SLAM 系统可观性和一致性分析

张谦

2020 年 2 月 23 日

1 无偏估计、有效性和一致性

现实中常常有这样的问题，比如，想知道全体女性的身高均值 μ，但是没有办法把每个女性都进行测量，只有抽样一些女性来估计全体女性的身高：

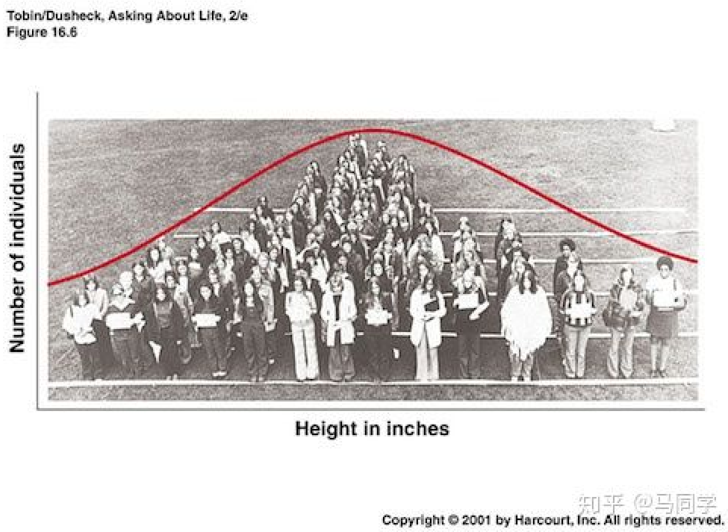


图 1: 身高高斯分布示意图

那么根据抽样数据怎么进行推断？什么样的推断方法才称为“好”?

1.1 无偏性

比如说我们采样到的女性身高分别为：

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{1}$$

那么：

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{2}$$

是对 μ 不错的一个估计，为什么？以为它是无偏估计。

首先，真正的全体女性的身高均值 μ，我们是不知道的，只有上帝才知道，在图中就画为虚线，通过采样计算出 $\bar{X}$ 会发现，不同采样得到的 $\bar{X}$ 是围绕 μ 左右波动的。这有点像打靶，只要命中在靶心周围，还算不错的成绩，这就是无偏的。

如果用一下式子去估计总体方差 σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{3}$$

会偏离靶心并产生偏差，这就是有偏的，这个偏差为 $\frac{1}{n}\sigma^2$，这种偏差就像瞄准镜歪了，属于系统误差，就此而言，无偏估计要好于有偏估计。

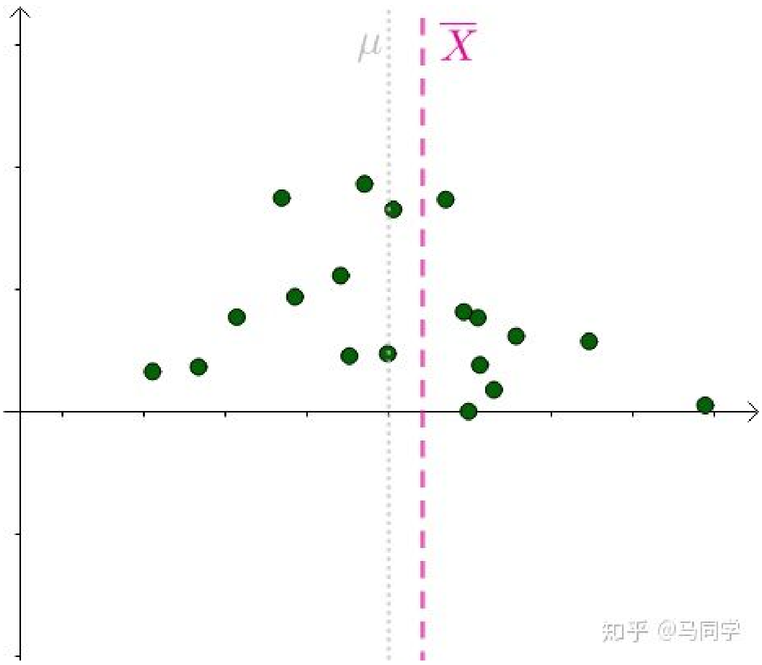


图 2: 采样计算 $\bar{X}$

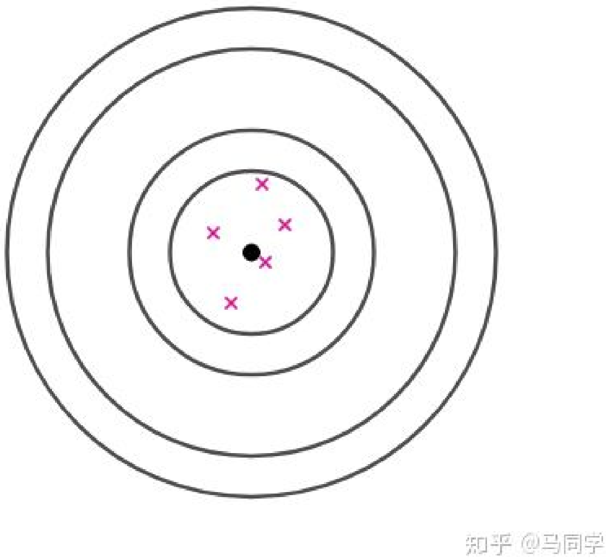


图 3: 打靶例子

图 4: 系统偏差

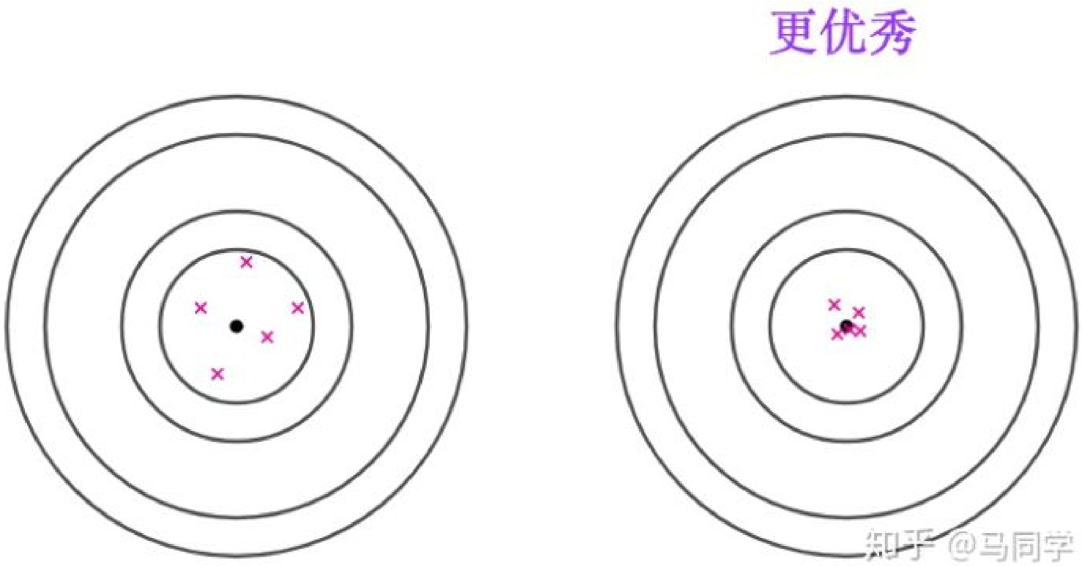


图 5: 有效性示意图

1.2 有效性

打靶的时候，右边的成绩肯定更优秀：进行估计的时候，也是估计量越靠近目标，效果越好，这个靠近可以用方差来衡量。另外，有效估计和偏差性是不想关的。

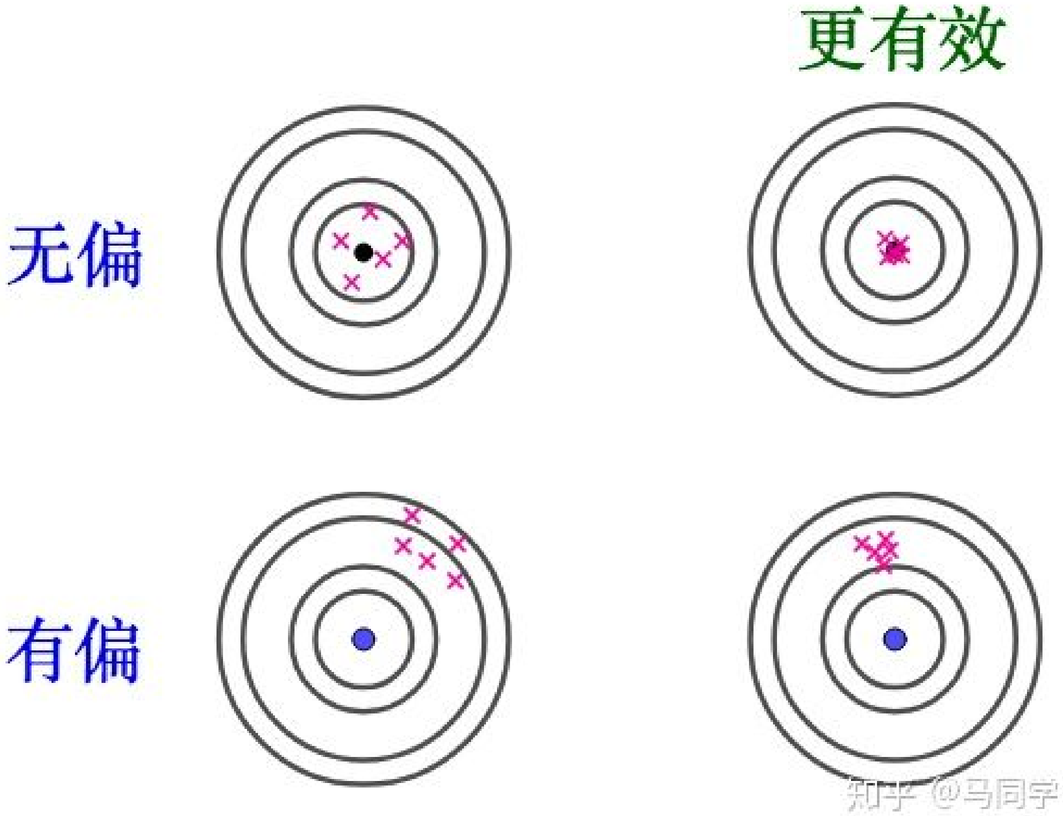
举个例子，从 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出 10 个样本：

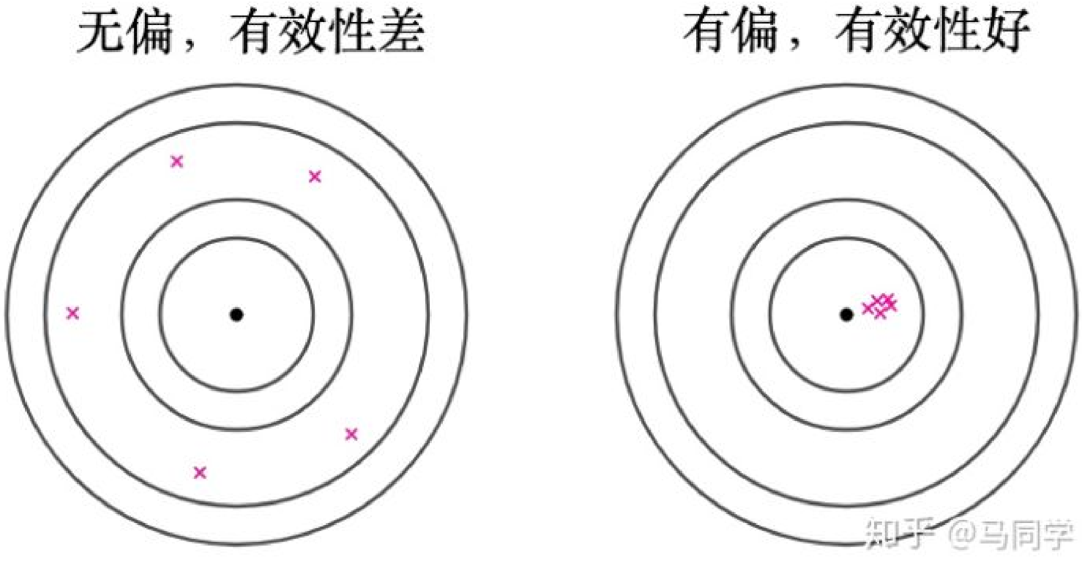
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{4}$$

下面两个都是无偏估计量：

$$T_1 = \frac{x_1 + x_3 + 2x_{10}}{4}, T_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \tag{5}$$

但是后者比前者方差小，后者更有效。并且显示中不一定非要选无偏估计量，比如: 如果能接受点误差，选择右边这个估计量更好。


更有效
无偏
有偏
知乎 @马同学


无偏，有效性差
有偏，有效性好
知乎 @马同学

1.3 一致性

之前说了，如果用以下式子去估计方差 σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{6}$$

会有一个偏差 $\frac{1}{n}\sigma^2$, 可以看到，随着采样个数 n 的增加，这个偏差会越来越小。那么这个估计量就是“一致的”。如果样本数量够多，其实这种“有偏”但是“一致’ 的估计量也是可以选的。

1.4 总结

在共视的 Mapping 中，由于 fix 历史帧，优化滑窗内的关键帧，导致的“有偏”估计，但是由于前端 vio 能够提供无偏且一致的初值，会提升后端共视非线性优化的“有效性”，而且最终使得 SLAM 能有一个比较精确的输出。

2 非线性系统可观性分析

2.1 Lie Derivative

在介绍 Lie Derivative 之前，先需要以下一些概念。

（1）向量函数 $f(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$（从 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 映射到 $f(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^n$），叫做 $\mathbb{R}^n$ 里的向量场（Vector field）。如果进一步，向量函数 f 具有连续偏导，而且是任意阶的偏导，那么我们说 f 是光滑向量场（Smooth Vector field）。

（2）光滑标量函数 $h(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$（从 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 映射到 $h(\mathbf{x})\in\mathbb{R}$ 的函数）的 Gradient 由一个行向量 $\nabla h=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 表示，其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$。所以我们要记住，Gradient 是标量对向量的求导，其结果是个行向量。光滑向量场 $f(\mathbf{x})$ 的 Jacobian 由一个 $n\times n$ 的矩阵 $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$, 其中矩阵的第一行就是 $\nabla f_1=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}$，就是刚刚定义的光滑标量函数 f_1（列向量 f 的第一个元素）的 Gradient，而我们知道 Gradient 是行向量。以此类推 Jacobian 的第 i 行应该为 $\nabla f_i=\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}$。那么基于以上几个定义，我们就可以用来定义 Lie Derivative。

（3）Lie Derivative 的定义：光滑标量函数 $h(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 相对于光滑向量场 $f(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的 Lie Derivative 由一个标量函数 $L_{\mathbf{f}}h=\nabla h\mathbf{f}=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}$ 表示，其中 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 就是标量函数 $h(\mathbf{x})$ 的 Gradient，是个行向量。行向量 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 乘以向量场 $f(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^n$, 其结果正好是个标量，所以 $L_{\mathbf{f}}h=\nabla h\mathbf{f}=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}f$ 是个标量。

（4）如果 $g(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是另一个向量场，由于刚刚计算的 Lie Derivative：$L_{\mathbf{f}}h$ 是个标量，它又可以跟 $g(\mathbf{x})$ 算出一个 Lie Derivative，表示为 $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h=L_{\mathbf{g}}(L_{\mathbf{f}}h)=\nabla(L_{\mathbf{f}}h)g=\frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}}g=\frac{\partial(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}f)}{\partial \mathbf{x}}g$，当然同样地，算出来 $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$ 的结果依然是个标量。以此类推，可以一直搞下去。于是我们有标量行数 $h(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的 0 阶 Lie Derivative，表示为 $L^0_{\mathbf{f}}h=h$，是它本身。标量函数 $h(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的第 i 阶 Lie Derivative 为 $L^i_{\mathbf{f}}h=L_{\mathbf{f}}(L^{i-1}_{\mathbf{f}}h)=\nabla(L^{i-1}_{\mathbf{f}}h)f=\frac{\partial(L^{i-1}_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}$。

（5）总结一下，Lie Derivative 与一般的 Derivate 的区别是，Lie Derivative 是定义在两个函数 h 和 f 之间的，它俩都是向量 $\mathbf{x}$ 的函数，标量行数 h 对 $\mathbf{x}$ 的 Gradient 乘以 $f(\mathbf{x})$，它们通过共同的 $\mathbf{x}$ 联系起来的。一般的 Derivative 是某个函数对 $\mathbf{x}$ 定义的。举个例子，对于单输出非线性系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x})\\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{7}$$

我们有 $\dot{y}=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}f(\mathbf{x})=L_{\mathbf{f}}h$，$\ddot{y}=\frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}}f(\mathbf{x})=L^2_{\mathbf{f}}h$

2.2 非线性系统的 Lie Derivative 和可观矩阵

考虑连续非线性系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{l}\mathbf{f}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i\\ \mathbf{z} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{8}$$

其中控制输入 $\mathbf{u}=[u_1,u_2,\ldots,u_l]^T$，状态量 $\mathbf{x}=[x_1,x_2\ldots,x_m]^T$，状态过程模型表示为向量函数 $\mathbf{f}_i,i=0,1,\ldots,l$。

为了分析系统的可观性，以及在现有的测量下状态量各个方向的可观性，我们计算系统的 Lie Derivative。定义测量函数 $\mathbf{h}$ 的零阶 Lie Derivative 为其自身：

$$\mathcal{L}^0\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

由 Lie Derivative 的定义，测量函数 $\mathbf{h}$ 不同阶的 Lie Derivative 由 $\mathcal{L}^0\mathbf{h}$ 循环计算得到。其中，由第 i 阶 Lie Derivative，$\mathcal{L}^i\mathbf{h}$ 和状态过程函数 $\mathbf{f}_j$ 可计算得到测量函数的第 $i+1$ 阶 Lie Derivative $\mathcal{L}^{i+1}_{\mathbf{f}_j}\mathbf{h}$：

$$\mathcal{L}^{i+1}_{\mathbf{f}_j}\mathbf{h} = \nabla\mathcal{L}^i\mathbf{h}\cdot\mathbf{f}_j \tag{10}$$

其中 $\nabla\mathcal{L}^i\mathbf{h}$ 为第 i 阶 Lie Derivative 的生成空间：

$$\nabla\mathcal{L}^i\mathbf{h} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial x_1}, \frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial x_m}\right] \tag{11}$$

由给定的观测信息，为了分析在哪些方向上是可观的，我们检查测量函数各阶 Lie Derivative 的生成空间，且定义可观矩阵为

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla\mathcal{L}^0\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^1_{\mathbf{f}_i}\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^2_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j}\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^3_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j\mathbf{f}_k}\mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中 $i,j,k = 1,2,\ldots,l$。为了证明系统是可观的，需要证明 $\mathcal{O}$ 的若干行组成的子矩阵是列满秩的（full colum rank）。相反的，为了证明系统是非完全可观的，且找出不可观的方向，则需要证明：（a）矩阵 $\mathcal{O}$ 中的无限多行，均可表示为矩阵 $\mathcal{O}'$ 行向量的线性组合，其中 $\mathcal{O}\prime$ 的行向量来自于 $\mathcal{O}$;（b）求解矩阵 $\mathcal{O}\prime$ 的零空间，即可得到系统不可观的方向。尽管条件（b）可以直接求解得到，但是条件（a）很难找到。

注意：由 Lie Derivative 的定义可知，Lie Derivative 是光滑标量函数 $h(\mathbf{x})$ 对向量 $\mathbf{x}$ 求生成空间（偏导数），得到向量 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 后，再乘以光滑向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$（向量），得到一个新的标量。因此，如果 $h(\mathbf{x})$ 为向量，则应看作多个标量元素；如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为矩阵，则应看作多个列向量，再计算 Lie Derivative。

2.3 非线性系统可观性分析

通过上面介绍可知，要分析非线性系统的可观性，是非常有挑战的，因为要计算具有无限行组成的可观矩阵的零空间。但是论文中提出了一种方法，使可观性分析变得容易，将可观矩阵分解为两个矩阵相乘：一个满秩的无限行矩阵和一个非满秩的有限行矩阵。下面将通过计算一系列关于状态变量 $\mathbf{x}$ 的基函数，来达到分解可观矩阵的目的。

首先给出定理，

Theorem1: 假设存在非线性变换 $\beta(\mathbf{x}) = \left[\beta_\mathbf{1}(\mathbf{x})^T, \ldots, \beta_\mathbf{t}(\mathbf{x})^T\right]^T$，这些基均是关于状态变量 $\mathbf{x}$ 的函数，总共有 t 个，且满足如下条件：

（C1）$\beta_\mathbf{1}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$；

（C2）$\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0,1,\ldots,l$ 是关于 β 的函数；

（C3）定义一个可观的非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\beta) + \sum_{i=1}^{l}\mathbf{g}_i(\beta)\mathbf{u}_i \\ \mathbf{z} = \mathbf{h} = \beta_1 \end{cases} \tag{13}$$

其中，$\mathbf{g}_i(\beta) = \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0,1,\ldots,l$。

根据以上假设条件，则有以下两条结论：

（i）可观矩阵 $\mathcal{O}$ 可被分解为：

$$\mathcal{O} = \Xi\cdot\mathbf{B} \tag{14}$$

其中 Ξ 为系统（13）的可观矩阵，且 $\mathbf{B} \triangleq \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}$。

（ii）$null(\mathcal{O}) = null(\mathbf{B})$

证明结论（i）：根据链式法则，Lie Derivative $\nabla\mathcal{L}^i\mathbf{h}$ 的生成空间可表示为，

$$\nabla\mathcal{L}^i\mathbf{h} = \frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}} \tag{15}$$

因此，系统（8）的可观矩阵 $\mathcal{O}$ 可被分解为：

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla\mathcal{L}^0\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^1_{\mathbf{f}_i}\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^2_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j}\mathbf{h} \\ \nabla\mathcal{L}^3_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j\mathbf{f}_k}\mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{L}^0\mathbf{h}}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\mathcal{L}^1_{\mathbf{f}_i}\mathbf{h}}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\mathcal{L}^2_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j}\mathbf{h}}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\mathcal{L}^3_{\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j\mathbf{f}_k}\mathbf{h}}{\partial\beta} \\ \vdots \end{bmatrix} \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}} = \Xi\cdot\mathbf{B} \tag{16}$$

接下来证明矩阵 Ξ 是系统（13）的可观矩阵。

为区分系统（8）和系统（13）的各阶 Lie Derivative，利用符号 $\mathcal{J}$ 表示系统（13）的 Lie Derivative。系统（13）的零阶 Lie Derivative 的生成空间表示为：

$$\nabla\mathcal{J}^0\mathbf{h} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}^0\mathbf{h}}{\partial\beta} \tag{17}$$

该零阶生成空间即为矩阵 Ξ 的第一行块矩阵。

利用 $\nabla\mathcal{J}^i\mathbf{h} = \frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial\beta}$ 表示矩阵 Ξ 的 i 行 Lie Derivative 的生成空间，则第 $i+1$ 行的生成空间 $\nabla\mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j}\mathbf{h}$（状态过程函数为 $\mathbf{g}_j$）可表示为

$$\nabla\mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j}\mathbf{h} = \frac{\partial\mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j}\mathbf{h}}{\partial\beta} = \frac{\partial\nabla\mathcal{J}^i\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}_j}{\partial\beta} = \frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial\beta} = \frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{L}^i\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}^{i+1}_{\mathbf{f}_j}\mathbf{h}}{\partial\beta} \tag{18}$$

因此，矩阵 Ξ 的每一行矩阵块，为系统（13）的各阶 Lie Derivative 的生成空间，即矩阵 Ξ 是系统（13）的可观矩阵。

证明结论（ii）：由于 $\mathcal{O} = \Xi\mathbf{B}$，则有 $null(\mathcal{O}) = null(\mathbf{B}) + null(\Xi) \cap range(\mathbf{B})$[**Meyer2000**]，另外，由于假设条件（C3）系统（13）是可观的，即可观矩阵 Ξ 为列满秩（full column rank)，则有 $null(\mathcal{O}) = null(\mathbf{B})$。至此，由假设条件（C1）、（C2）和（C3）得到的结论（i）和（ii）证毕。

由 **Theorem1** 可知，为了分析一个系统的不可观方向，首先需要找到一些基函数（basis functions）满足条件（C1）和（C2），并且需要证明矩阵 Ξ 是列满秩 (full column rank)，即满足条件（C3）。当着三个条件满足后，则系统（8）的不可观方向分析转换成求解矩阵 $\mathbf{B}$ 的零空间。由于矩阵 $\mathbf{B}_I$ 是有限维的，因此求解零空间很容易。

3 VI-SLAM 系统可观性分析

3.1 系统概述

在该系统中，四元数表示旋转采用 JPL 形式。坐标系约定：全局坐标系用 G 表示，Camera 坐标系用 C 表示，IMU 坐标系用 I 表示，地图点用 f 表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如 ${}^G\mathbf{p}_I$ 表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移），${}^G\mathbf{v}_I$ 表示 IMU 系在全局坐标系下的速度，${}^I\mathbf{q}_G$ 表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 JPL 形式，旋转均是由 G 系到 I 系旋转，与 Hamilton 表示方式相反；${}^G\mathbf{p}_{f_i}$ 表示第 i 个地图点在 G 系下的坐标。

状态变量包含位姿、速度、Bias 和地图点：

$$\mathbf{x} = \left[{}^I\mathbf{q}_G^T, \mathbf{b}_g^T, {}^G\mathbf{v}_I^T, \mathbf{b}_a^T, {}^G\mathbf{p}_I^T \,|\, {}^G\mathbf{p}_{f_1}^T, \ldots, {}^G\mathbf{p}_{f_N}^T\right]^T = \left[\mathbf{x}_s^T | \mathbf{x}_m^T\right]^T \tag{19}$$

其中 $\mathbf{x}_s^T$ 和 $\mathbf{x}_m^T$ 分别表示 16×1 维传感器状态和 $3N\times 1$ 维地图点状态。

连续系统状态模型：

$${}^I\dot{\mathbf{q}}_G(t) = \frac{1}{2}\left({}^I\omega(t)\right){}^I\mathbf{q}_G(t) \tag{20}$$

$${}^G\dot{\mathbf{p}}_I(t) = {}^G\mathbf{v}_I(t) \tag{21}$$

$${}^G\dot{\mathbf{v}}_I(t) = {}^G\mathbf{a}_I(t) \tag{22}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g(t) = \mathbf{n}_{wg}(t) \tag{23}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{n}_{wa}(t) \tag{24}$$

$$^G\dot{\mathbf{p}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3\times1}, i = 1, \ldots, N \tag{25}$$

其中，

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} -\lfloor\omega\rfloor_\times & \omega \\ -\omega^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\lfloor\omega\rfloor_\times = \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

陀螺仪测量 $^I\omega_m$ 和加速度计测量 $^I\mathbf{a}_m$ 模型为：

$$^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \tag{28}$$

$$^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G(t))({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \tag{29}$$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 表示四元数对应的选择矩阵。

对于上述连续状态模型，在当前时刻的估计量处线性展开，并求期望，得到状态估计的传递模型：

$$^I\dot{\hat{\mathbf{q}}}_G(t) = \frac{1}{2}\,({}^I\hat{\omega}(t))\,{}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t) \tag{30}$$

$$^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_I(t) = {}^G\hat{\mathbf{v}}_I(t) \tag{31}$$

$$^G\dot{\hat{\mathbf{v}}}_I(t) = \mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t))\,{}^I\hat{\mathbf{a}}(t) + {}^G\mathbf{g} \tag{32}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_g(t) = \mathbf{0}_{3\times1} \tag{33}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_a(t) = \mathbf{0}_{3\times1} \tag{34}$$

$$^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3\times1}, i = 1, \ldots, N \tag{35}$$

其中 $^I\hat{\mathbf{a}}(t) = {}^I\mathbf{a}_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_a(t)$，$^I\hat{\omega}(t) = {}^I\omega_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_g(t)$

根据误差状态（error state）的定义 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 有：

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[{}^I\delta\theta_G^T, \tilde{\mathbf{b}}_g^T, {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^T, \tilde{\mathbf{b}}_a^T, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^T \,|\, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_1}^T, \ldots, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_N}^T\right]^T = \left[\tilde{\mathbf{x}}_s^T | \tilde{\mathbf{x}}_m^T\right]^T \tag{36}$$

则有线性连续误差状态方程，

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{0}_{15\times3N} \\ \mathbf{0}_{3N\times15} & \mathbf{0}_{3N} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{0}_{3N\times12} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \mathbf{F}_c\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_c\mathbf{n} \tag{37}$$

其中，

$$\mathbf{n} = \left[\mathbf{n}_g^T, \mathbf{n}_{wg}^T, \mathbf{n}_a^T, \mathbf{n}_{wa}^T\right]^T \tag{38}$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} -\lfloor\hat{\omega}\rfloor_\times & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G)\lfloor{}^I\hat{\mathbf{a}}\rfloor_\times & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(\tau)\right] = \mathbf{Q}_c\delta(t-\tau) \tag{41}$$

接下来讨论离散形式的系统模型：假设陀螺仪信号 ${}^I\omega_m(t)$ 和加速度计信号 ${}^I\mathbf{a}_m(t)$ 采样间隔为 $\delta t \triangleq t_{k+1} - t_k$，每次采样后，系统估计状态的传递，利用公式（30）-（35）积分得到。估计状态的协方差通过如下公式得到：

$$\begin{gathered}\dot{\Phi}_{k+1,k} = \mathbf{F}_c\Phi_{k+1,k} \\ initial\ condition:\ \Phi_{k,k} = \mathbf{I}_{15+3N}\end{gathered} \tag{42}$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k}\mathbf{P}_{k|k}\Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_{d,k} \tag{43}$$

其中离散的系统噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q}_{d,k}$ 通过如下积分计算，

$$\mathbf{Q}_{d,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)\mathbf{G}_c\mathbf{Q}_c\mathbf{G}_c^T\Phi^T(t_{k+1},\tau)d\tau \tag{44}$$

下面讨论视觉观测模型：为简化问题分析，假设只有一个地图点 $\mathbf{p}_{f_i}$，其对应相机测量 $\mathbf{z}_i$ 为地图点 ${}^I\mathbf{p}_{f_i}$ 在图像平面上的投影，即有

$$\mathbf{z}_i = \frac{1}{p_z}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \eta_i \tag{45}$$

其中

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{p}_{f_i} = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G)({}^G\mathbf{p}_{f_i} - {}^G\mathbf{p}_I) \tag{46}$$

且 η_i 为协方差为 $\mathbf{R}_i$ 的高斯白噪声。注意：该视觉观察模型假设图像测量为归一化平面，且相机坐标系和 IMU 坐标系重合，在实际中，相机和 IMU 之间存在内外参。

视觉观测的误差模型表示为

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i \simeq \mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{x}} + \eta_i \tag{47}$$

其中 $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$ 是利用当前时刻估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 通过模型（45）-（46）计算得到，且视觉测量雅可比矩阵 $\mathbf{H}_i$ 为

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_c\left[\mathbf{H}_\theta \quad \mathbf{0}_{3\times 9} \quad \mathbf{H}_p \quad | \quad \mathbf{0}_3 \ldots \mathbf{H}_{f_i} \ldots \mathbf{0}_3\right] \tag{48}$$

其中

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\, {}^I\mathbf{p}_{f_i}} = \frac{1}{p_z^2}\begin{bmatrix} p_z & 0 & -p_x \\ 0 & p_z & -p_y \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\partial\, {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial \theta} = \lfloor \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G)({}^G\mathbf{p}_{f_i} - {}^G\mathbf{p}_I)\rfloor_\times \tag{50}$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{\partial\, {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial\, {}^G\mathbf{p}_I} = -\mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G) \tag{51}$$

$$\mathbf{H}_{f_i} = \frac{\partial\, {}^I\mathbf{p}_{f_i}}{\partial\, {}^G\mathbf{p}_{f_i}} = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G) \tag{52}$$

3.2 可观性分析

为简化分析，将 I 系旋转用 Cayley-Gibbs-Rodriguez(CGR) 方式表示：${}^I\mathbf{s}_G$ 表示从 G 系到 I 系的旋转，且有

$${}^I\dot{\mathbf{s}}_G(t) = \mathbf{D}({}^I\omega(t) - \mathbf{b}_g(t)) \tag{53}$$

其中 $\mathbf{D} \triangleq \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_3 + \lfloor \mathbf{s}\rfloor_\times + \mathbf{s}\mathbf{s}^T)$。因此，系统状态变量 $\mathbf{x}$ 可表示为

$$\mathbf{x} = \left[{}^I\mathbf{s}_G \quad \mathbf{b}_g^T \quad {}^G\mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad {}^G\mathbf{p}_I^T \quad {}^G\mathbf{p}_f^T\right]^T \tag{54}$$

另外，为简化书写，系统状态变量忽略坐标系标识，

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{s}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{v}^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{p}^T \quad \mathbf{p}_f^T\right]^T \tag{55}$$

则有 VI-SLAM 状态模型可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{b}}_g \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{b}}_a \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{g}-\mathbf{C}^T\mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \tag{56}$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{p_z}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \tag{57}$$

其中 $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{s})$，$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{p}_f = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{p}_f-\mathbf{p})$，且令

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{g}-\mathbf{C}^T\mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tag{58}$$

接下来分析系统的可观性：首先根据 **Theorem1** 中的假设条件（C1）和（C2），找到系统的基函数（basis functions），其中直接根据条件（C1）得到第一个基函数 $\beta_1 = \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$,

$$\beta_1 \triangleq \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{1}{p_z}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \tag{59}$$

然后循环计算条件（C2）中的 $\frac{\partial \beta_j}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_i$，并寻找新的基函数 β，其中基函数有很多种选择，应当选择那些有明确物理意义的量作为基函数。

计算基函数 β_1 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\, {}^I\mathbf{p}_f}\frac{\partial\, {}^I\mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{60}$$

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} (-\lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \mathbf{b}_g - \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &= [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1]\,(-\lfloor \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rfloor_\times \mathbf{b}_g - \frac{1}{p_z}\mathbf{C}\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{61}$$

显然 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}_0$ 没法表示成现有基函数 $\{\beta_1\}$ 的函数, 因此增加基函数：

$$\beta_2 \triangleq \frac{1}{p_z} \tag{62}$$

$$\beta_3 \triangleq \mathbf{C}\mathbf{v} \tag{63}$$

$$\beta_4 \triangleq \mathbf{b}_g \tag{64}$$

其中 β_2 表示地图的逆深度，β_3 表示 I 系下的速度，β_4 表示陀螺仪 bias，则有，

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 \triangleq [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1](-\lfloor \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rfloor_\times \beta_4 - \beta_2\beta_3) \tag{65}$$

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} \lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\beta_1 \end{bmatrix} \lfloor \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rfloor_\times \end{aligned} \tag{66}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$：

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{2\times 1} \tag{67}$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_2 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \beta_2}{\partial {}^I\mathbf{p}_f}\frac{\partial {}^I\mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{p_z^2}\mathbf{e}_3^T \begin{bmatrix} \lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{68}$$

其中 $\mathbf{e}_3$ 为 3×3 单位矩阵第三列：$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = \mathbf{I}_3$。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -\frac{1}{p_z^2}\mathbf{e}_3^T(-\lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \mathbf{b}_g - \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &= -\beta_2\mathbf{e}_3^T(-\lfloor \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rfloor_\times \beta_4 - \beta_2\beta_3) \end{aligned} \tag{69}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= -\frac{1}{p_z^2}\mathbf{e}_3^T \lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \\ &= -\beta_2\mathbf{e}_3^T \lfloor \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rfloor_\times \end{aligned} \tag{70}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = 0 \tag{71}$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_3 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lfloor \mathbf{C}\mathbf{v} \rfloor_\times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{72}$$

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -\lfloor \mathbf{C}\mathbf{v} \rfloor_\times \mathbf{b}_g + \mathbf{C}\ \mathbf{g} - \mathbf{b}_a \\ &\triangleq -\lfloor \beta_3 \rfloor_\times \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 \end{aligned} \tag{73}$$

其中定义新的基函数：

$$\beta_5 \triangleq \mathbf{C}\ \mathbf{g} \tag{74}$$

$$\beta_6 \triangleq \mathbf{b}_a \tag{75}$$

其中 β_5 表示 I 系下的重力方向，β_6 *bias*。

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \lfloor \mathbf{C}\mathbf{v} \rfloor_\times \tag{76}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{I}_3 \tag{77}$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_4 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{78}$$

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{79}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{80}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{81}$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_5 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lfloor \mathbf{C}\ \mathbf{g} \rfloor_\times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{82}$$

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = -\lfloor \mathbf{C}\ \mathbf{g} \rfloor_\times \mathbf{b}_g = -\lfloor \beta_5 \rfloor_\times \beta_4 \tag{83}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \lfloor \mathbf{C}\ \mathbf{g} \rfloor_\times = \lfloor \beta_5 \rfloor_\times \tag{84}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{85}$$

无需增加新的基函数。

计算基函数 β_6 关于 $\mathbf{x}$ 的生成空间，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_6}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}_g} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{b}_a} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}_f} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{86}$$

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{87}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{88}$$

无需增加新的基函数。

计算 $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$:

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3\times 1} \tag{89}$$

无需增加新的基函数。

至此，总共定义 6 个基函数：

$$\beta_1 = \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{90}$$

$$\beta_2 = \quad \frac{1}{p_z} \tag{91}$$

$$\beta_3 = \quad \mathbf{C}\mathbf{v} \tag{92}$$

$$\beta_4 = \quad \mathbf{b}_g \tag{93}$$

$$\beta_5 = \quad \mathbf{C}\mathbf{g} \tag{94}$$

$$\beta_6 = \quad \mathbf{b}_a \tag{95}$$

根据 **Theorem1** 中条件（C3），由基函数构建的非线性系统为：

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \omega + \mathbf{f}_2 \mathbf{a}) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \omega + \mathbf{g}_2 \mathbf{a} \tag{96}$$

即有

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_5 \\ \dot{\beta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\beta}}_1(-\lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_\times \beta_4 - \beta_2 \beta_3) \\ \beta_2 \mathbf{e}_3^T (\lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_\times \beta_4 + \beta_2 \beta_3) \\ -\lfloor \beta_3 \rfloor_\times \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \\ -\lfloor \beta_5 \rfloor_\times \beta_4 \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\bar{\beta}}_1 \lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_\times \\ -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \lfloor \bar{\beta}_1 \rfloor_\times \\ \lfloor \beta_3 \rfloor_\times \\ \mathbf{0}_3 \\ \lfloor \beta_5 \rfloor_\times \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 3} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \tag{97}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \beta_1 \tag{98}$$

其中 $\bar{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1^T & 1 \end{bmatrix}^T$，$\bar{\bar{\beta}}_1 = [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1]$。

下面讨论基于基函数 β 的系统（97）可观性，即检查是否满足 **Theorem1** 中的条件（**C3**）：系统（97）的可观矩阵 Ξ 是否为列满秩。由可观矩阵的定义可知，矩阵 Ξ 是一个无数行的矩阵，但是为了证明该矩阵为列满秩，可以选取它的子矩阵 Ξ' 来分析，如果 Ξ' 是列满秩，则 Ξ 也是列满秩。选取 Lie Derivative 集合 $\mathcal{L}$ 计算可观子矩阵 Ξ'：

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}^0\mathbf{h}, \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}\mathbf{g}_{21}}\mathbf{h}, \mathcal{L}^1_{\mathbf{g}_0}\mathbf{h}, \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}\mathbf{g}_{13}}\mathbf{h}, \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{21}}\mathbf{h}, \mathcal{L}^2_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0}\mathbf{h}, \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}}\mathbf{h}, \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0}\mathbf{h}\} \tag{99}$$

其中 $\mathbf{g}_{ij}$ 表示矩阵 $\mathbf{g}_i$ 的第 j 列，即 $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{e}_j$，$\mathbf{e}_j$ 为单位矩阵的第 j 列。

计算 Lie Derivative 集合 $\mathcal{L}$ 关于基函数 β 的生成空间，得到可观矩阵 Ξ'：

$$\Xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^0\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}\mathbf{g}_{21}}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^1_{\mathbf{g}_0}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}\mathbf{g}_{13}}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{21}}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^2_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_{13}}\mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0\mathbf{g}_0}\mathbf{h}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 6} & \mathbf{0}_{3\times 6} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & \mathbf{0}_{1\times 6} & \mathbf{0}_{1\times 6} \\ \mathbf{X}_{6\times 3} & \Psi_{6\times 6} & \mathbf{0}_{6\times 6} \\ \mathbf{Y}_{6\times 3} & \mathbf{Z}_{6\times 6} & \Theta_{6\times 6} \end{bmatrix} \tag{100}$$

其中第二行块矩阵为零，舍弃掉后得到新观测矩阵：

$$\Xi'' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 6} & \mathbf{0}_{3\times 6} \\ \mathbf{X}_{6\times 3} & \Psi_{6\times 6} & \mathbf{0}_{6\times 6} \\ \mathbf{Y}_{6\times 3} & \mathbf{Z}_{6\times 6} & \Theta_{6\times 6} \end{bmatrix} \tag{101}$$

为证明矩阵 Ξ'' 为列满秩，只需证明矩阵 Ψ 和 Θ 为满秩矩阵。

矩阵 Ψ 具体为：

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & -\beta_{11}\beta_{12} & \beta_{11}^2+1 & -\beta_{12} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & -\beta_{12}^2-1 & \beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 4\beta_{11}\beta_{12} & 2\beta_{12}^2-2\beta_{11}^2 & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} & 2\beta_{12}^2-2\beta_{11}^2 & -4\beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ 0 & 0 & -\beta_{21}^2 & 2\beta_{12}\beta_{21} & -4\beta_{11}\beta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta_{12}\beta_{21} & -2\beta_{21} \end{bmatrix} \tag{102}$$

其中 β_{ij} 表示第 i 个基函数 β_i 的第 j 个元素。通过检查矩阵 Ψ 的行列式，

$$det(\Psi) = -4\beta_{21}^5(\beta_{11}^2+\beta_{12}^2-1)(2\beta_{11}^2+2\beta_{12}^2+1) = -4\frac{1}{p_z^5}(\frac{p_x^2}{p_z^2}+\frac{p_y^2}{p_z^2}-1)(2\frac{p_x^2}{p_z^2}+2\frac{p_y^2}{p_z^2}+1) \tag{103}$$

由于 $p_z \neq 0$ 且 $2\frac{p_x^2}{p_z^2}+2\frac{p_y^2}{p_z^2}+1 \geqslant 1$，因此矩阵 Ψ 的行列式唯一可能为零的情况为 $\frac{p_x^2}{p_z^2}+\frac{p_y^2}{p_z^2}-1=0$，即：所有地图点的视觉观测，位于图像归一化平面的单位圆上。这中情况在实际中是不可能事件，因为控制输入是随着时间任意变化的。因而矩阵 Ψ 一般而言是满秩的。

矩阵 Θ 具体为：

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & 0 & -\beta_{12}\beta_{21} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 0 & 0 & \beta_{11}\beta_{21} \\ \Theta_{5,1} & \Theta_{5,2} & \Theta_{5,3} & \Theta_{5,4} & \Theta_{5,5} & \Theta_{5,6} \\ \Theta_{6,1} & \Theta_{6,2} & \Theta_{6,3} & \Theta_{6,4} & \Theta_{6,5} & \Theta_{6,6} \end{bmatrix} \tag{104}$$

其中，

$$\Theta_{5,1} = -2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} \tag{105}$$

$$\Theta_{5,2} = 2\beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{41} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{5,3} = \;& 2\beta_{21}(\beta_{42}-\beta_{21}\beta_{31}-\beta_{12}\beta_{43}+\beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})) - 2\beta_{21}\beta_{42} \\ & -\beta_{21}^2(\beta_{31}-\beta_{11}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) \\ & +\beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})\end{aligned} \tag{107}$$

$$\Theta_{5,4} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} \tag{108}$$

$$\Theta_{5,5} = -\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{11}\beta_{41}) - \beta_{11}\beta_{21}\beta_{41} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{5,6} = \;& \beta_{21}^2(\beta_{31}-\beta_{11}\beta_{33}) + \beta_{21}\beta_{42} - 2\beta_{21}(\beta_{42}-\beta_{21}\beta_{31} \\ & -\beta_{12}\beta_{43}+\beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})) + \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{11}\beta_{41}) - 2\beta_{11}\beta_{21} \\ & (\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})\end{aligned} \tag{110}$$

$$\Theta_{6,1} = -2\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{12}\beta_{42}) - 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{42} \tag{111}$$

$$\Theta_{6,2} = 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-2\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) \tag{112}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{6,3} = \;& 2\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}^2(\beta_{32}-\beta_{12}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{32}-\beta_{11}\beta_{43} \\ & -\beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})) \\ & +\beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{12}\beta_{41}) + 2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) \\ & +\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-2\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})\end{aligned} \tag{113}$$

$$\Theta_{6,4} = \beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{12}\beta_{42}) + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{42} \tag{114}$$

$$\Theta_{6,5} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-2\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{41} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{6,6} = \;& \beta_{21}^2(\beta_{32}-\beta_{12}\beta_{33}) - \beta_{21}\beta_{41} + 2\beta_{21}(\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{32}-\beta_{11}\beta_{43} \\ & -\beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})) - \beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43}+\beta_{12}\beta_{42}) \\ & -2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42}-2\beta_{12}\beta_{41}+\beta_{21}\beta_{33})\end{aligned} \tag{116}$$

检查矩阵 Θ 的行列式：

$$\begin{aligned} det(\Theta) = & \ 3\beta_{21}^7(\beta_{11}\beta_{33}\beta_{41} - \beta_{32}\beta_{42} - \beta_{31}\beta_{41} + \beta_{12}\beta_{33}\beta_{42}) \\ & = 3\beta_{21}^7 \left[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}\right] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{117}$$

其中 $\beta_{21} = \frac{1}{p_z} \neq 0$；$\beta_4 = \mathbf{b}_g \neq 0$；由于 $\beta_1 = \mathbf{h}$，以及 $\beta_3 = \mathbf{Cv}$，则有

$$\left[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}\right]^T = \mathbf{A}\beta_3 \tag{118}$$

因为 $\beta_3 \neq \mathbf{0}_{3\times1}$（相机移动），并且矩阵 $\mathbf{A}$ 为列满秩，则有 $\mathbf{A}\beta_1 \neq 0$。最后检查

$$\begin{aligned} \left[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}\right] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \left[\beta_{41}, \beta_{42}\right] \mathbf{A}\beta_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}\beta_3 = \lambda \begin{bmatrix} \beta_{42} \\ -\beta_{41} \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{119}$$

从上式可看出，对于给定的 β_{41} 和 β_{42}，由于 β_1 是时变的，因此矩阵 $\mathbf{A}$ 将 $\beta_3 = \mathbf{Cv}$ 限定在特定的流形上，这在实际的任意控制输入系统中，是不存在的。因此有

$$\left[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}\right] \begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{120}$$

因而矩阵 Θ 一般而言是满秩的。

至此，矩阵 Ψ 和 Θ 均为满秩，对于可观矩阵 Ξ''，利用左上角的单位矩阵，高斯消元消去矩阵 $\mathbf{X}_{6\times3}$ 和 $\mathbf{Y}_{6\times3}$；利用中间的 Ψ 消去矩阵 $\mathbf{Z}_{6\times6}$，即可得到新的可观矩阵,

$$\Xi''' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times6} & \mathbf{0}_{3\times6} \\ \mathbf{0}_{6\times3} & \Psi_{6\times6} & \mathbf{0}_{6\times6} \\ \mathbf{0}_{6\times3} & \mathbf{0}_{6\times6} & \Theta_{6\times6} \end{bmatrix} \tag{121}$$

由于矩阵 Ψ 和 Θ 均为满秩，非主对角线元素均为零，所以有矩阵 Ξ''' 为满秩，进而可知可观矩阵 Ξ 为列满秩。

下面讨论 $\mathcal{O} = \Xi\mathbf{B}$ 中的 $\mathbf{B}$ 矩阵，通过分析矩阵 $\mathbf{B}$ 的零空间，得到系统不可观的情况。通过堆叠基函数 β 对状态变量 $\mathbf{x}$ 的偏导，得到，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor {}^I\mathbf{p}_f \rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \lfloor \mathbf{Cv} \rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \lfloor \mathbf{Cg} \rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \tag{122}$$

其中，

$$\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{p_z^2} \end{bmatrix} \tag{123}$$

显然矩阵 $\mathbf{B}_1$ 满秩，则只需分析 15×18 矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的零空间。直观得到并验证，下列矩阵为 $\mathbf{B}_2$ 的右零空间（right null space），

$$\mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\mathbf{Cg} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\lfloor \mathbf{v} \rfloor_\times \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{I}_3 & -\lfloor \mathbf{p} \rfloor_\times \mathbf{g} \\ \mathbf{I}_3 & -\lfloor \mathbf{p}_f \rfloor_\times \mathbf{g} \end{bmatrix} \tag{124}$$

接下来证明矩阵 $\mathbf{B}_2$ 无其它右零空间向量：通过证明矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的左零空间（left null space）只有 1 维，即有 15×18 矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的秩为 14，进而矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的右零空间有 $18-14=4$ 维。假设左零空间为 $\mathbf{N}_L=[\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3,\mathbf{N}_4,\mathbf{N}_5]$，则有

$$\mathbf{0}=[\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3,\mathbf{N}_4,\mathbf{N}_5]\begin{bmatrix} \lfloor {}^I\mathbf{p}_f\rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \lfloor \mathbf{C}\mathbf{v}\rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \lfloor \mathbf{C}\mathbf{g}\rfloor_\times \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tag{125}$$

由矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的第 2 列和第 4 列可知，$\mathbf{N}_3\mathbf{I}_3=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{N}_5\mathbf{I}_3=\mathbf{0}$，则有 $\mathbf{N}_3=\mathbf{0}$，$\mathbf{N}_5=\mathbf{0}$；由矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的第 3 列和第 5、6 列可知，$\mathbf{N}_1\mathbf{C}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{N}_2\mathbf{C}=\mathbf{0}$，由于旋转矩阵 $\mathbf{C}$ 为满秩，则有 $\mathbf{N}_1=\mathbf{0}$，$\mathbf{N}_2=\mathbf{0}$；因此，只有向量 $\mathbf{N}_4$ 为左零空间的非零项，由矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的第 1 列可知，

$$\mathbf{N}_4\lfloor\mathbf{C}\mathbf{g}\rfloor_\times\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}}=\mathbf{0} \tag{126}$$

由于矩阵 $\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{s}}$ 为满秩，则有

$$\mathbf{N}_4=\pm(\mathbf{C}\mathbf{g})^T \tag{127}$$

因此矩阵 $\mathbf{B}_2$ 有左零空间，

$$\mathbf{N}_L=\left[\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{0}_{1\times3},\mathbf{0}_{1\times3},(\mathbf{C}\mathbf{g})^T,\mathbf{0}_{1\times3}\right] \tag{128}$$

且其只有 1 维。至此，可知矩阵 $\mathbf{B}_2$ 有且仅有右零空间 $\mathbf{N}_R$。

接下来讨论右零空间 $\mathbf{N}_R$ 每一维对应的物理意义，即有哪些量是不可观的。令 $\mathbf{N}_R=span\,[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3,\mathbf{n}_4]$，利用 $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3,\mathbf{n}_4$ 对状态变量 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}{}^I\mathbf{s}_G & \mathbf{b}_g^T & {}^G\mathbf{v}_I^T & \mathbf{b}_a^T & {}^G\mathbf{p}_I^T & {}^G\mathbf{p}_f^T\end{bmatrix}^T$ 进行微小扰动，通过观察 $\mathbf{x}$ 中哪些量会变化，则对应的量即为不可观的。

首先利用 $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3$ 对 $\mathbf{x}$ 施加扰动，

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}+c_1\mathbf{n}_1+c_2\mathbf{n}_2+c_3\mathbf{n}_3 \tag{129}$$

发现只有 ${}^G\mathbf{p}_I^T$ 和 ${}^G\mathbf{p}_f^T$ 发生变化，因此有相对于全局坐标 G 系的平移（三维）是不可观的。

观察 $\mathbf{N}_R$ 的第 4 列 $\mathbf{n}_4$，其中与重力 $\mathbf{g}$ 有关，考虑利用 $\mathbf{n}_4$ 对状态量 $\mathbf{x}$ 施加沿重力方向的旋转扰动 $\mathbf{C}({}^{G'}\mathbf{q}_G)\triangleq {}^{G'}\mathbf{R}_G$，且有近似，

$${}^{G'}\mathbf{R}_G\simeq\mathbf{I}_3-c\lfloor{}^G\bar{\mathbf{g}}\rfloor_\times \tag{130}$$

其中 ${}^G\bar{\mathbf{g}}$ 为沿着重力方向的单位向量。

References

[1] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.