

# VI-SLAM 系统可观性和一致性分析

张谦

2020 年 03 月 06 日

## 目录

<b>1</b>	<b>结论</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>无偏估计、有效性和一致性</b>	<b>2</b>
2.1	无偏性 . . . . .	2
2.2	有效性 . . . . .	2
2.3	一致性 . . . . .	3
2.4	总结 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>非线性系统可观性分析</b>	<b>4</b>
3.1	Lie Derivative . . . . .	4
3.2	非线性系统的 Lie Derivative 和可观矩阵 . . . . .	5
3.3	非线性系统可观性分析 . . . . .	5
<b>4</b>	<b>VI-SLAM 系统可观性分析</b>	<b>7</b>
4.1	系统概述 . . . . .	7
4.2	可观性分析 . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Robocentric VIO 可观性和一致性分析</b>	<b>17</b>

# 1 结论

(1) 对于状态估计问题，并不一定需要保证“无偏估计”，才会得到 ATE 较小的估计值；如果能保证系统的“一致性”，得到更有效的估计值，尽管是“有偏的”，也可能得到 ATE 较小的估计状态；

(2) VI-SLAM 系统，不可观维度有 4 维：全局坐标系下的平移和绕重力方向的旋转（yaw 角）；状态估计过程中的不可观维度如果和实际不可观维度不等，则会导致系统存在“一致性”问题，进而导致估计误差变大；

(3) Robocentric-VIO 由于采用 robocentric 而非 world-centric 的状态估计方式，能够保证系统不可观维度一直不变，进而保证系统的“一致性”，因此可以得到较精确的估计状态。

## 2 无偏估计、有效性和一致性

现实中常常有这样的问题，比如图1，想知道全体女性的身高均值  $\mu$ ，但是没有办法把每个女性都进行测量，只有抽样一些女性来估计全体女性的身高：

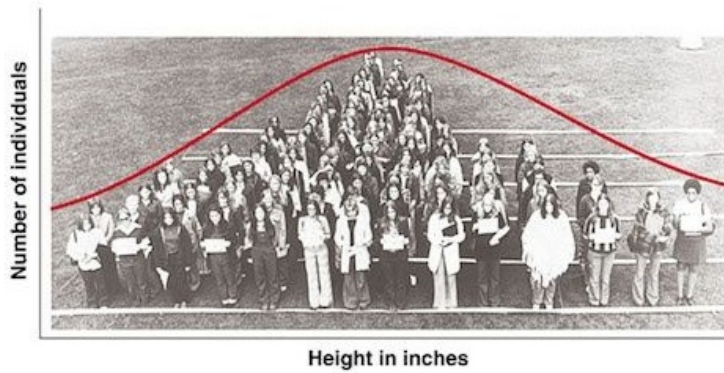


图 1: 身高高斯分布示意图

那么根据抽样数据怎么进行推断？什么样的推断方法才称为“好”？[1]

### 2.1 无偏性

比如说我们采样到的女性身高分别为：

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

那么，

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2)$$

是对  $\mu$  不错的一个估计，为什么？因为它无偏估计。

首先，真正的全体女性的身高均值  $\mu$ ，我们是不知道的，只有上帝才知道，在图 2 中就画为虚线，通过采样计算出  $\bar{X}$  会发现，不同采样得到的  $\bar{X}$  是围绕  $\mu$  左右波动的。这有点像打靶，如图 3，只要命中在靶心周围，还算不错的成绩，这就是无偏的。

如果用以下式子去估计总体方差  $\sigma^2$ ：

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3)$$

会偏离靶心并产生偏差，这就是有偏的，这个偏差为  $\frac{1}{n}\sigma^2$ ，如图 4，这种偏差就像瞄准镜歪了，属于系统误差，就此而言，无偏估计要好于有偏估计。

### 2.2 有效性

如图5，打靶的时候，右边的成绩肯定更优秀：进行估计的时候，也是估计量越靠近目标，效果越好，这个靠近可

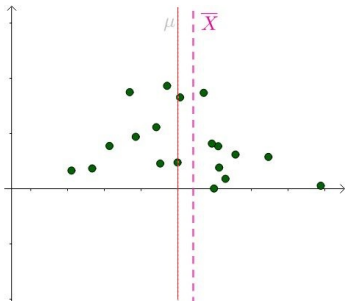


图 2: 采样计算  $\bar{X}$

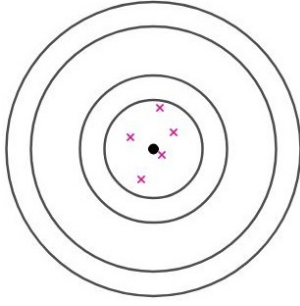


图 3: 打靶例子



图 4: 系统偏差

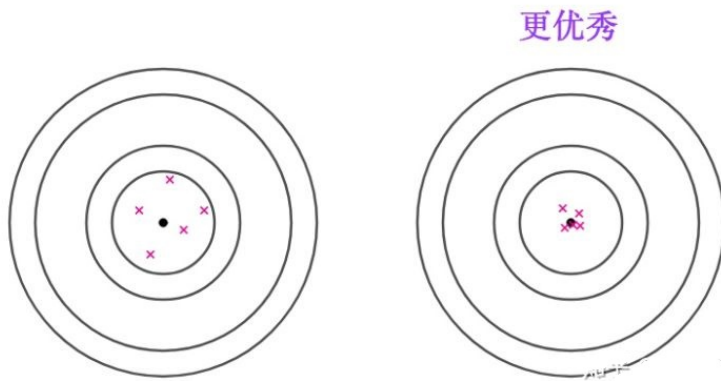


图 5: 有效性示意图

以用方差来衡量。另外，如图6有效估计和偏差性是不相关的，无论是有偏估计还是无偏估计，均可产生有效估计（方差更小）。

举个例子，从  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽出 10 个样本：

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (4)$$

下面两个都是无偏估计量：

$$T_1 = \frac{x_1 + x_3 + 2x_{10}}{4}, T_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \quad (5)$$

但是后者比前者方差小，后者更有效。并且实际系统中不一定非要选无偏估计量，如图7 如果能接受点误差，选择右边这个估计量更好。

### 2.3 一致性

如前所述，如果用以下式子去估计方差  $\sigma^2$ ：

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (6)$$

会有一个偏差  $\frac{1}{n}\sigma^2$ ，可以看到，随着采样个数  $n$  的增加，这个偏差会越来越小。那么这个估计量就是“一致的”。如果样本数量够多，其实这种“有偏”但是“一致”的估计量也是可以选的。

### 2.4 总结

在共视的 Mapping 中，由于固定历史帧，优化滑窗内的关键帧，导致的“有偏”估计，但是由于前端 vio 能够提供无偏且一致的初值，会提升后端共视非线性优化的“有效性”，而且最终使得 SLAM 能有一个比较精确的输出。

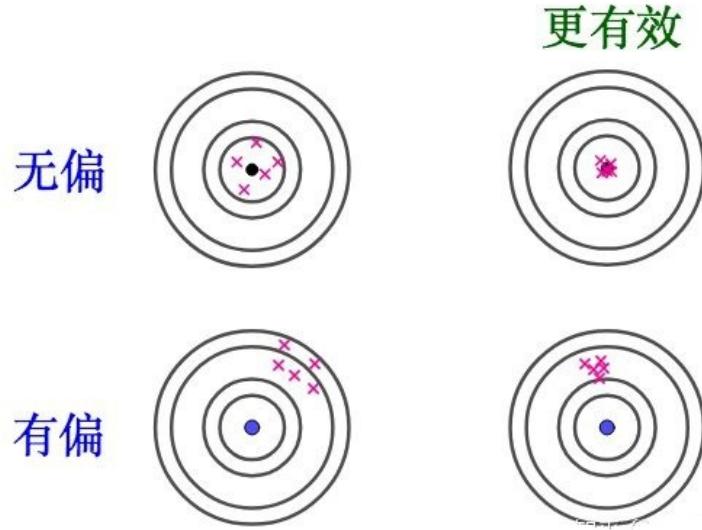


图 6: 无偏和有偏下的有效性

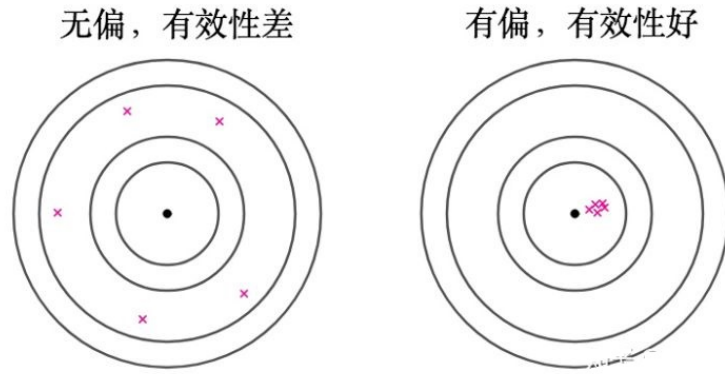


图 7: 无偏性和有效性例子

### 3 非线性系统可观性分析

#### 3.1 Lie Derivative

在介绍 Lie Derivative 之前，先需要以下一些概念。

(1) 向量函数  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (从  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  映射到  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ )，叫做  $\mathbb{R}^n$  里的向量场 (Vector field)。如果进一步，向量函数  $f$  具有连续偏导，而且是任意阶的偏导，那么我们说  $f$  是光滑向量场 (Smooth Vector field)。

(2) 光滑标量函数  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (从  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  映射到  $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$  的函数) 的 Gradient 由一个行向量  $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$  表示，其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 。所以我们要记住，Gradient 是标量对向量的求导，其结果是个行向量。光滑向量场  $f(\mathbf{x})$  的 Jacobian 由一个  $n \times n$  的矩阵  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ ，其中矩阵的第一行就是  $\nabla f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}$ ，就是刚刚定义的光滑标量函数  $f_1$  (列向量  $f$  的第一个元素) 的 Gradient，而我们知道 Gradient 是行向量。以此类推 Jacobian 的第  $i$  行应该为  $\nabla f_i = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}$ 。那么基于以上几个定义，我们就可以用来定义 Lie Derivative。

(3) Lie Derivative 的定义：光滑标量函数  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  相对于光滑向量场  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的 Lie Derivative 由一个标量函数  $L_f h = \nabla h f = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f$  表示，其中  $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$  就是标量函数  $h(\mathbf{x})$  的 Gradient，是个行向量。行向量  $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$  乘以向量场  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ，其结果正好是个标量，所以  $L_f h = \nabla h f = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f$  是个标量。

(4) 如果  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是另一个向量场，由于刚刚计算的 Lie Derivative:  $L_f h$  是个标量，它又可以跟  $g(\mathbf{x})$  算出一个 Lie Derivative，表示为  $L_g L_f h = L_g (L_f h) = \nabla (L_f h) g = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} g = \frac{\partial (\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f)}{\partial \mathbf{x}} g$ ，当然同样地，算出来  $L_g L_f h$  的结果依然是个标量。以此类推，可以一直搞下去。于是我们有标量函数  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的 0 阶 Lie Derivative，表示为

$L_f^0 h = h$ , 是它本身。标量函数  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的第  $i$  阶 Lie Derivative 为  $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) f = \frac{\partial(L_f^{i-1} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ 。

(5) 总结一下, Lie Derivative 与一般的 Derivate 的区别是, Lie Derivative 是定义在两个函数  $h$  和  $f$  之间的, 它俩都是向量  $\mathbf{x}$  的函数, 标量函数  $h$  对  $\mathbf{x}$  的 Gradient 乘以  $f(\mathbf{x})$ , 它们通过共同的  $\mathbf{x}$  联系起来的。一般的 Derivative 是某个函数对  $\mathbf{x}$  定义的。举个例子, 对于单输出非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{7}$$

我们有  $\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = L_f h$ ,  $\ddot{y} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = L_f^2 h$

### 3.2 非线性系统的 Lie Derivative 和可观矩阵

考虑连续非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{z} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{8}$$

其中控制输入  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$ , 状态量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , 状态过程模型表示为向量函数  $\mathbf{f}_i, i = 0, 1, \dots, l$ 。[3]

为了分析系统的可观性, 以及在现有的测量下状态量各个方向的可观性, 我们计算系统的 Lie Derivative。定义测量函数  $\mathbf{h}$  的零阶 Lie Derivative 为其自身:

$$\mathcal{L}^0 \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x})\tag{9}$$

由 Lie Derivative 的定义, 测量函数  $\mathbf{h}$  不同阶的 Lie Derivative 由  $\mathcal{L}^0 \mathbf{h}$  循环计算得到。其中, 由第  $i$  阶 Lie Derivative,  $\mathcal{L}^i \mathbf{h}$  和状态过程函数  $\mathbf{f}_j$  可计算得到测量函数的第  $i+1$  阶 Lie Derivative  $\mathcal{L}_{\mathbf{f}_j}^{i+1} \mathbf{h}$ :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}_j}^{i+1} \mathbf{h} = \nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}_j\tag{10}$$

其中  $\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h}$  为第  $i$  阶 Lie Derivative 的生成空间:

$$\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial x_m} \right]\tag{11}$$

由给定的观测信息, 为了分析在哪些方向上是可观的, 我们检查测量函数各阶 Lie Derivative 的生成空间, 且定义可观矩阵为

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{L}^0 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_1}^1 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2}^2 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3}^3 \mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix}\tag{12}$$

其中  $i, j, k = 1, 2, \dots, l$ 。为了证明系统是可观的, 需要证明  $\mathcal{O}$  的若干行组成的子矩阵是列满秩的 (full column rank)。相反的, 为了证明系统是非完全可观的, 且找出不可观的方向, 则需要证明: (a) 矩阵  $\mathcal{O}$  中的无限多行, 均可表示为矩阵  $\mathcal{O}'$  行向量的线性组合, 其中  $\mathcal{O}'$  的行向量来自于  $\mathcal{O}$ ; (b) 求解矩阵  $\mathcal{O}'$  的零空间, 即可得到系统不可观的方向。尽管条件 (b) 可以直接求解得到, 但是条件 (a) 很难找到。

**注意:** 由 Lie Derivative 的定义可知, Lie Derivative 是光滑标量函数  $h(\mathbf{x})$  对向量  $\mathbf{x}$  求生成空间 (偏导数), 得到向量  $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$  后, 再乘以光滑向量场  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  (向量), 得到一个新的标量。因此, 如果  $h(\mathbf{x})$  为向量, 则应看作多个标量元素; 如果  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  为矩阵, 则应看作多个列向量, 再计算 Lie Derivative。

### 3.3 非线性系统可观性分析

通过上面介绍可知, 要分析非线性系统的可观性, 是非常有挑战的, 因为要计算具有无限行组成的可观矩阵的零空间。但是论文中提出了一种方法, 使可观性分析变得容易, 将可观矩阵分解为两个矩阵相乘: 一个满秩的无限行矩阵和一个非满秩的有限行矩阵。下面将通过计算一系列关于状态变量  $\mathbf{x}$  的基函数, 来达到分解可观矩阵的目的。

首先给出定理,

**Theorem1:** 假设存在非线性变换  $\beta(\mathbf{x}) = [\beta_1(\mathbf{x})^T, \dots, \beta_t(\mathbf{x})^T]^T$ , 这些基均是关于状态变量  $\mathbf{x}$  的函数, 总共有  $t$  个, 且满足如下条件:

(C1)  $\beta_1(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ ;

(C2)  $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, l$  是关于  $\beta$  的函数;

(C3) 定义一个可观的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\beta) + \sum_{i=1}^l \mathbf{g}_i(\beta) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{z} = \mathbf{h} = \beta_1 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{g}_i(\beta) = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), i = 0, 1, \dots, l$ 。

根据以上假设条件, 则有以下两条结论:

(i) 可观矩阵  $\mathcal{O}$  可被分解为:

$$\mathcal{O} = \Xi \cdot \mathbf{B} \quad (14)$$

其中  $\Xi$  为系统 (13) 的可观矩阵, 且  $\mathbf{B} \triangleq \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}}$ 。

(ii)  $\text{null}(\mathcal{O}) = \text{null}(\mathbf{B})$

证明结论 (i): 根据链式法则, Lie Derivative  $\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h}$  的生成空间可表示为,

$$\nabla \mathcal{L}^i \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \quad (15)$$

因此, 系统 (8) 的可观矩阵  $\mathcal{O}$  可被分解为:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{L}^0 \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}^1_{\mathbf{f}_1} \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}^2_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} \mathbf{h} \\ \nabla \mathcal{L}^3_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3} \mathbf{h} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^1_{\mathbf{f}_1} \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^2_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^3_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3} \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \vdots \end{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} = \Xi \cdot \mathbf{B} \quad (16)$$

接下来证明矩阵  $\Xi$  是系统 (13) 的可观矩阵。

为区分系统 (8) 和系统 (13) 的各阶 Lie Derivative, 利用符号  $\mathcal{J}$  表示系统 (13) 的 Lie Derivative。系统 (13) 的零阶 Lie Derivative 的生成空间表示为:

$$\nabla \mathcal{J}^0 \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \quad (17)$$

该零阶生成空间即为矩阵  $\Xi$  的第一行块矩阵。

利用  $\nabla \mathcal{J}^i \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta}$  表示矩阵  $\Xi$  的  $i$  行 Lie Derivative 的生成空间, 则第  $i+1$  行的生成空间  $\nabla \mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j} \mathbf{h}$  (状态过程函数为  $\mathbf{g}_j$ ) 可表示为

$$\nabla \mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j} \mathbf{h} = \frac{\partial \mathcal{J}^{i+1}_{\mathbf{g}_j} \mathbf{h}}{\partial \beta} = \frac{\partial \nabla \mathcal{J}^i \mathbf{h} \cdot \mathbf{g}_j}{\partial \beta} = \frac{\partial (\frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial \beta} = \frac{\partial (\frac{\partial \mathcal{L}^i \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{x}))}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}^{i+1}_{\mathbf{f}_j} \mathbf{h}}{\partial \beta} \quad (18)$$

因此, 矩阵  $\Xi$  的每一行矩阵块, 为系统 (13) 的各阶 Lie Derivative 的生成空间, 即矩阵  $\Xi$  是系统 (13) 的可观矩阵。

证明结论 (ii): 由于  $\mathcal{O} = \Xi \mathbf{B}$ , 则有  $\text{null}(\mathcal{O}) = \text{null}(\mathbf{B}) + \text{null}(\Xi) \cap \text{range}(\mathbf{B})$  [2], 另外, 由于假设条件 (C3) 系统 (13) 是可观的, 即可观矩阵  $\Xi$  为列满秩 (full column rank), 则有  $\text{null}(\mathcal{O}) = \text{null}(\mathbf{B})$ 。至此, 由假设条件 (C1)、(C2) 和 (C3) 得到的结论 (i) 和 (ii) 证毕。

由 **Theorem1** 可知, 为了分析一个系统的不可观方向, 首先需要找到一些基函数 (basis functions) 满足条件 (C1) 和 (C2), 并且需要证明矩阵  $\Xi$  是列满秩 (full column rank), 即满足条件 (C3)。当着三个条件满足后, 则系统 (8) 的不可观方向分析转换成求解矩阵  $\mathbf{B}$  的零空间。由于矩阵  $\mathbf{B}_I$  是有限维的, 因此求解零空间很容易。

## 4 VI-SLAM 系统可观性分析

### 4.1 系统概述

在该系统中，四元数表示旋转采用 JPL 形式。坐标系约定：全局坐标系用  $G$  表示，Camera 坐标系用  $C$  表示，IMU 坐标系用  $I$  表示，地图点用  $f$  表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如  ${}^G\mathbf{p}_I$  表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移）， ${}^G\mathbf{v}_I$  表示 IMU 系在全局坐标系下的速度， ${}^I\mathbf{q}_G$  表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 JPL 形式，旋转均是由  $G$  系到  $I$  系旋转，与 Hamilton 表示方式相反； ${}^G\mathbf{p}_{f_i}$  表示第  $i$  个地图点在  $G$  系下的坐标。

状态变量包含位姿、速度、Bias 和地图点：

$$\mathbf{x} = \left[ {}^I\mathbf{q}_G^T, \mathbf{b}_g^T, {}^G\mathbf{v}_I^T, \mathbf{b}_a^T, {}^G\mathbf{p}_I^T \mid {}^G\mathbf{p}_{f_1}^T, \dots, {}^G\mathbf{p}_{f_N}^T \right]^T = [\mathbf{x}_s^T \mid \mathbf{x}_m^T]^T \quad (19)$$

其中  $\mathbf{x}_s^T$  和  $\mathbf{x}_m^T$  分别表示  $16 \times 1$  维传感器状态和  $3N \times 1$  维地图点状态。

连续系统状态模型：

$${}^I\dot{\mathbf{q}}_G(t) = \frac{1}{2} ({}^I\boldsymbol{\omega}(t)) {}^I\mathbf{q}_G(t) \quad (20)$$

$${}^G\dot{\mathbf{p}}_I(t) = {}^G\mathbf{v}_I(t) \quad (21)$$

$${}^G\dot{\mathbf{v}}_I(t) = {}^G\mathbf{a}_I(t) \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g(t) = \mathbf{n}_{wg}(t) \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{n}_{wa}(t) \quad (24)$$

$${}^G\dot{\mathbf{p}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1, \dots, N \quad (25)$$

其中，

$$\Omega(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

陀螺仪测量  ${}^I\omega_m$  和加速度计测量  ${}^I\mathbf{a}_m$  模型为：

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \quad (28)$$

$${}^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G(t)) ({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \quad (29)$$

其中  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$  表示四元数对应的旋转矩阵。

对于上述连续状态模型，在当前时刻的估计量处线性展开，并求期望，得到状态估计的传递模型：

$${}^I\dot{\hat{\mathbf{q}}}_G(t) = \frac{1}{2} ({}^I\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) {}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t) \quad (30)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_I(t) = {}^G\hat{\mathbf{v}}_I(t) \quad (31)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{v}}}_I(t) = \mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G(t)) {}^I\hat{\mathbf{a}}(t) + {}^G\mathbf{g} \quad (32)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_g(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_a(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (34)$$

$${}^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_{f_i}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1, \dots, N \quad (35)$$

其中  ${}^I\hat{\mathbf{a}}(t) = {}^I\mathbf{a}_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_a(t)$ ,  ${}^I\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = {}^I\omega_m(t) - \hat{\mathbf{b}}_g(t)$

根据误差状态（error state）的定义  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  有：

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[ {}^I\delta\theta_G^T, \tilde{\mathbf{b}}_g^T, {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^T, \tilde{\mathbf{b}}_a^T, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^T | {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_1}^T, \dots, {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{f_N}^T \right]^T = [\tilde{\mathbf{x}}_s^T | \tilde{\mathbf{x}}_m^T]^T \quad (36)$$

则有线性连续误差状态方程，

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{0}_{15 \times 3N} \\ \mathbf{0}_{3N \times 15} & \mathbf{0}_{3N} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{0}_{3N \times 12} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \mathbf{F}_c \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_c \mathbf{n} \quad (37)$$

其中，

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_g^T, \mathbf{n}_{wg}^T, \mathbf{n}_a^T, \mathbf{n}_{wa}^T]^T \quad (38)$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega}]_{\times} & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G)[{}^I\hat{\mathbf{a}}]_{\times} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}^T({}^I\hat{\mathbf{q}}_G) & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(\tau)] = \mathbf{Q}_c \delta(t - \tau) \quad (41)$$

接下来讨论离散形式的系统模型：假设陀螺仪信号  ${}^I\omega_m(t)$  和加速度计信号  ${}^I\mathbf{a}_m(t)$  采样间隔为  $\delta t \triangleq t_{k+1} - t_k$ ，每次采样后，系统估计状态的传递，利用公式（30）-（35）积分得到。估计状态的协方差通过如下公式得到：

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{k+1,k} &= \mathbf{F}_c \Phi_{k+1,k} \\ \text{initial condition : } \Phi_{k,k} &= \mathbf{I}_{15+3N} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_{k|k} \Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_{d,k} \quad (43)$$

其中离散的系统噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}_{d,k}$  通过如下积分计算，

$$\mathbf{Q}_{d,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}_c \mathbf{Q}_c \mathbf{G}_c^T \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \quad (44)$$

下面讨论视觉观测模型：为简化问题分析，假设只有一个地图点  $\mathbf{p}_{f_i}$ ，其对应相机测量  $\mathbf{z}_i$  为地图点  ${}^I\mathbf{p}_{f_i}$  在图像平面上的投影，即有

$$\mathbf{z}_i = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \eta_i \quad (45)$$

其中

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{p}_{f_i} = \mathbf{C}({}^I\mathbf{q}_G)({}^G\mathbf{p}_{f_i} - {}^G\mathbf{p}_I) \quad (46)$$

且  $\eta_i$  为协方差为  $\mathbf{R}_i$  的高斯白噪声。注意：该视觉观察模型假设图像测量为归一化平面，且相机坐标系和 IMU 坐标系重合，在实际中，相机和 IMU 之间存在内外参。

视觉观测的误差模型表示为

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i \simeq \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{x}} + \eta_i \quad (47)$$

其中  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$  是利用当前时刻估计状态  $\hat{\mathbf{x}}$  通过模型（45）-（46）计算得到，且视觉测量雅可比矩阵  $\mathbf{H}_i$  为

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_c [\mathbf{H}_\theta \quad \mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{H}_p \quad | \quad \mathbf{0}_3 \dots \mathbf{H}_{f_i} \dots \mathbf{0}_3] \quad (48)$$



其中

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial {}^I \mathbf{p}_{f_i}} = \frac{1}{p_z^2} \begin{bmatrix} p_z & 0 & -p_x \\ 0 & p_z & -p_y \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\partial {}^I \mathbf{p}_{f_i}}{\partial \theta} = [\mathbf{C}({}^I \mathbf{q}_G)({}^G \mathbf{p}_{f_i} - {}^G \mathbf{p}_I)]_\times \quad (50)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{\partial {}^I \mathbf{p}_{f_i}}{\partial {}^G \mathbf{p}_I} = -\mathbf{C}({}^I \mathbf{q}_G) \quad (51)$$

$$\mathbf{H}_{f_i} = \frac{\partial {}^I \mathbf{p}_{f_i}}{\partial {}^G \mathbf{p}_{f_i}} = \mathbf{C}({}^I \mathbf{q}_G) \quad (52)$$

## 4.2 可观性分析

为简化分析，将  $I$  系旋转用 Cayley-Gibbs-Rodriguez(CGR) 方式表示： ${}^I \mathbf{s}_G$  表示从  $G$  系到  $I$  系的旋转，且有

$${}^I \dot{\mathbf{s}}_G(t) = \mathbf{D}({}^I \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{b}_g(t)) \quad (53)$$

其中  $\mathbf{D} \triangleq \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_3 + [\mathbf{s}]_\times + \mathbf{s}\mathbf{s}^T)$ 。因此，系统状态变量  $\mathbf{x}$  可表示为

$$\mathbf{x} = \left[ {}^I \mathbf{s}_G \quad \mathbf{b}_g^T \quad {}^G \mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad {}^G \mathbf{p}_I^T \quad {}^G \mathbf{p}_f^T \right]^T \quad (54)$$

另外，为简化书写，系统状态变量忽略坐标系标识，

$$\mathbf{x} = [\mathbf{s}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{v}^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{p}^T \quad \mathbf{p}_f^T]^T \quad (55)$$

则有 VI-SLAM 状态模型可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{b}}_g \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{b}}_a \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{g} - \mathbf{C}^T \mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (56)$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (57)$$

其中  $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{s})$ ,  $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^I \mathbf{p}_f = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{p}_f - \mathbf{p})$ , 且令

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{b}_g \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{g} - \mathbf{C}^T \mathbf{b}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (58)$$

接下来分析系统的可观性: 首先根据 **Theorem1** 中的假设条件 (C1) 和 (C2), 找到系统的基函数 (basis functions), 其中直接根据条件 (C1) 得到第一个基函数  $\beta_1 = \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ ,

$$\beta_1 \triangleq \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (59)$$

然后循环计算条件 (C2) 中的  $\frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i$ ，并寻找新的基函数  $\beta$ ，其中基函数有很多种选择，应当选择那些有明确物理意义的量作为基函数。

计算基函数  $\beta_1$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}_g} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{b}_a} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}_f} \frac{\partial \mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} \left[ \left[ \mathbf{p}_f \right]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad -\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \right]\end{aligned}\quad (60)$$

计算  $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ ：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} (-\left[ \mathbf{p}_f \right]_{\times} \mathbf{b}_g - \mathbf{C} \mathbf{v}) \\ &= [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1] \left( -\left[ \begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \mathbf{b}_g - \frac{1}{p_z} \mathbf{C} \mathbf{v} \right)\end{aligned}\quad (61)$$

显然  $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$  没法表示成现有基函数  $\{\beta_1\}$  的函数，因此增加基函数：

$$\beta_2 \triangleq \frac{1}{p_z} \quad (62)$$

$$\beta_3 \triangleq \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (63)$$

$$\beta_4 \triangleq \mathbf{b}_g \quad (64)$$

其中  $\beta_2$  表示地图的逆深度， $\beta_3$  表示  $I$  系下的速度， $\beta_4$  表示陀螺仪 bias，则有，

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 \triangleq [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1] \left( -\left[ \begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3 \right) \quad (65)$$

计算  $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ ：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \end{bmatrix} \left[ \mathbf{p}_f \right]_{\times} \\ &= [\mathbf{I}_2 \quad -\beta_1] \left[ \begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times}\end{aligned}\quad (66)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ ：

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad (67)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数  $\beta_2$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}_g} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{b}_a} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{p}_f} \frac{\partial \mathbf{p}_f}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T \left[ \left[ \mathbf{p}_f \right]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad -\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \right]\end{aligned}\quad (68)$$

其中  $\mathbf{e}_3$  为  $3 \times 3$  单位矩阵第三列： $[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = \mathbf{I}_3$ 。

计算  $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ ：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T (-\left[ \mathbf{p}_f \right]_{\times} \mathbf{b}_g - \mathbf{C} \mathbf{v}) \\ &= -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \left( -\left[ \begin{array}{c} \beta_1 \\ 1 \end{array} \right]_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3 \right)\end{aligned}\quad (69)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 &= -\frac{1}{p_z^2} \mathbf{e}_3^T [\mathbf{I} \mathbf{p}_f]_{\times} \\ &= -\beta_2 \mathbf{e}_3^T \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\times}\end{aligned}\quad (70)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ :

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = 0 \quad (71)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数  $\beta_3$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= [\mathbf{C} \mathbf{v}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3\end{aligned}\quad (72)$$

计算  $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 &= -[\mathbf{C} \mathbf{v}]_{\times} \mathbf{b}_g + \mathbf{C} \mathbf{g} - \mathbf{b}_a \\ &\triangleq -[\beta_3]_{\times} \beta_4 + \beta_5 - \beta_6\end{aligned}\quad (73)$$

其中定义新的基函数:

$$\beta_5 \triangleq \mathbf{C} \mathbf{g} \quad (74)$$

$$\beta_6 \triangleq \mathbf{b}_a \quad (75)$$

其中  $\beta_5$  表示  $I$  系下的重力方向,  $\beta_6$  *bias*。

计算  $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = [\mathbf{C} \mathbf{v}]_{\times} \quad (76)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ :

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{I}_3 \quad (77)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数  $\beta_4$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_4}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3]\end{aligned}\quad (78)$$

计算  $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ :

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (79)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (80)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ :

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (81)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数  $\beta_5$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_5}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3\end{aligned}\quad (82)$$

计算  $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ :

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = -[\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} \mathbf{b}_g = -[\beta_5]_{\times} \beta_4 \quad (83)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = [\mathbf{C} \mathbf{g}]_{\times} = [\beta_5]_{\times} \quad (84)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ :

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (85)$$

无需增加新的基函数。

计算基函数  $\beta_6$  关于  $\mathbf{x}$  的生成空间,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \beta_6}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} \quad \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}_g} \quad \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{v}} \quad \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{b}_a} \quad \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}} \quad \frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{p}_f} \right] \\ &= [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3] \end{aligned} \quad (86)$$

计算  $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0$ :

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (87)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (88)$$

无需增加新的基函数。

计算  $\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2$ :

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (89)$$

无需增加新的基函数。

至此, 总共定义 6 个基函数:

$$\beta_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (90)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{p_z} \quad (91)$$

$$\beta_3 = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (92)$$

$$\beta_4 = \mathbf{b}_g \quad (93)$$

$$\beta_5 = \mathbf{C} \mathbf{g} \quad (94)$$

$$\beta_6 = \mathbf{b}_a \quad (95)$$

根据 **Theorem1** 中条件 (C3), 由基函数构建的非线性系统为:

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \omega + \mathbf{f}_2 \mathbf{a}) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \omega + \mathbf{g}_2 \mathbf{a} \quad (96)$$

即有

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_5 \\ \dot{\beta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1(-[\bar{\beta}_1]_{\times} \beta_4 - \beta_2 \beta_3) \\ \beta_2 \mathbf{e}_3^T([\bar{\beta}_1]_{\times} \beta_4 + \beta_2 \beta_3) \\ -[\beta_3]_{\times} \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -[\beta_5]_{\times} \beta_4 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1[\bar{\beta}_1]_{\times} \\ -\beta_2 \mathbf{e}_3^T[\bar{\beta}_1]_{\times} \\ [\beta_3]_{\times} \\ \mathbf{0}_3 \\ [\beta_5]_{\times} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (97)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \beta_1 \quad (98)$$

其中  $\bar{\beta}_1 = [\beta_1^T \ 1]^T$ ,  $\bar{\beta}_1 = [\mathbf{I}_2 \ -\beta_1]$ 。

下面讨论基于基函数  $\beta$  的系统 (97) 可观性, 即检查是否满足 **Theorem1** 中的条件 (C3): 系统 (97) 的可观矩阵  $\Xi$  是否为列满秩。由可观矩阵的定义可知, 矩阵  $\Xi$  是一个无数行的矩阵, 但是为了证明该矩阵为列满秩, 可以选取它的子矩阵  $\Xi'$  来分析, 如果  $\Xi'$  是列满秩, 则  $\Xi$  也是列满秩。选取 Lie Derivative 集合  $\mathcal{L}$  计算可观子矩阵  $\Xi'$ :

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}^0 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^1 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}, \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^3 \mathbf{h}\} \quad (99)$$

其中  $\mathbf{g}_{ij}$  表示矩阵  $\mathbf{g}_i$  的第  $j$  列, 即  $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{e}_j$  为单位矩阵的第  $j$  列。

计算 Lie Derivative 集合  $\mathcal{L}$  关于基函数  $\beta$  的生成空间, 得到可观矩阵  $\Xi'$ :

$$\Xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^0 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^1 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13} \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{21}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_{13}}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}_0}^3 \mathbf{h}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{X}_{6 \times 3} & \mathbf{\Psi}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{Y}_{6 \times 3} & \mathbf{Z}_{6 \times 6} & \mathbf{\Theta}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (100)$$

其中第二行块矩阵为零, 舍弃掉后得到新观测矩阵:

$$\Xi'' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{X}_{6 \times 3} & \mathbf{\Psi}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{Y}_{6 \times 3} & \mathbf{Z}_{6 \times 6} & \mathbf{\Theta}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (101)$$

为证明矩阵  $\Xi''$  为列满秩, 只需证明矩阵  $\Psi$  和  $\Theta$  为满秩矩阵。

矩阵  $\Psi$  具体为:

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & -\beta_{11}\beta_{12} & \beta_{11}^2 + 1 & -\beta_{12} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & -\beta_{12}^2 - 1 & \beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 4\beta_{11}\beta_{12} & 2\beta_{12}^2 - 2\beta_{11}^2 & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} & 2\beta_{12}^2 - 2\beta_{11}^2 & -4\beta_{11}\beta_{12} & -\beta_{11} \\ 0 & 0 & -\beta_{21}^2 & 2\beta_{12}\beta_{21} & -4\beta_{11}\beta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta_{12}\beta_{21} & -2\beta_{21} \end{bmatrix} \quad (102)$$

其中  $\beta_{ij}$  表示第  $i$  个基函数  $\beta_i$  的第  $j$  个元素。通过检查矩阵  $\Psi$  的行列式,

$$\det(\Psi) = -4\beta_{21}^5(\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 - 1)(2\beta_{11}^2 + 2\beta_{12}^2 + 1) = -4\frac{1}{p_z^5}(\frac{p_x^2}{p_z^2} + \frac{p_y^2}{p_z^2} - 1)(2\frac{p_x^2}{p_z^2} + 2\frac{p_y^2}{p_z^2} + 1) \quad (103)$$

由于  $p_z \neq 0$  且  $2\frac{p_x^2}{p_z^2} + 2\frac{p_y^2}{p_z^2} + 1 \geq 1$ , 因此矩阵  $\Psi$  的行列式唯一可能为零的情况为  $\frac{p_x^2}{p_z^2} + \frac{p_y^2}{p_z^2} - 1 = 0$ , 即: 所有地图点的视觉观测, 位于图像归一化平面的单位圆上。这中情况在实际中是不可能事件, 因为控制输入是随着时间任意变化的。因而矩阵  $\Psi$  一般而言是满秩的。

矩阵  $\Theta$  具体为:

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\beta_{21} & 0 & \beta_{11}\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & \beta_{21} & -\beta_{12}\beta_{21} \\ 0 & -\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{21} & 0 & 0 & -\beta_{12}\beta_{21} \\ \beta_{21} & 0 & -\beta_{11}\beta_{21} & 0 & 0 & \beta_{11}\beta_{21} \\ \Theta_{5,1} & \Theta_{5,2} & \Theta_{5,3} & \Theta_{5,4} & \Theta_{5,5} & \Theta_{5,6} \\ \Theta_{6,1} & \Theta_{6,2} & \Theta_{6,3} & \Theta_{6,4} & \Theta_{6,5} & \Theta_{6,6} \end{bmatrix} \quad (104)$$

其中,

$$\Theta_{5,1} = -2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} \quad (105)$$

$$\Theta_{5,2} = 2\beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}\beta_{41} \quad (106)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{5,3} = & 2\beta_{21}(\beta_{42} - \beta_{21}\beta_{31} - \beta_{12}\beta_{43} + \beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) - 2\beta_{21}\beta_{42} \\ & - \beta_{21}^2(\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) + 2\beta_{11}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \\ & + \beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})\end{aligned}\quad (107)$$

$$\Theta_{5,4} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{42}\quad (108)$$

$$\Theta_{5,5} = -\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) - \beta_{11}\beta_{21}\beta_{41}\quad (109)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{5,6} = & \beta_{21}^2(\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{33}) + \beta_{21}\beta_{42} - 2\beta_{21}(\beta_{42} - \beta_{21}\beta_{31} \\ & - \beta_{12}\beta_{43} + \beta_{11}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) + \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{11}\beta_{41}) - 2\beta_{11}\beta_{21} \\ & (\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{11}\beta_{21}(2\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})\end{aligned}\quad (110)$$

$$\Theta_{6,1} = -2\beta_{21}\beta_{43} - \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) - 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{42}\quad (111)$$

$$\Theta_{6,2} = 2\beta_{12}\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})\quad (112)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{6,3} = & 2\beta_{21}\beta_{41} - \beta_{21}^2(\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{33}) - 2\beta_{21}(\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{32} - \beta_{11}\beta_{43} \\ & - \beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) \\ & + \beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{41}) + 2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) \\ & + \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})\end{aligned}\quad (113)$$

$$\Theta_{6,4} = \beta_{21}\beta_{43} + \beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) + \beta_{12}\beta_{21}\beta_{42}\quad (114)$$

$$\Theta_{6,5} = 2\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) + \beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{41}\quad (115)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{6,6} = & \beta_{21}^2(\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{33}) - \beta_{21}\beta_{41} + 2\beta_{21}(\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{32} - \beta_{11}\beta_{43} \\ & - \beta_{12}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})) - \beta_{11}\beta_{21}(\beta_{43} + \beta_{12}\beta_{42}) \\ & - 2\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - \beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33}) - \beta_{12}\beta_{21}(\beta_{11}\beta_{42} - 2\beta_{12}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{33})\end{aligned}\quad (116)$$

检查矩阵  $\Theta$  的行列式:

$$\begin{aligned}\det(\Theta) = & 3\beta_{21}^T(\beta_{11}\beta_{33}\beta_{41} - \beta_{32}\beta_{42} - \beta_{31}\beta_{41} + \beta_{12}\beta_{33}\beta_{42}) \\ & = 3\beta_{21}^T[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}]\begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (117)$$

其中  $\beta_{21} = \frac{1}{p_z} \neq 0$ ;  $\beta_4 = \mathbf{b}_g \neq 0$ ; 由于  $\beta_1 = \mathbf{h}$ , 以及  $\beta_3 = \mathbf{C}\mathbf{v}$ , 则有

$$[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}]^T = \mathbf{A}\beta_3\quad (118)$$

因为  $\beta_3 \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$  (相机移动), 并且矩阵  $\mathbf{A}$  为列满秩, 则有  $\mathbf{A}\beta_1 \neq 0$ . 最后检查

$$\begin{aligned}[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}]\begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow [\beta_{41}, \beta_{42}]\mathbf{A}\beta_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}\beta_3 = \lambda \begin{bmatrix} \beta_{42} \\ -\beta_{41} \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (119)$$

从上式可看出, 对于给定的  $\beta_{41}$  和  $\beta_{42}$ , 由于  $\beta_1$  是时变的, 因此矩阵  $\mathbf{A}$  将  $\beta_3 = \mathbf{C}\mathbf{v}$  限定在特定的流形上, 这在实际的任意控制输入系统中, 是不存在的. 因此有

$$[\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}, \beta_{12}\beta_{33} - \beta_{32}]\begin{bmatrix} \beta_{41} \\ \beta_{42} \end{bmatrix} \neq 0\quad (120)$$

因而矩阵  $\Theta$  一般而言是满秩的.

至此, 矩阵  $\Psi$  和  $\Theta$  均为满秩, 对于可观矩阵  $\Xi''$ , 利用左上角的单位矩阵, 高斯消元消去矩阵  $\mathbf{X}_{6 \times 3}$  和  $\mathbf{Y}_{6 \times 3}$ ; 利用中间的  $\Psi$  消去矩阵  $\mathbf{Z}_{6 \times 6}$ , 即可得到新的可观矩阵,

$$\Xi''' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \Psi_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \end{bmatrix}\quad (121)$$

由于矩阵  $\Psi$  和  $\Theta$  均为满秩，非主对角线元素均为零，所以有矩阵  $\Xi'''$  为满秩，进而可知可观矩阵  $\Xi$  为列满秩。

下面讨论  $\mathcal{O} = \Xi \mathbf{B}$  中的  $\mathbf{B}$  矩阵，通过分析矩阵  $\mathbf{B}$  的零空间，得到系统不可观的情况。通过堆叠基函数  $\beta$  对状态变量  $\mathbf{x}$  的偏导，得到，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{I} \mathbf{p}_f] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ [\mathbf{C} \mathbf{v}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ [\mathbf{C} \mathbf{g}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \quad (122)$$

其中，

$$\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_z} & 0 & -\frac{p_x}{p_z^2} \\ 0 & \frac{1}{p_z} & -\frac{p_y}{p_z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{p_z^2} \end{bmatrix} \quad (123)$$

显然矩阵  $\mathbf{B}_1$  满秩，则只需分析  $15 \times 18$  矩阵  $\mathbf{B}_2$  的零空间。直观得到并验证，下列矩阵为  $\mathbf{B}_2$  的右零空间 (right null space)，

$$\mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \mathbf{C} \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -[\mathbf{v}] \times \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{I}_3 & -[\mathbf{p}] \times \mathbf{g} \\ \mathbf{I}_3 & -[\mathbf{p}_f] \times \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (124)$$

接下来证明矩阵  $\mathbf{B}_2$  无其它右零空间向量：通过证明矩阵  $\mathbf{B}_2$  的左零空间 (left null space) 只有 1 维，即有  $15 \times 18$  矩阵  $\mathbf{B}_2$  的秩为 14，进而矩阵  $\mathbf{B}_2$  的右零空间有  $18 - 14 = 4$  维。假设左零空间为  $\mathbf{N}_L = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5]$ ，则有

$$\mathbf{0} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5] \begin{bmatrix} [\mathbf{I} \mathbf{p}_f] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ [\mathbf{C} \mathbf{v}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ [\mathbf{C} \mathbf{g}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (125)$$

由矩阵  $\mathbf{B}_2$  的第 2 列和第 4 列可知， $\mathbf{N}_3 \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{N}_5 \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$ ，则有  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{N}_5 = \mathbf{0}$ ；由矩阵  $\mathbf{B}_2$  的第 3 列和第 5、6 列可知， $\mathbf{N}_1 \mathbf{C} = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{N}_2 \mathbf{C} = \mathbf{0}$ ，由于旋转矩阵  $\mathbf{C}$  为满秩，则有  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{N}_2 = \mathbf{0}$ ；因此，只有向量  $\mathbf{N}_4$  为左零空间的非零项，由矩阵  $\mathbf{B}_2$  的第 1 列可知，

$$\mathbf{N}_4 [\mathbf{C} \mathbf{g}] \times \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (126)$$

由于矩阵  $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}}$  为满秩，则有

$$\mathbf{N}_4 = \pm (\mathbf{C} \mathbf{g})^T \quad (127)$$

因此矩阵  $\mathbf{B}_2$  有左零空间，

$$\mathbf{N}_L = [\mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, (\mathbf{C} \mathbf{g})^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}] \quad (128)$$

且其只有 1 维。至此，可知矩阵  $\mathbf{B}_2$  有且仅有右零空间  $\mathbf{N}_R$ 。

接下来讨论右零空间  $\mathbf{N}_R$  每一维对应的物理意义，即有哪些量是不可观的。令  $\mathbf{N}_R = \text{span} [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4]$ ，利用  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$  对状态变量  $\mathbf{x} = [\mathbf{I} \mathbf{s}_G \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{G} \mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{G} \mathbf{p}_I^T \quad \mathbf{G} \mathbf{p}_f^T]^T$  进行微小扰动，通过观察  $\mathbf{x}$  中哪些量会变化，则对应的量即为不可观的。

首先利用  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  对  $\mathbf{x}$  施加扰动，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 \quad (129)$$

$$\delta \mathbf{x} = c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 \quad (130)$$

对应于  ${}^G\mathbf{p}_I^T$  和  ${}^G\mathbf{p}_f^T$  变化, 即  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  表示全局坐标  $G$  系下三维平移变化, 因此相对于全局坐标  $G$  系的三维平移是不可观的。

观察  $\mathbf{N}_R$  的第 4 列  $\mathbf{n}_4$ , 其中与重力  $\mathbf{g}$  有关, 考虑利用  $\mathbf{n}_4$  对状态量  $\mathbf{x}$  施加沿重力方向的旋转扰动  $\mathbf{C}({}^{G'}\mathbf{q}_G) \triangleq {}^{G'}\mathbf{R}_G$ , 且有近似,

$${}^{G'}\mathbf{R}_G \simeq \mathbf{I}_3 - c[{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \quad (131)$$

其中  ${}^G\bar{\mathbf{g}}$  为沿着重力方向的单位向量。

对于旋转扰动,

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{R}_{G'} &\simeq (\mathbf{I}_3 - [{}^I\delta\theta]_{\times}) {}^I\mathbf{R}_G \\ &= (\mathbf{I}_3 - [{}^I\delta\theta]_{\times}) {}^I\mathbf{R}_{G'} (\mathbf{I}_3 - c[{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times}) \\ &= {}^I\mathbf{R}_{G'} - [{}^I\delta\theta]_{\times} {}^I\mathbf{R}_{G'} - c {}^I\mathbf{R}_{G'} [{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} + c [{}^I\delta\theta]_{\times} {}^I\mathbf{R}_{G'} [{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ &\simeq {}^I\mathbf{R}_{G'} - [{}^I\delta\theta]_{\times} {}^I\mathbf{R}_{G'} - c {}^I\mathbf{R}_{G'} [{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow [{}^I\delta\theta]_{\times} {}^I\mathbf{R}_{G'} &= -c {}^I\mathbf{R}_{G'} [{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow [{}^I\delta\theta]_{\times} &= -c {}^I\mathbf{R}_{G'} [{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} {}^I\mathbf{R}_{G'}^T \\ &= [-c {}^I\mathbf{R}_{G'} {}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \\ \Leftrightarrow {}^I\delta\theta &= -c {}^I\mathbf{R}_{G'} {}^G\bar{\mathbf{g}} \\ &= -c {}^I\mathbf{R}_G {}^G\mathbf{R}_{G'} {}^G\bar{\mathbf{g}} \\ &= -c {}^I\mathbf{R}_G {}^G\bar{\mathbf{g}} \\ &= -\frac{c}{\|{}^G\mathbf{g}\|_2} {}^I\mathbf{R}_G {}^G\mathbf{g} \end{aligned} \quad (132)$$

其中因为  ${}^G\mathbf{R}_{G'}$  是绕着重力方向的旋转, 因此有  ${}^G\mathbf{R}_{G'} {}^G\bar{\mathbf{g}} = {}^G\bar{\mathbf{g}}$  另外有,

$$\delta\mathbf{s} = \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\delta\theta = -\frac{c}{\|{}^G\mathbf{g}\|_2} \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta} {}^I\mathbf{R}_G {}^G\mathbf{g} \quad (133)$$

对于旋转之外的其他状态变量,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= {}^{G'}\mathbf{R}_G \mathbf{x} \simeq (\mathbf{I}_3 - c[{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times}) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_g \\ {}^G\mathbf{v}_I \\ \mathbf{b}_a \\ {}^G\mathbf{p}_I \\ {}^G\mathbf{p}_f \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x} - c[{}^G\bar{\mathbf{g}}]_{\times} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_g \\ {}^G\mathbf{v}_I \\ \mathbf{b}_a \\ {}^G\mathbf{p}_I \\ {}^G\mathbf{p}_f \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \frac{c}{\|{}^G\mathbf{g}\|_2} \begin{bmatrix} -[\mathbf{b}_g]_{\times}\mathbf{g} \\ -[{}^G\mathbf{v}_I]_{\times}\mathbf{g} \\ -[\mathbf{b}_a]_{\times}\mathbf{g} \\ -[{}^G\mathbf{p}_I]_{\times}\mathbf{g} \\ -[{}^G\mathbf{p}_f]_{\times}\mathbf{g} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (134)$$

由矩阵  $\mathbf{N}_R$  第 2 行块矩阵和第 4 行块矩阵为零, 可知 IMU 的 bias 是可观的。因此对状态量施加绕重力方向的旋转扰动, 状态量变化微量为

$$\delta\mathbf{x} = -\frac{c}{\|{}^G\mathbf{g}\|_2} \mathbf{n}_4 \quad (135)$$

对应于除了 IMU bias 之外的所有状态量变化, 即  $\mathbf{n}_4$  表示绕重力方向的旋转变化, 因此绕重力方向的旋转 (yaw 角) 是不可观的。

至此, VI-SLAM 系统的可观性分析完毕: 全局三维平移和绕重力方向旋转 yaw 角不可观。



## 5 Robocentric VIO 可观性和一致性分析

在 Robocentric VIO 中 [4], 估计状态表示为

$${}^{R_k}\mathbf{x}_\tau = \begin{bmatrix} {}^{R_k}\mathbf{x}_G^T & {}^{R_k}\mathbf{x}_{I_\tau}^T \end{bmatrix}^T \quad (136)$$

$${}^{R_k}\mathbf{x}_G = \begin{bmatrix} {}^{R_k}\mathbf{q}_G^T & {}^{R_k}\mathbf{p}_G^T & {}^{R_k}\mathbf{g}_G^T \end{bmatrix}^T \quad (137)$$

$${}^{R_k}\mathbf{x}_{I_\tau}^T = \begin{bmatrix} {}^{I_\tau}\mathbf{q}_{R_k}^T & {}^{R_k}\mathbf{p}_{I_\tau}^T & {}^{R_k}\mathbf{v}_{I_\tau}^T & \mathbf{b}_{g_\tau}^T & \mathbf{b}_{a_\tau}^T \end{bmatrix}^T \quad (138)$$

$$(139)$$

其中  $G$  表示固定全局坐标系;  $R_k$  表示在相机的  $t_k$  时刻时, IMU 的坐标系, 同时也是  $t_k$  时刻 robocentric 参考系;  $I_\tau$  表示  $t_\tau$  时刻 IMU 的坐标系, 且  $t_\tau \in [t_k, t_{k+1}]$

对于线性化的估计器 (例如 EKF), 分析系统的可观性, 可利用可观矩阵,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_l \Phi_{l,k} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k+m} \Phi_{k+m,k} \end{bmatrix} \quad (140)$$

其中  $\mathbf{H}_k$  为测量雅可比矩阵,  $\Phi_{l,k} = \Phi_{l,l-1} \dots \Phi_{k+1,k}$  为  $k$  到  $l$  的误差状态转移矩阵。

为简化分析, 考虑只有一个地图点的状态  $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} {}^{R_k}\mathbf{x}_k^T & {}^{R_k}\mathbf{p}_L^T \end{bmatrix}^T$  在 propagation 和 update 阶段, 可观矩阵  $\mathbf{M}$  的每一行  $l$  块矩阵有如下形式,

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{H}_l \Phi_{l,k} = \Pi [\mathbf{0}_3, \mathbf{0}_3, \Gamma_1, \Gamma_2, -\mathbf{I}_3, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5 \mid \mathbf{I}_3] \quad (141)$$

其中  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  线性独立, 则可观矩阵  $\mathbf{M}$  有如下零空间,

$$\text{null}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (142)$$

在 composition 阶段, 可观矩阵每一行块矩阵  $\mathbf{M}_l$  有如下形式,

$$\mathbf{M}_l = \check{\mathbf{H}}_l \check{\Phi}_{l,k} = \Pi [\mathbf{0}_3, \mathbf{0}_3, \check{\Gamma}_{93:94}, -\mathbf{C}({}^l\mathbf{q}_k) \mid \check{\Gamma}_{96:98} \mid \mathbf{C}({}^l\mathbf{q}_k)] \quad (143)$$

其中  $\check{\Gamma}_{93}, \check{\Gamma}_{94}, \check{\Gamma}_{96}, \check{\Gamma}_{97}, \check{\Gamma}_{98}$  线性独立, 则可观矩阵  $\mathbf{M}$  有如下零空间,

$$\text{null}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (144)$$

因此，在 Robocentric VIO 中的各个阶段，可观矩阵的零空间不变，能够保证系统的“一致性”，因此具有较高估计精度。

## References

- [1] <https://www.zhihu.com/question/22983179>
- [2] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.
- [3] Hesck J A, Kottas D G, Bowman S L, et al. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 33(1): 182-201.
- [4] Huai Z, Huang G. Robocentric visual-inertial odometry[C]//2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2018: 6319-6326.