计算机图形学基础

胡事民

清华大学计算机科学与技术系

今天的课程内容

- 为什么要学习样条?
- B样条曲线及其性质
- B样条曲面
- NURBS曲线和曲面

为什么要学习B样条?

- **虽然Bezier曲线/曲面有许多优点，但却有两个明显的缺陷：**
  - Bezier曲线/曲面不支持局部的修改和编辑。
  - Bezier曲线/曲面拼接时，满足几何连续性条件是十分困难的。

- **B样条的历史：**
  - 1946年，Schoenberg提出样条的概念，及其基于样条的近似曲线的方法。

  - B样条的动机源于插值中的Runge-Kutta现象：高阶多项式很容易产生不稳定的上下抖动。
  - 为什么不用分段低阶多项式通过连续的连接来代替高阶多项式呢?
  - 这就是样条的思想。
  - Isaac Jacob Schoenberg：出生于罗马尼亚的galatz, 学术经历：雅西大学、哥廷根、希伯来、芝加哥、斯沃斯莫尔、宾大、威斯康辛大学麦迪逊。

– 人们曾经以为使用样条来做形状设计不太可能，因为计算过于复杂。
– 1972年，基于Schoenberg的工作，Gordon和Riesenfeld提出了B样条以及一系列对应的几何算法。
– B样条保持了Bezier曲线的优点，同时克服了Bezier曲线的缺点。
– NURBS成为工业标准

工业软件-CAD软件

Richard Riesenfeld

梁友栋

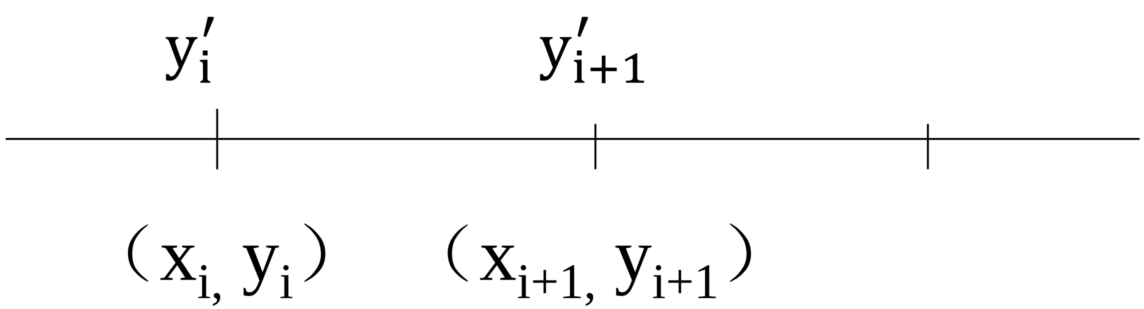
- **如何理解B样条?**
  - 样条函数的插值，可以通过求解一个三对角方程来进行。

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) \qquad \beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \qquad \beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

Y=f(x)

Hermite插值



- **如何理解B样条?**
  - 样条函数的插值，可以通过求解一个三对角方程来进行。
  - 对于一个给定的区间划分，可以类似地计算样条曲线的插值。
  - 给定区间上的所有样条函数组成一个线性空间。这个线性空间的基函数就叫做B样条基函数。

就像Bezier曲线使用Bernstein基函数一样，B样条曲线使用**<u>B样条基函数</u>**。

B样条曲线及其性质

- B样条曲线的公式

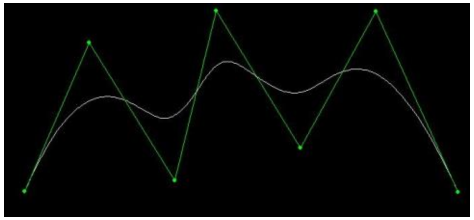
$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t),\quad t\in[0,1]$$

(Bezier公式)

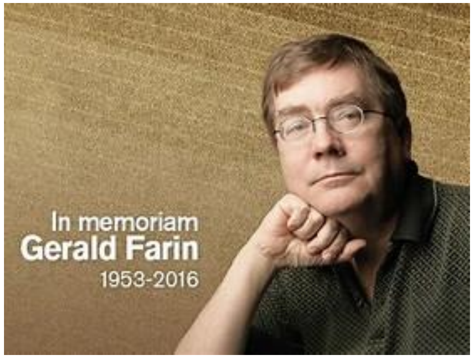
$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)$$

  - $P_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是控制点。
  - $N_{i,k}(t)(i=0,1,\cdots,n)$ 是第 i 个 **k 阶**B样条基函数。
  - B样条基函数是分段 k 阶 (k–1次) 多项式，它们由节点向量 (knot vector) 唯一决定；节点向量则是一串非减 (non-decreasing) 的实数序列。

- B样条示例：



- 关于阶(order)和度数(degree)的故事：
  - G Farin：度数/(次数)，Computer Aided Geometric Design
  - Les Piegl：阶， Computer Aided Design



B样条基函数

- B样条基函数的定义：
  - de Boor-Cox递推公式：

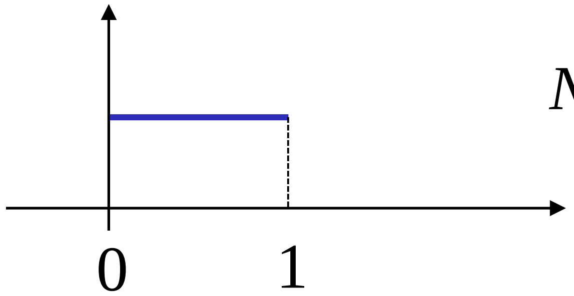
$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i < x < t_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

  - 节点向量：非减 (non-decreasing) 的实数序列

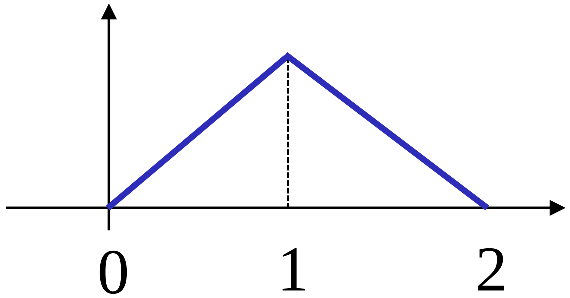
$$t_0,t_1,\cdots,t_{k-1},t_k,\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+k-1},t_{n+k}$$

- $k=1, i=0$



$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i < x < t_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

- $k=2, i=0$



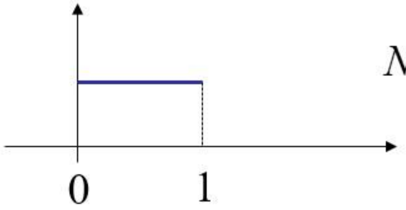
$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

B样条基函数

- 思考-1：
  - B样条基函数 $N_{i,k}(t)$ 的非零区间是什么?

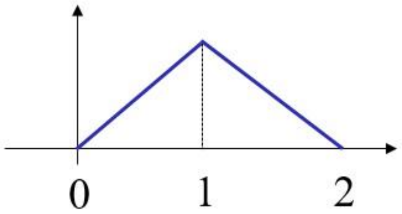
$[t_i , t_{i+k}]$

- $k=1, i=0$



$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i < x < t_{i+1} \\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

- $k=2, i=0$



$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

B样条基函数

- 思考-2：
  - 确定以下B样条曲线一共需要多少个节点?

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i N_{i,k}(t)$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

单选题 1分

设置

确定以下B样条曲线一共需要多少个节点?

A n

B n+1

C n+k

D n+k+1

提交

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

B样条基函数

- 思考-3：
  - B样条曲线

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

的定义区间是什么？

单选题 1分

设置

B样条曲线$P(t)$的定义区间是什么？

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

A $[t_0 , t_n]$

B $[t_0 , t_{n+k}]$

C $[t_k , t_n]$

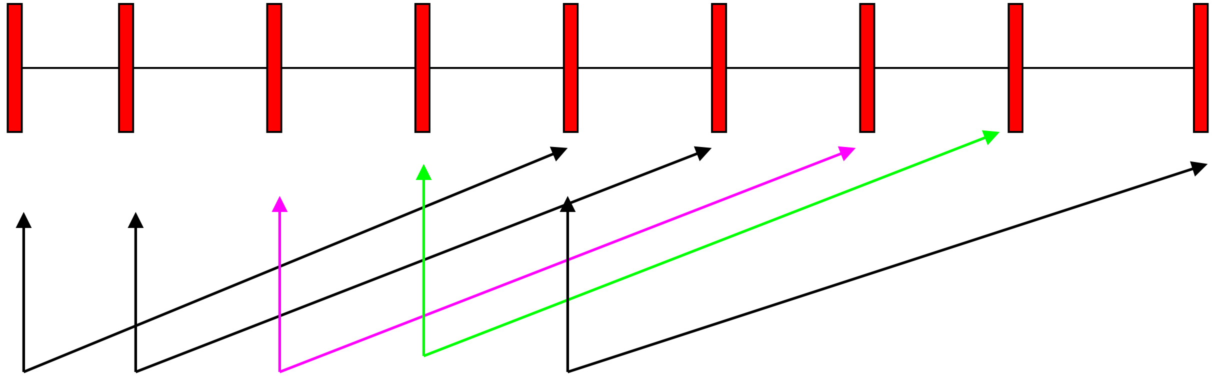
D $[t_{k-1} , t_{n+1}]$

提交

B样条基函数

- 以 k=4, n=4 为例：　　$P(t)=\sum_{i=0}^{4} P_i N_{i,4}(t)$

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8$$



B样条基函数

- 性质：
  - 非负性 (non-negativity) 和局部支撑性 (local support)：
    - $N_{i,k}(t)$ 是非负的
    - $N_{i,k}(t)$ 是 $[t_i, t_{i+k}]$ 上的分段非零多项式：

$$N_{i,k}(t)\begin{cases} \geq 0 & t \in [t_i, t_{i+k}] \\ = 0 & otherwise \end{cases}$$

  - 归一性 (Unity)：
    - 区间 $[t_{k-1}, t_{n+1}]$ 上的所有 k 阶分段非零基函数的和为 1：

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) = 1 \qquad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

B样条基函数

- 性质：
  - 基函数所满足的微分方程：

$$N'_{i,k}(t)=\frac{k-1}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{k-1}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

  - 对比Bernstein基函数：

$$B'_{i,n}(t)=n[B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)],$$

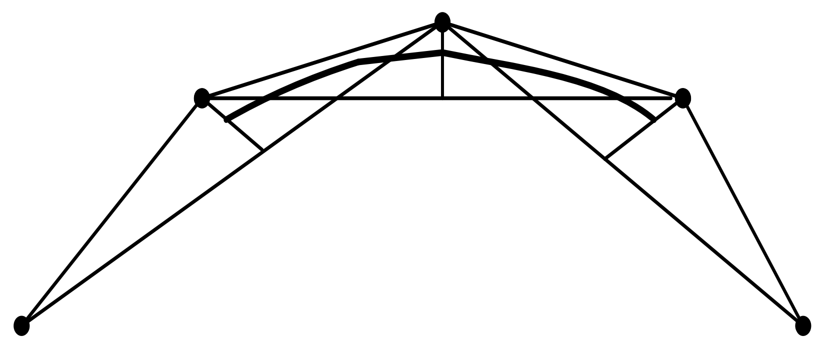
$$i=0,1,\cdots,n;$$

B样条的分类

- B样条的分类
  - 一般的曲线可以根据其起始点和终止点是否重叠来进行分类：
    - 不重合：开曲线
    - 重合：　闭曲线
  - 根据节点向量中节点的分布，B样条可以分为如下四类：

均匀 (Uniform) B样条

– (1) 均匀B样条：
  - 节点成等差数列均分排布，例如：
    0,1,2,3,4,5,6,7
  - 这样的节点分布对应的是均匀B样条基函数：

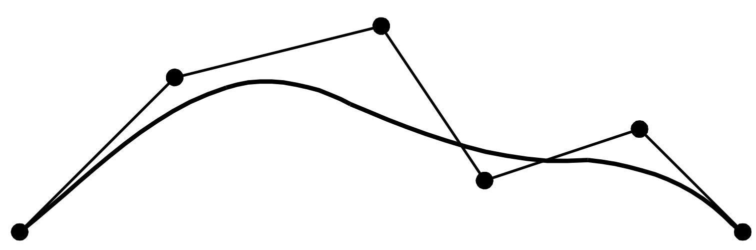


uniform B-Spline of Degree 3

准均匀 (Quasi-Uniform) B样条

– (2) 准均匀B样条：

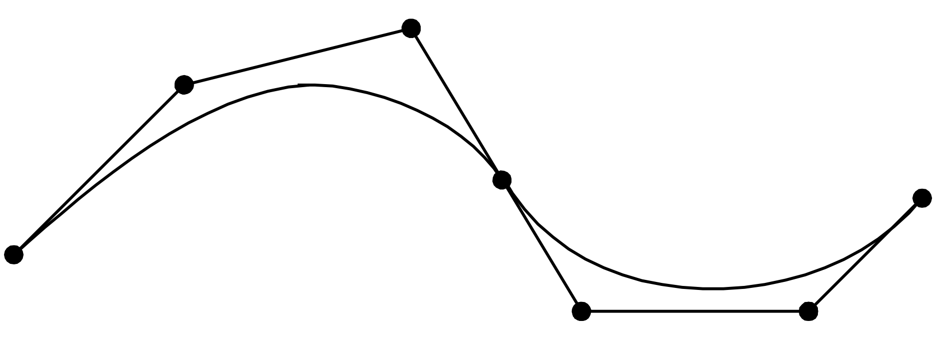
- 与均匀B样条不同，准均匀B样条：
  - 准均匀B样条的起始节点和终止节点都具有 k 的重复度。
  - 均匀B样条并不保持Bezier曲线的“端点性质 (end point property)”，或者说，均匀B样条曲线的起始点和终止点并不等于第一个和最后一个控制点。然而，准均匀B样条却具有“端点性质”。



Quasi-uniform B-Spline curve of degree 3

分段Bezier曲线

– (3) 分段Bezier曲线：
  - 起始节点和终止节点都具有 k 的重复度。
  - 所有其他节点都具有 k–1 的重复度。
  - 这样，所有的曲线段都是Bezier曲线。



Piecewise B-Spline Curve of degree 3

分段Bezier曲线

- 对于分段Bezier曲线，不同的曲线段相对独立。移动控制点只会影响其所在的Bezier曲线段，而其他的Bezier曲线段都不会改变。甚至所有关于Bezier曲线的算法可以同样地适用于分段Bezier曲线。
- 但是分段Bezier曲线需要使用更多的参数和变量来进行控制：更多的控制点和更多的节点。

非均匀B样条

– (4) 非均匀B样条

- 节点向量 $T=[t_0,t_1,\cdots,t_{n+k}]$ 中的节点呈非减 (non-decreasing) 序列排布，并且满足：
  – 起始节点和终止节点的重复度均 ≤ k
  – 其他节点的重复度 ≤ k–1
- 由这样的节点向量定义的B样条被称为非均匀B样条。

B样条曲线的性质

- B样条曲线的性质：
  - 局部支持性：
    - 区间 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 上的曲线仅由至多 k 个控制点(control point) $P_j\,(j = i-k+1,\cdots,i)$ 决定。
    - 修改控制点 P_i 仅会影响到区间 (t_i, t_{i+k}) 上的曲线。

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

B样条曲线的性质

– 连续性：
  • P(t) 在每一个重复度为 r 的节点上具有 C^{k-1-r} 的连续性。
– 凸包性：
  • 一个B样条曲线被包围在其控制顶点的凸包内部。更精确地，对区间 $(t_i, t_{i+1}), k-1 \le i \le n$ 上的任何 t , P(t) 都在控制点 $P_{i-k+1}, \cdots, P_i$ 的凸包内部。

B样条曲线的性质

- 分段多项式性质：
  - 在任何一个由相邻节点确定的区间 (knot span)上，P(t) 是一个关于 t 的次数不超过 k-1 的多项式。
- 导数公式：

$$P'(t)=\left(\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)\right)'=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}'(t)$$

$$=(k-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i-P_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}\right)N_{i,k-1}(t)\qquad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

B样条曲线的性质

- 变差缩减性 (Variation Diminishing Property)：
  - 这个性质说明任何一条直线与B样条曲线的交点数目不会超过该直线与该B样条曲线的控制多边形的交点数目。
- 几何不变性 (Geometry Invariability)：
  - 曲线的形状和相对于控制点的位置不取决于坐标系的选择。

B样条曲线的性质

– 仿射不变性 (Affine Invariability)

$$A[P(t)] = \sum_{i=0}^{n} A[P_i] N_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

• 将仿射变换作用于等式两边，等式依然成立。

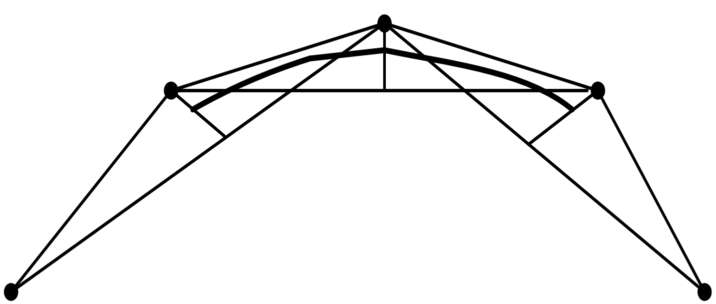
– 直线保持性 (Line holding)

• 如果控制多边形退化成为一条直线，那么B样条曲线依然在这条直线上。

B样条曲线的性质

– 灵活性 (Flexibility)
  - 使用B样条曲线可以方便地构建如线段 (line segment)，尖点(cusp)，切线(tangent line) 等特殊效果。
  - 拿4阶B样条为例，如果需要包含一条线段，只需要指定控制顶点 $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$ 共线。
  - 如果希望曲线通过点 P_i，只需要指定：

$$P_i = P_{i+1} = P_{i+2}$$



B样条曲线的性质

- 如果希望曲线与某直线 L 相切，只需要指定控制点 P_i, P_{i+1}, P_{i+2} 都在 L 上，并让 t_{i+3} 的重复度小于 2。

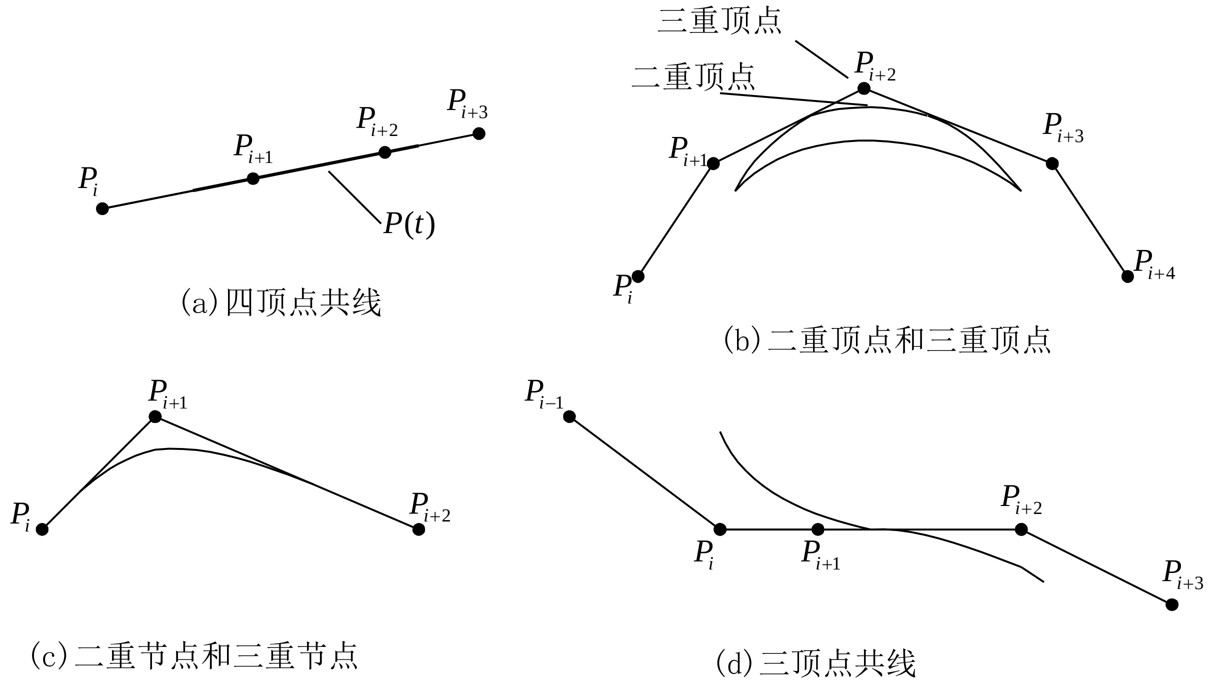


图. 1. 26 三次B样条曲线的一些特例

de Boor算法

- 计算B样条曲线的一点 P(t)，可以直接使用B样条的公式，但de Boor算法是一个更有效的算法。
- De Boor 算法：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_iN_{i,k}(t)$$

$$=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_i\left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)\right]$$

$$=\sum_{i=j-k+1}^{j}\left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}P_i+\frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i}P_{i-1}\right]N_{i,k-1}(t)\qquad t\in[t_j,t_{j+1}]$$

de Boor算法

- 令：

$$P_i^{[r]}(t)=\begin{cases} P_i, r=0, i=j-k+1, j-k+2,\cdots,j \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ \qquad r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots,j \end{cases}$$

- 那么：

$$P(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_i N_{i,k}(t)=\sum_{i=j-k+2}^{j}P_i^{[1]}(t)N_{i,k-1}(t)$$

- 这就是 de Boor 算法。

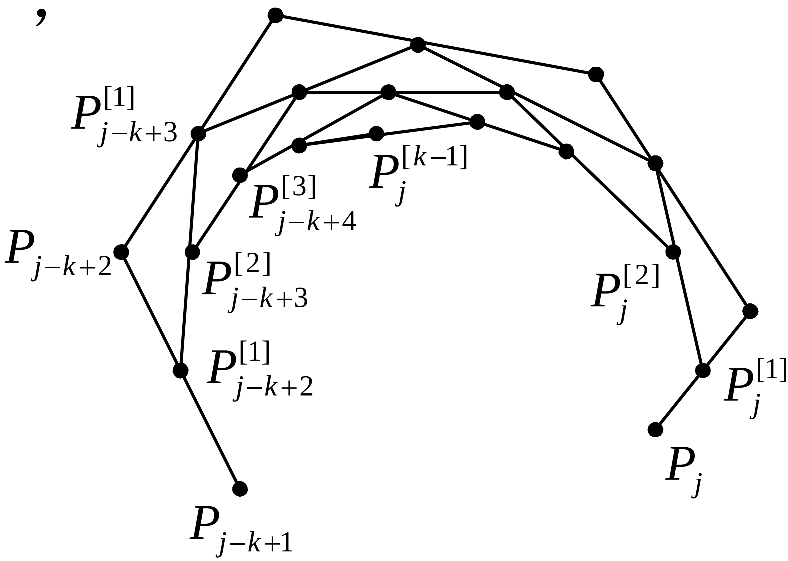
de Boor算法

- de Boor 算法的递推方式如下图所示：

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & & & & & \\
P_1 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
P_{j-k+1} & & & & & & \\
P_{j-k+2} & \rightarrow & P_{j-k+2}^{[1]} & & & & \\
P_{j-k+3} & \rightarrow & P_{j-k+3}^{[1]} & \rightarrow & P_{j-k+3}^{[2]} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
P_j & \rightarrow & P_j^{[1]} & \rightarrow & P_j^{[2]} & & P_j^{[k-1]} \\
\vdots & & & & & & \\
P_n & & & & & &
\end{array}
$$

de Boor算法

- de Boor 算法的几何意义：
  - de Boor 算法有直观的几何解释：
    割角 (corner cutting)：
    - 每次使用线段 $P_i^{[r]}P_{i+1}^{[r]}$ 来切割角$P_i^{[r-1]}$
    - 初始多边形为$P_{j-k+1}P_{j-k+2}\cdots P_j$ ，经过 k–1 轮割角后，我们最终能够得到$P_j^{[r-1]}(t)$ 。
  - 算法演示



节点的插入

- 节点插入 (Knot Insertion)
  - 是实际中对B样条重要的交互操作，允许在不改变一个B样条的几何以及阶的条件下插入一个新的节点。通过插入新的节点，可以增加一个B样条曲线的可控程度。
    - 插入新的节点 t 到节点区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 中。
    - 节点向量变成为：

$$T^1 = [t_0, t_1, \cdots, t_i, t, t_{i+1}, \cdots, t_{n+k}]$$

    - 写成：

$$T^1 = [t_0^1, t_1^1, \cdots, t_i^1, t_{i+1}^1, t_{i+2}^1, \cdots, t_{n+k+1}^1]$$

节点的插入

- 新的节点向量对应了新的B样条基函数。假设原始曲线 P(t) 可以由这些新的基函数和新的控制顶点 P_j^1 (待定) 来表达：

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n+1} P_j^1 N_{j,k}^1(t)$$

节点的插入

- Boehm 给出了计算这些新的控制点的公式：

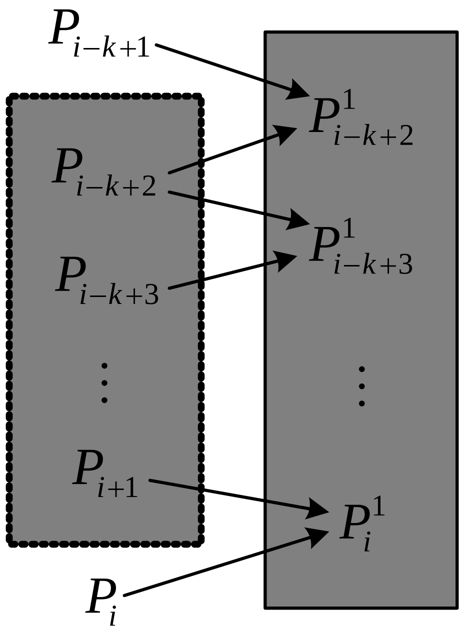
$$\begin{cases} P_j^1 = P_j, & j = 0,1,\cdots,i-k+1 \\ P_j^1 = (1-\beta_j)P_{j-1} + \beta_j P_j, & j = i-k+2,\cdots,i-r \\ P_j^1 = P_{j-1}, & j = i-r+1,\cdots,n+1 \end{cases}$$

$$\beta_j = \frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j}$$

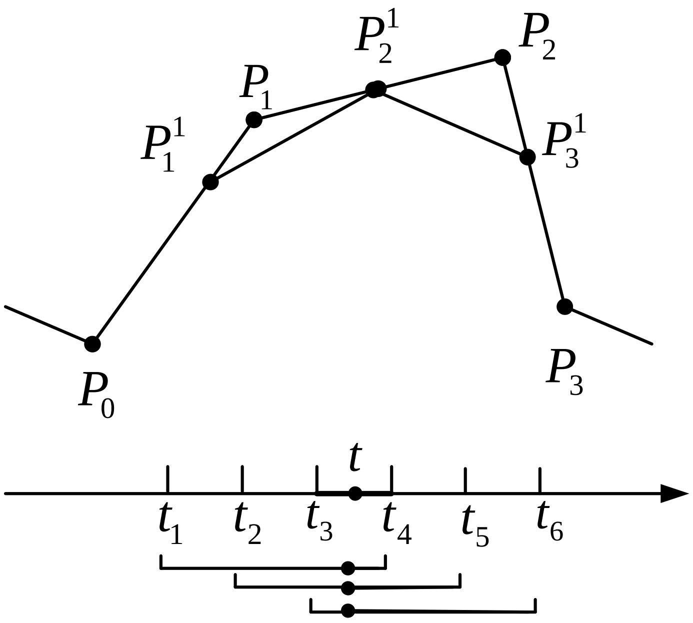
- 其中 r 是新插入的节点 t 在节点序列中的重复度。

1928-2018

节点的插入



左边的控制点由右边的新的控制点所代替



插入新节点 $t \in [t_3, t_4]$

See demo of knot insertion

B样条曲面

- 给定 U 和 V 参数轴上的节点向量：

$$U = [u_0, u_1, \cdots, u_{m+p}]$$
$$V = [v_0, v_1, \cdots, v_{n+q}]$$

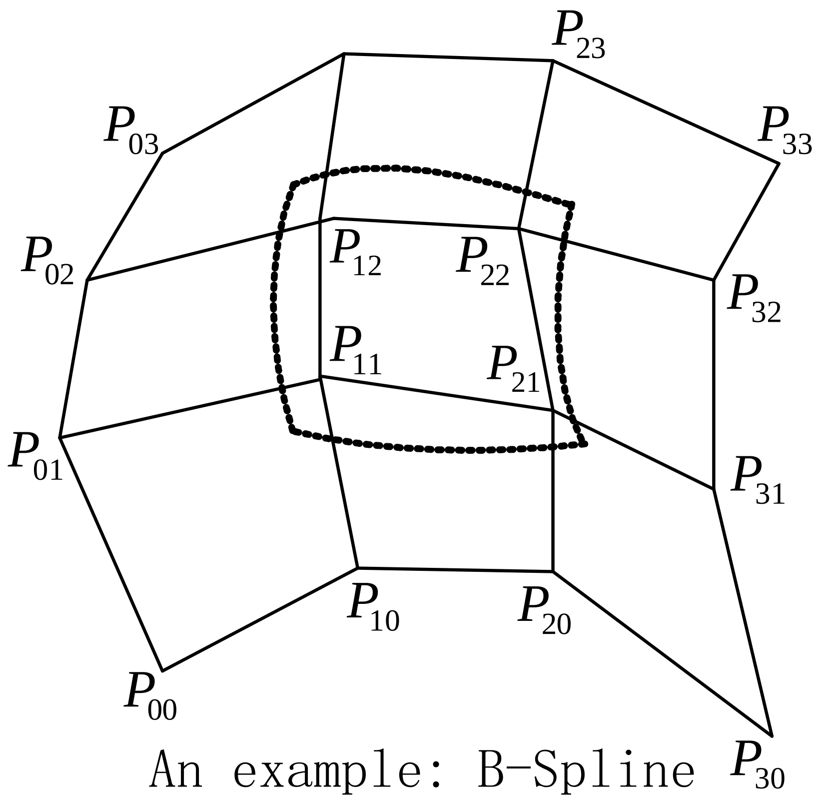
- 阶为 p×q 的B样条曲面可以定义为：

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$$

B样条曲面

- P_{ij} 是B样条曲面的控制点，它们也通常被称为控制网格或特征网格。
- $N_{i,p}(u)$ 和 $N_{j,q}(v)$ 分别是U方向和V方向上的p阶和q阶B样条基函数，它们也可以使用de Boor算法进行计算。

B样条曲面



An example: B-Spline surface of degree 3*3(双三次B样条曲面片)

NURBS 曲线/曲面

- B样条曲线与Bezier曲线的缺点：
  - 不能精确表示圆锥曲线 (除了抛物线)。
- NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline，非均匀有理B样条):
  - 目的在于找到一种精确描述圆锥曲线以及二次曲面的数学方法。

NURBS

- NURBS 十分复杂。
- Les Piegl 的关于 NURBS 的专著：
  - “NURBS：From Projective Geometry to Practical Use”
  - Les Piegl 毕业于匈牙利的Budapest大学，之后多年在SDRC公司进行几何建模工具的设计。

NURBS的故事

Some years ago a few researchers joked about NURBS, saying that the acronym really stands for *NOBODY Understands Rational B-Splines*, write the authors in their foreword; they formulate the aim of changing NURBS to **E**URBS, that is, **Everybody**….

There is no doubt that they have achieved this goal....

I highly recommend the book to anyone who is interested in a detailed description of NURBS. It is extremely helpful for students, teachers and designers of geometric modeling systems.

—— *Helmut Pottmann*

NURBS

- NURBS的优势
  – 它提供了一个更一般更精确的方法，来表达并对自由曲线/曲面进行设计。
  – 它提供了一个通用的数学形式，可以同时表示标准的解析曲线/曲面 (如圆锥曲线) 和自由曲线/曲面 (如参数曲线/曲面)。
  – 存在稳定快速的数值计算算法。

NURBS

- NURBS的优势
  – NURBS不仅对于仿射变换存在不变性，对于投影变换同样存在不变性。
  – 由于NURBS的控制点和权重都可以任意修改，用NURBS来进行曲线/曲面的设计可以获得更大的灵活性。
  – 非有理B样条，非有理和有理Bezier曲线/曲面都可以看成是NURBS的一种特殊形式。

NURBS

- 使用NURBS时的一些困难问题：
  - 比传统的曲线或样条曲线的表达需要更大的存储空间。
  - 如果权重设计不合理，NURBS曲线可能会产生畸变(abnormal)。
  - 某些情况，如曲线重叠 (curve overlap)，使用NURBS非常难以处理。

NURBS的定义

- 在讨论NURBS之前，首先回顾一下B样条的定义：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

$$t_0,t_1,\cdots,t_{k-1},t_k,\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+k-1},t_{n+k}$$

NURBS的定义

- NURBS曲线的定义：
  - NURBS曲线是由分段有理B样条多项式基函数定义的：

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=0}^{n} P_i R_{i,k}(t) \qquad R_{i,k}(t) = \frac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{j=0}^{n} \omega_j N_{j,k}(t)}$$

NURBS的定义

- NURBS 基函数 $R_{i,k}(t)$ 保持了 B样条基函数的所有性质：
  - 局部支持性:　$R_{i,k}(t)=0$，$t\notin[ti, ti+k]$
  - 归一性: $\sum_{i=0}^{n} R_{i,k}(u)=1$
  - 可微性:
    - 如果 t 不是节点，则 P(t) 在 t 处无限次可微 (或者说，光滑)；如果 t 是一个节点，则 P(t) 在 t 处具有 C^{k-r} 的连续性。
  - 如果 $\omega_i=0$，　那么 $R_{i,k}(t)=0$
  - 如果 $\omega_i=+\infty$，那么 $R_{i,k}(t)=1$

NURBS的定义

- NURBS 曲线具有和B样条曲线相似的几何性质：
  - 局部支持性 (Local Support)
  - 变差缩减性 (Variation Diminishing Property)
  - 凸包性 (Strong Convex Hull)
  - 仿射不变性 (Affine invariability)
  - 可微性 (Differentiability)
  - 如果一个控制点的权重为0，那么该控制点的位置不对曲线产生任何影响。

NURBS的定义

- 如果 $\omega_i \to \infty$ ，并且 $t \in [t_i, t_{i+k}]$，那么：

$$P(t) = P_i$$

- 非有理B样条，非有理和有理Bezier曲线/曲面都可以看成是NURBS的一种特殊形式。

齐次坐标 (Homogenous Coordinates)

- 使用齐次坐标表示控制点：
  - 在齐次坐标之下，控制点可以表示成为：

$$P_i^{\omega} = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i), \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

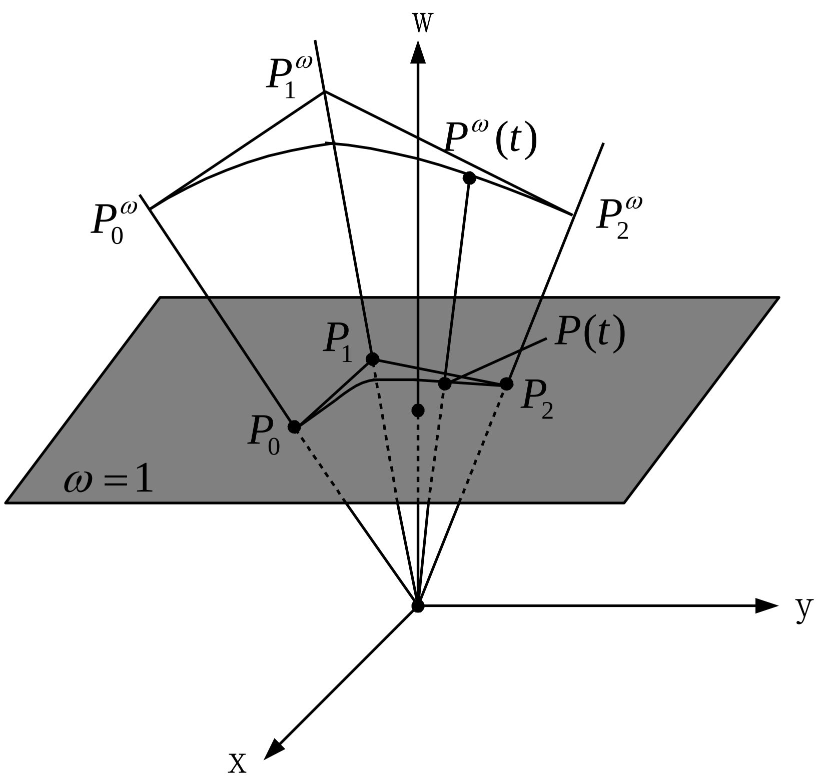
  - k 阶非有理B样条曲线可以写成：

$$P^{\omega}(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i^{\omega} N_{i,k}(t)$$

齐次坐标 (Homogenous Coordinates)

– 透过一个投影变换，我们可以得到如下的平面 NURBS 曲线：

$$P(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(t)}$$



齐次坐标 (Homogenous Coordinates)

– 三维 NURBS 曲线可以类似地按照如下的控制点理解：

$$P_i^{\omega} = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i), \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

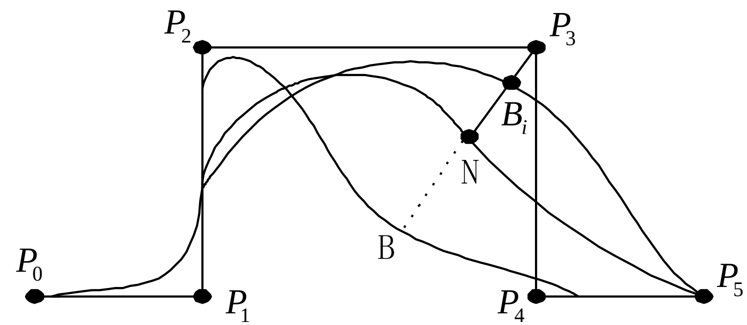
– 因此，使用齐次坐标，关于B样条曲线的各种算法也可以适用于 NURBS 曲线。

权重 (weights) 的几何意义

- 权重的几何意义
  - 对于固定的 t，让权重 ω_i 变化，则 NURBS 曲线在齐次坐标下的表达形式 P(t) 关于权重 ω_i 是线性的 (即 P(t) 共线；因此投影之后的 P(t) 也是共线的)。

权重 (weights) 的几何意义

- 令 B, N, B_i 分别是 NURBS 曲线上 $\omega_i = 0, \omega_i = 1, \omega_i \neq 0,1$ 的点： $B = P(t;\omega_i = 0), N = P(t;\omega_{i=1}), B_i = P(t;\omega_i \neq 0,1)$
- 定义： $P_i = P(t;\omega_i \to \infty)$
- N, B_i 可以表示为：



$$N = (1-\alpha)B + \alpha P_i$$

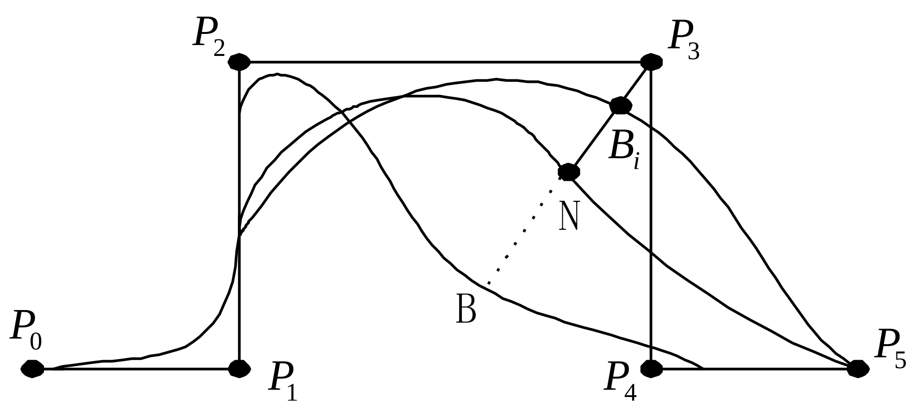
$$B_i = (1-\beta)B + \beta P_i$$

- 于是：

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} : \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{P_i N}{BN} : \frac{P_i B_i}{BB_i} = \omega_i$$

权重 (weights) 的几何意义

- 当 ω_i 递增 (递减)时，β 同样递增 (递减)，整个 NURBS 曲线逐渐地靠近 (远离) 控制点 P_i：



圆锥曲线的 NURBS 表示

- 圆锥曲线的 NURBS 表示：
  - 对于节点向量$T=[0,0,0,1,1,1]$，NURBS 曲线退化成为二阶 Bezier 曲线。很容易可以证明该曲线是二次曲线：

$$P(t)=\frac{(1-t^2)\omega_0 P_0+2t(1-t)\omega_1 P_1+t^2\omega_2 P_2}{(1-t)^2\omega_0+2t(1-t)\omega_1+t^2\omega_2}$$

  - $C_{sf}=\dfrac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$ 是形状因子。
  - C_{sf} 决定了圆锥曲线的类型。
  - 当 $C_{sf}=1$ 时，曲线为抛物线。

圆锥曲线的 NURBS 表示

- 当 $C_{sf} \in (1,+\infty)$ 时，曲线为双曲线。
- 当 $C_{sf} \in (0,1)$ 时，曲线为椭圆。
- 当 $C_{sf} = 0$ 时，曲线退化成两条直线：P_0P_1 和 P_1P_2。
- 当 $C_{sf} \to +\infty$ 时，曲线退化成为一条直线：P_0P_2。

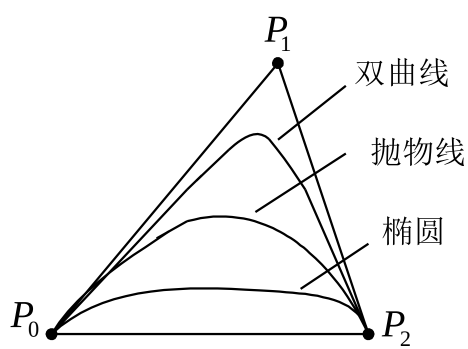
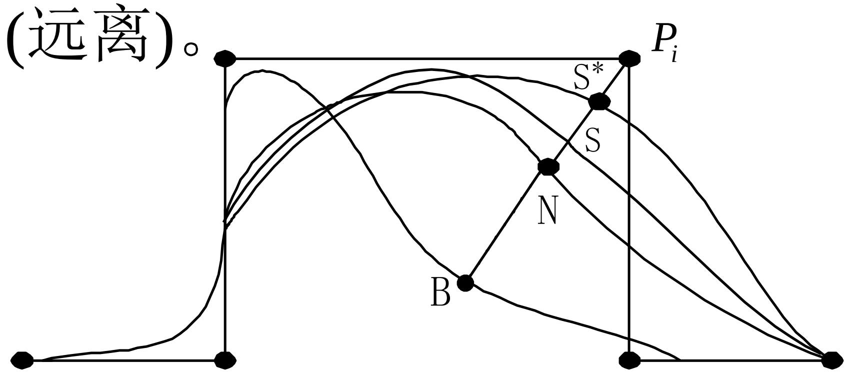


图3.1.36 圆锥曲线的 NURBS表示

NURBS 曲线的修改

- NURBS曲线的修改：
  - 最重要的NURBS曲线的修改包括：
    - 修改权重、控制点、以及节点。
  - 修改权重：
    - 当增加 (减少) 一个控制点的权重时，整条曲线会朝着该控制点靠近 (远离)。



NURBS 曲线的修改

- 如果希望一个点 S 朝着控制点 P_i 靠近 (远离) 距离 d，可以将权重 ω_i 修改为 ω^*：

$$\omega^* = \omega_i \left[1 + \frac{d}{R_{i,k}(t)(P_iS - d)} \right]$$

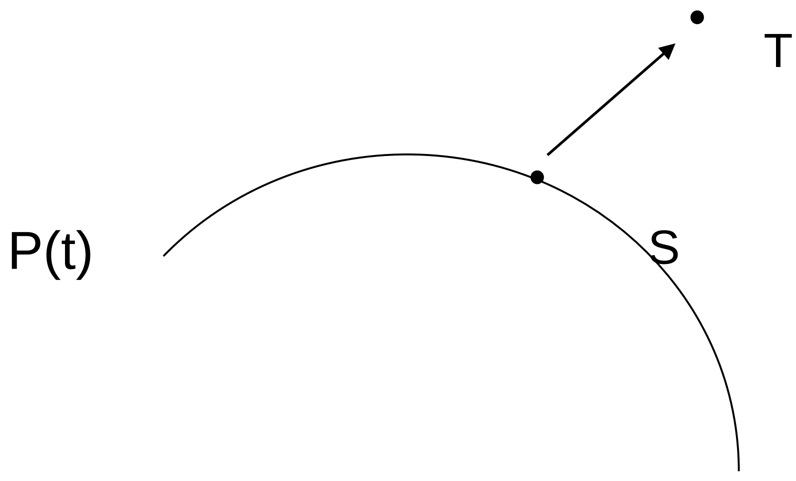
– 修改控制点：
  - 修改一个控制点的位置时，NURBS 曲线的形状会发生变化。

NURBS 曲线的修改

– 几何约束下的形状修改：
  - 问题描述：

    如何计算新的控制点？

    才能让曲线上的一个点 S 变为一个指定的点 T?



NURBS 曲线的修改

– 曲线方程可以写成：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iR_{i,k}(t),\quad t_{k-1}\le t\le t_{n+1}$$

其中：

$$R_{i,k}(t)=\frac{W_iN_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n}W_iN_{i,k}(t)}$$

NURBS 曲线的修改

– 带约束的优化方法 (Constrained optimization method)：

- 假设控制点 $P_l, P_{l+1}, \cdots P_{l+m-1}$ 被修改了，
  给每个控制点一个小的修改：$\varepsilon_i = (\varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y, \varepsilon_i^z)^T$
  然后使用优化方法对修改量进行计算。
  约束条件可以写成：

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i R_{i,k}(t) + \sum_{i=l}^{l+m-1} (P_i + \varepsilon_i) R_{i,k}(t) + \sum_{i=l+m}^{n} P_i R_{i,k}(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P_i R_{i,k}(t) + \sum_{i=l}^{l+m-1} \varepsilon_i R_{i,k}(t) \qquad t_{k-1} \le t \le t_{n+1};$$

NURBS 曲线的修改

- 让：$$\sum_{i=l}^{l+m-1} \left\|\varepsilon_i\right\|^2 = \mathrm{Min}$$
- 加上拉格朗日项：

$$L = \sum_{i=l}^{l+m-1} \left\|\varepsilon_i\right\|^2 + \lambda\left(T - \tilde{P}(t_s)\right)$$

- 求 L 关于各个变量的偏导，可以得到方程：

$$\begin{cases} T = S + \sum_{i=l}^{l+m-1} \varepsilon_i R_{i,k}(t_s) \\ \varepsilon_i = \dfrac{\lambda}{2} R_{i,k}(t_s), \qquad\qquad i = l, l+1, \cdots, l+m-1 \end{cases}$$

NURBS 曲线的修改

- 可以解得：

$$\varepsilon_i = \frac{R_{i,k}(t_s)}{\sum_{j=l}^{l+m-1} R_{j,k}^2(t_s)}(T-S), \quad i = l, l+1, \cdots, l+m-1$$

- 如果仅可以修改一个控制点，那么修改量应该为：

$$\varepsilon = \frac{T-S}{R_{i,k}(t_s)} \qquad (*)$$

这个公式(*)于 1989 年由 Piegl (CAD 前主编) 提出。

- 这个方法可以很容易扩展到其他几何约束问题或者曲面的情况。

NURBS 曲面的修改

– 同样可以使用能量优化的框架来进行 NURBS 曲面形状的修改 (变形):

- 曲线：Strain energy

$$E(p)=\int k^2 ds=\int_0^1\left(\frac{|P'\times P''|}{|P'|^3}\right)^2 dt \longrightarrow E(p)=\int |P''|^2 dt$$

- 曲面：Thin plate energy

$$E(P)=\iint (P_{uu}^2+2P_{uv}^2+P_{vv}^2)dudv,$$

Shi-Min Hu, *et al.*, Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints, CAD, 2001, Vol. 33, No. 12, 903-912. **他引230次**

NURBS 曲面

- NUBRS 曲面的定义：

$$P(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}R_{i,p;j,q}(u,v)\quad u,v\in[0,1]$$

$$R_{i,p;j,q}(u,v)=\frac{\omega_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\omega_{rs}N_{r,p}(u)N_{s,q}(v)}$$

NURBS 曲面

- 四个角 (corner) 的权重都是正数：

$$\omega_{00}, \omega_{m0}, \omega_{0n}, \omega_{mn} > 0$$

- 所有其他权重都是非负数：

$$\omega_{ij} \geq 0$$

- NURBS 曲面与非有理 B样条曲面具有类似的性质：
  - 局部支持性
  - 归一性

NURBS 曲面

- 可微性：对于一个重复度为 k 的节点：
  - 如果它属于 U方向，那么曲线在这个节点处沿 U 方向具有 C^{p-r-1} 的连续性。
  - 如果它属于 V方向，那么曲线在这个节点处沿 V 方向具有 C^{q-r-l} 的连续性。
- 局部极值 (Local extremum):
  - 只要 p,q>1, 也存在极值点

今日人物： Hans-peter Seidel

- **Hans-peter Seidel： Max-Planck-Institut Informatik**

  发表论文**1000**多篇，引用**54995**次，**H-Index: 120**

  - **1978-84，Tübingen**大学学习

    数学与物理
  - **1985**年去**UC Berkeley**学习
  - **1985-1987，Tübingen**大学数学博士
  - **2003**年获**Leibniz-Prize**奖。
  - 年轻时，以三角域上的**B**样条曲面的工作闻名；
  - 发表**131**篇**SIGGRAPH/TOG**论文，多分辨率造型的论文引用**1310**次；

谢谢！