白话经典算法系列之七 堆与堆排序

标签： 堆 堆排序 数据结构 白话经典算法 算法

2011-08-22 20:04 338347人阅读 评论(188)

分类：

白话经典算法系列（15）

目录(?) [-]

堆排序与快速排序，归并排序一样都是时间复杂度为O(N*logN)的几种常见排序方法。学习堆排序前，先讲解下什么是数据结构中的二叉堆。

二叉堆的定义

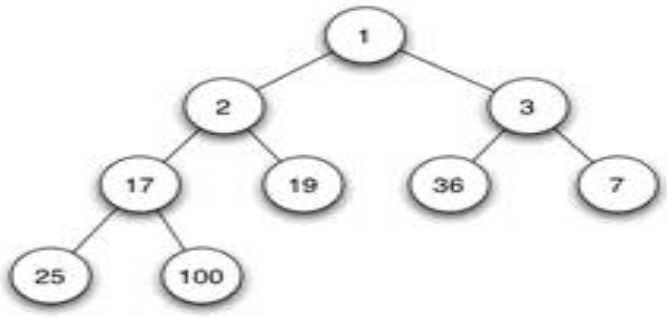
二叉堆是完全二叉树或者是近似完全二叉树。

二叉堆满足二个特性：

1．父结点的键值总是大于或等于（小于或等于）任何一个子节点的键值。

2．每个结点的左子树和右子树都是一个二叉堆（都是最大堆或最小堆）。

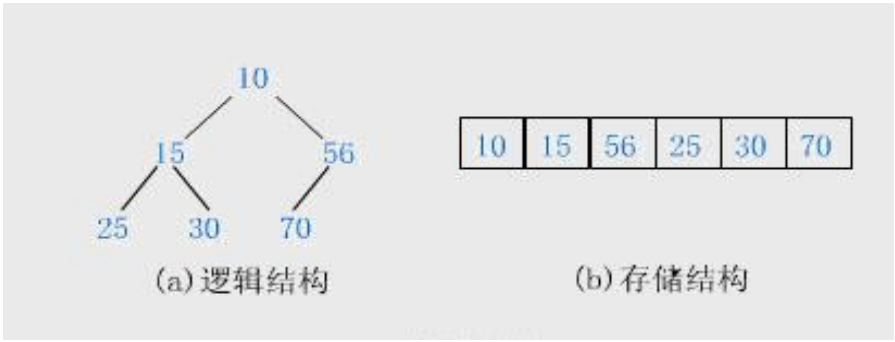
当父结点的键值总是大于或等于任何一个子节点的键值时为**最大堆**。当父结点的键值总是小于或等于任何一个子节点的键值时为**最小堆**。下图展示一个最小堆：



由于其它几种堆（二项式堆，斐波纳契堆等）用的较少，一般将二叉堆就简称为堆。

堆的存储

一般都用数组来表示堆，i结点的父结点下标就为(i – 1) / 2。它的左右子结点下标分别为2 * i + 1和2 * i + 2。如第0个结点左右子结点下标分别为1和2。

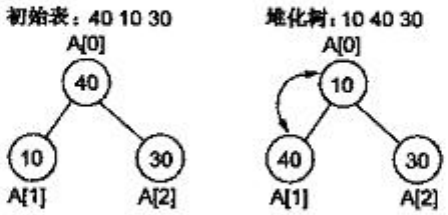


堆的操作——插入删除

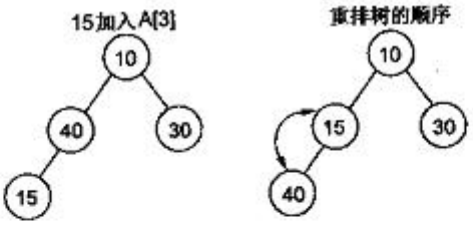
下面先给出《数据结构C++语言描述》中最小堆的建立插入删除的图解，再给出本人的实现代码，最好是先看明白图后再去看代码。

1. 建立堆：数组具有对应的树表示形式。一般情况下，树并不满足堆的条件。通过重新排列元素，可以建立一棵“堆化”的树。

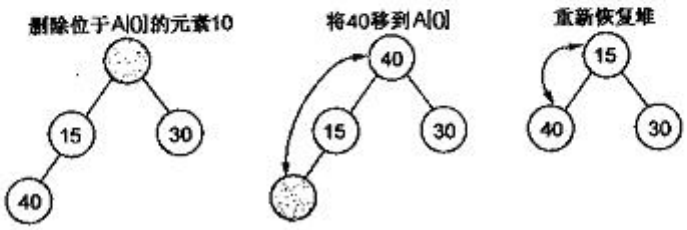
初始表：40 10 30　　堆化树：10 40 30



2. 插入一个元素：新元素被加入到表层，随后树被更新以恢复堆次序。例如，下面的步骤将15加入到表中。



3. 删除一个元素：删除总是发生在根A[0]处。表中最后一个元素被用来填补空缺位置，结果树被更新以恢复堆条件。例如，以下步骤删除旧。



堆的插入

每次插入都是将新数据放在数组最后。可以发现从这个新数据的父结点到根结点必然为一个有序的数列，现在的任务是将这个新数据插入到这个有序数据中——这就类似

于直接插入排序中将一个数据并入到有序区间中，对照《白话经典算法系列之二 直接插入排序的三种实现》不难写出插入一个新数据时堆的调整代码：

```cpp
//  新加入i结点  其父结点为(i - 1) / 2
void MinHeapFixup(int a[], int i)
{
    int j, temp;

    temp = a[i];
    j = (i - 1) / 2;      //父结点
    while (j >= 0 && i != 0)
    {
        if (a[j] <= temp)
            break;

        a[i] = a[j];     //把较大的子结点往下移动,替换它的子结点
        i = j;
        j = (i - 1) / 2;
    }
    a[i] = temp;
}
```

更简短的表达为：

```cpp
void MinHeapFixup(int a[], int i)
{
    for (int j = (i - 1) / 2; (j >= 0 && i != 0)&& a[i] > a[j]; i = j, j = (i - 1) / 2)
        Swap(a[i], a[j]);
}
```

插入时：

```cpp
//在最小堆中加入新的数据nNum
void MinHeapAddNumber(int a[], int n, int nNum)
{
    a[n] = nNum;
    MinHeapFixup(a, n);
}
```

堆的删除

按定义，堆中每次都只能删除第0个数据。为了便于重建堆，实际的操作是将最后一个数据的值赋给根结点，然后再从根结点开始进行一次从上向下的调整。调整时先在左右儿子结点中找最小的，如果父结点比这个最小的子结点还小说明不需要调整了，反之将父结点和它交换后再考虑后面的结点。相当于从根结点将一个数据的“下沉”过程。下面给出代码：

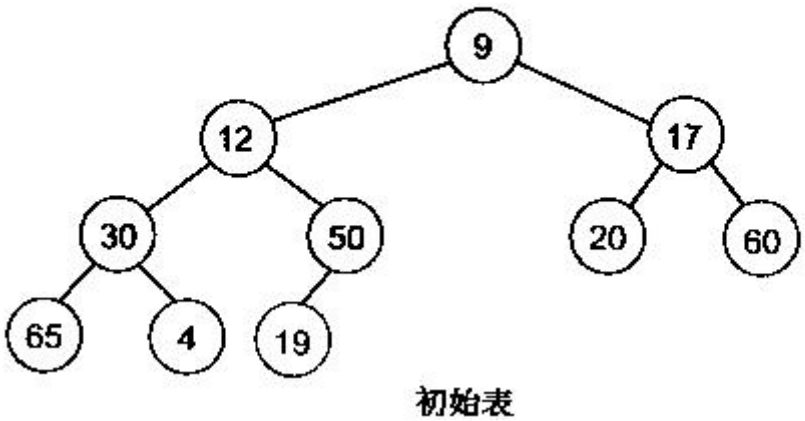
```cpp
```

```
//  从i节点开始调整,n为节点总数 从0开始计算 i节点的子节点为 2*i+1, 2*i+2
void MinHeapFixdown(int a[], int i, int n)
{
    int j, temp;

    temp = a[i];
    j = 2 * i + 1;
    while (j < n)
    {
        if (j + 1 < n && a[j + 1] < a[j]) //在左右孩子中找最小的
            j++;

        if (a[j] >= temp)
            break;

        a[i] = a[j];     //把较小的子结点往上移动,替换它的父结点
        i = j;
        j = 2 * i + 1;
    }
    a[i] = temp;
}
//在最小堆中删除数
void MinHeapDeleteNumber(int a[], int n)
{
    Swap(a[0], a[n - 1]);
    MinHeapFixdown(a, 0, n - 1);
}
```

堆化数组

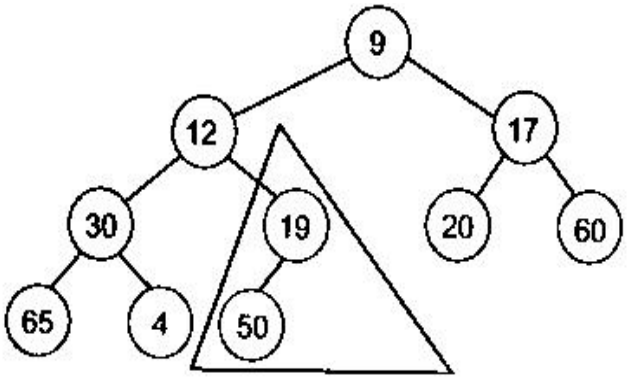
有了堆的插入和删除后，再考虑下如何对一个数据进行堆化操作。要一个一个的从数组中取出数据来建立堆吧，不用！先看一个数组，如下图：

$$\text{int}\quad A[0] = \{9,12,17,30,50,20,60,65,4,49\};$$

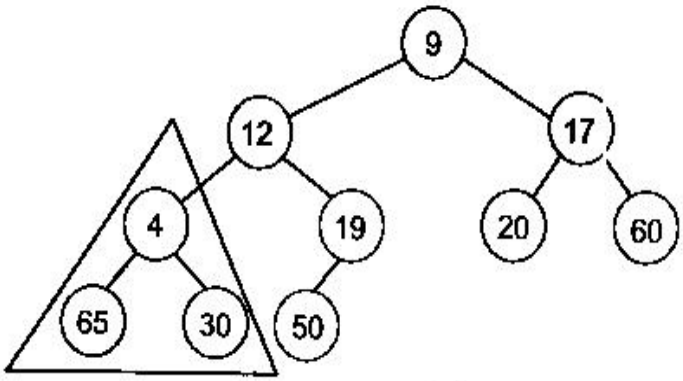


初始表

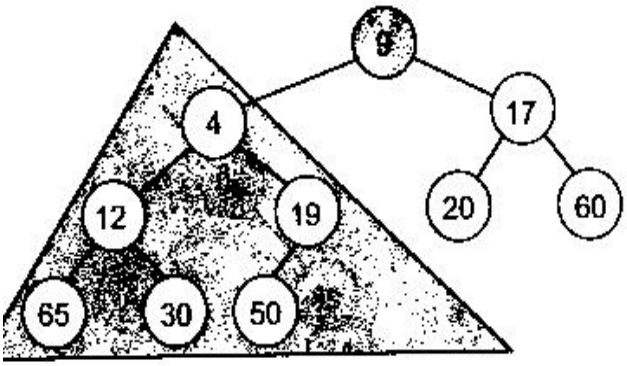
很明显，对叶子结点来说，可以认为它已经是一个合法的堆了即20，60， 65， 4， 49都分别是一个合法的堆。只要从A[4]=50开始向下调整就可以了。然后再取A[3]=30，A[2] = 17，A[1] = 12，A[0] = 9分别作一次向下调整操作就可以了。下图展示了这些步骤：



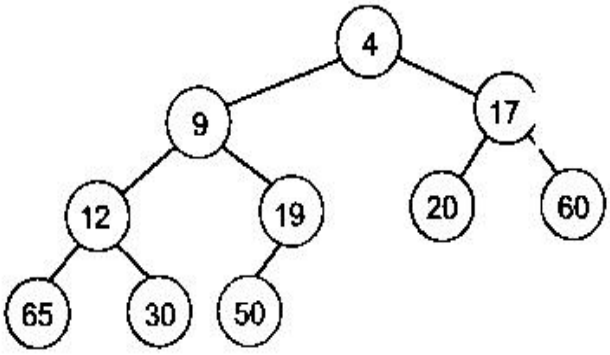
(A) FilterDown(4)放置50



(B) FilterDown(3)放置30



(C)



(D)

写出堆化数组的代码：

```cpp
//建立最小堆
void MakeMinHeap(int a[], int n)
{
    for (int i = n / 2 - 1; i >= 0; i--)
        MinHeapFixdown(a, i, n);
}
```

至此，堆的操作就全部完成了(注1)，再来看下如何用堆这种数据结构来进行排序。

堆排序

首先可以看到堆建好之后堆中第0个数据是堆中最小的数据。取出这个数据再执行下堆的删除操作。这样堆中第0个数据又是堆中最小的数据，重复上述步骤直至堆中只有一个数据时就直接取出这个数据。

由于堆也是用数组模拟的，故堆化数组后，第一次将A[0]与A[n - 1]交换，再对A[0…n-2]重新恢复堆。第二次将A[0]与A[n – 2]交换，再对A[0…n - 3]重新恢复堆，重复这样的操作直到A[0]与A[1]交换。由于每次都是将最小的数据并入到后面的有序区间，故操作完成后整个数组就有序了。有点类似于**直接选择排序**。

```cpp
void MinheapsortTodescendarray(int a[], int n)
```

```
{
    for (int i = n - 1; i >= 1; i--)
    {
        Swap(a[i], a[0]);
        MinHeapFixdown(a, 0, i);
    }
}
```

注意使用最小堆排序后是递减数组，要得到递增数组，可以使用最大堆。

由于每次重新恢复堆的时间复杂度为O(logN)，共N - 1次重新恢复堆操作，再加上前面建立堆时N / 2次向下调整，每次调整时间复杂度也为O(logN)。二次操作时间相加还是O(N * logN)。故堆排序的时间复杂度为O(N * logN)。STL也实现了堆的相关函数，可以参阅《STL系列之四 heap 堆》。

注1 作为一个数据结构，最好用类将其数据和方法封装起来，这样即便于操作，也便于理解。此外，除了堆排序要使用堆，另外还有很多场合可以使用堆来方便和高效的处理数据，以后会一一介绍。