线性代数期中试卷　　(2020.11.21)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 X 使得 $A(X-B)=C$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 18 & -8 \\ -1 & x & 4 \\ -3 & -12 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，且 A 相似于 B，求参数 x, y.

4. 已知矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{3\times 3}$，$A$ 有特征值 $-1, -2, 2$，且有 $|A^{-1}B|=2$，求 $|B|$.

5. 已知列向量 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n>2)$，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，若 $B=\begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B)=2$.

二.(10分) 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4 &= -11, \\ x_1+ax_2+2x_3-7x_4 &= 7, \\ 3x_1-x_2-2x_3-5x_4 &= 0. \end{cases}$

三.(10分) 设 $A \in \mathrm{R}^{2\times 3}, \mathrm{r}(A)=2$，$\xi_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b \neq \theta$，且有 $A\xi_1=2b, A\xi_2=3b$.

写出 $Ax=b$ 的通解并求特解 η 使得 $\eta^{\mathrm{T}}\eta=\min\{x^{\mathrm{T}}x \mid Ax=b\}$ (使得 $x^{\mathrm{T}}x$最小的解).

四. (15分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 向量组中去掉一个向量，使得去掉该向量后向量组的秩减小.

五.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) 计算 A 的特征值和特征向量；(2) 求一个2次多项式 $f(x)$，使得矩阵 $B=f(A)$ 有一个3重的特征值.

六.(10分) 设矩阵$A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathrm{r}(A)=n-1$,证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$为列向量,且有$A\alpha=\theta, A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.
(矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)