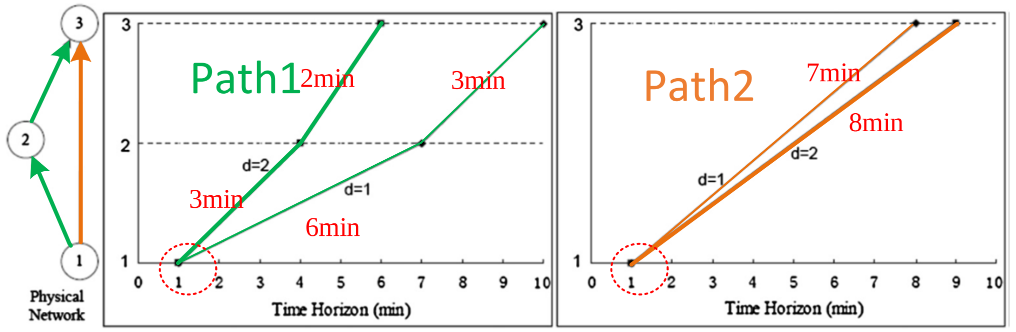
基于约束重构和拉格朗日松弛算法求解最小期望时间路径问题

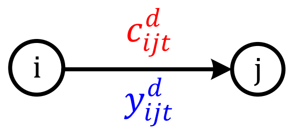
Constraint reformulation and a Lagrangian relaxation-based solution algorithm for a least expected time path

Transportation Research Part B 59(2014)22-44 杨立兴，周学松　　唐芳2018年译 东南大学程琳研究室

时空网络的表示方法(输入数据)

问题 如何根据交通网络中大量的历史出行数据，预测未来某时刻出行的最短路?





输入 c_{ijt}^{d}
场景 d 出发时间 t 的路段时间

输出 y_{ijt}^{d}
场景 d 时刻 t 的时空弧的状态

时变随机网络 time-dependent and stochastic network 路段时间不仅是随机变量，而且还是随时间变化的

样本表示法 sample-based approach 历史上每天每天的观测数据，蕴含着交通网络的动态性和随机性，每天的数据集合构成场景scenario，一天的数据由一系列的实例instance构成。

先验最短路问题 A priori least expected time path 就是在考虑不同随机场景的的多条最短路径的情况下，寻找一条期望总旅行时间最小化的物理路径

约束重构　　将约束条件经过等价的变换，重新构造成更简单的约束，便于整数规划模型的求解

拉格朗日松弛 Lagrangian relaxation 将难约束吸收到目标函数中，使问题更易求解；由于约束减少，可行域变大，松弛问题的解便成为原问题的边界。通过调节乘子的大小，松弛问题可以用来不断逼近原问题

基于多个等式的**唯一路径约束** = 空中交管的耦合约束 = 随机规划中的非预测性约束

拉格朗日松弛与分解

松弛 将难约束吸收到目标函数中，减少约束数量

分解 按照变量类型把模型一分为二，生成两类子问题

松弛模型

$$\min \sum_{d=1}^{D}\sum_{(i,j)\in E}\sum_{t\in T}\left(c_{ijt}^{d}+\alpha_i^d+\beta_{ij}^d+\frac{\gamma_{ij}}{D}\right)y_{ijt}^{d}-\sum_{(i,j)\in E}\left(\sum_{d=1}^{D}\beta_{ij}^{d}+\gamma_{ij}\right)\bar{x}_{ij}-\sum_{d=1}^{D}\sum_{i\in N}\alpha_i^d$$

松弛模型LR的分解

子问题1 y_{ijt}^{d}：子问题 d=1，子问题 d=2，子问题 d=3，……，子问题 d=D

系列场景的最短路问题

子问题2 $\bar{x}_{ij}$：子问题 link1，子问题 link2，……，子问题 link|E|

系列路段的单变量线性规划

对偶模型

$$LD=\max_{\alpha\ge 0,\beta\ge 0,\gamma\in R}\{LR(\alpha,\beta,\gamma)\}$$

$$LD\le IP$$

为什么引入对偶模型? 对偶模型的最优目标值是原模型的最优目标值的下界，求解拉格朗日对偶问题 $LR(\alpha,\beta,\gamma)$更新拉格朗日乘子(α,β,γ)，可以得更紧的下界，减少对偶间隙$UB_k-LR(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)$

次梯度法 沿着对偶模型的次梯度方向，可以改善拉格朗日乘子

上界 Upper Bound 由于最小化旅行时间(目标函数)覆盖了不同场景数据来，松弛模型中每个可行路径解的路径时间，可视为原问题最优目标的上界。

下界 Lower Bound 松弛模型的最优目标值是原目标函数的下界，因为松弛问题放大了可行域的范围

约束重构与先验最短路模型

原始模型

目标函数
最小期望旅行时间

$$F(X,Y)=CY/D=\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\sum_{(i,j)\in E}\sum_{t\in T}c_{ijt}^{d}\,y_{ijt}^{d}$$

约束 d天
时空流平衡

$$\sum_{(i_t,j_{t'})\in E_d}y_{ijt}^{d}-\sum_{(j_{t'},i_t)\in E_d}y_{jit'}^{d}=\begin{cases}1 & i=R,t=t_0\\-1 & i=S',t=t_0+M\sigma\\0 & otherwise\end{cases}$$

约束
循环消除(访问<2次)

$$\sum_{(i,j)\in E}x_{ij}\le 1$$

约束
时空弧-物理路段映射

$$\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}=x_{ij}$$

约束
二元变量

$$x_{ij},y_{ijt}^{d}\in\mathbb{B}$$

约束
唯一路径

$$x_{ij}^{d=1}=x_{ij}^{d=2}=\cdots=x_{ij}^{d=D}$$

约束
网络流平衡

$$\cancel{\sum_{(i,j)\in E}x_{ij}-\sum_{(j,i)\in E}x_{ji}}=\begin{cases}1, & i=R\\ \cancel{-1,} & \cancel{i=S}\\0, & 其它\end{cases}$$

原始模型

替换 $x_{ij}^{d}\to x_{ij}$

$$\sum_{(i,j)\in E}x_{ij}^{d}\le 1$$

$$\cancel{\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}=x_{ij}^{d}}$$

$$y_{ijt}^{d}\in\mathbb{B}$$

松弛 $x_{ij}^{d}-\bar{x}_{ij}=0$

$$x_{ij}^{d}-\bar{x}_{ij}\le 0$$

其中 $\bar{x}_{ij}=\frac{1}{D}\times\left(\sum_{d=1}^{D}x_{ij}^{d}\right)$

用$\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}$替换掉x_{ij}^{d}减少变量数

重构的模型, primary model

期望旅行时间 $F(X,Y)=\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\sum_{(i,j)\in E}\sum_{t\in T}c_{ijt}^{d}\,y_{ijt}^{d}$

$$\sum_{(i_t,j_{t'})\in E_d}y_{ijt}^{d}-\sum_{(j_{t'},i_t)\in E_d}y_{jit'}^{d}=\begin{cases}1 & i=R,t=t_0\\-1 & i=S',t=t_0+M\sigma\\0 & otherwise\end{cases}$$

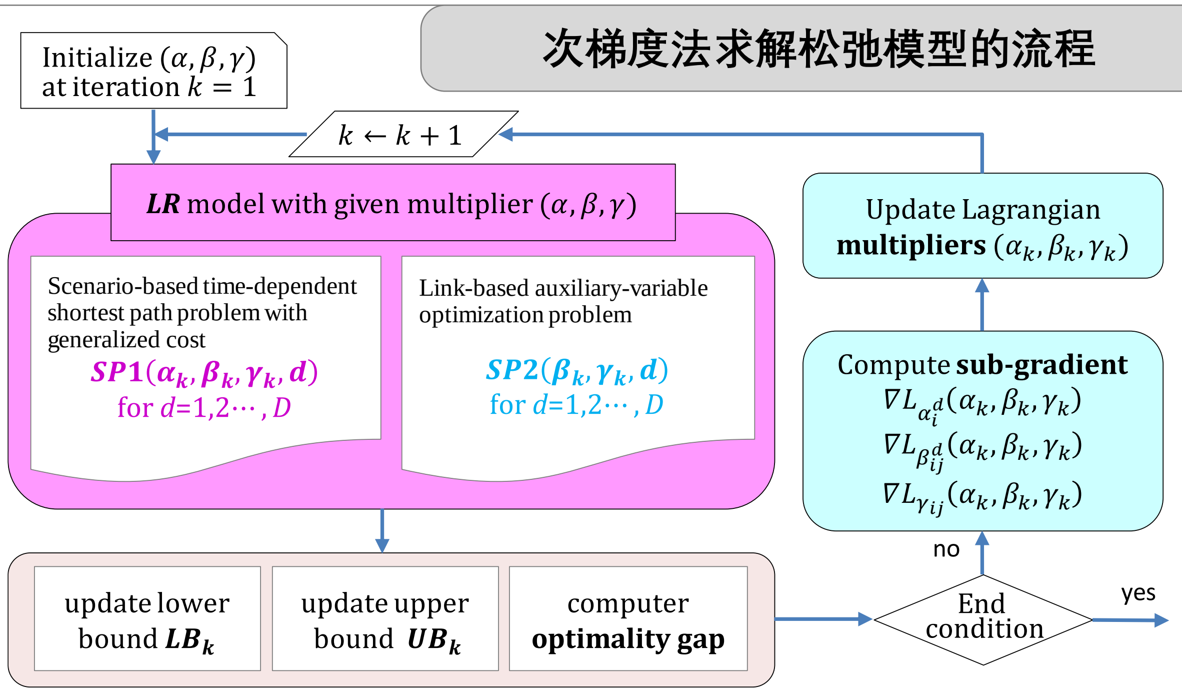
$$\sum_{(i,j)\in E}\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}\le 1$$ 循环消除 α_i^d

$$y_{ijt}^{d}\in\mathbb{B}$$ 二元变量

$$\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}-\bar{x}_{ij}\le 0$$ 唯一路径 β_{ij}^{d}

$$\bar{x}_{ij}=\frac{1}{D}\times\left(\sum_{d=1}^{D}\sum_{t\in T}y_{ijt}^{d}\right)$$ γ_{ij}

次梯度法求解松弛模型的流程



分支定界法B&B 挑选某个路段(二元变量)，可以把原模型的解空间划分成两个互斥的集合(分支)，其中一个集合会生成更优解，另一个因无益而被剪枝(定界)。分支定界法的好处是把解空间一分为二，从而有效地缩减解空间，在分支问题上，实施基于拉格朗日松弛的下界搜索(次梯度法)，缩短搜索进程。$LR(\alpha,\beta,\gamma)\le LR(\alpha,\beta,\gamma)_{x_{ij}^{d}=0,\forall d}$

难点1 如何选择有限的路段进行分支？如何选择关键的路段进行有效地分支？

难点2 选择了某个分支后，如何计算合附加约束的松弛模型

难点3 如何产生有希望的拉格朗日乘子？施加经验乘子约束再次简化LR模型