线性代数期中试卷　(2021.4.24)

一. 简答与计算题(本题共6小题，每小题8分，共48分)

1. 计算 $A_{11}+M_{12}-M_{13}$，此处 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{vmatrix}$.

2. 计算 A^{2021}，此处 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-2&-1\\1&-1&2&1\\0&0&0&0\\2&-2&4&2\end{pmatrix}$.

3. A 与 B 是 3 阶方阵，$AB=\begin{pmatrix}6&2&7\\2&-1&1\\7&3&3\end{pmatrix}, C=BA$，求 $c_{11}+c_{22}+c_{33}$.

4. 计算 $(A^*)^*$，此处 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

5. 计算矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$.

6. $A=(a_{ij})_{3\times3}, \mathrm{r}(A)=1, \alpha_1$、$\alpha_2$与$\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的三个解向量，$\alpha_1+\alpha_2=(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，
$\alpha_2+\alpha_3=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3+\alpha_1=(3,0,4)^{\mathrm{T}}$，求 $Ax=b$ 的通解.

二.(10分) 设有三个互异的实数 t_1,t_2,t_3，计算次数不超过2的(插值)多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，使得 $f(t_1)=f(t_2)=0, f(t_3)=1$. 这样的多项式是否唯一？为什么？

三.(12分) 给定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 与向量 β，(1) 计算 $B=(b_{ij})_{5\times5}$ 使得 $AB=0$ 且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=5$(7分)；(2) 判断 $Ax=\beta$ 解的存在性，如有解则计算其通解(5分).

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\\-5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\6\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\5\\-11\\-2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-2\\13\\3\\9\end{pmatrix}.$$

四.(10分) 给定 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 与 $\beta\in\mathbf{R}^m, A^{\mathrm{T}}A=A^{\mathrm{T}}\beta$ 称为 $Ax=\beta$ 的法方程组，证明：
(1) 法方程组必有解(4分)；(2) 当 A 列满秩时，法方程组有唯一解(4分)；
(3) 当 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\beta)$ 时，$A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 与 $Ax=\beta$ 同解(2分).

五.(10分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), B=A^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}, C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm{T}}\quad(k<n)$，
(1) 证明 C 为投影矩阵，即 $C^2=C$ (5分)；(2) 写出 $Cx=0$ 的一个基础解系 (5分).

六.(10分) $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times k}, AB=O, \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=n$，$B$ 与 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ 列等价，证明 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 的极大无关组给出 $Ax=0$ 的一个基础解系.