

一、 选择题（每小题 2 分，共 20 分）

（请将答案填写在首页的答题纸中，在本处答题无效！）

1. $A \Delta B = \emptyset$ 的充要条件是：

- A. $A=B$; B. $B=\emptyset$; C. $A=\emptyset$; D. $A \cap B = \emptyset$

2. $A=\{1,2,3\}$ 到 $B=\{a,b,c,d,e\}$ 的单射的个数是：

- A. 60; B. 20; C. 120; D. 30。

3. $|A|=7$, A 中既自反又反对称二元关系的个数是：

- A. 3^{21} ; B. 0; C. 3^{42} ; D. 2^{21} 。

4. 在无穷集合基数的讨论中，以下哪个说法不正确？

- A. 可数集的幂集还是可数集。
B. 连续统个连续统集的并集还是连续统。
C. 可数集与连续统的并集是连续统。
D. 可数个可数集的并集还是可数集。

5. 6 个顶点的 3 条边的无向简单图有多少（同构的算一个）

- A. 3 B. 5 C. 4 D. 6

6. f 是集合 A 到 B 的单射，则：

- A. $|A|=|B|$ B. $|A| \leq |B|$ C. $|A| \geq |B|$ B. 不能确定

7. 以下哪个答案可能是 6 个顶点的图的度数分布：

- A. (2,2,2,2,2,6) B. (1,1,1,1,1,1)
C. (1,2,2,3,5,5) D. (3,3,3,3,3,4)

8. n ($n>1$) 个顶点的图，去掉一个顶点，可形成的最大支数和最小支数分别是：

- A. n 和 1 B. $n-1$ 和 1 C. $n-1$ 和 2 D. n 和 2

9. 图 G_1 和 G_2 同构，下面哪条不正确？

- A. G_1 和 G_2 顶点数相等
B. G_1 和 G_2 边数相等
C. 如果 G_1 有一个 m 度顶点，则 G_2 也有一个 m 度顶点。
D. G_1 的边数+ G_2 的边数=完全图的边数

10. 色数是 1 的图当且仅当是？

A. 1 个顶点 B. 偶图 C. 稀疏图 **D. 零图**

二、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

（对的打√，错的打×，请将答案填写在首页的答题纸中，在本处答题无效！）

1. 去掉一个割点可以形成很多分支，去掉桥正好形成两个分支。√

2. 简单来说，映射和关系都可以看做是笛卡尔积的子集。√

3. 既对称又反对称的关系是存在的。√

4. 极大平面图不一定是连通图 ×

5. A, B 为集合，则 $A \times B \subseteq A$ 不可能成立。×

三、简答题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 简述：（1）简述什么是等价关系？（2 分）

（2）给出集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的一个 6 个元素的等价关系（3 分）

答：（1）具有自反性，对称性，传递性的关系称作等价关系。

（2） $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$

2. （1）简述哈斯图的画法（2 分）

（2）画出集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 上的偏序关系 $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$ 的哈斯图（3 分）

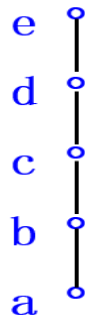
答：（1）

偏序关系是自反的，因此其关系图中，每个节点上都有环。既然都有，就可以省略。

由于反对称性， x, y 之间只能有一条有向边。如果从 x 到 y 有边，则把 y 放在 x 上方。表示箭头的方向。这样就可以省略箭头。

偏序关系是传递的，只要有 (x, y) 和 (y, z) ，就必然有 (x, z) ，因此只要在前驱和后继之间连线即可。

（2）



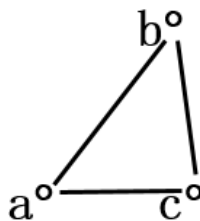
3. (1) 简述什么是关系 R 的相容闭包。 (2 分)
 (2) 给出集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 上的关系 $R = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$ 的相容闭包 (3 分)

答: (1) 包含 R 的自反对称关系的交集成为 R 的相容闭包。
 (2) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a)\}$

4. (1) 说明什么是欧拉图? 什么是哈密顿图? (2 分)
 (2) 给出一个既是欧拉图又是哈密顿图的图。 (3 分)

答: (1) 包含图 G 的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹, 有欧拉闭迹的图成为欧拉图。

包含图 G 的所有顶点的圈成为哈密顿圈, 有哈密顿圈的图称为哈密顿图。
 (2)



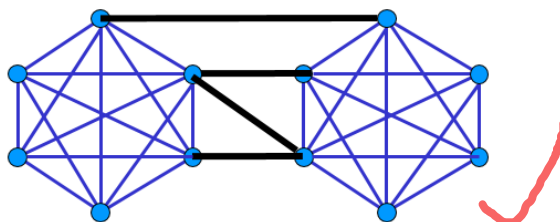
5. (1) 说明什么是顶点连通度、边连通度和最小度? (2 分)
 (2) 现有 1 个图的的顶点连通度、边连通度和最小度分别为 3, 4, 5, 请画出这个图。 (3 分)

答: (1)

图 G 的顶点连通度 $\kappa = \kappa(G)$ 是为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点的数目。

图 G 的边连通度 $\lambda = \lambda(G)$ 是为了使 G 产生不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边数。

(2)



6. (1) 说明什么是割点？桥和割集？ (2 分)

(2) 画出一个图，该图中有两个割点和两个桥。 (3 分)

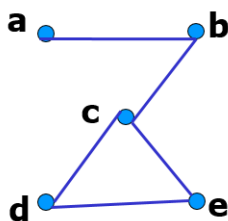
答：(1)

设 v 是图 G 的一个顶点，如果 $G-v$ 的支数大于 G 的支数，则称顶点 v 为图 G 的一个割点。

图 G 的一条边 x 称为 G 的一座桥，如果 $G-x$ 的支数大于 G 的支数。

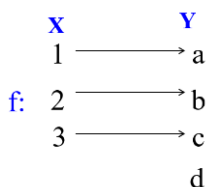
图 $G=(V, E)$, $S \subseteq E$, 如果从 G 中去掉 S 中的所有边得到的图 $G-S$ 的支数大于 G 的支数，而去掉 S 的任一真子集中的边得到的图的支数不大于 G 的支数，则称 S 为 G 的一个割集。

(2)



7. (1) 简述什么是左逆映射和存在左逆映射的条件？ (2 分)

(2) 给出如下映射 f 的两个左逆映射。 (3 分)



答：(1) 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果存在一个映射 $h: Y \rightarrow X$, 使得: $hf = I_X$, 则称映射 f

是左可逆的, h 称为 f 的左逆映射

(2) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$ 和 $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 2)\}$

8. (1) 简述什么树。 (2 分)

(2) 给出树的三个性质 (定义中的性质除外) (3 分)

答: (1) 无圈的连通图成为树。

(2) 设顶点数为 p , 边数为 q , 则 $p = q + 1$

去掉一条边, 正好形成两个支

加一条边, 形成唯一的一个圈

树是偶图

至少有两个 1 度顶点

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 证明: 证明恰有两个一度顶点的树是一条路。

证明: 用归纳法

当 $p=2$ 时成立

设 $p=k$ 时成立

当 $p=k+1$ 时, 去掉一条边正好形成两个树,

可证每棵树恰有两个一度顶点或只有一个顶点。

也就是说每棵树要么是一条路, 要么是一个顶点,

合起来还是一条路。

2. 设 R, S 都是非空集合 A 上的二元关系, 且他们都是对称的。证明: $R \circ S$ 具有对称性当且仅当 $R \circ S = S \circ R$ 。

证明:

(1) 如果 $R \circ S$ 具有对称性, $\forall (x, z) \in R \circ S$, 则: $(z, x) \in R \circ S, \exists y, (z, y) \in R, (y, x) \in S$, 由 R, S 的对称性得:

$(y, z) \in R, (x, y) \in S$, 因此 $(x, z) \in S \circ R$, 因此 $R \circ S \subseteq S \circ R$

$\forall (x, z) \in S \circ R, \exists y, (x, y) \in S, (y, z) \in R$, 由 R, S 的对称性得:

$(y, x) \in S, (z, y) \in R$, 因此 $(z, x) \in R \circ S$, 由 $R \circ S$ 的对称性, $(x, z) \in R \circ S$
因此 $S \circ R \subseteq R \circ S$

因此 $R \circ S = S \circ R$

(2) 如果 $R \circ S = S \circ R$ 。 $\forall (x, z) \in R \circ S, \exists y, (x, y) \in R, (y, z) \in S$, 由 R, S 的对称性得:

$(y, x) \in R, (z, y) \in S$, 因此 $(z, x) \in S \circ R, (z, x) \in R \circ S$,
所以: $R \circ S$ 对称

五、计算题 (每小题 5 分共 20 分)

- ✓ 1. 集合 $|A|=5$, 计算 A 上商集基数为 3 的等价关系的个数。(计算结果并给出步骤)

答:

设 $A=\{a, b, c, d, e\}$, 则 A 的三划分有:

$\{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}\}, \{\{a\}, \{c\}, \{b, d, e\}\}, \{\{a\}, \{d\}, \{b, c, e\}\}, \{\{a\}, \{e\}, \{b, c, d\}\},$

$\{\{b\}, \{c\}, \{a, d, e\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, c, e\}\}, \{\{b\}, \{e\}, \{a, c, d\}\},$

$\{\{c\}, \{d\}, \{a, b, e\}\}, \{\{c\}, \{e\}, \{a, b, c\}\}$

$\{\{d\}, \{e\}, \{a, b, c\}\}$

$$C(5, 2)=10$$

$\{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}, \{\{a\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}, \{\{a\}, \{b, e\}, \{c, d\}\}$

.....

$$C(5, 1) \times C(4, 2)/2=15$$

A 上商集基数为 3 的等价关系的个数为 25

- ✓ 2. 求 K_4 的子图的个数 (计算出结果并给出说明)。

答:

1 个节点的子图个数为 4

2 个节点的子图个数为 $C(4, 2) \times 2=12$

3 个节点的子图的个数为 $C(4, 3) \times 2^3=32$

4 个节点的子图的个数为 $2^6=64$

K_4 的子图的个数是 112

3. 有限集合 $|E| = n (n>0)$, 计算到 E 上的既不是自反, 也不是反自反, 还不是对称的二元关系的个数。(计算出结果并给出说明)。

答:

设 A 为 E 上自反关系的个数, B 为 E 上反自反关系的个数, C 为 E 上对称关系的个数。

则原题要求的个数为

$$C_5^2$$

$$\frac{C_5^2 C_3^2}{2}$$

$$A_2$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k 2^k$$

$$\begin{aligned}
|A^c \cap B^c \cap C^c| &= N \\
&- |A| - |B| - |C| \\
&+ |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\
&- |A \cap B \cap C| \\
&= 2^{n \times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2} \\
&\quad + 0 + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2} \\
&\quad - 0 \\
&= 2^{n \times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2} \\
&\text{或} \\
&= 2^{n \times n} - 2^{n(n-1)+1} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2+1} \\
&\text{或} \\
&= (2^n - 2)(2^{(n \times n - n)/2} - 2^{(n \times n - n)/2}) \\
&\text{或} \\
&= (2^n - 2)(2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)/2}) \\
&\text{或} \\
&= (2^n - 2)(2^{n \times n - n} - 2^{(n \times n - n)/2})
\end{aligned}$$

4. 求集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 到集合 $B = \{1, 2, 3\}$ 的满射的个数

答:

设 A_i 为 i 没有原象映射集合, 则从 A 到 B 的满射个数是:

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| \\
&= N - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 3^4 - C(3,1)(3-1)^4 + C(3,2)(3-2)^4 - C(3,3)0^4 \\
&= 81 - 48 + 3 \\
&= 36
\end{aligned}$$