VI-SLAM 系统初始化闭式可解性分析

张谦

2020 年 3 月 15 日

目录

1 系统模型

由 VI-SLAM 系统可观性分析可知，在给定视觉和 IMU 观测后，body 系的全局平移和重力方向旋转 yaw 角不可观，body 系的速度、重力和绝对尺度是可观的。分析 VI-SLAM 系统初始化时的闭式可解性，亦即分析在一段时间内，在不同条件下可观变量的可解性：（1）运动轨迹和状态；（2）地图点数量和观测图像上的分布；（3）相机图像帧数。

1.1 几何关系

为简化分析，不考虑相机和 IMU 之间的外参，即假设相机和 IMU 位姿重合。在该系统中，四元数表示旋转采用 Hamilton 形式。坐标系约定：全局坐标系用 G 表示，Camera 坐标系用 C 表示，IMU 坐标系用 I 表示，地图点用 f 表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如 ${}^{G}\mathbf{p}_{I}$ 表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移），${}^{G}\mathbf{v}_{I}$ 表示 IMU 系在全局坐标系下的速度，${}^{G}\mathbf{q}_{I}$ 表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 Hamilton 形式，旋转均是由 I 系到 G 系旋转，与 JPL 表示方式相反；${}^{G}\mathbf{p}_{f_i}$ 表示第 i 个地图点在 G 系下的坐标。

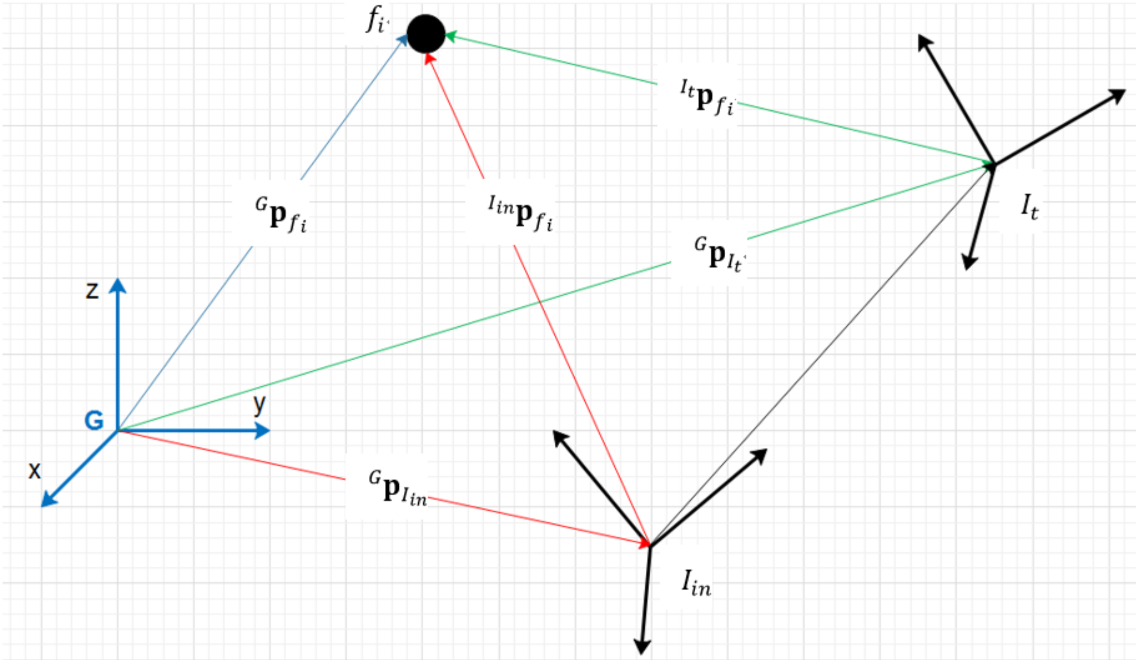

图 1: 几何关系

陀螺仪测量 ${}^{I}\omega_m$ 和加速度计测量 ${}^{I}\mathbf{a}_m$ 模型为：

$$ {}^{I}\omega_m(t) = {}^{I}\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \tag{1} $$

$$ {}^{I}\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}^T({}^{G}\mathbf{q}_I(t))({}^{G}\mathbf{a}_I(t) - {}^{G}\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \tag{2} $$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 表示四元数对应的旋转矩阵。在分析可解性时，若不考虑噪声影响，则有，

$$ {}^{I}\omega_m(t) = {}^{I}\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) \tag{3} $$

$$ {}^{G}\mathbf{a}_I(t) = \mathbf{C}({}^{G}\mathbf{q}_I(t))({}^{I}\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{b}_a(t)) + {}^{G}\mathbf{g} \tag{4} $$

现分析时间段 $[t_{in}, t_{fin}]$ 内的可解性，如图1所示，从 t_{in} 到 $t \in [t_{in}, t_{fin}]$ 时刻的平移几何关系可表示为，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \iint_{t_{in}}^{t} {}^G\mathbf{a}_I(\tau)\, d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \iint_{t_{in}}^{t} (\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) + {}^G\mathbf{g}) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 - \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\mathbf{b}_a(\tau) d\tau^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

假设在积分区间内，加速度计 bias 为常量，则有，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 - \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \mathbf{B}) \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) = \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 \tag{7}$$

$${}^{I_{in}}\Gamma_I(t) = \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \tag{8}$$

且 ${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t)$ 和 ${}^{I_{in}}\Gamma_I(t)$ 可由加速度计和陀螺仪提供的测量积分得到。

现假设有 N 个地图点被同时观测到，${}^G\mathbf{p}_{f_i}, i = 1, \ldots, N$，表示在第 t 时刻的相机坐标系下为 ${}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i}$，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \tag{9}$$

若上式中 $t = t_{in}$，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \tag{10}$$

将（6）和（10）带入（9），得到，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i}
\end{aligned} \tag{11}$$

两边同时乘以 $\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))$，得到，

$$\begin{aligned}
&{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B})) + \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} = {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} - {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I\,\Delta t - \tfrac{1}{2}\,{}^{I_{in}}\mathbf{g}\,\Delta t^2 - {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) + {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{v}_I = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^G\mathbf{v}_I(t_{in}) \tag{13}$$

$${}^{I_{in}}\mathbf{g} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^G\mathbf{g} \tag{14}$$

假设在时间段 t_{in}, t_{fin} 内，共有 M 帧图像：$t_1 = t_{in} < t_2 < \cdots < t_M = t_{fin}$，且 N 个地图点均被这 M 帧图像观测到。为简化书写，利用如下简写：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_j^i \triangleq \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t_j))\,{}^{I_{t_j}}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\mathbf{P}^i \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\mathbf{V} \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \\
&\mathbf{G} \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{g} \\
&\Gamma_j \triangleq {}^{I_{in}}\Gamma_I(t_j) \\
&\mathbf{S}_j \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t_j)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $i=1,2,\ldots,N$； $j=1,2,\ldots,M$。另外，用 μ_j^i 表示 $\mathbf{P}_j^i$ 的单位向量，则有 $\mathbf{P}_j^i=\lambda_j^i\mu_j^i$。不失一般性，可令 $t_{in}=0$，则有 $\Delta t=t$。几何关系式（12）在每个图像帧时刻 t_j，可表示为

$$\mathbf{P}^i-\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}-\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{S}_j \tag{16}$$

另外当 $j=1$ 时，$t_j=t_1=t_{in}=0$，则有 $\mathbf{P}^i=\mathbf{P}_1^i=\lambda_1^i\mu_1^i$。几何关系（16）可进一步表示为，

$$-\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}+\lambda_1^i\mu_1^i-\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{S}_j \tag{17}$$

对于第 t_1 帧和第 t_j 帧，第 1 个地图点和第 i 个地图点，有如下几何关系：

$$\lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1=\lambda_1^i\mu_1^i-\lambda_j^i\mu_j^i \tag{18}$$

综合几何关系（17）和（18），可最终得到如下关系式子，

$$\begin{cases} -\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}+\lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1=\mathbf{S}_j \\ \lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1-\lambda_1^i\mu_1^i+\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{0}_3 \end{cases} \tag{19}$$

其中 $j=2,3,\ldots,M$； $i=2,3,\ldots,N$。分析 VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性，亦即分析在几何关系（19）下，变量 $\mathbf{P}_j^i,\mathbf{V},\mathbf{G},\mathbf{B}$ 的可解性。其中（19）可提供 $3*(M-1)*N$ 个方程，未知变量有 $M*N+6$ 维（不考虑 bias）或 $M*N+9$ 维（只考虑加速度计 bias）。

定义如下变量和矩阵：考虑加速度计 bias 未知变量，

$$\mathbf{X}\triangleq\left[\mathbf{G}^T,\mathbf{V}^T,\mathbf{B}^T,\lambda_1^1,\ldots,\lambda_1^N,\ldots,\lambda_M^1,\ldots,\lambda_M^N\right]^T \tag{20}$$

不考虑 bias 未知变量，

$$\mathbf{X}\triangleq\left[\mathbf{G}^T,\mathbf{V}^T,\lambda_1^1,\ldots,\lambda_1^N,\ldots,\lambda_M^1,\ldots,\lambda_M^N\right]^T \tag{21}$$

IMU 测量相关积分变量，

$$\mathbf{S}\triangleq\left[\mathbf{S}_2^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{S}_3^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{S}_M^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3}\right]^T \tag{22}$$

几何关系矩阵，

$$\Xi=\begin{bmatrix}
\mathbf{T}_2 & \mathbf{K}_2 & \Gamma_2 & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_2^1 & \mu_2^2 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & -\mu_1^N & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mu_2^N & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{T}_M & \mathbf{K}_M & \Gamma_M & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \mu_M^2 & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & -\mu_1^N & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \ldots & \mu_M^N
\end{bmatrix} \tag{23}$$

其中 $\mathbf{T}_j\triangleq-\frac{t_j^2}{2}\mathbf{I}_3$ 和 $\mathbf{K}_j\triangleq-t_j\mathbf{I}_3$。

根据以上定义，对于 M 帧图像和 N 个地图点的几何关系式（19）可表示为

$$\Xi\mathbf{X}=\mathbf{S} \tag{24}$$

假设重力的大小已知，即 $|\mathbf{G}|=g$，则对方程组（24）添加如下约束，

$$|\Pi\mathbf{X}|^2=g^2 \tag{25}$$

其中 $\Pi\triangleq[\mathbf{I}_3,\mathbf{0}_3,\ldots,\mathbf{0}_3]$。

至此，VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性分析，将基于方程组（24）和（25）。通过分析矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$，可得到变量 $\mathbf{X}$ 的可解情况。

1.2 基本原理

关于 VI-SLAM 系统解的个数，有如下结论：

Theorem1：(a) 当矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$ 为空时，有且仅有 1 个解；(b) 当零空间 $dim(\mathcal{N}(\Xi))=1$，且对于任意 $\mathbf{n}\in\mathcal{N}(\Xi)$, $|\Pi\mathbf{n}|\neq 0$ 时，有 2 个解；(c) 其他情况，有无数解。

证明如下：(i) 对于结论 (a)，显然地利用高斯消元法解方程组，可得到唯一解；(ii) 当 $dim(\mathcal{N}(\Xi))=1$ 时，线性方程组（24）有解：$\mathbf{X}(\gamma)=\Xi^{-1}\mathbf{S}+\gamma\mathbf{n}$（左右乘以 Ξ 可验证），其中 Ξ^{-1} 为 Ξ 的伪逆，$\mathbf{n}$ 为零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$ 的列向量，$\gamma\in\mathbb{R}$ 为一个未知标量。γ 可由式子（25）解得：当 $|\Pi\mathbf{n}|\neq 0$ 时，$|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2=g^2$ 是关于 γ 的二次多项式，因此有两个解 γ_1 和 γ_2，对应有两个解 $\mathbf{X}$，$\mathbf{X}_1\triangleq\mathbf{X}(\gamma_1)$ 和 $\mathbf{X}_2\triangleq\mathbf{X}(\gamma_2)$；当 $|\Pi\mathbf{n}|=0$ 时，$|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2=g^2$ 与 γ 不相关，因此有无数解，但此时重力 $\mathbf{G}$ 可被唯一解出。

结合 **Theorem1** 可通过分析矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$，得到 VI-SLAM 系统的可解的情况。由于矩阵的每一列乘以一个非零的标量常数，不改变矩阵零空间，为便于分析，将矩阵 Ξ 做如下变形，亦即每一列乘以对应的 λ_j^i 还原为 $\mathbf{P}_j^i=\lambda_j^i\mu_j^i$，得到

$$\Xi'\triangleq\begin{bmatrix}\mathcal{M}_2 & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathbf{0}_{3N\times N} & \dots & \mathbf{0}_{3N\times N}\\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N\times N} & \mathcal{P}_3 & \dots & \mathbf{0}_{3N\times N}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{M}_M & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N\times N} & \mathbf{0}_{3N\times N} & \dots & \mathcal{P}_M\end{bmatrix}\tag{26}$$

其中

$$\mathcal{M}_j\triangleq\begin{bmatrix}\mathbf{T}_j & \mathbf{K}_j & \Gamma_j\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\end{bmatrix}\tag{27}$$

$$\mathcal{P}_j\triangleq\begin{bmatrix}\mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{0}_{3\times1} & \dots & \mathbf{0}_{3\times1}\\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{P}_j^2 & \mathbf{0}_{3\times1} & \dots & \mathbf{0}_{3\times1}\\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{P}_j^3 & \dots & \mathbf{0}_{3\times1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \dots & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{P}_j^N\end{bmatrix}\tag{28}$$

由式子（18）可知 $\mathbf{P}_j^i-\mathbf{P}_1^i, i=1,2,\dots,N$ 独立于 i，因此令 $\mathcal{X}_j\triangleq\mathbf{P}_j^i-\mathbf{P}_1^i$ 表征 IMU 系的运动状态。为保证矩阵 Ξ' 的每一列不为零，做如下假设：

Assumption1: 对于任意 $i=1,2,\dots,N,\ \ j=2,\dots,M$，有 $\mathbf{P}_j^i\neq\mathbf{0}_{3\times1}$。

接下来，基于上述结论，通过分析矩阵 Ξ' 的零空间，进而分析考虑 bias 和不考虑 bias 时，VI-SLAM 系统的可解性。

2 可解性分析：Unbiased Case

假设向量 $\mathbf{n}\in\mathcal{N}(\Xi')$，

$$\mathbf{n}\triangleq\left[\alpha^T,\nu^T,n_1^1,\dots,n_1^N,n_2^1,\dots,n_2^N,\dots,n_M^1,\dots,n_M^N\right]^T\tag{29}$$

且有

$$\Xi'\mathbf{n}=\mathbf{0}_{3(M-1)*N\times1}\tag{30}$$

将上式展开得到

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2-t_j\nu+(n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathcal{X}_j=\mathbf{0}_{3\times1}\tag{31}$$

$$(n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+(n_1^i+n_j^i)\mathbf{P}_1^i+(n_j^1+n_j^i)\mathcal{X}_j=\mathbf{0}_{3\times1}\tag{32}$$

上面两个式子可通过如下方式验证成立：由式子（32）可知，

$$\begin{aligned}(n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathcal{X}_j &= -(n_1^i+n_j^i)\mathbf{P}_1^i-n_j^i\mathcal{X}_j\\ &= -(n_1^i+n_j^i)\mathbf{P}_1^i-n_j^i(\mathbf{P}_j^i-\mathbf{P}_1^i)\\ &= -n_1^i\mathbf{P}_1^i-n_j^i\mathbf{P}_1^i-n_j^i\mathbf{P}_j^i+n_j^i\mathbf{P}_1^i\\ &= -n_1^i\mathbf{P}_1^i-n_j^i\mathbf{P}_j^i\end{aligned} \tag{33}$$

由于 $\mathcal{X}_j=\mathbf{P}_j^i-\mathbf{P}_1^i=\mathbf{P}_j^1-\mathbf{P}_1^1$，因此左式可写为，

$$\begin{aligned}(n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathcal{X}_j &= (n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+n_j^1(\mathbf{P}_j^1-\mathbf{P}_1^1)\\ &= n_1^1\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathbf{P}_j^1\end{aligned} \tag{34}$$

即有，

$$\begin{gathered}n_1^1\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathbf{P}_j^1=-n_1^i\mathbf{P}_1^i-n_j^i\mathbf{P}_j^i\\ \Leftrightarrow n_1^1\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathbf{P}_j^1+n_1^i\mathbf{P}_1^i+n_j^i\mathbf{P}_j^i=0\end{gathered} \tag{35}$$

下面首先分析 2D 下共面和共线特殊情况，然后再分析 3D 下各种图像帧数和地图点数量的可解情况。

2.1 Planar Case

假设所有地图点和相机运动轨迹处在同一平面上，亦即 $\mathbf{P}_j^i, i=1,\ldots,N, j=2,\ldots,M$ 在同一平面上。则矩阵 Ξ' 中所有 $\mathbf{P}_j^i$ 的某一维可以高斯消元为零：假设所有地图点和相机运动轨迹所在的同一平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 则 x,y,z 的其中之一可由另外两个变量线性表示。现假设在共面情况下，所有 $\mathbf{P}_j^i$ 的第三维为零。注意变量 α 和 ν 的第三维不为零，因为公共平面可能为三维空间中的斜平面。为方便分析，将系统（30）分为两部分：第一部分为（31）和（32）的第一行和第二行组成的矩阵 Ξ_1^{plane}，其维度为$2(M-1)N\times(MN+4)$；第二部分为（31）的第三行组成的矩阵 Ξ_2^{plane}，其只包含 α 和 ν 的第三维，维度为$(M-1)\times 2$。

根据 **Theorem1**，

(1) 当 $M\leqslant 2$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane}))\geqslant 4$；保证系统具有有限个解的先决条件为 $M\geqslant 3$。

(2) 当 $M\geqslant 3$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi_2^{plane}))=0$；

(3) 当 $M=3$ 时，矩阵 Ξ_1^{plane} 的维度为 $4N\times(3N+4)$；因此为了使 $dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane}))\leqslant 1$, 至少需要保证 $N\geqslant 3$；

(4) 当 $M=4$ 时，矩阵 Ξ_1^{plane} 的维度为 $6N\times(4N+4)$；因此为了使 $dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane}))\leqslant 1$, 至少需要保证 $N\geqslant 2$；

(5) 当 $M\geqslant 5$ 时，N 无要求。

2.2 Linear Case

假设所有地图点和相机运动轨迹共线，亦即 $\mathbf{P}_j^i, i=1,\ldots,N, j=2,\ldots,M$ 在同一条线上。则矩阵 Ξ' 中所有 $\mathbf{P}_j^i$ 的某两维可以高斯消元为零：根据空间直线方程，$\mathbf{P}_j^i$ 任意一维可线性表示另外两维。现假设在共线情况下，所有 $\mathbf{P}_j^i$ 的第二、三维为零。同样的，为方便分析，将系统（30）分为两部分：第一部分为（31）和（32）的第一行组成的矩阵 Ξ_1^{line}，其维度为$(M-1)N\times(MN+2)$；第二部分为（31）的第二、三行组成的矩阵 Ξ_2^{line}，其只包含 α 和 ν 的第二、三维，维度为$2(M-1)\times 4$。显然地，$dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{line})>2$，根据 **Theorem1**，系统在任何条件下，均有无数解。

接下来，讨论一般 3D 情况下的系统可解性。首先给出性质：

Property1: (a) 当 $M \leqslant 2$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$；(b) 当 $M = 3$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$；(c) 当 $M \geqslant 4$，且相机匀加速运动时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$。

证明如下：首先定义一个子系统，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu = -\mathcal{X}_j, j = 2, \dots, M \tag{36}$$

且由其构成的方程组矩阵为 Ξ''，维度为$3(M-1)\times 6$。显然的，$dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \leqslant dim(\mathcal{N}(\Xi'))$。假如变量 $\left[\mathbf{n}_\alpha^T, \mathbf{n}_\nu^T\right]^T \in \mathcal{N}(\Xi'')$，则由 $\alpha = \mathbf{n}_\alpha, \nu = \mathbf{n}_\nu, n_j^i = 0, \forall i, j$ 组成的向量 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$。

(1) 当 $M \leqslant 2$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \geqslant 3$；

(2) 当 $M = 3$ 时，矩阵 Ξ'' 的维度为 6×6，方程组（36）有唯一解 (α_0, ν_0)；对应的，矩阵 Ξ' 由如下零空间，

$$\mathbf{n}_0 \triangleq \left[\alpha_0^T, \nu_0^T, \bar{n}_1^1, \dots, \bar{n}_1^i, \dots, \bar{n}_j^1, \dots, \bar{n}_j^i, \dots\right]^T \tag{37}$$

其中 $\bar{n}_1^1 = -1, \bar{n}_j^1 = 1, \bar{n}_1^i = 1, \bar{n}_j^i = -1$；$j = 2, 3$；$i = 2, 3, \dots, N$。即当 $M = 3$ 时，$\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$，则 $dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$

(3) 当 $M \geqslant 4$ 时，系统（36）有解条件为：当且仅当 $\mathcal{X}_j = \nu_0 t_j + \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2$，亦即对每个 j，均有 $\alpha = \alpha_0, \nu = \nu_0$。此时矩阵 Ξ'' 有零空间 $\left[\alpha_0^T, \nu_0^T\right]^T$，进而矩阵 Ξ' 有零空间 $\mathbf{n}_0$，即 $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$，对应相机以初速度 ν_0 做加速度为 α_0 的匀加速运动。

根据 **Theorem1**，为分析系统的有限解情况，需要分析 $\mathbf{n}_0$ 是否为矩阵 Ξ' 的唯一零空间向量。接下来分不同情况考虑分析。

2.3 图像帧数小于等于 2

根据 **Property1**，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$；由 **Theorem1** 可知，系统有无限个解。

2.4 图像帧数等于 3

根据 **Property1**，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$。

(1) 当 $N = 1$ 时，矩阵 Ξ' 的维度为 6×9，因此 $dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$，系统有无限解。

(2) 当 $N = 2$ 时，矩阵 Ξ' 的维度为 12×12。当且仅当如下两个条件满足时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$：(i) 对于给定的 j（例如 $j = 2$ 或 $j = 3$），三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$ 生成 3D 空间，即三个向量不在同一平面上；(ii) 对于其他的 j（例如 $j = 3$ 或 $j = 2$）,$\mathbf{P}_j^i$ 与 $\mathbf{P}_j^k, \forall i, k = 1, 2, \dots, N$ 不成比例，即不共线。否则，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$。

证明如下：当(i)不满足时，即三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$ 共面；由于 $N = 2$，根据上面 Planar Case 的讨论，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) > 1$。现假设条件 (i) 对于给定的 $j = 2$ 成立，依据公式 (32)，由于三个向量不共面，即任意一个向量不能被另外两个向量线性表示，为使等式成立，则三个向量前的系数为零，可得 $n_1^1 = n_2^2 = -n_2^1 = -n_1^2$。根据公式 (31)，当 $j = 2$ 时，可得 $-\frac{1}{2}\alpha t_2^2 - t_2\nu = -n_2^1\mathcal{X}_2$，与系统 (36) 类似（用 $n_2^1\mathcal{X}_2$ 代替 $\mathcal{X}_2$）。依据公式 (32)，当 $j = 3$ 时，取 $i = 2$，

$$\begin{aligned}
& (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_1^2 + (n_3^1 + n_3^2)\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
\Leftrightarrow\ & (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_1^2 + (n_1^1 + n_3^1 + n_1^2 + n_3^2)\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
\Leftrightarrow\ & (n_1^1 + n_3^1)(\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_3) + (n_1^2 + n_3^2)(\mathbf{P}_1^2 + \mathcal{X}_3) = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
\Leftrightarrow\ & (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_3^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_3^2 = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
\Leftrightarrow\ & (-n_2^1 + n_3^1)\mathbf{P}_3^1 = -(n_2^1 + n_3^2)\mathbf{P}_3^2
\end{aligned} \tag{38}$$

其中利用了 $n_1^1 = -n_2^1 = -n_1^2$ 和 $\mathcal{X}_3 = \mathbf{P}_3^1 - \mathbf{P}_1^1 = \mathbf{P}_3^2 - \mathbf{P}_1^2$。当条件 (ii) 成立时，有 $\mathbf{P}_3^1$ 和 $\mathbf{P}_3^2$ 不共线，则它们前面的系数为零，得到 $n_3^1 = -n_3^2 = n_2^1$。根据公式 (31)，当 $j = 3$ 时，可得 $-\frac{1}{2}\alpha t_3^2 - t_3\nu = -n_3^1\mathcal{X}_3 = -n_2^1\mathcal{X}_3$，与系统 (36) 类似（用 $n_2^1\mathcal{X}_3$ 代替 $\mathcal{X}_3$）。至此，当 $j = 2, 3$ 且满足条件 (i) 和 (ii) 时，系统与 (36) 类似，仅仅用 $n_2^1\mathcal{X}_j$ 代替 $\mathcal{X}_j$；根据上面讨论，该系统有唯一解，且零空间 $\mathcal{N}(\Xi')$ 仅有生成向量 $\mathbf{n}_0$。根据 **Theorem1**，系统有 2 个解。

综上所述，当 $M = 3, N \geqslant 2$ 时，满足相关条件时，VI-SLAM 系统有 2 个解；否则有无数个解。

2.5 图像帧数大于等于 4

当 $M \geqslant 4$ 时，方程个数大于未知数个数；除了当 $M=4, N=1$ 时，矩阵 Ξ' 的维度为 9×10，其零空间维度至少为 1 维。下面首先分析该特殊情况。

(1) 当 $M=4, N=1$ 时，当且仅当 4 个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ 生成整个 3D 空间，即该 4 个向量不共面时，$dim(\mathcal{N}(\Xi'))=1$。

证明如下：假如 4 个向量共面，根据 Planar Case 的讨论，由于 $N=1$，$dim(\mathcal{N}(\Xi'))>1$。下面考虑 4 个向量不共面，且生成 3D 空间的情况。根据公式（30）, 首先取前 6 个方程，即公式（31）中 $j=2,3$，可得到 α 和 ν 关于 $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ 的线性表示：

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}
-\frac{1}{2}\alpha t_2^2 - t_2\nu + (n_1^1+n_2^1)\mathbf{P}_1^1 + n_2^1\mathcal{X}_2 = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
-\frac{1}{2}\alpha t_3^2 - t_3\nu + (n_1^1+n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + n_3^1\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3\times 1}
\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{l}
\alpha = \frac{2}{t_3t_2^2 - t_2t_3^2}\left\{\left[t_3(n_1^1+n_2^1) - t_2(n_1^1+n_3^1)\right]\mathbf{P}_1^1 + t_3n_2^1\mathcal{X}_2 - t_2n_3^1\mathcal{X}_3\right\} \\
\nu = \frac{1}{t_2t_3^2 - t_3t_2^2}\left\{\left[t_3^2(n_1^1+n_2^1) - t_2^2(n_1^1+n_3^1)\right]\mathbf{P}_1^1 + t_3^2n_2^1\mathcal{X}_2 - t_2^2n_3^1\mathcal{X}_3\right\}
\end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

将 α 和 ν 带入到 $j=4$ 的公式（31）中，得到

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\alpha t_4^2 - t_4\nu + (n_1^1+n_4^1)\mathbf{P}_1^1 + n_4^1\mathcal{X}_4 = \mathbf{0}_{3\times 1} \\
\Leftrightarrow &-\tfrac{t_4^2}{t_3t_2^2 - t_2t_3^2}\left\{\left[t_3(n_1^1+n_2^1) - t_2(n_1^1+n_3^1)\right]\mathbf{P}_1^1 + t_3n_2^1\mathcal{X}_2 - t_2n_3^1\mathcal{X}_3\right\} \\
&-\tfrac{t_4}{t_2t_3^2 - t_3t_2^2}\left\{\left[t_3^2(n_1^1+n_2^1) - t_2^2(n_1^1+n_3^1)\right]\mathbf{P}_1^1 + t_3^2n_2^1\mathcal{X}_2 - t_2^2n_3^1\mathcal{X}_3\right\} + (n_1^1+n_4^1)\mathbf{P}_1^1 + n_4^1\mathcal{X}_4 = \mathbf{0}_{3\times 1}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

将上式简写为

$$
a_1\mathbf{P}_1^1 + a_2\mathcal{X}_2 + a_3\mathcal{X}_3 + a_4\mathcal{X}_4 = 0 \tag{41}
$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为 $n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1$ 的线性表示。

由于 4 个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ 生成 3D 空间，因此有 3×4 矩阵 $\Xi^* = \left[\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4\right]$ 的零空间为 1 维，假设该零空间向量为 $\mathbf{a}^* = [a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*]^T$，即有 $\Xi^*\mathbf{a}^* = 0$。又由于 $a_k^*, k=1,2,3,4$ 为 $n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1$ 的函数，因此考虑如下线性系统，

$$
a_k(n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1) = a_k^*, k=1,2,3,4 \tag{42}
$$

通过分析方程组 $\mathbf{An} = \mathbf{a}$ 中 4×4 矩阵 $\mathbf{A}$ 的零空间，了解线性系统 (42) 解的情况，其中 $\mathbf{n} = [n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1]^T$，$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$；检查矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式,

$$
|\mathbf{A}|_{det} = -\frac{(t_4-t_3)^2(t_4-t_2)^2t_4^2}{(t_2-t_3)^2t_3^2t_2^2} \tag{43}
$$

由于 $0<t_2<t_3<t_4$，则有 $|\mathbf{A}|_{det} \neq 0$。因此系统 (42) 有唯一解，则有系统 30 有唯一解，进而可知 $dim(\mathcal{N}(\Xi'))=1$，则 VI-SLAM 系统有 2 个解。

(2) 当 $M \geqslant 4, N \geqslant 2$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi'))=0$，系统有唯一解。证明如下：一般而言，对于任意 $i=2,\ldots,N; j=2,\ldots,M$，三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^i, \mathcal{X}_j$ 相互独立，即相互不共线。因此，根据公式（32）可得：

$$
n_1^1 + n_j^1 = n_1^i + n_j^i = n_j^1 + n_j^i = 0, \forall i \geqslant 2, \forall j \geqslant 2 \tag{44}
$$

假如 $n_1^1 \neq 0$，且不失一般性，令 $n_1^1 = 1$，则公式（31）变为

$$
-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu = \mathcal{X}_j \tag{45}
$$

显然当 $M \geqslant 4$ 时，上式没法满足每个方程式，除非相机做匀加速运动（该情况后面单独考虑），因此 $n_1^1=0$；进而有 $n_j^i = 1, \forall i, \forall j$。根据式子（31），可知 $\alpha = \nu = \mathbf{0}_{3\times 1}$。因此有矩阵 Ξ' 的零空间为空。系统有唯一解。

(3) 当 $M \geqslant 5, N=1$ 时，根据 $M=4, N=1$ 时的讨论，系统 30 有唯一解，假设该零空间唯一向量为 $\hat{\mathbf{n}}_4 \triangleq \left[\hat{\alpha}^T, \hat{\nu}^T, \hat{n}_1^1, \hat{n}_2^1, \hat{n}_3^1, \hat{n}_4^1\right]^T$，则有 $\hat{\mathbf{n}}_4$ 满足 $j=2,3,4$ 时的公式（31）。因此，当 $M \geqslant 5$ 时，如果系统 (30) 有解，则该解的前十个元素为零，或者等于 $\hat{\mathbf{n}}_4$。对于 $j \geqslant 5$：首先，如果前十个元素为零，则根据公式（31）可知，

$$
n_j^1(\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_j) = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{46}
$$

根据 **Assumption1**，可知 $n_j^1=0$，则矩阵 Ξ' 的零空间为空。其次，如果前十个元素等于 $\hat{\mathbf{n}}_4$，根据公式（31）有，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2-t_j\nu+(n_1^1+n_j^1)\mathbf{P}_1^1+n_j^1\mathcal{X}_j=\mathbf{0}_{3\times1} \tag{47}$$

该公式一般不成立，理由如下：如果 $n_j^1=0$，则有

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2-t_j\nu+n_1^1\mathbf{P}_1^1=\mathbf{0}_{3\times1} \tag{48}$$

对所有 $j\geqslant5$ 不可能成立；如果 $n_j^1\neq0$，则向量 $\mathbf{P}_1^1+\mathcal{X}_j$ 必须与向量 $-\frac{1}{2}\alpha t_j^2-t_j\nu+n_1^1\mathbf{P}_1^1$ 共线，这种情况一般而言也不成立。因此，矩阵 Ξ' 的零空间为空，系统有唯一解。

2.6 Constant Acceleration

当相机做匀加速运动时，

$$\mathcal{X}_j=\nu_0t_j+\frac{1}{2}\alpha_0t_j^2, j=2,\ldots,M \tag{49}$$

其中 ν_0 和 α_0 根据 $j=2,3$ 时系统（36）解出。由性质 **Property1** 可知，矩阵 Ξ' 零空间至少有 1 维，且公式（37）中的向量 $\mathbf{n}_0\in\mathcal{N}(\Xi')$。

(1) 当相机做匀加速运动时，对于给定的地图点 i，如果三个向量 $\nu_0,\alpha_0,\mathbf{P}_1^i$ 生成 3D 空间，即三个向量不在同一平面上；则有 $dim(\mathcal{N}(\Xi'))=1$。

证明如下：不失一般性，令 $i=1$。根据公式（30）前 6 个方程，亦即 $j=2,3$ 时的公式（31）, 可得同样公式（39）；同样地，将 α 和 ν 带入到 $j=4$ 的公式（31）中，得到相同公式（40）。由于 $\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_3,\mathcal{X}_4$ 均可由公式（49）中的 ν_0 和 α_0 表示，则有简化公式，

$$a_1\mathbf{P}_1^1+a_2\alpha_0+a_3\nu_0=\mathbf{0}_{3\times1} \tag{50}$$

其中 a_1,a_2,a_3 由 n_1^1,n_2^1,n_3^1,n_4^1 线性表示。由于三个向量 $\nu_0,\alpha_0,\mathbf{P}_1^1$ 生成 3D 空间，因此有系统

$$a_k(n_1^1,n_2^1,n_3^1,n_4^1)=0, k=1,2,3 \tag{51}$$

该系统 $\mathbf{A}\mathbf{n}=\mathbf{0}_{3\times1}$ 中 $\mathbf{A}$ 为 3×4 矩阵，$\mathbf{n}=[n_1^1,n_2^1,n_3^1,n_4^1]^T$。通过验证，矩阵 $\mathbf{A}$ 的零空间维度为 1，且该零空间向量有 $n_1^1=-1,n_2^1=n_3^1=n_4^1=1$。

对于系统公式（32），当 $i\neq1$ 时，

$$(n_1^i+n_j^i)\mathbf{P}_1^i+(1+n_j^i)(\nu_0t_j+\frac{1}{2}\alpha_0t_j^2)=\mathbf{0}_{3\times1} \tag{52}$$

由于三个向量 $\nu_0,\alpha_0,\mathbf{P}_1^1$ 生成 3D 空间，因此 ν_0,α_0 不共线。因此存在某个 $j=j^*$，使得向量 $\mathbf{P}_1^i$ 与向量 $\nu_0t_{j^*}+\frac{1}{2}\alpha_0t_{j^*}^2$ 不共线，由公式 (52) 可得 $n_{j^*}^i=-1,n_1^i=1$。对于其他 $j\neq j^*$，

$$(1+n_j^i)(\mathbf{P}_1^i+\nu_0t_j+\frac{1}{2}\alpha_0t_j^2)=\mathbf{0}_{3\times1} \tag{53}$$

如果 $n_j^i\neq-1$，则有 $\mathbf{P}_1^i=-\nu_0t_j-\frac{1}{2}\alpha_0t_j^2=-\mathcal{X}_j$, 根据 **Assumption1**，此种情况不成立；因此有 $n_j^i=-1$。至此，矩阵 Ξ' 的零空间维度为 1，系统有 2 个解。

(2) 当相机做匀速运动时，即有 $|\alpha|=0$。由于 $|\Pi\mathbf{n}_0|=|\alpha_0|=0$，根据 **Theorem1**，可知系统有无限个解，但是重力 $\mathbf{G}$ 可唯一解出。

3 可解性分析：Biased Case

下面开始讨论加速度计受 bias 影响时，系统的可解性。显然 unbias 下的各种条件，在 bias 下同样需要满足；但另一方面，unbias 下的各种条件，不足以保证 bias 下的同样可解性，因此需要定义一些新的条件，以满足 bias 下的可解性。

类似于 unbias 情况，假设向量 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$，

$$\mathbf{n} \triangleq \left[\alpha^T, \nu^T, \mathbf{b}^T, n_1^1, \ldots, n_1^N, n_2^1, \ldots, n_2^N, \ldots, n_M^1, \ldots, n_M^N\right]^T \tag{54}$$

其中 $\mathbf{b}$ 为 3×1 向量，对应于加速度计 bias，且有

$$\Xi'\mathbf{n} = \mathbf{0}_{3(M-1)*N\times 1} \tag{55}$$

将上式展开得到

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu + \Gamma_j\mathbf{b} + (n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{56}$$

$$(n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + (n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i + (n_j^1 + n_j^i)\mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{57}$$

为方便分析，首先给出三个性质，并分别证明：

Property2: (a) 当 $M \leqslant 3$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$; (b) 当 $M = 4$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$; (c) 当 $M \geqslant 5$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$，但需满足如下条件：相机按照特定的方式运动，$\mathcal{X}_j = -\frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2 - t_j\nu_0 + \Gamma_j\mathbf{b}_0, j \geqslant 5$ 。

证明如下：首先定义如下子系统，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu + \Gamma_j\mathbf{b} = -\mathcal{X}_j, j = 2, \ldots, M \tag{58}$$

其对应的矩阵为 Ξ_b''，显然 $dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \leqslant dim(\mathcal{N}(\Xi'))$。假如向量 $\left[\mathbf{n}_\alpha^T, \mathbf{n}_\nu^T, \mathbf{n}_\mathbf{b}^T\right]^T \in \mathcal{N}(\Xi_b'')$，则显然 (54) 中令 $\alpha = \mathbf{n}_\alpha, \nu = \mathbf{n}_\nu, \mathbf{b} = \mathbf{n}_\mathbf{b}, n_j^i = 0, \forall i, j$，有 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$。

(1) 当 $M \leqslant 3$ 时，系统 (58) 的方程数量最多 6 个（$j = 2, 3$），而未知量有 9 个，因此 $dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \geqslant 3$；

(2) 当 $M = 4$ 时，矩阵 Ξ_b'' 为 9×9 的方阵；如果矩阵 Ξ_b'' 的行列式为零，则 $dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \geqslant 1$；如果矩阵 Ξ_b'' 的行列式不为零，则系统 (58) 有唯一解 $(\alpha_0, \nu_0, \mathbf{b}_0)$; 根据公式 (56) 和 (57)，令 $\alpha = \alpha_0, \nu = \nu_0, \mathbf{b} = \mathbf{b}_0, n_1^1 = n_j^i = -1, n_j^1 = n_1^i = 1, j = 2, 3, 4, i = 2, \ldots, N$，则有 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$，进而 $dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$；

(3) 当 $M \geqslant 5$，且 $\mathcal{X}_j = -\frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2 - t_j\nu_0 + \Gamma_j\mathbf{b}_0$ 时，公式 (37) 中的向量 $\mathbf{n}_0$ 可表示为，

$$\mathbf{n}_0^b \triangleq \left[\alpha_0^T, \nu_0^T, \mathbf{b}_0^T, \bar{n}_1^1, \ldots, \bar{n}_1^i, \ldots, \bar{n}_j^1, \ldots, \bar{n}_j^i, \ldots\right]^T \tag{59}$$

并且有 $\mathbf{n}_0^b \in \mathcal{N}(\Xi')$。

Property3: 当相机运动不旋转时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$；当相机始终绕着单一轴旋转时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$。

证明如下：

(1) 当相机运动不旋转时，根据 (8) 中 Γ_j 的定义，有 $\Gamma_j = \frac{1}{2}t_j^2\mathbf{I}_3$；另外由于 $\mathbf{T}_j \triangleq -\frac{1}{2}t_j^2\mathbf{I}_3$，即矩阵 Ξ' 中第 $1 \sim 3$ 列和第 $7 \sim 9$ 列仅相差一个负号，因此 $dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$；

(2) 当相机绕着单一轴旋转时，不失一般性，假设绕 z 轴旋转，则矩阵 Ξ' 中第 3 列和第 9 列仅相差一个符号，至少可构建一个量空间向量：其他元素为零，第 3 列和第 9 列不为零；因此 $dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$。

Property4: (a) 当相机绕着单一轴旋转，且 $M \geqslant 4$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 1$；(b) 当相机绕着至少两个轴旋转，且 $M \geqslant 4$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 0$。

证明如下：对于子系统 (58), 考虑其连续形式，

$$-\frac{1}{2}\alpha t^2 - t\nu + \Gamma(t)\mathbf{b} = -\mathcal{X}(t) \tag{60}$$

对上式求关于时间 t 的三阶导，得到，

$$\frac{d^3\Gamma(t)}{dt^3}\mathbf{b} = -\frac{d^3\mathcal{X}(t)}{dt^3} \tag{61}$$

根据 (8) 中 $\Gamma(t)$ 的定义，以及 $t_{in} = 0$,

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt}\mathbf{b} = -\frac{d^3\mathcal{X}(t)}{dt^3} \tag{62}$$

由于 $\mathbf{C}$ 为旋转矩阵，则有

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \lfloor \Omega(t) \rfloor_\times \mathbf{C} \tag{63}$$

其中，

$$\lfloor \Omega(t) \rfloor_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

则有，

$$\lfloor \Omega(t) \rfloor_\times \mathbf{b}' == -\frac{d^3 \mathcal{X}(t)}{dt^3} \tag{65}$$

其中 $\mathbf{b}' \triangleq \mathbf{Cb}$。对于非零 $\Omega(t)$，系统 (65) 的秩为 2；因此 $\mathbf{b}$ 中的 2 维可解算出，且为第 3 维的函数。对于系统 (60)，考虑两个不同时刻，则 α 和 ν 可由 $\mathbf{b}$ 唯一表示，因此有 $dim(\mathcal{N}(\Xi''_b)) \leqslant 1$；另外由 **Property3** 可知，$dim(\mathcal{N}(\Xi''_b)) \geqslant 1$，因此有 $dim(\mathcal{N}(\Xi''_b)) = 1$。

当相机绕着至少 2 个轴旋转时，对于公式 (65) 取 2 个不同时刻，则可确定 $\mathbf{b}$；进一步地，对于系统 (60) 在两个不同时刻，则 α 和 ν 可由 $\mathbf{b}$ 唯一表示，因此有 $dim(\mathcal{N}(\Xi''_b)) = 0$。

3.1 图像帧数小于等于 3

根据 **Property2**，当 $M \leqslant 3$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 3$; 因此 VI-SLAM 系统有无数解。

3.2 图像帧数等于 4

根据 **Property2**，当 $M = 4$ 时，$dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geqslant 1$;

(1) 当 $N = 1$ 时，系统有无数个解。证明如下：当 $M = 4, N = 1$ 时，系统 (24) 中矩阵 Ξ 维度为 9×13，显然系统有无数解。

(2) 当 $N \geqslant 2$，且相机至少绕一个轴旋转时，系统有 2 个解。证明如下：一般而言，三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^i, \mathcal{X}_j$ 对于 $i = 2, \ldots, N; j = 2, \ldots, M$ 相互独立，即相互不共线。根据公式 (57) 有 $n_1^1 + n_j^1 = n_1^i + n_j^i = n_j^1 + n_j^i = 0, \forall i \geqslant 2, \forall j \geqslant 2$。如果 $n_1^1 = 0$，则有 $n_j^i = 0, \forall i, \forall j$; 公式 (56) 变为，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + \Gamma_j \mathbf{b} = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{66}$$

根据 **Property4**，当 $n_1^1 = 0$，且相机仅绕一个轴转动时，矩阵 Ξ' 仅有一个零空间向量 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$。如果 $n_1^1 \neq 0$，公式 (56) 除以 n_1^1 得到，

$$-\frac{t_1^2}{2}\frac{\alpha}{n_1^1} - t_j \frac{\nu}{n_1^1} + \Gamma_j \frac{\mathbf{b}}{n_1^1} = \mathcal{X}_j \tag{67}$$

根据 **Property4**，当相机绕至少两个轴旋转时，系统 (67) 有唯一解；当相机绕一个轴旋转，或不旋转时，系统 (67) 无解。因此当 $n_1^1 \neq 0$ 且相机绕至少两个轴旋转时，矩阵 Ξ' 有唯一零空间 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$。

3.3 图像帧数大于等于 5

4 Gyroscope Bias 估计

5 Modified MK 闭式解

References

[1] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.

[2] Hesch J A, Kottas D G, Bowman S L, et al. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 33(1): 182-201.

[3] Huai Z, Huang G. Robocentric visual-inertial odometry[C]//2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2018: 6319-6326.