}$$

$$\leq C_\varepsilon \begin{cases} T \|f\|_{L_t^\infty L_x^2} \\ T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^2 H_x^\infty L_x^2} \end{cases}$$

而原方程中 $f \in H_{t,x}^1$. t 方向上由 $H_t^1 \hookrightarrow L_t^\infty$ 知 $f \in L_t^\infty H_x^1$
 $\Rightarrow f \in L_t^2 H_x^1$.

这样，我们证子大数可以猜测 $X = L_t^\infty H_x^1$.

①.2 令 $x \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n))$ ~~并证明~~ 是 \mathbb{R}

形式推导表明

$$\text{a. } (\# \# \varepsilon) \Leftrightarrow u^\varepsilon(t) = e^{st \Delta} g + \int_0^t e^{s(t-s)\Delta} \left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon(s) \right) ds$$

$$\text{令 } J: u \mapsto e^{ut\Delta} g + \int_0^t e^{s(t-s)\Delta} \left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u(s) \right) ds.$$

我们证明 J 是 $X \rightarrow X$ 的压缩映射.

• $\text{Im } J \subseteq X$. 由先验估计 ①.1.

$$\begin{aligned} \|J_u\|_X &\stackrel{\downarrow}{\lesssim} \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) \cdot T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^\infty H_x^1} \\ &\quad + C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^2}. \end{aligned}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} \left(\|f\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|u\|_{L_t^\infty H_x^1} \right) < \infty$$

• 再证 J 压缩: $\forall u, v \in X$

$$J_u - J_v = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{s(t-s)\Delta} B_j \partial_j(u-v)(s) ds,$$

$$\|J_u - J_v\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq C(\varepsilon) \cdot T^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{L_t^\infty H_x^1}.$$

还用 ①.1

$$< \frac{1}{2} \|u - v\|_X. \quad \text{provided choosing } C(\varepsilon) T^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow \exists T_1$ s.t. $[0, T_1]$ 上.

$J: L_t^\infty H_x^1 \rightarrow L_t^\infty H_x^1$ in $\mathbb{R}^n \times [0, T_1]$ 是压缩映射

$\therefore \mathbb{R}^n \times [0, T_1]$ 上 $(\# \# \varepsilon)$ 有唯一解 u^ε . 再在 $[T_1, 2T_1]$,

$[2T_1, 3T_1], \dots$ 依此类推即可

(1.9) 再证 $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H^3)$, $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H')$.

实证: $\hat{f} = f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a.e. $0 \leq t \leq T$.

用抛物正则性定理. $u^\varepsilon \in L^\infty(0, T; H^2)$, $u^\varepsilon \in L^2(0, T; H')$.

这样 $\sum B_j \partial_{x_j} u \in L^\infty(0, T; H')$.

$\Rightarrow \hat{f} \in H'$ a.e. $t \in [0, T]$

$\Rightarrow u^\varepsilon \in L_t^\infty H_x^3$. 证毕
再用抛物正则性定理.

这样我们证明了 (#5), 即逼近解的存在唯一性 (V2).

下面我们证明, 逼近解序列在某些自反空间中一致有界. 再用 Banach-Alaoglu 定理得子列 $u_k^\varepsilon \rightarrow u$. as $k \rightarrow \infty$ ($\varepsilon_k \rightarrow 0$). 从而证明解的存在唯一性. 该套路我们已经反复用过.

Step 2: 能量估计:

Thm 7.5.2: 存在 $C_{>0}$ s.t. $\forall 0 < \varepsilon \leq 1$.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)} + \|u^\varepsilon'(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)} \right)$$

$$\leq C \left(\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)} + \|f\|_{L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m))} + \|f'\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m))} \right)$$

证明: 先算第一项, 分成 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L_2^2}$, $\|Du^\varepsilon(t)\|_{L_2^2}$ 分别估计.

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \right) = (u^\varepsilon, u^\varepsilon') \\ = (u^\varepsilon, f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon \Delta u^\varepsilon).$$

$$|(u^\varepsilon, f)| \leq \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$$

$$|(u^\varepsilon, \varepsilon \Delta u^\varepsilon)| \stackrel{\text{分部积分}}{=} -\varepsilon \|\Delta u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq 0. \quad (\text{利用 } C_c^\infty \text{ 函数逼近})$$

再算: $(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon)$.

若 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$.

$$(v, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (B_j \partial_{x_j} v) \cdot \vec{v} dx \\ = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\begin{pmatrix} B_j^{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_j^{1m} & \\ & & & \ddots & B_j^{mm} \\ B_j & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_j} v_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_j} v_m \end{pmatrix} \right) \cdot (v_1, \dots, v_m) dx.$$

↑ 实对称阵
点乘

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m B_{ji} \partial_{x_j} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m B_{ji} \partial_{x_j} v_i \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m) \right) dx.$$

用了 B_j
实对称

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\partial_{x_j} (B_j^{ki} v_i v_k) - \partial_{x_j} B_j^{ki} \cdot v_i v_k \right) dx.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} (B_j v \cdot v) dx - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v} dx.$$

由于 v 紧致支, 故: 上式第 2 项 = 0.

上式绝对值 $\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v} dx \right| \leq C \|v\|_{L^2}^2$

(23) 下面再做 $v = u^\varepsilon$ 及 l^ε 的事。

(井井) 两边对 t 求导：

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon \Delta v + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v = f - \sum_{j=1}^n \partial_t B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ v = f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} g^\varepsilon + \varepsilon \partial g^\varepsilon \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

同上可得：

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|\nabla g^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 \|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2 H_x^1}^2 + \|f'\|_{L^2 L_x^2}^2 \right)$$

又由逼近与 ε -弱收敛的可得： $\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \|\nabla g^\varepsilon\|_{L^2}^2$. ($g^\varepsilon = \eta_\varepsilon * g$).

$$2: \|f(t)\|_{L^2}^2 \leq C (\|f\|_{L^2 L_x^2}^2 + \|f'\|_{L^2 L_x^2}^2)$$

$$\text{由 } \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq C (\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L^2 H_x^1} + \|f'\|_{L^2 L_x^2})$$

□.

Step 3: 存在唯一性。

Thm 7.5.3:

$$(*) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u^\varepsilon = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \quad \text{方程唯一解存在!}$$

Proof: 由 Thm 7.5.2 和 $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2 H_x^1$ -一致有界。

$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2 L_x^2$ -一致有界。

由 Banach-Alaoglu 定理， $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 有子列收敛于 u 。

$$u^{\varepsilon_m} \rightarrow u \quad \text{in } L^2 H_x^1$$

$$u^{\varepsilon'_m} \rightarrow u' \quad \text{in } L^2 L_x^2$$

再由 C_c^∞ 凸函数逼近 H^1 函数 ($H_0^s(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$).

$$(2.1) \quad \left| \left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon \right) \right| \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)}^2.$$

$$\text{这样: } \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right).$$

再由 Gronwall 不等式 知:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)}^2 \leq C \left(\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T; L^2)}^2 \right) \quad (\text{因 } \|g^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}).$$

(2.2): 下面估计 $\|Du^\varepsilon\|_{L^2}$.

$$\text{Fix } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad v^k := \partial_{x_k} u^\varepsilon.$$

对 (#) 两边 对 x_k 求导有:

$$\begin{aligned} \partial_t v^k - \varepsilon \Delta v^k + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v^k &= \partial_{x_k} f - \sum_{j=1}^n \partial_{x_k} B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon. && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \therefore v^k &= \partial_{x_k} g^\varepsilon. && \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{aligned}$$

同 (2.1) 知:

$$\frac{d}{dt} \|v^k\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 \right).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \text{右}.$$

再由 Gronwall 不等式 知:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right).$$

$$\text{于是: } \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq C \left(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right).$$

由弱解定义. $\forall v \in C^1([0, T]; H)$.

$$\int_0^T (u^\varepsilon, v) + \varepsilon D u^\varepsilon : D v + B[u^\varepsilon, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt. \quad \cdots (\#)$$

$\varepsilon_k \rightarrow 0$. (as $k \rightarrow \infty$)

由弱解定义. $\int_0^T (u, v) + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt. \quad \forall v \in C^1([0, T]; H) \quad \cdots (\#\#)$

$$\Rightarrow (u, v) + B[u, v; t] = (f, v). \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m) \\ \text{e.e. } t \in [0, T]$$

设 $V(T) = 0$.

由 (#) $\xrightarrow{\text{分部积分}} \int_0^T (-u^\varepsilon, v') + \varepsilon D u^\varepsilon : D v + B[u^\varepsilon, v; t] dt$
 $= \int_0^T (f, v) dt + (g^\varepsilon, v(u))$.

$\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow \int_0^T (-u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v) dt + (g, v(u))$$

~~对 (#) 分部积分~~ $\int_0^T (-u, v')$

对 (#) 分部积分

$$\Rightarrow - \int_0^T (u, v') + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v) dt + (u(0), v(0))$$

$$\Rightarrow u(0) = g, \quad \text{存在性证毕}$$

再证唯一性. 只用考虑. (*) 在 $f = g = 0$ 时是否只有 $u = 0$.

令 $v = u \Rightarrow \forall a.e. 0 \leq t \leq T. (u', u) + B[u, u; t] = 0.$

~~B~~ $\Rightarrow \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq -B[u, u; t] \leq C \|u(t)\|^2$.

由 Gronwall 不等式 知

□

8.7.6 半群方法与 Schrödinger 半群的 Strichartz 不等式

7.6.1：预备知识：

设 X 是实 Banach 空间，(可能无界的)线性算子 $A : D(A) \xrightarrow{\text{连续}} X$

考虑：(*) $\begin{cases} A \in D(A) \\ u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

key point ① A 满足什么条件时，ODE (*) 有唯一解 u ? (Initial data $u_0 \in X$)
 ② 许多 PDE 可以抽象为 (*) 的形式

Def (算子半群) 设 $u(t) := S(t)u_0, \quad (t \geq 0)$

(1) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是 $X \rightarrow X$ 是算子半群。若
 一族有界线性算子。

$$\textcircled{1} \quad S(0)u_0 = u_0 \quad \forall u_0 \in X$$

$$\textcircled{2} \quad \forall t, s \geq 0, \quad u_0 \in X, \quad S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0.$$

$\textcircled{3} \quad t \mapsto S(t)u_0$ 是 $[0, +\infty) \rightarrow X$ 的连续映射 ($\forall u_0 \in X$)

(2) 称 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 为压缩半群。若 $\forall t \geq 0, \|S(t)\| \leq 1$.

□

压缩半群可以用微分 (*) 生成的 flow
 在 X 上

Def (无穷小生成元, infinitesimal generator) 设 $\{S(t)\}$ 是压缩半群。

令 $D(A) := \left\{ u \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ 在 } X \text{ 中存在} \right\}$

$$Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \quad \forall u \in D(A)$$

则称 $A : D(A) \rightarrow X$ 是半群 $S(t)$ 的无穷小生成元

□

Thm 7.6.1: (微分性质) 设 $u \in D(A)$ 则

(1) $\forall t \geq 0, S(t)u \in D(A)$

(2) $AS(t)u = S(t)Au, \forall t \geq 0.$

(3). $t \mapsto S(t)u$ $\forall t \geq 0$ 是可微的.

(4) $\frac{d}{dt} S(t)u = AS(u), u. \forall t \geq 0.$

Proof: 由(2).

(1)(2): 设 $u \in D(A)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)(S(t)u) - S(t)u}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(t+s)u - S(t)u}{s} \\ &= S(t) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au. \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow S(t)u \in D(A) \\ & A(S(t)u) = S(t)Au. \end{aligned}$$

(3) claim: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au.$$

$$= S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au.$$

$$= S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h) - S(t))Au.$$

$$\xrightarrow{\text{A是}\star\star\star} \downarrow \text{as } h \rightarrow 0.$$

连续性 \downarrow as $h \rightarrow 0.$

$$\rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0.$$

(4): 由(3)易知.

$$\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} \rightarrow Su, Au \quad \text{as } h \rightarrow 0^+.$$

□

Thm 7.6.2

(1) $D(A) \subset \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2) A 是闭算子, 即 $\forall u_n \in D(A) \quad \begin{cases} u_n \rightarrow u \\ Au_n \rightarrow v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Au = v \\ u \in D(A) \text{ 且 } Au = v. \end{cases}$

证明: (1) Fix $u \in X$. $u^t := \int_0^t S(s)uds$. 由 $\frac{u^t}{t} \rightarrow u$ in X (由连续性).

用证 $u^t \in D(A)$ 且 $Au^t = u$.

$$\begin{aligned} \forall h > 0. \quad \frac{S(h)u^t - u^t}{h} &= \frac{1}{h} (S(h)u^t - u^t) \\ &= \frac{1}{h} (S(h)\int_0^t S(s)uds - \int_0^t S(s)uds) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t (S(s+h) - S(s)) u ds. \\ &= \int \frac{1}{h} (\int_{t+h}^t - \int_t^h) S(s)uds. \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} S(t)u - u. \end{aligned}$$

$\Rightarrow u^t \in D(A)$.

$$Au^t = S(t)u - u.$$

$\Rightarrow D(A) \subset \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

(2). $\forall u \in A$ 闭 设 $u_k \in D(A)$. $u_k \rightarrow u$ in X
 $Au_k \rightarrow v$ in X .

要证: $u \in D(A)$ $v = Au$.

$$\xrightarrow{7.6.1} S(t)u - u = \int_0^t S(s)Auds.$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} S(t)u - u = \int_0^t S(s)Auds.$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)Auds = v. \Rightarrow u \in D(A). \quad v = Au. \quad \square.$$

设 $A: D(A) \rightarrow X$ 为闭算子

Def: (1) (Resolvent set) $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I \text{ 1-1 & 满射}\}$.

(2) $\lambda \in \rho(A)$, 则此对应的预解算子 $R_\lambda: X \rightarrow X$ 为:

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

Fact

Recall: 闭图像定理: 闭算子是有界的
线性

$$\Rightarrow R_\lambda: X \rightarrow D(A) \subseteq X, \text{ 是有界线性算子}$$

$$\text{进一步地: } AR_\lambda u = R_\lambda A u.$$

Theorem 7.6.3.

(1). 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$, 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(2) 若 $\lambda > 0$, 则 $\lambda \in \rho(A)$.

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt, \quad \forall u \in X.$$

(R_λ 为
 $S(t)$ 的
Laplace 变换).

$$\Rightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

PP

(1) Trivial.

(2), $\lambda > 0$, $\|S(t)\| \leq 1$. 由(1)中推得之有 $R_\lambda u$.

$$\tilde{R}_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt.$$

$\forall h > 0, u \in X$.

$$\frac{\tilde{R}_\lambda u - R_\lambda u}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t+h)u - S(t)u) dt \right).$$

$$= -\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t)u dt + \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t)u dt$$

$$= -e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)u dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt.$$

$$\Rightarrow -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u. \Rightarrow A \tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u.$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A) \tilde{R}_\lambda u = u, \quad \forall u \in X.$$

$$\underline{\text{claim}}: A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t) u dt$$

若 claim 成立: \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \forall u \in D(A). \quad \widetilde{AR_\lambda} u &= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t) u dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) Au dt. \\ \Rightarrow \widetilde{R_\lambda} (\lambda I - A) u &= \widetilde{R_\lambda} Au. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda I - A$ 1-1.2 onto.

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(A). \quad \widetilde{R_\lambda} = R_\lambda.$$

余下只用证 claim.

先证明: 对 \int_0^M . A 可与之换序:

$$\forall M \in \mathbb{R}_+. \quad \bigcup_{j=0}^{2^k-1} [0, M] \cap \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} M \right]:$$

$$\text{由 } I_k(t) := \sum_{j=1}^{2^k} e^{-\lambda t_j} S(t_j) u. \quad \bigvee_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \rightarrow e^{-\lambda t} S(t) u. \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

↑ Simple functions

$\Rightarrow A$ 为简单函数.

$$A \int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u dt = A \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^M I_k(t) dt \right)$$

$$\begin{aligned} A \overline{I} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} A \int_0^M I_k(t) dt. \\ I_k &\text{ simple.} \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^M A I_k(t) dt$$

$$\begin{aligned} A \overline{I} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^M A I_k(t) dt \\ &\stackrel{\text{not}}{\rightarrow} \int_0^M A e^{-\lambda t} S(t) u dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^M A e^{-\lambda t} S(t) u dt \stackrel{A \text{ linear}}{=} \int_0^M e^{-\lambda t} AS(t) u dt$$

$\Rightarrow e^{-\lambda t} = \text{rapidly decays}$

$$\|S(t+)\| \leq 1.$$

A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt.$$

$$\Rightarrow A \left(\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u dt \right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} A \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt \right)$$

|| 例 || 例 || 例 .

therefore " " holds.

$$\int_0^M e^{-\lambda t} |ASu| dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} |ASu| dt.$$

$$\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) |Au| dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) |Au| dt$$

下面来对压缩半群的生成元进行刻画.

Thm 7.5.4 (Hille-Yosida). 压缩半群

A 为 X 上稠定的闭算子. 则 A 是 $S(t)$ 的生成元 \Leftrightarrow

$$IR_+ \subseteq P(A), \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

P_f^+ : \Rightarrow By thm 7.6.3

\Leftarrow : 设 A 闭、稠定, $IR_+ \subseteq P(A)$.

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

下面构造 A 生成的压缩半群.

直接构造是困难的, 因此我们先找一族并子 $\{A_\lambda\}$ (便于计算).

先求 A_λ 的生成半群, 再令 $\lambda \rightarrow \infty$ 来证明.

$$\text{全 } A\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda. \quad (\lambda > 0)$$

这称作 A 的正规化逼近

claim: $\cancel{A\lambda u} \rightarrow Au.$

$$\text{(若) claim 对, 则全. } S_{\lambda}(t)u = e^{tA\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k$$

$$\Rightarrow \|S_{\lambda}(t)u\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k.$$

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \rightarrow e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1 \Rightarrow \{S_{\lambda}(t)\}$$

S_{λ} 生成元: $A\lambda$. $D(A\lambda) = X$. 此为易见.
直接等

由于 $A\lambda$ 是 R_λ 的“紧致化”, 故 R_λ, R_μ 可交换 $\Rightarrow A\lambda, A\mu$ 可交换.

$$\Rightarrow \cancel{A\mu} A\mu S_{\lambda}(t) = S_{\lambda}(t) A\mu. \quad \forall t > 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\lambda}(t)u - S_{\mu}(t)u &= \int_0^t \frac{d}{ds} (S_{\mu}(t-s) S_{\lambda}(s)u) ds \\ &= \int_0^t S_{\mu}(t-s) S_{\lambda}(s) (A\lambda u - A\mu u) ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|S_{\lambda}(t)u - S_{\mu}(t)u\| \leq t \underbrace{\|A\lambda u - A\mu u\|}_{\text{由 claim}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{as } \lambda, \mu \rightarrow \infty$$

故 $\{A\lambda u\}_{\lambda > 0}$ Cauchy.

$\Rightarrow \{S_{\lambda}(t)u\}_{\lambda > 0}$ 是柯西列:

$$\therefore \exists S(t)u := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{\lambda}(t)u. \quad \forall t > 0, u \in D(A).$$

$$\begin{aligned} \forall u \in X \quad \exists S(t)u = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{\lambda}(t)u. \\ \text{且 } S(t) \text{ 是压缩半群.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{AA相容}}$

下面證明 $A \in \{S_{t+}\}$ 是的無窮小生成元：

設 B 為生成元。

$$\text{則: } Bu = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_{t+}u - u}{t} \quad \forall u \in D(A).$$

$$\text{而 } S_{t+}u - u = \int_0^t S_{\lambda(s)} A_\lambda u \, ds.$$

$$\|S_{\lambda(s)} A_\lambda u - S_{(s)} A u\| \leq \|S_{\lambda(s)}\| \cdot \|(A_\lambda u - Au)\|.$$

$$+ \|(S_{\lambda(s)} - S_{(s)}) A u\| \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} 0. \quad \forall u \in D(A).$$

故，令 $\lambda \rightarrow \infty$ 由 DCT.

$$S_{t+}u - u = \int_0^t S_{(s)} A u \, ds. \quad \forall u \in D(A)$$

$$\Rightarrow \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_{t+}u - u}{t} \right\} \stackrel{\exists}{=} Bu. \quad \forall u \in D(A).$$

$\|Au\|$.

又若 $\lambda > 0$. $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

$$\text{則 } X = (\lambda I - A) D(A) = (\lambda I - B) D(A).$$

$$\Rightarrow (\lambda I - B) \Big|_{D(A)} \text{ 1-1 & onto.} \Rightarrow D(A) = D(B).$$

$$\Rightarrow A = B$$

$\Rightarrow A \in \{S_{t+}\}_{t \geq 0}$ 的生成元。

由 \boxed{B} 與 \boxed{Y} 只用 \exists claim: $\forall u \in D(A)$. $A_\lambda u \rightarrow Au$. as $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} Axu &= -\lambda u + \lambda^2 R_\lambda u. = \lambda (xR_\lambda u - u). \\ &= \lambda (AR_\lambda u) = \lambda (R_\lambda Au). \end{aligned}$$

$$\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \|R_\lambda\| \cdot \|Au\| = \frac{1}{\lambda} \|Au\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow xR_\lambda u \rightarrow u \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty \quad \forall u \in D(A). \quad \left. \begin{array}{l} \text{A 不可逆} \\ \|\lambda R_\lambda u\| \leq 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{xR_\lambda u \rightarrow u}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{xR_\lambda u}{\lambda R_\lambda u} \rightarrow \frac{xR_\lambda Au}{\lambda R_\lambda Au}} \quad \boxed{67}$$

$\lambda R_\lambda Au \rightarrow Au$. \square

7.6.2 - 非齐次方程中的应用

I. 考虑抛物方程

$$(*) \begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{on } U \times \{0\}. \end{cases}$$

L 的系数与 t 无关. $\exists u \in C^\infty$

$$\text{取 } x = L^2(U), \quad D(A) = H_0^1 \cap H^2 \quad Au := -Lu.$$

再 A 上的无界算子.

Thm 7.3.5: A 生成了 L^2 上的一个 γ -压缩算子.

由 Hille-Yosida 的条件换为 $(r, \infty) \subset \rho(A)$.
 $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - r} \quad \forall \lambda > r$.

Pf: $D(A) \stackrel{\text{dense}}{\subset} L^2. \quad \checkmark$
 再证: A 是闭算子 + 预解算子 $+ \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - r}$

① A 闭? 设 $u_k \in D(A)$, $\begin{cases} u_k \rightarrow u \\ A u_k \rightarrow f \end{cases}$ in $L^2(U)$.

由正则性定理:

$$\|u_k - u\|_{L^2} \leq C \|A u_k - A u\|_{L^2} + \|u_k - u\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2. \quad \Rightarrow A u_k \rightarrow A u \quad (\text{因 } A = -L).$$

$$\Rightarrow u \in D(A).$$

$$\Rightarrow f = A u. \quad \checkmark$$

② $(r, \infty) \subset \rho(A)$? $\forall \lambda > r$.

$$\begin{cases} (L + \lambda I)u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \quad \text{在 } H_0^1 \text{ 中 } \exists \text{ weak sol (given } f \in L^2).$$

正则性定理 $\cancel{u \in H^2 \cap H_0^1} \Rightarrow u \in D(A)$.

$$\Rightarrow \lambda u - Au = f. \quad \therefore (\lambda I - A): D(A) \rightarrow X. \quad 1-1 \& onto. \quad (\forall \lambda > r).$$

$$\Rightarrow L_{r, \infty} \subset \rho(A)$$

$$③ : \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - r} \quad \lambda > r.$$

Consider $B[u, v] + \lambda(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(U), \dots (\#).$

由能量估计 (in Lax-Milgram).

$$\exists \beta > 0 \text{ s.t. } \beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u, u] + r \|u\|_L^2$$

$\lambda > r$

$$\Rightarrow (\lambda - r) \|u\|_L^2 \leq \|f\|_L^2 \|u\|_L^2.$$

(#) 中, $\hat{v} = u$.

$$B[u, u] + \lambda(u, u) = (f, u), \leq \|f\|_L^2 \|u\|_L^2.$$

$$(\lambda - r) \|u\|_L^2$$

又因 $u = R_\lambda f$.

$$\Rightarrow \|R_\lambda f\|_2 \leq \frac{1}{\lambda - r} \|f\|_2 \xrightarrow{\|f\|_2^2} \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - r} \xrightarrow{\lambda > r}$$

Rmk: 单层方法提供了求解 (*) 方程构造解的途径, 但 a^{ij}, b^{ij}, c . \square

要与多元关.

II 对双曲方程

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u + Lu = 0 \quad \text{in } U_T \\ u = 0 \quad \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u(0) = g, \quad \partial_t u(0) = h. \quad \text{in } V. \quad (g \geq 0, \quad a^{ij} = a^{ji}) \end{array} \right.$$

$$\text{令 } V = \partial_t u$$

$$\rightarrow \partial_t V = -Lu \quad \text{in } U_T.$$

如何选择 A?

$u = 0 \quad \text{on } \partial U \times [0, T].$

$$\begin{cases} u = g & \text{in } U, \\ \partial_t u = h & \end{cases}$$

$$\exists \beta > 0 \quad \beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u, u] \quad \forall u \in H_0^1$$

$$\text{Take } X = H_0^1 \times L^2.$$

$$\|(u, v)\|_X := \sqrt{B[u, u] + \|v\|_2^2}$$

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$$

$$A(u, v) := (v, -Lu).$$

类似可证. A 满足 Hille-Yosida Thm.

故有

Thm 7.6.6:

如上算子 A 生成了 $H_0^1 \times L^2$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}$

□

7.6.3: 实例:

设 ϕ 是热方程的基本解, 即 $\phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$\forall t > 0$. 令

$$[S(t)g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t) g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$S(0)g = g.$$

问: $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群.
不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

check:

- $S(t)$ 是 L^2 上的压缩算子
- $\|S(t)g\|_{L^2} = \|\phi * g\|_{L^2}$
- $\leq \|\phi\|_1 \|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(u)\| \leq 1.$

$\begin{aligned} \|S(t+s)g\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) \phi(x-y, t+s) g(y) dy \right\|_{L^2} \\ &= \hat{\phi}(x, t) \hat{\phi}(x, s) \hat{g}(x) = S(t) S(s) g(x). \end{aligned}$

$t \mapsto S(t)g$ 连续性:

$$\begin{aligned}
 \|S(t+h)g - S(t)g\|_{L^2} &\leq \|S(h)g - g\|_{L^2} \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, h) g(y) dy - g(x) \right\|_{L_x^2} \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, h) (g(y) - g(x)) dy \right\|_{L_x^2} \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y, h) (g(x-y) - g(x)) dy \right\|_{L_x^2} \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y, h) \|g(x-y) - g(x)\|_{L_x^2} dy. \\
 &\quad \downarrow_0 \text{(平移连续性).} \\
 &\xrightarrow{PCT} 0.
 \end{aligned}$$

$S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩算子，因 在 $t=0$ 处不连续

令 $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
 (S(t)g)(x) &= \int_{-\infty}^x e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy. \quad (S(t)g)(0) = \frac{1}{2} \quad \forall t > 0 \\
 \Rightarrow \|S(t)g - g\|_{L^\infty} &\geq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

□ . 71

· 热方程 C^∞ 正则性:

Lemma 7.6.7: 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的泛函半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.
记 $D(A^k) := \{u \in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u \in D(A)\}$. ($k \geq 2$)

证明: 若 $\exists k$, $u \in D(A^k)$, 则 $\forall t \geq 0$, $S(t)u \in D(A^k)$.

Pf: $\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, 要证: $A^j S(t)u \in D(A)$.

i.e. $\lim_{s \rightarrow \infty^+} \frac{S(s) A^j S(t)u - A^j S(t)u}{s} = 0$

$\underline{S(s) A^j S(t)u - A^j S(t)u}$

$= \frac{S(s) S(t) A^j u - S(t) A^j u}{s}$

$= \underline{S(t+s)(A^j u) - S(t)(A^j u)}$

由归纳假设 $A^j u \in D(A)$.

$\Rightarrow \exists w \text{ s.t. } w \circ S(t)(A^j u) = 0$ (因为 $S(t) = \text{Id}$).

$\Rightarrow \exists w \text{ s.t. } w \circ S(t+s)(A^j u) = 0$.

□

Prop 7.6.8: $X = L^2$. 若 u 是 $\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{t=T} = 0 \end{array} \right.$ 的解. 则 $u \in C^\infty([0, T] \times U)$.

半群解: $(g \in C_c^\infty(U))$, $\forall t \geq 0$, $u(\cdot, t) \in C^\infty(U)$, $\forall 0 \leq t \leq T$.

Pf: $\forall k \in \mathbb{N}$. 证之到.

半群解: $u(x, t) = e^{t\Delta} g =: S(t)g$.

由: $\forall k \in \mathbb{N}$, $D(\Delta^k) = H_0^{2k}$ (Take $A = \Delta$).

由 Lem 7.6.7 知 $\forall t \geq 0$, $u(\cdot, t) = S(t)g \in H_0^{2k}(U)$, $\forall k$.

$\Rightarrow u \in C^\infty$

□

§ 7.7: 常系数线性发展方程的 Fourier 方法: Strichartz 估计.

7.7.1: Schrödinger 方程的 Strichartz 估计(非端点).

$$\text{考虑 } (x) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0) = g & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \end{cases}$$

若 u, g 均是 Schwaartz 函数, 则由 Fourier 变换法可得:

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \hat{g}(\xi).$$

$$\Rightarrow u(t, x) = (e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \hat{g})^\vee = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i \frac{|x-y|^2}{t}} g(y) dy =: e^{it\Delta} g.$$

$f \neq 0$ 时, 由 Du Hamel 原理

$$\Rightarrow u(t, x) = e^{it\Delta} g - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds.$$

若 f 是非线性函数 $f(x, u)$, 则原方程化作非线性方程

$$\text{即 } u(t, x) = e^{it\Delta} g - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x, u, s) ds.$$

因此, 要对 Schrödinger 方程的解进行估计, 尤其是需要对半线性、非线性 Schrödinger 方程的适定性/长时间行为进行研究时, 我们应分别搞清楚 $e^{it\Delta} g$ 项, 的 $L_t^q L_x^r$ 范数的估计, 此为 Schrödinger 方程 $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds$ 项最基本的时空间估计.

在叙述结果之前, 我们先证明一个简单的衰减估计.

Lemma 7.7.1 (Schrödinger 方程衰减估计).

$$\forall r \in [2, +\infty] \quad \|e^{it\Delta} g\|_{L^r_x} \lesssim t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L^2_x}$$

Proof: 由 $\{e^{it\Delta}\}$ 是酉算子知. $e^{it\Delta}: L^2 \rightarrow L^2$ with $bdd = 1$.

$$\text{又: } e^{it\Delta} g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}} g(y) dy.$$

$$|e^{it\Delta} g(x)| \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \|g\|_{L^2}.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\Delta} g\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \|g\|_{L^2}$$

$$\text{故: } e^{it\Delta}: L^1 \rightarrow L^\infty \quad \text{with bdd} \lesssim t^{-\frac{d}{2}}.$$

由 Riesz-Thorin 插值. 有 $\forall r \geq 2$.

$$\|e^{it\Delta} g\|_{L^r_x} \lesssim t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L^2_x}.$$

下设 $d \in \mathbb{Z}_+$. $2^* = \frac{2d}{d-2}$. $(q, r) \neq (2, 2^*)$. □

我们证明所谓“非端点” Strichartz 估计.

Thm 7.7.1 (Strichartz).

设 q, r 满足 $\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}$ (称作“容许对”, admissible pair).

$(q, r, d) \neq (2, \infty, 2)$. $(q, r) \neq (2, 2^*)$.

$$(1) \quad \left\| \int_{\mathbb{R}}^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L^2_x} \lesssim \|f\|_{L_t^q L_x^{r'}}$$

$$(2) \quad \left\| f \right\| \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L^2_x}.$$

$$(3) \quad \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$(q, r), (\tilde{q}, \tilde{r})$ 是任何上述容许对.

“ \prime ” 代表 dual index.

在证明之前我们不加证明地给出如下引理，该引理将 \int_0^t 的估计化作 $\int_{\mathbb{R}}$ 的估计。

Lemma 7.7.2 (Christ-Kiselev 引理).

设 Y, Z 是 Banach 空间， $k(t, s)$ 是取值于 $L(Y, Z)$ 的连续函数。

$$-\infty \leq a \leq b \leq +\infty, \quad Tf^{(+)}) = \int_a^b k(t, s) f(s) ds.$$

$$\text{设 } \|Tf\|_{L^q((a, b); Z)} \leq C \|f\|_{L^p((a, b); Y)},$$

$$\text{令 } Wf(t) = \int_a^t k(t, s) f(s) ds, \quad \text{则 } 1 \leq p < q \leq \infty \text{ 时}.$$

$$\|Wf\|_{L^q((a, b); Z)} \leq \frac{2^{-2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot 2C}{1 - 2^{-(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}} \|f\|_{L^p((a, b); Y)}.$$

$$\begin{cases} a = -\infty, \\ b = +\infty \end{cases}$$

$$k(t-s) = e^{it\Delta}$$

$$Z = L^r, \quad Y = L^{r'} \quad (\text{即 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

#

□.

Proof of Thm 7.7.1:

先证 $B^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q}, r = \frac{1}{p}$ 的情况

$$(1) \quad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r}.$$

\tilde{T}^x Minkowski

$$\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} f(s)\|_{L_x^r} ds \right\|_{L_t^q}$$

衰减估计

$$\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f(s)\|_{L_x^r} ds \right\|_{L_t^q}$$

$$= \left\| 1 \cdot \frac{1}{|t|} \cdot \|f(\cdot)\|_{L_x^r} \right\|_{L_t^q}.$$

Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 $\|1 \cdot |t|^{-\sigma} f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, 0 < \sigma < d, \frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{d}$

$$\sim \|f\|_{L_t^q L_x^r} \quad \text{而} \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{d} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{d} \\ \sigma = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \end{cases} \Rightarrow \sigma = q' \quad \checkmark \quad \sqrt{75}$$

- 手稿地：

$$\begin{aligned} (1) : & \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s) ds \right\|_{L_x^2}^2 \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s) ds \right\|_{L_x^2}^2 \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s) ds, \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(t) dt \right\rangle \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \langle e^{-is\Delta} f(s), e^{-it\Delta} f(t) \rangle_x ds dt. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\langle f(s), \underbrace{\int e^{i(s-t)\Delta} f(t) dt}_{\text{---}} \right\rangle_x ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mixed-Norm Hölder} &\leq \|f\|_{L_t^r L_x^{r'}}^r \| \int e^{i(s-t)\Delta} f(t) dt \|_{L_t^q L_x^r} \\ (3) \text{ 在 } q = \tilde{q}, r = \tilde{r} &\leq \|f\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2). & \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\|h\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}} \leq 1} \left| \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (e^{it\Delta} g)(t-x) \overline{h(t-x)} dx dt \right|. \\ &= \sup_{\|h\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle e^{it\Delta} g, h \rangle_x dt \right|. \\ &= \sup_h \left| \int_{\mathbb{R}} \langle g, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h dt \rangle_x dt \right| \\ &\leq \sup_h \|g\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h dt \right\|_{L^2} \\ &\stackrel{(P)}{\leq} \sup_h \|g\|_{L^2} \|h\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}} \leq \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r} \\
 & \leq \sup_{\|h\|_{L_t^q L_x^{r'} \leq 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds h(t-x) dx dt \right| \\
 & = \sup_{\|h\|_{L_t^q L_x^{r'} \leq 1}} \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle e^{i(t-s)\Delta} f(s), h(t) \rangle_x dt ds \right\| \\
 & = \sup_{\|h\|_{L_t^q L_x^{r'} \leq 1}} \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s) ds, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t) dt \right\rangle_x \right| \\
 & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|h\|_{L_t^q L_x^{r'} \leq 1}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s) ds \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t) dt \right\|_{L_x^2} \\
 & \stackrel{(2)}{\leq} \sup_{\|h\|_{L_t^q L_x^{r'} \leq 1}} \|f\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}} \|h\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \leq \|f\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}} . \quad \square
 \end{aligned}$$

借此，我们证明半线性次临界 Schrödinger 方程，
其 H^1 强解的 Local-Wellposedness.

7.7.2: Local well-posedness of subcritical NLS, in $d \geq 3$.

~~What's subcritical?~~

~~Endpoint case:~~ $2 \leq p < \frac{2d}{d-2}$.

~~在证明中有一步要求：~~ $\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{p+1}$

Consider (MLS)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times I, \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) & \text{in } \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

那么：

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{p-1} u)(s) ds \quad (*)$$

Thm 7.7.2: (LWP for subcritical NLS in $d \geq 3$)

$0 < p-1 < \frac{4}{d-2}$ 时. NLS 在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中局部适定. 即解 u , !, 对初值
连续依赖.

证明之前. 我们不加证明地给出要用的引理:

Lemma 7.7.3:

$$f(u) = |u|^{p-1} u. \quad \forall u, v \quad |f(u) - f(v)| \lesssim_p |u-v| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}).$$
$$|\nabla f(u)| \leq |u|^{p-1} |\nabla u|$$

In fact. this can be derived by the local Lipschitzian property of f .

Lemma 7.7.4:

X, Y 是 Banach 空间. X 自反. $X \hookrightarrow Y$. $\Leftrightarrow 1 < p, q \leq \infty$

- f_n 在 $L^p(I, Y)$ 中一致有界
- $f_n(t) \rightharpoonup f(t)$ in Y . for a.e. $t \in I$.

• $f \in L^p(I, X)$. $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p}$.

Proof of Thm 7.7.2:

□

Step 1: 局部存在性:

Fix M, T > 0. (q, r) 是容许对.

$$\text{令 } X = \left\{ u \in L^\infty((-T, T); H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^q W_x^{1,r} \mid \begin{array}{l} \|u\|_{L^\infty((-T, T); H^1)} \leq M \\ \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \leq M \end{array} \right\}$$

$$d(u, v) = \|u - v\|_{L_t^q L_x^r}^2 + \|u - v\|_{L_t^q W_x^{1,r}}^2$$

$$\|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \leq M$$

希望 (X, d) 是完备的度量空间

这只要用证 $(X, d) \subseteq L^q_t L^r$

设 $\{u_n\} \subset X$ 且 $u_n \rightarrow u$ in $L^q_t L^r$ 且 $u \in X$.

注意: u_n 且 in $L^q_t W_x^{1,r} \cap L^q_t H^1$

$$\|u_n\|_{L^q_t L^r} \leq C \|u_n\|_{H^1} \lesssim 1 \text{ a.e.}$$

$\Rightarrow \exists$ 異質點 $v_n \rightarrow v$ in L^r

$$\Rightarrow u = v \text{ in } L^q_t L^r$$

再用 Lem 7.7.4 即可.

下面用压缩映射原理证明 Step 1:

$$\text{令 } J: u \mapsto e^{it\Delta} u + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds.$$

要证: $J: (X, d) \rightarrow (X, d)$ 是压缩映射

$$\|Tu - Tv\|_{L^{\infty}_t L^2_x} = \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (f(u) - f(v)) ds \right\|_{L^{\infty}_t L^2_x}.$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Strichartz}}{\leq} C \|f(u) - f(v)\|_{L^q_t L^r_x} \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{\leq} C \|(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}) (u - v)\|_{L^q_t L^r_x} \end{aligned}$$

先证 $J(X) \subseteq X$

$$\|Tu\|_{L^q_t W_x^{1,r}} \approx \left\| \int_0^t u_s ds \right\|_{L^q_t W_x^{1,r}} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L^q_t W_x^{1,r}}$$

Strichartz

$$\lesssim C \|u\|_{H^1} + C \|\langle \nabla \rangle f(u)\|_{L^{\infty}_t L^{\tilde{r}}_x} \quad \langle \nabla \rangle = (1 + |\nabla|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C \|u\|_{H^1} + C \|(|u|^{p-1} \langle \nabla \rangle u)\|_{L^q_t L^{\tilde{r}}_x}.$$

Hölder

$$\leq C \|u\|_{H^1} + C \|u\|_{L^p_t} \|u\|_{L^{\infty}_t L^r} \|u\|_{L^q_t (-T, T)}$$

刚才这步，要求：

$$\frac{1}{r} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{r}} \Rightarrow r = p+1.$$

下面希望 $H^1 \hookrightarrow L^r$ 则由 Sobolev 插入定理知：

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \Leftrightarrow r \leq \frac{2d}{d-2}$$

$$\Leftrightarrow p-1 \leq \frac{4}{d-2} \quad \text{临界指前}$$

只考虑 $p-1 < \frac{4}{d-2}$, 否则要涉及 endpoint Strichartz 估计。

$$\text{接着上式} \leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left\|1 \cdot \|u\|_{H_x^1}^{p-1} \|u\|_{W_x^{1,r}}\right\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$$

Hölder

$$\leq C\|u_0\|_{H^1} + \|1\|_{L_t^{(\frac{2}{q})^{-1}}}^{\frac{2}{q}} \|u\|_{L_t^{\infty} H_x^1}^{p-1} \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\infty} + \left(1 - \frac{2}{q}\right)$$

$$r < \frac{2d}{d-2} \text{ 时, } 1 - \frac{2}{q} > 0 \quad (\text{subcritical})$$

$$\text{上式} \leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} M^p$$

$$\text{Take } M = 2C\|u_0\|_{H^1}$$

$$CT^{1-\frac{2}{q}} M^p < \frac{M}{4} \text{ 时.}$$

$$\text{上式} \leq \frac{3}{4}M$$

对 $L_t^{\infty} H_x^1$ 来说。 $\Rightarrow T(x) \subseteq X$.

再证 T 压缩: $\|T_u - T_v\|_{L_t^{\infty} L_x^2} \stackrel{\text{Strichartz}}{\lesssim} \|f(u) - f(v)\|_{L_t^q L_x^r}$

$$\lesssim \|((u_0^H + M^{p-1})|u-v|)\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\stackrel{\text{同上}}{\leq} CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|_{L_t^{\infty} H_x^1}^{p-1} + \|v\|_{L_t^{\infty} H_x^1}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\leq CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot 2M^p \cdot d(u,v).$$

换成 $L_t^q L_x^r$ 也对
取 $CT^{-\frac{1}{2}} M^{P+1} < 1$. 再用压缩映像原理即有 $L_t^q L_x^r \cap L_t^\infty L_x^2$
的 local existence

下证 H' 中 $\exists !$ 仍对.

$P \leq 2$ 要用另外方法,
我们在以后略去.

$$\|T_u - T_v\|_{L_t^\infty H_x^1} \quad \text{估计}$$

$$\leq \|(\nabla (u^{P-1} u - v^{P-1} v))\|_{L_t^{\frac{q}{P-1}} L_x^{\frac{r}{P}}} \quad (P > 2)$$

$$\lesssim CT^{1-\frac{2}{q}} (\|\nabla u\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}} + \|\nabla v\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}})$$

$$+ (\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}) \|u - v\|_{L_t^\infty H_x^1}$$

$$+ CT^{1-\frac{2}{q}} \|\nabla(u-v)\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}} = (\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{P-1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^{P-1})$$

$$\lesssim \frac{CT^{\frac{1}{4}} M^2 d(u, v)}{\frac{1}{q} \alpha < \frac{1}{2}} \quad \text{由 } \overline{g}.$$

Step 2: ~~local~~ 对初值连续依赖:

设 $u_{0,n} \rightarrow u_0$ in H' . $u_n, u \in u_{0,n}$. u_0 为初值的解.

由 $u_n \rightarrow u$ in $C_c^0 H_x^1$ \rightarrow 因 u 的表达式由弱解唯一性产生 (见 § A.C.)

$$u - u_n = e^{it\Delta} (u_0 - u_{0,n}) - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (f(u) - f(u_n))(s) ds.$$

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}} &\stackrel{\text{strictante.}}{\leq} C \|u_0 - u_{0,n}\|_{L^2} + C \|f(u) - f(u_n)\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}} \\ &\leq C \|u_0 - u_{0,n}\|_{L_x^2} + CT^{1-\frac{2}{q}} (\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{P-1} + \|u_n\|_{L_t^\infty H_x^1}^{P-1}) \\ &\leq C \|u_0 - u_{0,n}\|_{H_x^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot C (\|u\|_{H_x^1} \cdot \|u - u_n\|_{L_t^{\frac{q}{P}} L_x^{\frac{r}{P}}}) \end{aligned}$$

∇T 有界, $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C T^{1-\frac{2}{p}} \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p}}$.

$L^\infty_t L^2_x$ 也有 L^2 估计 H^1 norm.

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2} + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \nabla(f(u_n) - f(u)) ds$$

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2}.$$

$$+ C \|\nabla(f(u_n) - f(u))\|_{L^\infty_t L^2_x}$$

$$\lesssim C \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{H^1}$$

$$+ C \|u_n^{p-1} \nabla(u_n - u)\|_{L^\infty_t L^2_x}$$

$$+ C \|(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}) |\nabla u_n|\|_{L^\infty_t L^2_x}$$

Hölder

$$\lesssim C \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{H^1}$$

$$+ C \|u\|_{L^\infty_t H^1_x}^{p-1} \|\nabla u - \nabla u_n\|_{L^\infty_t L^2_x} T^{1-\frac{2}{p}}.$$

$$+ \|(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}) \nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x}$$

$p > 2$, 用中值 Thm.

$$1/p \leq 2$$

$$\|u\|_{L^\infty_t H^1_x}^{p-1} \cdot \underbrace{\|\nabla u - \nabla u_n\|_{L^\infty_t L^2_x}}_{\text{Hölder 連接}} \lesssim \|u_n - u\|^{p-1}.$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow 0).$$

这样 locally

局部适定性完成证明.

□

$$\text{Remark.} \quad (\text{MLS}) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mu = \pm \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(1) 半线性 Schrödinger 的 Well-posedness 与 p. d. μ 均有关.

我们在 Step 1 中某步用 Hölder 时出现了 $1/p-1 < \frac{4}{d-2}$.

① 此为 "能量次临界 MLS".

$d \geq 3$, 次临界 NLS. 有 H^1 Global well-posedness.

$d \leq 2$, 需另计估. 因 Strichartz 估计不一致.

(主要在 endpoint case).

问: 从 local \rightarrow global?

Answer: 利用守恒律.

$$E_0(u) = \|u\|_2^2.$$

$$E_1(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{2\mu}{p+1} |u|^{p+1} dx.$$

② Energy-critical?

利用 Keel-Tao 证明 Strichartz 估计, 例如 $d=3, p=5$.
有 $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^{10} W_x^{1, \frac{30}{13}}$

③ 超临界: 未知.

适之. 小初值 \Rightarrow global
大初值 \Rightarrow local.

④ 关于 Strichartz 估计.

端点情形: 见: ($d \geq 3, d \leq 2$ 只对径向函数对, 否则有限制).

Marcus, Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates,

American Journal of Mathematics, 1998.

这要用到 双端点, 三端点插值. 有不作介绍.

这都是抽离 Strichartz 估计的与插值空间的推论.

(3) 事实上, 不仅有 Schrödinger 方程有 Strichartz 估计.

对其它常见的包前方程 (KdV, Airy, Wave) 也有讨论.

这都是抽离 Strichartz 估计的与插值空间的推论.

□

Thm 7.7.3 (抽象 Strichartz 估计)

设 $U(t): L^2 \rightarrow L^2$ 是一族单参数的有界线性算子. X 为反 Banach.
一个数有界的

$\Rightarrow (\mathbb{R}^d)$ 在 X, X^* 中稠密.

假设: $\|a(U(t), U^*(t')) f\|_{X^*} \lesssim |t-t'|^{-\gamma} \|f\|_X$.

$\|U(t) f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(X^*)} \lesssim \|f\|_{L^2}$.

$\|\int_{\mathbb{R}} U^*(t) \Psi(t, \cdot) dt\|_{L^2} \lesssim \|\Psi\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}} X}$.

证明与 Schrödinger 方程的完全类似. ($U(t) = e^{it\Delta}$)

实际上, 这用到的最核心的方法是.

* 设 H Hilbert. Y 为反.

$T: H \rightarrow Y$ bdd. $T^*: Y^* \rightarrow H$.

若 T 自伴, 则 $\|TT^*\|_{H \rightarrow Y} = \|T\|_{H \rightarrow Y}^2$.

而在 Strichartz 估计中, TT^* 远比 T 容易估计.

Corollary: 该方程 Strichartz 估计

□.

取 $\gamma = (d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \dots \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $S = \frac{d+1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. $0 < \gamma < 1$.

(2) $\|W(t)f\|_{L_t^{\frac{3}{\gamma}} \dot{B}_x^{-S, p}} + \|\partial_t W(t)f\|_{L_t^{\frac{3}{\gamma}} \dot{B}_x^{-S+1, p}}$

其中. $\|f\|_{\dot{B}_x^{S, p}} := \left\| \sum_k \|P_k f\|_{L^p} \right\|_{\dot{B}_x^S} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_x^{S, 2}} + \|g\|_{\dot{B}_x^{-1, 2}}$
 $(P_k \text{ 为 Littlewood-Paley 分解} \}$.

$W(t)f = \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f}{\sqrt{-\Delta}}$ i.e. $\widehat{W(t)f} = \frac{\sin(t|\xi|)f}{t|\xi|}$

$\partial_t W(t)f = \cos(t\sqrt{-\Delta})f$.

Proof:

$$\partial_t W(t) \cdot P_k f = \cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f \\ = \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} + e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{2} P_k f.$$

而 $e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f := (e^{it|\xi|} \widehat{P_k f})^\vee$

$\varphi(\frac{\xi}{2^k}) \widehat{f}(\xi)$. φ 为 $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \leq 2\}$ 上的 C_c^∞ -bump

$$= \int e^{it|\xi|} e^{ix\cdot\xi} \varphi(\frac{\xi}{2^k}) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

$$\stackrel{\gamma=2^k \xi}{=} \int e^{i2^k t + i\eta \cdot \xi} e^{i2^k x \cdot \eta} \varphi(\eta) \widehat{f}(2^k \eta) 2^{kd} d\eta$$

$$= \int e^{i2^k t + i\eta \cdot \xi} e^{i2^k x \cdot \eta} \widehat{P_k f}(2^k \cdot) d\eta.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f\|_\infty \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_1.$$

$\exists W(t) f \exists :$

$$\left\| \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_\infty = \frac{1}{2} \left\| \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} - e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_\infty \\ \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \frac{P_k}{\sqrt{-\Delta}} g \right\|_1.$$

故: $\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_\infty \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_1 \approx 2^k \|P_k f\|_1.$

$$\| \cdot \|_2 \lesssim \|P_k f\|_2.$$

By Riesz-Thorin Interpolation:

$$\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_p \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\alpha)} t^{-\frac{d-1}{2}(1-\alpha)} \|P_k f\|_{p'}$$

($2 < p < \frac{2d}{d-2}$) 按 $\theta = \frac{2}{p}$ 插值. $= 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})k} t^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})} \|P_k f\|_{p'}$

\Rightarrow

$$2^{-\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})t} \|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p}$$

$$\lesssim 2^{-sk} \cdot t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|P_k f\|_{L^p}.$$

$s < t^\alpha$.

$$\text{等价于 } 2^{sk} \cdot \|f_k\|^2.$$

$$\Rightarrow \left(\left\| \cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f \right\|_{\dot{F}_x^{\frac{1}{2}, 2^k}} \right)_{L^2} =: \left\| \begin{matrix} P_k f \\ \cos(t\sqrt{-\Delta}) \end{matrix} \right\|_{B_2^{s, p}}.$$

$$\lesssim t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f\|_{B_2^{s, p}}$$

在抽象 Strichartz 中，对应。 $X^* = B_2^{s, p}$. $r = (d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

□

Remark: 发展方程的调和分析 (Fourier) 方法

好处：方便处理导数，与精确定性，便于构造函数空间。

有众多分析工具可用。

差

(注意) 此时不应将导数视作微商的极限。

而应视作 $\nabla^s f = (\Im)^s \hat{f}(\Im)$.

即在频率空间中，视作于前面乘以 $-T$ 多项式乘子。

这样即可刻画高阶导数。

乘

坏处：变系数难做，涉及两个参数的估计。

Other Methods: $\begin{cases} \text{Paraproduct,} \\ \text{Concentration law (类似于 Morawetz 估计).} \end{cases}$

变分成其它方法。

86