# 第七章：树和割集

7.1 树及其性质

7.2 生成树

7.3 割点、桥和割集

# 7.3 割点、桥和割集

## 本节主要内容

1、割点的定义

2、桥的定义

3、割点的性质

4、桥的性质

5、割集的定义

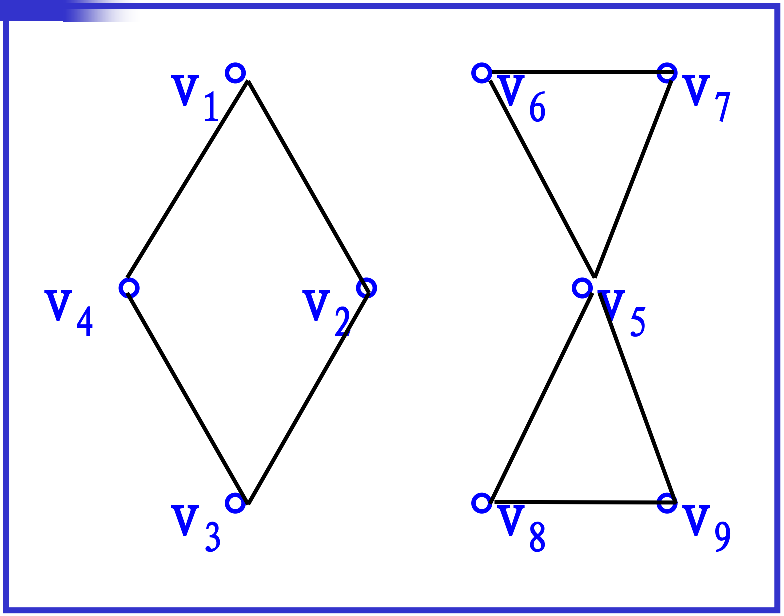
6、割集的性质

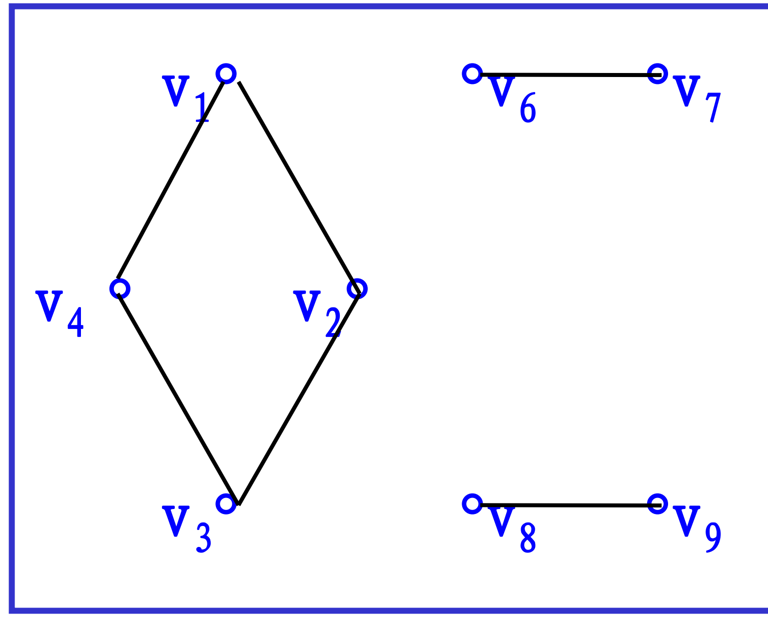
7、树的弦和基本圈

8、相对树T的基本割集系统

目的是讨论哪些顶点和哪些边比较重要?

# 1、割点的定义



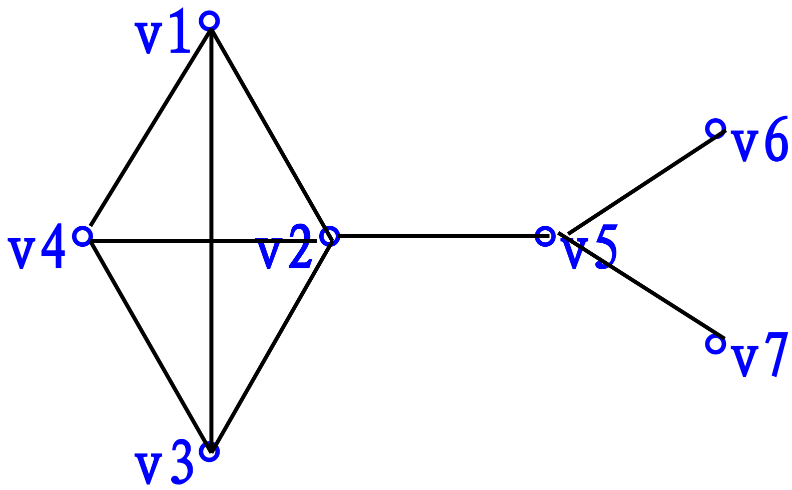




哪些顶点位置重要?

定义7.3.1　设v是图G的一个顶点，如果G-v的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个割点。

上图中$v_5$是割点，其它都不是割点。

# 2、桥的定义




哪些边位置重要?

定义7.3.2　图G的一条边x称为G的一座桥，如果G-x的支数大于G的支数。

图中边$v_2v_5$是桥;

图中边$v_5v_6$, $v_5v_7$也是桥。

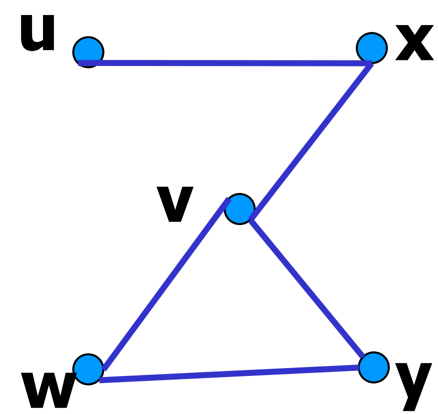
# 3、割点的性质

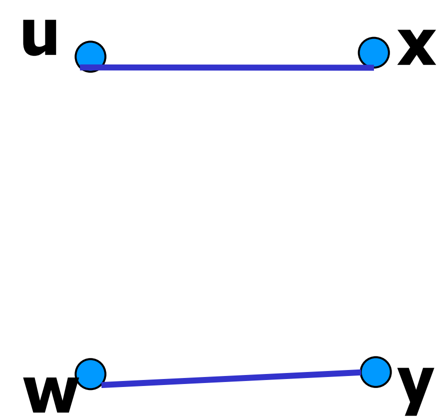
定理7.3.1　设v是连通图G=(V, E)的一个顶点，则下列命题等价:

(1) v是图G的一个割点;

(2) 存在与v不同的两个顶点u和w, v在每一条u到w的路上;

(3) 集合V\{v}有一个二划分{U, W}，∀u∈U, w∈W, v在联结u和w的每条路上。

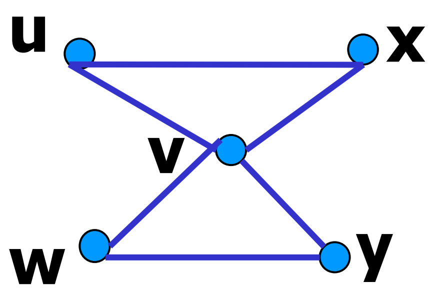


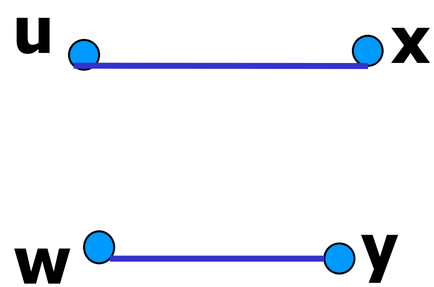
# 3、割点的性质

(1) v是图G的一个割点;

(2) 存在与v不同的两个顶点u和w，v在每一条u到w的路上;




图G




图G-v

证明：由定义，G-v的支数大于G的支数。

则G-v把连通图G分成多个支

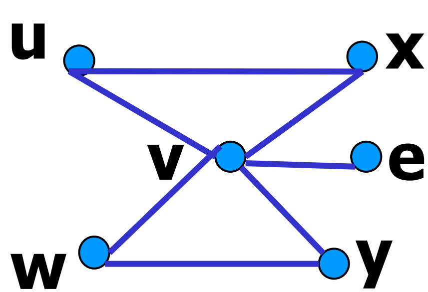
设$G_1$和$G_2$是其中的两个支，取$u\in G_1$, $w\in G_2$

v必然位于所有u到w的路上，否则u和w还连通与u和w位于两个支上矛盾。

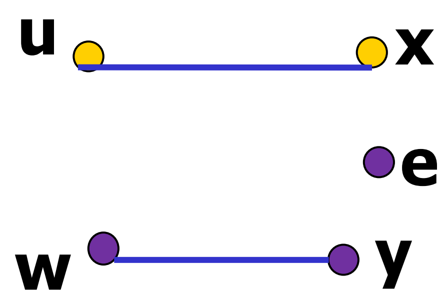
## 3、割点的性质

(2) 存在与v不同的两个顶点u和w，v在每一条u到w的路上；

(3) 集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U, W\}$，$\forall u\in U, w\in W$, v位于联结u和w的每条路上。



图G



图G-v

证明：设$U=\{a|a$和u在G-v中位于一个支中$\}$

$W=\{a|a\notin U\}$

显然：U和W是一个2划分，并且$\forall u\in U, w\in W$, v在联结u和w的每条路上。

# 3、割点的性质

(1) v是图G的一个割点;

⇧

(3) 集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U, W\}$，

$\forall u\in U, w\in W$, v在联结u和w的每条路上。

证明：只证明G-v不连通即可

任取$\forall u\in U, w\in W$, 因为v在联结u和w的每条路上

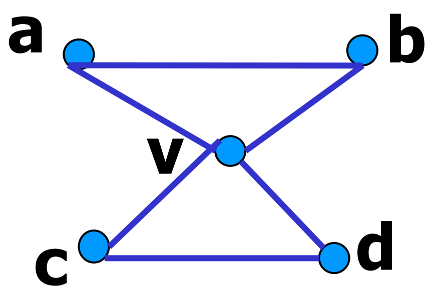
所以u和w在G-v中不连通

因此G-v不连通

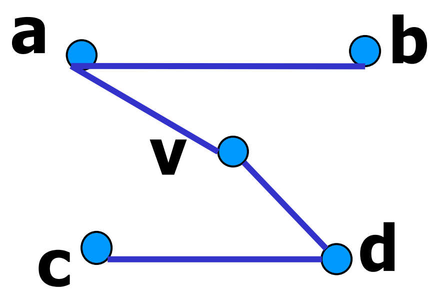
所以v是图G的一个割点。

## 3、割点的性质

定理7.3.2　每个非平凡的连通图至少有两个顶点不是割点。




图G




图G的生成树T

[证] 非平凡图的连通图必有生成树，

非平凡树至少有两个度为1的顶点，它们就是原图的非割点。

最长路的两个端点不是割点。

## 4、桥的性质

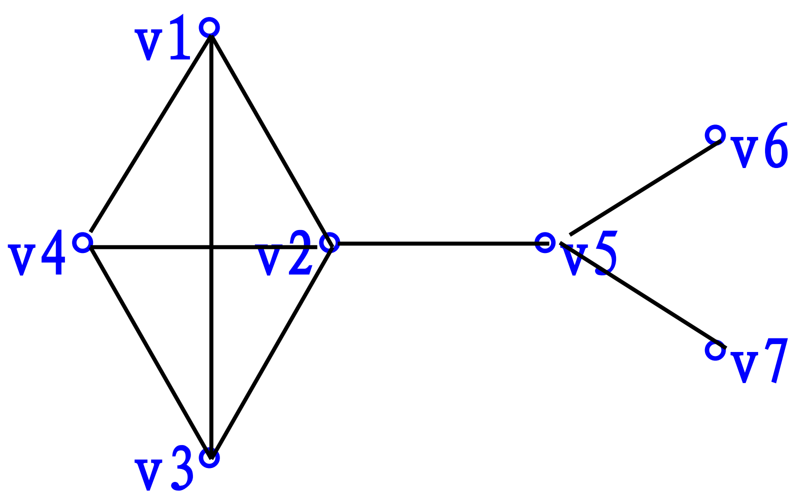
定理7.3.3　设x是连通图G=(V,E)的一条边，则下列命题等价。

(1) x是G的桥;

(2) x不在G的任一圈上;

(3) 存在G的两个不同顶点u和v，使得边x在联结u和v的每条路上;

(4) 存在V的一个划分{U,W}，使得∀u∈U及∀w∈W，x在每一条连接u与w的路上。




与定理7.3.1

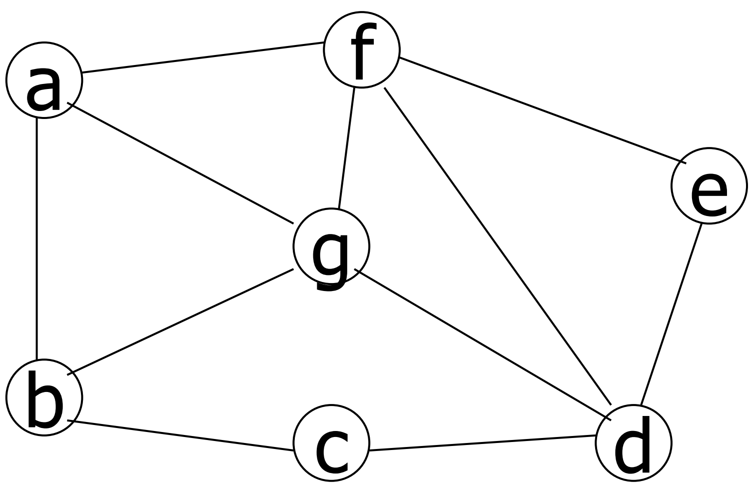
类似，

证明略。

# 5、割集的定义

定义7.3.3　图G=(V, E)，$S \subseteq E$，如果从G中去掉S中的所有边得到的图G-S的支数大于G的支数，而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数，则称S为G的一个割集。

判断下面几个是不是图G的割集




图**G**

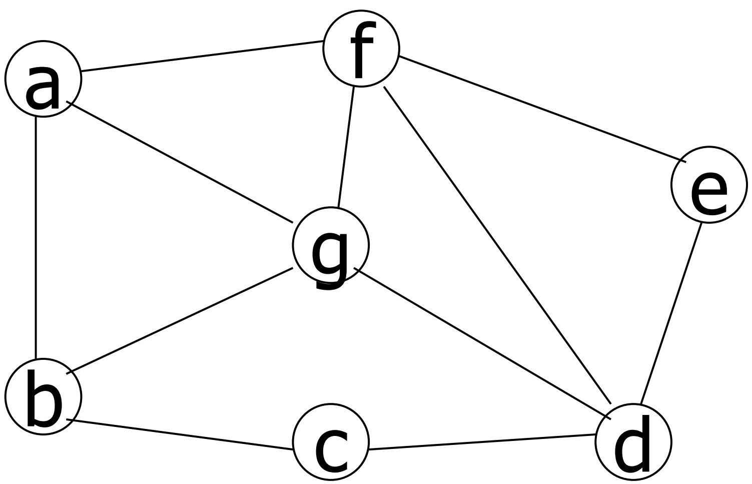
S={fe, ed, fd}

S={fe, ed}

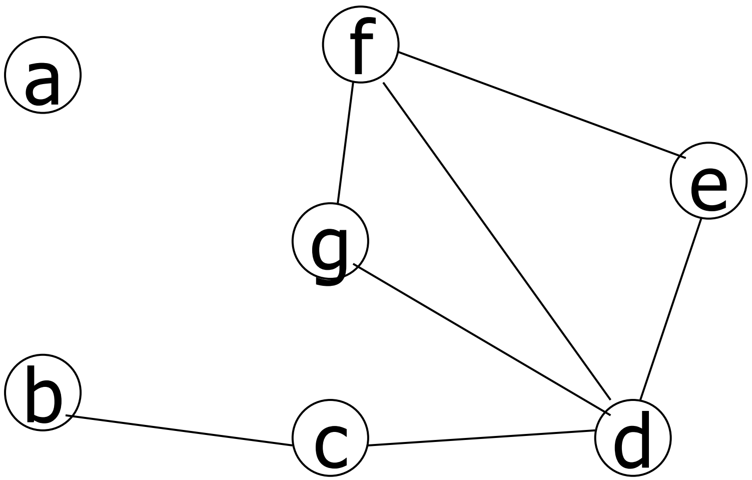
S={af, ag, bg, bc}

# 6、割集的性质

定理7.3.4　设S是连通图G=(V,E)的割集,则G-S恰有两个支。



图G



图G-S

# 6、割集的性质

定理7.3.4　设S是连通图G=(V,E)的割集，则G-S恰有两个支。

[证]　假如G-S的支数大于2，则把S的边逐一加入G-S中；

每加入一条边至多能把G-S的两个支联结在一起；

将G中边逐一加入G-S中，总有一步使之恰好有两个支；

设加入的边为$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$；

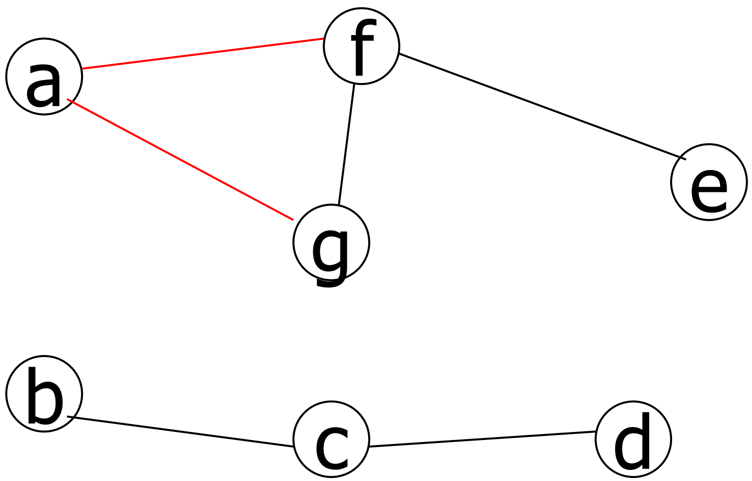
则$S_1=S-\{x_1, x_2, ..., x_n\}$是S的一个真子集；

$G-S_1$的支数也比G的支数多；

这与S是割集矛盾，所以G-S恰有两个支。

# 6、割集的性质

推论7.3.1　设G是一个有k个支的图，如果S是G的割集，则G-S恰有k+1个支。

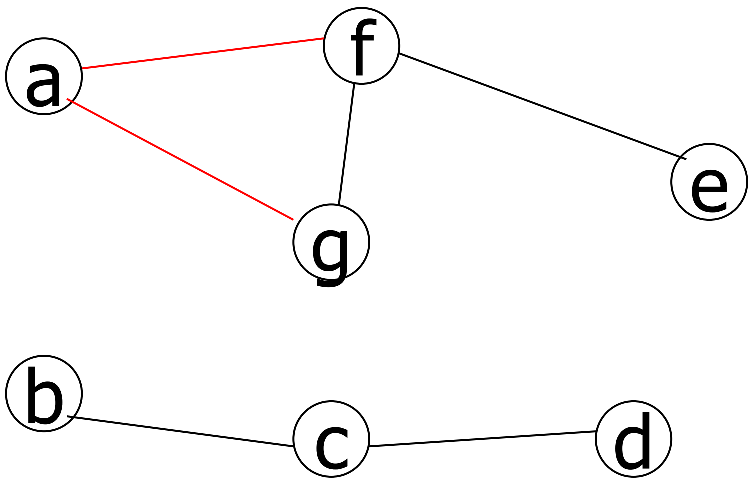



图G

[证明略]

# 6、割集的性质

推论7.3.2　不连通图G的每个割集必是G的某个支的割集。

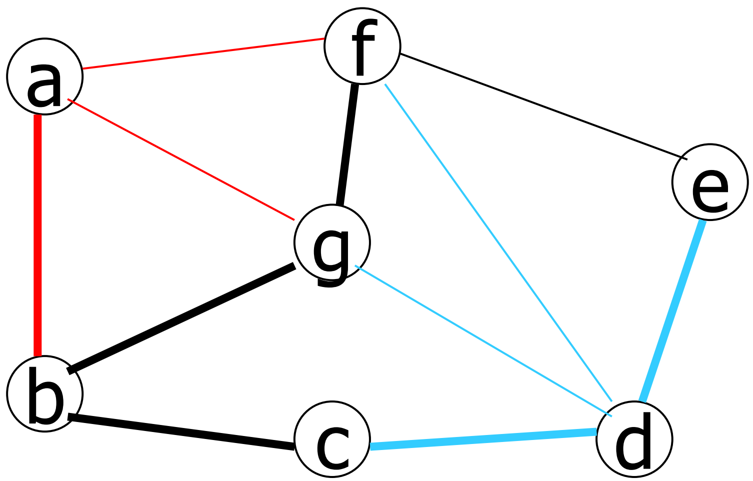



图G

[证明略]

# 6、割集的性质

定理7.3.5　设T是连通图G=(V,E)的任一生成树，则G的每个割集至少包含T的一条边。

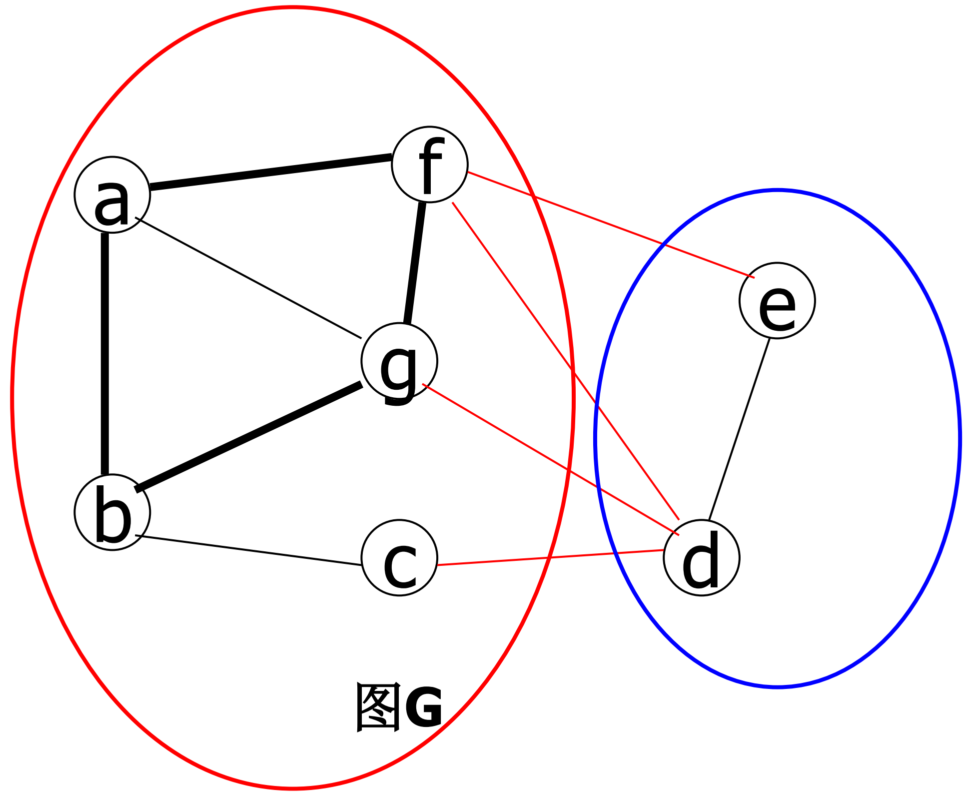



图G

证明略。

# 6、割集的性质

定理7.3.6　连通图G的每个圈与G的任一割集有偶数条公共边。




图G

例如:

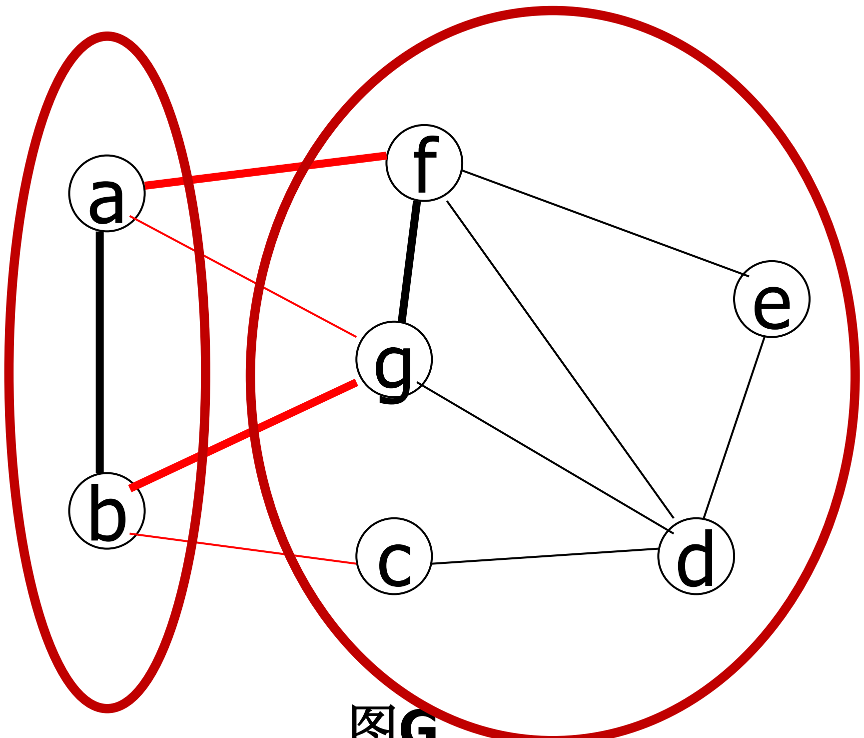
S={fe, fd, gd, cd}

是一个割集

abgfa是一个圈

# 6、割集的性质

定理7.3.6　连通图G的每个圈与G的任一割集有偶数条公共边。

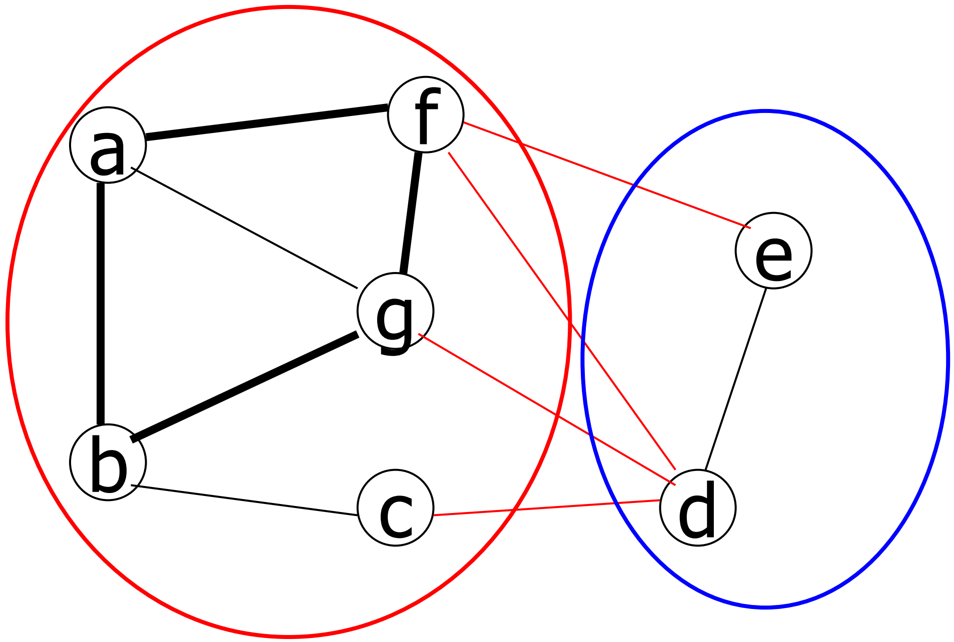



图G

例如:
S={af, ag, bg, bc}
是一个割集
abgfa是一个圈

# 6、割集的性质

图G




例如:

S={fe, fd, gd, cd}

是一个割集

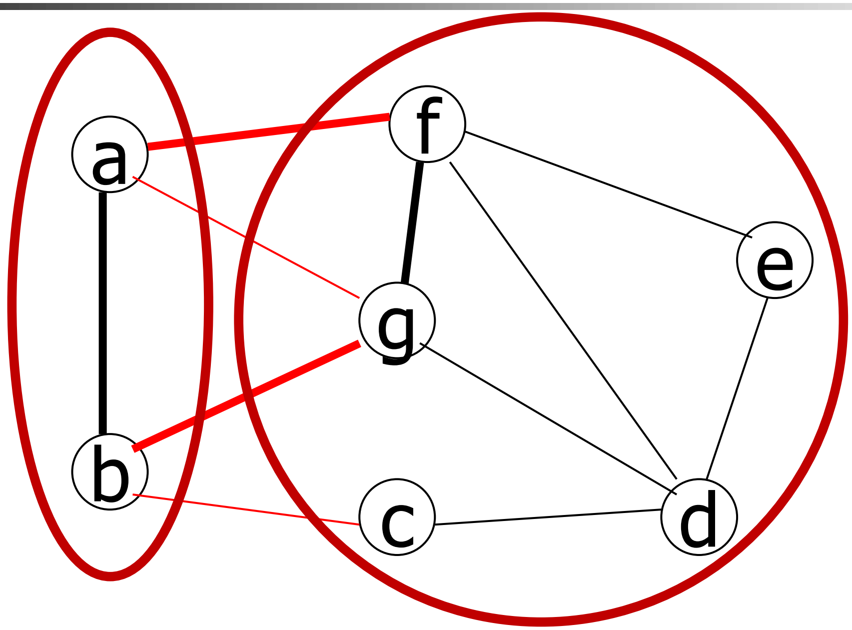
abgfa是一个圈

[证]设C是连通图G中的一个圈，S是G的一个割集，$G_1$和$G_2$是G-S的仅有的两个支;

如果C在一个支中，则C与S无公共边，此时公共边数为偶数0，定理成立;

# 6、割集的性质

图G



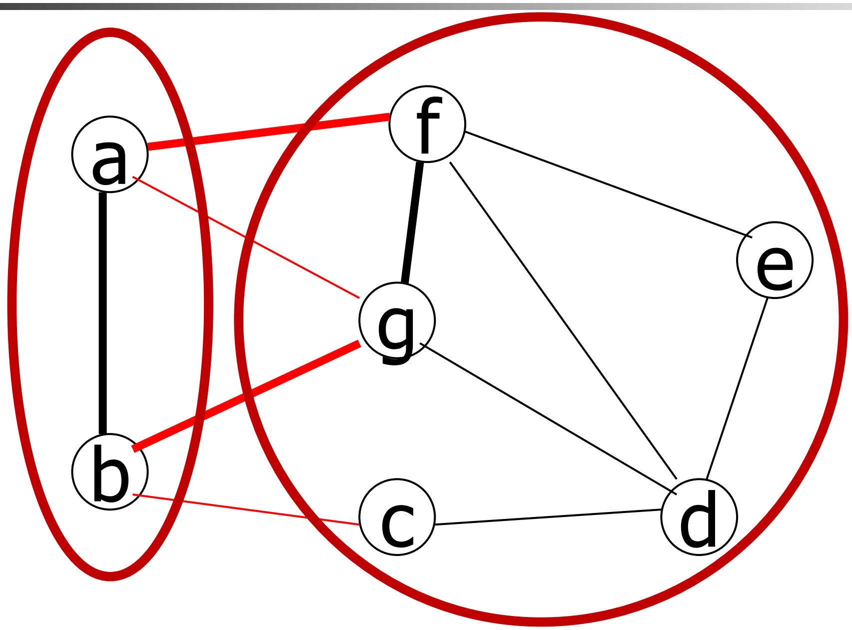

例如:
S={af, ag, bg, bc}
是一个割集
abgfa是一个圈

[证]设C是连通图G中的一个圈，S是G的一个割集，$G_1$和$G_2$是G-S的仅有的两个支;

现在假设圈C与割集S有公共边，也就是C上既有$G_1$的顶点又有$G_2$的顶点;

# 6、割集的性质

图G




例如:
S={af, ag, bg, bc}
是一个割集
abgfa是一个圈

当从$G_1$的一个顶点v开始沿圈周游时，必经过一个端点在$G_1$里，另一个端点在$G_2$里的边进入$G_2$，然后在某个时候又经过另一条这样的边返回$G_1$，如此走下去（例如弓字形），当走完圈的边而回到v时经过偶数次这样的边;

两个端点分别在$G_1$与$G_2$中，这样的边必在S中，所以，这时C与S也有偶数条边。

# 7、与生成树T关联的基本圈系统

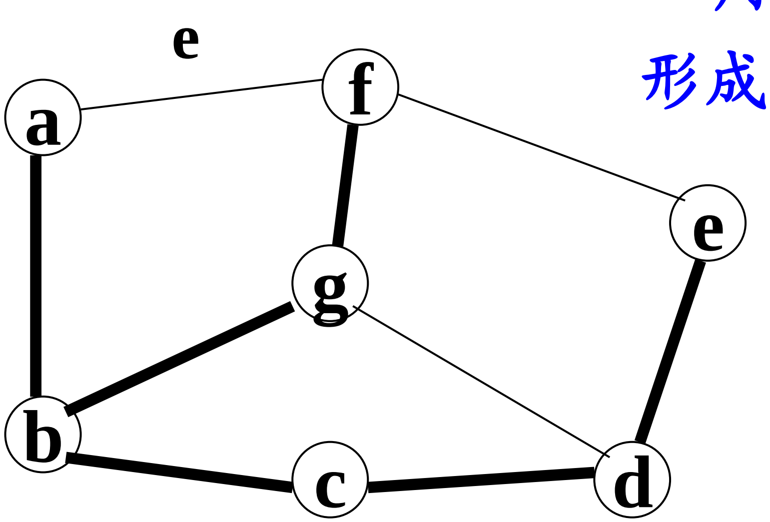
设G=(V, E)是一个连通图，T=(V, F)是G的一个生成树。

E\F中的每条边e为T的弦;

T+e中有唯一的一个圈;

T+e中的唯一圈称为G的相对于生成树T的基本圈，这些基本圈之集称为与T关联的基本圈系统。

判断下面哪些圈是图G中粗边形成的生成树的基本圈?




图G

(1)abgfa √

(2)bcdgb √

(3)gdefg ×

(4)bcdefgb √

# 8、相对树的基本割集系统

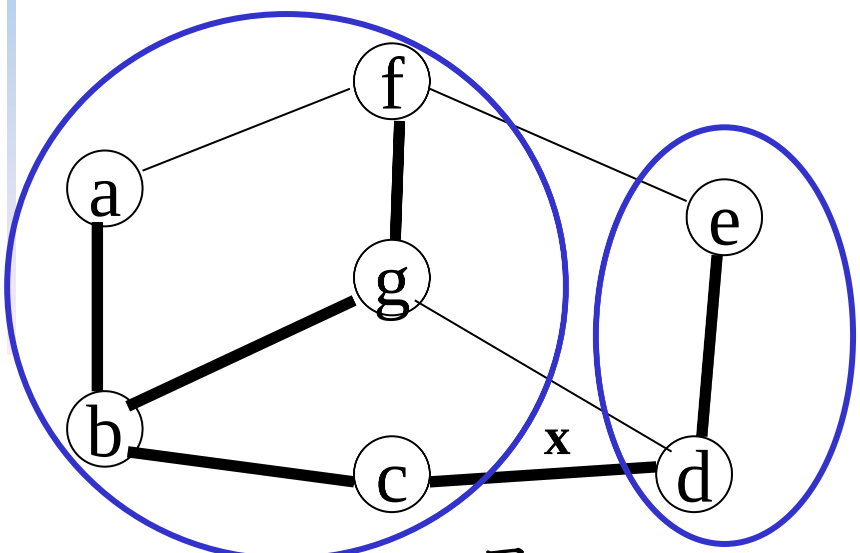
对于T的每条边x，T-x有两个支，于是V被分为两个不相交子集$V_1$和$V_2$；

G的一个端点在$V_1$里，另一个端点在$V_2$里的边形成了G的一个割集，这个割集是由边x确定的；

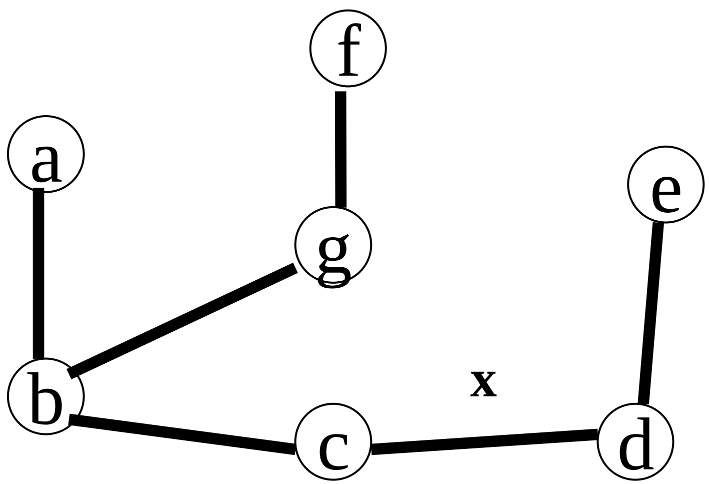
这个割集称由边x确定的基本割集；

T的每条边确定的割集称为G的相对T的基本割集；

所有这些割集之集称为G的相对T的基本割集系统。




图G




图G的生成树T

# 习 题

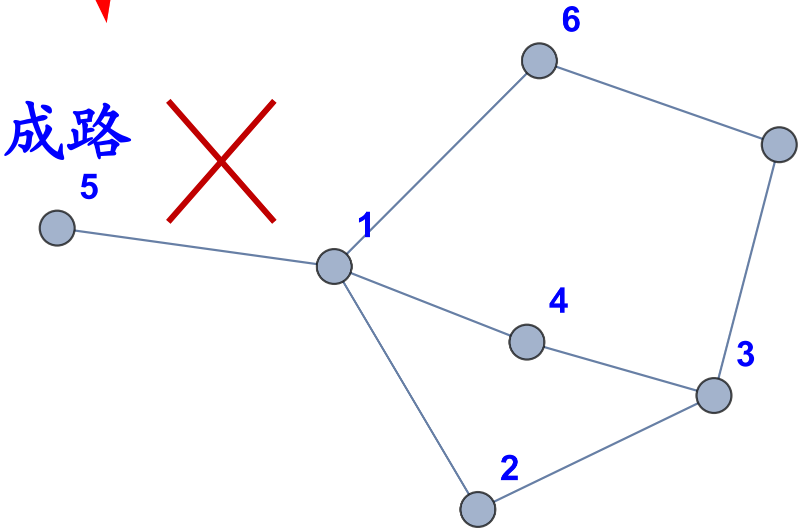
## 判断题

1、如果G的子图连通，则G连通 ×

2、如果G的生成子图连通，则G连通 √

3、如果G有生成树，则G连通 √

4、如果G是连通的，则G有生成路 ×



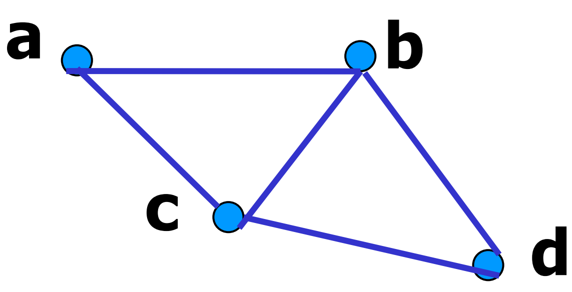
# 习 题

填空题

一个无圈的连通图有几棵生成树?　　1棵

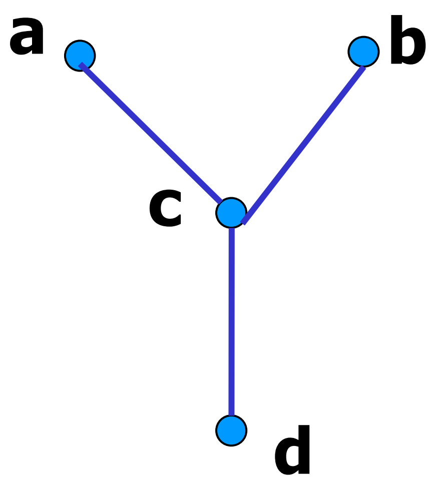
一个长为n的圈有几棵生成树?　　n棵

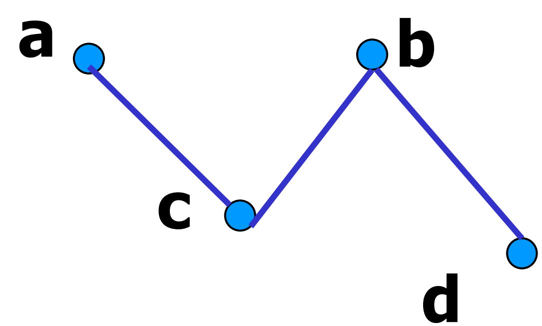
下图有几棵生成树?　　8棵



# 第7章习题

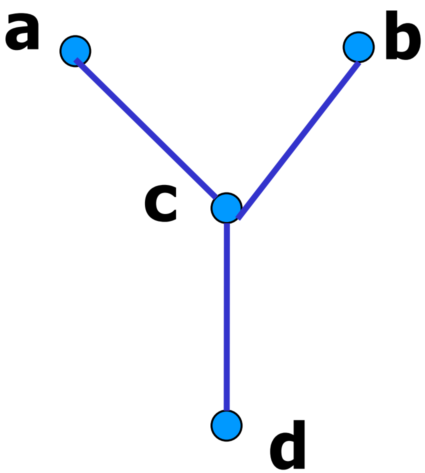
1(P243)、分别画出具有4、5、6、7个顶点的所有树（同构的只算一个）。

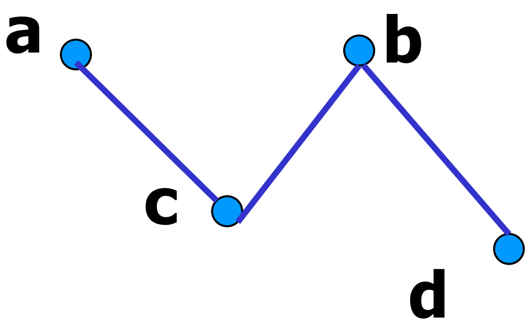


# 第7章习题

2(P244)、每个非平凡树都是偶图。



# 第7章习题

3 (P244). 设$a_1$, $a_2$,…,$a_p$是p个正整数、 p≥2，并且$a_1+a_2+\ldots+a_p=2(p-1)$. 证明：存在一棵具有p个顶点的树，它的各个顶点的度分别为：$a_1$，$a_2$，…，$a_p$.

证明： 对p用归纳法:

p=2时，显然成立。

假设p=k时成立，现在证明当p=k+1时也成立。

即证明当：$a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}$是k+1个正整数、 p≥2，并且$a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}=2k$成立时，有：在一棵具有k个顶点的树，它的各个顶点的度分别为： $a_1$，$a_2$，…，$a_{k+1}$.

# 第7章习题

$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$中必有一个是1，否则

$a_1+a_2+\ldots+a_{k+1} \geq 2k+2.$

还有一个至少是2，否则

$a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}=k+1,$

不妨设$a_1=1$, $a_2\geq 2$,

$(a_2-1), a_3, \ldots, a_{k+1}$是k个正整数

$(a_2-1)+a_3+\ldots+a_{k+1}=2k-2$

按归纳假设，存在k个顶点的树，其度数分别为

$(a_2-1), a_3, \ldots, a_{k+1},$

加一个顶点$a_1$度数是1, 连一条边到$a_2$,

形成一个k+1个顶点的树

其度数分别为;

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k+1}=2k$

得证。

# 第7章习题

4. (P244)、设G是一棵树且$\Delta(G) \geq k$，证明：G中至少有k个度为1的顶点。

证明:

设G的节点数为p，则树的总度数是2p-2;

有一个节点v的度数$\geq$k;

因此其他p-1个节点的度数$\leq$2p-2-k

如果上述p-1个顶点中1度顶点数小于k;

也就是说最多有k-1个1度顶点。

也就是至少有p-1-k+1个节点的度数大于或等于2。

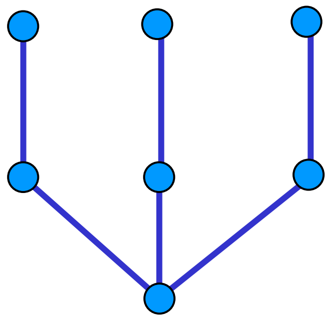
则这p-1个节点的度数大于或等于2p-2k+k-1,

与这个p-1个顶点的度数$\leq$2p-2-k矛盾，

所以至少有k个度为1的节点。

# 第7章习题

**5. (P244)、令G是一个有p个顶点，k个支的森林，证明：G有p-k条边。**



图G

**证明：k个支加k-1条边是树，有p-1条边。**

**去掉加上的k-1条，正好是p-k条边。**

# 第7章习题

6. (P244)、设T是一个有k+1个顶点的树，证明：如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$, 则G 有一个与T同构的子图。

证明：用归纳法

当k=1时，成立;

假设当k=m时成立;

证明当k=m+1时，成立。

当k=m+1时，

$\delta(G)\geq m+1$,

设T是一个m+2个顶点的树，取树的一个一度顶点，设为v, 设v与u连接，去掉v, 则T-v 是一个m+1个顶点的树$T_1$。

则G有一个同构于$T_1$的子图$G_1$。

# 第7章习题

设子图$G_1$顶点为$v_1,v_2,\ldots,v_{m+1}$.

对应树$T_1$的顶点为$t_1,t_2,\ldots t_i,u,t_{i+2}\ldots t_{m+1}$.

设子图$G_1$中对应u的顶点是$v_i$, $v_i$的度数大于或等于m+1,

除子图$G_1$中的顶点外，还有一个顶点w在原图中与$v_i$相连，

在树中恢复节点v和边vu

在子图中加节点w和与$v_i$相连的边，可证是同构的。

# 第7章习题

7(P244)、设一棵树T中有2n个度为1的顶点，3n个度为2的顶点，n个度为3的节点，为这棵树有多少个顶点和边？

解：设顶点数为p，$p=6n$ (1)

总度数：$2n+6n+3n=2p-2$

$p=(11n+2)/2$ (2)

$12n=11n+2$

$n=2$

$p=12$，$q=12-1$

# 第7章习题

8(P244)、一棵树T有$n_2$个度为2的顶点，$n_3$个度为3的顶点，...，$n_k$个度为k的顶点，问T有多少个度为1的顶点？

解：设T有$n_1$个度为1的顶点

所有顶点的个数为：

$$p=n_1+n_2+n_3+...+n_k$$

所有顶点的度数和为：

$$n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k$$

$$n_1+n_2+n_3+...+n_k-1=(n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k)/2$$

$$n_1=\sum_{i=2}^{k} in_i-2\sum_{i=2}^{k} n_i+1$$

# 第7章习题

8(P244)、一棵树T有$n_2$个度为2的顶点，$n_3$个度为3的顶点，. . . ，$n_k$个度为k的顶点，问T有多少个度为1的顶点？

解：设T有$n_1$个度为1的顶点

所有顶点的个数为：

$p=n_1+n_2+n_3+...+n_k$

所有顶点的度数和为：

$n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k$

$n_1+n_2+n_3+...+n_k-1=(n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k)/2$

$$n_1=\sum_{i=2}^{k} i n_i - 2\sum_{i=2}^{k} n_i + 1$$

# 习 题

1(P257).p个顶点的图中，最多有多少个割点?

答：1个顶点的图没有割点;

当p≥2,至少有两个不是割点;

割点数不超过p-2;

P个顶点的路由p-2个割点;

因此p个顶点的图中，最多有p-2个割点。

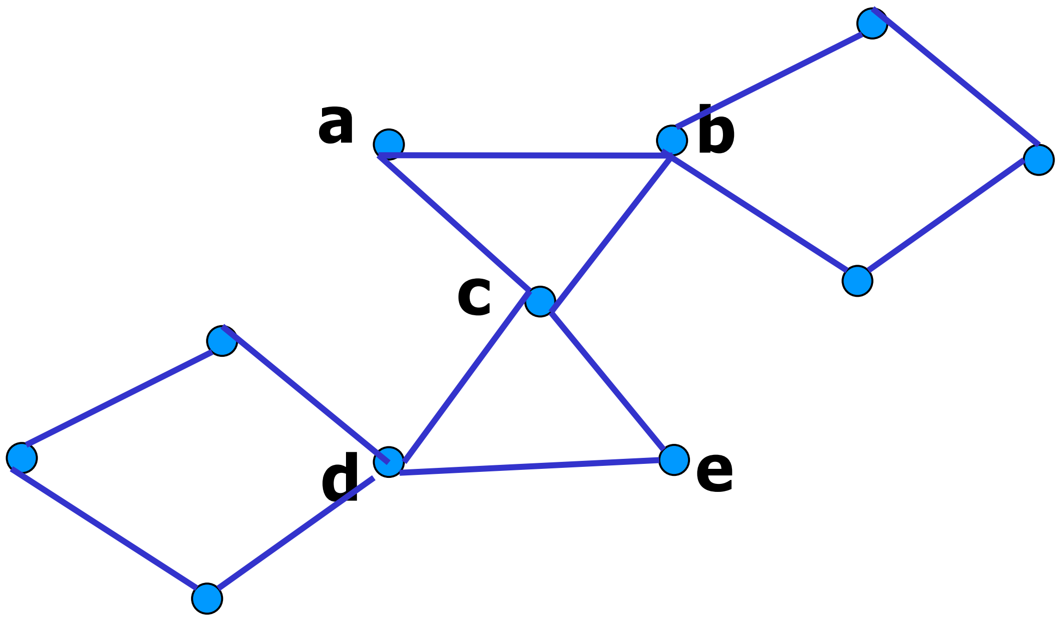
# 习 题

p个顶点的（1）欧拉图，（2）哈密顿图，（3）偶图，分别讨论最多和最少有多少个割点?

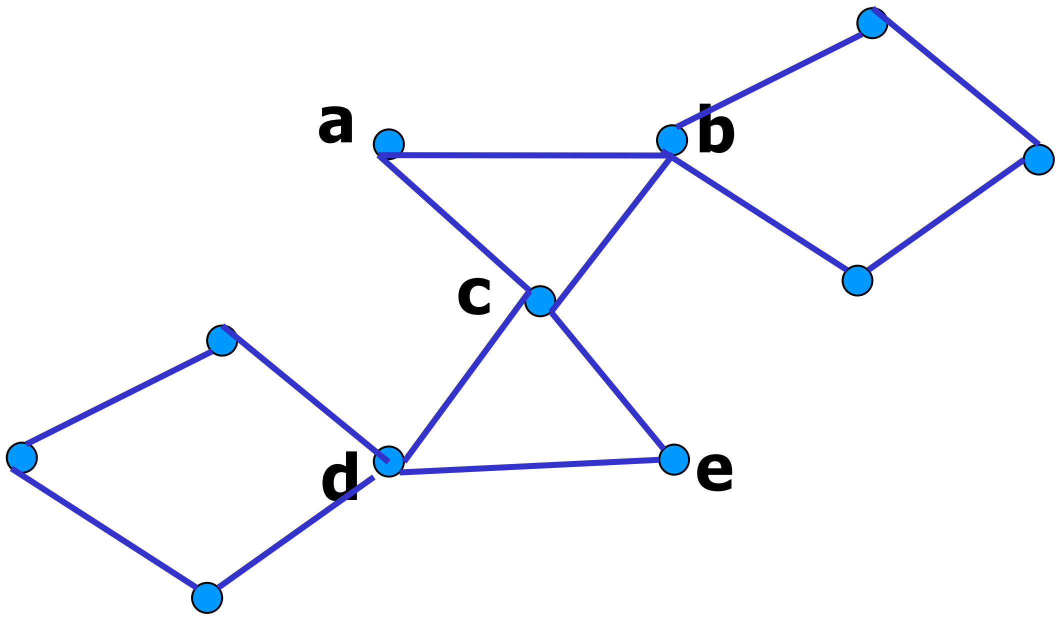
答: (1) p个顶点的欧拉图最多有多少割点?

最少有多少个?

欧拉图由边不相交的圈构成



# 习 题




只有圈与圈之间的交点才可能是割点，

最多有$\lfloor p/3 \rfloor$圈，最多有$\lfloor p/3 \rfloor-1$个割点。

最少0个割点。只有一个圈。

# 习 题

p个顶点的（1）欧拉图，（2）哈密顿图，（3）偶图，分别讨论最多和最少有多少个割点?

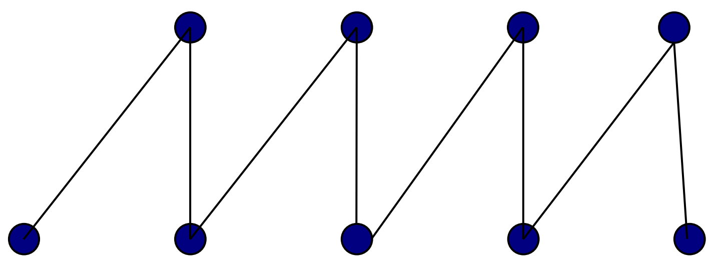
答: (2) p个顶点的哈密顿图最多有多少割点?最少有多少个?

哈密顿图有哈密顿圈，没有割点。

# 习 题

p个顶点的（1）欧拉图，（2）哈密顿图，（3）偶图，分别讨论最多和最少有多少个割点?

答: (3) p个顶点的偶图最多有多少割点? 最少有多少个?



答: (3) p个顶点的偶图最多有p-2割点，最少有0个。

# 习 题

2(P257).证明：恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明：用归纳法，设顶点数为n

当n = 2时成立

假设n ≤ k是成立。证明当n = k+1时成立。

考虑最长路$v_1v_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$

（1）最长路都以v1和vm为端点

因为最长路的端点不是割点，如（1）不成立则与恰有两个顶点不是割点矛盾。

（2）v2不能与这条最长路以外的节点u相连，否则$uv_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$也是最长路。u也不是割点

# 习 题

考虑最长路$v_1v_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$

（1）最长路都以v1和vm为端点

（2）v2不能与这条最长路以外的节点相连

v1和vm不是割点，其它都是割点。

**关键想证明v1是1度顶点**

若v1除与v2相连外还与vi相连，则v1v2…viv1是一个圈，v2不是割点，矛盾，所以v1是一度顶点。

去掉v1与其他节点没有关系。

也就是说去掉v1,其他顶点除v2和vm外还是割点。

只有v2和vm不是割点，按归纳假设，是一条路

加上v1还是一条路。

# 习 题

3(P257).证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证明：

去掉桥，形成两个支；

在每个支中，有一个2度顶点，其他都是3度顶点；

设支中顶点少的那个支顶点数为p，则其边数为(3p-1)/2。

可证：p=1,2,3,4都不行，因此p至少是5

两个分支顶点数最少是10.

# 习 题

4(P257).设v是图G的一个割点，试证v不是G的补图$G^C$的割点。

证明:

假设v是图G的一个割点，

$G_1=G-v$是一个不连通图，

216页的第1题，若图G不是连通图，则$G^C$是连通图，

因此$G_1$的补图是一个连通图，

因此v不是$G^C$的割点。

# 习 题

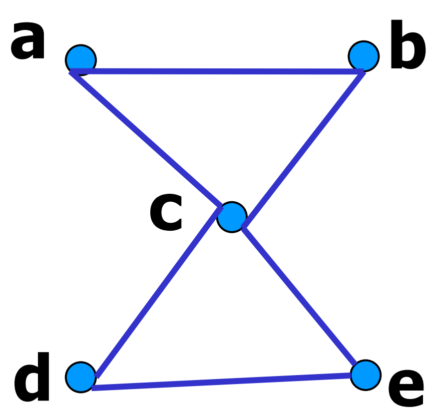
9(P258).

(1)有割点的连通图是否一定不是欧拉图?

(2)是否一定不是哈密顿图?

(3)有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图?

解:




(1)有割点的连通图有可能是欧拉图;

# 习 题

9(P258).

(1)有割点的连通图是否一定不是欧拉图?

(2)是否一定不是哈密顿图?

(3)有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图?

解:

(2)一定不是哈密顿图;

(3)有桥的连通图一定不是哈密顿图也不是欧拉图。

# 第7章和第8章回顾

1、树和森林的定义

2、树的性质

3、极小连通图的定义

4、顶点的偏心率

5、图的半径和中心点

# 第7章和第8章回顾

1、生成树的定义

2、生成树的性质

3、生成树间的距离

4、生成树间的变换

5、最小生成树的定义

6、最小生成树的Kruskal算法

7、最小生成树的prim算法

# 第7章和第8章回顾

1、割点的定义

2、桥的定义

3、割点的性质

4、桥的性质

5、割集的定义

6、割集的性质

7、树的弦和基本圈

8、相对树T的基本割集系统