

VI-SLAM 系统初始化闭式可解性分析

张谦

2020 年 3 月 14 日

目录

1	系统模型	2
1.1	几何关系	2
1.2	基本原理	5
2	可解性分析: Unbiased Case	5
2.1	Planar Case	6
2.2	Linear Case	6
2.3	图像帧数小于等于 2	7
2.4	图像帧数等于 3	7
2.5	图像帧数大于等于 4	8
2.6	Constant Acceleration	8
3	可解性分析: Biased Case	8
3.1	图像帧数小于等于 3	8
3.2	图像帧数等于 4	8
3.3	图像帧数大于等于 5	8
4	Gyroscope Bias 估计	8
5	Modified MK 闭式解	8

1 系统模型

由 VI-SLAM 系统可观性分析可知，在给定视觉和 IMU 观测后，body 系的全局平移和重力方向旋转 yaw 角不可观，body 系的速度、重力和绝对尺度是可观的。分析 VI-SLAM 系统初始化时的闭式可解性，亦即分析在一段时间内，在不同条件下可观变量的可解性：（1）运动轨迹和状态；（2）地图点数量和观测图像上的分布；（3）相机图像帧数。

1.1 几何关系

为简化分析，不考虑相机和 IMU 之间的外参，即假设相机和 IMU 位姿重合。在该系统中，四元数表示旋转采用 Hamilton 形式。坐标系约定：全局坐标系用 G 表示，Camera 坐标系用 C 表示，IMU 坐标系用 I 表示，地图点用 f 表示；相机、IMU 和地图点表示在某个坐标系下，则该坐标系符号写在对应变量符号的左上角，变量标识写在变量符号的右下角，例如 ${}^G\mathbf{p}_I$ 表示 IMU 系（body 系）原点在全局坐标系中的位置（平移）， ${}^G\mathbf{v}_I$ 表示 IMU 系在全局坐标系下的速度， ${}^G\mathbf{q}_I$ 表示从全局坐标系旋转到 IMU 系的单位四元数，由于采用 Hamilton 形式，旋转均是由 I 系到 G 系旋转，与 JPL 表示方式相反； ${}^G\mathbf{p}_{f_i}$ 表示第 i 个地图点在 G 系下的坐标。

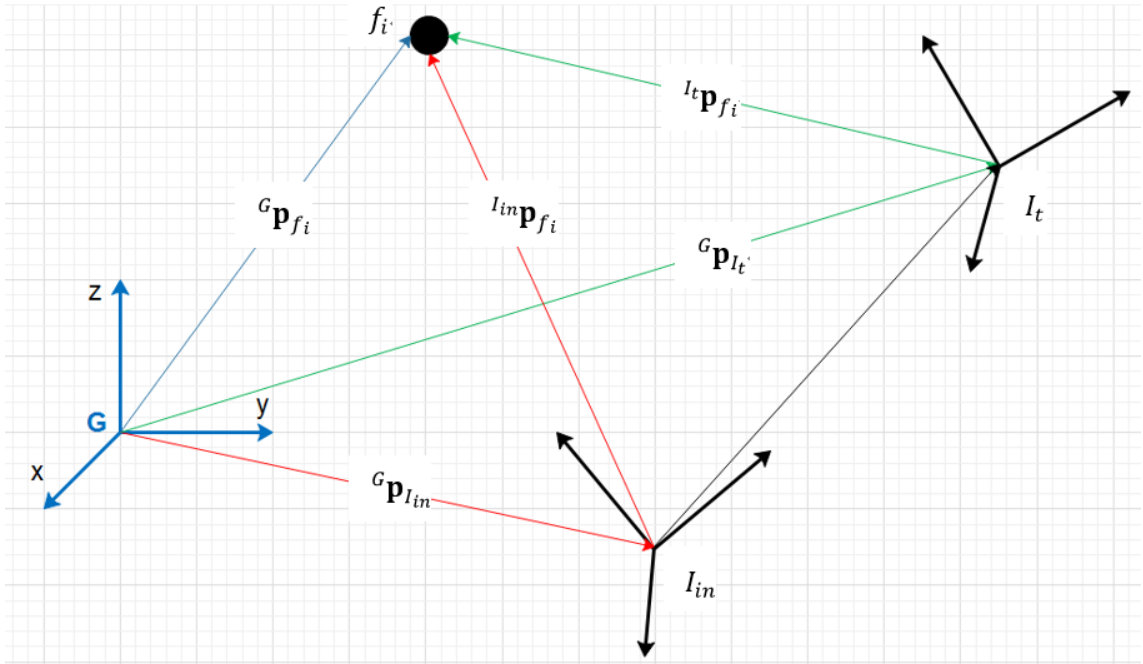


图 1: 几何关系

陀螺仪测量 ${}^I\omega_m$ 和加速度计测量 ${}^I\mathbf{a}_m$ 模型为：

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{n}_g(t) \quad (1)$$

$${}^I\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^G\mathbf{a}_I(t) - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{n}_a(t) \quad (2)$$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 表示四元数对应的旋转矩阵。在分析可解性时，若不考虑噪声影响，则有，

$${}^I\omega_m(t) = {}^I\omega(t) + \mathbf{b}_g(t) \quad (3)$$

$${}^G\mathbf{a}_I(t) = \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t))({}^I\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{b}_a(t)) + {}^G\mathbf{g} \quad (4)$$

现分析时间段 $[t_{in}, t_{fin}]$ 内的可解性, 如图1所示, 从 t_{in} 到 $t \in [t_{in}, t_{fin}]$ 时刻的平移几何关系可表示为,

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \int_{t_{in}}^t {}^G\mathbf{a}_I(\tau) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \int_{t_{in}}^t (\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) + {}^G\mathbf{g}) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))({}^I\mathbf{a}_m(\tau) - \mathbf{b}_a(\tau)) d\tau^2 \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 - \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau))\mathbf{b}_a(\tau) d\tau^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

假设在积分区间内, 加速度计 bias 为常量, 则有,

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t) &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))(\int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 - \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \mathbf{B}) \\
&= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) = \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) {}^I\mathbf{a}_m(\tau) d\tau^2 \tag{7}$$

$${}^{I_{in}}\Gamma_I(t) = \int_{t_{in}}^t \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(\tau)) d\tau^2 \tag{8}$$

且 ${}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t)$ 和 ${}^{I_{in}}\Gamma_I(t)$ 可由加速度计和陀螺仪提供的测量积分得到。

现假设有 N 个地图点被同时观测到, ${}^G\mathbf{p}_{f_i}, i = 1, \dots, N$, 表示在第 t 时刻的相机坐标系下为 ${}^I_t\mathbf{p}_{f_i}$, 则有,

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \tag{9}$$

若上式中 $t = t_{in}$, 则有,

$${}^G\mathbf{p}_{f_i} = {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \tag{10}$$

将 (6) 和 (10) 带入 (9), 得到,

$$\begin{aligned}
{}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{p}_I(t_{in}) + {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= {}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}) \\
&\quad + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))\mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i}
\end{aligned} \tag{11}$$

两边同时乘以 $\mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))$, 得到,

$$\begin{aligned}
{}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} &= \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^G\mathbf{v}_I(t_{in})\Delta t + \frac{1}{2} {}^G\mathbf{g} \Delta t^2 + \mathbf{C}({}^G\mathbf{q}_I(t_{in}))({}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) - {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B})) + \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t)) {}^I_t\mathbf{p}_{f_i} &= {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} - {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \Delta t - \frac{1}{2} {}^{I_{in}}\mathbf{g} \Delta t^2 - {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t) + {}^{I_{in}}\Gamma_I(t) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$${}^{I_{in}}\mathbf{v}_I = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^G\mathbf{v}_I(t_{in}) \tag{13}$$

$${}^{I_{in}}\mathbf{g} = \mathbf{C}^T({}^G\mathbf{q}_I(t_{in})) {}^G\mathbf{g} \tag{14}$$

假设在时间段 t_{in}, t_{fin} 内, 共有 M 帧图像: $t_1 = t_{in} < t_2 < \dots < t_M = t_{fin}$, 且 N 个地图点均被这 M 帧图像观测到。为简化书写, 利用如下简写:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_j^i &\triangleq \mathbf{C}({}^{I_{in}}\mathbf{q}_I(t_j)) {}^I_{t_j}\mathbf{p}_{f_i} \\
\mathbf{P}^i &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{p}_{f_i} \\
\mathbf{V} &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{v}_I \\
\mathbf{G} &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{g} \\
\Gamma_j &\triangleq {}^{I_{in}}\Gamma_I(t_j) \\
\mathbf{S}_j &\triangleq {}^{I_{in}}\mathbf{S}_I(t_j)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, M$ 。另外, 用 μ_j^i 表示 \mathbf{P}_j^i 的单位向量, 则有 $\mathbf{P}_j^i = \lambda_j^i \mu_j^i$ 。不失一般性, 可令 $t_{in} = 0$, 则有 $\Delta t = t$ 。几何关系式 (12) 在每个图像帧时刻 t_j , 可表示为

$$\mathbf{P}^i - \mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} - \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{S}_j \quad (16)$$

另外当 $j = 1$ 时, $t_j = t_1 = t_{in} = 0$, 则有 $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}_1^i = \lambda_1^i \mu_1^i$ 。几何关系 (16) 可进一步表示为,

$$-\mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} + \lambda_1^i \mu_1^i - \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{S}_j \quad (17)$$

对于第 t_1 帧和第 t_j 帧, 第 1 个地图点和第 i 个地图点, 有如下几何关系:

$$\lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 = \lambda_1^i \mu_1^i - \lambda_j^i \mu_j^i \quad (18)$$

综合几何关系 (17) 和 (18), 可最终得到如下关系式子,

$$\begin{cases} -\mathbf{V}t_j - \frac{1}{2}\mathbf{G}t_j^2 + \Gamma_j\mathbf{B} + \lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 = \mathbf{S}_j \\ \lambda_1^1 \mu_1^1 - \lambda_j^1 \mu_j^1 - \lambda_1^i \mu_1^i + \lambda_j^i \mu_j^i = \mathbf{0}_3 \end{cases} \quad (19)$$

其中 $j = 2, 3, \dots, M$; $i = 2, 3, \dots, N$ 。分析 VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性, 亦即分析在几何关系 (19) 下, 变量 $\mathbf{P}_j^i, \mathbf{V}, \mathbf{G}, \mathbf{B}$ 的可解性。其中 (19) 可提供 $3 * (M - 1) * N$ 个方程, 未知变量有 $M * N + 6$ 维 (不考虑 bias) 或 $M * N + 9$ 维 (只考虑加速度计 bias)。

定义如下变量和矩阵: 考虑加速度计 bias 未知变量,

$$\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{G}^T, \mathbf{V}^T, \mathbf{B}^T, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^N, \dots, \lambda_M^1, \dots, \lambda_M^N]^T \quad (20)$$

不考虑 bias 未知变量,

$$\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{G}^T, \mathbf{V}^T, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^N, \dots, \lambda_M^1, \dots, \lambda_M^N]^T \quad (21)$$

IMU 测量相关积分变量,

$$\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{S}_2^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{S}_3^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \mathbf{S}_M^T, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \dots, \mathbf{0}_{1 \times 3}]^T \quad (22)$$

几何关系矩阵,

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{K}_2 & \Gamma_2 & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_2^1 & \mu_2^2 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & -\mu_1^N & -\mu_2^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mu_2^N & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_M & \mathbf{K}_M & \Gamma_M & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & -\mu_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \mu_M^2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & -\mu_1^N & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mu_M^1 & \dots & \mu_M^N \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{T}_j \triangleq -\frac{t_j^2}{2}\mathbf{I}_3$ 和 $\mathbf{K}_j \triangleq -t_j\mathbf{I}_3$ 。

根据以上定义, 对于 M 帧图像和 N 个地图点的几何关系式 (19) 可表示为

$$\Xi \mathbf{X} = \mathbf{S} \quad (24)$$

假设重力的大小已知, 即 $|\mathbf{G}| = g$, 则对方程组 (24) 添加如下约束,

$$|\Pi \mathbf{X}|^2 = g^2 \quad (25)$$

其中 $\Pi \triangleq [\mathbf{I}_3, \mathbf{0}_3, \dots, \mathbf{0}_3]$ 。

至此, VI-SLAM 系统初始化的闭式可解性分析, 将基于方程组 (24) 和 (25)。通过分析矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$, 可得到变量 \mathbf{X} 的可解情况。

1.2 基本原理

关于 VI-SLAM 系统解的个数，有如下结论：

Theorem1: (a) 当矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$ 为空时，有且仅有 1 个解；(b) 当零空间 $\dim(\mathcal{N}(\Xi)) = 1$ ，且对于任意 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi)$ ， $|\Pi\mathbf{n}| \neq 0$ 时，有 2 个解；(c) 其他情况，有无数解。

证明如下：(i) 对于结论 (a)，显然地利用高斯消元法解方程组，可得到唯一解；(ii) 当 $\dim(\mathcal{N}(\Xi)) = 1$ 时，线性方程组 (24) 有解： $\mathbf{X}(\gamma) = \Xi^{-1}\mathbf{S} + \gamma\mathbf{n}$ (左右乘以 Ξ 可验证)，其中 Ξ^{-1} 为 Ξ 的伪逆， \mathbf{n} 为零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$ 的列向量， $\gamma \in \mathbb{R}$ 为一个未知标量。 γ 可由式子 (25) 解得：当 $|\Pi\mathbf{n}| \neq 0$ 时， $|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2 = g^2$ 是关于 γ 的二次多项式，因此有两个解 γ_1 和 γ_2 ，对应有两个解 \mathbf{X} ， $\mathbf{X}_1 \triangleq \mathbf{X}(\gamma_1)$ 和 $\mathbf{X}_2 \triangleq \mathbf{X}(\gamma_2)$ ；当 $|\Pi\mathbf{n}| = 0$ 时， $|\Pi\mathbf{X}(\gamma)|^2 = g^2$ 与 γ 不相关，因此有无数解。

结合 **Theorem1** 可通过分析矩阵 Ξ 的零空间 $\mathcal{N}(\Xi)$ ，得到 VI-SLAM 系统的可解的情况。由于矩阵的每一列乘以一个非零的标量常数，不改变矩阵零空间，为便于分析，将矩阵 Ξ 做如下变形，亦即每一列乘以对应的 λ_j^i 还原为 $\mathbf{P}_j^i = \lambda_j^i \mu_j^i$ ，得到

$$\Xi' \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2 & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \dots & \mathbf{0}_{3N \times N} \\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \mathcal{P}_3 & \dots & \mathbf{0}_{3N \times N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{M}_M & \mathcal{P}_1 & \mathbf{0}_{3N \times N} & \mathbf{0}_{3N \times N} & \dots & \mathcal{P}_M \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中

$$\mathcal{M}_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{T}_j & \mathbf{K}_j & \Gamma_j \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathcal{P}_j \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{P}_j^2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{P}_j^3 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_j^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{P}_j^N \end{bmatrix} \quad (28)$$

由式子 (18) 可知 $\mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i, i = 1, 2, \dots, N$ 独立于 i ，因此令 $\mathcal{X}_j \triangleq \mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i$ 表征 IMU 系的运动状态。为保证矩阵 Ξ' 的每一列不为零，做如下假设：

Assumption1: 对于任意 $i = 1, 2, \dots, N, j = 2, \dots, M$ ，有 $\mathbf{P}_j^i \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 。

接下来，基于上述结论，通过分析矩阵 Ξ' 的零空间，进而分析考虑 bias 和不考虑 bias 时，VI-SLAM 系统的可解性。

2 可解性分析：Unbiased Case

假设向量 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ ，

$$\mathbf{n} \triangleq [\alpha^T, \nu^T, n_1^1, \dots, n_1^N, n_2^1, \dots, n_2^N, \dots, n_M^1, \dots, n_M^N]^T \quad (29)$$

且有

$$\Xi' \mathbf{n} = \mathbf{0}_{3(M-1) \times N \times 1} \quad (30)$$

将上式展开得到

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j \nu + (n_1^1 + n_j^1) \mathbf{P}_1^1 + n_j^1 \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (31)$$

$$(n_1^1 + n_j^1) \mathbf{P}_1^1 + (n_1^i + n_j^i) \mathbf{P}_1^i + (n_j^1 + n_j^i) \mathcal{X}_j = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (32)$$

上面两个式子可通过如下方式验证成立：由式子 (32) 可知，

$$\begin{aligned}
(n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j &= -(n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathcal{X}_j \\
&= -(n_1^i + n_j^i)\mathbf{P}_1^i - n_j^i(\mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i) \\
&= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i + n_j^i\mathbf{P}_1^i \\
&= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i
\end{aligned} \tag{33}$$

由于 $\mathcal{X}_j = \mathbf{P}_j^i - \mathbf{P}_1^i = \mathbf{P}_j^1 - \mathbf{P}_1^1$ ，因此左式可写为，

$$\begin{aligned}
(n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathcal{X}_j &= (n_1^1 + n_j^1)\mathbf{P}_1^1 + n_j^1(\mathbf{P}_j^1 - \mathbf{P}_1^1) \\
&= n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1
\end{aligned} \tag{34}$$

即有，

$$\begin{aligned}
n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1 &= -n_1^i\mathbf{P}_1^i - n_j^i\mathbf{P}_j^i \\
\Leftrightarrow n_1^1\mathbf{P}_1^1 + n_j^1\mathbf{P}_j^1 + n_1^i\mathbf{P}_1^i + n_j^i\mathbf{P}_j^i &= 0
\end{aligned} \tag{35}$$

下面首先分析 2D 下共面和共线特殊情况，然后再分析 3D 下各种图像帧数和地图点数量的可解情况。

2.1 Planar Case

假设所有地图点和相机运动轨迹处在同一平面上，亦即 $\mathbf{P}_j^i, i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, M$ 在同一平面上。则矩阵 Ξ' 中所有 \mathbf{P}_j^i 的某一维可以高斯消元为零：假设所有地图点和相机运动轨迹所在的同一平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ 则 x, y, z 的其中之一可由另外两个变量线性表示。现假设在共面情况下，所有 \mathbf{P}_j^i 的第三维为零。注意变量 α 和 ν 的第三维不为零，因为公共平面可能为三维空间中的斜平面。为方便分析，将系统 (30) 分为两部分：第一部分为 (31) 和 (32) 的第一行和第二行组成的矩阵 Ξ_1^{plane} ，其维度为 $2(M-1)N \times (MN+4)$ ；第二部分为 (31) 的第三行组成的矩阵 Ξ_2^{plane} ，其只包含 α 和 ν 的第三维，维度为 $(M-1) \times 2$ 。

根据 **Theorem1**,

- (1) 当 $M \leq 2$ 时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \geq 4$ ；保证系统具有有限个解的先决条件为 $M \geq 3$ 。
- (2) 当 $M \geq 3$ 时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_2^{plane})) = 0$ ；
- (3) 当 $M = 3$ 时，矩阵 Ξ_1^{plane} 的维度为 $4N \times (3N+4)$ ；因此为了使 $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \leq 1$ ，至少需要保证 $N \geq 3$ ；
- (4) 当 $M = 4$ 时，矩阵 Ξ_1^{plane} 的维度为 $6N \times (4N+4)$ ；因此为了使 $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{plane})) \leq 1$ ，至少需要保证 $N \geq 2$ ；
- (5) 当 $M \geq 5$ 时， N 无要求。

2.2 Linear Case

假设所有地图点和相机运动轨迹共线，亦即 $\mathbf{P}_j^i, i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, M$ 在同一条线上。则矩阵 Ξ' 中所有 \mathbf{P}_j^i 的某两维可以高斯消元为零：根据空间直线方程， \mathbf{P}_j^i 任意一维可线性表示另外两维。现假设在共线情况下，所有 \mathbf{P}_j^i 的第二、三维为零。同样的，为方便分析，将系统 (30) 分为两部分：第一部分为 (31) 和 (32) 的第一行组成的矩阵 Ξ_1^{line} ，其维度为 $(M-1)N \times (MN+2)$ ；第二部分为 (31) 的第二、三行组成的矩阵 Ξ_2^{line} ，其只包含 α 和 ν 的第二、三维，维度为 $2(M-1) \times 4$ 。显然地， $\dim(\mathcal{N}(\Xi_1^{line})) > 2$ ，根据 **Theorem1**，系统在任何条件下，均有无数解。

接下来，讨论一般 3D 情况下的系统可解性。首先给出性质：

Property1: (a) 当 $M \leq 2$ 时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$ ；(b) 当 $M = 3$ 时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ ；(c) 当 $M \geq 4$ ，且相机匀加速运动时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

证明如下：首先定义一个子系统，

$$-\frac{1}{2}\alpha t_j^2 - t_j\nu = -\mathcal{X}_j, j = 2, \dots, M \tag{36}$$

且由其构成的方程组矩阵为 Ξ'' ，维度为 $3(M-1) \times 6$ 。显然的， $\dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \leq \dim(\mathcal{N}(\Xi'))$ 。假如变量 $[\mathbf{n}_\alpha^T, \mathbf{n}_\nu^T]^T \in \mathcal{N}(\Xi'')$ ，则由 $\alpha = \mathbf{n}_\alpha, \nu = \mathbf{n}_\nu, n_j^i = 0, \forall i, j$ 组成的向量 $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\Xi')$ 。

- (1) 当 $M \leq 2$ 时， $\dim(\mathcal{N}(\Xi'')) \geq 3$ ；

(2) 当 $M = 3$ 时, 矩阵 Ξ'' 的维度为 6×6 , 方程组 (36) 有唯一解 (α_0, ν_0) ; 对应的, 矩阵 Ξ' 由如下零空间,

$$\mathbf{n}_0 \triangleq [\alpha_0, \nu_0, \bar{n}_1^1, \dots, \bar{n}_1^i, \dots, \bar{n}_j^1, \dots, \bar{n}_j^i, \dots]^T \quad (37)$$

其中 $\bar{n}_1^1 = -1, \bar{n}_j^1 = 1, \bar{n}_1^i = 1, \bar{n}_j^i = -1; j = 2, 3; i = 2, 3, \dots, N$ 。即当 $M = 3$ 时, $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$, 则 $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$

(3) 当 $M \geq 4$ 时, 系统 (36) 有解条件为: 当且仅当 $\mathcal{X}_j = \nu_0 t_j + \frac{1}{2} \alpha_0 t_j^2$, 亦即对每个 j , 均有 $\alpha = \alpha_0, \nu = \nu_0$ 。此时矩阵 Ξ'' 有零空间 $[\alpha_0^T, \nu_0^T]^T$, 进而矩阵 Ξ' 有零空间 \mathbf{n}_0 , 即 $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}(\Xi')$, 对应相机以初速度 ν_0 做加速度为 α_0 的匀加速运动。

根据 **Theorem1**, 为分析系统的有限解情况, 需要分析 \mathbf{n}_0 是否为矩阵 Ξ' 的唯一零空间向量。接下来分不同情况考虑分析。

2.3 图像帧数小于等于 2

根据 **Property1**, $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$; 由 **Theorem1** 可知, 系统有无限个解。

2.4 图像帧数等于 3

根据 **Property1**, $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

(1) 当 $N = 1$ 时, 矩阵 Ξ' 的维度为 6×9 , 因此 $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 3$, 系统有无限解。

(2) 当 $N = 2$ 时, 矩阵 Ξ' 的维度为 12×12 。当且仅当如下两个条件满足时, $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) = 1$: (i) 对于给定的 j (例如 $j = 2$ 或 $j = 3$), 三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$ 生成 3D 空间, 即三个向量不在同一平面上; (ii) 对于其他的 j (例如 $j = 3$ 或 $j = 2$), \mathbf{P}_j^i 与 $\mathbf{P}_j^k, \forall i, k = 1, 2, \dots, N$ 不成比例, 即不共线。否则, $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) \geq 1$ 。

证明如下: 当 (i) 不满足时, 即三个向量 $\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_1^2, \mathcal{X}_j$ 共面; 由于 $N = 2$, 根据上面 Planar Case 的讨论, $\dim(\mathcal{N}(\Xi')) > 1$ 。现假设条件 (i) 对于给定的 $j = 2$ 成立, 依据公式 (32), 由于三个向量不共面, 即任意一个向量不能被另外两个向量线性表示, 为使等式成立, 则三个向量前的系数为零, 可得 $n_1^1 = n_2^2 = -n_2^1 = -n_1^2$ 。根据公式 (31), 当 $j = 2$ 时, 可得 $-\frac{1}{2} \alpha t_2^2 - t_2 \nu = -n_2^1 \mathcal{X}_2$, 与系统 (36) 类似 (用 $n_2^1 \mathcal{X}_2$ 代替 \mathcal{X}_2)。依据公式 (32), 当 $j = 3$ 时, 取 $i = 2$,

$$\begin{aligned} & (n_1^1 + n_3^1) \mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2) \mathbf{P}_1^2 + (n_3^1 + n_3^2) \mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1) \mathbf{P}_1^1 + (n_1^2 + n_3^2) \mathbf{P}_1^2 + (n_1^1 + n_3^1 + n_1^2 + n_3^2) \mathcal{X}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1) (\mathbf{P}_1^1 + \mathcal{X}_3) + (n_1^2 + n_3^2) (\mathbf{P}_1^2 + \mathcal{X}_3) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (n_1^1 + n_3^1) \mathbf{P}_3^1 + (n_1^2 + n_3^2) \mathbf{P}_3^2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \Leftrightarrow & (-n_2^1 + n_3^1) \mathbf{P}_3^1 = -(n_2^1 + n_3^2) \mathbf{P}_3^2 \end{aligned} \quad (38)$$

其中利用了 $n_1^1 = -n_2^1 = -n_1^2$ 和 $\mathcal{X}_3 = \mathbf{P}_3^1 - \mathbf{P}_1^1 = \mathbf{P}_3^2 - \mathbf{P}_1^2$ 。当条件 (ii) 成立时, 有 \mathbf{P}_3^1 和 \mathbf{P}_3^2 不共线, 则它们前面的系数为零, 得到 $n_3^1 = -n_3^2 = n_2^1$ 。根据公式 (31), 当 $j = 3$ 时, 可得 $-\frac{1}{2} \alpha t_3^2 - t_3 \nu = -n_3^1 \mathcal{X}_3 = -n_2^1 \mathcal{X}_3$, 与系统 (36) 类似 (用 $n_2^1 \mathcal{X}_3$ 代替 \mathcal{X}_3)。至此, 当 $j = 2, 3$ 且满足条件 (i) 和 (ii) 时, 系统与 (36) 类似, 仅仅用 $n_2^1 \mathcal{X}_j$ 代替 \mathcal{X}_j ; 根据上面讨论, 该系统有唯一解, 且零空间 $\mathcal{N}(\Xi')$ 仅有生成向量 \mathbf{n}_0 。根据 **Theorem1**, 系统有 2 个解。

综上所述, 当 $M = 3, N \geq 2$ 时, 满足相关条件时, VI-SLAM 系统有 2 个解; 否则有无数个解。

2.5 图像帧数大于等于 4

2.6 Constant Acceleration

3 可解性分析: Biased Case

3.1 图像帧数小于等于 3

3.2 图像帧数等于 4

3.3 图像帧数大于等于 5

4 Gyroscope Bias 估计

5 Modified MK 闭式解

References

- [1] <https://www.zhihu.com/question/22983179>
- [2] Meyer CD (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia, PA: SIAM.
- [3] Hesch J A, Kottas D G, Bowman S L, et al. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 33(1): 182-201.
- [4] Huai Z, Huang G. Robocentric visual-inertial odometry[C]//2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2018: 6319-6326.