示例：

行列式性质：

- $|A^T|=|A|$；行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外. 补充例1A
- 交换两行(列)，行列式变号. 例1.2.3
- 行列式某行(列)的倍数加到另一行(列)上，行列式不变. 例1.2.3
- 两行(列)相等，行列式为0. 两行(列)成比例，行列式为0. 例1.2.3
- $|AB|=|A|\cdot|B|$ 定理4.2.3证明
- $|A|=a_{i1}A_{i1}+\ldots+a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$，$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式. 例1.2.6
- $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=|A|\delta_{ik}$，匹配，值为行列式否则0 例2.6.4
  $a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=|A|\delta_{jk}$，其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}$为$a_{ij}$的余子式.
  $\delta_{ij}=0(i\neq j)$; $\delta_{ii}=1$
- 克莱姆法则：$Ax=b$，$A\in R^{n\times n}$，若$|A|\neq 0$，方程组有唯一解，解为：
  $x_i=|D_i|/|A|$, $i=1,2,\ldots,n$，其中D_i为A的第i列用b替换得到的矩阵. 例1.2.8

行列式性质：

- 方阵A可逆$\Leftrightarrow|A|\neq 0$，$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$. 例2.6.5
- $AA^*=A^*A=|A|E$. 例2.6.6
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 习题二37
- 计算A^{-1}：将(A,E)初等行变换到(E,B)，则$B=A^{-1}$. 例2.6.10

行列式性质：

- $r_i \leftrightarrow r_j$、$c_i \leftrightarrow c_j$ 行列式变号.
- $k^{-1}r_i$、$c_i \times k^{-1}$、$r_j \div k$ 行列式提取k.
- r_i+kr_j、c_i+kc_j 行列式不变.
- 两行(列)成比例，行列式为0.
- 行列式可以按任一行(列)展开.
- 行列式转置，值不变.
- 行列式可以按某一行(列)拆成两个行列式.
- $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=|A|\delta_{ik}$，匹配，值为行列式否则0
  $a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=|A|\delta_{jk}$，其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}$为$a_{ij}$的余子式.
- 块三角行列式 $\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$，$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$
- 范德蒙德行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

克莱姆法则：

- n元方程组 $Ax=b$：当$|A|\neq 0$时，有唯一解：$x_i=D_i/|A|$，
  其中D_i为第i列替换成b后的行列式.
- n元齐次方程组$Ax=0$，则$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow$系数行列式$|A|=0$.

矩阵的性质：

- $|AB|=|A|\cdot|B|$.
- $AA^*=A^*A=|A|E$.
- $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^{-1}=A$；$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$；$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.
- $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.
- $|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$可逆，且$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$.

初等变换的性质：

- 初等行(列)变换等价于左(右)乘一个相应的初等矩阵;
  一系列初等行(列)变换等价于左(右)乘一个可逆矩阵.
- 初等行变换可将一个矩阵化为行梯形矩阵，也可化为行简化梯形矩阵.
- 任意可逆矩阵可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

矩阵秩的性质：

- 初等变换不改变矩阵的秩.
- 行(列)梯形矩阵的秩等于非零行(列)的个数.
- 任意矩阵A有分解 $A=P\Lambda Q$，其中P, Q可逆，Λ为标准形.
- $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(PA)=\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(PAQ)$，其中$P, Q$可逆.
- $\mathrm{r}(A+B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$，$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n\leq\mathrm{r}(AB)\leq\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$.

向量组相关的性质：

- 向量α线性相关⇔ $\alpha=\theta$.
- 向量组部分相关=>整体相关；整体无关=>部分无关.
- 向量组线性相关⇔有一个多余向量.
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$相关，则$\beta$可被唯一表示.
- 列向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性相关⇔ $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)<r$.
- 向量个数大于维数，向量组相关.
- 向量个数等于维数，则线性无关⇔行列式非零.

极大无关组的性质：

- 极大无关组可以唯一表示向量组的任何向量.
- 初等行变换将列向量组的极大无关组变为极大无关组.
- $\beta_1, \dots, \beta_n$ 可表示$\alpha_1, \dots, \alpha_m$，则$r\{\beta_1, \dots, \beta_n\}\geq r\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$；
  等价向量组有相同的秩.
- 矩阵行秩=矩阵列秩=矩阵的秩.

正交的性质：

- $A^TA=E$⇔$A^T=A^{-1}$⇔$AA^T=E$⇔A列标准正交⇔A行标准正交.
- $A^TA=E$=>$|A|^2=1$, $|\lambda|=1$.

线性方程组的性质：

- $A\in R^{m\times n}$，则$Ax=\theta$有非零解⇔$r(A)<n$⇔A的列线性相关.
- $A\in R^{n\times n}$，则$Ax=\theta$有非零解⇔ $|A|=0$⇔A的列线性相关.
- $A\in R^{m\times n}$，且$n>m$，则$Ax=\theta$有非零.
- $A\in R^{m\times n}$，则 $r(A)+r(N(A))=n$.
- $Ax=b$ 有解⇔ $r(A)=r(A,b)$，其中$A\in R^{m\times n}$，
  $r(A)=r(A,b)=n$，有唯一解；$r(A)=r(A,b)<n$，有无穷多解.
- 若 $Ax=b$ ($b\neq\theta$) 有解，且η为一个特解，$Ax=\theta$的基础解系为
  $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$，则$Ax=b$的通解为 $\eta+k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r$.

特征值特征向量的性质：

- n阶矩阵有n(含重数)个特征值.
- A有特征值λ，则$1\le\lambda$的无关特征向量个数$\le\lambda$的重数.
- 不同特征值的无关特征向量构成的向量组线性无关.
- A有特征值λ，则$f(A)$有特征值$f(\lambda)$，并有相同的特征向量.
- A的全部特征值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$，则有 $\mathrm{tr}(A)=\Sigma\lambda_i$, $|A|=\Pi\lambda_i$.

相似矩阵的性质：若$A\sim B$，则有：

- 特征多项式相同，特征值相同(包括重数).
- $|A|=|B|$，$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$.
- $A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^n\sim B^n$，$kA\sim kB$.
- $f(A)\sim f(B)$，其中$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$.
- $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$可对角化$\Leftrightarrow A$有$n$个无关特征向量
  $\Leftrightarrow A$的每个特征值的无关特征向量个数等于特征值重数.
- A的特征值互不相同$\Rightarrow A$可对角化.

实对称矩阵的性质：

- 特征值均为实数.
- 不同特征值的特征向量正交.
- 实对称矩阵可正交对角化.
- 实对称矩阵合同于一个对角矩阵.
- 实对称矩阵合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}(E_p,-E_{r-p},O)$, 其中$p,r$是唯一确定的.

正定矩阵的性质：A为实对称矩阵，则有：

- $x^TAx>0(x\neq\theta)\Leftrightarrow A$的特征值都大于0$\Leftrightarrow P^TAP=E\Leftrightarrow$ A的顺序主子式都大于0.

线性空间V的性质：

- 零元素、负元素、坐标都是唯一的.
- $0\alpha=\lambda 0=0$.
- n维线性空间V的n个线性无关的向量可以构成V的一组基.
- 设基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 有关系 $(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)P$，若向量$\alpha$在这两组基下的坐标分别是 x和 y，则有$y=P^{-1}x$.
- V的非空子集W是子空间$\Leftrightarrow W$对于加法数乘封闭$\Leftrightarrow W$对于线性组合封闭.
- W_1, W_2为子空间，则有 $\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.
- W_1+W_2是直和$\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}\Leftrightarrow \dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

线性变换T的性质：

- $(T\varepsilon_1, \ldots, T\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)A$.
- V的基 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$下, T的矩阵为 A， α和$T\alpha$的坐标为 x 和 y，则有 $y=Ax$.
- V中有两组基 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$与$\omega_1, \ldots, \omega_n$，$(\omega_1, \ldots, \omega_n)=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)P$，且$T$在这两组基下的矩阵分别是$A$和$B$，则有 $B=P^{-1}AP$.
- $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{span}\{T\varepsilon_1, \ldots, T\varepsilon_n\}$，$T\varepsilon_1, \ldots, T\varepsilon_n$的极大无关组是一组基 .