

**硕 士 学 位 论 文**

|  |  |
| --- | --- |
| 题 目 | 布尔函数的(快速)代数免疫性相关研究 |
| 英文题目 | Research on the (fast) algebraic  immunity of Boolean functions |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 姓 名 | 张柳 | 学 号 | 111709030 |
| 所在学院 | 工学院 | 导师姓名 | 陈银冬 |
| 专 业 | 计算机软件与理论 | | |
| 入学日期 | 2017. 09. 01 | 答辩日期 | 2020. 05. 31 |

学位论文原创性声明

本文是我个人在导师指导下进行的工作研究及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在论文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律责任由本人承担。

作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人授权汕头大学保存本学位论文的电子和纸质文档，允许论文被查阅和借阅；学校可将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存和汇编论文；学校可以向国家有关部门或机构送交论文并授权其保存、借阅或上网公布本学位论文的全部或部分内容。对于保密的论文，按照保密的有关规定和程序处理。

作者签名： 导师签名：

日期： 年 月 日 日期： 年 月 日

# 摘 要

布尔函数是流密码算法中伪随机密钥流序列生成器的核心部件之一。 为了抵抗已知的密码攻击手段，基于线性反馈移位寄存器的流密码算法中所使用的非线性布尔函数必须兼具可证明的能够抵抗已知密码攻击的性能。在2003年之前，为了避免密码系统遭受基于统计分析的概率攻击，布尔函数应满足平衡性；为了抵抗最佳仿射逼近和快速相关攻击，布尔函数应具有高的非线性度；为了抵抗Berlekamp-Massey算法攻击和Rønjom-Helleseth 攻击，布尔函数应具高的代数次数；为了减少布尔函数的输出比特与输入变量分量之间的统计相关性，为密码系统提供扩散特性，布尔函数应具有良好的自相关性质；为了抵抗分别征服攻击和相关攻击，应用于组合模式中的布尔函数还应当满足高阶弹性。2003年，Courtois和Meier在欧洲密码学年会上将代数攻击应用于基于线性反馈移位寄存器的流密码算法，同年，Courtois在国际密码学年会上提出快速代数攻击方法。为了抵抗代数和快速代数攻击，布尔函数应分别具有高的代数免疫度和良好的快速代数免疫度。本文对一些基于有限域表示的布尔函数的仿射等价关系和快速代数免疫度进行研究，主要工作有：

1. 在计算机辅助验证的基础上，我们研究了**C-F**函数，**Tu-Deng**函数，**T-C-T**函数的仿射等价关系。基于有限域表示的这三类函数，它们的支撑集中都含有共同的参数（）,使得能达到大量性质优良的布尔函数。经研究发现，**当参数取不同值时，这些布尔函数是具有仿射等价的关系**。
2. 在之前的研究中，主要是通过计算机计算布尔函数的快速代数免疫度。经过唐灯的方法的启发下，我们通过数学证明的方法得到了**一类一阶弹性函数的快速代数免疫度大于等于6**。于此同时，**我们也证明了一些起源于Tu-Deng猜想的组合事实**。

**关键词：**流密码；布尔函数；仿射等价；(快速)代数免疫度

# **ABSTRACT**

The Boolean function is the kernel component in some cryptosystems and its cryptographic properties directly determine the security of the cryptosystems. In order to resist the known cryptographic attack, the nonlinear Boolean function used in the stream cipher algorithm based on the linear feedback shift register must have the provable performance to resist the known cryptographic attack. Before 2003, in order to avoid the probability attack based on statistical analysis, the Boolean function should meet the balance;In order to resist the best affine approximation and fast correlation attack, Boolean functions should have high nonlinearity;In order to resist the attack of Berlekamp-Massey algorithm and the attack of Rønjom-Helleseth, Boolean functions should have high algebraic degree;In order to reduce the statistical correlation between the output bits and the input variables of the Boolean function and provide the spreading characteristics for the cryptosystem, the Boolean function should have good autocorrelation property;In order to resist the conquest attack and correlation attack respectively, the Boolean function applied to the combination mode should also satisfy the high-order resilient.In 2003, Courtois and Meier applied algebraic attack to stream cipher algorithm based on linear feedback shift register at European cipher annual conference. In the same year, Courtois proposed a fast algebraic attack method at international cipher annual conference. In order to resist algebraic and fast algebraic attacks, Boolean functions should have high algebraic immunity and good fast algebraic immunity, respectively.In this paper, affine equivalence relations and fast algebraic immunity of Boolean functions based on finite field representation are studied.

1. On the basis of computer-aided verification, we study the affine equivalence of **C-F** function, **Tu-Deng** function and **T-C-T** function. These three kinds of functions based on the finite field representation have the same parameterin their support, which makes them reach a large number of Boolean functions with excellent properties. **It is found that these Boolean functions have affine equivalence when the parameteris different.**
2. In the previous research, the fast algebraic immunity of Boolean function was calculated by computer. Inspired by Tang Deng's method, we get the fast algebraic immunity of **a class of first-order resilient functions by the method of mathematical proof**. At the same time, **we also prove some combinatorial facts originated from Tu-Deng conjecture.**

**Keywords：**stream cipher, Boolean functions, affine equivalence, (fast) algebraic immunity

# 目 录

[摘 要 I](#_Toc13859)

[ABSTRACT II](#_Toc24778)

[目 录 III](#_Toc16370)

[第一章 绪 论 1](#_Toc15313)

[1.1. 研究背景及意义 1](#_Toc6176)

[1.2. 流密码与布尔函数 3](#_Toc32669)

[1.3. 国内外研究现状 9](#_Toc20318)

[1.4. 本文内容及结构 10](#_Toc6948)

[第二章 预备知识 11](#_Toc23974)

[2.1. 布尔函数的基本概念 11](#_Toc24530)

[2.2. 布尔函数的密码学性质 13](#_Toc2731)

[2.3. 序列表示和布尔函数的等价性 15](#_Toc2743)

[第三章 基于本源元表示的布尔函数的平移等价性 18](#_Toc2749)

[3.1.](#_Toc17503) **[C-F](#_Toc17503)**[函数支撑集的平移等价关系 18](#_Toc17503)

[3.2.](#_Toc31687) **[Tu-Deng](#_Toc31687)**[函数和](#_Toc31687)**[T-C-T](#_Toc31687)**[函数支撑集的平移等价关系 20](#_Toc31687)

[3.3. 本章小结 22](#_Toc13395)

[第四章 一类1阶弹性布尔函数的快速代数免疫度的下界 23](#_Toc2903)

[4.1. 一类具有几乎最优代数免疫度的布尔函数 23](#_Toc28033)

[4.2. 一类1阶弹性布尔函数的快速代数免疫度的下界 29](#_Toc5585)

[4.3. 本章小结 32](#_Toc25386)

[第五章 总结与展望 33](#_Toc20532)

[5.1. 论文工作总结 33](#_Toc21001)

[5.2. 后续研究工作展望 33](#_Toc22816)

[参考文献 34](#_Toc10181)

[致谢辞 38](#_Toc13059)

[攻读硕士学位期间的科研成果 39](#_Toc758)

# 绪 论

在信息时代飞速推进的今天，信息安全越来越受到人们的重视。它不仅与国家的政治、军事、外交等活动有关，还与各个团体、单位和个人都密切相关。习近平总书记曾在讲话中指出，没有网络安全就没有国家安全，没有信息化就没有现代化。因此，加快信息安全体系建设，确保国家安全和个人安全，是我国新时代的重大战略。密码学作为信息安全的基石和核心，在构建保密和安全的信息系统中起到重要作用。

布尔函数是许多密码系统的核心部件，其密码学性质的优劣直接决定密码系统的安全性强弱。本章首先介绍布尔函数的研究背景及意义；其次讲述布尔函数在流密码中的应用，流密码的(快速)代数攻击和安全布尔函数的设计准则；接着讲述国内外代数免疫最优旋转对称布尔函数构造和布尔函数快速代数免疫度的研究现状；最后对本文行文结构和主要工作做了简介。

## 研究背景及意义

尽管人们对密码学(Cryptography)的认知可以追溯到几千年前，但这一时期基本都是靠人工对信息进行加密、传输和放破译，其应用也主要局限于军事目的，只为少数人掌握和控制。所以，这一阶段密码学更像是一门技巧性很强的艺术，而不是一门学科，其发展受到了很大的限制。1949年，Shannon[1]在《贝尔系统技术》杂志上发表了题为《保密系统的通信理论》(Communication theory of secrecy system)的文章，为密码学奠定了坚实的理论基础，使密码学发展成为一门真正的学科。后来，随着通信、军事等重要领域的需求，密码学受到人们的重视，1976年到1996年是密码学发展的黄金时段，大量的密码学理论和方法创新成果在这段时间涌现。1976年，Diffie和Hellman[2]发表了《密码学的新方向》(New direction in cryptography)文章，提出了公钥密码的思想，开辟了公钥密码学的研究分支。1977年，美国国家标准局[3]正式公布了美国的数据加密标准(Date Encryption Standard，DES)，公开其算法并批准用于政府和商业上的保密通信。1978年，Rivest，Shamir和Adleman[4]首次提出了实用的公钥密码体制——RSA体制，该密码的安全性是基于大整数因式分解的难解性，极大促进了公钥密码的发展。20世纪末，随着计算机技术和电子通信技术的进步，出现了大批的密码算法和攻击，密码编码学和分析学相互促进，推动密码学理论蓬勃发展。1997年，美国国家标准与技术研究机构[5]推出AES(Advanced Encryption Standard)计划，呼吁寻求满足不同密钥长度且能在各种硬件上工作的密码算法以替代DES，随后在世界范围内征集密码算法。最后，由比利时人Daemen和Rijmen设计的Rijndael算法[6]，在安全性、性能和实现特性等方面均占据绝对优势，被选定为AES算法。继美国AES计划之后，欧洲相继启动了NESSIE计划[7]和ECRYPT计划[8]，在世界范围内征集欧洲新世纪的各类密码算法标准。近几年，我国也在制定和更新各类密码标准。这些计划的兴起，使得密码学走上了“理论+应用”的道路，极大推动密码学理论和方法的迅速发展。

根据密钥的特点，Simmons[9]将密码体制分为两大类——对称密码(又称私钥密码)：加密密钥和解密密钥相同；非对称密码(又称公钥密码)：加解密密钥不同，一个公开发布(即公开密钥)，另一个用户自己秘密保存(即私有密钥)。对称密码最大优势是加解密速度快，适于大数据量进行安全传输，但密钥管理困难。非对称密码机制较为灵活，但加解密速度相对较慢。按照对明文加密方式的不同，对称密码可分为分组密码(Block Cipher)和流密码(Stream Cipher)。分组密码是将明文分块，在每个时钟周期用相同的密钥加密一整个数据块。流密码在加密过程中密钥流序列的产生与密钥生成器在当前时钟的状态相关，在每一个时钟周期用一比特密钥加密一比特明文，所以要求密钥和明文等长。因此，相对于分组密码，流密码具有加密速度快、易于硬件实现、出错概率小等优点，被广泛应用于移动通信、军事通信、外交通信等领域。事实上，对于流密码的研究主要归结为对流密码系统所使用的布尔函数的研究。

我国在流密码研究方面也做出了凸出贡献，由中国科学院数据保护和通信安全研究所中心(DACAS)自主设计的祖冲之算法集(ZUC)受到国际密码学界高度关注[10]，此算法用于数据加密和完整性认证，包括祖冲之算法、加密算法128-EEA3和完整性算法128-EIA3，已经被国际组织3GPP推荐为4G无线通信的第三套国际加密和完整性标准的候选算法。

布尔函数作为许多密码系统的核心部件，其密码学性质直接决定着密码系统的安全性。在Shannon的理论中[1]，设计安全的密码函数需考虑到两个基本原则——混淆(Confusion)和扩散(Diffusion)。混淆是尽量把密文和明文(或密钥)之间的统计关系复杂化，这样攻击者无法从密文中获得任何有效信息；扩散是修改明文(或密钥)的若干比特使其对密文的影响尽可能显著，这样可以隐蔽明文的统计特征。同时，为了抵抗各种已知密码攻击，密码系统中使用的布尔函数必须满足多项密码学性质，尤其是近年来提出的代数攻击[22]和快速代数攻击[24]，对布尔函数提出了更高的要求。因此，布尔函数两方面的研究引起了国内外密码学者的高度关注：一是构造和设计满足多项密码学性质的布尔函数，二是深入研究布尔函数的密码学性质。

## 流密码与布尔函数

流密码系统中，布尔函数通常作为密钥流生成器的非线性部分，与反馈移位寄存器搭配产生安全强度较好的密钥流。并且，应用中的布尔函数需满足多种性质以抵抗已知攻击。

* + 1. 布尔函数在流密码中的应用

流密码也称序列密码，其加密和解密思想非常简单：用一个密钥序列与明文序列进行“异或”来产生密文，用同一个密钥序列与密文“异或”来恢复明文。流密码的模型如图1-1所示。当用来加密的序列是由满足均匀分布的离散无记忆信源产生的随机序列时，相应的序列密码就是所谓的“一次一密”密码体制。Shannon已经证明“一次一密”密码体制在理论上是不可破译的，即密钥序列是随机序列。但随机序列的产生、存储和传送在现实中存在很大困难，因此并不适用于流密码的加解密过程。在实际应用中，用伪随机序列作为加解密序列则更为普遍。伪随即序列是将一个短的消息密钥按照一定的算法生成一个很长的序列。伪随即序列具有预先确定性和重复实现性，同时又具有随即序列的特性，这些特性称为序列的伪随机性。序列密码系统的安全性强弱取决于密钥流伪随机性的好坏。因此，如何设计出能生成周期较长、伪随机性较好序列的密钥流生成器就成了流密码研究的关键问题。



图1-1 流密码模型

在流密码的研究中，人们通常把它分为两个部分：驱动部分和非线性组合部分。驱动部分控制存储器的状态转移，负责提供若干供组合部分使用的周期大、统计特性好的序列；非线性组合部分则将驱动部分提供的序列组合生成满足要求且密码性能良好的密钥流序列。反馈移位寄存器是当代流密码设计的主流，目前技术也比较成熟，其基本部件是布尔函数，级反馈移位寄存器模型结构如图1-2所示。若反馈布尔函数是线性函数，则相应的反馈移位寄存器称为线性反馈移位寄存器(Linear Feedback Shift Register，LFSR)，否则，称为非线性反馈移位寄存器(Non-Linear Feedback Shift Register，NLFSR)。LFSR具有实现简单、速度快、便于分析和计算等优势，已广泛应用于各种数字电路中，是密钥算法中最重要的密钥流构成部件。



图1-2 级反馈移位寄存器模型

从加密角度来说，LSFR产生的伪随机序列密码学性质极弱，不能作为加密密钥。现代密码学中，最常见的方式是用一个满足一定密码学性质的非线性布尔函数对一个具有大周期的LFSR进行滤波或者对多个具有大周期的LFSR进行组合，即滤波模式(图1-3)和组合模式(图1-4)，这样既可以利用LFSR的周期性以便产生较长周期的伪随机序列，又能够将非线性性质引入到生成的序列中，以实现Shannon所提出的混淆和扩散原则，保证产生密钥流序列的安全强度。因此，可以说，基于LFSR的密钥流生成器实现了对“一次一密”的折中。



图1-3 滤波模式



图1-4 组合模式

* + 1. 流密码的(快速)代数攻击

代数攻击是一种在已掌握一些明文及其所对应的密文的条件下实施的攻击。其基本思想起源于Shannon，他认为一个密码算法可以表示成一个大型的多变元方程组，求解这个方程组就可以获取密钥。根据Kerckhoff原则，密码算法的所有细节完全公开，因此，密码分析学者可以根据明文-密文对应关系以及密码算法的结构，建立起以密钥为未知变量的方程组。事实上，密码编码学者也正是基于此方程组求解的复杂度来保证密码系统的安全性。代数攻击正是抓住这一关键点，从建立方程的初步阶段找到了突破点——建立尽可能低次数的方程组，以降低方程组的求解复杂度。在2003年欧密会上，Courtois和Meier[22]成功地将代数攻击用于流密码的分析破译，引起国内外密码学者的广泛关注，使用标准代数攻击，一些著名的密码系统被成功攻破，如日本政府Cryptrec计划中提到的Toyocrypt流密码算法和欧洲NESSIE工程的候选流密码算法LILI-128等。

下面介绍图1-3中非线性滤波函数生成器的代数攻击和快速代数攻击原理。设是LFSR的初始状态(通常与密钥直接相关)，时刻状态为，输出密钥流比特用表示，密码系统中过滤函数是元布尔函数。知道了密钥流比特，就能得到如下方程组

 (1-1)

对于非线性滤波函数生成器也能列出类似的方程。理论上，如果知道足够多的就能建立足够多的方程进而求出密钥。但是若非线性滤波函数的代数次数较高，则求解这个方程组的难度就很大。实际上，代数攻击和快速代数攻击都是在寻求降低上述方程组求解复杂度的方法。

Courtois和Meier[22]提出并证明了布尔函数的低次倍式存在定理：对于任意元布尔函数，存在次数不超过的非零布尔函数，使得的次数不超过。基于该定理，对于高次函数，考虑其较低次数的倍式，其中且的代数次数不超过。用乘以的两边得

,

若，则；若，则。因此，方程组(1-1)能转化为以初始状态为未知数关于**或**的低次方程组，大大降低了求解复杂度。2004年，Meier等[23]将该问题归结为求解布尔函数及其反函数的低次非零零化子的问题，进而提出了代数免疫度(Algebraic Immunity，AI)的概念。自那时起，国内外密码学者提出了多种具有优良代数免疫度的布尔函数构造方法[11]-, [12], [13], [14], [15], [31], [32],44,45]。

后来在2003年美密会上，Courtois[24]改进标准代数攻击并提出了快速代数攻击：考虑的倍式，其中且的代数次数远小于，的代数次数小于的代数次数。在获取了一些连续的密钥流比特之后，通过找到关于的一个线性组合，来得到关于的一个线性组合。显然，快速代数攻击的实施不需要求出大量的线性无关零化子来建立方程，只需要找到关于的一个特殊的倍式关系，但是需要更多的明文-密文来获得连续的密钥比特流。因此，快速代数攻击对布尔函数提出了更高的要求。快速代数攻击对Toyocrypt、LILI-128和蓝牙通信中的E0密码算法都非常有效。为了衡量布尔函数抵抗快速代数攻击的能力，文献[28]引进了快速代数免疫度(Fast Algebraic Immunity，FAI)的概念。目前对于快速代数免疫度的研究还处于起步阶段，只有极少数布尔函数的快速代数免疫度得到严格证明，更为普遍的做法是用计算机程序对较小变元的函数进行测试，以此来说明该类函数抵抗快速代数攻击的能力。标准代数攻击和快速代数攻击的复杂度比较见表1-1。

表1-1 两类代数攻击方法的复杂度比较

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 攻击方法 | 计算复杂度 | 空间复杂度 |
| 标准代数攻击 |  |  |
| 快速代数攻击 |  |  |

注: 表中，，是线性反馈移位寄存器的级数，是的代数免疫度，是的代数次数。

* + 1. 安全的布尔函数设计准则

布尔函数作为设计序列密码、分组密码和Hash函数的重要组件，其密码学性质的好坏直接关系到密码体制的安全性。布尔函数的安全性指标是衡量布尔函数密码学性质好坏的重要参数，这些安全性指标的提出和密码分析方法有着十分密切的联系。布尔函数的安全性指标主要有：平衡性、代数次数、非线性度、相关免疫阶、弹性阶、代数免疫度和快速代数免疫度[19]。

* + **平衡性**

反馈移位寄存器序列中反馈函数、滤波序列中的滤波函数、非线性组合序列中的非线性组合函数等均采用布尔函数作为基本组件。序列密码体制产生的密钥流是否具有高的安全强度，取决于他们是否具有良好的伪随机特性。平衡性高就是序列伪随机特性的一个重要方面。一条序列称为平衡的是指该序列中不同元素出现的次数至多相差一个，比如周期为偶数的二元序列是平衡的，是指其中0和1的出现个数相同。一个元布尔函数是平衡的，当且仅当其真值表中0和1的个数相同，也就是该布尔函数的Hamming重量为。

* **代数次数**

密码体制中使用的布尔函数通常具有高的代数次数，无论是序列密码体制还是分组密码体制，低代数次数的密码组件就有可能遭到Berlekamp-Massay攻击、插值攻击、代数攻击和高阶差分攻击等密码攻击的威胁。比如，在非线性组合序列生成器中，假定个驱动序列的线性复杂度分别为，非线性组合函数为



则非线性组合序列的线性复杂度



这表明非线性组合函数的代数次数较低时，所残生的非线性组合序列的线性复杂度就不会太高，容易遭到Berlekamp-Massay攻击。同样在滤波序列生成器中，假定驱动部分线性反馈移位寄存器长度为，滤波函数为



则滤波函数的线性复杂度



这表明滤波函数的线性复杂度也与滤波函数的代数次数有关，低的代数次数将导致滤波函数序列线性复杂度降低，容易遭到Berlekamp-Massay攻击。在分组密码算法的设计与分析中，如果盒的分量函数使用低代数次数的布尔函数，就有可能使得高阶差分密码攻击和代数攻击有效。

值得注意的是，在布尔函数的小项表示中，每个形如的项都含有次项，因此当且仅当的重量为奇数。这说明如果是平衡函数，则，即平衡函数的代数次数至多

* **非线性度**

为抵抗线性密码攻击，密码体制中所使用的布尔函数应该离所有仿射函数的距离尽可能大。布尔函数的非线性度定义为和所有仿射函数的最小距离，即。

也可表示为

。

由于一列实数的最大值一定不小于它们的平均值，于是由恒等式，对任意元布尔函数，有

。

达到这个上界的布尔函数称为函数。由于一列数的最大值等于平均值的充要条件是该列数是常数，故函数的谱值只能为或。注意到布尔函数的非线性度是一个整数，故只有当是偶数时，函数才可能存在。

* **代数免疫度**

代数免疫度(Algebraic Immunity，AI)[21], [23]的提出与代数次数有关，代数攻击的基本思想是将密码体制的破译问题归结到代数方程组的求解。人们在破译LILI-128和Toyocrypt等序列密码时，发现如果密码体制使用的布尔函数或者具有低次的零化子，那么密码体制可能遭到代数攻击。

布尔函数的零化子定义：设，的零化子是指满足的布尔函数。如果将布尔函数的全体零化子的集合记为，容易证明是布尔函数环中的一个主理想，即可以表示为一个元素生成的理想。事实可以证明

。

布尔函数的代数免疫度定义为使得或者成立的非零布尔函数的最小代数次数，即

。

可以证明，元布尔函数的代数免疫度不超过。如果一个元布尔函数的代数免疫度恰好等于，则称该布尔函数是代数免疫度最优的函数。

* **快速代数免疫度**

快速代数免疫度(Fast Algebraic Immunity，FAI)[28]是衡量布尔函数抵抗快速代数攻击能力的指标，定义为与的较小值，其中表示的代数免疫度，表示的代数次数。密码系统中布尔函数应具备较高的快速代数免疫度。元布尔函数的快速代数免疫度若达到(或)，则称该函数具有最优(或几乎最优)快速代数免疫度。

## 国内外研究现状

对于元布尔函数，若存在一个代数次数较低的函数使得的代数次数不大于，那么快速代数攻击对于就是有效的[24]-, [25], [26]。为了抵抗快速代数攻击，密码系统中使用的布尔函数需满足较高的快速代数免疫度[27], [28]。2012年，刘美成等[29]提出了完美代数免疫(Perfect Algebraic Immune, PAI)的概念，是元布尔函数，是任意正整数且，若对于任意次数不小于的函数都有的代数次数不小于，则称是完美代数免疫函数。并且他们[29]证明了元布尔函数具有完美代数免疫度当且仅当或；并且仅当变元数量是，存在平衡完美代数免疫函数，仅当变元数量是，存在不平衡完美代数免疫函数。实际上，完美代数免疫函数具有最优代数免疫度和最优快速代数免疫，且代数次数不低于是[29]。2012年，王启春等[30]给出了快速代数免疫度关于高阶非线性度的一个上界。**C-F**函数[12]和**T-C-T**函数[32]是目前比较有代表性的两类布尔函数，它们都有最优代数免疫度、高非线性度、最优代数次数和较好的快速代数免疫度等性质。2012年，刘美成等[29]证明了变元数量为的**C-F**函数是完美代数免疫函数；2014年，他们[33]还证明了**T-C-T**函数对于任意变元都有几乎最优快速代数免疫度。2017年，唐灯等[34]构造了一大类代数免疫最优1阶弹性函数，这类函数兼有最优代数次数和很高的非线性度下界等良好性质，且能从理论上证明其快速代数免疫度不小于。这是1阶弹性函数的快速代数免疫度下界第一次得到理论上的证明。然而到目前为止，对于变元数量大于16的布尔函数，即使是依靠计算机程序辅助计算，确定其快速代数免疫度仍然是非常困难的事情。

## 本文内容及结构

本文对一些基于有限域表示的布尔函数的仿射等价关系和快速代数免疫度进行研究，论文的研究内容和组织结构如下：

第二章主要介绍布尔函数的基本概念，包括布尔函数的常见表示方法、主要密码学性质。

第三章研究了**C-F**函数，**Tu-Deng**函数，**T-C-T**函数的仿射等价关系。基于有限域表示的这三类函数，它们的支撑集中都含有共同的参数（）,使得能达到大量性质优良的布尔函数。经研究发现，当参数取不同值时，这些布尔函数是具有仿射等价的关系。

第四章通过数学证明的方法得到了一类一阶弹性函数的快速代数免疫度大于等于6。于此同时，我们也证明了一些起源于**Tu-Deng**猜想的组合事实。

第五章对本文完成的主要工作做了总结，并对进一步的工作进行了展望。

# 预备知识

本章首先介绍布尔函数及其表示的基本概念；其次介绍一些关于序列表示和布尔函数等价关系的基础知识。

## 布尔函数的基本概念

设是二元有限域，为正整数，是上的维向量空间，从到的映射称为元布尔函数。如果记全体元布尔函数的集合为，则关于布尔函数的加法和乘法构成了一个环，称为布尔函数环。易知布尔函数环中元素个数为，也就是说，共有个不同的布尔函数。

如果指定中元素的一个排列顺序，并将布尔函数在这些元素上的取值一次写入一个向量，则得到上的一个长为的向量，该向量就称为布尔函数的真值表。常见的一种排列方法是视元素中的为最低位，为最高位，按照整数二进制表示之值递增的顺序排列，此时布尔函数的真值表形如：

。

每一个布尔函数都可以用它的真值表唯一表示。满足且的全体元素的集合称之为的支撑集或开集，记之为或；满足且的全体元素的集合称之为的闭集，记之为；集合中所含元素的个数称为的Hamming重量，记为。如果一个元布尔函数满足，则称该函数是平衡的，即

，

这里表示集合中所含元素的个数。

设,和的Hamming距离定义为

。

由定义可知，和的Hamming距离实际上为差函数的Hamming重量，即

。

一个元布尔函数还可以表示为上的含个变元的多项式：



 （2-1）

这里，，+表示中的加法运算，即模2加运算。形如式（2-1）的表示称为布尔函数的小项表示。若将小项表示展开并合并同类项，则会得到如下形式的一个多项式：



， (2-2)

这里系数。

注意到上形如式(2-2)的多项式个数和元布尔函数个数相同，它们均为，并且当且仅当所有系数为0，所以布尔函数形如式（2-2）的表示形式存在且唯一，称该表示形式为的代数正规型（Algebraic Normal Form，ANF）。若记集合，用表示的幂集，即的所有子集构成的集合，则的代数正规型还可以表示为

， （2-3）

这里。

非零布尔函数的代数正规型中系数非零项所含有最多变元的个数称为它的代数次数，记为，即

，

规定零函数的代数次数为0.代数次数不超过1的布尔函数称为仿射函数，全体元仿射函数的集合记为，即

。

常数项等于0的仿射函数称为线性函数，全体元线性函数的集合记为，即

。

由于当且仅当对任意，都有，于是对任意给定的，令,则布尔函数在元素处的值可以表示为

。 （2-4）

## 布尔函数的密码学性质

密码系统中所使用的布尔函数必须同时满足多项密码学性质以抵抗各种已知攻击，主要包括平衡性，高非线性度，高代数次数，较好的(快速)代数免疫度等。

* + **平衡性**

密钥流生成器产生的密钥流是否具有伪随机特性决定流密码系统的安全性强弱。平衡性是衡量伪随机性的一个重要方面。若密码系统中使用的布尔函数输出序列中0和1数量不等，那么密码系统就无法抵抗基于统计分析的概率攻击。因此，平衡性是安全的布尔函数基本设计准则之一。布尔函数平衡性可由Walsh变换来描述。

**引理2.1** 若布尔函数是平衡的，则。

* + **代数次数**

为了抵抗Berlekamp-Massey算法攻击[16], [17]和Rønjom-Helleseth攻击[18]，应用中的布尔函数应具有较高的代数次数。因此，高代数次数也是安全的布尔函数的基本设计准则之一。

对于元平衡布尔函数，其中，即的汉明重量是偶数，由(2-2)式计算的系数为



因此有如下引理：

**引理2.2** 若布尔函数的汉明重量是偶数，则。

* + **非线性度**

为了抵抗最佳仿射逼近[19]和快速相关攻击[20]，密码系统中的布尔函数与所有仿射函数的汉明距离应尽可能大。由此产生了非线性度的定义。

**定义2.1** 布尔函数的非线性度是其与所有仿射函数的最小汉明距离。对于布尔函数，其非线性度为

.

另外，对，由Walsh谱的定义可得



因此，布尔函数的非线性度可由Walsh变换等价表示为

 (2-6)

* + **(快速)代数免疫度**

代数免疫度[21], [23]是衡量布尔函数抵抗代数攻击的能力，代数攻击的基本思路是将密码系统破译问题归结到代数方程组的求解问题。若密码系统使用的布尔函数或其反函数存在低次零化子，那么代数攻击对该密码系统就是有效的。

**定义2.2** ([23]) 对于两个布尔函数，若，则称是的一个零化子。元布尔函数的所有零化子组成的集合记为。布尔函数的代数免疫度定义为及所有非零零化子代数次数的最小值，即



若元布尔函数的代数免疫度达到了上界[23]，则称具有最优代数免疫度。

布尔函数具有较高的代数免疫度是抵抗代数攻击的必要条件，而绝非充要条件。对于元布尔函数，若存在一个代数次数较低的非零函数使得的代数次数远小于，那么快速代数攻击对于就是有效的[24]-[26][25]。为了抵抗快速代数攻击，密码系统中使用的布尔函数需满足较高的快速代数免疫度[27], [28]。

**定义2.3** ([28]) 布尔函数的快速代数免疫度为



若的快速代数免疫度达到(或)，则称具有最优(或几乎最优)快速代数免疫度。

## 序列表示和布尔函数的等价性

两个元布尔函数和是仿射等价的当且仅当这存在一个上的的可逆矩阵和一个上的向量使得：

，

这里。因为两个仿射等价布尔函数有相同的代数次数，与此同时也拥有相同的代数免疫度。因此，布尔函数的代数次数和代数免疫度是仿射不变量。

令寄存器生成一个周期为的序列，并且序列满足递归关系：

，

这里。与此同时，是它的生成多项式并且是本源的。（转置）伴随矩阵（我们称它为序列的生成矩阵）是

。

令为时刻时寄存器的状态。然后下一时刻的寄存器状态被确定通过

.

如果寄存器的初始状态是，那么序列能被表示为。这里可以是任意非零维列向量，因此这里有个对应于个不同的序列。令，序列能够表示为

，

这里。

因为次数为的本源多项式的数量是，所以这有个生成序列，并且不同的对应不同的序列。因为，这存在个序列，每个序列能够表示为

，

这里，是序列的生成矩阵，并且。显而易见，是的初始状态。

令。显而易见，这存在两个使得，这里是的一个子集。我们定义两个函数为和。那么与不相同仅当和。给定任意的，通过使用和作为滤波函数生成的密钥流是相同的。因此，和能够被看成相同的函数。令

。

那么任意的能够通过它的支撑集表示为如下形式

，

这里的寄存器的生成军阵，并且。

Rønjom和Cid提出了布尔函数的非线性等价性，定义如下[41]

**定义2.4** 令为一个通过过滤生成器残生的密钥流当有本源反馈多项式和滤波函数。是与等价的如果这存在一个被过滤和能产生相同密钥流的。特别的是，如果这两个有相同的生成多项式，我们说和是线性等价的，并且定义为。否则，和是非线性等价的，并且定义为。

# 基于本源元表示的布尔函数的平移等价性

本章首先证明了**C-F**函数支撑集的平移等价关系。接着采用相似的证明方法证明了**Tu-Deng**函数和**T-C-T**函数支撑集的平移等价关系。

## C-F函数支撑集的平移等价关系

Carlet和冯克勤构造了一类具有最优代数免疫度的布尔函数（**C-F**函数）基于有限域的本源元和布尔函数的单变元表示。

**构造3.1（[37]）**令为大于1的整数，为上的本源元。当是一个元的布尔函数，它的支撑集为

，

这里是一个整数，那么布尔函数有最优代数免疫度。

在**C-F**函数的支撑集中存在一个参数，当我们对取不同值时，**C-F**函数的支撑集是不相同的，随之对应的布尔函数也是不相同的。因此，根据这个构造方法，我们能得到大量具有最优代数免疫度的布尔函数。但是，我们发现当参数取不同值时，得到的布尔函数是仿射等价的，并且它的代数次数、代数免疫度和非线性度是不变量。

随后，王启春利用上的本源多项式的伴随矩阵构造了一类具有最优代数免疫度的布尔函数[38]。构造1的主要结果完全等价于通过代替二元序列的本源多项式的伴随矩阵生成的构造2.

**构造3.2（[38]）**令为大于1的整数，是长度为的序列。当是一个元的布尔函数，它的支撑集为



这里定义为上的全零向量，那么布尔函数有最优代数免疫度。

事实上，构造1和构造2已经被证明是仿射等价的[39]。

**引理3.1（[39]）**令为大于1的整数，是上的次数为的本源多项式。如果是的一个根，并且是一个非零序列，那么这存在一个上的基使得

。

**引理3.2 （[40]）**令,并且

，

这里是序列的生成矩阵，。清晰可见，任意能够 被表示为

，

这里，是一个生成矩阵，并且。

**定理3.1** 令为大于1的整数，为上的本源元。当是一个元的布尔函数，它的支撑集为

，

这里是一个整数。当参数取不同值时，所生成的布尔函数是仿射等价的。

**证明：** 从引理3.1中得知每一个在**C-F**函数支撑集中的都有一个非零序列与之相对应。令为时刻寄存器中的状态。那么下一时刻的状态为

.

如果寄存器的初始状态是，那么这个序列能够表示为

。

因为

，

所以

。

因此，我们能将**C-F**函数表示为

。

从引理3.2可知给定一个，它的生成矩阵为，令，并且

。

显而易见，任意能够被表示为

，

这里是一个生成矩阵，。最后，我们能得到当参数取不同值时，所生成的**C-F**函数是仿射等价的。

## Tu-Deng函数和T-C-T函数支撑集的平移等价关系

涂自然和邓映蒲构造了一类具有最优代数免疫度的函数，它是属于Dillon定义的类[31]。通过修改它的真值表，这个函数能被修改成一个平衡布尔函数。虽然它的非线性度有所降低，但它仍然具有最优代数免疫度。但是，在本文中，我们研究的重点是仿射等价关系。

**构造3.3（[31]）**令，是上的本源元。布尔函数定义如下

。

布尔函数定义如下

。

**定理3.2**令，是上的本源元。布尔函数定义如下

，

布尔函数的支撑集能被定义为

，

这里，是一个整数。

**证明** 我们假定是上的本源元，是上的本源元，所以。通过构造3.3，我们能假设，因此

，

并且。令为上的任一元素。是-向量空间 的一个基。因此，我们有。令，所以。通过的支撑集，我们知道当时，。最后，我们知道布尔函数的支撑集为

。

经**Tu-Deng**函数的启发，唐灯通过将函数替换为的方法提出了两类变元为的具有优良性质的布尔函数。第一类函数是不平衡的，它的汉明重量为，代数次数为，并且具有非常高的非线性度。

**构造3.4 （[32]）**令，为上的一个本源元。集合，这里是一个整数。那么布尔函数定义如下

，

这里布尔函数的支撑集为。

**定理3.3**令，是上的本源元。布尔函数定义如下

，

布尔函数的支撑集能被定义为

，

这里，是一个整数。

**证明** 证明过程与定理3.2相似。

**定理3.4** 当参数取不同值时，**T-C-T**函数是仿射等价的。与此同时，**Tu-Deng**函数也是仿射等价的。

**证明** 我们首先证明**T-C-T**函数是仿射等价的当参数取不同值时。**T-C-T**函数的支撑集可以写作

。

我们能将**T-C-T**函数的支撑集的每个元素看作是两部分，以作为分隔。我们令，。从定理3.1得知当参数取不同值时，由得到的布尔函数是仿射等价的。此外，的使用仅仅是安排后的第个位置的值为1，这样增加了真值表中1的数量。只要是确定的，那么的位置就是在后不断移动的。因此对支撑集的平移等价性是没有影响的。故当参数取不同值时，**T-C-T**函数是仿射等价的。相同的证明过程可以得到**Tu-Deng**函数也是仿射等价的。

## 本章小结

本章研究了基于上的本源元构造的布尔函数的仿射等价关系。尽管这三个构造并没有提供大量的性质优良的布尔函数，但这三个构造本身都具有非常优秀的密码学性质。通过研究布尔函数的仿射等价性对我们去构造布尔函数是非常有帮助的。

此部分研究工作已整理成文章Translation equivalence of Boolean functions expressed by primitive element，并于2019年4月发表在IEICE TRANS.FUNDAMENTALS期刊。

# 一类1阶弹性布尔函数的快速代数免疫度的下界

本章通过数学证明的方法得到了一类一阶弹性函数的快速代数免疫度大于等于6。在之前的研究中，主要是通过计算机计算布尔函数的快速代数免疫度。于此同时，我们也证明了一些起源于**Tu-Deng**猜想的组合事实。

## 一类具有几乎最优代数免疫度的布尔函数

近些年，利用**C-F**函数作为一个组件，使用二元多项式表达的方法已经得到了大量优秀的构造。在2013年，唐灯提出了两类具有非常优秀密码学性质的布尔函数，但是它们不是1阶弹性的，这是一个缺点当布尔函数作为一个滤波函数使用时[32]。

**构造 4.1 （[32]）**令，是上的一个本源元，，这里。布尔函数定义如下：

 （4-1）

这里定义在上，并且。

**主张4.1 （[32]）**构造4.1中变元布尔函数包括四个密码学性质：

1.  ，；
2. ；
3. ；
4. 。

由于后续证明的需要，我们需要修改构造4.1从而我们得到了一类具有次优代数免疫度的布尔函数。在构造4.1中，的基数是。我们会减少的基数从而获得基数为的。

**构造 4.2**令，是上的一个本源元，，这里。布尔函数定义如下：

 （4-2）

这里定义在在上，并且。

为了证明构造4.2的代数免疫度，我们需要去证明一些通过修改**Tu-Deng**猜想[31]产生的组合事实。最后，我们得到了一些新的引理。

**引理 4.1 （[42]）**对于，令

。

那么。

**引理 4.2**对于，令

。

那么。

**证明** 因为移位等价性，能够被表示为如下的形式：

，

这里。

如果，即，令

，

那么和。因此。

假设现在，并且令，那么

。

情形1：是偶数。令



这里。因为

，

所以存在。显而易见，，并且

。

因此。

情形1：是奇数。令



这里。因为

，

所以存在。显而易见，，并且

。

因此。

因此，对于任意的，这总是存在至少一个，所以。

**引理4.3** 对于，令

。

那么。

**证明** 显而易见，

。

从引理4.1和引理4.2，可知和。因此

.

**引理4.4** 对于，令

。

那么。

**证明** 当，，并且，即。

情形1：是奇数。我们有。所以







,

因为对于奇数，。

情形1：是偶数。我们有。所以







。

因为对于偶数，。

证明完成。

从引理4.3和引理4.4，我们能推断出以下引理：

**引理 4.5** 对于，令

。

那么。

**定理4.1** 令为构造4.2中变元的布尔函数。那么是。

**证明** 从构造4.2中，我们能看出。

首先，假定是的一个代数次数小于的零化子，即

1. 对于所有的，。
2. 当时，。这暗示当时，

。

因此

,

这里



，

当,对于时，。

因此，当，向量



是一个码的码字，它的长度为，设计距离为。此外，当它有元素在中时，它的码字为零。由于界，当它的码字为非零时，它的汉明重量不少于。但从引理4.5得知，它的汉明重量不超过。因为，这个码字不得不为零，即

，

这里。因此，我们能得到当。所以，。

现在讨论的情况。假定是的一个代数次数小于的零化子。相似的，

，

这里。因此，向量



是一个码的码字，它的长度为，设计距离为。此外，当它有元素在中时，它的码字为零。由界的定义可知，当它的码字为非零时，它的汉明重量至少为。从引理4.5，我们能推断出它的汉明重量最多，产生了一个矛盾。所以，。

从以上的讨论可知，和的零化子的代数次数最小值不小于。所以，。

## 一类1阶弹性布尔函数的快速代数免疫度的下界

通过稍微的修改构造4.1，唐灯得到了一类具有极其优秀密码学性质的1阶弹性函[43]。

**构造 4.3 （[43]）**令，是上的一个本源元，和，这里。布尔函数定义如下；

 （4-3）

这里属于（4-1），并且包括以下三部分：

* ；
* ；
* 。

换句话说， 包括以下四部分：

* ；
* ；
* ；
* 。

**定理 4.2 （[43]）**令, 是构造4.3中的元布尔函数。那么布尔函数的代数免疫度是，即。

我们将会给出构造4.3的一个快速代数免疫度的下界。与此同时，我们需要如下的两个引理。

**引理 4.6** 令，是上的一个本源元，



这里。当布尔函数有时，的代数次数大于等于，这里。

**证明** 首先，从定理4.1中可知，有代数免疫度当和是（4-2）中定义的布尔函数。我们知道的非零零化子的代数次数不小于。其次，很容易看出是构造4.2中的的一个非零零化子当。因此，的代数次数大于等于。证明完毕。

**引理 4.7** 令，是上的一个本源元，



这里和。对于每个，如果我们选择一个任意元素，那么这将会有个不同的对使得等于1如果，这里。

**证明** 很容易看出因为当且仅当和，这里与条件矛盾。显而易见，因为。那么我们得到。换句话说，我们也有。因此，为了去证明这存在不同的元素对使得等于1，我们必须证明对于任意的，这有不同的元素对使得。由于



注意如果、、。由以上两个等式可得，即。的基数是。也就是说，。因此，并且。当，有两种情况需要去考虑：

1. ，。
2. ，。

所以这有个不同的元素对使得。证明完毕。

**定理 4.3** 令, ，构造4.3中的布尔函数的快速代数免疫度至少为。

**证明** 为了证明布尔函数的快速代数免疫度至少为当，我们应该证明当和。我们将使用反证法证明这个结论。假设

当这有一个布尔函数，并且。之后，通过（4-3）我们知道

 （4-4）

这里属于（4-1），并且的支撑集为

。这有两种情况需要考虑。

情形1：，这里。通过引理4.6，我们知道。因为是的一个非零零化子，并且从定理4.2可知的非零零化子的代数次数不小于，所以。在此情况下，我们有与我们的假设矛盾。

情形2：。那么这必须存在一个元素使得。

从引理4.7可知，这有存在元素使得等于1当和。我们知道是非零的，并且。在（4-4）的两边分别乘上得到

。

因为是的一个非零零化子，所以我们得到

。

从以上证明我们得知这有一个非零函数使得，这里。当，它是与主张4.1的第四条矛盾的。当，它与矛盾。

因此，它是不可能的去假设，故我们有。证明完毕。

## 本章小结

本章证明了一类1阶弹性布尔函数的快速代数免疫度大于等于。为了证明本节的一个布尔函数的代数免疫度，我们证明了一些来源于**Tu-Deng**猜想的组合事实。通过这个方法，我们同时也能证明一些其他的1阶弹性布尔函数有相同的快速代数免疫度下界。但是，所得到的下界仍与快速代数免疫度的真实值有一定差距。如果能够寻找到更低代数次数的布尔函数，那么我们将能提升快速代数免疫度的下界吗，这也是我们后续研究的方向。

此部分研究工作已整理成文章A Lower Bound of Fast Algebraic Immunity of A Class of 1-Resilient Boolean Functions，并于2019年12月在IEEE ACCESS期刊发表。

# 总结与展望

本章对论文完成的工作进行总结，并对后续可开展的研究工作进行展望。

## 论文工作总结

在实际应用中，满足多项密码学性质的布尔函数对于维护密码系统的安全性发挥关键性作用。为了抵抗各种已知密码攻击，密码系统中使用的布尔函数应同时满足以下几个性质：平衡性，良好的(快速)代数免疫度，高非线性度，高代数次数等。本文主要对布尔函数的密码学性质进行研究，并提供了一种密码学性质良好的布尔函数构造方法。

本文完成的研究工作及取得的创新性研究成果主要包括：

（1）在计算机辅助验证的基础上，我们研究了**C-F**函数，**Tu-Deng**函数，**T-C-T**函数的仿射等价关系。基于有限域表示的这三类函数，它们的支撑集中都含有共同的参数（）,使得能达到大量性质优良的布尔函数。经研究发现，当参数取不同值时，这些布尔函数是具有仿射等价的关系。

（2）在之前的研究中，主要是通过计算机计算布尔函数的快速代数免疫度。经过唐灯的方法的启发下，我们通过数学证明的方法得到了一类一阶弹性函数的快速代数免疫度大于等于6。于此同时，我们也证明了一些起源于**Tu-Deng**猜想的组合事实。

## 后续研究工作展望

结合本文的研究工作，下一步的研究工作主要包括：

# 参考文献

1. Shannon C E. Communication theory of secrecy systems [J]. Bell Labs Tech. J., 1949, 28 (4): 656-715.
2. Diffie W, Hellman M. New direction in cryptography [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 1976, 22 (6): 644-654.
3. NBS. Data Encryption Standard [S]. Washington D C: FLIPS PUB 46, National Bureau of Standards, 1977.
4. Rivest R L, Shamir A, Adleman L M. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems [J]. Communication of the ACM, 1978, 21 (2): 120-126.
5. NIST. Advanced Encryption Standard (AES) [S]. Washington D C: Federal Information Processing Standards, 2001.
6. Daemen J, Rijmen V. The design of Rijndael: AES-The Advanced Encryption Standard [C]. Berlin: Springer-Verlag, 2002: 221-227.
7. European IST. NESSIE Project [EB/OL]. <http://www.cryptonessie.org>.
8. European IST. ECRYPT Project [EB/OL]. <http://www.nist.gov/aes>.
9. Simmons G J. Symmetric and Asymmetric Encryption [J]. Acm Computing Surveys, 1979, 11 (4): 305-330.
10. <http://dacas.cn>.
11. Carlet C, Dalai D K, Gupta K C, Maitra S. Algebraic immunity for cryptographically significant Boolean functions: analysis and construction [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52 (7): 3105-3121.
12. Carlet C, Feng K Q. An infinite class of balanced functions with optimal algebraic immunity, good immunity to fast algebraic attacks and good nonlinearity [C]. Advances in Cryptology, ASIACRYPT 2008, Berlin, Germany, Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5350: 425-440.
13. Carlet C, Zeng X Y, Li C, Hu L. Further properties of several classes of Boolean functions with optimum algebraic immunity [J]. Des. Codes Cryptogr., 2009, 52 (3): 303-338.
14. Chen Y D, Lu P Z. Two classes of symmetric Boolean functions with optimum algebraic immunity: Construction and analysis [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2011, 57 (4): 2522-2538.
15. Li J, Carlet C, Zeng X Y, Li C L, Hu L, Shan J Y. Two constructions of balanced Boolean functions with optimal algebraic immunity, high nonlinearity and good behavior against fast algebraic attacks [J]. Des. Codes Cryptogr., 2015, 76 (2): 279-305.
16. Massey J. Shift-register synthesis and BCH decoding [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 1969, 15(1): 122-127.
17. Rueppel R, Staffelbach O. Products of linear recurring sequences with maximum complexity [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 1987, 33(1): 124-131.
18. Ronjom S, Helleseth T. A new attack on the filter generator [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2007, 53(5): 1752-1758.
19. Ding C S, Xiao G Z, Shan W J. The stability theory of stream ciphers [M]. In: Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1991, 561: 81-129.
20. Meier W, Staffelbach O. Fast correlation attacks on stream ciphers [C]. Advances in Cryptology, EUROCRYPT 1988, Lecture Notes in Computer Science, 1988, 330: 301-314.
21. Dalai D K, Gupta K C, Maitra S. Results on algebraic immunity for cryptographically significant Boolean functions [C]. International Conference on Cryptology in India, INDOCRYPT 2004, Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3348: 92-106.
22. Courtois N T, Meier W. Algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback [C]. Advances in Cryptology, EUROCRYPT 2003, Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2656: 345-359.
23. Meier W, Pasalic E, Carlet C. Algebraic attacks and decomposition of Boolean functions [C]. Advances in Cryptology, EUROCRYPT 2004, Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3027: 474-491.
24. Courtois N T. Fast algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback [C]. Advances in Cryptology, CRYPTO 2003, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2729: 176-194.
25. Armknecht F. Improving fast algebraic attacks [C]. Fast Software Encryption, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3017: 65-82.
26. Hawkes P, Rose G G. Rewriting variables: The complexity of fast algebraic attacks on stream ciphers [C]. Advances in Cryptology, CRYPTO 2004, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3152: 390-406.
27. Carlet C, Tang D. Enhanced Boolean functions suitable for the filter model of pseudo-random generator [J]. Des. Codes Cryptogr., 2015, 76(3): 571-587.
28. Liu M C, Lin D D. Fast algebraic attacks and decomposition of symmetric Boolean functions [Online]. ArXiv preprint, available online: <https://arxiv.org/pdf/0910.4632>, 2009.
29. Liu M C, Zhang Y, Lin D D. Perfect algebraic immune functions [C]. Advances in Cryptology, ASIACRYPT 2012, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7658: 172-189.
30. Wang Q C, Johansson T, Kan H B. Some results on fast algebraic attacks and higher-order non-linearities [J]. IET Information Security, 2012, 6(1): 41-46.
31. Tu Z R, Deng Y P. A conjecture on binary string and its applications on constructing boolean functions of optimal algebraic immunity [J]. Des. Codes Cryptogr., 2011, 60 (1): 1-14.
32. Tang D, Carlet C, Tang X H. Highly nonlinear Boolean functions with optimal algebraic immunity and good behavior against fast algebraic attacks [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2013, 59 (1): 653-664.
33. Liu M C, Lin D D. Almost perfect algebraic immune functions with good nonlinearity [C]. 2014 IEEE International Symposium on Information Theory, 2014, 1837-1841.
34. Tang D, Carlet C, Tang X H, Zhou Z C. Construction of Highly Nonlinear 1-Resilient Boolean Functions With Optimal Algebraic Immunity and Provably High Fast Algebraic Immunity [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2017, 63 (9): 6113-6125.
35. Qu L J, Li C, Feng K Q. A note on symmetric Boolean functions with maximum algebraic immunity in odd number of variables [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2007, 53 (8): 2908-2910.
36. Peng J, Wu Q S, Kan H B. On symmetric Boolean functions with high algebraic immunity on even number of variables [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2011, 57 (10): 7205-7220.
37. C. Carlet, K. Feng, An Infinite Class of Balanced Functions with Optimal Algebraic Immunity, Good Immunity to Fast Algebraic Attacks and Good Nonlinearity[C], International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security: Advances in Cryptology. Springer-Verlag, 2008:425-440.
38. Q. Wang, J. Peng, H.Kan, Constructions of Cryptographically Significant Boolean Functions Using Primitive Polynomials[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(6):3048-3053.
39. H. Chen, T. Tian, W. Qi, On the affine equivalence relation between two classes of Boolean functions with optimal algebraic immunity[J]. Designs Codes Cryptography, 2013, 67(2):175-185.
40. Q. Wang, T. Johansson, On Equivalence Classes of Boolean Functions[M] Information Security and Cryptology - ICISC 2010. Springer Berlin Heidelberg, 2010:311-324.
41. Rønjom, S., Cid, C.: Nonlinear Equivalence of Stream Ciphers. In: Hong, S., Iwata, T. (eds.) FSE 2010. LNCS, vol. 6147, pp. 40–54. Springer, Heidelberg (2010), <http://www.isg.rhul.ac.uk/~ccid/publications/NL-equivalence.pdf>
42. Q. Jin, Z. Liu, B. Wu, "1-resilient Boolean function with optimal algebraic immunity," Cryptology ePrint Archive, Report 2011/549, <http://eprint.iacr.org/>.
43. D. Tang, C. Carlet, X. Tang, "A class of 1-resilient Boolean functions with optimal algebraic immunity and good behavior against fast algebraic attacks," International Journal of Foundations of Computer Science, vol. 25, no. 6, pp. 763-780, 2014.
44. Dalai D K, Maitra S, Sarkar S. Basic theory in construction of Boolean functions with maximum possible annihilator immunity [J]. Des. Codes Cryptogr., 2006, 40 (1): 41-58.
45. Qu L J, Feng K Q, Liu F, Wang L. Constructing symmetric Boolean functions with maximum algebraic immunity [J]. IEEE Trans.Inf. Theory, 2009, 55 (5): 2406-2412.

# 致谢辞

感谢我的硕士导师陈银冬老师，是他带领我走进神奇的密码学世界，引领我从事有趣的布尔函数研究。陈老师为学严谨，为人谦和，从他身上我学到了很多做人和求知的道理。在此向陈老师表示衷心的感谢！

感谢科研团队学科负责人蔡伟鸿老师，是他悉心培养我们良好的科研习惯，精心提升我们的科研素养，并为我们提供了整洁舒适的科研环境。

感谢科研团队熊智老师、蔡玲如老师和其他同学给予我的帮助。

感谢我的父母，他们的信任、坚守和默默付出无时无刻不在激励着我。他们是我最坚实的后盾，让我在求学路上能走得更远，更坚定。这篇论文也是我送给他们的第一份礼物。

感谢汕大求学的三年时光。

# 攻读硕士学位期间的科研成果

* + - 1. Chen Yindong，**Zhang Liu**，Tang Deng and Cai Weihong. Translation equivalence of Boolean functions expressed by primitive element. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Science, 2019, E102-A(04):672–675.
      2. Chen Yindong, **Zhang Liu**, Guo Fei, et al. Fast algebraic immunity of 2m+2 & 2m+3 variables majority function. IEEE ACCESS, 2019,7: 80733-80736.
      3. Chen Yindong, **Zhang Liu**, Xu jianlong, et al. A Lower Bound of Fast Algebraic Immunity of A Class of 1-Resilient Boolean Functions. IEEE ACCESS, 2019,7: 90145-90151.
      4. Chen Yindong, **Zhang Liu**, Gong zhangquan, et al. Constructing Two Classes of Boolean Functions with Good Cryptographic Properties. IEEE ACCESS.2019,7: 149657-149665.