大学数学试卷 答案 2019.12.30

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

9-15 作业 二-7

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量，记三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，
$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若 $|A|=-3$，计算 $|B|$.

解：由 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，所以，$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(-3)\times 2=-6.$

矩阵乘

解法二：$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-6.$

列变换

2. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(\lambda,1,1)^{\mathrm T}$，若 $A\alpha$ 与 α 线性相关，求常数 λ.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda+3\\3\lambda+4\end{pmatrix}$，由$A\alpha$与$\alpha$线性相关，得$\dfrac{\lambda}{\lambda}=\dfrac{2\lambda+3}{1}=\dfrac{3\lambda+4}{1}$,解得:$\lambda=-1$.

比例

解法二：$(A\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda\\2\lambda+3&1\\3\lambda+4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&\lambda+1\\0&0\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $\lambda+1=0$，即 $\lambda=-1$.

用秩

常规 3. λ 取何值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

解：二次型 f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$，二次型正定的充要条件是 A 的所有顺序主子式：

顺序主子式

$$\Delta_1=\det(1)=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\Delta_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5\lambda^2-4\lambda>0,$$

解得：$-\dfrac{4}{5}<\lambda<0.$

解法二：合同变换：$A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-\lambda^2&\lambda+2\\0&\lambda+2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-(5\lambda^2+4\lambda)/4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

合同对角化

A 正定，则合同对角阵对角元均为正：$-(5\lambda^2+4\lambda)/4>0$，解得：$-\dfrac{4}{5}<\lambda<0.$

例4.2.9 4. 设 A 为二阶方阵，α_1,α_2 是线性无关的二维列向量，且 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的所有特征值.

解：由 α_1,α_2 线性无关，所以 $\alpha_1\neq 0,2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$. 由 $A\alpha_1=0=0\alpha_1$，则 $\lambda_1=0$ 是一个特征值；

凑 又有 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=0+A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，故 $\lambda_2=1$ 是另一个特征值，则 A 的所有特征值为 $0,1$.

解法二：易知 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)B$，由 α_1,α_2 线性无关，

变换阵：向量左乘A的变换 在 基(α_1,α_2)下的矩阵为B. $A\sim B$

得 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$ 可逆，于是 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，故 A 与 $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ 有相同的特征值：$0,1$.

常规 **二、**(**本题12分**) 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1&+\lambda x_2&+\mu x_3&+x_4&=0\\2x_1&+x_2&+x_3&+2x_4&=0\\3x_1&+(2+\lambda)x_2&+(4+\mu)x_3&+4x_4&=1\end{cases}$，

若 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是该方程组的一个解，求：(1) 方程组的通解；(2) 方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解：将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$.

取 已知 $\gamma=(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是方程组的一个特解. 对齐次方程组 $Ax=0$ 进行行初等变换：

$(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 特解

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1\\2&1&1&2\\3&2+\lambda&4+\lambda&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda\\0&1&3&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda\neq 1/2$ 时，$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\end{pmatrix}$，$Ax=0$ 的基础解系的秩为 1，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1/2,-1/2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1/2\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$Ax=0$ 的基础解系的秩为 2，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1/2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2=x_3$，当 $\lambda\neq 1/2$ 时，由 $-1+k/2=1-k/2$，解得 $k=2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+2(-1,1/2,-1/2,1)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，由 $-1-3k_1-k_2=1+k_1$，解得 $k_2=-2-4k_1$，

此时方程组的通解为：$\xi=(2,1,1,-3)^{\mathrm{T}}+k(3,1,1,-4)^{\mathrm{T}}$.

解法二：将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$.

增设 除未求解

对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵进行行初等变换：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda\neq 1/2$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&1/2\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)=3<4,4-3=1$，故方程组由无穷多组解，且其基础解系的秩为 1，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(0,-1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1/2&-1/2\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)=2<4,4-2=2$，故方程组由无穷多组解，且其基础解系的秩为 2，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(-1/2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2=x_3$，当 $\lambda\neq 1/2$ 时，由 $-1/2+k=1/2-k$，解得 $k=1/2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(0,-1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}+0.5(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，由 $1-3k_1-2k_2=k_1$，解得 $k_1=1/4-k_2/2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(-1/4,1/4,1/4,0)^{\mathrm{T}}+k(-3/2,-1/2,-1/2,2)^{\mathrm{T}}$.

9-29作业
=56

三 (**本题12分**) 确定常数 k，使得向量组 $\alpha_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,k,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(k,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,k,4)^{\mathrm{T}},\beta_3=(-2,k,k)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若 $\mathrm{r}(A)=3$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就是一个极大无关组，

先定$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$秩<3，再分析

与题意不合，故 $\mathrm{r}(A)<3$，则 $\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=1$或$k=-2$.

当 $k=1$ 时，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(A)=1$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(B)=3$，

故 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

当 $k=-2$ 时，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(A)=2$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(B)=2$，此时，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=-2\alpha_1$，

对于 $C=(\beta_1,\alpha_2,\beta_3)$，由于 $|C|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2&-2\\-2&1&-2\end{vmatrix}=18\neq 0$，即 α_2 不能被 β_1,β_2,β_3 线性表出，

故符合题意的解是 $k=1$.

解法二：行列初等变换：

先定$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$秩，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$秩=3，再分析

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&k&1&-2&-2\\1&k&1&1&k&k\\k&1&1&k&4&k\end{pmatrix},$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&k-1&1-k&0&k+2&k+2\\k&1-k&1-k^2&0&2k+4&3k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

秩为 3，故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的极大无关组的向量个数为 3.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，则 β_1,β_2,β_3 为极大无关组，

于是 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&k&k\\k&4&k\end{vmatrix}=(k+2)(k-4)\neq 0.$

β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不是极大无关组，线性相关，

于是 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=-(k+2)(k-1)^2=0$，解得 $k=1$.

解法三：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&k&1&-2&-2\\1&k&1&1&k&k\\k&1&1&k&4&k\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&k&1&-2&-2\\0&k-1&1-k&0&k+2&k+2\\0&1-k&1-k^2&0&2k+4&3k\end{array}\right)$

将 $(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 仅有讨论

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&k&1&-2&-2\\0&k-1&1-k&0&k+2&k+2\\0&0&(1-k)(2+k)&0&3(1-k)&-(1-k)^2\end{array}\right),$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能表示$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，故行梯形前3列有零行而后3列对应有非零行，即必须$k=1$或$k=-2$.

又有：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&k\\0&k+2&k+2&0&k-1&1-k\\0&0&k-4&0&3(1-k)&-(1-k)^3\end{array}\right),$

因为 β_1,β_2,β_3 可以表示 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，故行梯形不能出现前3列有零行而后3列对应有非零行，

即必须 $k\neq 4$ 或 $k\neq -2$. 综合起来有 $k=1$.

10-18分出 =20

四. (本题12分) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是解，即 $A\beta\neq 0$，

证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

证明：设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_n(\beta+\alpha_n)=0$， $(k+\sum k_i)\beta+\sum k_i\alpha_i=0$

即 $(k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i)\beta=-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，两边同乘矩阵 A，由 $A\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n)$ 左乘A $(k+\sum k_i)A\beta=0$

得：$(k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i)A\beta=-\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA\alpha_i=0$，因 $A\beta\neq 0$，故$k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是基础解系， $\sum k_i\alpha_i=0$

故线性无关，即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，则推得 $k=0$，所以向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

五. (本题12分) 设 A,C 为 n 阶正定矩阵，若 B 是关于 Z 的矩阵方程 $AZ+ZA=C$ 的唯一解，

证明：B 是正定矩阵.

证明：由题意，$AB+BA=C$，因 A,C 为正定矩阵，故对称，则两边转置得， $AB^T+B^TA=C$ 唯一解 $B^T=B$

$C=C^{\mathrm{T}}=(AB+BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}+(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A+AB^{\mathrm{T}}=AB^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}A$， B λ $x\neq\theta$

即 B^{T} 也是矩阵方程 $AZ+ZA=C$ 的解，由题设(解的唯一性)，得 $B^{\mathrm{T}}=B$，故 B 是对称矩阵.

满足B: $Bx=\lambda x$, $x^TB=\lambda x^T$

设 λ 是 B 的任一特征值，x 是属于 λ 的一个特征向量，则：

$x^{\mathrm{T}}Cx=x^{\mathrm{T}}(AB+BA)x=x^{\mathrm{T}}ABx+x^{\mathrm{T}}BAx=x^{\mathrm{T}}A\lambda x+(Bx)^{\mathrm{T}}Ax=\lambda x^{\mathrm{T}}Ax+\lambda x^{\mathrm{T}}Ax=2\lambda x^{\mathrm{T}}Ax.$ $x^TCx=x^T(AB+BA)x$

由于 A,C 都为正定矩阵，故 $x^{\mathrm{T}}Cx>0,x^{\mathrm{T}}Ax>0$，于是 $\lambda>0$，即 B 的任意特征值都大于 0， $=x^TA\lambda x+\lambda x^TAx$

所以 B 为正定矩阵. >0 $=2\lambda x^TAx$

>0

略

六. (本题12分) 设线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$.

(1) 求 T 在基 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 若向量 $x=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3,y=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，求 Tx,Ty 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解：设从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 下的过渡矩阵为 P，由题意，

$P=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$，可求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

(1) 设 T 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 B，则

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};$$

(2) 设 Tx,Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，因 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$，

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56\\-78\\-40\end{pmatrix}$，由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$，

所以 $y=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，

于是 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

(2)的解法二：(2) 设 Tx,Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

因 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56\\-78\\-40\end{pmatrix}$.

因 y 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故 Ty 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，

故 Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

例4.2.9 七. (**本题12分**) 设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，
且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.
(1) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；
(2) 求矩阵 A 的特征值；
(3) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：(1) 由题设，

交换阵：$Tx=Ax$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 B，$A\sim B$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，即 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$；

(2) 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，则 $C^{-1}AC=B$，即 A 与 B 相似，

于是它们有相同的特征值. $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0.$

解得：B (即 A) 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$；

(3) 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-B)x=0$ 解得基础解系为：$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm T}$，
当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-B)x=0$ 解得基础解系为：$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm T}$.

令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，即 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，由 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ$，

B用A替换 $=(CQ)A(CQ)$

记矩阵$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$,$P$即为所求的可逆矩阵.

P

大学数学试卷 答案 2021.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

常规①

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^2B+A=B+E$，求矩阵 B 及行列式 $|B|$.

解：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A-E)(A+E)B=E-A$，且 $|A-E|=-2\neq 0$，

从而 $(A+E)B=-E$ $\because |A-E|\neq 0$

故 $(A+E)B=-E$，$B=-(A+E)^{-1}=-\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1/3&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解方程 $(A^2-E)B=E-A$

解法二：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，

用 $(A^2-E)^{-1}$ 乘

故 $B=(A^2-E)^{-1}(E-A)=\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解法三：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，解矩阵方程

用 $(A^2-E,E-A)$ 化行简化阶梯形

$(A^2-E,E-A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-4&0&0&2\\0&3&0&0&-1&0\\-2&0&2&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1/3&0\\0&0&1&-1/2&0&-1\end{array}\right)$，

故 $B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

常规②

2. 设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求常数 a,b 的值.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $\frac{-1}{1}=\frac{a+2}{1}=\frac{b+1}{-1}$.

比例

解得 $a=-3,b=0$.

解法二：因为 $A\alpha=\lambda\alpha$，故得 $\begin{cases}-1&=&\lambda,\\a+2&=&\lambda,\\b+1&=&-\lambda.\end{cases}$，解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

用 $A\alpha=\lambda\alpha$

解法三：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，知 $\mathrm r(\alpha,A\alpha)=1$。

用 $r(\alpha,A\alpha)=1$

$\because \alpha,A\alpha$ 相关

而 $(\alpha,A\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&a+2\\-1&b+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&a+3\\0&b\end{pmatrix}$，可得 $a=-3,b=0$.

例4.2.4

3. α 为 n 维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 为正定矩阵，求实数 k 的取值范围.

解：由 $\mathrm r(E-A)=1$ 可知 1 为 A 的 $n-1$ 重特征值，又因为 $A\alpha=(1-k)\alpha$，

用特向

所以 $1-k$ 为 A 的 1 重特征值，由 A 正定知 $1-k>0$ 即 $k<1$.

$\alpha\alpha^T$ 对称 特向数 = 特征重数

特0 $n-1$ 重（基础解系向量数 $\alpha\alpha^T x=\theta$)

特1 单，向 α

$\alpha\alpha^T$ 特征值

解法二：设 $B=\alpha\alpha^{\mathrm T}$，由 α 为 n 维实单位列向量，可得 $B^2=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}=B$，于是 $B^2-B=O$.

用 $(\alpha\alpha^T)^2$

设 λ 为 B 的特征值，ξ 为对应的特征向量，则有 $\theta=O\xi=(B^2-B)\xi=(\lambda^2-\lambda)\xi$，

$B=\alpha\alpha^T$，$B^2=B$，$\lambda=0,1\sim\alpha$

故有 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$，即 B 的特征值 $\lambda=0$ 或者1，于是 $A\xi=(E-kB)\xi=(1-k\lambda)\xi$，

即 A 的特征值为 1 或者 $1-k$，由于 A 正定，故 $1-k>0$，即 $k<1$.

解法三：由单位向量 α 构造标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，其中 $\beta_1=\alpha$，令 $P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，

$P^T(\alpha\alpha^T)P$ 对角

则有 $\alpha^{\mathrm T}P=\alpha^{\mathrm T}(\alpha,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(e_1,0,\cdots,0)=E_{11}$，于是

$P=(\alpha,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$\alpha^TP=(1,0,\cdots 0)=e_1^T$

$P^T\alpha\alpha^TP=e_1e_1^T=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&\ddots\ 0\end{pmatrix}$

$$P^{\mathrm T}AP=E-kP^{\mathrm T}\alpha\alpha^{\mathrm T}P^{\mathrm T}=E-kE_{11}^{\mathrm T}E_{11}=\begin{pmatrix}1-k&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$,由于A正定,故$1-k>0$,即 $k<1$.

解法四：任取n维向量 $x\neq\theta$，$A=E-k\alpha\alpha^T$ 为正定矩阵，故要满足 $x^{\mathrm T}Ax=x^{\mathrm T}x-k(\alpha^{\mathrm T}x)^2>0$，

显然 $\alpha^{\mathrm T}A\alpha=\alpha^{\mathrm T}\alpha-k(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^2=1-k>0$. 当 $1-k>0$ 时，由柯西不等式 $(\alpha^{\mathrm T}x)^2\le(x^{\mathrm T}x)(\alpha^{\mathrm T}\alpha)=x^{\mathrm T}x$，

柯西不等式 $(\alpha^Tx)^2\le(\alpha^Tx)(\alpha^T\alpha)=\alpha^Tx$

A 正定 $\alpha^TA\alpha=\alpha^T\alpha-k\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha=1-k>0$

再用柯西不等式证明 $1-k>0$ $\forall x\neq\theta$ $x^TAx>0$

$\alpha^{\mathrm{T}}x \neq 0$ 时有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 \geq (\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = (1-k)(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 > 0$，
$\alpha^{\mathrm{T}}x = 0$ 时显然有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = x^{\mathrm{T}}x > 0$，故 k 满足 $k < 1$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，证明 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$.

证：依次交换 A 的第1,2行，第2,3行，同时做相应的列操作，可将 A 合同变换至 B，$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2,\ r_2\leftrightarrow r_3]{c_1\leftrightarrow c_2,\ c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} B \\ \hline 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \end{pmatrix}$

初等合同

即取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，可使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$. (P 也可以为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}$ 中的任何一种矩阵).

证法二：易知 A 有特征值 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$，对应特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

对角化　$A\xi_i = \lambda_i\xi_i$，$\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$ 对角化为 B

$P = (\xi_2, \xi_3, \xi_1)$

则令 $P = (\pm\xi_2, \pm\xi_3, \pm\xi_1)$，则 P 为正交阵，且 $P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B$.

(注：用 $P = \mathrm{diag}(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{c}{b}}, \sqrt{\frac{a}{c}})$ 是错的，因为 a, b, c 可能为0)

二、 (**本题12分**) 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f = 2y_1^2 + y_3^2$，试求 a, b.

$A \sim B$　$A + kE \sim B + kE$

解：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = B$，可得 $A - E \sim B - E$，

相似行列式相等　特征值 2,0,1 故 $|A-2E| = |A| = |A-E| = 0$　又因 $A \sim B$　$A-E \sim B-E$

可知 $|A| = 2ab - a^2 - b^2 = |B| = 0, |A - E| = 2ab = |B - E| = 0$，因此 $a = b = 0$.

解法二：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$，代入特征多项式 $|\lambda E - A|$ 得

将 2,0,1 代入 $|\lambda E - A| = 0$

$|2E - A| = -a^2 - b^2 - 2ab = 0, |0E - A| = a^2 + b^2 - 2ab = 0, |E - A| = -2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

解法三：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = B$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$，

$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

故 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & -b & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a^2 + b^2 - 2ab)$

$= (\lambda - 2)\lambda(\lambda - 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$，

比较系数得 $2 - a^2 - b^2 = 2, a^2 + b^2 - 2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

补充 例4.5.3

三、 (**本题12分**) 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为2，向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的全部特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A.

解：(1) 由 $A(1, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 2(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，可知 $\lambda = 2$ 是 A 的一个特征值，且 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值2的特征向量. 再由 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$ 知，A 的特征值为0,0,2. 属于特征值0的全部特征向量为 $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$不全为0. 属于特征值2的全部特征向量形如 $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$.

(2) 将 α_1, α_2 正交化并单位化，可得 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 标准正交化

再将 α_3 单位化，得 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$. 则

$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2}_{\lambda=0}$ 与 $\underbrace{\alpha_3}_{\lambda=2}$ 正交　只要 α_1, α_2 标准正交化　α_3 单位化

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ 为正交阵且满足 } P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

(注：P 不唯一，只要构成矩阵 P 的前两列 β_1, β_2 与 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$ 构成标准正交向量组即可)

(3)解法一：$A = P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

用 $P^TAP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

解法二：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,2\alpha_3)$，故 $A=(0,0,2\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

用 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,2\alpha_3)$

解法二：(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则根据条件，有 $A\alpha_1=A\alpha_2=0, A\alpha_3=2\alpha_3$，即

设未知量代入条件求A

$$\begin{cases}a_{11}-a_{13} = 0,\\ a_{21}-a_{23} = 0,\\ a_{31}-a_{33} = 0,\end{cases}\quad \begin{cases}a_{11}-a_{12} = 0,\\ a_{21}-a_{22} = 0,\\ a_{31}-a_{32} = 0,\end{cases}\quad \begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2,\\ a_{21}+a_{22}+a_{23} = 2,\\ a_{31}+a_{32}+a_{33} = 2.\end{cases}$$

矩阵形式版本
$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,2\alpha_3)$
得 $A=(0,0,2\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$

解得 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=a_{33}=2/3$，即 $A=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)$，故有特征值 $\lambda=0$(二重), 2.
当$\lambda=0$时,解得无关特征向量为:$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2, k_1,k_2$不全为0.
当 $\lambda=2$ 时，解得无关特征向量为：$\xi_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，特征向量为 $k_3\xi_3, k_3\neq 0$.
(2) 将 $\lambda=0$ 的无关特征向量 ξ_1,ξ_2 标准正交化得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，将 $\lambda=2$ 的无关特征向量 ξ_3 单位化得 $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 P 正交且 $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(0,0,2)$.

(3) 由(1)已得 $A=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

补3J

四、(**本题12分**) 设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性无关，又 $\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$. 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.
(1) 证明：方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解; (2) 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\beta$（$\eta$）

$A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ -1\end{pmatrix}=0$（$\xi$）

$+\,r(A)=n-1$

可得 $x=\eta+k\xi$

解：(1) 因为 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性表示，故方程组 $Ax=\beta$ 有解，即 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$.
又因为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，因此 $\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)<n$，从而方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解.
(2) $n-1=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})\leq \mathrm{r}(A)<n$，因此 $\mathrm{r}(A)=n-1$，又有 $\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n=0$，求r(A)
于是 $Ax=\beta$ 的通解为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}+k(0,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数.
解法二：(1) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\xrightarrow{c_n-c_1-\cdots-c_{n-1}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},0)$，求r(A)
故$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})=n-1$，$Ax=0$基础解系含一个向量，由$\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$知，
$0\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n=0$，即 $\xi=(0,1,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.
又有 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 $\eta=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，故 $Ax=\beta$ 通解为 $\eta+k\xi, k\in\mathbf{R}$.
由通解公式知 $Ax=\beta$ 有无穷多组解.
(2) 由(1)得到 $Ax=\beta$ 通解为 $\eta+k\xi, k\in\mathbf{R}$.

五、(**本题12分**) 设 A 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.
(1) 证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关; (2) 若 $A^3\beta=A\beta$，求秩 $\mathrm{r}(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.
(1)证法一：由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，可知

适合为0

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\quad,\quad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$

$0=(\beta,A\beta,A^2\beta)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$

设 $k_1\beta+k_2A\alpha+k_3A^2\beta=0$，将上式代入整理可得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0.$$

$=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{\text{无关}}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$ 0 只有0解

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量，必线性无关，于是

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0.$$

其系数行列式非零，因此必有 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

$|(\beta,A\beta,A^2\beta)|=|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|\left|\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\right|$

$\neq 0$ 　 $\neq 0$

证法二：由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，可知

$|\beta,A\beta,A^2\beta|\neq 0$

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\quad,\quad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3，于是$$

范德蒙行列式
$=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)$

$$(\beta, A\beta, A^2\beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B,$$

故 $|\beta, A\beta, A^2\beta| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \cdot |B|$，因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同，故 $|B| = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \neq 0$，且对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，从而 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$，于是 $|\beta, A\beta, A^2\beta| \neq 0$，即 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

(2) 解法一：由 $A^3\beta = A\beta$ 可得

变换的矩阵B. 基 $\beta, A\beta, A^2\beta$　　$A \sim B$　　$A-E \sim B-E$　　$A+2E \sim B+2E$

$$A(\beta, A\beta, A^2\beta) = (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) = (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\beta, A\beta, A^2\beta)B.$$

记 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$，$P$ 可逆且 $P^{-1}AP = B$，即 $A \sim B$，则也有 $A - E \sim B - E, A + 2E \sim B + 2E$，

因此 $\mathrm{r}(A-E) = \mathrm{r}(B-E) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, |A+2E| = |B+2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$

解法二：由 $(A^3 - A)\beta = 0$，可知 $(\lambda_1^3 - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda_2^3 - \lambda_2)\alpha_2 + (\lambda_3^3 - \lambda_3)\alpha_3 = 0$，而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，∵ $\beta, A\beta, A^2\beta$ 无关

$\lambda^3 - \lambda = 0$ 求特征值

可知 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均满足方程 $\lambda^3 - \lambda = 0$，又因为 A 的特征值各不相同，因此只能分别是 $0, -1, 1$，$\lambda = 1$ — $3, \neq 0$

而 $A - E$ 的特征值为 A 的特征值减1即-1,-2,0，互不相同，可对角化，故 $A - E \sim \mathrm{diag}(-1, -2, 0)$，

从而 $\mathrm{r}(A-E) = 2$，而行列式 $|A + 2E| = (0+2)\cdot(-1+2)\cdot(1+2) = 6$.

解法三：由 $(A^3 - A)\beta = (A-E)(A+E)A\beta = (A-E)(A^2+A)\beta = (A-E)(A^2\beta + A\beta) = 0$　　$(A-E)\boxed{A^2\beta + A\beta} = 0$

$A^3 - A = (A-E)A(A+E)$ 求特征值　　$= (A^3-A)\beta$

可知 $\xi_1 = A^2\beta + A\beta$ 满足 $A\xi_1 = \xi_1$，因为 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关，故 $\xi_1 = A^2\beta + A\beta \neq 0$，

于是 ξ_1 为 A 的属于特征值1的特征向量. 同理 $\xi_2 = A^2\beta - A\beta \neq 0, \xi_3 = A^2\beta - \beta \neq 0$ 分别为

A 的属于特征值-1和0的特征向量，故3阶矩阵 A 有互不相同的特征值1,-1,0，　　同理 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$

而 $A - E$ 的特征值为 A 的特征值减1即0,-2,-1，互不相同，可对角化，故 $A - E \sim \mathrm{diag}(0, -2, -1)$，

从而 $\mathrm{r}(A-E) = 2$，而行列式 $|A + 2E| = (1+2)\cdot(-1+2)\cdot(0+2) = 6$.

(注：(2)中如果用 $A^3\beta = \lambda^3\beta, A\beta = \lambda\beta$，故特征值满足 $\lambda^3 - \lambda = 0$ 是错误的，因为 β 不是 A 的特征值)

六、（本题12分）已知线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

常规

11-2介绍 六 3

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下具有相同坐标的全部向量.

解：(1) 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 11 & -2 & 8 \\ 10 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

因此基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(2)解法一：设所求向量的坐标为 x，则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Px$，

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以 $Px = x$，即 $(P - E)x = 0$，经行变换，

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下坐标 x ∥

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标 Px

$$P - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $x = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = k(2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

解法二 设所求向量的坐标为 x，则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x$，

即 $(\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_3 - \alpha_3)x = 0$，解方程组

$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x$

$$(\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_3 - \alpha_3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 11 & -4 & 7 \\ 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $x = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = k(2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

补2J 七、（本题12分）(1) 已知矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A) = 1$，证明：存在非零列向量 α 和 β，使得 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2) 已知矩阵 $A = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 α_1, α_2 线性无关，β_1, β_2 也线性无关，证明：$\mathrm{r}(A) = 2$.

证：(1) $\mathrm{r}(A) = 1$ 说明 A 的列秩为1，则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的任意两列线性相关，

极大 α.　$A = (b_1\alpha, \cdots, b_n\alpha) = \alpha\underbrace{(b_1, \cdots, b_n)}_{\beta^{\mathrm{T}}}$

取 A 的一个非零列向量记为 α，则 $\alpha_i = b_i\alpha, i = 1, 2, \cdots, n$，记 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，
因为有一个 b_i 为1，则 β 非零，有 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2)解法一：由 $A = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

乘积秩公式

$$2 = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathrm{r}((\beta_1, \beta_2)^{\mathrm{T}}) - 2 \le \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) = 2，故\ \mathrm{r}(A) = 2.$$

解法二：由 $A = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

乘积秩+和的秩公式

$$2 = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathrm{r}((\beta_1, \beta_2)^{\mathrm{T}}) - 2 \le \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}) \le \mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}) = 2，故\ \mathrm{r}(A) = 2.$$

解法三：根据结论：若 P 行满秩，则 $\mathrm{r}(AP) = \mathrm{r}(A)$. 可知 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}((\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) = 2$.

原理. P行满秩 $P = (E_r, O)Q$
$\mathrm{r}(AP) = \mathrm{r}(A(E_r, O)Q) = \mathrm{r}(A(E_r, O)) = \mathrm{r}(A, O) = \mathrm{r}(A)$

解法四：由 $A = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，令 $B = \begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，由线性无关性有 $\mathrm{r}(B) = 2$.

$(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x = \theta$ 与 $\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x = \theta$ 同解

只要证明 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，即可得 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$.
若 x 满足方程组 $Bx = 0$，则有 $Ax = (\alpha_1, \alpha_2)Bx = 0$，若 x 满足 $Ax = 0$，令 $y = Bx$，
则有 $(\alpha_1, \alpha_2)y = 0$，由于 α_1, α_2 线性无关，故 $y = 0$，于是 $Bx = y = 0$，即 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

$(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x = (\alpha_1, \alpha_2)y = \theta \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x = \theta$

证法二：(1) 因为 $\mathrm{r}(A) = 1$ 我们有分解 $A = P\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}Q = Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q = (Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q) = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$，

分解 $A = P\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}Q$

其中 P, Q 可逆，$\alpha, \beta^{\mathrm{T}}$ 分别是 P, Q 的第一列和第一行，故 α, β 非零.

(2) 因为 α_1, α_2 线性无关，故存在可逆矩阵 P 使得 $P(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}$，

同理 (α_1, α_2)，(β_1, β_2) 为列满秩矩阵 $\quad P(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}$，$Q(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}$

同理有可逆矩阵 Q 使得 $Q(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}$，

于是有 $PAQ^{\mathrm{T}} = P(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})Q^{\mathrm{T}} = P(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}(E_2, O) = \begin{pmatrix}E_2 & O \\ O & O\end{pmatrix}$，

故 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(PAQ^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix}E_2 & O \\ O & O\end{pmatrix} = 2$.

$$\mathrm{r}\left((\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(P(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}E_2 \\ O\end{pmatrix}(E_2, O)\right) = \mathrm{r}\begin{pmatrix}E_2 & \\ & O\end{pmatrix} = 2$$

大学数学试卷 答案 2021.6.22

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

补1D

1. 求关于 x 的一元四次方程 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$ 的根，其中 a 为一个实数.

解：$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0$，

因此，该方程的根为$-3a$(一重)，a(三重).

常规

2. 求 a 的范围使得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为对称正定方阵.

解：A 对称正定，当且仅当 $\det(6) = 6 > 0, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, |A| = 2 - 6a^2 > 0$，

顺序主子式

因此 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，A 为对称正定方阵.

解法二：合同变换 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a^2 \end{pmatrix}$，

合同对角化

故 A 对称正定当且仅当 $1 - 3a^2 > 0$，因此 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，A 为对称正定方阵.

类补4K

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否相似，请说明理由？

解：这两个矩阵相似. A 的三个特征值为 $2, -1, 1$，B 的三个特征值为 $2, -1, 1$，因此这两个矩阵

对角化为$(2,-1,1)$

都相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(2, -1, 1)$，因此它们相似.

常规

4. $n \times n$ $(n > 1)$ 方阵 A, B 满足 $|A| = 2, |B| = 3$，求 $2A^{-1}B^*$ 的行列式的值.

$|B|=3\neq 0$ $B^*=|B|B^{-1}$, $|B^*|=|B|^{n-1}$ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

解：$|2A^{-1}B^*| = 2^n|A^{-1}|\,|B^*| = 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} = 6^{n-1}$.

补2G

二、(本题12分) A, B, C, D 是4个 $n \times n$ 方阵，其中 A 可逆且 $AC = CA$，求证：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

解：注意到：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$ 的行列式为1，因此

结得仅保三角 再取行列式

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{vmatrix} = |A|\,| - CA^{-1}B + D| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|$，证毕.

(本题可以有多种证明方法)

补3K

三、(本题12分) 设 A 是一个 $m \times 4$ 矩阵，b 是一个m维列向量. 已知 A 的 秩 为 2. 线性方程组 $AX = b$ 有三个解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 1, 3, 2)^{\mathrm{T}}, 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (4, -1, 4, 8)^{\mathrm{T}}, 3\alpha_1 + \alpha_3 = (0, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$. 求线性方程组 $AX = b$ 的通解.

解：线性方程组 $AX = b$ 有4个未知数且 A 的秩为2，因此该方程导出组的基础解系有两个线性无关的向量.

凑出

再注意到导出组有的两个解

$A\eta=b$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) - (3\alpha_1 + \alpha_3) = (4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}}, 5(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}},$$

$A\xi_1=A\xi_2=0$

且这两个向量线性无关. 因此 $(4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}}, (2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}}$ 是导出组的基础解系.

另一方面 $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $AX = b$ 的一个解. 综上所述，$AX = b$ 的通解为：

$(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^{\mathrm{T}} + k_1(4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}} + k_2(2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$. (本题答案形式不唯一)

常规

四、(本题12分) 在 $\mathbf{R}^3$ 中取两组基 $\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \beta_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_3 = (3, 4, 3)^{\mathrm{T}} \end{cases}$. 试求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵以及从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

解：设从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P. 我们应该有：
$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，且从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 P^{-1}. 计算得：

$$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&-2\\\frac12&-\frac12&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

常规 五、(本题12分) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_1x_3+x_3^2-4x_2x_3$ 是否为正定二次型？将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准二次型.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$ 的行列式为 -27. 顺序主子式判定

也可合同对角化判定，同时得标准形

因此这个二次型不是正定的. 该矩阵的特征值为-3(一重)，3(二重). 一个属于特征值-3的单位特征向量为 $\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$，两个属于特征值3的互相正交的单位特征向量为 $\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\0\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$.

正交变换法化标准形

令矩阵 U 为：$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt3}{3}&0&\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$，$U$ 为正交矩阵且我们有 $U^{\mathrm T}AU=\mathrm{diag}(-2,3,3)$.

在正交变换 $x=Uy$ 下，我们有标准形 $f=-3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$. (本答案形式不唯一)

α-列向量 $\alpha^{\mathrm T}\alpha=1$

常规 六、(本题12分) 令 X 为一个 n 维 ($n\geq 2$) 实向量，满足 $XX^{\mathrm T}=1$. 令 λ 为一个实数，试证明 X为行向量

(1) $X^{\mathrm T}$ 是 $n\times n$ 矩阵 $E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 的一个特征向量，并求特征值. 即 α为 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 的特征向量，求特征值

(2) 令 P 是一个 $n\times n$ 正交矩阵并且以 $X^{\mathrm T}$ 为其第一列. 证明 $E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 可通过 P 对角化. 即 $P=(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n)$正交 $P^{\mathrm T}(E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm T})P$ 对角

(3) 当 λ 为何值时，$E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 能成为一个对称正交矩阵？即 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm T}$正交，求$\lambda$

解：(1) $(E-\lambda X^{\mathrm T}X)X^{\mathrm T}=X^{\mathrm T}-\lambda X^{\mathrm T}(XX^{\mathrm T})=(1-\lambda)X^{\mathrm T}$. 因此 $X^{\mathrm T}$ 是 $E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 的一个特征向量且特征值为 $1-\lambda$. 代入验证

(2) 注意到 $XP=(1,0,\cdots,0)$. 从而我们有：
$P^{\mathrm T}(E-\lambda X^{\mathrm T}X)P=E-\lambda(XP)\mathrm{T}(XP)=\mathrm{diag}(1-\lambda,1,\cdots,1)$. 得证. 用$P=(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n)$验证

(3) $E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 是一个对称矩阵. 我们有 $(E-\lambda X^{\mathrm T}X)(E-\lambda X^{\mathrm T}X)=E+(\lambda^2-2\lambda)X^{\mathrm T}X$.
因此 $E-\lambda X^{\mathrm T}X$ 是对称正交矩阵当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$. 用$A^{\mathrm T}A=E$求λ

例4.3.5 $-A(-E-A)(E-A)=0$

七、(本题12分) 一个实系数 $n\times n$ 方阵 A 满足 $A^3=A$. 证明 A 可以对角化.

证：设 λ 为 A 的一个特征值，那么属于 λ 的特征向量 α 满足 $\lambda\alpha=A\alpha=A^3\alpha=\lambda^3\alpha$. 因此 $\lambda^3=\lambda$.
从而 A 的特征值只能为 $0,1,-1$. 再由条件 $A^3=A$，我们得到：

$$-A(A^2-E)=O,\ (-E-A)(A^2-A)=O,\ (E-A)(A^2+A)=O.$$

从上面三式中我们可以得到 A 的线性无关特征向量的个数$\geq \mathrm r(A^2-E)+\mathrm r(A^2+A)+\mathrm r(A^2-A)$. 注意到
$\mathrm r(A^2-E)+\mathrm r(A^2+A)+\mathrm r(A^2-A)\geq \mathrm r(A^2-E)+r(2A^2)=\mathrm r(A^2-E)+\mathrm r(-A^2)\geq \mathrm r(-E)=n$.
因此我们可以找到 A 的 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可对角化.

先消A，再消A^2得$-E$秩n

$\lambda=0$ 特向个数 $\mathrm r(A^2-E)+$

$\lambda=-1$ 特向个数 $\mathrm r(A^2-A)+$

$\lambda=1$ 特向个数 $\mathrm r(A^2+A)+$

$\geq n$