线性代数期中试卷 答案 (2020.11.21)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&1&2&3\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&5&7\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5&7\\-1&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+7+5+6=21.$

解法二：$D=\begin{vmatrix}0&0&0&21\\-1&1&2&3\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-21\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&-1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=21.$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&3\\1&-1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-6&8\\4&5\\2&2\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}$，求 X 使得 $A(X-B)=C$.

解：$(A,C)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&15&-7\\0&1&0&2&-2\\0&0&1&-10&6\end{array}\right)$，则：$Y=X-B=\begin{pmatrix}15&-7\\2&-2\\-10&6\end{pmatrix}$，故：$X=B+Y=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$.

解法二：$(A,AB+C)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&1&-11&3\\2&1&3&0&29\\1&-1&1&-5&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&9&1\\0&1&0&6&3\\0&0&1&-8&8\end{array}\right)$，故：$X=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$，

解法三：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&-1&-7\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&3&1&-5\end{array}\right)$，故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-1&7\\-1&0&1\\3&1&-5\end{pmatrix}$，

于是 $X=B+A^{-1}C=\begin{pmatrix}-6&8\\4&5\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15&-7\\2&-2\\-10&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}4&18&-8\\-1&x&4\\-3&-12&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&y&1\\1&2&0\end{pmatrix}$，且 A 相似于 B，求参数 x,y.

解：$A\sim B$，故 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B),|A|=|B|$，即 $4+x+5=1+y+0,-2(2x+15)=-2y$，得：$x=-7,y=1$.

解法二：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda-x&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}$，

即：$\lambda^3-(x+9)\lambda^2+(9x+62)\lambda+4x+30=\lambda^3-(y+1)\lambda^2+(y-2)\lambda+2y$，
比较系数得到：$x=-7,y=1$.

解法三：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda-x&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}$，

取 $\lambda=0$ 有 $2(2x+15)=2y$，取 $\lambda=1$ 有 $-48-4(3x+9)=-4+2(3-y)$，解得 $x=-7,y=1$.

解法四：相似矩阵有相同的特征值，$\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-y)(\lambda-2)$，有特征值 $\lambda=-1,y,2$.

故有 $|-E-A|=-6(x+7)=0$，于是 $x=-7$.

而 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda+7&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$，有特征值 $\lambda=2,-1,1$，故 $y=1$.

4. 已知矩阵 $A,B\in\mathbf{R}^{3\times3}$，$A$ 有特征值 $-1,-2,2$，且有 $|A^{-1}B|=2$，求 $|B|$.

解：$|A^{-1}B|=|A^{-1}|\cdot|B|=|A|^{-1}|B|=2$，故 $|B|=2|A|=2*(-1)(-2)(2)=8$.

解法二：易知 A^{-1} 有特征值 $-1,-1/2,1/2$，故 $|A^{-1}|=(-1)(-1/2)(1/2)=1/4$.

于是 $2=|A^{-1}B|=|A^{-1}|\cdot|B|=|B|/4$，得 $|B|=8$.

5. 已知列向量 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}^n,(n>2)$，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，若 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2\\ \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2\end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B)=2$.

证：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$，则 $B=A^{\mathrm T}A$. 若 x 满足 $Bx=\theta$，则 $x^{\mathrm T}Bx=(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=0$，故 $Ax=\theta$.
又 α_1,α_2 线性无关，故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2$，故 $x=\theta$，于是 $Bx=\theta$ 只有零解，从而 $\mathrm{r}(B)=2$.

证法二：假设 $\mathrm{r}(B)\neq 2$，则 $|B|=\begin{vmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2\\ \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2-\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2-(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2=0$，
即 $(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2$. 柯西不等式 $(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2\le\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2$，当且仅当 α_1,α_2 成比例时等式成立，此即 α_1,α_2 线性相关，与条件矛盾，故 $\mathrm{r}(B)=2$.

二.(10分) 解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3+4x_4 &=-11,\\ x_1+ax_2+2x_3-7x_4 &=7,\\ 3x_1-x_2-2x_3-5x_4 &=0.\end{cases}$

解：$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&-5&4&-11\\1&a&2&-7&7\\3&-1&-2&-5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&a+3&-2a-6&3a+8\end{array}\right)$.

当 $a=-3$ 时, $(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&0&0&-1\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=2<\mathrm{r}(A,b)=3$，方程组无解.

当 $a\neq-3$ 时，$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&(2a+5)/(a+3)\\0&1&0&0&-1/(a+3)\\0&0&1&-2&(3a+8)/(a+3)\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=2$，

方程组有无穷多组解，通解为 $x=\begin{pmatrix}(2a+5)/(a+3)\\-1/(a+3)\\(3a+8)/(a+3)\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}, k\in\mathbf{R}$.

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{2\times3},\mathrm{r}(A)=2$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix},b\neq\theta$，且有 $A\xi_1=2b,A\xi_2=3b$.
写出 $Ax=b$ 的通解并求特解 η 使得 $\eta^{\mathrm T}\eta=\min\{x^{\mathrm T}x\mid Ax=b\}$ (使得 $x^{\mathrm T}x$最小的解).

解：$A\xi_1=2b,A\xi_2=3b$，故设 $\eta=\xi_2-\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\alpha=3\xi_1-2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$，
则有 $A\eta=A(\xi_2-\xi_1)=3b-2b=b, A\alpha=A(3\xi_1-2\xi_2)=6b-6b=\theta$.
又有 $\mathrm{r}(A)=2$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含1个向量，故 $Ax=b$ 的通解为 $x=\eta+k\alpha,k\in\mathbf{R}$.
由 $x^{\mathrm T}x=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-2+k)^2+(2-3k)^2+(1-k)^2=11k^2-18k+9=11(k-9/11)^2+18/11$，
当 $k=9/11$ 时，特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm T}$ 使得 $x^{\mathrm T}x$ 最小.

解法二：设 $\eta_1=\dfrac12\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac32\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac13\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac53\\1\\\frac23\end{pmatrix},\alpha=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}\frac16\\-\frac12\\-\frac16\end{pmatrix}$，
则有 $A\eta_1=A(\dfrac12\xi_1)=\dfrac12 2b=b, A\alpha=A(\eta_1-\eta_2)=b-b=\theta$，又 $\mathrm{r}(A)=2$,故通解为$x=\eta_1+k\alpha,k\in\mathbf{R}$.
令 $f(k)=x^{\mathrm T}x=(-\dfrac32+\dfrac k6)^2+(\dfrac12-\dfrac k2)^2+(\dfrac12-\dfrac k6)^2$，则 $f'(k)=\dfrac{11k}{18}-\dfrac76=0$，解得最小点 $k=\dfrac{21}{11}$，
代入通解得所求特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm T}$.

四. (15分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\12\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 向量组中去掉一个向量，使得去掉该向量后向量组的秩减小.

解：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&0&3/2&0&-1/2\\0&1&-1/2&0&-1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$，一个极大无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

易知 $\alpha_3=\dfrac{3}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2,\alpha_5=-\dfrac{1}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2$.

(2) 从行简化梯形 B 可以看出，去掉 $(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 后，行简化梯形 B 的秩由3减为2，
故去掉向量组中对应的向量 α_4 即可.

解法二：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&3&0&0&-2\\0&-2&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$，

易知 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的一个极大无关向量组为 β_1,β_3,β_4，且有 $\beta_2=3\beta_1-2\beta_3,\beta_5=-2\beta_1+\beta_3$，
则对应 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$，并有 $\alpha_2=3\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_5=-2\alpha_1+\alpha_3$.

(2) 因为 β_4 不能由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5$ 表示，故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 表示，去掉 α_4 将使得向量组的极大无关组缩小，即秩减小.

五.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\5&-4&-5\\-2&2&5\end{pmatrix}$.

(1) 计算 A 的特征值和特征向量；(2) 求一个2次多项式 $f(x)$，使得矩阵 $B=f(A)$ 有一个3重的特征值.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-1\\\lambda-1&\lambda+4&5\\0&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，解得特征值 $\lambda=1$(二重),2.

$\lambda=1$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_1\xi_1,\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=2$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-5/2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_2\xi_2,\xi_2=(4,5/2,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$，则 $f(A)=A^2-3A+2E$ 的特征值为 $f(1),f(1),f(2)$，
即 $0,0,0$，故特征值为3重的0.

(2)的解法二：设 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $f(A)=A^2+aA+bE$ 的特征值为 $f(1)=1+a+b=f(2)=4+2a+b$，
解得 $a=-3$，b 可取任意值，不妨取 $b=0$，则 $f(x)=x^2-3x$，得到3重的特征值为 $f(1)=f(2)=-2$.

(2)的解法三：因为 $(1-1.5)^2=0.25=(2-1.5)^2$，故取 $f(x)=(x-3/2)^2$，
则 $f(A)=(A-1.5E)^2=A^2-3A+2.25E$ 的特征值为 $f(1)=f(2)=0.25$，为3重特征值.

六.(10分) 设矩阵$A\in\mathbf{R}^{n\times n},\mathrm{r}(A)=n-1$,证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为列向量,且有$A\alpha=\theta,A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.
(矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)

证：$\mathrm{r}(A)=n-1$，我们有 $|A|=0$，且 $Ax=\theta$ 基础解系含1个向量，设为 $\alpha\neq\theta$，则 $A\alpha=\theta$.

因为 $AA^*=|A|E=O$，故 A^* 的列为 $Ax=\theta$ 的解，故有 $A^*=(k_1\alpha,\cdots,k_n\alpha)=\alpha(k_1,\cdots,k_n)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

又有 $A^*A=|A|E=O$，故 $A^{\mathrm{T}}(A^*)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\gamma\alpha^{\mathrm{T}}=O$，由 $\alpha\neq\theta$ 得 $A^{\mathrm{T}}\beta=\gamma=\theta$.

证法二：$\mathrm{r}(A)=n-1$，则$|A|=0$，A存在非零$n-1$阶子式，故$A^*\neq O$，从而 $\mathrm{r}(A^*)\geq 1$.

因为 $AA^*=|A|E=O$，故 $0=\mathrm{r}(AA^*)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-n=\mathrm{r}(A^*)-1$，故 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$.

由 $\mathrm{r}(A^*)\geq 1$ 和 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$ 可得 $\mathrm{r}(A^*)=1$.

我们有分解 $A^*=P\begin{pmatrix}1&\\&O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，

其中P,Q可逆，$\alpha,\beta^{\mathrm{T}}$分别为$P$的第一列和$Q$的第一行，且 $\alpha,\beta\neq\theta$.

$O=AA^*=A\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(A\alpha)\beta^{\mathrm{T}}$，$\beta\neq\theta$，故 $A\alpha=\theta$. 同理由 $A^*A=O$ 可得 $\beta^{\mathrm{T}}A=\theta^{\mathrm{T}}$，从而 $A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.