



数字逻辑

第一章 数制与编码

张磊

zhanglei_bit@sina.com

北京理工大学计算机学院

2017~2018学年第二学期

提纲

1.1 信息表示

1.2 数制与算数运算

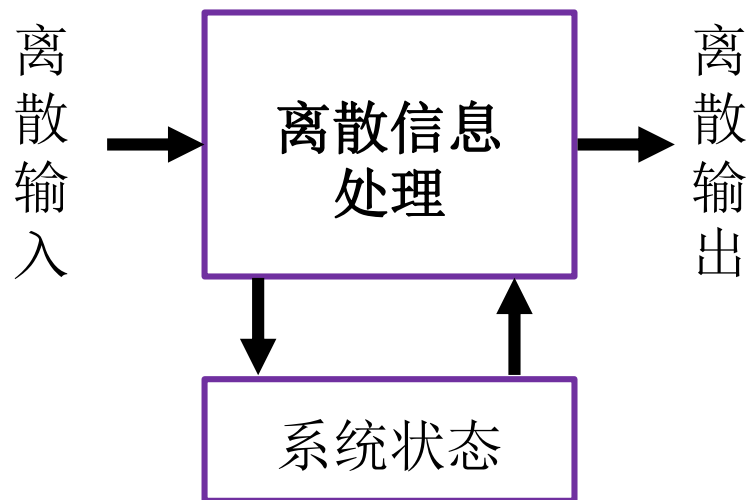
1.3 信息二进制编码

1.4 格雷码

1.5 小结

1.1.1 数字系统

- 数字系统（digital system）是一种离散信息处理系统，采用一组离散形式的信息作为输入，通过一组离散形式的内部信息操控系统状态，产生离散形式的信息作为输出。



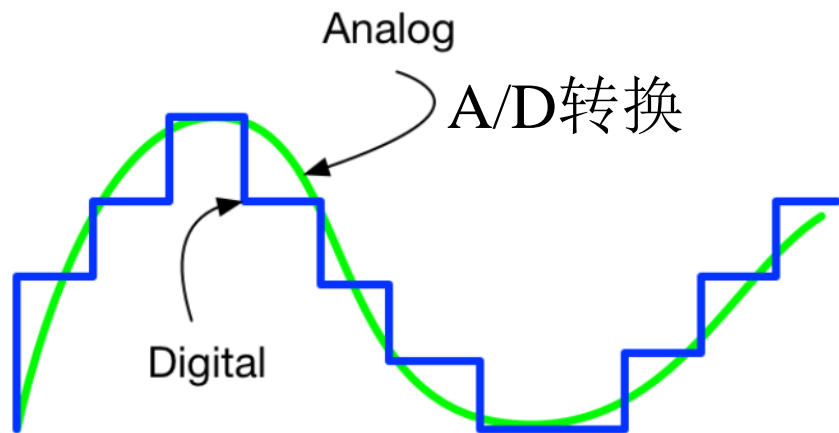
1.1.2 数字系统的信息表示

■ 信息

- 对物质世界与人类社会中存在的各种各样现象的表示

■ 信号是信息表示的物理载体

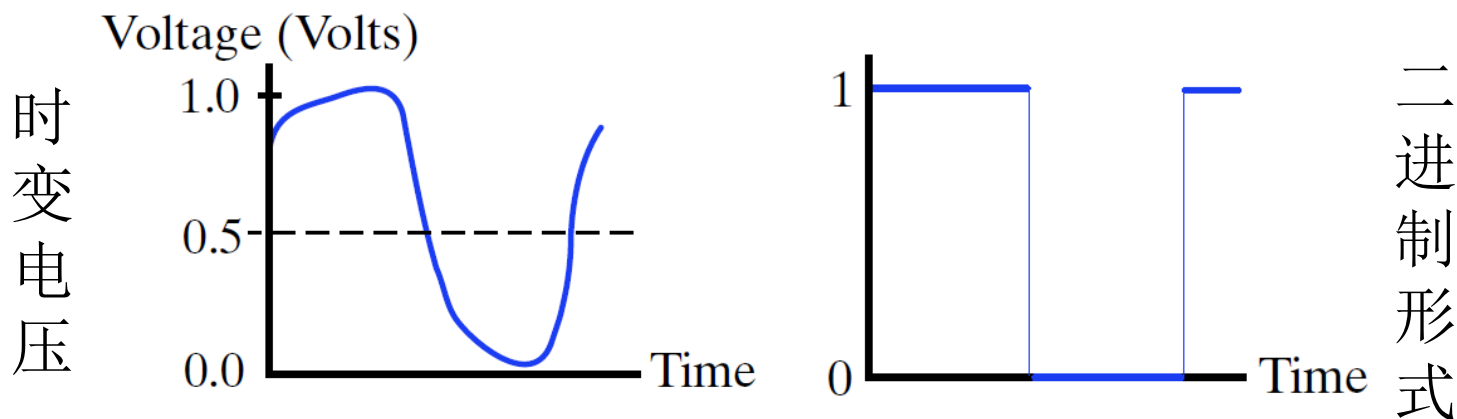
- 模拟信号 (analog signal) : 连续的物理量
- 数字信号 (digital signal) : 离散的物理量



1.1.2 数字系统的信息表示

■ 二进制的实现

- 通过特定物理量（电压）的取值范围进行设置



- 一个二进制数字称为一位（bit）
- 数字系统的信息是通过一组一组的位来表示

0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

提纲

1.1 数字系统与信息表示

1.2 数制与算数运算

1.3 信息二进制编码

1.4 格雷码

1.5 小结

1.2.1 数制

■ 数的表示规则称为数制

■ 基底（**r**）：一个数制所包含的数字符号的个数

二进制	0, 1
八进制	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
十进制	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
十六进制	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

■ 权（**rⁱ**）：数字符号的位置所决定的值

数字

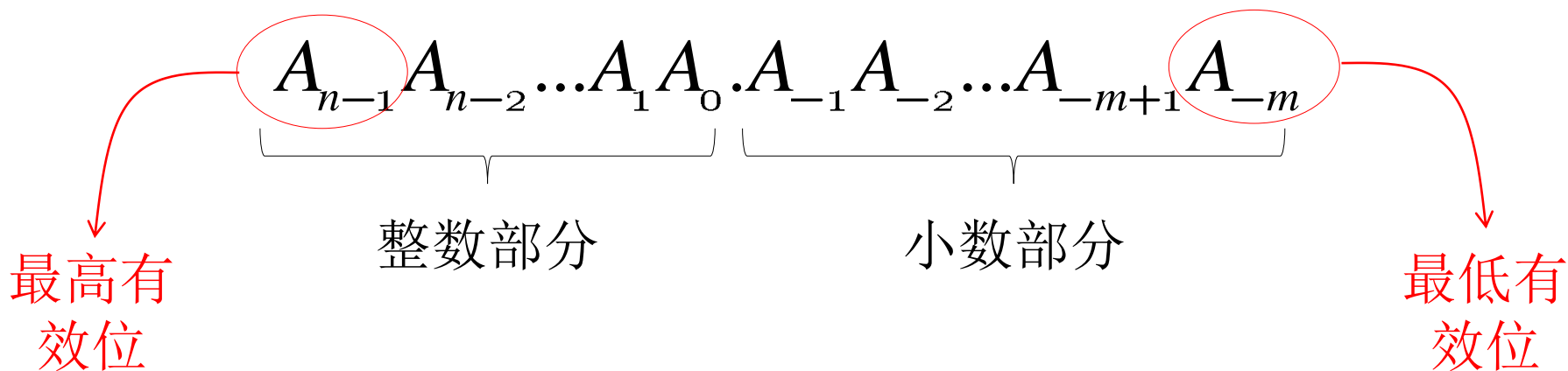
权

$$(101.01)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

1.2.1 数制

■ 数的表示规则称为数制

- 任何一个数值，都是各位数字本身的值与其权之积的总和

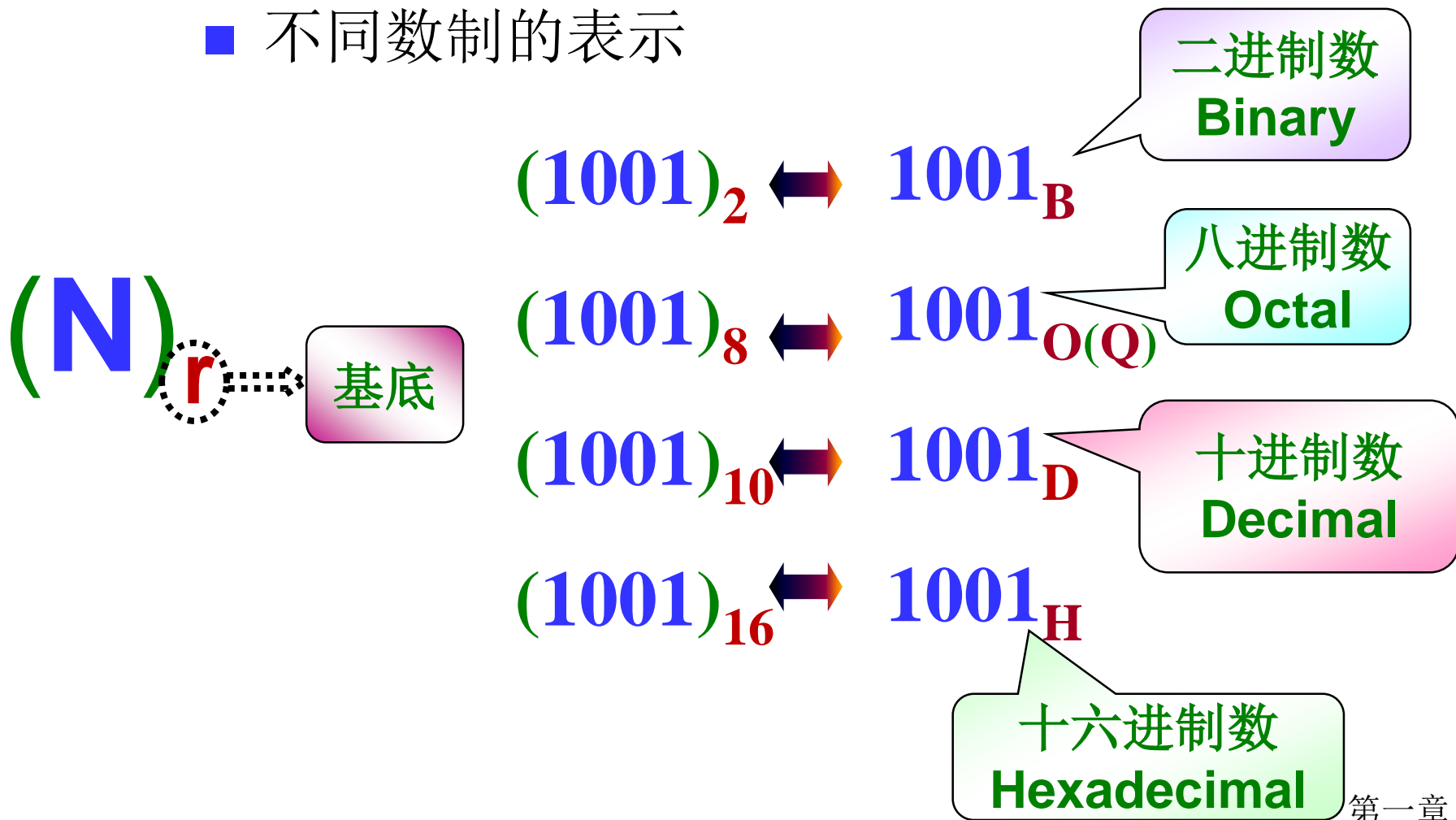


$$(number)_r = \left(\sum_{i=0}^{i=n-1} A_i \cdot r^i \right) + \left(\sum_{j=-m}^{j=-1} A_j \cdot r^j \right)$$

1.2.1 数制

■ 数的表示规则称为数制

■ 不同数制的表示



1.2.1 数制

- 二进制

- 基底为2

- 逢二进一

$$(110.11)_2$$

$$=1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$=6.75$$

2^{10} (1024) 千, 记为 "K"

2^{20} (1,048,576) 兆, 记为 "M"

2^{30} (1,073, 741,824) 十亿, 记为 "G"

2^{40} (1,099,511,627,776) 万亿, 记为 "T"

1.2.1 数制

■ 八进制

- 基底为8
- 逢八进一
- 1个八进制位相当于3个二进制位

$$\begin{aligned} & (7802.41)_8 \\ &= 7 \times 8^3 + 8 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 2 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} + 1 \times 8^{-2} \\ &= 4098.515625 \end{aligned}$$

1.2.1 数制

■ 十六进制

- 基底为16
- 逢十六进一
- 1个十六进制位相当于4个二进制位

$$\begin{aligned} & (70F.4A)_{16} \\ &= 7 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 15 \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} + 10 \times 16^{-2} \\ &= 1807.2890625 \end{aligned}$$

1.2.1 数制

■ 思考题

$(45.6)_{10}$ 和 $(52.1)_8$ 两数谁大?

$$\begin{array}{c} (\quad 4 \quad 5 \quad . \quad 6 \quad)_{10} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\quad 5 \quad 2 \quad . \quad 1 \quad)_8 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 + 1 \times 8^{-1} \end{array} = 42.125$$

1.2.2 数制转换

■ 四种进制关系

■ 十进制

■ 二进制

■ 八进制

■ 十六进制

十进制	二进制	八进制	十六进制
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

1.2.2 数制转换

■ 非十进制数转换为十进制

按权展开法

- 二进制 \Rightarrow 十进制 $(101.101)_2 = (5.625)_{10}$
- 八进制 \Rightarrow 十进制 $(304.6)_8 = (196.75)_{10}$
- 十六进制 \Rightarrow 十进制 $(5CA)_{16} = (1482)_{10}$

1.2.2 数制转换

■ 十进制数转换为非十进制

十进制数分为两类：整数
小数

■ 十进制整数 \Leftrightarrow 二进制

$$(215)_{10} = (11010111)_2$$

除二取余法

■ 十进制小数 \Leftrightarrow 二进制

$$(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$$

乘二取整法

1.2.2 数制转换

■ 二-八-十六进制数间的转换

■ 二进制数 \rightleftharpoons 八进制数

$$2^3 = 8$$

$$(\underline{111}\underline{010}\underline{100}\underline{11}.\underline{101}\underline{11})_2 = (3523.56)_8$$

以小数点为界,分别向左、向右每三位一组进行分割,不足三位补**0**。写出每三位对应的八进制数。

■ 八进制数 \rightleftharpoons 二进制数

$$(3740.562)_8 = (111111000000.10111001)_2$$

1.2.2 数制转换

■ 二-八-十六进制数间的转换

■ 二进制数 \Longleftrightarrow 十六进制数

$$2^4 = 16$$

$$(1111\mathbf{0101}0011.\mathbf{1011})_2 = (\text{F53.B8})_{16}$$

■ 十六进制数 \Longleftrightarrow 二进制数

$$(\mathbf{2AF.C5})_{16} = (1010101111.11000101)_2$$

1.2.2 数制转换

■ 数字范围

■ 数制表示所能包含的数字范围

位数	二进制	范围
8位无符号 整数	0000 0000 ~ 1111 1111	$0 \sim 2^8 - 1$
16位无符号 整数	0000 0000 0000 0000 ~ 1111 1111 1111 1111	$0 \sim 2^{16} - 1$

1.2.3 算数运算

■ 加法

■ X: 被加数; Y: 加数; Z: 进位

Z	0 0 0 0 0	1 0 1 1 0 0
X	0 1 1 0 0	1 0 1 1 0
Y	+ 1 0 0 0 1	+ 1 0 1 1 1
和	1 1 1 0 1	1 0 1 1 0 1

和大于1时向高位产生进位

1.2.3 算数运算

■ 减法

■ X: 被减数; Y: 减数; Z: 借位

Z	0 0 0 0 0	0 0 1 1 0
X	1 0 1 1 0	1 0 1 1 0
Y	- 1 0 0 1 0	- 1 0 0 1 1
差	0 0 1 0 0	0 0 0 1 1

差小于0时向高位产生借位

1.2.3 算数运算

■ 乘法

■ $0 \times 0 = 0$ 、 $1 \times 0 = 0$ 、 $0 \times 1 = 0$ 、 $1 \times 1 = 1$

$$\begin{array}{r} \text{被乘数:} \quad 1\ 0\ 1\ 1 \\ \text{乘数:} \quad \times \quad 1\ 0\ 1 \\ \hline \quad \quad 1\ 0\ 1\ 1 \\ \quad 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \text{积:} \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

提纲

1.1 数字系统与信息表示

1.2 数制与算数运算

1.3 信息二进制编码

1.4 格雷码

1.5 小结

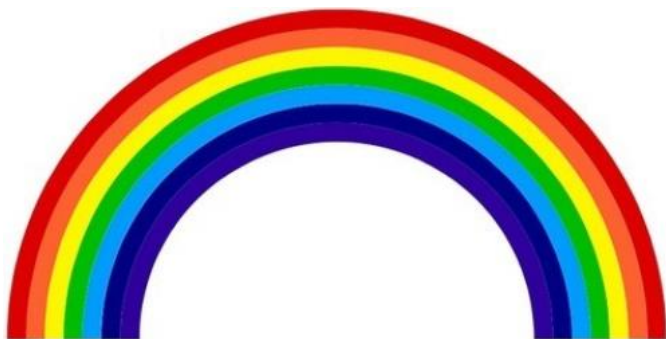
1.3.1 二进制编码

- 通过0、1排列的组合方式表示数据
- n 位二进制编码可以表示 2^n 个数据
- 数据类型
 - 数值型：能够进行算术运算的数据
 - 整数、小数、...
 - 非数值型：一般不需要算术运算的数据
 - 字符、控制符、音频、图像、视频、...



1.3.1 二进制编码

- M个数据需要的二进制位数 $\lceil \log_2 M \rceil$
 - 思考题：七彩色需要几位二进制编码？



颜色	二进制
红	000
橙	001
黄	010
绿	011
蓝	101
靛	110
紫	111

1.3.1 二进制编码

■ 符号数

■ 符号-数值表示法

■ 最高位：0表示正数；1表示负数

十进制	符号-数值
+3	0011
+2	0010
+1	0001
+0	0000
-0	1000
-1	1001
-2	1010
-3	1011
-4	1100

1.3.3 十进制编码

- 用4位二进制表示十进制的10个数字，产生6个冗余的二进制数

Decimal	8,4,2,1	Excess3	8,4,-2,-1	Gray
0	0000	0011	0000	0000
1	0001	0100	0111	0100
2	0010	0101	0110	0101
3	0011	0110	0101	0111
4	0100	0111	0100	0110
5	0101	1000	1011	0010
6	0110	1001	1010	0011
7	0111	1010	1001	0001
8	1000	1011	1000	1001
9	1001	1100	1111	1000

BCD码

1.3.3 十进制编码

■ 二进制编码的十进制数（BCD码）

■ 用4位二进制表示十进制的10个数字

十进制符号	BCD码	十进制符号	BCD码
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

■ BCD码是十进制数

$$(185)_{10} = (0001\ 1000\ 0101)_{\text{BCD}} = (10111001)_2$$

1.3.3 十进制编码

■ 二进制编码的十进制数（BCD码）

- BCD码是8421码

- 加权码，权值8、4、2、1

$$1001 (9) = 1000 (8) + 0001 (1)$$

- 1010到1111在BCD码中没有意义

- 同一个8位二进制代码表示的数，作为二进制数和二进制编码的十进制数时，所代表的数值是不相同的

1.3.4 字符编码

- 用二进制编码表示数字、字母、字符等
- ASCII码
 - 美国信息交换标准编码
 - 7位二进制编码 ($B_6 \dots B_0$)
 - 94个可打印字符+34个控制字符=128个

换行	0AH	10
回车	0DH	13
空格	20H	32
'0'~ '9'		
'A'~ 'Z'		
'a'~ 'z'		

1.3.4 字符编码

<div>b6b5b4</div> <div>b3b2b1b0</div>	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	EXT	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	
1101	CR	GS	-	=	M]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	↑	n	~
1111	SI	US	/	?	O	←	o	

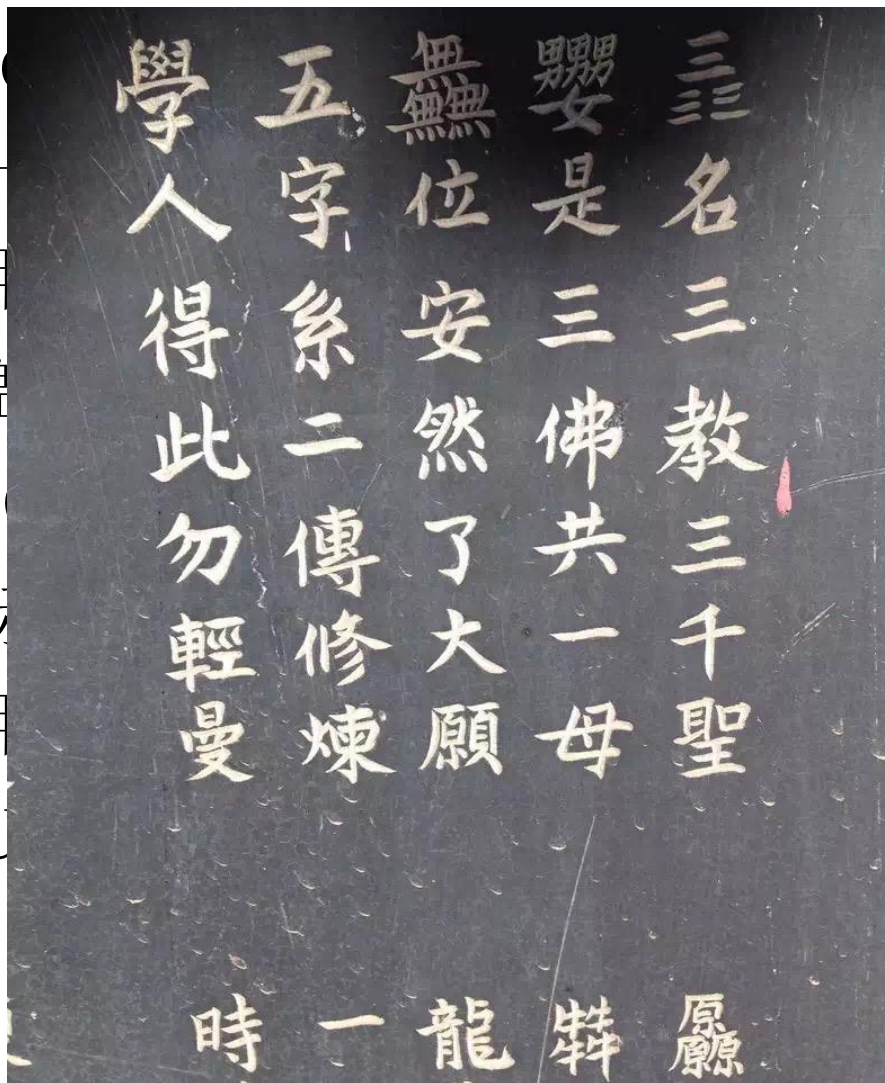
1.3.4 字符编码

- Unicode

- 统一
- 采用
- 涵盖

- UCS

- 国际
- 采用
- 与U



字符与文字

编码标准

1.3.4 字符编码

■ Unicode不同的编码方案

- UTF-8: 变长 1~4字节; 与ASCII码兼容。
- UTF-16: 变长2或者4字节;
- UTF-32: 定长4字节。

Code point range (hexadecimal)	UTF-8 encoding (binary, where bit positions with x are the bits of the code point value)
U+0000 0000 to U+0000 007F	0xxxxxxx
U+0000 0080 to U+0000 07FF	110xxxxx 10xxxxxx
U+0000 0800 to U+0000 FFFF	1110xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
U+0001 0000 to U+0010 FFFF	11110xxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx

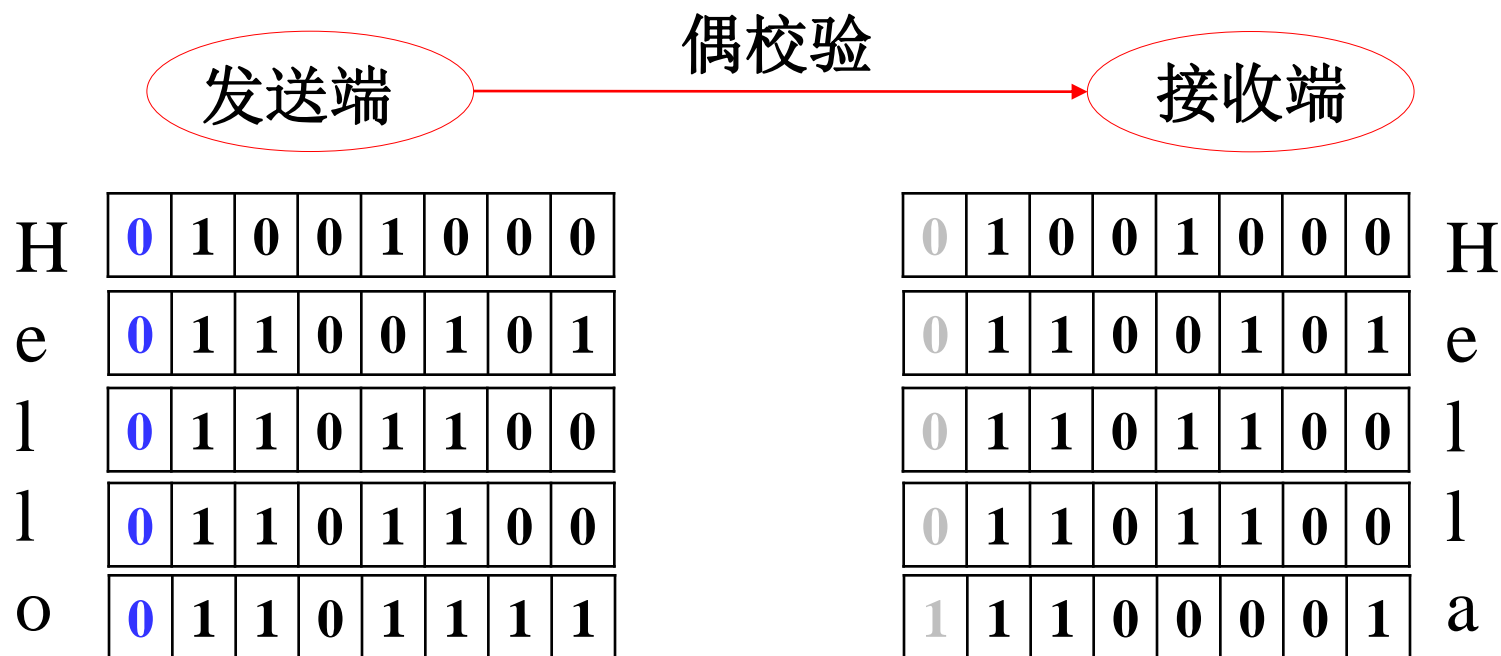
1.3.5 校验位

- 为了检测数据传输过程中可能存在的错误，通常在二进制编码中额外增加一个校验位（parity bit），用于表示编码中1的个数是奇数还是偶数。
 - 偶校验：偶数个“1”，校验位“0”
 - 奇校验：奇数个“1”，校验位“0”

	偶校验	奇校验
1 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 0	1 1 0 1 0 1 0 0	0 1 0 1 0 1 0 0

1.3.5 校验位

- 奇偶校验位是最简单的错误检测码，但无法确定哪一位出错



提纲

1.1 数字系统与信息表示

1.2 数制与算数运算

1.3 信息二进制编码

1.4 格雷码

1.5 小结

1.4.1 基本概念

■ 格雷码定义

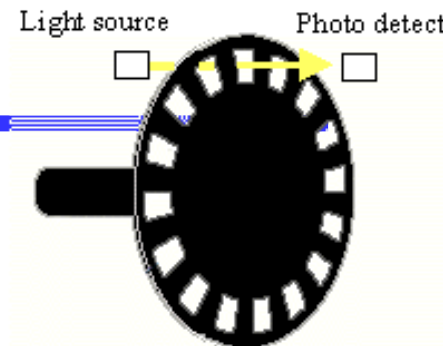
- 在一组数的编码中，若任意两个相邻的代码只有一位二进制数不同，则称这种编码为格雷码（Gray code）

- 美国贝尔实验室

Frank Gray在1953年
获得格雷码的专利

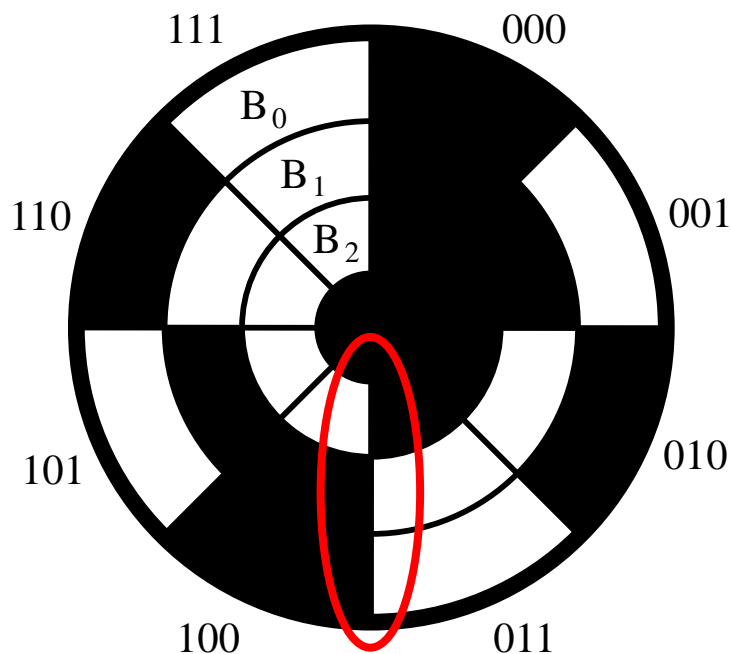
十进制	8,4,2,1	Gray
0	0000	0000
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0111
4	0100	0110
5	0101	0010
6	0110	0011
7	0111	0001
8	1000	1001
9	1001	1000

1.4.1 基本概念

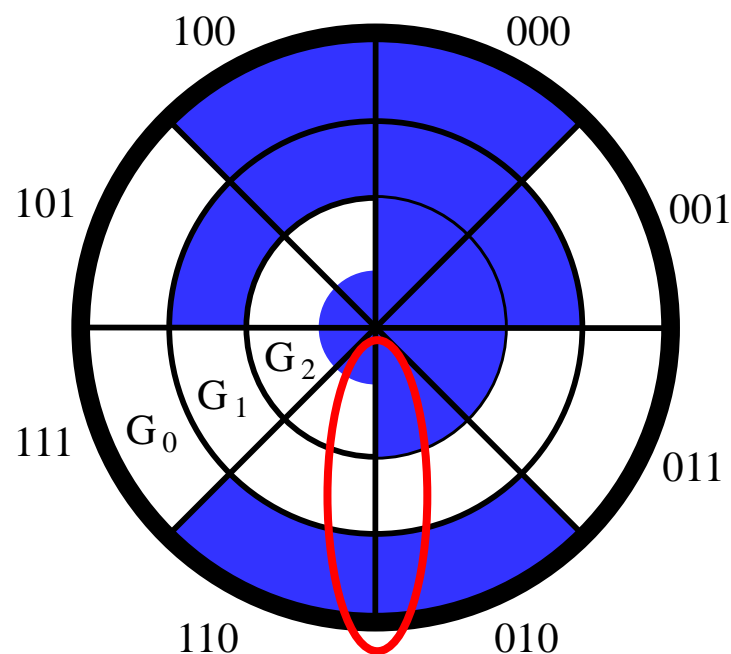


■ 格雷码作用1:

- 在模-数转换过程中减少错误编码，
是一种可靠性编码，如光学轴角编码器



二进制码



格雷码

1.4.1 基本概念

■ 格雷码作用2:

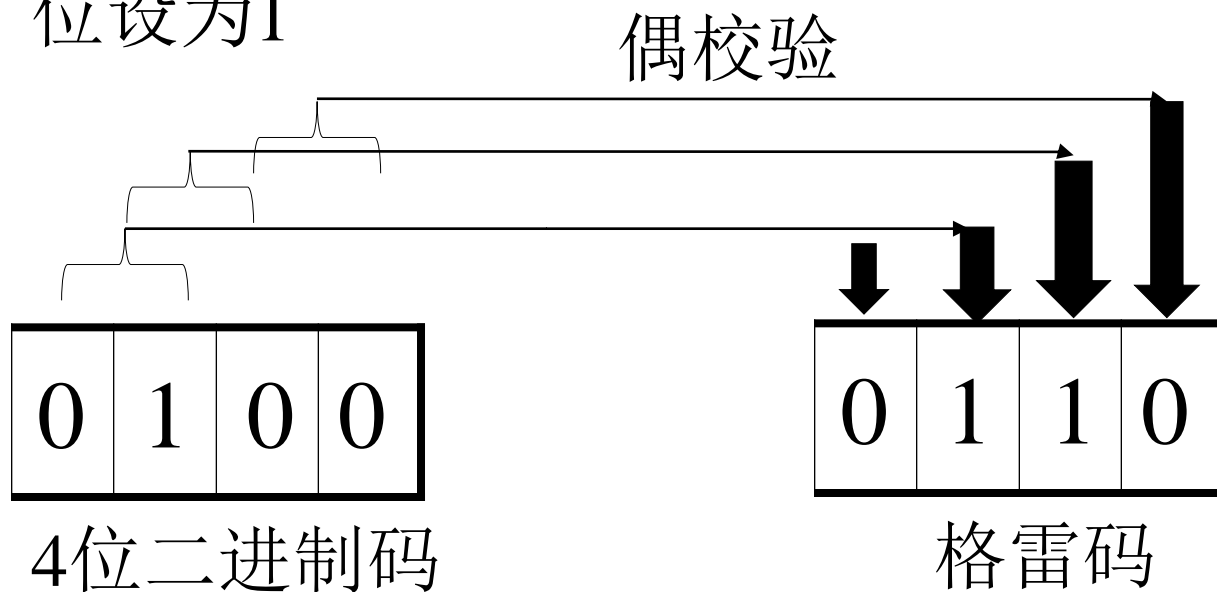
■ 低功耗

Binary Code	Bit Changes	Gray Code	Bit Changes
000		000	
001	1	001	1
010	2	011	1
011	1	010	1
100	3	110	1
101	1	111	1
110	2	101	1
111	1	100	1
000	3	000	1

1.4.2 编码方式

■ n （偶数）位二进制计数序列中的数值

- 前一半数值：左边最高位为0，往右各位由原二进制编码的每一位与它左边相邻位的偶校验构成
- 后一半数值：前一半逆序排列，并将左边最高位设为1



1.4.2 编码方式

■ 例：4位二进制的格雷码

十进制数	自然二进制数	格雷码	十进制数
0	0000	0000	8
1	0001	0001	9
2	0010	0011	10
3	0011	0010	11
4	0100	0110	12
5	0101	0111	13
6	0110	0101	14
7	0111	0100	15



提纲

1.1 数字系统与信息表示

1.2 数制与算数运算

1.3 信息二进制编码

1.4 Parity bit

1.5 格雷码

1.6 小结

小结

- 数制的概念
- 不同数制的转换
 - 二进制与十进制
 - 十进制与非十进制
- 符号数的编码方式
- 十进制编码方式
- ASCII字符编码方式
- 格雷码的概念

作业1（选作）

1-7. 将以下二进制数值转换为十进制：

(a) 1001101 (b) 1010011.101 (c) 10101110.1001

1-10. 将以下十进制数值转换为所要求的进制：

(a) 7562.45 \rightarrow 八进制 (b) 1938.257 \rightarrow 十六进制
(c) 175.175 \rightarrow 二进制

1-25. 请写出十进制数255的以下编码形式：

(a) 二进制 (b) BCD
(c) ASCII码 (d) 带奇校验的ASCII码