VI-SLAM 系统初始化闭式可解性分析

张谦

2020 年 3 月 12 日

目录

1 系统模型

由 VI-SLAM 系统可观性分析可知，在给定视觉和 IMU 观测后，body 系的全局平移和重力方向旋转 yaw 角不可观，body 系的速度、重力和绝对尺度是可观的。分析 VI-SLAM 系统初始化时的闭式可解性，亦即分析在一段时间内，在不同条件下可观变量的可解性：（1）运动轨迹和状态；（2）地图点数量和观测图像上的分布；（3）相机图像帧数。

为简化分析，不考虑相机和 IMU 之间的外参，即假设相机和 IMU 位姿重合。在该系统中，四元数表示旋转采用 Hamilton 形式。坐标系约定：全局坐标系用 G 表示，Camera 坐标系用 C 表示，IMU 坐标系用 I 表示，地图点用 f 表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如 ${}^G\mathbf{p}_I$ 表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移），${}^G\mathbf{v}_I$ 表示 IMU 系在全局坐标系下的速度，${}^G\mathbf{q}_I$ 表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 Hamilton 形式，旋转均是由 I 系到 G 系旋转，与 JPL 表示方式相反；${}^G\mathbf{p}_{f_i}$ 表示第 i 个地图点在 G 系下的坐标。

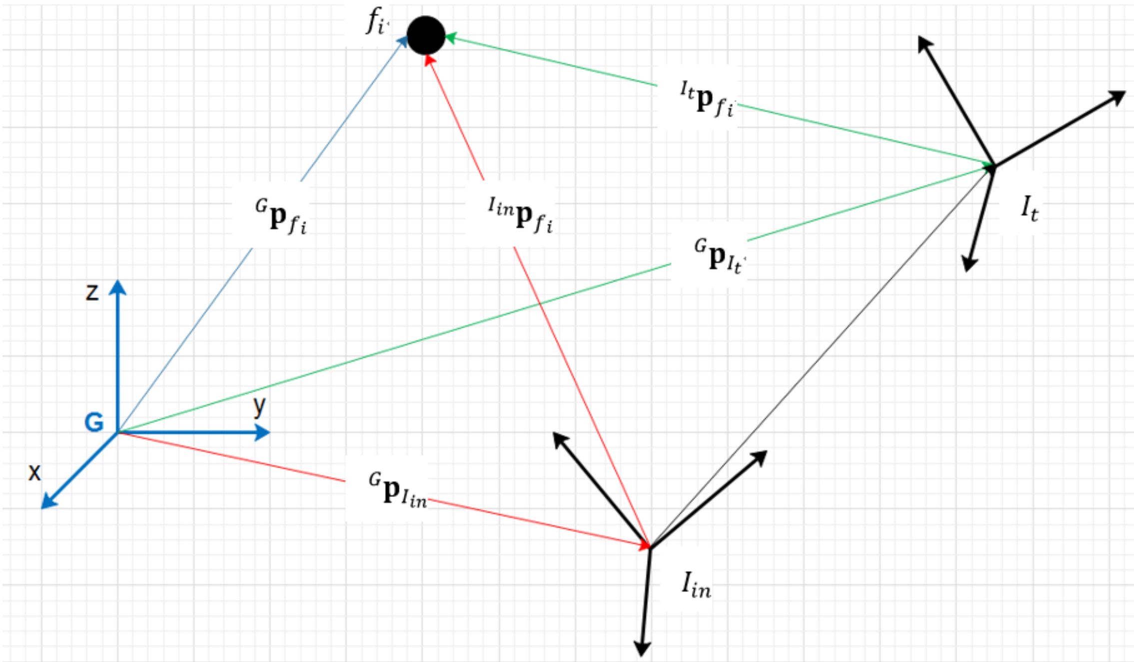

图 1: 几何关系

陀螺仪测量 ${}^I\omega_m$ 和加速度计测量 ${}^I\mathbf{a}_m$ 模型为：

$$ {}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \tag{1}$$

$$ {}^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \tag{2}$$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 表示四元数对应的旋转矩阵。在分析可解性时，若不考虑噪声影响，则有，

$$ {}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) \tag{3}$$

$$ {}^G\mathbf{a}_I(t) = \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^I\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{b}_a(t)) + {}^G\mathbf{g} \tag{4}$$

现分析时间段 $[t_{in}, t_{fin}]$ 内的可解性，如图1所示，从 t_{in} 到 $t \in [t_{in}, t_{fin}]$ 时刻的平移几何关系可表示为，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \iint_{t_{in}}^{t} {}^G\mathbf{a}_I(\tau)\, d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \iint_{t_{in}}^{t} (\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) + {}^G\mathbf{g}) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 - \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\mathbf{b}_a(\tau) d\tau^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

假设在积分区间内，加速度计 bias 为常量，则有，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 - \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \mathbf{B}) \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) = \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\,{}^I\mathbf{a}_m(\tau)\, d\tau^2 \tag{7}$$

$${}^{I_{in}}\Gamma_I(t) = \iint_{t_{in}}^{t} \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \tag{8}$$

且 ${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t)$ 和 ${}^{I_{in}}\Gamma_I(t)$ 可由加速度计和陀螺仪提供的测量积分得到。

先假设有 N 个地图点被同时观测到，${}^G\mathbf{p}_{f_i}, i = 1, \ldots, N$，表示在第 t 时刻的相机坐标系下为 ${}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i}$，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \tag{9}$$

若上式中 $t = t_{in}$，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \tag{10}$$

将（6）和（10）带入（9），得到，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i}
\end{aligned} \tag{11}$$

两边同时乘以 $\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))$，得到，

$$\begin{aligned}
&{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \tfrac{1}{2}\,{}^G\mathbf{g}\,\Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B})) + \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t))\,{}^{I_t}\mathbf{p}_{f_i} = {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} - {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I\,\Delta t - \tfrac{1}{2}\,{}^{I_{in}}\mathbf{g}\,\Delta t^2 - {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) + {}^{I_{in}}\Gamma_I(t)\,\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{v}_I = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^G\mathbf{v}_I(t_{in}) \tag{13}$$

$${}^{I_{in}}\mathbf{g} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\,{}^G\mathbf{g} \tag{14}$$

假设在时间段 t_{in}, t_{fin} 内，共有 M 帧图像：$t_1 = t_{in} < t_2 < \cdots < t_M = t_{fin}$，且 N 个地图点均被这 M 帧图像观测到。为简化书写，利用如下简写：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_j^i \triangleq \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t_j))\,{}^{I_{t_j}}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\mathbf{P}^i \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \\
&\mathbf{V} \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \\
&\mathbf{G} \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{g} \\
&\Gamma_j \triangleq {}^{I_{in}}\Gamma_I(t_j) \\
&\mathbf{S}_j \triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t_j)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $i=1,2,\ldots,N$； $j=1,2,\ldots,M$。另外，用 μ_j^i 表示 $\mathbf{P}_j^i$ 的单位向量，则有 $\mathbf{P}_j^i=\lambda_j^i\mu_j^i$。不失一般性，可令 $t_{in}=0$，则有 $\Delta t=t$。几何关系式（12）在每个图像帧时刻 t_j，可表示为

$$\mathbf{P}^i-\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}-\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{S}_j \tag{16}$$

另外当 $j=1$ 时，$t_j=t_1=t_{in}=0$，则有 $\mathbf{P}^i=\mathbf{P}_1^i=\lambda_1^i\mu_1^i$。几何关系（16）可进一步表示为，

$$-\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}+\lambda_1^i\mu_1^i-\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{S}_j \tag{17}$$

对于第 t_1 帧和第 t_j 帧，第 1 个地图点和第 i 个地图点，有如下几何关系：

$$\lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1=\lambda_1^i\mu_1^i-\lambda_j^i\mu_j^i \tag{18}$$

综合几何关系（17）和（18），可最终得到如下关系式子，

$$\begin{cases} -\mathbf{V}t_j-\frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2+\Gamma_j\mathbf{B}+\lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1=\mathbf{S}_j \\ \lambda_1^1\mu_1^1-\lambda_j^1\mu_j^1-\lambda_1^i\mu_1^i+\lambda_j^i\mu_j^i=\mathbf{0}_3 \end{cases} \tag{19}$$

其中 $j=2,3,\ldots,M$； $i=2,3,\ldots,N$。分析 VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性，亦即分析在几何关系（19）下，变量 $\mathbf{P}_j^i,\mathbf{V},\mathbf{G},\mathbf{B}$ 的可解性。其中（19）可提供 $3*(M-1)*N$ 个方程，未知变量有 $M*N+6$ 维（不考虑 bias）或 $M*N+9$ 维（只考虑加速度计 bias）。

定义如下变量和矩阵：考虑加速度计 bias 未知变量，

$$\mathbf{X}\triangleq\left[\mathbf{G}^T,\mathbf{V}^T,\mathbf{B}^T,\lambda_1^1,\ldots,\lambda_1^N,\ldots,\lambda_M^1,\ldots,\lambda_M^N\right]^T \tag{20}$$

不考虑 bias 未知变量，

$$\mathbf{X}\triangleq\left[\mathbf{G}^T,\mathbf{V}^T,\lambda_1^1,\ldots,\lambda_1^N,\ldots,\lambda_M^1,\ldots,\lambda_M^N\right]^T \tag{21}$$

IMU 测量相关积分变量，

$$\mathbf{S}\triangleq\left[\mathbf{S}_2^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{S}_3^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{S}_M^T,\mathbf{0}_{1\times3},\ldots,\mathbf{0}_{1\times3}\right]^T \tag{22}$$

几何关系矩阵，

$$\Xi=\begin{bmatrix}
\mathbf{T}_2 & \mathbf{K}_2 & \Gamma_2 & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_2^1 & \mu_2^2 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & -\mu_1^N & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \mu_2^N & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{T}_M & \mathbf{K}_M & \Gamma_M & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \mu_M^2 & \mathbf{0}_{3\times1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & -\mu_1^N & \mathbf{0}_{3\times1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0}_{3\times1} & -\mu_M^1 & \ldots & \mu_M^N
\end{bmatrix} \tag{23}$$

其中 $\mathbf{T}_j\triangleq-\frac{t_j^2}{2}\mathbf{I}_3$ 和 $\mathbf{K}_j\triangleq-t_j\mathbf{I}_3$。

根据以上定义，对于 M 帧图像和 N 个地图点的几何关系式（19）可表示为

$$\Xi\mathbf{X}=\mathbf{S} \tag{24}$$

假设重力的大小已知，即 $|\mathbf{G}|=g$，则对方程组（24）添加如下约束，

$$|\Pi\mathbf{X}|^2=g^2 \tag{25}$$

其中 $\Pi\triangleq[\mathbf{I}_3,\mathbf{0}_3,\ldots,\mathbf{0}_3]$。

至此，VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性分析，将基于方程组（24）和（25）。

2 闭式解方程

3 可解性分析：Unbiased Case

3.1 Planar Case

3.2 Linear Case

3.3 图像帧数小于等于 2

3.4 图像帧数等于 3

3.5 图像帧数大于等于 4

3.6 Constant Acceleration

4 可解性分析：Biased Case

4.1 图像帧数小于等于 3

4.2 图像帧数等于 4

4.3 图像帧数大于等于 5

5 Gyroscope Bias 估计

6 Modified MK 闭式解

References

[1] https://www.zhihu.com/question/22983179

[2] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.

[3] Hesch J A, Kottas D G, Bowman S L, et al. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 33(1): 182-201.

[4] Huai Z, Huang G. Robocentric visual-inertial odometry[C]//2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2018: 6319-6326.