第三章：关系

3.1 关系的概念

3.2 关系的性质

3.3 关系的合成运算

3.4 关系的闭包

3.5 关系矩阵和关系图

3.6 等价关系和集合的划分

3.7 映射按等价关系分解

3.8 偏序关系与偏序集

3.9*良序集与数学归纳法

3.5 关系矩阵与关系图

本节主要问题

（1）关系矩阵的定义

（2）关系矩阵的性质

（3）关系图的定义

（4）关系图的性质

（1）关系矩阵的定义

例3.5.1 设X={1,2,3,4},Y={a,b,c,d,e}

R={(1,a),(3,a),(2,b),(2,d),(2,e),

(3,d),(3,b),(3,e),(4,c),(4,d)}

则R的关系矩阵为：

$$
B_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

（1）关系矩阵的定义

$$B_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定义3.5.1 设：X={x_1, x_2, ..., x_m}。Y={y_1, y_2, ..., y_n}。令R是X到Y的一个二元关系。由R定义一个m×n的矩阵B=(b_{ij})如下:∀(x_i, y_j)∈X×Y,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, 若 x_i R y_j \\ 0, 若 x_i 与 y_j 不符合关系 R \end{cases}$$

矩阵B称为关系R的矩阵。

（1）关系矩阵的定义

当R是X(|X|=n)上的二元关系时, R的关系矩阵B是一个n×n布尔矩阵。

例3.5.2 设X={1,2,3,4},

R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),

(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)}

求R的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵，则：

(1)R是自反的

当且仅当B的对角线上的全部元素都为1;

例 设X={1,2,3},

R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(2,3)}

求R的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵，则：

(2)R是反自反的

当且仅当B的对角线上的全部元素都为0;

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)}

求R的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵，则：

(3)R是对称的

如果$b_{ij}=1$，则$b_{ji}=1$，　当且仅当B是对称矩阵；

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,3)}

求R的关系矩阵

$$B_R=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

(4)R是反对称的

R是反对称的当且仅当i≠j时;

b_{ij}与b_{ji}不同时为1,

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(2,3),(1,3)}

求R的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

(5)R是传递的

R是传递的当且仅当

如果$b_{ij}=1$且$b_{jk}=1$,则$b_{ik}=1$;

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(2,3),(1,3)}

求R的关系矩阵

$$B_R=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

(6) R^{-1}的矩阵。

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(2,3),(1,3)}

R^{-1}={(2,1),(3,2),(3,1)}

$$B_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

矩阵的转置

$$B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

（2）关系矩阵的性质

布尔矩阵的代数运算

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

(a)

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

c	
0	1
1	0

(c)

逻辑加（逻辑或） 逻辑乘（逻辑与） 逻辑补（逻辑非）

（2）关系矩阵的性质

设B,C是两个布尔矩阵，B和C的逻辑乘是B和C的对应元素的逻辑乘，其结果记为B ∧ C，即：

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{B \wedge C}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

（2）关系矩阵的性质

设B,C是两个布尔矩阵，B和C的逻辑加是B和C的对应元素的逻辑加，其结果记为B ∨ C，即：

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B　　　C　　　B ∨ C

（2）关系矩阵的性质

最后，设B为m×p布尔矩阵，C为p×n布尔矩阵。类似于矩阵的普通乘法，我们定义B与C的布尔乘法。B与C的布尔乘积记为B ∘ C，令D=B∘C，按定义：

$$d_{ij} = (b_{i1} \wedge c_{1j}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2j}) \vee \ldots \vee (b_{ip} \wedge c_{pj})$$

若B是n×n布尔阵，B∘C简记为$B^{(2)}$。一般地，$B^{(k)}=B^{(k-1)}\circ B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B　　　C　　　D

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.3 设A，B，C为n×n布尔矩阵，则

(1) $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A　　　　B

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.3 设A，B，C为n×n布尔矩阵，则

(2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$,

$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A B C

（2）关系矩阵的性质

命题3.5.3 设A，B，C为n×n布尔矩阵，则

(3) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$(B \vee C) \circ A = (B \circ A) \vee (C \circ A)$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A　　　　B　　　　C

（2）关系矩阵的性质

定理3.5.1 设R，S为X到Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R\cup S$和$R\cap S$的矩阵分别记为$B_{R\cup S}$和$B_{R\cap S}$，则

(1) $B_{R\cup S} = B_R \vee B_S$。

例如：设X={1, 2, 3, 4}，Y={a, b, c}

R={(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)}

S={(1, b), (2, a), (3, a), (3, b), (3, c)}

$R\cup S$={(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (3, c)}

$$\underset{B_R}{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}} \qquad \underset{B_S}{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}} \qquad \underset{B_{R\cup S}}{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}}$$

（2）关系矩阵的性质

定理3.5.1 设R，S为X到Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。 $R\cup S$和$R\cap S$的矩阵分别记为$B_{R\cup S}$和$B_{R\cap S}$，则

(2) $B_{R\cap S} = B_R \wedge B_S$。

例如：设X={1, 2, 3, 4}，Y={a, b, c}

R={(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)}

S={(1, b), (2, a), (3, a), (3, b), (3, c)}

$R\cap S$={(1, b), (2, a), (3, a), (3, c)}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B_R $\qquad$ B_S $\qquad$ $B_{R\cap S}$

（2）关系矩阵的性质

定理3.5.2 设X、Y、Z是有限集，$|X| = m$、$|Y| = p$、$|Z| = n$。R是X到Y的二元关系，S是Y到Z的二元关系，R, S, $R\circ S$的关系矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

例如：设$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{a, b, c\}$，$Z=\{\alpha, \beta, \gamma\}$

$R=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}$

$S=\{(a, \beta), (b, \gamma)\}$

$R\circ S=\{(1, \beta), (2, \beta), (3, \beta), (1, \gamma), (2, \gamma)\}$

$$B_R \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{R\circ S} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(1, \gamma) \in R\circ S$ 对应 $(1, a) \in R$且$(a, \gamma) \in S$，或$(1, b) \in R$且$(b, \gamma) \in S$，或$(1, c) \in R$且$(c, \gamma) \in S$。

（2）关系矩阵的性质

定理3.5.2 设X、Y、Z是有限集，$|X| = m$、$|Y| = p$、$|Z| = n$。R是X到Y的二元关系，S是Y到Z的二元关系，R, S, R°S的关系矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

证明：设$X=\{x_1, ..., x_m\}$、$Y=\{y_1, ..., y_p\}$、$Z=\{z_1, ..., z_n\}$

设$B_R=(a_{ij})$, $B_S=(b_{ij})$, $B_{R\circ S}=(c_{ij})$, 且$B_R \circ B_S$的第i行第j列元素为：

$(a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee ... \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee ... \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})$

若$c_{ij}=1$，则$x_i R\circ S z_j$, $\exists y_k \in Y$, 使得$x_i R y_k$并且$y_k R z_j$

因此$a_{ik}=1$且$b_{kj}=1$

$B_R \circ B_S$的第i行第j列元素是1。

若$c_{ij}=0$，则$(x_i, z_j) \notin R\circ S$, $\forall y_k \in Y$，$x_i R y_k$和$y_k R z_j$不同时成立。$B_R \circ B_S$的第i行第j列元素是0。

因此：$B_{R\circ S}$ 和 $B_R \circ B_S$。的对应元素相等。

则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

证明思路是矩阵$B_{R\circ S}$和矩阵$B_R \circ B_S$。的对应元素相等

2015-2016集合论有关复试题

设X={1,2,3}，则X 上具有多少个反自反且反对称性的二元关系？

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{a} & \boxed{?} \\ \boxed{b} & 0 & \boxed{?} \\ \boxed{?} & \boxed{?} & 0 \end{bmatrix}$$

A. 9

B. 27 √

C. 32

D. 64

① 对角线上必须都是0，

② 沿对角线对称位置取值不能同时为1，例如：a和b取值不能同时为1，可为0,0；0,1或1,0；

③ 相当于3个位置(二元组），每个位置有3种选择；方案数是3^3。

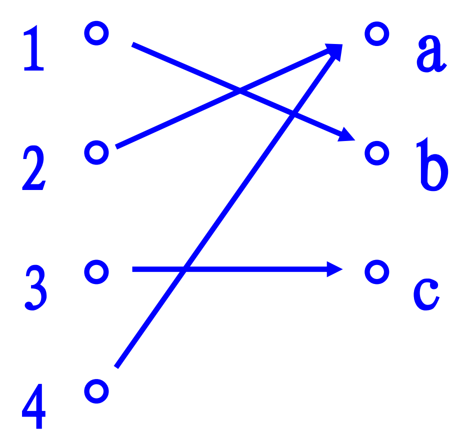
（3）关系图的定义

关系除了用矩阵表示外,还可用图来表示。

例3.5.3 设X={1, 2, 3, 4}, Y={a, b, c},

R={(1, b), (2, a), (4, a), (3, b), (3, c)}

则R的关系图为：



一、关系图的画法

1、先把X与Y中的元素在纸上用小圆圈表示,并在旁边标注上这个元素的名字。

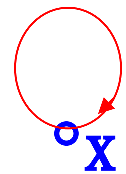
2、然后把R的任一序对(x, y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。

得到一个由点线组成的有向图。

（4）关系图的性质

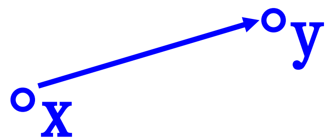
二、关系的不同性质在关系图中的体现

1、自反性



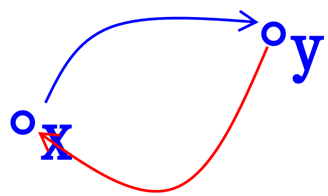
每个点上都有一个有向圈

2、反自反性



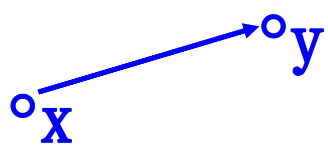
每个点上都没有圈

3、对称性



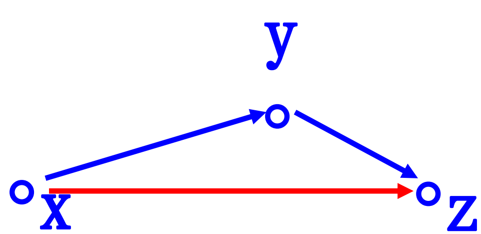
∀ x, y, 如果有从x到y的有向线，就有从y到x的有向线。

4、反对称性



∀ x, y, 从x到y的有向线与从y到x的有向线只能有一条。

5、传递性



∀ x, y, z, 如果有从x到y的有向线,同时又有从y到z的有向线，则必有从x到z的有向线。

（4）关系图的性质

例: $|A| = 2$，试画出A上所有具有传递性的关系R的关系图.

分析 因为$|A| = 2$, 所以A上不同的关系共有2^4个.

设 $A = \{a, b\}$，则:

零元子集: $R_1 = \emptyset$;

一元子集: $R_2 = \{\langle a, a\rangle\}$, $R_3 = \{\langle b, b\rangle\}$, $R_4 = \{\langle a, b\rangle\}$, $R_5 = \{\langle b, a\rangle\}$;

二元子集: $R_6 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$, $R_7 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$, $R_8 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$, $R_9 = \{\langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$, $R_{10} = \{\langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$, $R_{11} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$;

三元子集 : $R_{12} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$; $R_{13} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$, $R_{14} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$, $R_{15} = \{\langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$;

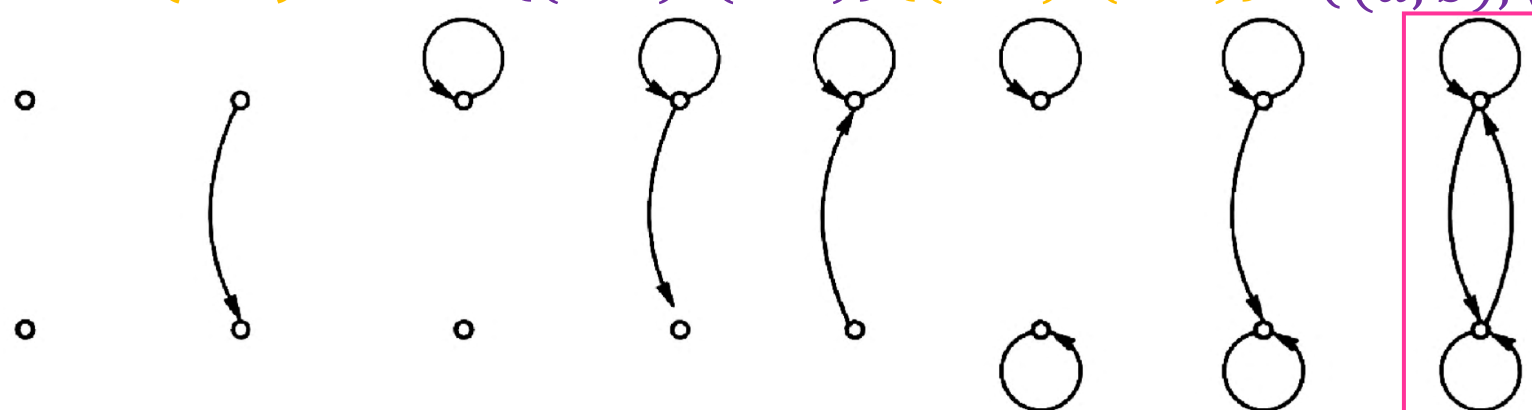
四元子集 : $R_{16} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.

（4）关系图的性质

例: $|A| = 2$，试画出A上所有具有传递性的关系R的关系图.

$\emptyset$ (a, a) $\{(a,a),(b,a)\}$ $\left\{\begin{matrix}(a,a),(b,b),\\ (a,b)\end{matrix}\right\}$

(a, b) $\{(a,a),(a,b)\}$ $\{(a,a),(b,b)\}$ $\left\{\begin{matrix}(a,a),(b,b),\\ (a,b),(b,a)\end{matrix}\right\}$



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

3.6 等价关系与集合的划分

本节主要问题

（1）等价关系的定义

（2）等价类的定义

（3）集合划分的定义

（4）等价类和集合划分的关系

（5）商集的定义

（6）等价闭包

（1）等价关系的定义

例 在时钟集合$A=\{1,2,\cdots,24\}$上定义整除关系

$R=\{(x,y)|\{(x,y\in A)\wedge(\mathrm{x}-\mathrm{y}$被12所整除$)\}.$

$x\equiv y(\,mod\,n)$ 即$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbf{Z}\wedge(\,n\mid(x-y)\,)\}$

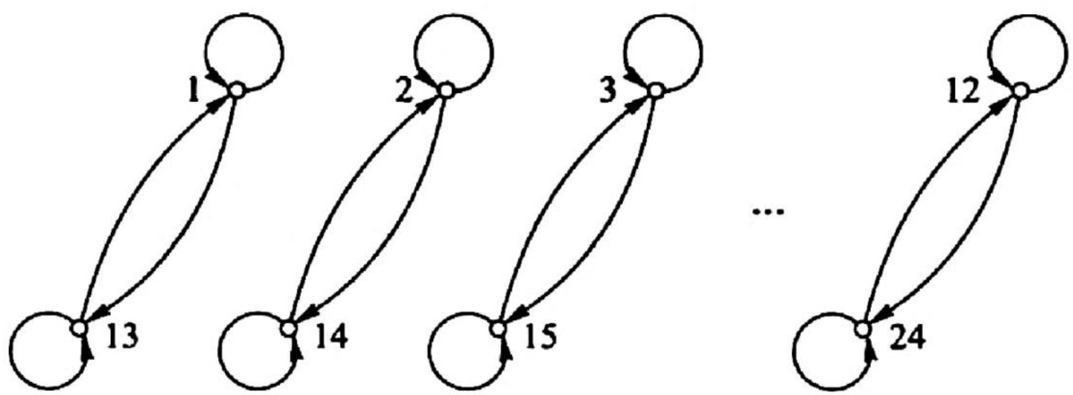
$(\,n\mid(x-y)\,)$: x-y被n所整除或n整除x-y

(1) 写出 R 中的所有元素;
(2) 画出 R 的关系图;
(3) 证明 R 具备自反性，对称性和传递性.

（1）根据 R 的定义得:

$$R=\{(1,1),(2,2),\cdots,(24,24),(1,13),(13,1),(2,14),(14,2),\cdots,(11,23),(23,11),(12,24),(24,12)\}$$

（2）关系图为



（1）等价关系的定义

(3) 证明 R 具备自反性，对称性和传递性.

(1) 自反性. 对 $\forall x \in A$，有 $x - x$ 被 12 所整除（0除以任何数为0），即 $(x, x) \in R$. 因此 R 是自反的.

(2) 对称性. 对 $\forall x, y \in A$，若 $(x, y) \in R$，则 $x - y$ 被 12 所整除. 因为 $y - x = -(x - y)$，所以 $y - x$ 也 被 12 所整除，即 $(y, x) \in R$. 因此 R 是对称的.

(3) 传递性. 对 $\forall x, y, z \in A$，若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$，则有 $x - y$ 被 12 所整除且 $y - z$ 被 12 所整除. 又因为 $x - z = (x - y) + (y - z)$，所以 $x - z$ 被 12 所整除，即 $(x, z) \in R$. 因此 R 是传递的.

（1）等价关系的定义

例3.6.1　考虑X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}上的模n同余关系。

R={ (1, 1), (1, 4), (1, 7), (2, 2), (2, 5), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 4), (4, 7), (5, 2), (5, 5), (5, 8), (6, 3), (6, 6), (7, 1), (7, 4), (7, 7), (8, 2), (8, 5), (8, 8)}

(1)　自反性 $\forall m\in Z$，$m=m \pmod{n}$。

(2)　对称性 $\forall m, k\in Z$, 如果$m=k \pmod{n}$, 则$k=m \pmod{n}$。

(3)　传递性 $\forall m, k, h\in Z$，如果$m=k \pmod{n}$，$k=h \pmod{n}$, 则 $m=h \pmod{n}$。

定义3.6.1　集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时具有以下三个性质:

1°. R是自反的, 即$\forall x\in X$, xRx;

2°. R是对称的, 即如果xRy, 则yRx;

3°. R是传递的, 即如果xRy, yRz; 则xRz。

（1）等价关系的定义

X是非空集合，判断以下关系是否是等价关系？

a. 集合的包含于“$\subseteq$”是2^X上的二元关系。

b. 集合的真包含于“$\subset$”是2^X上的二元关系。

c. I_X √

d. I_X的任一真子集($R \subset I_X$)

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leqslant$”

f. 实数集上的小于关系“$<$”

g. 自然数上的模n同余关系。 √

h. 映射的核关系。 √

（3）集合划分的定义

例如,若X={a,b,c,d,e}
由X的子集形成一个集族，A={{a,b},{c},{d,e}}
(1)A的元素中没有空集,
(2)A中任意不相等的元素间没有共同元素,
(3)A中所有元素的并集等于集合X。
A是X的一个划分。

定义3.6.3　设X为集合,X的一些非空子集形成的集族A称为X的一个划分,如果A具有性质

1°.　$\forall B, C \in A$, 若$B \neq C$, 则$B \cap C = \varnothing$; 且

2°.　$\bigcup_{B \in A} B = X$

定义3.6.3* 设X是一个集合, $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$是X的非空子集，如果集族$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$具有如下性质，则称A是X的一个划分。

1°. $\forall A_i, A_j \in A$, 若$A_i \neq A_j$, 则$A_i \cap A_j = \varnothing$;

2°. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = X$

（2）等价类的定义

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

[0]={...,-4,-2,0,2,4,...} //与0有关系的一类

[1]={...,-3,-1,1,3,5,...} //与1有关系的一类

定义3.6.2

设R是X上的一个等价关系，x ∈ X, X的子集 $E_x = \{ y \mid y \in X$ 且 $x R y\}$（即X中与x等价的全体元素构成的子集）称为x关于R的等价类，或简记为x的等价类。

x的等价类常记为[x],即[x]={y | y ∈ X且x R y}。

（3）集合划分的定义

如果A是X的一个划分，则当|A|=k时，A被称为X的一个**k-划分**。

例　整数集合Z上的模3同余关系可以把整数集合中所有元素分成3个集合。

$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

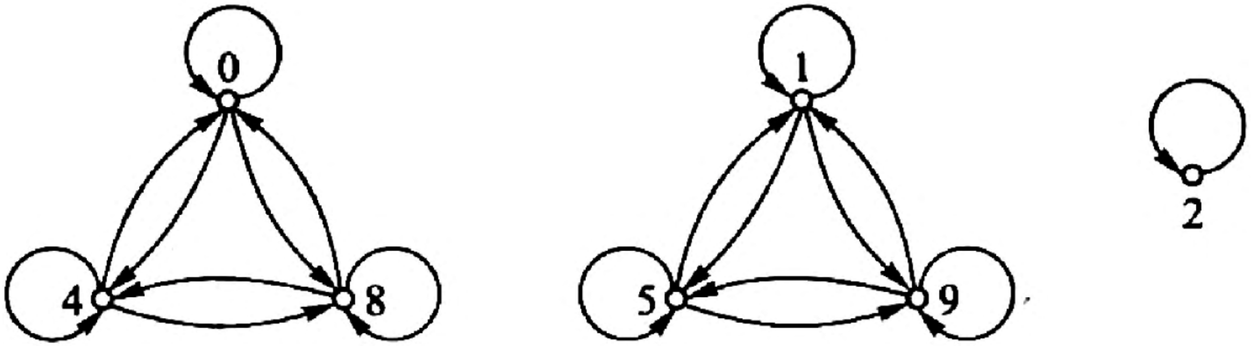
$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

$\{[0], [1], [2]\}$是Z的一个3划分。

（2）等价类的定义

例 设*A*={0,1,2,4,5,8,9},*R*是*A*上的以4为模的同余关系. 求(1) *R*的所有等价类; (2) 画出*R*的关系图.

$[0]=[4]=[8]=\{0,4,8\};$
$[1]=[5]=[9]=\{1,5,9\};$
$[2]=\{2\}.$



（2）等价类的定义

例　整数集合Z上的模3同余关系可以把整数集合中所有元素分成3个集合。

$[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$[1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$[2] = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

在这里：$[0] = [-3] = [3] = \ldots$

在这里：$[1] = [-2] = [4] = \ldots$

在这里：$[2] = [-1] = [8] = \ldots$

$[-3] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$[-2] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$[8] = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

（5）商集的定义

定义3.6.4 设R是集合X上的等价关系,由R所确定的所有等价类的集合称为集合X对R的商集,并记作X/R。

于是$X/R=\{[x]|x\in X,[x]$是x的等价类$\}$。

例 整数集合Z上的模3同余关系R可以把整数集合中所有元素分成3个集合。

$[0]=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$

$[1]=\{\ldots,-4,-1,1,4,7,\ldots\}$

$[2]=\{\ldots,-5,-2,2,5,8,\ldots\}$

$Z/R=\{[0],[1],[2]\}$。

（5）商集的定义

例 设$A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$,R是A上的以4为模的同余关系. 求A/R

$[0]=[4]=[8]=\{0,4,8\}$;
$[1]=[5]=[9]=\{1,5,9\}$;
$[2]=\{2\}$.

商集 $A/R=\{[0],[1],[2]\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2\}\}$.

（4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

$[0]=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$,$[1]=\{\ldots,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$

$\{[0]$，$[1]\}$是Z的一个2划分。

需证:(1)$\forall i, [x_i] \neq \varnothing$;

(2)如果$[x_i]\neq[x_j]$, 则$[x_i]\cap[x_j]=\varnothing$,

(3)$[x_1]\cup[x_2]\cup\ldots\cup[x_m]=X$。

证明: 设等价关系R的等价类集合为$\{[x_1], [x_2], \ldots, [x_m]\}$

(1)由自反性 $\Rightarrow\forall i, x_i\in[x_i]$ $\Rightarrow [x_i]\neq\varnothing$。

(2)如果$[x_i]\neq[x_j]$, 且$[x_i]\cap[x_j] = x$ $\Rightarrow x_i\, R\, x$ 且 $x_j\, R\, x$

由对称性和传递性$\Rightarrow x_i\, R x_j \Rightarrow [x_i]=[x_j]$ $\Rightarrow$矛盾$\Rightarrow[x_i]\cap[x_j]=\varnothing$

(3)$\forall x \in X, x\in[x] \Rightarrow [x_1]\cup[x_2]\cup\ldots\cup[x_m]=X$。

（4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2 设A是集合X的一个划分，令

$$R=\bigcup_{B\in A} B\times B$$

则R是X上的一个等价关系，并且A就是R的等价类之集。

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A_n\times A_n)$

则R是X上的一个等价关系，并且A就是R的等价类之集。

例如： $X=\{a, b, c, d, e\}$,

$A=\{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R=\{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

(4) 等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup \ldots\ldots \cup (A_n\times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系，并且A就是R的等价类之集。

证明R是等价关系，需证R是：(1)自反的(2)对称的(3)传递的

(1)自反的：$\forall x\in X \Rightarrow \exists i, x\in A_i \Rightarrow (x, x)\in A_i\times A_i \Rightarrow (x, x)\in R$

(2)对称的：$\forall (x, y)\in R \Rightarrow \exists i, x\in A_i, y\in A_i \Rightarrow (y, x)\in A_i\times A_i \Rightarrow (y, x)\in R$

(3)传递的：$\forall (x,y)\in R, (y,z)\in R \Rightarrow \exists i, x\in A_i, y\in A_i, z\in A_i \Rightarrow (x, z)\in A_i\times A_i \Rightarrow (x, z)\in R$

证明A就是R的等价类之集，需证A是:

(1)$\forall A_i$, A_i中的元素相互之间有关系R。 略

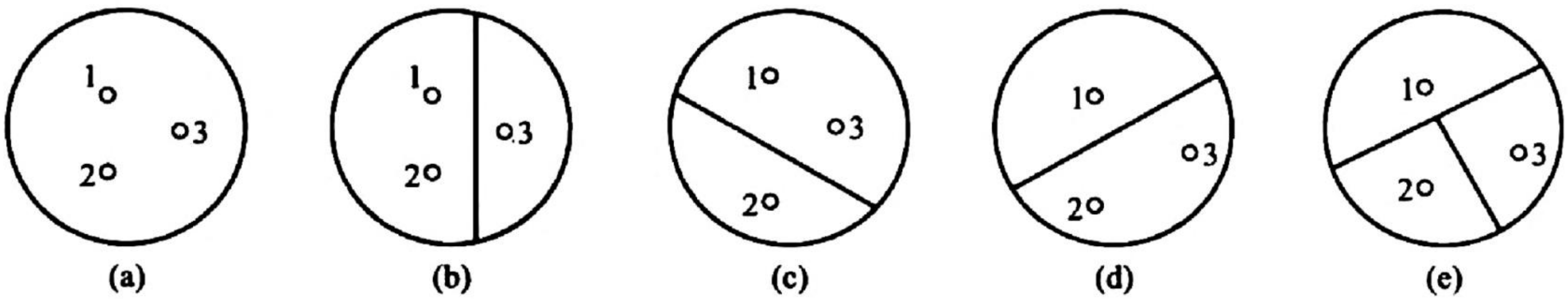
(2)$\forall A_i, \forall A_j, i\neq j$, A_i和A_j中的任何元素无关系。 略

(3)$\forall x\in X, \exists A_i, x\in A_i$。 略

（4）等价类和集合划分的关系

例：设A=[1,2,3|，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解:只有 1 个划分块的划分为 π_1, 如图(a) 所示, 具有 2 个划分块的划分为 π_2, π_3 和 π_4, 如图(b)、(c) 和 (d) 所示, 具有 3 个划分块的划分为 π_5, (e) 所示.



假设由划分块 π_i 导出的对应等价关系为 $R_i, i = 1,2,3,4,5$, 则有

$R_1 = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = \{< 1,1 >, < 1,2 >, < 1,3 >, < 2,1 >, < 2,2 >,$
$< 2,3 >, < 3,1 >, < 3,2 >, < 3,3 >= A \times A;$
$A/R_1 = \{\{1,2,3\}\}.$

$R_2 = (\{1,2\} \times \{1,2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{\langle 1,1 >, < 1,2 >, < 2,1 >, < 2,2 >,$
$< 3,3 >\};$
$A/R_2 = \{\{1,2\}, \{3\}\}.$

$R_3 = (\{1,3\} \times \{1,3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{\langle 1,1 >, < 1,3 >, < 2,2 >, < 3,1 >,$
$< 3,3 >\};$
$A/R_3 = \{\{1,3\}, \{2\}\}.$

$R_4 = (\{2,3\} \times \{2,3\}) \cup (\{1\} \times \{1\}) = \{< 1,1 >, < 2,2 >, < 2,3 >, < 3,2 >,$
$< 3,3 >\};$
$A/R_4 = \{\{1\}, \{2,3\}\}.$

$R_5 = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3\} \times \{3\})$
$= \{\langle 1,1 >, < 2,2 >, < 3,3 >\} = I_A;$
$A/R_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$

（4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合（即商集）是X的一个划分。

1. X的一个等价关系确定X的一个划分。

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A_n\times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系，并且A就是R的等价类之集。

2. X的一个划分确定一个等价关系。

定理3.6.3 集合X上的二元关系R是一个等价关系，当且仅当存在X的一个划分A，使得xRy的充分必要条件是$\exists B\in A$，使$x,y\in B$。

3. X的一个划分和X的等价关系是一一对应的。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

（6）等价闭包

R的等价闭包(R的自反对称传递闭包)，记为e(R)，e(R)是X上包含R的那些等价关系的交集。

定理3.6.4 设R为X上的一个二元关系，则：

$$e(R)=(R\cup R^{-1})^{*}。$$

**

2015-2016集合论有关复试题

设A={1,2,3}，则A上至多可以定义多少个等价关系?

等价关系数等于集合的划分数!

A. 4

B. 5 √

C. 6

D. 7

1划分？ 对应什么关系?

{{1,2, 3}}，1个;

2划分?

{{1, 2},{3}}，{{1, 3},{2}}

{{2, 3},{1}}，3个;

3划分？ 对应什么关系?

{{1}, {2}, {3}}，1个。

2015-2016集合论有关复试题

设X={1,2,3,4}，则X 上可以定义多少个商集基数为2 的等价关系？

A. 5

B. 6

C. 7 √

D. 8

等价关系数商集基数为2，对应集合的二划分！

2划分？

1-3划分？ 4种;

2-2划分？ 3种。