

SLAM 系统可观性和一致性分析

张谦

2020 年 2 月 23 日

1 无偏估计、有效性和一致性

现实中常常有这样的问题，比如，想知道全体女性的身高均值 μ ，但是没有办法把每个女性都进行测量，只有抽样一些女性来估计全体女性的身高：

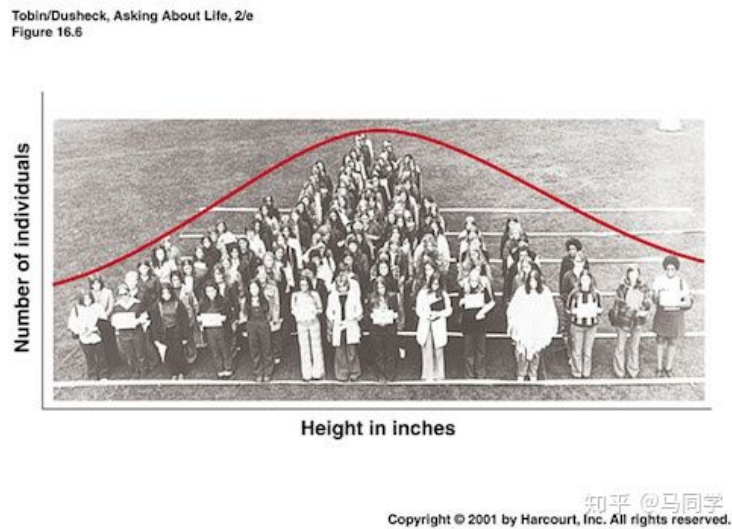


图 1: 身高高斯分布示意图

那么根据抽样数据怎么进行推断？什么样的推断方法才称为“好”？

1.1 无偏性

比如说我们采样到的女性身高分别为：

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

那么：

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2)$$

是对 μ 不错的一个估计，为什么？以为它是无偏估计。

首先，真正的全体女性的身高均值 μ ，我们是不知道的，只有上帝才知道，在图中就画为虚线，通过采样计算出 \bar{X} 会发现，不同采样得到的 \bar{X} 是围绕 μ 左右波动的。这有点像打靶，只要命中在靶心周围，还算不错的成绩，这就是无偏的。

如果用一下式子去估计总体方差 σ^2 ：

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3)$$

会偏离靶心并产生偏差，这就是有偏的，这个偏差为 $\frac{1}{n}\sigma^2$ ，这种偏差就像瞄准镜歪了，属于系统误差，就此而言，无偏估计要好于有偏估计。

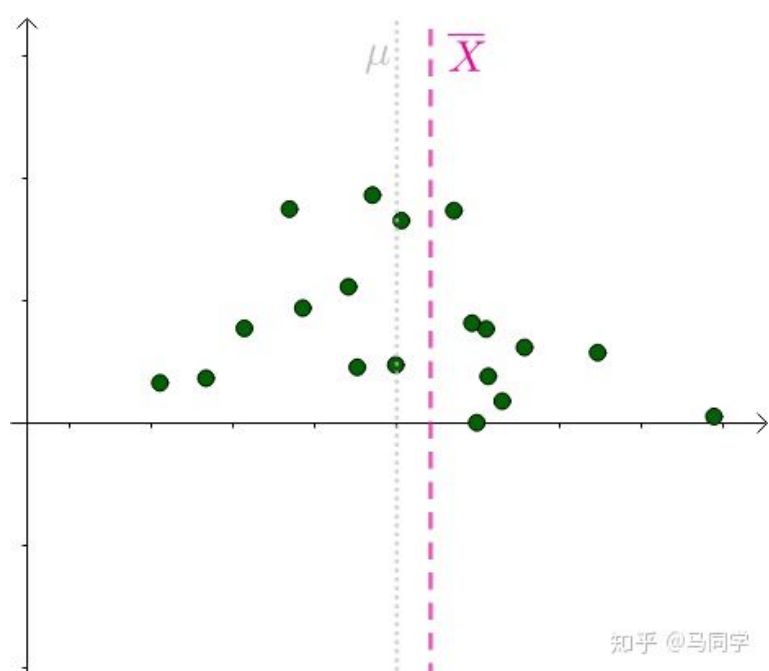


图 2: 采样计算 \bar{X}

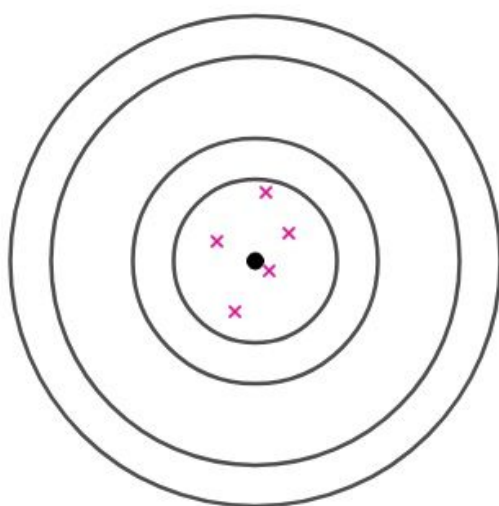


图 3: 打靶例子



图 4: 系统偏差

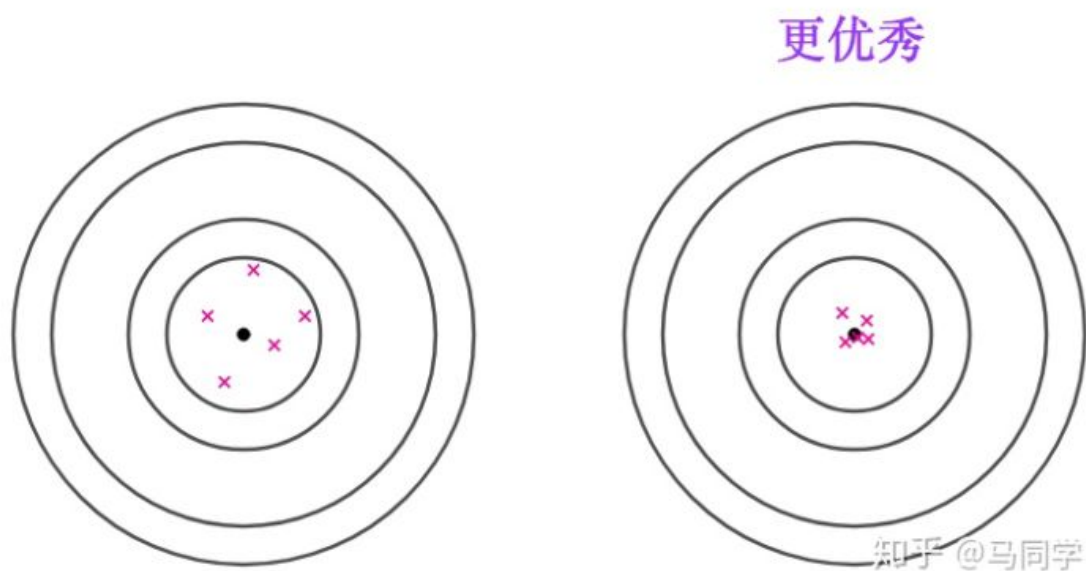


图 5: 有效性示意图

1.2 有效性

打靶的时候，右边的成绩肯定更优秀：进行估计的时候，也是估计量越靠近目标，效果越好，这个靠近可以用方差来衡量。另外，有效估计和偏差性是不想关的。

举个例子，从 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出 10 个样本：

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (4)$$

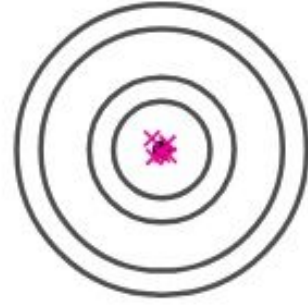
下面两个都是无偏估计量：

$$T_1 = \frac{x_1 + x_3 + 2x_{10}}{4}, T_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \quad (5)$$

但是后者比前者方差小，后者更有效。并且显示中不一定非要选无偏估计量，比如：如果能接受点误差，选择右边这个估计量更好。

更有效

无偏

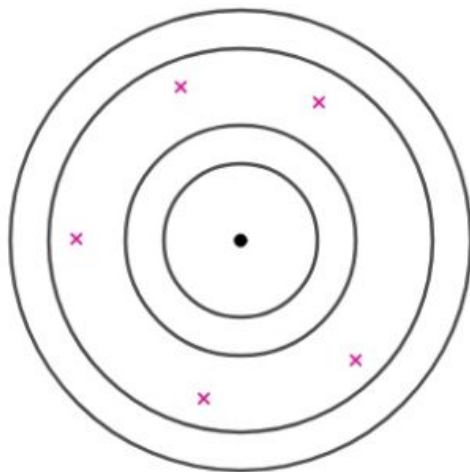


有偏

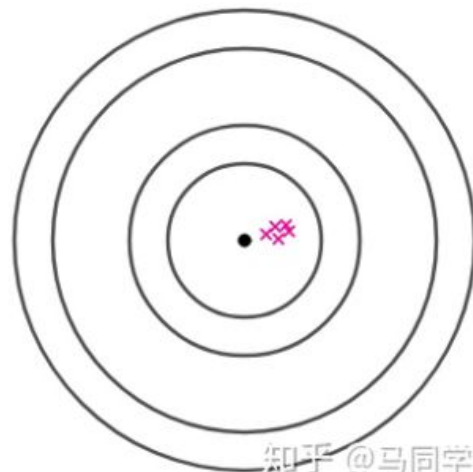


知乎 @马同学

无偏，有效性差



有偏，有效性好



知乎 @马同学

1.3 一致性

之前说了，如果用以下式子去估计方差 σ^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (6)$$

会有一个偏差 $\frac{1}{n}\sigma^2$ ，可以看到，随着采样个数 n 的增加，这个偏差会越来越小。那么这个估计量就是“一致的”。如果样本数量够多，其实这种“有偏”但是“一致”的估计量也是可以选的。

1.4 总结

在共视的 Mapping 中，由于 fix 历史帧，优化滑窗内的关键帧，导致的“有偏”估计，但是由于前端 vio 能够提供无偏且一致的初值，会提升后端共视非线性优化的“有效性”，而且最终使得 SLAM 能有一个比较精确的输出。

2 非线性系统可观性分析

2.1 Lie Derivative

在介绍 Lie Derivative 之前，先需要以下一些概念。

(1) 向量函数 $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (从 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 映射到 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$)，叫做 \mathbb{R}^n 里的向量场 (Vector field)。如果进一步，向量函数 f 具有连续偏导，而且是任意阶的偏导，那么我们说 f 是光滑向量场 (Smooth Vector field)。

(2) 光滑标量函数 $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (从 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 映射到 $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ 的函数) 的 Gradient 由一个行向量 $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 表示，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 。所以我们要记住，Gradient 是标量对向量的求导，其结果是个行向量。光滑向量场 $f(\mathbf{x})$ 的 Jacobian 由一个 $n \times n$ 的矩阵 $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ ，其中矩阵的第一行就是 $\nabla f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}$ ，就是刚刚定义的光滑标量函数 f_1 (列向量 f 的第一个元素) 的 Gradient，而我们知道 Gradient 是行向量。以此类推 Jacobian 的第 i 行应该为 $\nabla f_i = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}$ 。那么基于以上几个定义，我们就可以用来定义 Lie Derivative。

(3) Lie Derivative 的定义：光滑标量函数 $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 相对于光滑向量场 $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的 Lie Derivative 由一个标量函数 $L_f h = \nabla h \mathbf{f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ 表示，其中 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 就是标量函数 $h(\mathbf{x})$ 的 Gradient，是个行向量。行向量 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 乘以向量场 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ，其结果正好是个标量，所以 $L_f h = \nabla h \mathbf{f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ 是个标量。

(4) 如果 $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是另一个向量场，由于刚刚计算的 Lie Derivative: $L_f h$ 是个标量，它又可以跟 $g(\mathbf{x})$ 算出一个 Lie Derivative，表示为 $L_g L_f h = L_g (L_f h) = \nabla (L_f h) g = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} g = \frac{\partial (\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} g$ ，当然同样地，算出来 $L_g L_f h$ 的结果依然是个标量。以此类推，可以一直搞下去。于是我们有标量函数 $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 0 阶 Lie Derivative，表示为 $L_f^0 h = h$ ，是它本身。标量函数 $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的第 i 阶 Lie Derivative 为 $L_f^i h = L_f (L_f^{i-1} h) = \nabla (L_f^{i-1} h) \mathbf{f} = \frac{\partial (L_f^{i-1} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ 。

(5) 总结一下，Lie Derivative 与一般的 Derivate 的区别是，Lie Derivative 是定义在两个函数 h 和 f 之间的，它俩都是向量 \mathbf{x} 的函数，标量函数 h 对 \mathbf{x} 的 Gradient 乘以 $f(\mathbf{x})$ ，它们通过共同的 \mathbf{x} 联系起来的。一般的 Derivative 是某个函数对 \mathbf{x} 定义的。举个例子，对于单输出非线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{我们有 } \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f h, \quad \ddot{y} = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f^2 h$$

2.2 非线性系统的 Lie Derivative 和可观矩阵

考虑连续非线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{z} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中控制输入 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$ ，状态量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ ，状态过程模型表示为向量函数 $\mathbf{f}_i, i = 0, 1, \dots, l$ 。

为了分析系统的可观性，以及在现有的测量下状态量各个方向的可观性，我们计算系统的 Lie Derivative。定义测量函数 \mathbf{h} 的零阶 Lie Derivative 为其自身：

$$\mathcal{L}^0 \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

由 Lie Derivative 的定义，测量函数 \mathbf{h} 不同阶的 Lie Derivative 由 $\mathcal{L}^0 \mathbf{h}$ 循环计算得到。其中，由第 i 阶 Lie Derivative, $\mathcal{L}^i \mathbf{h}$ 和状态过程函数 \mathbf{f}_j 可计算得到测量函数的第 $i+1$ 阶 Lie Derivative $\mathcal{L}_{\mathbf{f}_j}^{i+1} \mathbf{h}$ ：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}_j}^{i+1} \mathbf{h} = \nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}_j \quad (10)$$

其中 $\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h}$ 为第 i 阶 Lie Derivative 的生成空间：

$$\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_m} \right] \quad (11)$$

由给定的观测信息，为了分析在哪些方向上是可观的，我们检查测量函数各阶 Lie Derivative 的生成空间，且定义可观矩阵为

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{L}^0 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i}^1 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j}^2 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j \mathbf{f}_k}^3 \mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中 $i, j, k = 1, 2, \dots, l$ 。为了证明系统是可观的，需要证明 \mathcal{O} 的若干行组成的子矩阵是列满秩的（full column rank）。相反的，为了证明系统是非完全可观的，且找出不可观的方向，则需要证明：（a）矩阵 \mathcal{O} 中的无限多行，均可表示为矩阵 \mathcal{O}' 行向量的线性组合，其中 \mathcal{O}' 的行向量来自于 \mathcal{O} ；（b）求解矩阵 \mathcal{O}' 的零空间，即可得到系统不可观的方向。尽管条件（b）可以直接求解得到，但是条件（a）很难找到。

注意：由 Lie Derivative 的定义可知，Lie Derivative 是光滑标量函数 $h(\mathbf{x})$ 对向量 \mathbf{x} 求生成空间（偏导数），得到向量 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 后，再乘以光滑向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ （向量），得到一个新的标量。因此，如果 $h(\mathbf{x})$ 为向量，则应看作多个标量元素；如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为矩阵，则应看作多个列向量，再计算 Lie Derivative。

2.3 非线性系统可观性分析

通过上面介绍可知，要分析非线性系统的可观性，是非常有挑战的，因为要计算具有无限行组成的可观矩阵的零空间。但是论文中提出了一种方法，使可观性分析变得容易，将可观矩阵分解为两个矩阵相乘：一个满秩的无限行矩阵和一个非满秩的有限行矩阵。下面将通过计算一系列关于状态变量 \mathbf{x} 的基函数，来达到分解可观矩阵的目的。

首先给出定理，

Theorem1: 假设存在非线性变换 $\beta(\mathbf{x}) = [\beta_1(\mathbf{x})^T, \dots, \beta_t(\mathbf{x})^T]^T$ ，这些基均是关于状态变量 \mathbf{x} 的函数，总共有 t 个，且满足如下条件：

（C1） $\beta_1(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ ；

（C2） $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, l$ 是关于 β 的函数；

（C3）定义一个可观的非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\beta) + \sum_{i=1}^l \mathbf{g}_i(\beta) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{z} = \mathbf{h} = \beta_1 \end{cases} \quad (13)$$

其中， $\mathbf{g}_i(\beta) = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, l$ 。

根据以上假设条件，则有以下两条结论：

（i）可观矩阵 \mathcal{O} 可被分解为：

$$\mathcal{O} = \Xi \cdot \mathbf{B} \quad (14)$$

其中 Ξ 为系统（13）的可观矩阵，且 $\mathbf{B} \triangleq \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}}$ 。

（ii） $null(\mathcal{O}) = null(\mathbf{B})$

证明结论 (i): 根据链式法则, Lie Derivative $\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h}$ 的生成空间可表示为,

$$\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \quad (15)$$

因此, 系统 (8) 的可观矩阵 \mathcal{O} 可被分解为:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{L}^0 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i}^1 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j}^2 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j \mathbf{f}_k}^3 \mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i}^1 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j}^2 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j \mathbf{f}_k}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \vdots \end{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} = \Xi \cdot \mathbf{B} \quad (16)$$

接下来证明矩阵 Ξ 是系统 (13) 的可观矩阵。

为区分系统 (8) 和系统 (13) 的各阶 Lie Derivative, 利用符号 \mathcal{J} 表示系统 (13) 的 Lie Derivative。系统 (13) 的零阶 Lie Derivative 的生成空间表示为:

$$\nabla \mathcal{J}^0 \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \quad (17)$$

该零阶生成空间即为矩阵 Ξ 的第一行块矩阵。

利用 $\nabla \mathcal{J}^i \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta}$ 表示矩阵 Ξ 的 i 行 Lie Derivative 的生成空间, 则第 $i+1$ 行的生成空间 $\nabla \mathcal{J}_{\mathbf{g}_j}^{i+1} \mathbf{h}$ (状态过程函数为 \mathbf{g}_j) 可表示为

$$\nabla \mathcal{J}_{\mathbf{g}_j}^{i+1} \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{J}_{\mathbf{g}_j}^{i+1} \mathbf{h}}{\partial \beta} = \frac{\partial \nabla \mathcal{J}^i \mathbf{h} \cdot \mathbf{g}_j}{\partial \beta} = \frac{\partial (\frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial \beta} = \frac{\partial (\frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{f}_j}^{i+1} \mathbf{h}}{\partial \beta} \quad (18)$$

因此, 矩阵 Ξ 的每一行矩阵块, 为系统 (13) 的各阶 Lie Derivative 的生成空间, 即矩阵 Ξ 是系统 (13) 的可观矩阵。

证明结论 (ii): 由于 $\mathcal{O} = \Xi \mathbf{B}$, 则有 $\text{null}(\mathcal{O}) = \text{null}(\mathbf{B}) + \text{null}(\Xi) \cap \text{range}(\mathbf{B})$ [Meyer2000], 另外, 由于假设条件 (C3) 系统 (13) 是可观的, 即可观矩阵 Ξ 为列满秩 (full column rank), 则有 $\text{null}(\mathcal{O}) = \text{null}(\mathbf{B})$ 。至此, 由假设条件 (C1)、(C2) 和 (C3) 得到的结论 (i) 和 (ii) 证毕。

由 **Theorem1** 可知, 为了分析一个系统的不可观方向, 首先需要找到一些基函数 (basis functions) 满足条件 (C1) 和 (C2), 并且需要证明矩阵 Ξ 是列满秩 (full column rank), 即满足条件 (C3)。当着三个条件满足后, 则系统 (8) 的不可观方向分析转换成求解矩阵 \mathbf{B} 的零空间。由于矩阵 \mathbf{B}_I 是有限维的, 因此求解零空间很容易。

3 VI-SLAM 系统可观性分析

3.1 系统概述

在该系统中, 四元数表示旋转采用 JPL 形式。坐标系约定: 全局坐标系用 G 表示, Camera 坐标系用 C 表示, IMU 坐标系用 I 表示, 地图点用 f 表示; 相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下, 则该坐标系符号写在对应变量的左上角, 变量标识写在变量符号的右下角, 例如 ${}^G \mathbf{p}_I$ 表示 IMU 系 (body 系) 原点在 全局坐标系中的位置 (平移), ${}^G \mathbf{v}_I$ 表示 IMU 系在全局坐标系下的速度, ${}^I \mathbf{q}_G$ 表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数, 由于采用 JPL 形式, 旋转均是由 G 系到 I 系旋转, 与 Hamilton 表示方式相反; ${}^G \mathbf{p}_{f_i}$ 表示第 i 个地图点在 G 系下的坐标。

状态变量包含位姿、速度、Bias 和地图点:

$$\mathbf{x} = \left[{}^I \mathbf{q}_G^T, \mathbf{b}_g^T, {}^G \mathbf{v}_I^T, \mathbf{b}_a^T, {}^G \mathbf{p}_I^T \mid {}^G \mathbf{p}_{f_1}^T, \dots, {}^G \mathbf{p}_{f_N}^T \right]^T = [\mathbf{x}_s^T \mid \mathbf{x}_m^T]^T \quad (19)$$

其中 \mathbf{x}_s^T 和 \mathbf{x}_m^T 分别表示 16×1 维传感器状态和 $3N \times 1$ 维地图点状态。

连续系统状态模型:

$${}^I \dot{\mathbf{q}}_G(t) = \frac{1}{2} ({}^I \omega(t)) {}^I \mathbf{q}_G(t) \quad (20)$$

$${}^G \dot{\mathbf{p}}_I(t) = {}^G \mathbf{v}_I(t) \quad (21)$$

$${}^G \dot{\mathbf{v}}_I(t) = {}^G \mathbf{a}_I(t) \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g(t) = \mathbf{n}_{wg}(t) \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{n}_{wa}(t) \quad (24)$$

$${}^G\dot{\mathbf{p}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1, \dots, N \quad (25)$$

其中,

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} -[\omega]_{\times} & \omega \\ -\omega^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[\omega]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

陀螺仪测量 ${}^I\omega_m$ 和加速度计测量 ${}^I\mathbf{a}_m$ 模型为:

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \quad (28)$$

$${}^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G(t))({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \quad (29)$$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 表示四元数对应的选择矩阵。

对于上述连续状态模型, 在当前时刻的估计量处线性展开, 并求期望, 得到状态估计的传递模型:

$${}^I\dot{\hat{\mathbf{q}}}_G(t) = \frac{1}{2} ({}^I\hat{\omega}(t)) {}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t) \quad (30)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_I(t) = {}^G\hat{\mathbf{v}}_I(t) \quad (31)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{v}}}_I(t) = \mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t)) {}^I\hat{\mathbf{a}}(t) + {}^G\mathbf{g} \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (34)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1, \dots, N \quad (35)$$

其中 ${}^I\hat{\mathbf{a}}(t) = {}^I\mathbf{a}_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_a(t)$, ${}^I\hat{\omega}(t) = {}^I\omega_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_g(t)$

根据误差状态 (error state) 的定义 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 有:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[{}^I\delta\theta_G^T, \tilde{\mathbf{b}}_g^T, {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^T, \tilde{\mathbf{b}}_a^T, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^T | {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_1}^T, \dots, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_N}^T \right]^T = [\tilde{\mathbf{x}}_s^T | \tilde{\mathbf{x}}_m^T]^T \quad (36)$$

则有线性连续误差状态方程,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{0}_{15 \times 3N} \\ \mathbf{0}_{3N \times 15} & \mathbf{0}_{3N} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{0}_{3N \times 12} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \mathbf{F}_c \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_c \mathbf{n} \quad (37)$$

其中,

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_g^T, \mathbf{n}_{wg}^T, \mathbf{n}_a^T, \mathbf{n}_{wa}^T]^T \quad (38)$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega}]_{\times} & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G)[{}^I\hat{\mathbf{a}}]_{\times} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(\tau)] = \mathbf{Q}_c\delta(t - \tau) \quad (41)$$

接下来讨论离散形式的系统模型：假设陀螺仪信号 ${}^I\omega_m(t)$ 和加速度计信号 ${}^I\mathbf{a}_m(t)$ 采样间隔为 $\delta t \triangleq t_{k+1} - t_k$ ，每次采样后，系统估计状态的传递，利用公式 (30) - (35) 积分得到。估计状态的协方差通过如下公式得到：

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{k+1,k} &= \mathbf{F}_c\Phi_{k+1,k} \\ \text{initial condition : } \Phi_{k,k} &= \mathbf{I}_{15+3N} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k}\mathbf{P}_{k|k}\Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_{d,k} \quad (43)$$

其中离散的系统噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q}_{d,k}$ 通过如下积分计算，

$$\mathbf{Q}_{d,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}_c \mathbf{Q}_c \mathbf{G}_c^T \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \quad (44)$$

下面讨论视觉观测模型：为简化问题分析，假设只有一个地图点 \mathbf{p}_{f_i} ，其对应相机测量 \mathbf{z}_i 为地图点 ${}^I\mathbf{p}_{f_i}$ 在图像平面上的投影，即有

$$\mathbf{z}_i = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \eta_i \quad (45)$$

其中

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{p}_{f_i} = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G)({}^G\mathbf{p}_{f_i} - {}^G\mathbf{p}_I) \quad (46)$$

且 η_i 为协方差为 \mathbf{R}_i 的高斯白噪声。注意：该视觉观察模型假设图像测量为归一化平面，且相机坐标系和 IMU 坐标系重合，在实际中，相机和 IMU 之间存在内外参。

视觉观测的误差模型表示为

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i \simeq \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{x}} + \eta_i \quad (47)$$

其中 $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$ 是利用当前时刻估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 通过模型 (45) - (46) 计算得到，且视觉测量雅可比矩阵 \mathbf{H}_i 为

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_c [\mathbf{H}_\theta \quad \mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{H}_p \mid \mathbf{0}_3 \dots \mathbf{H}_{f_i} \dots \mathbf{0}_3] \quad (48)$$

其中

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial {}^I\mathbf{p}_{f_i}} = \frac{1}{p_z^2} \begin{bmatrix} p_z & 0 & -p_x \\ 0 & p_z & -p_y \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\partial {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial \theta} = [\mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G)({}^G\mathbf{p}_{f_i} - {}^G\mathbf{p}_I)]_\times \quad (50)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{\partial {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial {}^G\mathbf{p}_I} = -\mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G) \quad (51)$$

$$\mathbf{H}_{f_i} = \frac{\partial {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial {}^G\mathbf{p}_{f_i}} = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G) \quad (52)$$

3.2 可观性分析

为简化分析，将 I 系旋转用 Cayley-Gibbs-Rodriguez(CGR) 方式表示： ${}^I\mathbf{s}_G$ 表示从 G 系到 I 系的旋转，且有

$${}^I\dot{\mathbf{s}}_G(t) = \mathbf{D}({}^I\omega(t) - \mathbf{b}_g(t)) \quad (53)$$

其中 $\mathbf{D} \triangleq \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_3 + [\mathbf{s}]_\times + \mathbf{s}\mathbf{s}^T)$ 。因此，系统状态变量 \mathbf{x} 可表示为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{s}_G & \mathbf{b}_g^T & {}^G\mathbf{v}_I^T & \mathbf{b}_a^T & {}^G\mathbf{p}_I^T & {}^G\mathbf{p}_f^T \end{bmatrix}^T \quad (54)$$

另外，为简化书写，系统状态变量忽略坐标系标识，

$$\mathbf{x} = [\mathbf{s}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{v}^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{p}^T \quad \mathbf{p}_f^T]^T \quad (55)$$

则有 VI-SLAM 状态模型可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{b}}_g \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{b}}_a \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{g} - \mathbf{C}^T \mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (56)$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (57)$$

其中 $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{s})$, $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I \mathbf{p}_f = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{p}_f - \mathbf{p})$, 且令

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{g} - \mathbf{C}^T \mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (58)$$

接下来分析系统的可观性: 首先根据 **Theorem1** 中的假设条件 (C1) 和 (C2), 找到系统的基函数 (basis functions), 其中直接根据条件 (C1) 得到第一个基函数 $\beta_1 = \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$,

$$\beta_1 \triangleq \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (59)$$

然后循环计算条件 (C2) 中的 $\frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i$, 并寻找新的基函数 β , 其中基函数有很多种选择, 应当选择那些有明确物理意义的量作为基函数。

计算基函数 β_1 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial {}^I \mathbf{p}_f} \frac{\partial {}^I \mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} \left[[{}^I \mathbf{p}_f]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad -\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} (-[{}^I \mathbf{p}_f]_{\times} \mathbf{b}_g - \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &= [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1] (-\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \mathbf{b}_g - \frac{1}{p_z} \mathbf{C}\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (61)$$

显然 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ 没法表示成现有基函数 $\{\beta_1\}$ 的函数, 因此增加基函数:

$$\beta_2 \triangleq \frac{1}{p_z} \quad (62)$$

$$\beta_3 \triangleq \mathbf{C}\mathbf{v} \quad (63)$$

$$\beta_4 \triangleq \mathbf{b}_g \quad (64)$$

其中 β_2 表示地图的逆深度, β_3 表示 I 系下的速度, β_4 表示陀螺仪 bias, 则有,

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 \triangleq [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1] \left(-\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3 \right) \quad (65)$$

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I \mathbf{p}_f \end{array} \right]_{\times} \\ &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_2 & -\beta_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \end{aligned} \quad (66)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad (67)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_2 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= \frac{\partial \beta_2}{\partial I \mathbf{p}_f} \frac{\partial I \mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T \left[\left[\begin{array}{c} I \mathbf{p}_f \end{array} \right]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad -\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \right] \end{aligned} \quad (68)$$

其中 \mathbf{e}_3 为 3×3 单位矩阵第三列: $[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = \mathbf{I}_3$ 。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T \left(-\left[\begin{array}{c} I \mathbf{p}_f \end{array} \right]_{\times} \mathbf{b}_g - \mathbf{C} \mathbf{v} \right) \\ &= -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \left(-\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3 \right) \end{aligned} \quad (69)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T \left[\begin{array}{c} I \mathbf{p}_f \end{array} \right]_{\times} \\ &= -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \end{aligned} \quad (70)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = 0 \quad (71)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_3 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= \left[\left[\mathbf{C} \mathbf{v} \right]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \right] \end{aligned} \quad (72)$$

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -\left[\mathbf{C} \mathbf{v} \right]_{\times} \mathbf{b}_g + \mathbf{C} \mathbf{g} - \mathbf{b}_a \\ &\triangleq -\left[\beta_3 \right]_{\times} \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 \end{aligned} \quad (73)$$

其中定义新的基函数:

$$\beta_5 \triangleq \mathbf{C} \mathbf{g} \quad (74)$$

$$\beta_6 \triangleq \mathbf{b}_a \quad (75)$$

其中 β_5 表示 I 系下的重力方向, β_6 bias。

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = [\mathbf{C}\mathbf{v}]_{\times} \quad (76)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{I}_3 \quad (77)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_4 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3] \end{aligned} \quad (78)$$

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (79)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (80)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (81)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_5 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3] \end{aligned} \quad (82)$$

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = -[\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \mathbf{b}_g = -[\beta_5]_{\times} \beta_4 \quad (83)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} = [\beta_5]_{\times} \quad (84)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (85)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_6 关于 \mathbf{x} 的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_6}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3] \end{aligned} \quad (86)$$

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (87)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (88)$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (89)$$

无需增加新的基函数。

至此，总共定义 6 个基函数：

$$\beta_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (90)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{p_z} \quad (91)$$

$$\beta_3 = \mathbf{C}\mathbf{v} \quad (92)$$

$$\beta_4 = \mathbf{b}_g \quad (93)$$

$$\beta_5 = \mathbf{C}\mathbf{g} \quad (94)$$

$$\beta_6 = \mathbf{b}_a \quad (95)$$

根据 **Theorem1** 中条件 (C3)，由基函数构建的非线性系统为：

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \omega + \mathbf{f}_2 \mathbf{a}) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \omega + \mathbf{g}_2 \mathbf{a} \quad (96)$$

即有

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_5 \\ \dot{\beta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1(-\lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3) \\ \beta_2 \mathbf{e}_3^T (\lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_{\times} \beta_4 + \beta_2 \beta_3) \\ -\lfloor \beta_3 \rfloor_{\times} \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\lfloor \beta_5 \rfloor_{\times} \beta_4 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_{\times} \\ -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_{\times} \\ \lfloor \beta_3 \rfloor_{\times} \\ \mathbf{0}_3 \\ \lfloor \beta_5 \rfloor_{\times} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (97)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \beta_1 \quad (98)$$

其中 $\bar{\beta}_1 = [\beta_1^T \ 1]^T$, $\bar{\beta}_1 = [\mathbf{I}_2 \ -\beta_1]$ 。

下面讨论基于基函数 β 的系统 (97) 可观性，即检查是否满足 **Theorem1** 中的条件 (C3)：系统 (97) 的可观矩阵 Ξ 是否为列满秩。由可观矩阵的定义可知，矩阵 Ξ 是一个无数行的矩阵，但是为了证明该矩阵为列满秩，可以选取它的子矩阵 Ξ' 来分析，如果 Ξ' 是列满秩，则 Ξ 也是列满秩。选取 Lie Derivative 集合 \mathcal{L} 计算可观子矩阵 Ξ' ：

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}^0 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^1 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^3 \mathbf{h}\} \quad (99)$$

其中 \mathbf{g}_{ij} 表示矩阵 \mathbf{g}_i 的第 j 列，即 $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{e}_j$, \mathbf{e}_j 为单位矩阵的第 j 列。

计算 Lie Derivative 集合 \mathcal{L} 关于基函数 β 的生成空间，得到可观矩阵 Ξ' ：

$$\Xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^1 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{X}_{6 \times 3} & \Psi_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{Y}_{6 \times 3} & \mathbf{Z}_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (100)$$

其中第二行块矩阵为零，舍弃掉后得到新观测矩阵：

$$\Xi'' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{X}_{6 \times 3} & \Psi_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{Y}_{6 \times 3} & \mathbf{Z}_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (101)$$

为证明矩阵 Ξ'' 为列满秩，只需证明矩阵 Ψ 和 Θ 为满秩矩阵。

矩阵 Ψ 具体为：

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & -\beta_{11}\beta_{12} & \beta_{11}^2 + 1 & -\beta_{12} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & -\beta_{12}^2 - 1 & \beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 4\beta_{11}\beta_{12} & 2\beta_{12}^2 - 2\beta_{11}^2 & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} & 2\beta_{12}^2 - 2\beta_{11}^2 & -4\beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ 0 & 0 & -\beta_{21}^2 & 2\beta_{12}\beta_{21} & -4\beta_{11}\beta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta_{12}\beta_{21} & -2\beta_{21} \end{bmatrix} \quad (102)$$

其中 β_{ij} 表示第 i 个基函数 β_i 的第 j 个元素。通过检查矩阵 Ψ 的行列式，

$$\det(\Psi) = -4\beta_{21}^5(\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 - 1)(2\beta_{11}^2 + 2\beta_{12}^2 + 1) = -4\frac{1}{p_z^5}\left(\frac{p_x^2}{p_z^2} + \frac{p_y^2}{p_z^2} - 1\right)(2\frac{p_x^2}{p_z^2} + 2\frac{p_y^2}{p_z^2} + 1) \quad (103)$$

由于 $p_z \neq 0$ 且 $2\frac{p_x^2}{p_z^2} + 2\frac{p_y^2}{p_z^2} + 1 \geq 1$ ，因此矩阵 Ψ 的行列式唯一可能为零的情况为 $\frac{p_x^2}{p_z^2} + \frac{p_y^2}{p_z^2} - 1 = 0$ ，即：所有地图点的视觉观测，位于图像归一化平面的单位圆上。这中情况在实际中是不可能事件，因为控制输入是随着时间任意变化的。因而矩阵 Ψ 一般而言是满秩的。

矩阵 Θ 具体为：

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & 0 & -\beta_{12}\beta_{21} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 0 & 0 & \beta_{11}\beta_{21} \\ \Theta_{5,1} & \Theta_{5,2} & \Theta_{5,3} & \Theta_{5,4} & \Theta_{5,5} & \Theta_{5,6} \\ \Theta_{6,1} & \Theta_{6,2} & \Theta_{6,3} & \Theta_{6,4} & \Theta_{6,5} & \Theta_{6,6} \end{bmatrix} \quad (104)$$

其中，

$$\Theta_{5,1} = -2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} \quad (105)$$

$$\Theta_{5,2} = 2\beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{41} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{5,3} = & 2\beta_{21}(\beta_{42} - \beta_{21}\beta_{31} - \beta_{12}\beta_{43} + \beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) - 2\beta_{21}\beta_{42} \\ & - \beta_{21}^2(\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \\ & + \beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \end{aligned} \quad (107)$$

$$\Theta_{5,4} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} \quad (108)$$

$$\Theta_{5,5} = -\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) - \beta_{11}\beta_{21}\beta_{41} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{5,6} = & \beta_{21}^2(\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{33}) + \beta_{21}\beta_{42} - 2\beta_{21}(\beta_{42} - \beta_{21}\beta_{31} \\ & - \beta_{12}\beta_{43} + \beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) + \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) - 2\beta_{11}\beta_{21} \\ & (\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \end{aligned} \quad (110)$$

$$\Theta_{6,1} = -2\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) - 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{42} \quad (111)$$

$$\Theta_{6,2} = 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{6,3} = & 2\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}^2(\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{32} - \beta_{11}\beta_{43} \\ & - \beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) \\ & + \beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{41}) + 2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \\ & + \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \end{aligned} \quad (113)$$

$$\Theta_{6,4} = \beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{42} \quad (114)$$

$$\Theta_{6,5} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{41} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{6,6} = & \beta_{21}^2(\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{33}) - \beta_{21}\beta_{41} + 2\beta_{21}(\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{32} - \beta_{11}\beta_{43} \\ & - \beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) - \beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) \\ & - 2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \end{aligned} \quad (116)$$

检查矩阵 Θ 的行列式:

$$\begin{aligned} \det(\Theta) &= 3\beta_{21}^7(\beta_{11}\beta_{33}\beta_{41} - \beta_{32}\beta_{42} - \beta_{31}\beta_{41} + \beta_{12}\beta_{33}\beta_{42}) \\ &= 3\beta_{21}^7[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (117)$$

其中 $\beta_{21} = \frac{1}{p_z} \neq 0$; $\beta_4 = \mathbf{b}_g \neq 0$; 由于 $\beta_1 = \mathbf{h}$, 以及 $\beta_3 = \mathbf{C}\mathbf{v}$, 则有

$$[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}]^T = \mathbf{A}\beta_3 \quad (118)$$

因为 $\beta_3 \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ (相机移动), 并且矩阵 \mathbf{A} 为列满秩, 则有 $\mathbf{A}\beta_1 \neq 0$ 。最后检查

$$\begin{aligned} [\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow [\beta_{41}, \beta_{42}] \mathbf{A}\beta_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}\beta_3 &= \lambda \begin{bmatrix} \beta_{42} \\ -\beta_{41} \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (119)$$

从上式可看出, 对于给定的 β_{41} 和 β_{42} , 由于 β_1 是时变的, 因此矩阵 \mathbf{A} 将 $\beta_3 = \mathbf{C}\mathbf{v}$ 限定在特定的流形上, 这在实际的任意控制输入系统中, 是不存在的。因此有

$$[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (120)$$

因而矩阵 Θ 一般而言是满秩的。

至此, 矩阵 Ψ 和 Θ 均为满秩, 对于可观矩阵 Ξ'' , 利用左上角的单位矩阵, 高斯消元消去矩阵 $\mathbf{X}_{6 \times 3}$ 和 $\mathbf{Y}_{6 \times 3}$; 利用中间的 Ψ 消去矩阵 $\mathbf{Z}_{6 \times 6}$, 即可得到新的可观矩阵,

$$\Xi''' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \Psi_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (121)$$

由于矩阵 Ψ 和 Θ 均为满秩, 非主对角线元素均为零, 所以有矩阵 Ξ''' 为满秩, 进而可知可观矩阵 Ξ 为列满秩。

下面讨论 $\mathcal{O} = \Xi\mathbf{B}$ 中的 \mathbf{B} 矩阵, 通过分析矩阵 \mathbf{B} 的零空间, 得到系统不可观的情况。通过堆叠基函数 β 对状态变量 \mathbf{x} 的偏导, 得到,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}\mathbf{p}_f] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ [\mathbf{C}\mathbf{v}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ [\mathbf{C}\mathbf{g}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \quad (122)$$

其中,

$$\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{p_z^2} \end{bmatrix} \quad (123)$$

显然矩阵 \mathbf{B}_1 满秩, 则只需分析 15×18 矩阵 \mathbf{B}_2 的零空间。直观得到并验证, 下列矩阵为 \mathbf{B}_2 的右零空间 (right null space),

$$\mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \mathbf{C}\mathbf{g} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -[\mathbf{v}] \times \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{I}_3 & -[\mathbf{p}] \times \mathbf{g} \\ \mathbf{I}_3 & -[\mathbf{p}_f] \times \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (124)$$

接下来证明矩阵 \mathbf{B}_2 无其它右零空间向量：通过证明矩阵 \mathbf{B}_2 的左零空间（left null space）只有 1 维，即有 15×18 矩阵 \mathbf{B}_2 的秩为 14，进而矩阵 \mathbf{B}_2 的右零空间有 $18 - 14 = 4$ 维。假设左零空间为 $\mathbf{N}_L = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5]$ ，则有

$$\mathbf{0} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5] \begin{bmatrix} [\mathbf{I} \mathbf{p}_f]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ [\mathbf{C} \mathbf{v}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (125)$$

由矩阵 \mathbf{B}_2 的第 2 列和第 4 列可知， $\mathbf{N}_3 \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{N}_5 \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$ ，则有 $\mathbf{N}_3 = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{N}_5 = \mathbf{0}$ ；由矩阵 \mathbf{B}_2 的第 3 列和第 5、6 列可知， $\mathbf{N}_1 \mathbf{C} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{N}_2 \mathbf{C} = \mathbf{0}$ ，由于旋转矩阵 \mathbf{C} 为满秩，则有 $\mathbf{N}_1 = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{N}_2 = \mathbf{0}$ ；因此，只有向量 \mathbf{N}_4 为左零空间的非零项，由矩阵 \mathbf{B}_2 的第 1 列可知，

$$\mathbf{N}_4 [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (126)$$

由于矩阵 $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}}$ 为满秩，则有

$$\mathbf{N}_4 = \pm (\mathbf{C} \mathbf{g})^T \quad (127)$$

因此矩阵 \mathbf{B}_2 有左零空间，

$$\mathbf{N}_L = [\mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, (\mathbf{C} \mathbf{g})^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}] \quad (128)$$

且其只有 1 维。至此，可知矩阵 \mathbf{B}_2 有且仅有右零空间 \mathbf{N}_R 。

接下来讨论右零空间 \mathbf{N}_R 每一维对应的物理意义，即有哪些量是不可观的。令 $\mathbf{N}_R = \text{span}[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4]$ ，利用 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$ 对状态变量 $\mathbf{x} = [\mathbf{s}_G \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{p}_I^T \quad \mathbf{p}_f^T]^T$ 进行微小扰动，通过观察 \mathbf{x} 中哪些量会变化，则对应的量即为不可观的。

首先利用 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 对 \mathbf{x} 施加扰动，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 \quad (129)$$

$$\delta \mathbf{x} = c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 \quad (130)$$

对应于 ${}^G \mathbf{p}_I^T$ 和 ${}^G \mathbf{p}_f^T$ 变化，即 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 表示全局坐标 G 系下三维平移变化，因此相对于全局坐标 G 系的三维平移是不可观的。

观察 \mathbf{N}_R 的第 4 列 \mathbf{n}_4 ，其中与重力 \mathbf{g} 有关，考虑利用 \mathbf{n}_4 对状态量 \mathbf{x} 施加沿重力方向的旋转扰动 $\mathbf{C}({}^{G'} \mathbf{q}_G) \triangleq {}^{G'} \mathbf{R}_G$ ，且有近似，

$${}^{G'} \mathbf{R}_G \simeq \mathbf{I}_3 - c [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \quad (131)$$

其中 ${}^G \bar{\mathbf{g}}$ 为沿着重力方向的单位向量。

对于旋转扰动，

$$\begin{aligned} {}^I \mathbf{R}_{G'} &\simeq (\mathbf{I}_3 - [{}^I \delta \theta]_{\times}) {}^I \mathbf{R}_G \\ &= (\mathbf{I}_3 - [{}^I \delta \theta]_{\times}) {}^I \mathbf{R}_{G'} (\mathbf{I}_3 - c [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times}) \\ &= {}^I \mathbf{R}_{G'} - [{}^I \delta \theta]_{\times} {}^I \mathbf{R}_{G'} - c {}^I \mathbf{R}_{G'} [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} + c [{}^I \delta \theta]_{\times} {}^I \mathbf{R}_{G'} [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ &\simeq {}^I \mathbf{R}_{G'} - [{}^I \delta \theta]_{\times} {}^I \mathbf{R}_{G'} - c {}^I \mathbf{R}_{G'} [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow [{}^I \delta \theta]_{\times} {}^I \mathbf{R}_{G'} &= -c {}^I \mathbf{R}_{G'} [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow [{}^I \delta \theta]_{\times} &= -c {}^I \mathbf{R}_{G'} [{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} {}^I \mathbf{R}_{G'}^T \\ &= [-c {}^I \mathbf{R}_{G'} {}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow {}^I \delta \theta &= -c {}^I \mathbf{R}_{G'} {}^G \bar{\mathbf{g}} \\ &= -c {}^I \mathbf{R}_G {}^G \mathbf{R}_{G'} {}^G \bar{\mathbf{g}} \\ &= -c {}^I \mathbf{R}_G {}^G \bar{\mathbf{g}} \\ &= -\frac{c}{\|{}^G \bar{\mathbf{g}}\|_2} {}^I \mathbf{R}_G {}^G \mathbf{g} \end{aligned} \quad (132)$$

其中因为 ${}^G \mathbf{R}_{G'}$ 是绕着重力方向的旋转，因此有 ${}^G \mathbf{R}_{G'} {}^G \bar{\mathbf{g}} = {}^G \bar{\mathbf{g}}$ 另外有，

$$\delta \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \delta \theta = -\frac{c}{\|{}^G \bar{\mathbf{g}}\|_2} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} {}^I \mathbf{R}_G {}^G \mathbf{g} \quad (133)$$

对于旋转之外的其他状态变量，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= {}^G \mathbf{R}_G \mathbf{x} \simeq (\mathbf{I}_3 - c[{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times}) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_g \\ {}^G \mathbf{v}_I \\ \mathbf{b}_a \\ {}^G \mathbf{p}_I \\ {}^G \mathbf{p}_f \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{x} - c[{}^G \bar{\mathbf{g}}]_{\times} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_g \\ {}^G \mathbf{v}_I \\ \mathbf{b}_a \\ {}^G \mathbf{p}_I \\ {}^G \mathbf{p}_f \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \frac{c}{\|{}^G \mathbf{g}\|_2} \begin{bmatrix} -[\mathbf{b}_g]_{\times} \mathbf{g} \\ -[{}^G \mathbf{v}_I]_{\times} \mathbf{g} \\ -[\mathbf{b}_a]_{\times} \mathbf{g} \\ -[{}^G \mathbf{p}_I]_{\times} \mathbf{g} \\ -[{}^G \mathbf{p}_f]_{\times} \mathbf{g} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{134}$$

由矩阵 \mathbf{N}_R 第 2 行块矩阵和第 4 行块矩阵为零，可知 IMU 的 bias 是可观的。因此对状态量施加绕重力方向的旋转扰动，状态量变化微量为

$$\delta \mathbf{x} = -\frac{c}{\|{}^G \mathbf{g}\|_2} \mathbf{n}_4 \tag{135}$$

对应于除了 IMU bias 之外的所有状态量变化，即 \mathbf{n}_4 表示绕重力方向的旋转变化，因此绕重力方向的旋转（yaw 角）是不可观的。

至此，VI-SLAM 系统的可观性分析完毕：全局三维平移和绕重力方向旋转 yaw 角不可观。

References

- [1] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.