第六章：图论的基本概念

6.1 图论的产生与发展概述

6.2 基本定义

6.3 路、圈、连通图

6.4 补图、偶图

6.5 欧拉图

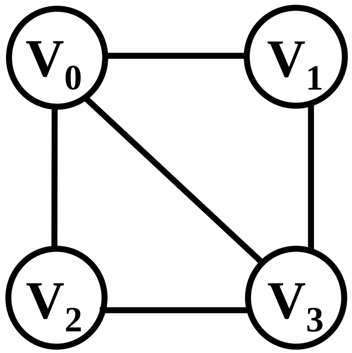
6.6 哈密顿图

6.7 图的邻接矩阵

6.8 带权图与最短路问题

6.7、图的邻接矩阵

例　无向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

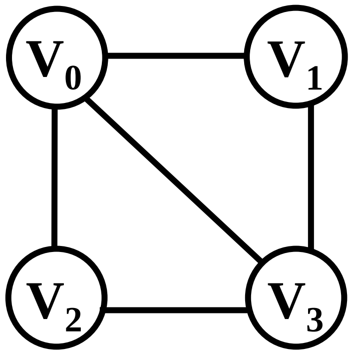
- 邻接矩阵 (Adjacency Matrix)

G的邻接矩阵是满足如下条件的n阶矩阵：

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_{ij} \in E \\ 0 & \text{若 } v_{ij} \in E \end{cases}
$$

6.7、图的邻接矩阵

例 无向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
$$

讨论：

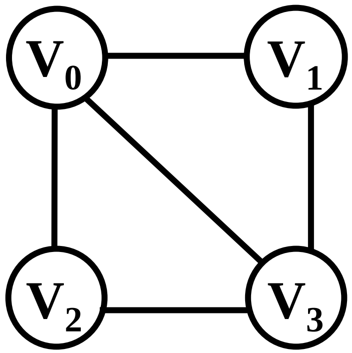
无向图的邻接矩阵有什么特点？

(1) 是对称矩阵；

(2) 对角线元素都是零。

6.7、图的邻接矩阵

例　无向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

讨论：

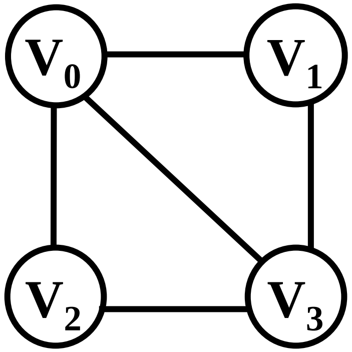
(1)无向图中第i个顶点的度在邻接矩阵中如何体现?

(2)图的总度数怎么求?

(3)边数怎么求?

6.7、图的邻接矩阵

例 无向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
$$

答案:

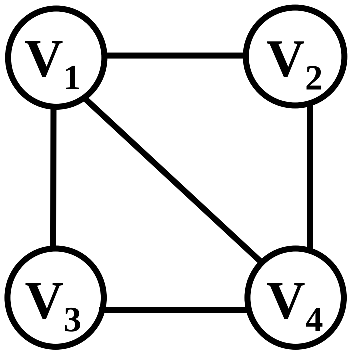
(1)第i行(或第i列)的非零元素个数之和;

(2)非零元个数之和;

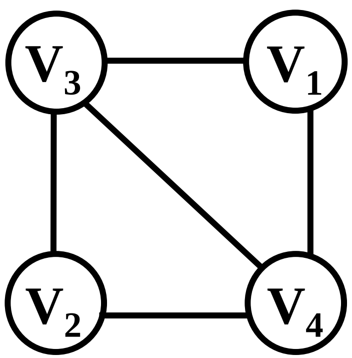
(3)边数为总度数的一半。

6.7、图的邻接矩阵

随着图的顶点编号变化，图的邻接矩阵也变化。



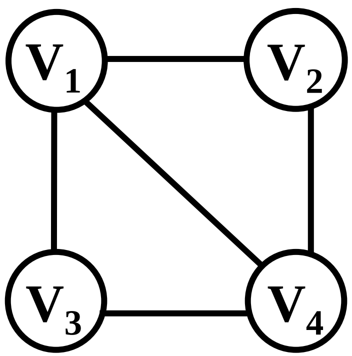
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



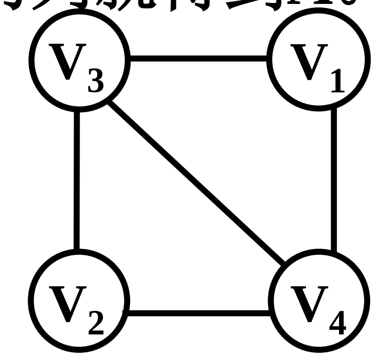
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7、图的邻接矩阵

定理6.7.1 设A、B是图G = (V, E)对V的元素的两种不同编号下对应的邻接矩阵，则存在一个置换矩阵P使得$A=PBP^T$。亦即适当地交换B的行及相应的列就得到A。



$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

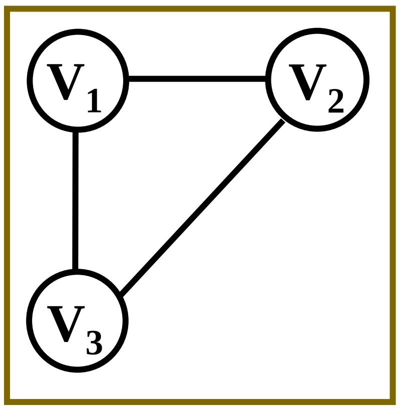


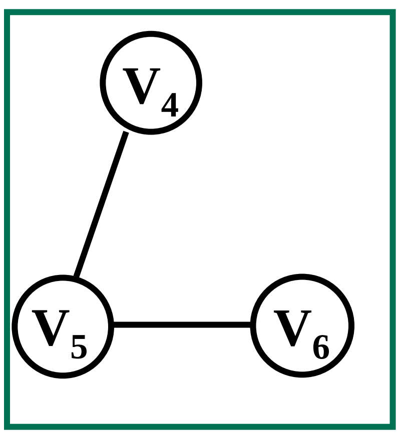
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1、3行互换　　1、3列互换

6.7、图的邻接矩阵

不连通图的各个支连续编号，则其邻接矩阵是一个对角分块矩阵。

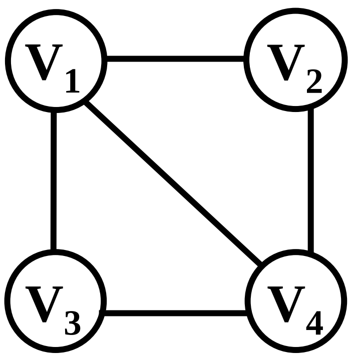




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7、图的邻接矩阵

定理6.7.2 设G = (V, E)是一个(p, q)图，p×p矩阵A是G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值，其中i ≠ j。



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a^2[2][3]$

$=1\times1 + 0\times0 + 0\times0 + 1\times1$

$=2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6.7、图的邻接矩阵

定理6.7.2 设G = (V, E)是一个(p, q)图，p×p矩阵A是G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值，其中i ≠ j。

证：对l用归纳法：

当l = 1时，定理显然成立。

假设当l =k时定理成立，现证明l =k+1时定理也成立。

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}\left(A^k\right)_{ih}a_{hj}$$

在上式右面的一般项$\left(A^k\right)_{ih}a_{hj}$中，

由归纳假设可知，$\left(A^k\right)_{ih}$为v_i到v_h的长为k通道的条数，当a_{hj}=1时，v_hv_j是G的边。

6.7、图的邻接矩阵

$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}\left(A^k\right)_{ih}a_{hj}$

所以，$\left(A^k\right)_{ih}a_{hj}$为起点为$v_i$，并且通过$v_h$顶点然后一步就到终点$v_j$的通道的条数。

当$a_{hj}=0$时，表明G中没有从v_i经过v_h然后一步就到v_j的长为k+1的通道。

因此, G的任一长为 $k+1$ 的 v_i 与 v_j 的通道, 为所有$a_{hj}=1$的那些通道的和，即在到达 v_j 的前一步必通过某个顶点 v_h。所以, $\left(A^{k+1}\right)_{ij}$ 就是 v_i 与 v_j 间长为 $k+1$ 的通道的条数。

6.7、图的邻接矩阵

定理6.7.3 设G = (V, E)是一个p个顶点的图，A是它的邻接矩阵，则

G是连通的 $\Longleftrightarrow$ $(A+I)^{p-1}>0$

证：必要性，设G是连通的，则对G的任两个不同顶点v_i与v_j， v_i与v_j间必有一条长度至多为p-1的路。因此，对某l（$l \leq$ p-1），$\left(A^l\right)_{ij}>0$。所以有

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left(A^l\right)_{ij} > 0$$

因此可得,

$$(A+I)^{p-1} = I + C_{p-1}^{1}A + C_{p-1}^{2}A^2 + \cdots + A^{p-1} \geqslant \sum_{l=0}^{p-1} A^l > 0$$

6.7、图的邻接矩阵

定理6.7.3 设G = (V, E)是一个p个顶点的图，A是它的邻接矩阵，则

G是连通的 $\Longleftrightarrow$ $(A+I)^{p-1}>0$

证：充分性，设$(A+I)^{p-1}>0$ 。由于

$$(A+I)^{p-1}=I+C_{p-1}^{1}A+C_{p-1}^{2}A^{2}+\cdots+A^{p-1}>0$$

因此，对任意i, j, $1 \le i, j \le p$, 若$i \ne j$, 则存在一个l， $1 \le l \le p-1$, 使得，$(A^{l})_{ij} > 0$ 。

因此，v_i与v_j之间有长为l的通道，从而必有路。

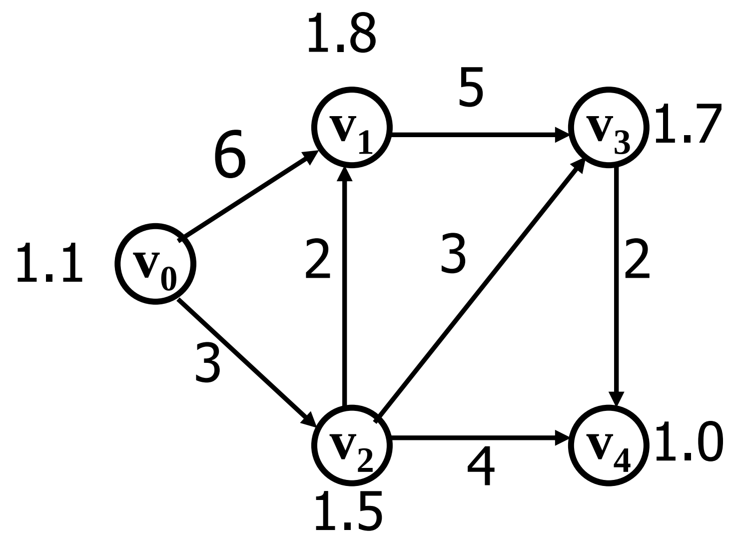
所以G是连通的。

6.8、带权图与最短路问题

定义6.8.1 设G = (V, E)是一个图，f是顶点集V到集合S的一个映射，则称三元组(V, E, f)是一个顶点带权图，仍记为G= (V, E, f) , $\forall v \in V$, f(v)称为顶点v的权。

类似地，如果g是边集E到集合T的一个映射，则称三元组(V, E, g)为边带权图，也仍记为 G= (V, E, g) , $\forall x \in E$, g(x)称为边x的权。

一个图的顶点和边可以同时带权，这时称为顶点边带权图。



6.8、带权图与最短路问题

问题的提出

路径长度：路径上边的权值之和

最短路径：两结点间权值之和最小的路径

交通咨询系统、通讯网、计算机网络常要寻找两结点间最短路径;

计算机网发送Email节省费用，A到B沿最短路径传送。

最短路径并非传统意义上的路径最短

例如：如果权重是道路上的拥挤程度，最短路径就是最畅通的路径。

6.8、带权图与最短路问题

1. 算法思想

顶点A和D之间最短路径 A（起点） ➡ D（终点） 的任何子路径 B ➡ D 也是顶点B和D之间的最短路径。

Djikstra将这一属性用于相反方向，即我们高估每个顶点与起始顶点的距离。然后，我们访问每个节点和它的邻节点，找到到这些邻点的最短子路径。

该算法使用了一种贪婪方法，即我们找到下一阶段的最佳解决方案，希望最终结果是整个问题的全局最佳解决方案。

6.8、带权图与最短路问题

2. 算法要点

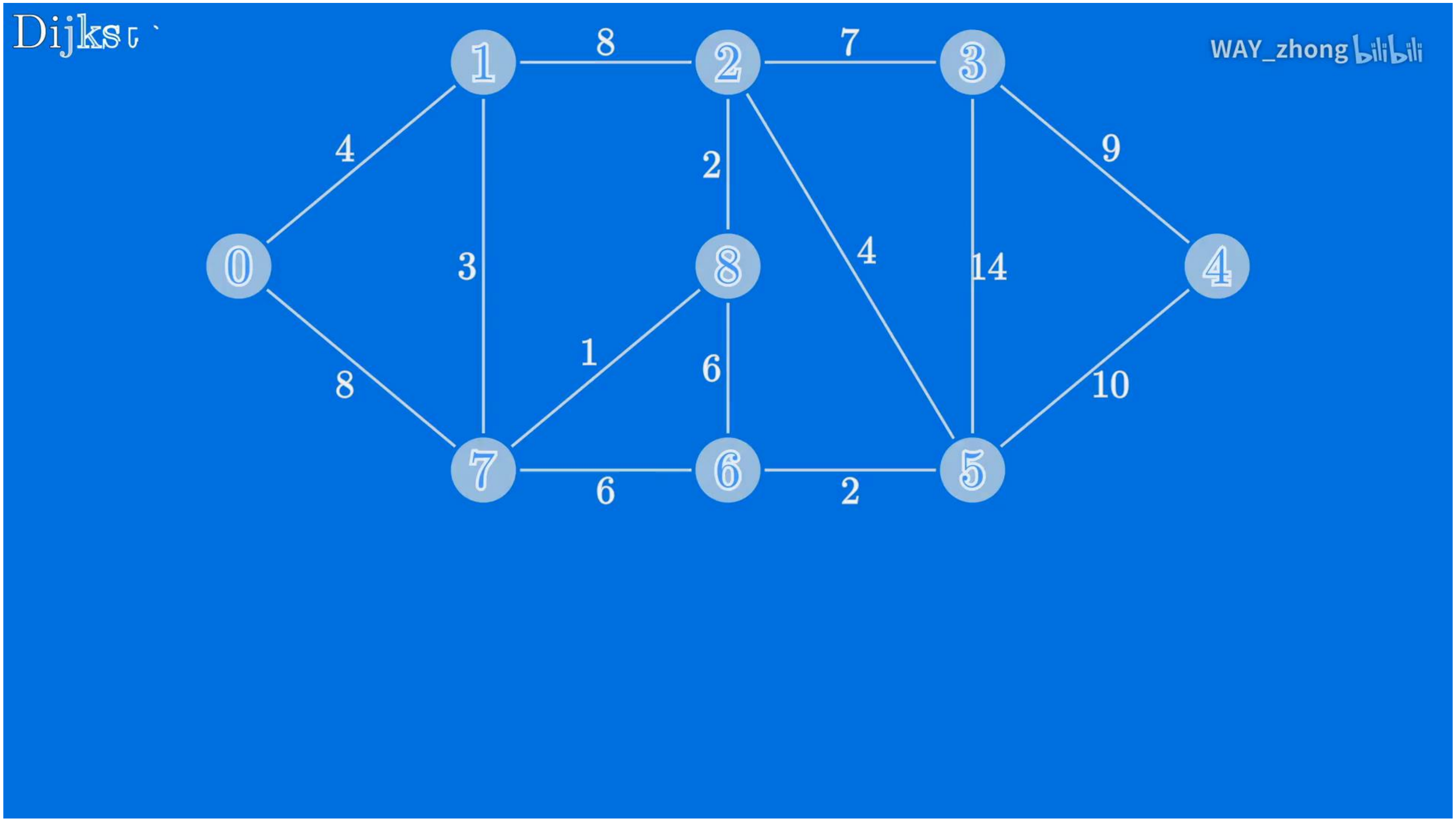
将结点集V分为两部分: 一部分称为具有P(永久性) 标号的集合, 另一部分称为具有T(暂时性) 标号的集合.

所谓结点v的P标号是指从v_1到v的最短通路的长度; 而结点u的T标号是指从v_1到u的某条通路的长度.

首先将v_1, 取为P标号, 其余结点为T标号, 然后逐步将具有T标号的结点改为P标号. 当结点v_n也被改为P标号时, 就找到了从v_1到v_n的一条最短通路.

6.8、带权图与最短路问题

实例演示



习 题

2(P206).证明：一个连通图的（p,q）图中，$q \geqslant p-1$

证明：用归纳法。

步骤1：基本情况

- 当$p = 1$时，图G只有一个顶点而没有边，所以$q = 0$。因为$q = 0 = p - 1$，所以命题对于基本情况成立。
- 当$p = 2$时，图G有两个顶点，由于是连通图，这两个顶点之间有一条边，所以$q = 1$。因为$q = 1 = p - 1$，所以命题对于这种情况也成立。

步骤2：归纳假设

假设对于所有具有p个顶点（$1 \leq p \leq k$）的连通图，有$q \geq p - 1$成立。现在要证对于具有k+ 1个顶点的连通图，命题仍然成立。

习 题

2(P206).证明：一个连通图的（p,q）图中，$q \geqslant p-1$

证明：用归纳法。

步骤3：证明$p=k+1$的情况

考虑一个具有$k+1$个顶点的连通图G。我们需要证明$q \geq (k+1)-1=k$。

首先，证明G中存在至少一个度数为1的顶点。

如果所有顶点的度数都大于等于2，则G中的总度数至少为$2(k+1)$。由于每条边连接两个顶点，总度数是$2q$。因此，有$2q \geq 2(k+1)$，即$q \geq k+1$。

这与要证明的$q \geq k$矛盾。因此，G中至少存在一个度数为1的顶点。

设w是一个度数为1的顶点，去掉w及其相邻的边，得到子图$G' = G - w$。

G'有k个顶点且连通。根据归纳假设，知道在G'中有：

$q' \geq k-1$，其中q'表示G'中的边数。

习 题

2(P206).证明：一个连通图的（p,q）图中，q ≥ p−1

证明：用归纳法。

将顶点w及其相邻的边重新添加到G'中，以恢复图G。

由于w的度数为1，重新添加w及其相邻的边将在G'中增加一条边。因此，图G的边数q可以表示为：

$$q = q' + 1$$

由于q' >= k - 1，有：

$$q = q' + 1 >= (k - 1) + 1 = k$$

所以，对于具有k + 1个顶点的连通图G，证明了q >= p - 1。

习 题

3(P206).证明：若G是一个（p,q）图，q>(p-1)(p-2)/2，试证：G是连通图

证明：若G不连通，则G至少有两个支，设其中一个支的顶点个数为m，则其余顶点个数为p-m

则：$q<=m(m-1)/2+(p-m)(p-m-1)/2$

简化后：$q<=(p^2-2mp-p+2m^2)/2$

然而此时有：$(p-1)(p-2)/2-(p^2-2mp-p+2m^2)/2$

$=(m-1)(p-m-1)\geq 0$

矛盾，所以假设不成立。

习 题

4(P206).设G是一个（p,q）图，$\delta(G)>=\lfloor p/2\rfloor$

试证：G是连通图

证明：反证法

若G不连通，则G至少有两个支，设其中顶点个数最少的那个支的顶点个数为m，那么另一个支的顶点个数为p-m。由于m是最少的顶点个数，有 $m \le p-m$，进一步得到 $m \le \lfloor p/2\rfloor$。

在这个顶点个数为m的支中，每个顶点的度数都小于或等于m-1，即顶点的度数都不超过$\lfloor p/2\rfloor-1$。这与题目中给定的$\delta(G)\ge\lfloor p/2\rfloor$相矛盾。

所以，假设不成立，G一定是连通图。

习 题

5(P216)在图6.4.5中，一只车从位置A出发，在半张棋盘上走，每步走一格，走了若干步后到了位置B。证明：至少有一个格点，没有车走过，或被走了不至一次。

0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0

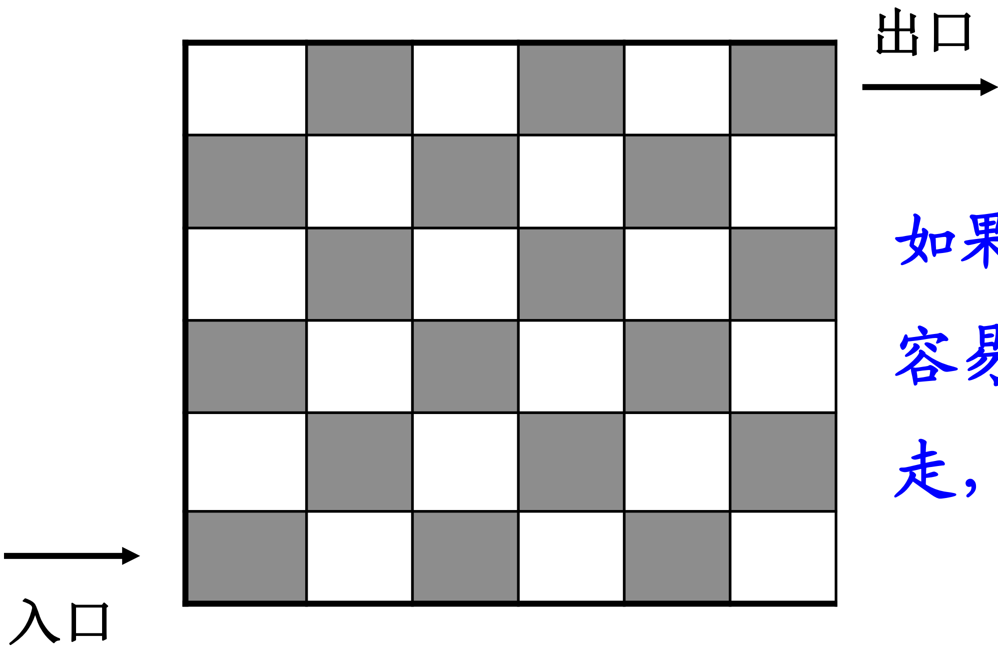
A

B

按图中节点划分成0节点和1节点，车只能一步一格，因此只能从0走向1，或从1走向0（不考虑9宫内）。是一个偶图，0顶点的个数是23，1顶点的个数是22，顶点个数不一样，因此不行。

习 题

3(P221)某展览室共有36个展室，布置如图6.5.6所示。有阴影的展室陈列实物，没有阴影的展室陈列图片。临室之间都有门可以通行。有人希望每个展室都参观一次且仅一次，请设计一条参观路线。



如果能够斜着走，很容易，如果不能斜着走，则不可能。

习 题

9(P216)连通图G的直径d(G)是数max d(u,v)，证明：若G有大于3的直径，则G^C的直径小于3.

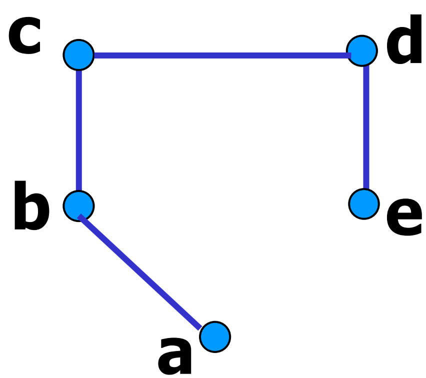


图1

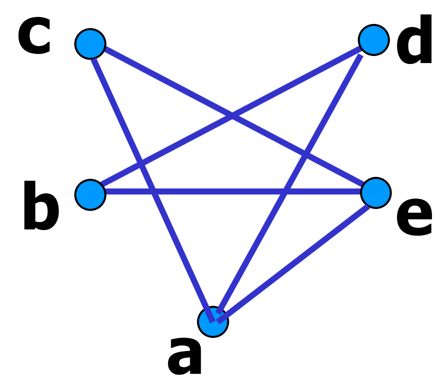
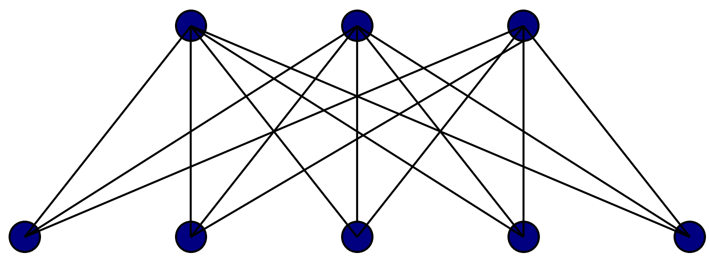


图1的补图

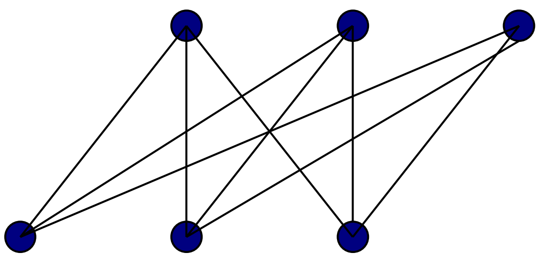
设d(u,v)>3,则对任意顶点w有：w对应u和v有三种情况：
(1)w与u相邻，w与v不相邻，(2)w与u不相邻，w与v不相邻，
(3)w与u不相邻，w与v相邻，对于也是
(1)h与u相邻，h与v不相邻，(2)h与u不相邻，h与v不相邻，
(3)h与u不相邻，h与v相邻，逐对讨论!

习 题

4(P228). 完全偶图$K_{m,n}$是哈密顿图的充分必要条件是什么？



K35



K33

是m=n

10(P228). 证明具有奇数个顶点的偶图不是哈密顿图？

习 题

10(P228).证明具有奇数个顶点的偶图不是哈密顿图?

[证]

设$v_1v_2v_3v_4...v_nv_1$是偶图一个哈密顿圈;

设该偶图的二划分为$\{V_1, V_2\}$

设$v_1 \in V_1$,则$v_2 \in V_2$;

则这个圈$v_1v_2v_3v_4...v_nv_1$上奇数下标的顶点在V_1中,下标为偶数的顶点在V_2中;

因此n是偶数。

习 题

1 (P216). 若图G不是连通图，则G^C是连通图，

习 题

1(P216). 若图G不是连通图，则G^C是连通图

证明:

由于G不连通，G至少有两个分支，设V1是一个分支的顶点集合，V2是G中除V1外的其它顶点的集合;

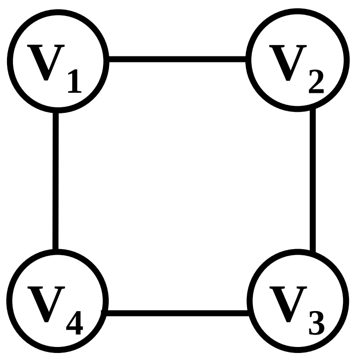
在G^C中:

对于任意顶点u和v, 假如u和v在G中位于两个分支中，u和v在G^C中必有边相连;

否则假设都位于V1中，设w是V2中顶点，u和v在G^C中都与w邻接，因次u与v之间有路。

习 题

1(P234).偶图的邻接矩阵有什么特点？完全偶图的邻接矩阵有什么特点



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

习 题

例3 设G是有个p顶点，q条边的无向图，各顶点的度数均为3。则

(1) 若q=3p-6, 证明:G在同构意义下唯一，并求p, q。

(2) 若p=6，证明:G在同构的意义下不唯一。

[解]（1）

各顶点度数为3，总度数为3p

边数为q, 总度数为2q

q=3/2p,

代入q=3p-6, 得p=4

顶点数是4，各顶点度数是3，是4个顶点的完全图。

同构意义下是唯一的。

习 题

例3 设G是有个p顶点，q条边的无向图，各顶点的度数均为3。则

(2)若p=6，证明:G在同构的意义下不唯一。

[解]（2）

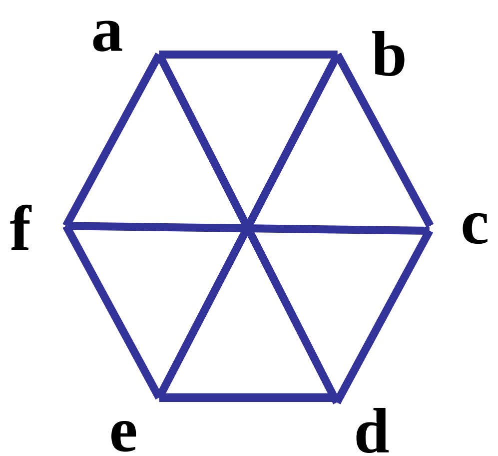


图1

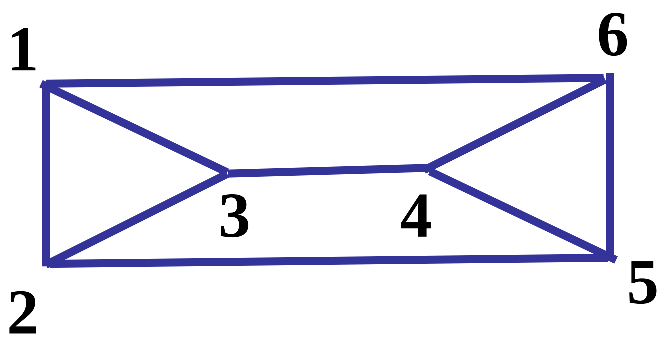


图2

图2中有三角形，图1没有，这两个图不同构

第六章回顾

一、无向图的定义和性质

二、有向图的定义和性质

三、子图的定义和性质

四、生成子图的定义和性质

五、导出子图的定义和性质

六、图的同构的定义和性质

七、顶点的度的定义和性质

第六章回顾

一、通道与闭通道的定义和性质

二、迹与闭迹的定义和性质

三、路与回路的定义和性质

四、连通图的定义与性质

第六章回顾

6.4 补图、偶图

6.5 欧拉图

6.6 哈密顿图