Ch 5 Sobolev空间　　　Evans 笔记整理.

部分定理证明与课堂笔记/课本有出入.

主要参考了: Lawrence C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions, chapter 4.

§5.1 弱导数.

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集

<u>Def</u>: 设 $u, v \in L^1_{loc}(U)$, α是多重指标, 称 v 为 u 的α阶弱导数. 若 $\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx$ $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$.

<u>lemma</u> (弱导数的唯一性). u的α阶弱导数, 若存在, 则唯一. (a.e.)

<u>证明</u>: 设 $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ 均为U的α阶弱导数.

$$\int_U u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

令 $w = v - \tilde{v}$

$$\Rightarrow \int_U w \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$ 下面只用证 $w \overset{a.e.}{=} 0$ in U.

为此, 引入一族磨光子 $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. ~~$U_\varepsilon = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$~~ 固定$x \in U$ 下设ε充分小, 使 $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. ($U$开, 这必可做到).

则
$$w(x) = \int_U w(x) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy$$
$$= \int_U (w(x) - w(y)) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy + \underbrace{\int_U w(y) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy}_{\overset{\shortparallel}{0}} \quad 因\ \eta_\varepsilon \in C_c^\infty(U).$$
$$= \int_{U \cap B(x,\varepsilon)} (w(x) - w(y)) \eta_\varepsilon(y-x) \, dy.$$

$$\Rightarrow |w(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} |w(x) - w(y)| \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy$$ 其中 $\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, $\int \eta = 1$.

$$\le \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} |w(x) - w(y)| \, dy$$

$$\approx ⨍_{B(x,\varepsilon)} |w(x) - w(y)| \, dy \xrightarrow{a.e.} 0 \quad as\ \varepsilon \to 0^+$$
↑由 lebesgue 微分定理.

□.

§5.2. 索伯列夫(Sobolev)空间.

刻画: L^p函数的"可微","可积"性

弱导数.

Def: (1) $W^{k,p}(U) = \{u: U \to \mathbb{R} \in L^1_{loc}(U) \mid \forall |\alpha| \le k.\ D^\alpha u \in L^p(U)\}$

$H^k(U) := W^{k,2}(U)$

(2) $\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p \qquad \forall\ 1 \le p \le +\infty.$

(3) $u_m \longrightarrow u$ in $W^{k,p}(U)$. if $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} \to 0$ as $m \to \infty$

$u_m \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$. if $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(V)} \to 0$ as $m \to \infty$ $\forall V \subset\subset U$.

注: 称 $V \subset\subset U$. 若 $\bar{V}$紧且 $\bar{V} \subseteq U$, 又称V关于U相对紧.

(4) $W^{k,p}_0(U) = C_c^\infty(U)$在$W^{k,p}(U)$中取闭包.

即: $u \in W_0^{k,p}(U) \iff \exists \{u_m\} \in C_c^\infty(U).\ u_m \to u$ in $W^{k,p}(U)$.

$\iff u \in W^{k,p}(U).\ \partial D^\alpha u = 0.$ on ∂U $\forall |\alpha| \le k-1$.

用5.5节的Trace定义.

Example (1) $U = \mathring{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$. $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ $x \in U - \{0\}$. $\alpha > 0$.

若 $u \in W^{1,p}(U)$. 则须 $\partial_{x_i} u(x) \in L^p$.

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \cdot 2x_i \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}$$

$$= \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \qquad (x \neq 0).$$

$$\Rightarrow |Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$$

① check $Du(x)$是u的一阶弱导数.

$\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ 固定 $\varepsilon > 0$.

这里. $\vec{n} = (n_1 \cdots n_n) = \frac{x}{|x|}$

$$\int_{U - B(0,\varepsilon)} u \phi_{x_i}\, dx = -\int_{U - B(0,\varepsilon)} \partial_{x_i} u\, \phi\, dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \phi\, \underbrace{n^i}_{外法向}\, dS$$

$|Du(x)| \in L^1(U) \Leftrightarrow (\alpha+1) < n$

此时 $\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi n^i \, ds\right| \le \|\phi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha} ds \le C\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$

$$\therefore \int_U u\phi_{x_j} \, dx = -\int_U \partial_{x_j} u \, \phi \, dx. \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U). \quad 0 \le \alpha < n-1$$

② $Du \in L^p$?

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(U) \Leftrightarrow (\alpha+1)p < n.$$

从而 $u \in W^{1,p}(U) \Leftrightarrow \alpha < \frac{n-p}{p}$

特别. $p \ge n$ 时. $u \notin W^{1,p}(U)$ □.

Example (2) $\{r_k\} \overset{dense}{\subset} U = \mathring{B}(0,1)$ $u(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha} \in W^{1,p}(U)$

$\Leftrightarrow \alpha < \frac{n-p}{p}$ (尽管 u 会在 U 的稠密集上无界) □.

下面讨论 Sobolev 函数的基本运算.

Thm 5.2.1: $u, v \in W^{k,p}(U)$. $|\alpha| \le k$. 则

(1). $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$. $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ $\forall |\alpha|+|\beta| \le k$.

(2) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则 $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$. $|\alpha| \le k$.

(3). V 开 $\subseteq U$ $u \in W^{k,p}(V)$

(4) $\zeta \in C_c^\infty(U)$. 则 $\zeta u \in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$

(5) ~~f.g. k=1~~ k=1时 若还有 $u, v \in L^\infty(U)$ 则 $uv \in W^{k,p}(U) \cap L^\infty(U)$.

$\partial_i(uv) = \partial_i u \cdot v + \partial_i v \cdot u$.

(4)(5) 表明 Sobolev 函数不再完全满足 Leibniz's rule

Sobolev 空间并不一定是个 Banach 代数.

证明：(1) ~ (3) 略.

(4)：对 $|\alpha|$ 归纳：

$|\alpha|=1$ $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$.

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx = \int \Big(\underbrace{D^\alpha(\zeta\phi)}_{\in C_c^\infty(U)} - D^\alpha \zeta \cdot \phi\Big) \cdot u \, dx.$$

搁一起

因 $\zeta\phi \in C_c^\infty(U)$，故 leibniz 法则正确.

$$\underset{\text{弱导数定义}}{=} -\int_U (\zeta(D^\alpha u)\phi + u(D^\alpha \zeta)\phi) \, dx$$

$$= -\int_U (\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta)\phi \, dx \qquad \therefore |\alpha|=1. \text{ 对.}$$

设 $|\alpha| \le l$ 都对. $l<k$. 则对 $|\alpha| = l+1$ 时. 设 $\alpha = \beta+\gamma$
$|\beta| = l$, $|\gamma| = 1$.

则 $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$,

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi \, dx = \int_U \underbrace{\zeta u}_{\in W^{k,p}} D^\beta (\underbrace{D^\gamma \phi}_{\in C_c^\infty}) \, dx.$$

$$\underset{\substack{\zeta u \text{ 的 } \beta \text{ 阶 弱导数定义} \\ \text{归纳假设}}}{=} (-1)^{|\beta|} \int_U \Big(\sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \zeta \, D^{\beta-\sigma} u\Big) \cdot D^\gamma \phi \, dx$$

$$\underset{\substack{D^\sigma\zeta \cdot D^{\beta-\sigma} u \text{ 的 } \gamma \text{ 阶 弱导数定义} \\ \text{归纳假设}}}{=} (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \zeta \cdot D^{\beta-\sigma} u) \cdot \phi \, dx$$

$$\underset{\alpha=\beta+\gamma}{\overset{\rho=\sigma+\gamma}{=}} (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\rho \zeta \, D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta \, D^{\alpha-\sigma} u)\phi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \Big(\sum_{\sigma \le \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta \, D^{\alpha-\sigma} u\Big) \phi \, dx.$$

□

(5) $\forall \phi \in C_c^\infty(U)$. $\operatorname{spt}\phi \subset V \subset\subset U$. $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$. $g^\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$. check

$$\int (\partial_{x_i}\phi) f g \, dx = \int_V f g \phi_{x_i} \, dx \overset{?}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i}$$

$$\underset{\substack{\text{需用到} \\ f^\varepsilon, g^\varepsilon \in C^\infty}}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_V (\partial_{x_i} f^\varepsilon g^\varepsilon + f^\varepsilon \partial_{x_i} g^\varepsilon)\phi \, dx.$$

$$= -\int (\partial_{x_i} f \cdot g + f \cdot \partial_{x_i} g)\phi \, dx.$$

$$= -\int_U (\partial_{x_i} f) \cdot g + f(\partial_{x_i} g))\phi \, dx$$

check: $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i} = \int_V fg\phi_{x_i}\,dx$

$$\int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i} - fg\phi_{x_i}\,dx$$

$$= \int_V f^\varepsilon (g^\varepsilon - g)\phi_{x_i}\,dx + \int_V (f^\varepsilon - f) g\phi_{x_i}\,dx.$$

$$\le \cancel{\int_V f^\varepsilon \phi_{x_i}\,dx}\ \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \|f^\varepsilon \phi_{x_i}\|_{L^{p'}(V)} + \|g\|_{L^\infty} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \|\phi_{x_i}\|_{L^{p'}(V)}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 把 L^∞ 提出来

$f\cdot g\in L^\infty$ 用在这儿

$\to 0$ as $\varepsilon\to 0^+$.

□

Thm 5.2.2 Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$ 是 Banach 空间 $1\le p\le\infty$. $k\in\mathbb{Z}_+$.

证明：仅欠证三角不等式与完备性.

(1°) 三角不等式：$u,v\in W^{k,p}(U)$. ~~$D^\alpha u = u_\alpha$~~

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha (u+v)\|_p$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p = \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

(2°) 完备性. 设 $\{u_m\}$ 为 $W^{k,p}(U)$ 中的柯西列. 则各阶弱导数 $\{D^\alpha u_m\}$ 为 $L^p(U)$ 中的柯西列. 因 L^p 是 Banach 空间. 则 $\forall\alpha$. $\exists u_\alpha\in L^p(U)$ s.t.

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \quad \text{in } L^p \quad \text{as } m\to\infty. \quad \forall|\alpha|\le k.$$

特别地. $u_m\to u$ in $L^p(U)$ ($\alpha=0$ 时).

余下证明：$u\in W^{k,p}(U)$. $D^\alpha u = u_\alpha$. $\forall|\alpha|\le k$.

$\forall\phi\in C_c^\infty(U)$

$$\int_U u\cdot D^\alpha\phi \underset{\text{用Hölder.}}{=} \lim_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha\phi = \lim_{m\to\infty}\int_U (-1)^{|\alpha|}\cdot D^\alpha u_m\cdot\phi\,dx.$$

$$\underset{\text{用Hölder.}}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_U u_\alpha\phi\,dx.$$

因 $\left|\int_U u_m D^\alpha\phi - \int_U u D^\alpha\phi\right| \le \|u_m - u\|_{L^p}\underbrace{\|D^\alpha\phi\|_{L^{p'}}}_{<\infty} \to 0$ as $m\to\infty$

□.

§5.3 Sobolev 函数的光滑逼近

套路 $\begin{cases} \text{内部：用磨光子作卷积} \\ \text{边界：用 } U \text{ 有界开, } \partial U \text{ 紧, 利用有限覆盖, 用有限个球覆盖边界} \end{cases}$

单位分解（局部化）.

1. 内部逼近

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开. $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p < \infty$

$U_\varepsilon = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Thm 5.3.1

$u \in W^{k,p}(U)$. $1 \le p < \infty$. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ in U_ε. 则

(1) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. $\forall \varepsilon > 0$

(2) $u^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$ $\varepsilon \to 0$.

证明：(1) $\cancel{\partial_{x_1} u^\varepsilon =}$ Fix $x \in U_\varepsilon$. h 充分小, $x + he_i \in U_\varepsilon$.

$$\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{u(y)}{h} \left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] dy$$

$(V \subset\subset U$, V 开$)$.

由于 $\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \underset{\text{一致}}{\rightrightarrows} \frac{1}{\varepsilon} \partial_{x_i} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$. on V.

从而 $\underbrace{\partial_{x_i} u^\varepsilon(x)}_{\text{经典导数}}$ $\exists$. 且 $= \int_U \partial_{x_i} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy = (\partial_{x_i} \eta_\varepsilon * u)(x)$

对任意阶导数同理. (1) 得证.

(2) Step 1: ~~弱导数也有~~ $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ in U_ε.

因为：$\partial_x^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_U u(y)\, \partial_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, dy$.

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U u(y)\, \partial_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

$$\overset{\text{弱导数定义}}{=} (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \int_U \partial_y^\alpha u(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \quad \text{in } U_\varepsilon.$$

$$= (D^\alpha u * \eta_\varepsilon)(x).$$

Step 2: 逼近. $\forall V \subset\subset U$. $\partial^\alpha u^\varepsilon \to \partial^\alpha u$ in $L^p(V)$. $\forall |\alpha| \le k$

$\cancel{\partial^\alpha u^\varepsilon(x)} \equiv \|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0$

□

Thm5.3.2: (全局逼近, 不到边).

U 有界开. $u \in W^{k,p}(U)$. $1 \le p < \infty$. 则 $\exists u_m \in \underbrace{C^\infty(U)}_{\text{不用 } C^\infty(\bar{U})} \cap W^{k,p}(U)$. s.t.

$u^m \to u$ in $W^{k,p}(U)$.

想法: 局部化. 化成 5.3.1, ~~即~~

5.3.1中. U_ε 在 $\varepsilon \to 0^+$ 时不断变大 (趋于U).

如何~~利用每~~将每个U_ε的结果, 累加成U上的结果?

将U分解成一堆U_ε套在一起 一段一段叠加.

无穷个累加, 如何保证光滑性?

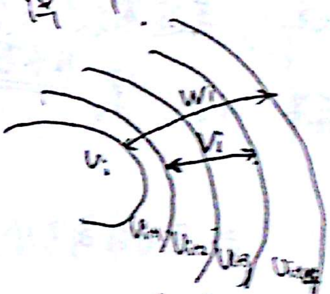
此过程会用到单位分解. → 单位分解的局部有限性质!

证明:

令 $U_i = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \frac{1}{i}\}$ $U = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$.

$V_i = U_{i+3} - \overline{U_{i+1}}$.

取 $V_0 \subset\subset U$. $U = \bigcup_{i=0}^\infty V_i$.



W_i 比 V_i 多出来的两小段, 是给卷积的支集留空余的. 因 $\eta * f$ 的支集 $\subseteq$ Spt η_ε + Spt f.

设 $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$ 是服从于 $\{V_i\}_1^\infty$ 的单位分解. 即.

$0 \le \zeta_i \le 1$ $\zeta_i \in C_c^\infty(V_i)$

$\sum_{i=0}^\infty \zeta_i = 1$ on U

每一点的小邻域内, 只有有穷个ζ_i不为0 ← locally finite!

如今. $\forall u \in W^{k,p}(U)$. $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ (by Thm 5.2.1)
Spt$(\zeta_i u) \subseteq V_i$.
→ 这步完成了局部化.

令 $u^i = \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ Fix $\delta > 0$. choose $\varepsilon_i > 0$ 充分小, 使

$\|u^i - u\zeta_i\|_{W^{k,p}(U)} \le \frac{\delta}{2^{i+1}}$ $i = 0, 1, \ldots$ ← locally approximate.

Spt $u^i \subseteq W_i = U_{i+4} - \overline{U_i} \supseteq V_i$

如此选取W_i的原因如上图.

令 $v=\sum_{i=0}^{\infty}u^i$. $v\in C^\infty(U)$，因每点的附近邻域均是有限和

$\forall V\subset\subset U$. $v=\sum_{i=0}^{\infty}u^i$ 为有限和.

$\}\to$ 利用 locally finite

从局部 (local)
$\downarrow$
整体 (global)

而 $u=\sum_{i=0}^{\infty}u\zeta_i$ 则 $\forall V\subset\subset U$.

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(V)}\le\sum_{i=0}^{\infty}\|u^i-\zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)}$$
$$\le\delta$$

$$\Rightarrow \sup_{V\subset\subset U}\|v-u\|_{W^{k,p}(V)}\le\delta \quad\Rightarrow\quad \|v-u\|_{W^{k,p}(U)}\le\delta.$$

让 δ 取遍 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\ldots$，即得一列 $\{u_m\}$

□

Thm 5.3.3（到边的逼近）. 设 U 有界, $\underbrace{\partial U\in C^1}$ (Lipschitz 足够.) $u\in W^{k,p}(U)$. $1\le p<\infty$.

则 $\exists u_m\in C^\infty(\bar{U})$. s.t. $u_m\to u$ in $W^{k,p}(U)$.

想法：$\bar{U}$ 的内部，其逼近已经被 5.3.2 完成. 剩下只须估计边界

由 U 有界 $\Rightarrow\partial U$ 紧 $\xrightarrow{\text{有限覆盖}}$ 只需有限个小开集盖住. (即下面证明中的 $V_1,\ldots V_N$).
再用一个大开集 V_0 盖住里面即可.

$\Rightarrow$ 只用在每个小 V_i $(1\le i\le N)$ 上做逼近.

证明：Fix $x^0\in\partial U$. 由于 $\partial U\in C^1$ 知. ~~∃r>0~~. $\longrightarrow$ 下面这句话是定义

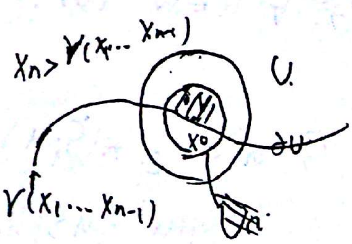
$\exists r>0$. 及 C^1 函数 $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ s.t.

$$U\cap B(x^0,r)=\{x\in B(x^0,r)\mid x_n>\gamma(x_1\ldots x_{n-1})\}$$

可能更换了坐标顺序

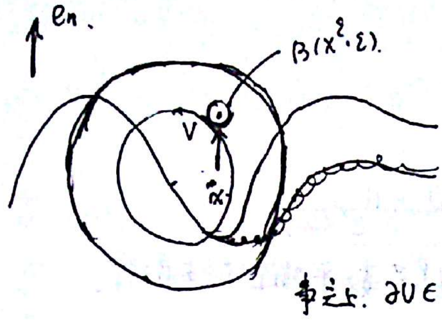
$$V=B(x^0,\tfrac{r}{2})\cap U.$$

令 $x^\varepsilon=x+\lambda\varepsilon e^n$ $x\in V$. $\varepsilon>0$.



则对固定的充分大的 $\lambda>0$. 球 $B(x^\varepsilon,\varepsilon)\subseteq U\cap B(x^0,r)$

$\forall x\in V$. $\forall\varepsilon$ 充分小, $x_n>\gamma(x_1\ldots x_{n-1})$



注: 在 $x^\varepsilon = x+\lambda\varepsilon e^n$ 中. λ,ε 的选取上.

为什么说 λ充分大?　　例如 $\lambda = \mathrm{Lip}\,\gamma + 2$.

事实上. $\partial U\in C^1$, ∂U紧 $\Rightarrow$ ∂U Lipschitz, 我们让 λ 比 γ 的 Lipschitz const 大一些就行!

边界Lipschitz保证了，它不会"剧烈振荡"，例如" "

这样. 我们把 x 往上"撑" $\lambda\varepsilon e_n$ 这么多, 再把 ε 取小, 就防止了 $B(x^\varepsilon,\varepsilon)$ 跑到 U 外面去.

这为下面用卷积~~...~~"腾出了足够多的空间"

下面开始逼近.

令 $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$.

$v^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * u_\varepsilon)(x)$. 则 $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar V)$.

claim: $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

若claim对的话, 我们在"盖住边界的小开集"上, 就完成了逼近, 再把内部估计加上去就好, 具体如下:

取 $\delta>0$, ~~固定~~.

因 ∂U 紧 故存在有限个点 $x_i^0\in\partial U$ $(1\le i\le N)$ $r_i>0$. s.t.

$\partial U\subseteq\bigcup_{i=1}^N B^0(x_i^0,\frac{r_i}{2})$.

记 $V_i = U\cap B^0(x_i^0,\frac{r_i}{2})$. 则每个 V_i 上. 由claim. 存在 $v_i\in C^\infty(\bar V_i)$. s.t. $\|v_i-u\|_{W^{k,p}(V_i)}\le\delta$

再取 $V_0\subset\subset U$ s.t. $U\subseteq\bigcup_{i=0}^N V_i$ 把内部包住. 且 $\exists\, v_0\in C^\infty(\bar V_0)$ $\|v_0-u\|_{W^{k,p}(V_0)}\le\delta$

如今 $\{V_0, B^0(x_1^0,\frac{r_1}{2}),\dots,B^0(x_N^0,\frac{r_N}{2})\}$ 是 $\bar U$ 的有限开覆盖,

设 $\{\zeta_i\}_0^N$ 是服从于如上开覆盖的单位分解. 令 $v = \sum_{i=0}^N v_i\zeta_i \in C^\infty(\bar U)$.

又因 $\sum\zeta_i=1$ 故 $\sum_0^N\zeta_i u = u$　　$\sum\zeta_i$~~$=1$...~~

从而 $\|D^\alpha u - D^\alpha v\|_{L^p(U)} \le \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)}$.

$\le C\sum_{i=0}^N \|v_i-u\|_{W^{k,p}(V_i)} = C(N+1)\delta$.

余下证明claim.

Claim的证明：

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

第2项由L^p范数平移连续性即得.

第一项：只证 $\alpha=0$ 的 case. 其余类似.

$$v^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) - u(x^\varepsilon).$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)} \eta\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)\cdot u(x+\lambda\varepsilon e^n - w)\,dw - u(x+\lambda\varepsilon e^n).$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)} \eta\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)\big(u(x+\lambda\varepsilon e^n - w) - u(x+\lambda\varepsilon e^n)\big)\,dw.$$

$$\overset{w/\varepsilon = z}{=} \int_{B(0,1)} \eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\,dz.$$

$$\|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} = \|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(U\cap B(x^0,\frac{r}{2}))}$$

$$= \Big\| \big\|\eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\big\|_{\underset{\text{in } B(0,1)}{L^1_z}} \Big\|_{L^p_x \text{ in } U\cap B(x^0,\frac{r}{2})}$$

积分Minkowski不等式

$$\le \Big\| \big\|\eta(z)\big(u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\big)\big\|_{L^p_x} \Big\|_{L^1_z}$$

$$= \Big\| \eta(z)\, \|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \Big\|_{L^1_z}$$

$$= \int_{B(0,1)} |\eta(z)|\cdot \|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x}\,dz.$$

$\varepsilon\to0^+$时. 由L^p norm 平移连续性 $\|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \to 0.$

又：$\|\eta(z)\|_{L^\infty} = 1$

$\|u(x+\lambda\varepsilon e_n - \varepsilon z) - u(x+\lambda\varepsilon e_n)\|_{L^p_x} \le 2^p \|u\|_{L^p_x} < \infty$

所以. 由控制收敛定理 知. 上述积分 $\to 0$ as $\varepsilon\to0^+$. $\square$

claim的证明 ~~由直接计算可得~~

~~$\forall |\alpha| \le k$~~

~~$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}$~~

~~由L^p函数平移连续性即得.~~

~~由Thm 5.2.1 得~~

~~$\to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$~~

□

下面讨论Sobolev函数的链式法则, 证明中需用到前面结果

Thm 5.3.4 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开, $1 \le p \le +\infty$.

(1) 若 $f \in W^{1,p}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, ~~$F(0)=0$~~ 则 $F(f) \in W^{1,p}(U)$. → U无界才要 $F(0)=0$.

且 $\partial_{x_i} F(f) = F'(f)\,\partial_{x_i} f$ $\mathcal{L}^n$-a.e. $1 \le i \le n$.

(2) 若 $f \in W^{1,p}(U)$. 则 $f^{\pm}$, $|f| \in W^{1,p}(U)$.

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f>0\} \\ 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f \le 0\} \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f \ge 0\} \\ -Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f < 0\} \end{cases}$$

(3). $Df = 0$ on $\{f=0\}$ $\mathcal{L}^n$-a.e.

证明: (1) 设 $\phi \in C_c^\infty(U)$. $\operatorname{spt}\phi \subseteq V \subset\subset U$ $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$.

$$\int_U F(f)\,\phi_{x_i}\,dx = \int_V F(f)\,\phi_{x_i}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_V F(f^\varepsilon)\,\phi_{x_i}\,dx$$

check: $\left|\int_V (F(f^\varepsilon) - F(f))\phi_{x_i}\,dx\right|$

$\le \int_V \|F'\|_\infty |f^\varepsilon - f| \cdot |\phi_{x_i}|\,dx$

$\le \|F'\|_\infty \|f^\varepsilon - f\|_{L^p} \|\phi_x\|_{L^{p'}}$

$\to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$ on V.

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V F'(f^\varepsilon)\,\partial_{x_i} f^\varepsilon \cdot \phi$$

↑ 分部积分.

$$= -\int_V F'(f)\,\partial_{x_i} f \cdot \phi\,dx = -\int_U F'(f)(\partial_{x_i} f)\phi\,dx.$$

↑ 类似 5.2.1 §9(5) check 抽一项进去

$|F(f) - F(0)| \le \|F'\|_{L^\infty} |f|$ $\xRightarrow{f \in W^{1,p}}$ $F(f) - F(0) \in L^p$.

若 $F(0)=0$ 或 ~~且有界~~ $\mathcal{L}^n(U) < \infty$ $\Rightarrow F(f) \in L^p$

又: $\partial_i F(f) = F'(f)\,\partial_i f \in L^p \Rightarrow F(f) \in W^{1,p}$.

(2). Fix $\varepsilon>0$. 令 $F_\varepsilon(r)=\begin{cases}\sqrt{r^2+\varepsilon^2}-\varepsilon & r\geq 0\\ 0. & r<0\end{cases}$

则 $F_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R})$. $F_\varepsilon'\in L^\infty(\mathbb{R})$.

故由(1). $\forall \phi\in C_c^\infty(U)$.

$$\int_U F_\varepsilon(f)\,\partial_{x_i}\phi\,dx=-\int_U F_\varepsilon'(f)\,\partial_{x_i}f\cdot\phi\,dx$$

$$\varepsilon\to 0.\quad \int_U f^+\phi_{x_i}\,dx=-\int_{\underbrace{U\cap\{f>0\}}_{\leq 0\text{部分不起作用}}}\partial_{x_i}f\,\phi$$

故(2)的 Df^+ 得证.

而 $f^-=(-f)^+$. $|f|=f^++f^-$ 故其余可得.

(3) 由(2) 立得. □

~~另一个利用逼近的例子如~~下:

~~Thm 5.3.5 (Lipschitz = $W^{1,\infty}$)~~.

~~设 $f: U\to\mathbb{R}$~~

§5.4 迹.

设 $\partial U\in Lip$ (or C^1). $u\in W^{1,p}(U)$.

· 若 $u\in C(\bar U)$ 则 $u|_{\partial U}$ 是有定义的. 但若 $u\in W^{1,p}(U)$. 由于 $\mathcal{L}^n(\partial U)=0$. 我们直接谈论 $u|_{\partial U}$ 没有意义. 但迹定理保证了其在积分式中的意义.

Thm 5.4.1. U bdd 开. ∂U Lipschitz $1\leq p<+\infty$

(1) $\exists$ 有界线性算子 $T: W^{1,p}(U)\to L^p(\underbrace{\partial U; \mathcal{H}^{n-1}}_{\partial U\text{上的 } n-1 \text{ 维 Hausdorff 测度}})$ s.t. $Tf=f$ on ∂U. $\forall f\in W^{1,p}(U)\cap C(\bar U)$.

(2) 进一步地, $\forall \phi\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. $f\in W^{1,p}(U)$. 有

$$\int_U f\,\mathrm{div}\,\phi\,dx=-\int_U Df\cdot\phi\,dx+\int_{\partial U}(\phi\cdot\underbrace{\vec n}_{\partial U\text{的单位外法向}})\,Tf\cdot d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(分部积分式推广).

Def：如上的 Tf 称作 f 在 ∂U 上的迹，其~~定义~~取值域可以在 $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial U$ 零测的意义下修改。

Rmk：事实上，$\forall\ \mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $x\in\partial U$,

$$\fint_{B(x,r)\cap U} |f-Tf(x)|\,dy \to 0 \quad \text{as } r\to 0.$$

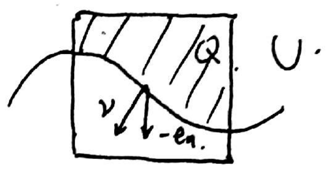
从而 $Tf(x)=\lim\limits_{r\to 0}\fint_{B(x,r)\cap U} f\,dy$　（证明需用 Coarea Formula，见 Evans 的 Measure Theory and Fine Properties of Functions，Ch Section 5.3）。

证明：先设 $f\in C^1(\bar U)$，由 $\partial U\in \mathrm{Lip}$ 知，$\forall x\in\partial U$，$\exists r>0$，$\exists$ Lip 函数 $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$

使得 $U\cap Q(x,r)=\{y\mid \gamma(y_1\cdots y_{n-1})<y_n\}\cap Q(x,r)$。（$x$ 为中心，r 为边长的方体。）

记 $Q=Q(x,r)$。

若有 $f\equiv 0$ on $U-Q$，注意到



~~$-e_n\cdot\nu \geq \left(1+(\mathrm{Lip}\,\gamma)^2\right)^{-\frac12}$~~

~~$\cos\langle -e_n,\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\langle -e_n}}$~~

$$-e_n\cdot\nu = \cos\langle -e_n,\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\langle -e_n,\nu\rangle}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{Lip}\,\gamma)^2}} \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. on } Q\cap\partial U \quad \cdots(*)$$

固定 $\varepsilon>0$，令 $\beta_\varepsilon(t)=\sqrt{t^2+\varepsilon^2}-\varepsilon$，$t\in\mathbb{R}$。

则
$$\int_{\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)\,d\mathcal{H}^{n-1} \overset{\text{由}(*)}{\leq} C\int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)(-e_n\cdot\nu)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= C\int_{Q\cap\partial U}\beta_\varepsilon(f)\cdot(-\nu^n)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\overset{\text{Gauss-Green}}{=} -C\int_{Q\cap U}\partial_{y_n}\big(\beta_\varepsilon(f)\big)\,dy \leq C\int_{Q\cap U}|\beta_\varepsilon'(f)|\cdot|Df|\,dy$$

$$\overset{|\beta_\varepsilon'|\leq 1}{\leq} C\int_U |Df|\,dy$$

$\varepsilon\to 0^+$ 由 $f\in C^1$ 知 $\int_{\partial U} f\,d\mathcal{H}^{n-1}\leq C\int_U |Df|\,dy$

若 $f\neq 0$ in $U-Q$. 我们将 ∂U 用有限个小方块覆盖，类似于逼近到边的定理 (用单位分解).

有 $\int_{\partial U}|f|\,d\mathcal{H}^{n-1}\le C\int_U |Df|+|f|\,dy.\quad \forall f\in C^1(\bar U)$

$1<p<\infty$ 时 $|f|$ 换成 $|f|^p$

$$\int_{\partial U}|f|^p\,d\mathcal{H}^{n-1}\le C\int_{U} |Df|\cdot|f|^{p-1}+|f|^p\,dy$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} C\int_U |Df|^p+|f|^p\,dy\qquad \forall f\in C^1(\bar U).$$

如今. $\forall f\in C^1(\bar U)$. 令 $Tf=f|_{\partial U}$ 即为所求之迹.

对 $f\in W^{1,p}(U)$. 上述 $C^1(\bar U)\to L^p(\partial U;\mathcal{H}^{n-1})$ 可连续延拓为

$W^{1,p}(U)\to L^p(\partial U;\mathcal{H}^{n-1})$ 的有界线性算子 (由逼近到边) +B.L.T.定理.

且 $Tf=f|_{\partial U}\quad \forall f\in W^{1,p}(U)\cap C(\bar U)$.

从而 (1) 获证

(2) 用一列 $\{f_m\}\in C^1(\bar U)$ 逼近 即可.

对 f_m. 由散度定理即有

$$\int_U f_m \operatorname{div}\phi\,dx=-\int_U Df_m\cdot\phi\,dx+\int_{\partial U}(\phi\cdot\nu)Tf_m\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$m\to\infty$ 时. 估计:

$$\left|\int_U f_m\operatorname{div}\phi-\int_U f\operatorname{div}\phi\right|\le\int_U|f_m-f||\operatorname{div}\phi|$$

$$\le\|f_m-f\|_{L^p}\|\operatorname{div}\phi\|_{L^{p'}}\to 0.$$

等式右边同理. Tf 那项 in L^p norm 利用 $\|Tf\|_{L^p(\partial U)}\le C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$ 控制.

□

Thm 5.4.2. U bdd. $\partial U \in C^1$

$u \in W^{1,p}(U)$. 则 $u \in W_0^{1,p}(U) \Leftrightarrow Tu=0$ on ∂U. (零迹定理).

证明: $\Rightarrow$. $u \in W_0^{1,p}(U)$

则 $\exists u_m \in C_c^\infty(U)$ @ $u_m \to u$ in $W^{1,p}(U)$

$Tu_m = 0$ on ∂U

又因 $T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ 有界. 故 $Tu=0$.

$\Leftarrow$: $Tu=0$ on ∂U.

~~①边界拉直~~: 不妨直接设 $\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+). \text{ 且支集}\subset\text{于 } \overline{\mathbb{R}^n_+}. \\ Tu=0 \quad \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$

故 $\exists u_m \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. s.t. $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ ← 逼近定理

$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$

如今. 若 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \geq 0$.

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |\partial_{x_n} u_m(x', t)|\, dt.$$

p次方. 积分

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' \cancel{+ x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p dx'\,dt} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int_0^{x_n} |\partial_{x_n} u_m(x', t)|\, dt\Big)^p dx'\Big)$$

积分 Minkowski

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + C\Big(\int_0^{x_n}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_{x_n} u_m(x', t)|^p dx'\Big)^{\frac{1}{p}} dt\Big)^p$$

Hölder

$$\leq (\qquad\qquad) + C.\Big(\int_0^{x_n} 1^{p'}\Big)^{\frac{p}{p'}}\Big(\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_{x_n} u_m(x', t)|^p dx'\,dt\Big)^{\frac{p}{p}}$$

$$= C\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p dx'\,dt\Big).$$

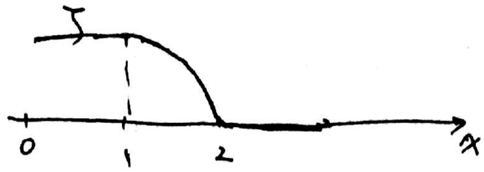
$m \to +\infty$ 有 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx'\,dt$.

…(*) a.e. $x_n > 0$

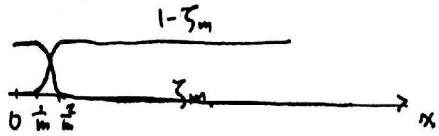
下面 设 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ s.t. $\zeta = 1$ on $[0,1]$

$= 0$ on $(2,+\infty)$.

$0 \le \zeta \le 1$.



$$\begin{cases} \zeta_m(x) := \zeta(m x_n). & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ w_m = u(x)(1-\zeta_m) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_{x_n} w_m = \partial_{x_n} u (1-\zeta_m) - m u \zeta' \\ D_{x'} w_m = D_{x'} u (1-\zeta_m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \le C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p \, dx \quad \to I_1$$

$$+ C m^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \, dx' \, dt. \quad \to I_2.$$

$m \to \infty$ 时 $I_1 \to 0$. 因为 $\zeta_m \neq 0$ on $[0, \frac{2}{m}] \ni x_n$.

$$I_2 \le C m^p \underbrace{\left(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} \, dt\right)}_{\text{消去了}} \left(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \, dx' \, dx_n\right).$$

用(*).

$$\le C \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \, dx' \, dx_n \longrightarrow 0. \quad \text{as } m \to \infty$$

从而 $Dw_m \longrightarrow Du$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$.
又 $w_m \longrightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$
$\Big\} \Rightarrow w_m \longrightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

~~2 当 $w_m = 0$ $(0 < x_n <$~~

但 $0 < x_n < \frac{1}{m}$ 时 $w_m = 0$. u_m 只是 $W^{1,p}$ 函数. 再令 $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ 为 w_m 的光滑逼近即可. (用对角线法则).

这样 $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ $\Rightarrow u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$

□.

§5.5 延拓

$1\le p\le\infty$　U 有界开

Thm 5.5.1　$\partial U\in C^1$. 设 V 为有界开集 $U\subset\subset V$. 则存在有界线性算子

$$E: W^{1,p}(U)\to W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

s.t. $\forall u\in W^{1,p}(U)$,

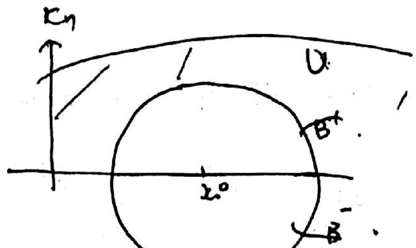
$$\begin{cases}(1)\ Eu=u \text{ a.e. in } U.\\ (2)\ \operatorname{spt} Eu\subseteq V.\\ (3)\ \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.\end{cases}$$

证明：

Step 1: 边界拉直后的情况

Fix $x^0\in\partial U$. 并设 ∂U 在 x^0 的附近平坦，含于 $\{x_n=0\}$

设 ∃ 开球 B，以 x^0 为中心，r 为半径，s.t. $\begin{cases}B^+=B\cap\{x_n\ge 0\}\subseteq\bar U\\ B^-=B\cap\{x_n\le 0\}\subseteq\mathbb{R}^n-U\end{cases}$



先设 $u\in C^1(\bar U)$.

令 $\bar u(x)=\begin{cases}u(x) & x\in B^+\\ -3u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)+4u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2}) & x\in B^-\end{cases}$

claim: $\bar u\in C^1(B)$.　只须计算 $\{x_n=0\}$ 处的导数.

设 $u^\pm:=\bar u|_{B^\pm}$.

$$\partial_{x_n}u^-(x)=3\partial_{x_n}u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)-2\partial_{x_n}u(x_1,\dots,x_{n-1},-\tfrac{x_n}{2})$$

on $\{x_n=0\}$　$\Rightarrow\begin{cases}\partial_{x_n}\bar u^-(x)=\partial_{x_n}u^+(x)\\ u^+=u^-\\ \partial_{x_i}u^+=\partial_{x_i}u^-\end{cases}$　in $\{x_n=0\}$　$\Rightarrow$ $u\in C^1(B)$.

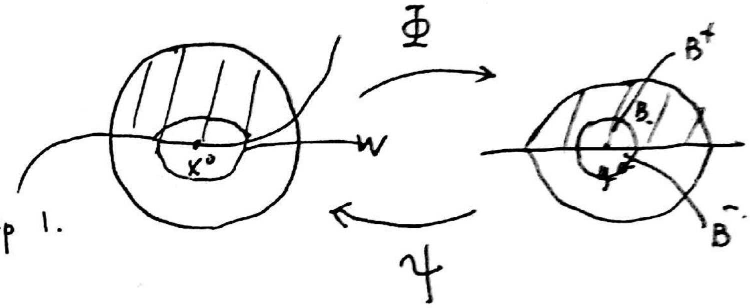
$$\Rightarrow\ \|\bar u\|_{W^{1,p}(B)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

Step 2: 拉回去.　若对一般的 $\partial U\in C^1$，

则 ∃ C^1 mapping Φ，其逆为 Ψ　s.t. Φ 将 ∂U 在 x^0 附近拉直.

令 $y=\Phi(x)$. $x=\Psi(y)$ $u'(y)=u(\Psi(y))$

取 B B^+ · B^- 如右图



则 u' 可从 B^+ 上延拓到 B 上, 成为 $\bar{u}'$. 且 $\bar{u}'\in C'$ by step 1.

且 $\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)}\le c\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$

令 $W=\Psi(B)$. 则 u 可延拓到 W 上, 成为 $\bar{u}$. $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)}\le c\|u\|_{W^{1,p}(W)}$

(注: 成立这样讨论是因为

Step 3: ~~延拓到 R~~ 考虑整个 ∂U (局部 → 整体). (套路: 单位分解).

因 ∂U 紧, 则 $\exists\, x_1^0,\dots,x_N^0\in\partial U$, 开集 $W_1,\dots,W_N$,

s.t. u 在 W_i 上的延拓为 $\bar{u}_i$.

$\partial U\subseteq\bigcup_{i=1}^N W_i$.

再取 $W_0\subset\subset U$. s.t. $U\subseteq\bigcup_{i=0}^N W_i$

设 $\{\zeta_i\}_0^N$ 是服从于 $\{W_i\}_0^N$ 的 P.O.U. 令 $\bar{u}=\underline{\sum_{i=0}^N\zeta_i\bar{u}_i}$ $(\bar{u}_0=u)$

希望这是所求

$\Rightarrow$ $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

且 $\exists V$, $\operatorname{spt}\bar{u}\subset V\supset\supset U$.

Step 4: 逼近: 以上. 令 $Eu=\bar{u}$, 即得到了 $u\in C^\infty(\bar{U})$

已假设 $1\le p<\infty$, 则 $\|Eu_m-Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le c\|u_m-u_l\|_{W^{1,p}(U)}$

$\forall u\in W^{1,p}(U)$ $\exists\, u_m\to u$ in $W^{1,p}(U)$
$\in C^\infty(\bar{U})$

$\Downarrow$

再由 $Eu_m\longrightarrow\bar{u}=:Eu$.
不依赖 u_m 选取. □

~~proof: 利用 $W^{1,\infty}$ Lipschitz 证明~~.

~~见 Measure Theory 和 Fine Properties of Functions~~.

Rmk: $k>2$ 时 以上构造不适用.

§5.6. Sobolev 次~~临界~~嵌入.

Gagliardo Sobolev 不等式 $1\le p<n$ 时

能否找到 $q\in[1,\infty)$. s.t. $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Motivation: 如何确定 q ? $\longrightarrow$ 套路: scalling invariant

choose $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u\neq 0$.

对 $\lambda>0$. 令 $u_\lambda(x)=u(\lambda x)$ $x\in\mathbb{R}^n$.

对 $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u_\lambda|^q dx=\int_{\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|^q dx$$
$$=\frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Du_\lambda|^p dx=\lambda^p\int_{\mathbb{R}^n}|Du(\lambda x)|^p dx$$
$$=\lambda^{p-n}\int_{\mathbb{R}^n}|Du(y)|^p dy$$

对 λ $\|u\|_q\le C\|Du\|_p$. 有

$$\|u\|_{L^q}\le C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

希望 不能依赖于 λ

$$\Rightarrow 1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0.\quad\Rightarrow\quad q=\frac{np}{n-p}=:p^*.$$

Thm 5.6.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式).

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\quad \forall u\in C_c^1(\mathbb{R}^n)\quad 1\le p<n.$$

证明: 先证 $p=1$ 时. 即 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. $\forall u\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

当 $1<p<n$ 时. 令 $v=|u|^\gamma$. (γ 待定) $\gamma>1$.

则
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma\cdot\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\int_{\mathbb{R}^n}|D|u|^\gamma|\,dx=\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|Du|\,dx.$$
$$\le\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Thm 5.6.3 ($W^{k,p}$嵌入).

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开，$\partial U \in C^1$. $u \in W^{k,p}(U)$. $k < \frac{n}{p}$. $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

则 $u \in L^q(U)$. $\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}$.

证明: $k < \frac{n}{p}$. 则 $\forall |\alpha| \leq k$. 因 $D^\alpha u \in L^p$. 故由GNS不等式.

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)} \quad \forall |\beta| \leq k-1$$

$\Rightarrow u \in W^{k-1,p^*}(U)$.

重复 $\Rightarrow u \in W^{k-2,p^{**}}(U) \Rightarrow \cdots\cdots u \in W^{0,p^{*k个*}}(U) = L^q(U)$. $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$

□.

Thm 5.6.2 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界开. $\partial U \in C^1$. $1 \leq p < n$. $u \in W^{1,p}(U)$. 则 $u \in L^{p^*}(U)$

$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

证明: 设 $\partial U \in C^1$ 则 $\exists$ 延拓 $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$\bar{u} = u$ in U.

Spt $\bar{u}$ 紧.

$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

$\bar{u}$ 紧支 $\therefore$ $\exists u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \bar{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

由 Thm 5.6.1 $\|u_m - u_l\|_{p^*} \leq C\|Du_m - Du_l\|_p \to 0$.

$\Rightarrow u_m \to \bar{u}$ in L^{p^*}.

又 $\|u_m\|_{p^*} \leq C\|Du_m\|_p$ $\quad m \to +\infty$

故. $\|\bar{u}\|_{L^{p^*}} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p}$ □.

于是，我们取 $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} \Rightarrow \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$. 这样 $\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$.

从而化为 $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

余下证明 $p=1$ 的情况

由于 u 紧支，故，$\forall\, 1\le i\le n$，$x\in\mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1 \ldots x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dy_i$$

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1 \ldots y_i, \ldots x_n)|\, dy_i \qquad 1\le i\le n$$

~~x_2 有 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函~~

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1 \ldots y_i \ldots x_n)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

~~在~~ 对 x_1 积分.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

~~积分Minkowski~~ ~~Fubini~~ $n-1$ 元Hölder $\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$

再对 x_2 积分，

$$\iint |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1\, dx_2 \le \cancel{\left(\iint |Du|\, dy_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i\ne 2} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2}$$

$$= \int \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_2.$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{n-1\text{ 项. 用Hölder. }(n-1\text{ 元})} dx_2$$

$$\le \left(\qquad\qquad\qquad\right) \cdot \left(\iint |Du|\, dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \prod_{i=3}^{n}\left(\iiint |Du|\, dx_1 dx_2\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

重复以上过程 $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int \cdots \int |Du|\, dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$
$= \left(\int |Du|\, dx\right)^{n/n-1}$

Thm 5.6.3. ($W_0^{1,p}$ 估计)

U 有界开. $u\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. $1\le p<n$. 则 $\|u\|_{L^q(U)}\le \|Du\|_{L^p(U)}$ $\forall q\in[1,p^*]$

目 特别: $\|u\|_{L^p(U)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}$.

证明: $u\in W_0^{1,p}(U)$. 则 $\exists\{u_m\}\in C_c^\infty(U)$ $(m\in Z_+)$

s.t. $u_m\to u$ in $W^{1,p}(U)$.

在 $\mathbb{R}^n-\bar{U}$ 上. 对 u_m 进行零延拓

由 Thm 5.6.1 有 $\|u\|_{L^{p^*}(U)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}$.

又 $\mu(U)<+\infty$. 由 Hölder 不等式即有 thm 5.6.3 成立. $1\le q\le p^*$

□

Rmk: $p=n$ 时. $u\in W^{1,n}(U) \underset{n>1}{\not\Rightarrow} u\in L^\infty(U)$.

eg: $u(x)=\log\log(1+\frac{1}{|x|})$. $U=\overset{\circ}{B}(0,1)$. $u\notin L^\infty(U)$ 显然.

$$\text{而 } \partial_{x_i}u(x)=\frac{1}{\log(1+\frac{1}{|x|})}\cdot\frac{-\frac{x_i}{|x|^3}}{1+\frac{1}{|x|}}$$

$$\Rightarrow |Du(x)|=\frac{1}{\log(1+\frac{1}{|x|})}\cdot\frac{\frac{1}{|x|^2}}{1+\frac{1}{|x|}}$$

$$=\frac{1}{|x|(|x|+1)\log(\frac{1}{|x|}+1)}$$ (在0处没有奇性).

$\Rightarrow |Du(x)|\in L^n(U)$. 而 $u(x)\in L^n(U)$ 显然

□.

Rmk: $\overset{k=2}{\cancel{k\ge 1}}$. $U=\mathbb{R}^n$ 时, 却有 L^∞ 的嵌入 (见 20 题).

↑

用 Fourier 刻画.

Morrey 嵌入. $n<p<\infty$, 我们证明, modify 一个零测集之后, $u\in W^{1,p}(U)$ 事实上是 Hölder 连续的.

Thm 5.6.4 (Morrey 不等式). $n<p\le\infty$. 则 $\exists C$. $\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. ($\forall u\in C^1(\mathbb{R}^n)$. $\gamma=1-\frac{n}{p}$)

证明: 需要证明 2 条: ① $|u(x)-u(y)|\lesssim |x-y|^{\gamma}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ $(x\ne y)$

② $|u(x)|\lesssim \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.

Proof of ①: $r:=|x-y|$. 记 $W=B(x,r)\cap B(y,r)$.

$$|u(x)-u(y)| \underset{\uparrow}{=} ⨍_W |u(x)-u(y)|\,dz$$

硬写成常数的积分平均(注意 x,y 与 z 无关).

$$\le ⨍_W |u(x)-u(z)|\,dz + ⨍_W |u(y)-u(z)|\,dz.$$

$$\cdot\ ⨍_W |u(x)-u(z)|\,dz = \frac{|B(x,r)|}{|W|}\cdot\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|u(x)-u(z)|\,dz.$$

$$\le C\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|u(x)-u(z)|\,dz.$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{z=x+tw}{=}} \frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}|u(x)-u(x+tw)|\,t^{n-1}\,dt\,dS_w$$

$$=\frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}\left|\int_0^t\frac{d}{ds}u(x+sw)\,ds\right|t^{n-1}\,dt\,dS_w.$$

放大

$$\le\frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{\partial B(0,1)}\int_0^r\frac{|Du(x+sw)|\,s^{n-1}}{s^{n-1}}\,ds\ t^{n-1}\,dt\,dS_w$$

$$\overset{y=x+sw}{=}\frac{C}{|B(x,r)|}\int_0^r\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\ t^{n-1}\,dt.$$

$$=\underbrace{\frac{C}{|B(x,r)|}\cdot\frac{r^n}{n}}_{\approx 1.}\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy$$

$$\le C'\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy\le C\|Du\|_{L^p(B(x,r))}\cdot\left\|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right\|_{L_y^{p'}(B(x,r))}.$$

而 $\cancel{\frac{1}{|x|^{n-1}} \in L^{p'}(B(0,r))} \quad \cancel{\Longleftrightarrow (n-1)p'}$

$$\left\| \frac{1}{(x-y)^{n-1}} \right\|_{L^{p'}(B(x,r))}$$

$$= \left(\int_{\partial B(0,1)} \int_0^r \frac{1}{\rho^{(n-1)p'}} \rho^{n-1} \, d\rho \, dS_w \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$$

$\Longleftrightarrow \quad (n-1)(p'-1) < 1.$

$\Longleftrightarrow \quad p > n \qquad \left(\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} \right).$

故: $\displaystyle \fint_W |u(x) - u(z)| \, dz \le C \underbrace{r^{1-\frac{n}{p}}}_{\left\| \frac{1}{|\cdot|^{n-1}} \right\|_{L^{p'}(B(x,r))}} \|Du\|_{L^p}$ $\quad \cancel{(\ldots 1 - \frac{n}{p})}$ ✓

Proof of ②:

$$|u(x)| = \frac{1}{|B(x,1)|} \int_{B(x,1)} |u(x)| \, dy$$

$$\le C \Big(\underbrace{\int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| \, dy}_{\text{与①类似}} + \underbrace{\int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy}_{\text{用 } u \text{ 的 } L^p \text{ norm 控制}} \Big).$$

$$\int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy = \int |\chi_{B(x,1)} u(y)| \, dy$$

$$\le \|\chi_{B(x,1)}\|_{p'} \|u\|_p \le C \|u\|_p.$$

$$\int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| \, dy \underset{\text{与①类似}}{\le} C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

$$\le C \|Du\|_p \, \|(x-y)^{1-n}\|_{L^{p'}(B(x,1))}$$

$$\le C \|Du\|_p$$

于是 $|u(x)| \le \cancel{\|Du\|_p \, W} \ \|u\|_{W^{1,p}}$ 由①②即得 Morrey 不等式 □

Thm 5.6.5 (Morrey 嵌入) U 有界开 $\partial U \in C^1$ $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$. 且

$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ (延拓 + 光滑逼近)

证明: ① 由延拓定理, $u \in W^{1,p}(U)$ 延拓成 $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases} \bar{u} = u \quad a.e. \quad in \quad U \\ Spt\, \bar{u} \subset V \subset\subset \mathbb{R}^n \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{cases}$$

② 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑函数. $\bar{u}_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\bar{u}_m \to \bar{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

由 Morrey 不等式: $\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.

又由 Hölder space 完备. 故 $\exists u^* \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ s.t.,

$u_m \to u^*$ in $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

从而 $\bar{u} = u^*$ a.e. in U.

u^* 为 u 的连续修正.

$\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}}$

$m \to +\infty$ 有.

$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. $n < p < \infty$.

$p = \infty$ 是易见的. □

Thm 5.6.6. (Morrey 嵌入). 若 $k > \frac{n}{p}$. U 有界开 $k \in \mathbb{Z}_+$. $\partial U \in C^1$.

$u \in W^{k,p}(U) \Rightarrow$ $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$. $\gamma = \begin{cases} 1 - \{\frac{n}{p}\} & \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{任何 } 0,1 \text{ 之间的正数}. & \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}$

Omit the proof. □

$\leq C \cdot \|Du_m\|_{L^1(V)} \cdot \varepsilon \underset{\text{Hölder}}{\leq} C\|Du_m\|_{L^p(V)}\,\varepsilon$ （对 $u_m \in W^{1,p}(V)$ 直接用逼近定理）

$\therefore \cancel{\|Du_m\|_{L^1(V)}}\ \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq C\varepsilon$.

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta}\ \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \qquad 0\leq\theta\leq 1 \quad \left(\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{p^*}=\frac{1}{q}\right)$$

$$\leq \cancel{\|u_m^\varepsilon\ C\varepsilon\|} \; C\varepsilon^\theta\ \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*}^{1-\theta}$$

$$= C\varepsilon^\theta\ \|u_m * \eta_\varepsilon - u_m\|_{p^*}^{1-\theta}$$

$$\leq C\varepsilon^\theta\left(\|u_m * \eta_\varepsilon\|_{p^*} + \|u_m\|_{p^*}\right)^{1-\theta}$$

$$\underset{\text{卷积Young}}{\leq} C\varepsilon^\theta\left(\|u_m\|_{L^{p^*}}\|\eta_\varepsilon\|_{L^1} + \|u_m\|_{p^*}\right)^{1-\theta}$$

$$\leq C'\varepsilon^\theta \to 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+ \quad \text{对 } m \text{ 一致}.$$

故对任何 $\delta>0$，$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} < \delta$，关于 m 一致.

Step 2：对固定 $\varepsilon > 0$.

(2.1) $\{u_m^\varepsilon\}$ 一致有界：

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\,|u_m(y)|\,dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\ \|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} C\|\eta\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^n}\cdot\|u_m\|_{L^q(V)}$$

$$\leq C\frac{1}{\varepsilon^n} < +\infty.$$

与 m 无关.

(2.2) 等度连续.

$$|Du_m^\varepsilon(x)| = |D\eta_\varepsilon * u_m| \leq \|D\eta_\varepsilon\|_\infty\ \|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\leq C\varepsilon^{-(n+1)} \quad ✓$$

由 Ascoli-Arzela 引理，$\exists \{u_m^\varepsilon\}$ 子列 $u_{m_k}^\varepsilon$ 在 L^∞ 中收敛.

$\Rightarrow u_{m_k}^\varepsilon$ 在 $C(U)$ 中收敛. 欲证 L^q 收敛，只用证 L^q-Cauchy.

这由 $\{u_{m_k}^\varepsilon\}$ 在 L^∞ Cauchy + U 有界 即得. ✓

~~下节 §5~~

Rmk：$p=n$ 时. Sobolev空间 $W_0^{1,n}(U)\hookrightarrow L^{\varphi}(U)$. (orlicz空间)

其中. $\varphi(x)=e^{|x|^{\frac{n}{n-1}}}-1$，$L^{\varphi}=\{f\text{ 可测}\mid \int_U \varphi\left(\frac{|f(x)|}{M}\right)d\mu<+\infty,\ \text{for some } M>0\}$

$\|f\|_{L^{\varphi}}:=\inf\{M>0 \mid \int_X \varphi\left(\frac{|f(x)|}{M}\right)d\mu\}<+\infty$.

证明见 Gilbarg, Trudinger：Elliptic PDE of 2nd order. Ch 7.8~7.9 □

§5.7 紧嵌入.

Def：X、Y Banach. 称 $X\hookrightarrow\hookrightarrow Y$. 若

(1) $\|u\|_Y\le C\|u\|_X$ $\forall u\in X$.

(2). X中任何有界集，在Y中相对紧(列紧).

Thm 5.7.1 (Rellich-Kondrachov).

设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 有界开 $\partial U\in C^1$ $1\le p<n$. 则 $W^{1,p}(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U)$. $1\le q<p^*$.

证明：只用验证紧性，嵌入由GNS不等式保证.

⇑

（证）$W^{1,p}$ 中的有界序列是 L^q 中的 ~~收敛的~~ 列紧序列

⇑

Ascoli-Arzela 引理 ⇐ $\begin{cases}\text{一致有界}\\ \text{等度连续}\end{cases}$ $\boxed{\text{check these!}}$

设 $\{u_m\}$ 在 $W^{1,p}(U)$ 中有界，要证 $\exists\{u_{m_k}\}$ converges in L^q.

Step 1：将 u_m 光滑化，~~证明~~

$u_m^\varepsilon:=\eta_\varepsilon * u_m$ 要证 $\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)}\to 0$. as $\varepsilon\to 0$ uniformly in m.

若 u_m smooth

$$|u_m^\varepsilon-u_m|\le\int\eta_\varepsilon(y)\,|u_m(x-y)-u_m(x)|\,dy$$

$$\le\int|\eta_\varepsilon(y)|\cdot\left|\int_0^1\frac{d}{dt}u_m(x-ty)\,dt\right|\,dy$$

$$\le\int_0^1\int|\eta_\varepsilon(y)|\cdot|y|\cdot|Du_m(x-ty)|\,dy\,dt.$$

$$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}\overset{\text{Tonelli}}{\le}\int_0^1\int|\eta_\varepsilon(y)|\cdot\|Du_m(\cdot-ty)\|_{L^1(V)}\,|y|\,dy\,dt.$$

$\tilde\eta_\varepsilon(z)=\varepsilon|\eta(z)|$.

$$\le\|Du_m\|_{L^1(V)}\int|\eta_\varepsilon(y)|\cdot|y|\,dy\le\varepsilon\|Du_m\|_{L^1(V)}\int\tilde\eta_\varepsilon(y)\,dy$$

Step 3: 转回 $\{u_m\}$

$$\|u_{m_k}-u_{m_l}\|_{L^q(V)} \le \|u_{m_k}-u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \quad (\le\delta\text{. 与 } m \text{ 无关}).$$
$$+\|u_{m_k}^\varepsilon-u_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)}\text{. 这项 } k,l\to\infty \text{ 时 趋于 } 0$$
$$+\|u_{m_l}^\varepsilon-u_{m_l}\|_{L^q} \quad (\le\delta\text{. 与 } m \text{ 无关}).$$

$$\Rightarrow \limsup_{k,l\to\infty}\|u_{m_k}-u_{m_l}\|_{L^q(V)}\le 2\delta.$$

$\delta=1$. 存在一列 $u_{m_{1,1}},\dots\dots,u_{m_{1,n}},\dots\dots$

$\delta=\frac{1}{2}$. $\quad u_{m_{2,1}},\dots\dots,u_{m_{2,n}},\dots$

~~由对角线~~ $u_{m_j}:=u_{m_{j,j}}$ 即可.（对角线法则）. $\square$.

§5.8. Poincaré 不等式:

$\langle u\rangle_U:=\frac{1}{|U|}\int_U f\,dy.$

Thm 1: U 有界, 连通开集. $\partial U\in C^1$. $1\le p\le\infty$ 则 $\exists\, C>0$ $u\in W^{1,p}(U)$.

$$\|u-\langle u\rangle_U\|_{L^p(U)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

证明: 反证法: 否则. $\exists$ 一列 $\{u_k\}\in W^{1,p}(U)$ s.t. $\|u_k-\langle u_k\rangle\|_{L^p(U)}>k\|Du_k\|_{L^p(U)}$.

$$v_k:=\frac{u_k-\langle u_k\rangle_U}{\|u_k-\langle u_k\rangle_U\|_{L^p(U)}}. \quad \langle v_k\rangle_U=0.\ \|v_k\|_{L^p(U)}=1\quad \|Dv_k\|_{L^p(U)}<\frac{1}{k}.$$

由 Rellich-Kondrachov 定理. $\exists$ 子列 $v_{k_j}\to v\in L^p$ in $L^p(U)$

$\Rightarrow \langle v\rangle_U=0.\quad \|v\|_{L^p(U)}=1.$

~~由 $\|Dv_k\|_p$~~ 下面证明 $Dv=0$ a.e.

$\forall\phi\in C_c^\infty(U)$. $\int_U \partial_i\phi\cdot v \underset{\text{Hölder}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_U v_{k_j}\partial_i\phi\, dx=-\lim_{k_j\to\infty}\int_U D_i v_{k_j}\cdot\phi\,dx=0.$ 因 $\|Dv_k\|_p<\frac{1}{k}\to 0$

从而 $v\in W^{1,p}(U)$. $Dv=0$ a.e.

Claim: $V=$ const a.e. in U.

pf:
令 $v^{\varepsilon}=\eta_{\varepsilon}*v\in C^{\infty}(U_{\varepsilon})$.

$Dv^{\varepsilon}=(Dv)^{\varepsilon}$

$\Rightarrow Dv^{\varepsilon}=0$ a.e. in U_{ε}.

又因 U 连通. 故对 $\forall\varepsilon>0$. $v^{\varepsilon}(x)=\overset{\text{const}}{C_{\varepsilon}}$ in U_{ε}.

因 $v^{\varepsilon}\to v$ a.e. in U. as $\varepsilon\to 0$ ~~严格的 argue 应是 先得到 a.e. 收敛. 再证 各处 极限相同~~ (否则.

$\therefore$ 对 a.e. $x\in U$. $\lim_{\varepsilon\to 0}C_{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}v^{\varepsilon}(x)=v(x)$. ☒.

这样. v const. $\langle v\rangle_U=0\Rightarrow v=0\Rightarrow\|v\|_{L^p(U)}=0$. 矛盾! □

Corollary: $U=B(x,r)$. $1\le p\le\infty$ 则 $\exists C>0$.

$$\|u-\langle u\rangle_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))}\le Cr\|Du\|_{L^p(B(x,r))}\quad\forall u\in W^{1,p}(B^{\circ}(x,r)).$$ □

§5.9 Sobolev 函数的可微性.

Thm 5.9.1 U 有界开. $\partial U\in C^1$. 则 $u:U\to\mathbb{R}$ Lipschitz $\Leftrightarrow u\in W^{1,\infty}(U)$.

~~*设 $U=\mathbb{R}^n$ 否则 用延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上~~. 设 $U=\mathbb{R}^n$. u 紧支.

证明: $\Rightarrow$ $D_i^h u(x):=\dfrac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$.

则 $\|D_i^{-h}u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\le \mathrm{Lip}(u)$.

$\Rightarrow \exists h_k\to 0$. $v_i\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ s.t. $D_i^{-h_k}u\rightharpoonup v_i$ in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

local 不能去掉
因为利用了区域测度 $<\infty$ 时. L^{∞} 一定 L^2.

$\Rightarrow \forall\phi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\,\partial_{x_i}\phi\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot\lim_{h_k\to 0}D_i^{h_k}\phi\,dx$$

$$\overset{DCT}{=}\lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}D_i^{h_k}\phi\cdot u\,dx=-\lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}D_i^{-h_k}u\cdot\phi\,dx$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}v_i\cdot\phi\,dx.$$

$\Rightarrow \partial_{x_i}u=\underset{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}{v_i}$ weakly $\Rightarrow u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

$\Leftarrow$: 今设 $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 则由 Morrey 嵌入知. u 是 Hölder 连续的 (modify一个零测集)
$\Rightarrow u$ 连续. 这步必要.

令 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

$u^\varepsilon \rightrightarrows u$ as $\varepsilon \to 0^+$.

因 $|u^\varepsilon(x) - u(x)|$

$$= \cdots = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)\,(u(x-\varepsilon y) - u(x))\,dy$$

$$\overset{u^* \in C^{0,r}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)\,(u^*(x-\varepsilon y) - u^*(x))\,dy$$

$u = u^*$ a.e. 再令 $\varepsilon \to 0^+$ 再用 DCT 即可

$\|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. $x \neq y$. 有 $u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (1-t)y)\,dt$.

$$= \int_0^1 Du^\varepsilon(tx + (1-t)y)\,dt \cdot (x-y).$$

$$\Rightarrow |u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \le \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x-y| \le \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x-y|.$$

$\varepsilon \to 0^+$. 利用 $u^\varepsilon \rightrightarrows u$ 有

$$|u(x) - u(y)| \le \|Du\|_{L^\infty} |x-y|. \quad \forall x \neq y$$

□

Def: 称 $u: U \to \mathbb{R}$ 在 x 处可微. 若. $\exists a \in \mathbb{R}^n$.

$$u(y) = u(x) + a\cdot(y-x) + o(|y-x|) \quad \text{as } y \to x.$$

i.e. $$\lim_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x) - a\cdot(y-x)|}{|y-x|} = 0.$$

#.

Thm 5.9.2. $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$. $n < p \le +\infty$. 则 u a.e. 可微 in U.

$Du =$ 弱 Du a.e.

证明: 只用证 $n < p < \infty$. 时,

在 Morrey 不等式证明中有:

$$|u(y) - u(x)| \le C r^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,2r)} |Du(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \quad y \in B(x,r).\ \forall u \in C^1(U)$$

$\Downarrow$

$\forall u \in W^{1,p}(U)$.

如今 $\forall u \in W^{1,p}_{loc}(U)$. a.e. $x \in U$ 由 Lebesgue 微分定理. $⨍_{B(x,r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \to 0$

as $r \to 0$

任1固定这样一个点 $x\in U$，令 $v(y)=u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x)$ $\quad r=|x-y|$

代入Morrey不等式估计中的u

$$\Rightarrow |u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x)|$$

$$\le Cr^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,2r)}|Du(x)-Du(z)|^p dz\right)^{1/p}$$

$$\le Cr\left(⨍_{B(x,2r)}|Du(x)-Du(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} = o(r) = o(|x-y|).$$

as $r\to 0^+$.

□.

作为推论.

Thm 5.9.3 (Rademacher定理). u is locally Lipschitz

$$\Downarrow$$

u a.e. 可微.

□.

差商与弱导数. $u: U\to\mathbb{R}$ $L^1_{loc}(U)$. $V\subset\subset U$.

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}. \qquad 1\le i\le n. \quad x\in V. \quad 0<|h|<\mathrm{dist}(V,\partial U).$$

$D^h u := (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$.

Thm 5.9.4: (1) $1\le p<\infty$ $u\in W^{1,p}(U)$. 则 $\forall V\subset\subset U$. $\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C\|Du\|_{L^p(U)}$
$(\exists C>0.\ \forall 0<|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial U))$

(2) $1<p<\infty$ 时. $u\in L^p(V)$. 且 $\exists C>0$ s.t. $\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C$ $\forall |h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial U)$

则 $u\in W^{1,p}(V)$. $\|Du\|_{L^p(V)}\le C$. 但 $p=1$不对 (5.12题).

Proof: (1). $1\le p<\infty$ 先设 $u\in C^\infty(U)$.

$$u(x+he_i)-u(x) = h\int_0^1 \partial_i u(x+he_i\cdot t)\,dt.$$

$$\Rightarrow |u(x+he_i)-u(x)| \le |h|\int_0^1 |Du(x+the_i)|\,dt.$$

$$\Rightarrow \int_V |D^h u|^p dx \le C\sum_{i=1}^n \int_V\int_0^1 |Du(x+the_i)|^p\,dt\,dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} C\sum_{i=1}^n \int_0^1\int_V |Du(x+the_i)|^p\,dx\,dt.$$

$$\le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

对 $u\in W^{1,p}(U)$. 找一列 $u_n\in C^\infty(U)$. $\|u_n-u\|_{W^{1,p}(U)}\to 0$

而 $\|D^h u_n\|_p \longrightarrow \|D^h u\|_p$ 故(1)成立.

(2). 首先. 差商的"分部积分公式"

$$\int_V u(x)\left[\frac{\phi(x+he_i)-\phi(x)}{h}\right]dx = -\int_U \left[\frac{u(x)-u(x-he_i)}{h}\right]\phi(x)\,dx$$

$\forall \phi\in C_c^\infty(V)$ (即 $\int_V u D_i^h\phi\,dx = -\int_V D_i^{-h}u\cdot\phi\,dx$.

由 $\|D^h u\|_{L^p(V)}\le C \Rightarrow \sup_h \|D_i^{-h}u\|_{L^p(V)}<+\infty$

$1<p<\infty$ 时. 由 Banach-Alaoglu定理. $\exists V_i\in L^p(V)$. 子列 $h_k\to 0$

s.t. $D_i^{-h_k}u \longrightarrow v^i$ in $L^p(V)$.

$$\Rightarrow \int_V u\,\partial_i\phi\,dx = \int_U u\cdot\partial_i\phi\,dx \underset{\text{控制收敛定理.}}{=} \lim_{h_k\to 0}\int_U u\cdot D_i^{h_k}\phi\,dx$$

$$\overset{\text{差商分部积分公式}}{=} -\lim_{h_k\to 0}\int_V D_i^{-h_k}u\cdot\phi\,dx$$

$$\overset{D_i^{-h_k}u\to v_i}{=} -\int_V v^i\phi\,dx = -\int_U v_i\phi\,dx$$

$\Rightarrow v^i = \partial_i u$ weakly.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow Du\in L^p(V)\\ u\in L^p(V)\end{array}\right\}\Rightarrow u\in W^{1,p}(V)$$

$\square$