

# VI-SLAM 系统初始化闭式可解性分析

张谦

2020 年 3 月 13 日

## 目录

<b>1</b>	<b>系统模型</b>	<b>2</b>
1.1	几何关系 . . . . .	2
1.2	基本原理 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>可解性分析: Unbiased Case</b>	<b>5</b>
2.1	Planar Case . . . . .	6
2.2	Linear Case . . . . .	6
2.3	图像帧数小于等于 2 . . . . .	7
2.4	图像帧数等于 3 . . . . .	7
2.5	图像帧数大于等于 4 . . . . .	8
2.6	Constant Acceleration . . . . .	9
<b>3</b>	<b>可解性分析: Biased Case</b>	<b>10</b>
3.1	图像帧数小于等于 3 . . . . .	11
3.2	图像帧数等于 4 . . . . .	11
3.3	图像帧数大于等于 5 . . . . .	11

# 1 系统模型

由 VI-SLAM 系统可观性分析可知，在给定视觉和 IMU 观测后，body 系的全局平移和重力方向旋转 yaw 角不可观，body 系的速度、重力和绝对尺度是可观的。分析 VI-SLAM 系统初始化时的闭式可解性，亦即分析在一段时间内，在不同条件下可观变量的可解性：（1）运动轨迹和状态；（2）地图点数量和观测图像上的分布；（3）相机图像帧数。

## 1.1 几何关系

为简化分析，不考虑相机和 IMU 之间的外参，即假设相机和 IMU 位姿重合。在该系统中，四元数表示旋转采用 Hamilton 形式。坐标系约定：全局坐标系用  $G$  表示，Camera 坐标系用  $C$  表示，IMU 坐标系用  $I$  表示，地图点用  $f$  表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如  ${}^G\mathbf{p}_I$  表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移）， ${}^G\mathbf{v}_I$  表示 IMU 系在全局坐标系下的速度， ${}^G\mathbf{q}_I$  表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 Hamilton 形式，旋转均是由  $I$  系到  $G$  系旋转，与 JPL 表示方式相反； ${}^G\mathbf{p}_{f_i}$  表示第  $i$  个地图点在  $G$  系下的坐标。

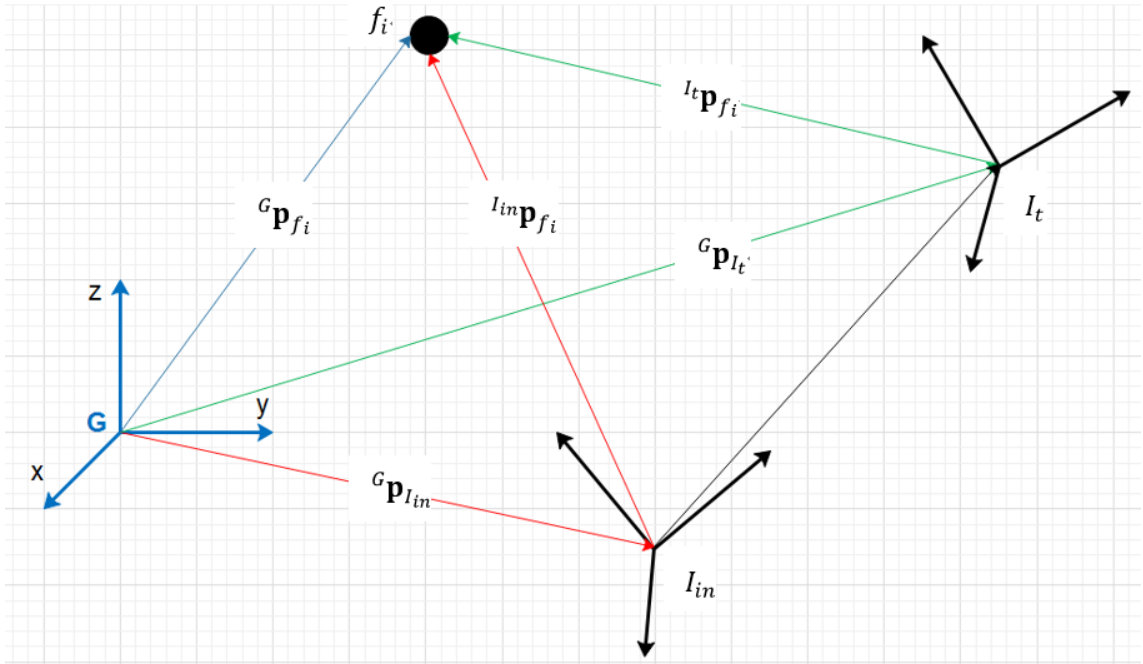


图 1: 几何关系

陀螺仪测量  ${}^I\omega_m$  和加速度计测量  ${}^I\mathbf{a}_m$  模型为：

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \quad (1)$$

$${}^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$  表示四元数对应的旋转矩阵。在分析可解性时，若不考虑噪声影响，则有，

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) \quad (3)$$

$${}^G\mathbf{a}_I(t) = \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^I\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{b}_a(t)) + {}^G\mathbf{g} \quad (4)$$

现分析时间段  $[t_{in}, t_{fin}]$  内的可解性，如图1所示，从  $t_{in}$  到  $t \in [t_{in}, t_{fin}]$  时刻的平移几何关系可表示为，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \int_{t_{in}}^t {}^G\mathbf{a}_I(\tau) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \int_{t_{in}}^t (\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) + {}^G\mathbf{g}) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 - \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\mathbf{b}_a(\tau) d\tau^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

假设在积分区间内，加速度计 bias 为常量，则有，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 - \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \mathbf{B}) \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) = \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 \tag{7}$$

$${}^{I_{in}}\Gamma_I(t) = \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \tag{8}$$

且  ${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t)$  和  ${}^{I_{in}}\Gamma_I(t)$  可由加速度计和陀螺仪提供的测量积分得到。

现假设有  $N$  个地图点被同时观测到， ${}^G\mathbf{p}_{f_i}, i = 1, \dots, N$ ，表示在第  $t$  时刻的相机坐标系下为  ${}^I_t\mathbf{p}_{f_i}$ ，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \tag{9}$$

若上式中  $t = t_{in}$ ，则有，

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \tag{10}$$

将 (6) 和 (10) 带入 (9)，得到，

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i}
\end{aligned} \tag{11}$$

两边同时乘以  $\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))$ ，得到，

$$\begin{aligned}
{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B})) + \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} &= {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} - {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \Delta t - \frac{1}{2} {}^{I_{in}}\mathbf{g} \Delta t^2 - {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) + {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{v}_I = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^G\mathbf{v}_I(t_{in}) \tag{13}$$

$${}^{I_{in}}\mathbf{g} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^G\mathbf{g} \tag{14}$$

假设在时间段  $t_{in}, t_{fin}$  内，共有  $M$  帧图像： $t_1 = t_{in} < t_2 < \dots < t_M = t_{fin}$ ，且  $N$  个地图点均被这  $M$  帧图像观测到。为简化书写，利用如下简写：

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_j^i &\triangleq \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t_j)) {}^I_{t_j}\mathbf{p}_{f_i} \\
\mathbf{p}^i &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \\
\mathbf{v} &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \\
\mathbf{g} &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{g} \\
\Gamma_j &\triangleq {}^{I_{in}}\Gamma_I(t_j) \\
\mathbf{S}_j &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t_j)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $j = 1, 2, \dots, M$ 。另外, 用  $\mu_j^i$  表示  $\mathbf{P}_j^i$  的单位向量, 则有  $\mathbf{P}_j^i = \lambda_j^i \mu_j^i$ 。不失一般性, 可令  $t_{in} = 0$ , 则有  $\Delta t = t$ 。几何关系式 (12) 在每个图像帧时刻  $t_j$ , 可表示为

$$\mathbf{P}^i - \mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} - \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{S}_j \quad (16)$$

另外当  $j = 1$  时,  $t_j = t_1 = t_{in} = 0$ , 则有  $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}_1^i = \lambda_1^i \mu_1^i$ 。几何关系 (16) 可进一步表示为,

$$-\mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} + \lambda_1^i \mu_1^i - \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{S}_j \quad (17)$$

对于第  $t_1$  帧和第  $t_j$  帧, 第 1 个地图点和第  $i$  个地图点, 有如下几何关系:

$$\lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 = \lambda_1^i \mu_1^i - \lambda_j^i \mu_j^i \quad (18)$$

综合几何关系 (17) 和 (18), 可最终得到如下关系式子,

$$\begin{cases} -\mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} + \lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 = \mathbf{S}_j \\ \lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 - \lambda_1^i \mu_1^i + \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{0}_3 \end{cases} \quad (19)$$

其中  $j = 2, 3, \dots, M$ ;  $i = 2, 3, \dots, N$ 。分析 VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性, 亦即分析在几何关系 (19) 下, 变量  $\mathbf{P}_j^i, \mathbf{V}, \mathbf{G}, \mathbf{B}$  的可解性。其中 (19) 可提供  $3 * (M - 1) * N$  个方程, 未知变量有  $M * N + 6$  维 (不考虑 bias) 或  $M * N + 9$  维 (只考虑加速度计 bias)。

定义如下变量和矩阵: 考虑加速度计 bias 未知变量,

$$\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{G}^T, \mathbf{V}^T, \mathbf{B}^T, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^N, \dots, \lambda_M^1, \dots, \lambda_M^N]^T \quad (20)$$

不考虑 bias 未知变量,

$$\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{G}^T, \mathbf{V}^T, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^N, \dots, \lambda_M^1, \dots, \lambda_M^N]^T \quad (21)$$

IMU 测量相关积分变量,

$$\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{S}_2^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{S}_3^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{S}_M^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}]^T \quad (22)$$

几何关系矩阵,

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{K}_2 & \Gamma_2 & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_2^1 & \mu_2^2 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & -\mu_1^N & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mu_2^N & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_M & \mathbf{K}_M & \Gamma_M & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \mu_M^2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & -\mu_1^N & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \dots & \mu_M^N \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中  $\mathbf{T}_j \triangleq -\frac{t_j^2}{2}\mathbf{I}_3$  和  $\mathbf{K}_j \triangleq -t_j\mathbf{I}_3$ 。

根据以上定义, 对于  $M$  帧图像和  $N$  个地图点的几何关系式 (19) 可表示为

$$\Xi \mathbf{X} = \mathbf{S} \quad (24)$$

假设重力的大小已知, 即  $|\mathbf{G}| = g$ , 则对方程组 (24) 添加如下约束,

$$|\Pi \mathbf{X}|^2 = g^2 \quad (25)$$

其中  $\Pi \triangleq [\mathbf{I}_3, \mathbf{0}_3, \dots, \mathbf{0}_3]$ 。

至此, VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性分析, 将基于方程组 (24) 和 (25)。通过分析矩阵  $\Xi$  的零空间  $\mathcal{N}(\Xi)$ , 可得到变量  $\mathbf{X}$  的可解情况。

## 1.2 基本原理

关于 VI-SLAM 系统解的个数，有如下结论：

**Theorem1:** (a) 当矩阵  $\Xi$  的零空间  $\mathcal{N}(\Xi)$  为空时，有且仅有 1 个解；(b) 当零空间  $\dim(\mathcal{N}(\Xi)) = 1$ ，且对于任意  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi)$ ， $|\Pi\mathbf{n}| \neq 0$  时，有 2 个解；(c) 其他情况，有无数解。

证明如下：(i) 对于结论 (a)，显然地利用高斯消元法解方程组，可得到唯一解；(ii) 当  $\dim(\mathcal{N}(\Xi)) = 1$  时，线性方程组 (24) 有解： $\mathbf{X}(\gamma) = \Xi^{-1}\mathbf{S} + \gamma\mathbf{n}$  (左右乘以  $\Xi$  可验证)，其中  $\Xi^{-1}$  为  $\Xi$  的伪逆， $\mathbf{n}$  为零空间  $\mathcal{N}(\Xi)$  的列向量， $\gamma \in \mathbb{R}$  为一个未知标量。 $\gamma$  可由式子 (25) 解得：当  $|\Pi\mathbf{n}| \neq 0$  时， $|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2 = g^2$  是关于  $\gamma$  的二次多项式，因此有两个解  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ ，对应有两个解  $\mathbf{X}$ ， $\mathbf{X}_1 \triangleq \mathbf{X}(\gamma_1)$  和  $\mathbf{X}_2 \triangleq \mathbf{X}(\gamma_2)$ ；当  $|\Pi\mathbf{n}| = 0$  时， $|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2 = g^2$  与  $\gamma$  不相关，因此有无数解，但此时重力  $\mathbf{G}$  可被唯一解出。

结合 **Theorem1** 可通过分析矩阵  $\Xi$  的零空间  $\mathcal{N}(\Xi)$ ，得到 VI-SLAM 系统的可解的情况。由于矩阵的每一列乘以一个非零的标量常数，不改变矩阵零空间，为便于分析，将矩阵  $\Xi$  做如下变形，亦即每一列乘以对应的  $\lambda_j^i$  还原为  $\mathbf{P}_j^i = \lambda_j^i \mu_j^i$ ，得到

$$\Xi' \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2 & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \dots & \mathbf{0}_{3N \times N} \\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \mathcal{P}_3 & \dots & \mathbf{0}_{3N \times N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{M}_M & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \mathbf{0}_{3N \times N} & \dots & \mathcal{P}_M \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中

$$\mathcal{M}_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{T}_j & \mathbf{K}_j & \Gamma_j \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathcal{P}_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{P}_j^2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{P}_j^3 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{P}_j^N \end{bmatrix} \quad (28)$$

由式子 (18) 可知  $\mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i, i = 1, 2, \dots, N$  独立于  $i$ ，因此令  $\mathcal{X}_j \triangleq \mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i$  表征 IMU 系的运动状态。为保证矩阵  $\Xi'$  的每一列不为零，做如下假设：

**Assumption1:** 对于任意  $i = 1, 2, \dots, N, j = 2, \dots, M$ ，有  $\mathbf{P}_j^i \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 。

接下来，基于上述结论，通过分析矩阵  $\Xi'$  的零空间，进而分析考虑 bias 和不考虑 bias 时，VI-SLAM 系统的可解性。

## 2 可解性分析：Unbiased Case

假设向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ ，

$$\mathbf{n} \triangleq [\alpha^T, \nu^T, n_1^1, \dots, n_1^N, n_2^1, \dots, n_2^N, \dots, n_M^1, \dots, n_M^N]^T \quad (29)$$

且有

$$\Xi' \mathbf{n} = \mathbf{0}_{3(M-1) \times N \times 1} \quad (30)$$

将上式展开得到

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + (n_1^1 + n_j^1) \mathbf{P}_1^1 + n_j^1 \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (31)$$

$$(n_1^1 + n_j^1) \mathbf{P}_1^1 + (n_1^i + n_j^i) \mathbf{P}_1^i + (n_j^1 + n_j^i) \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (32)$$

上面两个式子可通过如下方式验证成立：由式子 (32) 可知，

$$\begin{aligned}
(n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j &= -(n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathcal{X}_j \\
&= -(n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i - n_j^i(\mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i) \\
&= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i + n_j^i\mathbf{P}_1^i \\
&= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i
\end{aligned} \tag{33}$$

由于  $\mathcal{X}_j = \mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i = \mathbf{P}_j^1 - \mathbf{P}_1^1$ ，因此左式可写为，

$$\begin{aligned}
(n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j &= (n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1(\mathbf{P}_j^1 - \mathbf{P}_1^1) \\
&= n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1
\end{aligned} \tag{34}$$

即有，

$$\begin{aligned}
n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1 &= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i \\
\Leftrightarrow n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1 + n_1^i\mathbf{P}_1^i + n_j^i\mathbf{P}_j^i &= 0
\end{aligned} \tag{35}$$

下面首先分析 2D 下共面和共线特殊情况，然后再分析 3D 下各种图像帧数和地图点数量的可解情况。

## 2.1 Planar Case

假设所有地图点和相机运动轨迹处在同一平面上，亦即  $\mathbf{P}_j^i, i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, M$  在同一平面上。则矩阵  $\Xi'$  中所有  $\mathbf{P}_j^i$  的某一维可以高斯消元为零：假设所有地图点和相机运动轨迹所在的同一平面方程为  $Ax + By + Cz + D = 0$  则  $x, y, z$  的其中之一可由另外两个变量线性表示。现假设在共面情况下，所有  $\mathbf{P}_j^i$  的第三维为零。注意变量  $\alpha$  和  $\nu$  的第三维不为零，因为公共平面可能为三维空间中的斜平面。为方便分析，将系统 (30) 分为两部分：第一部分为 (31) 和 (32) 的第一行和第二行组成的矩阵  $\Xi_1^{plane}$ ，其维度为  $2(M-1)N \times (MN+4)$ ；第二部分为 (31) 的第三行组成的矩阵  $\Xi_2^{plane}$ ，其只包含  $\alpha$  和  $\nu$  的第三维，维度为  $(M-1) \times 2$ 。

根据 **Theorem1**,

- (1) 当  $M \leq 2$  时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \geq 4$ ；保证系统具有有限个解的先决条件为  $M \geq 3$ 。
- (2) 当  $M \geq 3$  时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_2^{plane})) = 0$ ；
- (3) 当  $M = 3$  时，矩阵  $\Xi_1^{plane}$  的维度为  $4N \times (3N+4)$ ；因此为了使  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \leq 1$ ，至少需要保证  $N \geq 3$ ；
- (4) 当  $M = 4$  时，矩阵  $\Xi_1^{plane}$  的维度为  $6N \times (4N+4)$ ；因此为了使  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \leq 1$ ，至少需要保证  $N \geq 2$ ；
- (5) 当  $M \geq 5$  时， $N$  无要求。

## 2.2 Linear Case

假设所有地图点和相机运动轨迹共线，亦即  $\mathbf{P}_j^i, i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, M$  在同一条线上。则矩阵  $\Xi'$  中所有  $\mathbf{P}_j^i$  的某两维可以高斯消元为零：根据空间直线方程， $\mathbf{P}_j^i$  任意一维可线性表示另外两维。现假设在共线情况下，所有  $\mathbf{P}_j^i$  的第二、三维为零。同样的，为方便分析，将系统 (30) 分为两部分：第一部分为 (31) 和 (32) 的第一行组成的矩阵  $\Xi_1^{line}$ ，其维度为  $(M-1)N \times (MN+2)$ ；第二部分为 (31) 的第二、三行组成的矩阵  $\Xi_2^{line}$ ，其只包含  $\alpha$  和  $\nu$  的第二、三维，维度为  $2(M-1) \times 4$ 。显然地， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{line})) > 2$ ，根据 **Theorem1**，系统在任何条件下，均有无数解。

接下来，讨论一般 3D 情况下的系统可解性。首先给出性质：

**Property1:** (a) 当  $M \leq 2$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ; (b) 当  $M = 3$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ; (c) 当  $M \geq 4$ , 且相机匀加速运动时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

证明如下：首先定义一个子系统，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu = -\mathcal{X}_j, j = 2, \dots, M \quad (36)$$

且由其构成的方程组矩阵为  $\Xi''$ , 维度为  $3(M-1) \times 6$ 。显然的,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \leq \dim(\mathcal{N}(\Xi'))$ 。假如变量  $[\mathbf{n}_\alpha^T, \mathbf{n}_\nu^T]^T \in \mathcal{N}(\Xi'')$ , 则由  $\alpha = \mathbf{n}_\alpha, \nu = \mathbf{n}_\nu, n_j^i = 0, \forall i, j$  组成的向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

(1) 当  $M \leq 2$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \geq 3$ ;

(2) 当  $M = 3$  时, 矩阵  $\Xi''$  的维度为  $6 \times 6$ , 方程组 (36) 有唯一解  $(\alpha_0, \nu_0)$ ; 对应的, 矩阵  $\Xi'$  由如下零空间,

$$\mathbf{n}_0 \triangleq [\alpha_0^T, \nu_0^T, \bar{n}_1^1, \dots, \bar{n}_1^i, \dots, \bar{n}_j^1, \dots, \bar{n}_j^i, \dots]^T \quad (37)$$

其中  $\bar{n}_1^1 = -1, \bar{n}_j^1 = 1, \bar{n}_1^i = 1, \bar{n}_j^i = -1; j = 2, 3; i = 2, 3, \dots, N$ 。即当  $M = 3$  时,  $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$ , 则  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$

(3) 当  $M \geq 4$  时, 系统 (36) 有解条件为: 当且仅当  $\mathcal{X}_j = \nu_0 t_j + \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2$ , 亦即对每个  $j$ , 均有  $\alpha = \alpha_0, \nu = \nu_0$ 。此时矩阵  $\Xi''$  有零空间  $[\alpha_0^T, \nu_0^T]^T$ , 进而矩阵  $\Xi'$  有零空间  $\mathbf{n}_0$ , 即  $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$ , 对应相机以初速度  $\nu_0$  做加速度为  $\alpha_0$  的匀加速运动。

根据 **Theorem1**, 为分析系统的有限解情况, 需要分析  $\mathbf{n}_0$  是否为矩阵  $\Xi'$  的唯一零空间向量。接下来分不同情况考虑分析。

### 2.3 图像帧数小于等于 2

根据 **Property1**,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ; 由 **Theorem1** 可知, 系统有无限个解。

### 2.4 图像帧数等于 3

根据 **Property1**,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

(1) 当  $N = 1$  时, 矩阵  $\Xi'$  的维度为  $6 \times 9$ , 因此  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ , 系统有无限解。

(2) 当  $N = 2$  时, 矩阵  $\Xi'$  的维度为  $12 \times 12$ 。当且仅当如下两个条件满足时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$ : (i) 对于给定的  $j$  (例如  $j = 2$  或  $j = 3$ ), 三个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$  生成 3D 空间, 即三个向量不在同一平面上; (ii) 对于其他的  $j$  (例如  $j = 3$  或  $j = 2$ ),  $\mathbf{P}_j^i$  与  $\mathbf{P}_j^k, \forall i, k = 1, 2, \dots, N$  不成比例, 即不共线。否则,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

证明如下: 当 (i) 不满足时, 即三个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$  共面; 由于  $N = 2$ , 根据上面 Planar Case 的讨论,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) > 1$ 。现假设条件 (i) 对于给定的  $j = 2$  成立, 依据公式 (32), 由于三个向量不共面, 即任意一个向量不能被另外两个向量线性表示, 为使等式成立, 则三个向量前的系数为零, 可得  $n_1^1 = n_2^2 = -n_2^1 = -n_1^2$ 。根据公式 (31), 当  $j = 2$  时, 可得  $-\frac{1}{2}\alpha t_2^2 - t_2 \nu = -n_2^1 \mathcal{X}_2$ , 与系统 (36) 类似 (用  $n_2^1 \mathcal{X}_2$  代替  $\mathcal{X}_2$ )。依据公式 (32), 当  $j = 3$  时, 取  $i = 2$ ,

$$\begin{aligned} & (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_1^2 + (n_3^1 + n_3^2)\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_1^2 + (n_1^1 + n_3^1 + n_1^2 + n_3^2)\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1)(\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_3) + (n_1^2 + n_3^2)(\mathbf{P}_1^2 + \mathcal{X}_3) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_3^1 + (n_1^2 + n_3^2)\mathbf{P}_3^2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (-n_2^1 + n_3^1)\mathbf{P}_3^1 = -(n_2^1 + n_3^2)\mathbf{P}_3^2 \end{aligned} \quad (38)$$

其中利用了  $n_1^1 = -n_2^1 = -n_1^2$  和  $\mathcal{X}_3 = \mathbf{P}_3^1 - \mathbf{P}_1^1 = \mathbf{P}_3^2 - \mathbf{P}_1^2$ 。当条件 (ii) 成立时, 有  $\mathbf{P}_3^1$  和  $\mathbf{P}_3^2$  不共线, 则它们前面的系数为零, 得到  $n_3^1 = -n_3^2 = n_2^1$ 。根据公式 (31), 当  $j = 3$  时, 可得  $-\frac{1}{2}\alpha t_3^2 - t_3 \nu = -n_3^1 \mathcal{X}_3 = -n_2^1 \mathcal{X}_3$ , 与系统 (36) 类似 (用  $n_2^1 \mathcal{X}_3$  代替  $\mathcal{X}_3$ )。至此, 当  $j = 2, 3$  且满足条件 (i) 和 (ii) 时, 系统与 (36) 类似, 仅仅用  $n_2^1 \mathcal{X}_j$  代替  $\mathcal{X}_j$ ; 根据上面讨论, 该系统有唯一解, 且零空间  $\mathcal{N}(\Xi')$  仅有生成向量  $\mathbf{n}_0$ 。根据 **Theorem1**, 系统有 2 个解。

综上所述, 当  $M = 3, N \geq 2$  时, 满足相关条件时, VI-SLAM 系统有 2 个解; 否则有无数个解。

## 2.5 图像帧数大于等于 4

当  $M \geq 4$  时, 方程个数大于未知数个数; 除了当  $M = 4, N = 1$  时, 矩阵  $\Xi'$  的维度为  $9 \times 10$ , 其零空间维度至少为 1 维。下面首先分析该特殊情况。

(1) 当  $M = 4, N = 1$  时, 当且仅当 4 个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$  生成整个 3D 空间, 即该 4 个向量不共面时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$ 。

证明如下: 假如 4 个向量共面, 根据 Planar Case 的讨论, 由于  $N = 1$ ,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) > 1$ 。下面考虑 4 个向量不共面, 且生成 3D 空间的情况。根据公式 (30), 首先取前 6 个方程, 即公式 (31) 中  $j = 2, 3$ , 可得到  $\alpha$  和  $\nu$  关于  $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$  的线性表示:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha t_2^2 - t_2\nu + (n_1^1 + n_2^1)\mathbf{P}_1^1 + n_2^1\mathcal{X}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\frac{1}{2}\alpha t_3^2 - t_3\nu + (n_1^1 + n_3^1)\mathbf{P}_1^1 + n_3^1\mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{cases} \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{t_3 t_2^2 - t_2 t_3^2} \{ [t_3(n_1^1 + n_2^1) - t_2(n_1^1 + n_3^1)] \mathbf{P}_1^1 + t_3 n_2^1 \mathcal{X}_2 - t_2 n_3^1 \mathcal{X}_3 \} \\ \nu = \frac{1}{t_2 t_3^2 - t_3 t_2^2} \{ [t_3^2(n_1^1 + n_2^1) - t_2^2(n_1^1 + n_3^1)] \mathbf{P}_1^1 + t_3^2 n_2^1 \mathcal{X}_2 - t_2^2 n_3^1 \mathcal{X}_3 \} \end{cases}$$

将  $\alpha$  和  $\nu$  带入到  $j = 4$  的公式 (31) 中, 得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\alpha t_4^2 - t_4\nu + (n_1^1 + n_4^1)\mathbf{P}_1^1 + n_4^1\mathcal{X}_4 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & -\frac{t_4^2}{t_3 t_2^2 - t_2 t_3^2} \{ [t_3(n_1^1 + n_2^1) - t_2(n_1^1 + n_3^1)] \mathbf{P}_1^1 + t_3 n_2^1 \mathcal{X}_2 - t_2 n_3^1 \mathcal{X}_3 \} \\ & -\frac{t_4}{t_2 t_3^2 - t_3 t_2^2} \{ [t_3^2(n_1^1 + n_2^1) - t_2^2(n_1^1 + n_3^1)] \mathbf{P}_1^1 + t_3^2 n_2^1 \mathcal{X}_2 - t_2^2 n_3^1 \mathcal{X}_3 \} + (n_1^1 + n_4^1)\mathbf{P}_1^1 + n_4^1\mathcal{X}_4 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (40)$$

将上式简写为

$$a_1 \mathbf{P}_1^1 + a_2 \mathcal{X}_2 + a_3 \mathcal{X}_3 + a_4 \mathcal{X}_4 = \mathbf{0} \quad (41)$$

其中  $a_1, a_2, a_3, a_4$  为  $n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1$  的线性表示。

由于 4 个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$  生成 3D 空间, 因此有  $3 \times 4$  矩阵  $\Xi^* = [\mathbf{P}_1^1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4]$  的零空间为 1 维, 假设该零空间向量为  $\mathbf{a}^* = [a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*]^T$ , 即有  $\Xi^* \mathbf{a}^* = \mathbf{0}$ 。又由于  $a_k^*, k = 1, 2, 3, 4$  为  $n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1$  的函数, 因此考虑如下线性系统,

$$a_k(n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1) = a_k^*, k = 1, 2, 3, 4 \quad (42)$$

通过分析方程组  $\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{a}$  中  $4 \times 4$  矩阵  $\mathbf{A}$  的零空间, 了解线性系统 (42) 解的情况, 其中  $\mathbf{n} = [n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1]^T$ ,  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ ; 检查矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式,

$$|\mathbf{A}|_{det} = -\frac{(t_4 - t_3)^2(t_4 - t_2)^2 t_4^2}{(t_2 - t_3)^2 t_3^2 t_2^2} \quad (43)$$

由于  $0 < t_2 < t_3 < t_4$ , 则有  $|\mathbf{A}|_{det} \neq 0$ 。因此系统 (42) 有唯一解, 则有系统 30 有唯一解, 进而可知  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$ , 则 VI-SLAM 系统有 2 个解。

(2) 当  $M \geq 4, N \geq 2$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 0$ , 系统有唯一解。证明如下: 一般而言, 对于任意  $i = 2, \dots, N; j = 2, \dots, M$ , 三个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^i, \mathcal{X}_j$  相互独立, 即相互不共线。因此, 根据公式 (32) 可得:

$$n_1^1 + n_j^1 = n_1^i + n_j^i = n_j^1 + n_j^i = 0, \forall i \geq 2, \forall j \geq 2 \quad (44)$$

假如  $n_1^1 \neq 0$ , 且不失一般性, 令  $n_1^1 = 1$ , 则公式 (31) 变为

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu = \mathcal{X}_j \quad (45)$$

显然当  $M \geq 4$  时, 上式没法满足每个方程式, 除非相机做匀加速运动 (该情况后面单独考虑), 因此  $n_1^1 = 0$ ; 进而有  $n_j^i = 1, \forall i, \forall j$ 。根据式子 (31), 可知  $\alpha = \nu = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 。因此有矩阵  $\Xi'$  的零空间为空。系统有唯一解。

(3) 当  $M \geq 5, N = 1$  时, 根据  $M = 4, N = 1$  时的讨论, 系统 30 有唯一解, 假设该零空间唯一向量为  $\hat{\mathbf{n}}_4 \triangleq [\hat{\alpha}^T, \hat{\nu}^T, \hat{n}_1^1, \hat{n}_2^1, \hat{n}_3^1, \hat{n}_4^1]^T$ , 则有  $\hat{\mathbf{n}}_4$  满足  $j = 2, 3, 4$  时的公式 (31)。因此, 当  $M \geq 5$  时, 如果系统 (30) 有解, 则该解的前十个元素为零, 或者等于  $\hat{\mathbf{n}}_4$ 。对于  $j \geq 5$ : 首先, 如果前十个元素为零, 则根据公式 (31) 可知,

$$n_j^1(\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_j) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (46)$$



根据 **Assumption1**, 可知  $n_j^1 = 0$ , 则矩阵  $\Xi'$  的零空间为空。其次, 如果前十个元素等于  $\hat{\mathbf{n}}_4$ , 根据公式 (31) 有,

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu + (n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (47)$$

该公式一般不成立, 理由如下: 如果  $n_j^1 = 0$ , 则有

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu + n_1^1\mathbf{P}_1^1 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (48)$$

对所有  $j \geq 5$  不可能成立; 如果  $n_j^1 \neq 0$ , 则向量  $\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_j$  必须与向量  $-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu + n_1^1\mathbf{P}_1^1$  共线, 这种情况一般而言也不成立。因此, 矩阵  $\Xi'$  的零空间为空, 系统有唯一解。

## 2.6 Constant Acceleration

当相机做匀加速运动时,

$$\mathcal{X}_j = \nu_0 t_j + \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2, j = 2, \dots, M \quad (49)$$

其中  $\nu_0$  和  $\alpha_0$  根据  $j = 2, 3$  时系统 (36) 解出。由性质 **Property1** 可知, 矩阵  $\Xi'$  零空间至少有 1 维, 且公式 (37) 中的向量  $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

(1) 当相机做匀加速运动时, 对于给定的地图点  $i$ , 如果三个向量  $\nu_0, \alpha_0, \mathbf{P}_1^i$  生成 3D 空间, 即三个向量不在同一平面上; 则有  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$ 。

证明如下: 不失一般性, 令  $i = 1$ 。根据公式 (30) 前 6 个方程, 亦即  $j = 2, 3$  时的公式 (31), 可得同样公式 (39); 同样地, 将  $\alpha$  和  $\nu$  带入到  $j = 4$  的公式 (31) 中, 得到相同公式 (40)。由于  $\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$  均可由公式 (49) 中的  $\nu_0$  和  $\alpha_0$  表示, 则有简化公式,

$$a_1\mathbf{P}_1^1 + a_2\alpha_0 + a_3\nu_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (50)$$

其中  $a_1, a_2, a_3$  由  $n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1$  线性表示。由于三个向量  $\nu_0, \alpha_0, \mathbf{P}_1^1$  生成 3D 空间, 因此有系统

$$a_k(n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1) = 0, k = 1, 2, 3 \quad (51)$$

该系统  $\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  中  $\mathbf{A}$  为  $3 \times 4$  矩阵,  $\mathbf{n} = [n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1]^T$ 。通过验证, 矩阵  $\mathbf{A}$  的零空间维度为 1, 且该零空间向量有  $n_1^1 = -1, n_2^1 = n_3^1 = n_4^1 = 1$ 。

对于系统公式 (32), 当  $i \neq 1$  时,

$$(n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i + (1 + n_j^i)(\nu_0 t_j + \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (52)$$

由于三个向量  $\nu_0, \alpha_0, \mathbf{P}_1^1$  生成 3D 空间, 因此  $\nu_0, \alpha_0$  不共线。因此存在某个  $j = j^*$ , 使得向量  $\mathbf{P}_1^i$  与向量  $\nu_0 t_{j^*} + \frac{1}{2}\alpha_0 t_{j^*}^2$  不共线, 由公式 (52) 可得  $n_{j^*}^i = -1, n_1^i = 1$ 。对于其他  $j \neq j^*$ ,

$$(1 + n_j^i)(\mathbf{P}_1^i + \nu_0 t_j + \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (53)$$

如果  $n_j^i \neq -1$ , 则有  $\mathbf{P}_1^i = -\nu_0 t_j - \frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2 = -\mathcal{X}_j$ , 根据 **Assumption1**, 此种情况不成立; 因此有  $n_j^i = -1$ 。至此, 矩阵  $\Xi'$  的零空间维度为 1, 系统有 2 个解。

(2) 当相机做匀速运动时, 即有  $|\alpha| = 0$ 。由于  $|\Pi\mathbf{n}_0| = |\alpha_0| = 0$ , 根据 **Theorem1**, 可知系统有无限个解, 但是重力  $\mathbf{G}$  可唯一解出。

### 3 可解性分析: Biased Case

下面开始讨论加速度计受 bias 影响时, 系统的可解性。显然 unbiased 下的各种条件, 在 biased 下同样需要满足; 但另一方面, unbiased 下的各种条件, 不足以保证 biased 下的同样可解性, 因此需要定义一些新的条件, 以满足 biased 下的可解性。

类似于 unbiased 情况, 假设向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ ,

$$\mathbf{n} \triangleq [\alpha^T, \nu^T, \mathbf{b}^T, n_1^1, \dots, n_1^N, n_2^1, \dots, n_2^N, \dots, n_M^1, \dots, n_M^N]^T \quad (54)$$

其中  $\mathbf{b}$  为  $3 \times 1$  向量, 对应于加速度计 bias, 且有

$$\Xi' \mathbf{n} = \mathbf{0}_{3(M-1) \times N \times 1} \quad (55)$$

将上式展开得到

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + \Gamma_j \mathbf{b} + (n_1^1 + n_j^1) \mathbf{P}_1^1 + n_j^1 \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (56)$$

$$(n_1^i + n_j^i) \mathbf{P}_1^i + (n_1^i + n_j^i) \mathbf{P}_1^i + (n_j^i + n_j^i) \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (57)$$

为方便分析, 首先给出三个性质, 并分别证明:

**Property2:** (a) 当  $M \leq 3$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ; (b) 当  $M = 4$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ; (c) 当  $M \geq 5$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ , 但需满足如下条件: 相机按照特定的方式运动,  $\mathcal{X}_j = -\frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2 - t_j \nu_0 + \Gamma_j \mathbf{b}_0, j \geq 5$ 。

证明如下: 首先定义如下子系统,

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + \Gamma_j \mathbf{b} = -\mathcal{X}_j, j = 2, \dots, M \quad (58)$$

其对应的矩阵为  $\Xi_b''$ , 显然  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \leq \dim(\mathcal{N}(\Xi'))$ 。假如向量  $[\mathbf{n}_\alpha^T, \mathbf{n}_\nu^T, \mathbf{n}_\mathbf{b}^T]^T \in \mathcal{N}(\Xi_b'')$ , 则显然 (54) 中令  $\alpha = \mathbf{n}_\alpha, \nu = \mathbf{n}_\nu, \mathbf{b} = \mathbf{n}_\mathbf{b}, n_j^i = 0, \forall i, j$ , 有  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

(1) 当  $M \leq 3$  时, 系统 (58) 的方程数量最多 6 个 ( $j = 2, 3$ ), 而未知量有 9 个, 因此  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \geq 3$ ;

(2) 当  $M = 4$  时, 矩阵  $\Xi_b''$  为  $9 \times 9$  的方阵; 如果矩阵  $\Xi_b''$  的行列式为零, 则  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \geq 1$ ; 如果矩阵  $\Xi_b''$  的行列式不为零, 则系统 (58) 有唯一解  $(\alpha_0, \nu_0, \mathbf{b}_0)$ ; 根据公式 (56) 和 (57), 令  $\alpha = \alpha_0, \nu = \nu_0, \mathbf{b} = \mathbf{b}_0, n_1^1 = n_j^1 = -1, n_j^1 = n_1^i = 1, j = 2, 3, 4, i = 2, \dots, N$ , 则有  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ , 进而  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ;

(3) 当  $M \geq 5$ , 且  $\mathcal{X}_j = -\frac{1}{2}\alpha_0 t_j^2 - t_j \nu_0 + \Gamma_j \mathbf{b}_0$  时, 公式 (37) 中的向量  $\mathbf{n}_0$  可表示为,

$$\mathbf{n}_0^b \triangleq [\alpha_0^T, \nu_0^T, \mathbf{b}_0^T, \bar{n}_1^1, \dots, \bar{n}_1^i, \dots, \bar{n}_j^1, \dots, \bar{n}_j^i, \dots]^T \quad (59)$$

并且有  $\mathbf{n}_0^b \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

**Property3:** 当相机运动不旋转时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ; 当相机始终绕着单一轴旋转时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

证明如下:

(1) 当相机运动不旋转时, 根据 (8) 中  $\Gamma_j$  的定义, 有  $\Gamma_j = \frac{1}{2}t_j^2 \mathbf{I}_3$ ; 另外由于  $\mathbf{T}_j \triangleq -\frac{1}{2}t_j^2 \mathbf{I}_3$ , 即矩阵  $\Xi'$  中第 1 ~ 3 列和第 7 ~ 9 列仅相差一个负号, 因此  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ;

(2) 当相机绕着单一轴旋转时, 不失一般性, 假设绕  $z$  轴旋转, 则矩阵  $\Xi'$  中第 3 列和第 9 列仅相差一个符号, 至少可构建一个量空间向量: 其他元素为零, 第 3 列和第 9 列不为零; 因此  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

**Property4:** (a) 当相机绕着单一轴旋转, 且  $M \geq 4$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 1$ ; (b) 当相机绕着至少两个轴旋转, 且  $M \geq 4$  时,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 0$ 。

证明如下: 对于子系统 (58), 考虑其连续形式,

$$-\frac{1}{2}\alpha t^2 - t\nu + \Gamma(t)\mathbf{b} = -\mathcal{X}(t) \quad (60)$$

对上式求关于时间  $t$  的三阶导, 得到,

$$\frac{d^3 \Gamma(t)}{dt^3} \mathbf{b} = -\frac{d^3 \mathcal{X}(t)}{dt^3} \quad (61)$$

根据 (8) 中  $\Gamma(t)$  的定义, 以及  $t_{in} = 0$ ,

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{b} = -\frac{d^3 \mathcal{X}(t)}{dt^3} \quad (62)$$

由于  $\mathbf{C}$  为旋转矩阵，则有

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = [\Omega(t)]_{\times} \mathbf{C} \quad (63)$$

其中，

$$[\Omega(t)]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

则有，

$$[\Omega(t)]_{\times} \mathbf{b}' = -\frac{d^3 \mathcal{X}(t)}{dt^3} \quad (65)$$

其中  $\mathbf{b}' \triangleq \mathbf{C}\mathbf{b}$ 。对于非零  $\Omega(t)$ ，系统 (65) 的秩为 2；因此  $\mathbf{b}$  中的 2 维可解算出，且为第 3 维的函数。对于系统 (60)，考虑两个不同时刻，则  $\alpha$  和  $\nu$  可由  $\mathbf{b}$  唯一表示，因此有  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \leq 1$ ；另外由 **Property3** 可知， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) \geq 1$ ，因此有  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 1$ 。

当相机绕着至少 2 个轴旋转时，对于公式 (65) 取 2 个不同时刻，则可确定  $\mathbf{b}$ ；进一步地，对于系统 (60) 在两个不同时刻，则  $\alpha$  和  $\nu$  可由  $\mathbf{b}$  唯一表示，因此有  $\dim(\mathcal{N}(\Xi_b'')) = 0$ 。

### 3.1 图像帧数小于等于 3

根据 **Property2**，当  $M \leq 3$  时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ；因此 VI-SLAM 系统有无数解。

### 3.2 图像帧数等于 4

根据 **Property2**，当  $M = 4$  时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ；

(1) 当  $N = 1$  时，系统有无数解。证明如下：当  $M = 4, N = 1$  时，系统 (24) 中矩阵  $\Xi$  维度为  $9 \times 13$ ，显然系统有无数解。

(2) 当  $N \geq 2$ ，且相机至少绕一个轴旋转时，系统有 2 个解。证明如下：一般而言，三个向量  $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^i, \mathcal{X}_j$  对于  $i = 2, \dots, N; j = 2, \dots, M$  相互独立，即相互不共线。根据公式 (57) 有  $n_1^1 + n_j^1 = n_1^i + n_j^i = n_j^1 + n_j^i = 0, \forall i \geq 2, \forall j \geq 2$ 。如果  $n_1^1 = 0$ ，则有  $n_j^i = 0, \forall i, \forall j$ ；公式 (56) 变为，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + \Gamma_j \mathbf{b} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (66)$$

根据 **Property4**，当  $n_1^1 = 0$ ，且相机仅绕一个轴转动时，矩阵  $\Xi'$  仅有一个零空间向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。如果  $n_1^1 \neq 0$ ，公式 (56) 除以  $n_1^1$  得到，

$$-\frac{t_1^2}{2} \frac{\alpha}{n_1^1} - t_j \frac{\nu}{n_1^1} + \Gamma_j \frac{\mathbf{b}}{n_1^1} = \mathcal{X}_j \quad (67)$$

根据 **Property4**，当相机绕至少两个轴旋转时，系统 (67) 有唯一解；当相机绕一个轴旋转，或不旋转时，系统 (67) 无解。因此当  $n_1^1 \neq 0$  且相机绕至少两个轴旋转时，矩阵  $\Xi'$  有唯一零空间  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

### 3.3 图像帧数大于等于 5

(1) 当  $N = 1$  时，VI-SLAM 系统有无数解。证明如下：当  $M = 5, N = 1$  时，系统 (24) 中未知量 14 维，方程数量为 12 个，因此系统有无数解。

(2) 当  $N \geq 2$  时，若相机绕至少 2 个轴旋转，则系统有唯一解；若相机绕单一轴旋转，则系统有 2 个解。证明如下：证明过程与  $M = 4$  时的证明过程相同，最终结论如下，当  $n_1^1 = 0$ ，且相机绕单一轴旋转时，有唯一零空间向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ ，则系统有 2 个解；当  $n_1^1 \neq 0$ ，矩阵  $\Xi'$  无零空间，因此系统有唯一解。

(3) 当  $M \geq 6, N = 1$ ，相机绕至少 2 个轴旋转时，系统有唯一解。证明如下：假如当  $M = 6$  时，矩阵  $\Xi'$  的零空间为零，则公式 (56) 对于  $M \geq 7$  变为，

$$n_j^1(\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_j) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (68)$$

根据 **Assumption1**,  $n_j^1 = 0$ 。现在考虑  $M = 6$ , 根据 **Property4**, 公式 (56) 对于  $j = 2, 3, 4$ , 向量  $\alpha, \nu, \mathbf{b}$  可用  $n_1^1 \mathbf{P}_1^1, n_2^1 \mathbf{P}_2^1, n_3^1 \mathbf{P}_3^1, n_4^1 \mathbf{P}_4^1$  线性表示; 然后带入  $j = 5, 6$  时的公式 (56), 可得到关于 6 个未知量  $n_j^1, 1 \leq j \leq 6$  的 6 个方程, 由于该方程组一般而言为满秩, 因此有  $n_j^1 = 0, 1 \leq j \leq 6$ 。

(4) 当  $M \geq 6, N = 1$ , 相机绕单一轴旋转时, 系统有 2 个解。证明如下: 根据 **Property3**,  $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ; 另外, 对于零空间向量  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ , 则  $\mathbf{n}$  的前 9 维组成的子向量  $\mathbf{n}' \in \mathcal{N}(\Xi'')$ 。证明矩阵  $\Xi'$  的零空间为 1 维, 其过程与之前证明相似: 对于  $M = 6$ , 假如矩阵  $\Xi'$  的零空间为 1 维, 由于  $\mathbf{n}$  的前 9 维组成的子向量  $\mathbf{n}' \in \mathcal{N}(\Xi'')$ , 则对于  $j \geq 7$  公式 (56) 变为

$$n_j^1 (\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_j) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (69)$$

即可知系统仅有 1 维零空间。当  $M = 6$  时, 根据 **Property4** 可知向量  $\alpha, \nu, \mathbf{b}$  中的 8 维可由  $n_1^1 \mathbf{P}_1^1, n_2^1 \mathbf{P}_2^1, n_3^1 \mathbf{P}_3^1, n_4^1 \mathbf{P}_4^1$  线性表示, 剩下的最后一维用  $\omega$  表示。将上述的线性表示带入  $j = 5, 6$  时的公式 (56), 可得到关于 7 个未知量  $n_j^1, 1 \leq j \leq 6$  和  $\omega$  的 6 个方程, 一般而言, 该系统仅有一维零空间, 因此矩阵  $\Xi'$  的零空间为 1 维, 进而 VI-SLAM 系统有 2 个解。

## References

- [1] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.
- [2] Agostino Martinelli. Closed-form solution of visual-inertial structure from motion. International Journal of Computer Vision, Springer Verlag, 2013. hal-00905881