第九章：平面图与图的着色

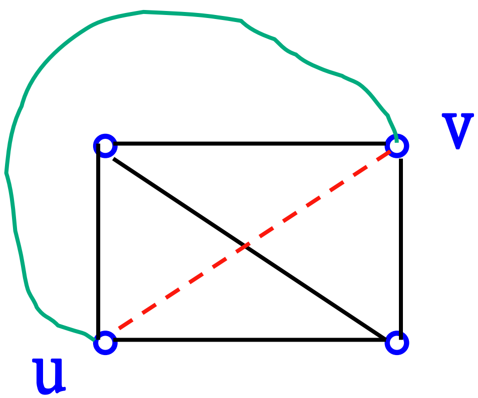
9.1 平面图及其欧拉公式

9.2 非哈密顿平面图

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

9.4 图的顶点着色

*9.5 图的边着色（不讲）



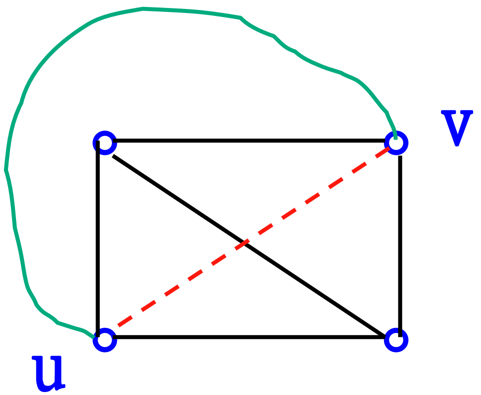
平面图

第九章：平面图与图的着色

平面图的定义，性质，顶点着色和边着色。

内容

除了顶点外，其他位置边不相交的图



建模

电路图，地图，各种建筑平面图的建模。本章对平面图的一般性质进行讨论。图的顶点着色（分类）应用广泛。

9.1 平面图及欧拉公式

本节主要内容

1、平面图的定义

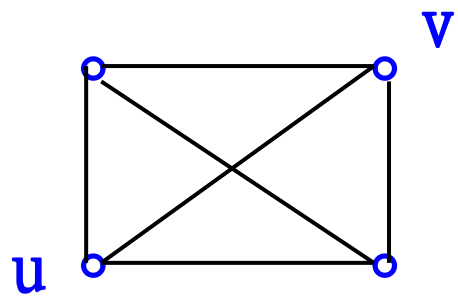
2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

3、最大(极大)可平面图

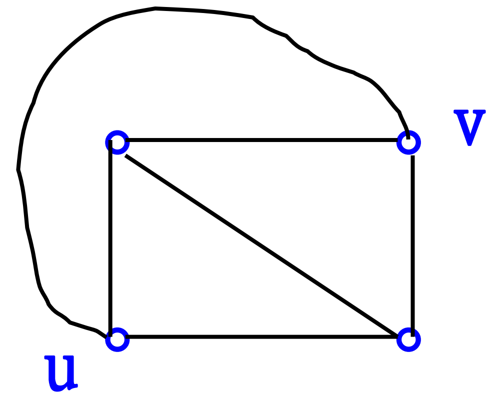
4、最大(极大)平面图的性质

1、平面图的定义

平面图



可平面图

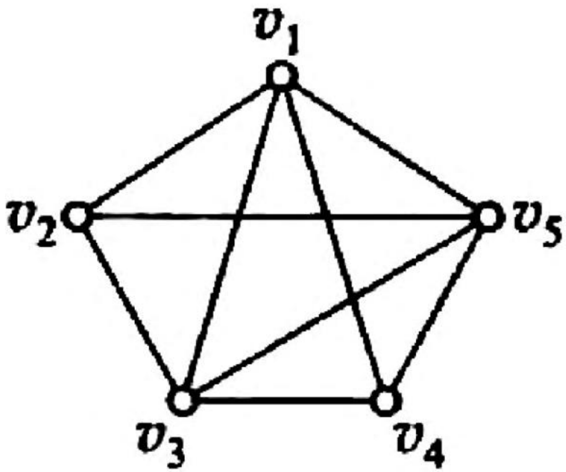


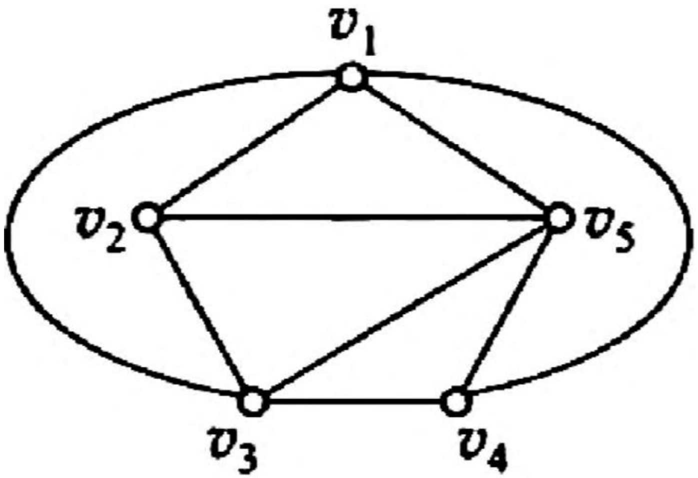
平面图

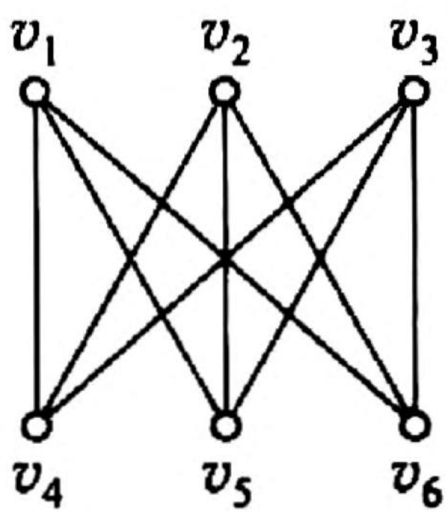
定义9.1.1 图G称为被嵌入平(曲)面S内，如果G的图解已画在平面S上，而且任何两条边均不相交(除顶点外)，已嵌入平面的图称为平面图。

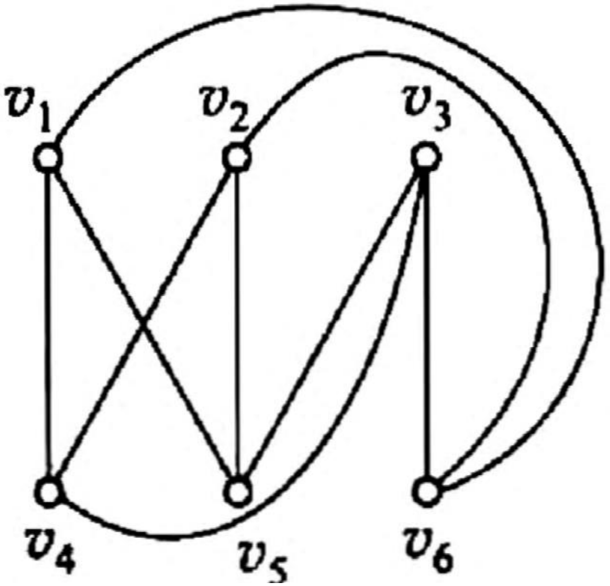
如果一个图可以嵌入平面，则称此图是可平面的。

1、平面图的定义



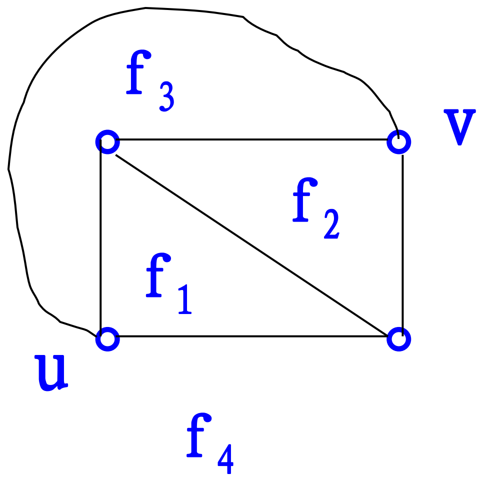


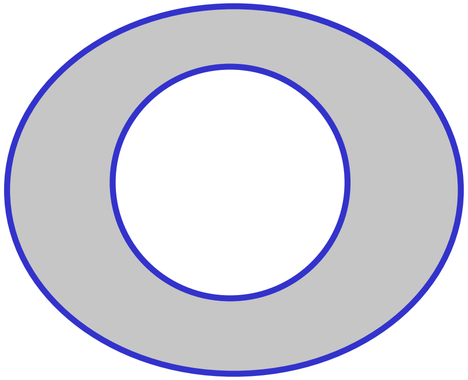




2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

平面图的内部面与外部面



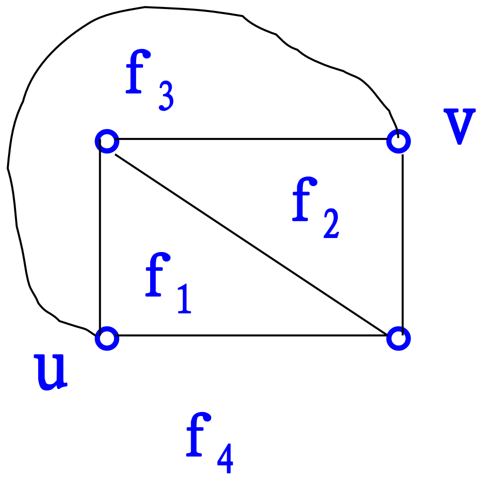


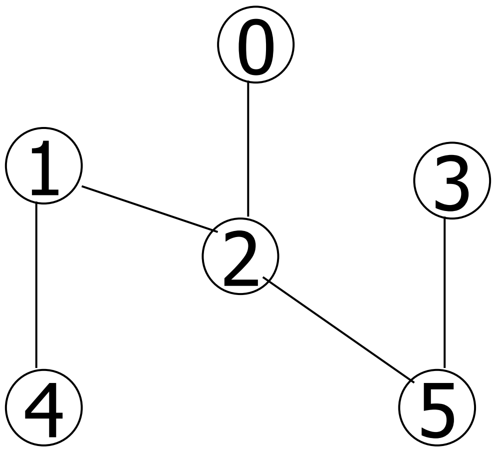
灰色环不是单连通区域

定义9.1.2 平面图把平面分成了若干个区域，这些区域都是单连通的，称之为G的面，其中无界的那个连通区域称为G的外部面，其余的单连通区域称为G的内部面。

单连通区域是指能够收缩到一个点的区域

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。





平面图的每个内部面都是G的某个圈围成的单连通区域。

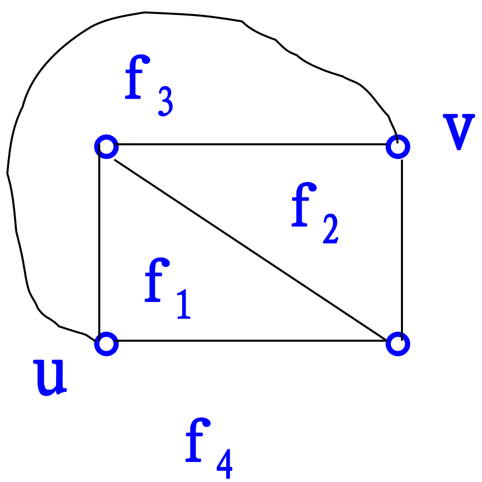
没有圈的图没有内部面，只有一个外部面。

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

如果用V表示多面体的顶点，用E表示棱，用F表示面数。

$$V - E + F = 2$$

定理9.1.1(欧拉公式) 如果一个平面连通图有p个顶点、q条边、f个面，则：$p - q + f = 2$



如图：顶点数4

边数6

面数4

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

定理9.1.1(欧拉公式) 如果一个平面连通图有p个顶点、q条边、f个面，则：$p-q+f=2$

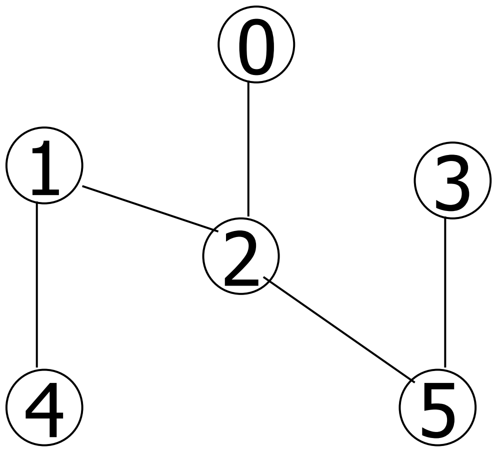
证：对面的个数用归纳法

当f=1时，G没有内部面

所以G中无圈，G是树；

$p-q+f=1+1=2$

假如对一切不超过f-1个面的平面连通图，欧拉公式成立，现证f个面时的情况。



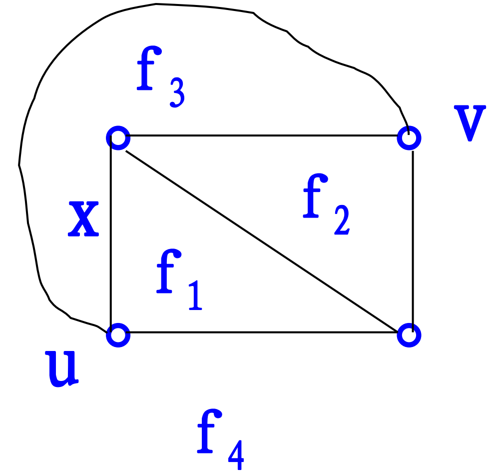
只有一个面的平面连通图（树）

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

$f\geqslant 2$, G至少有一个内部面，从而G中有一个圈，

从这个圈上去掉一条边x，

则打通了两个面，

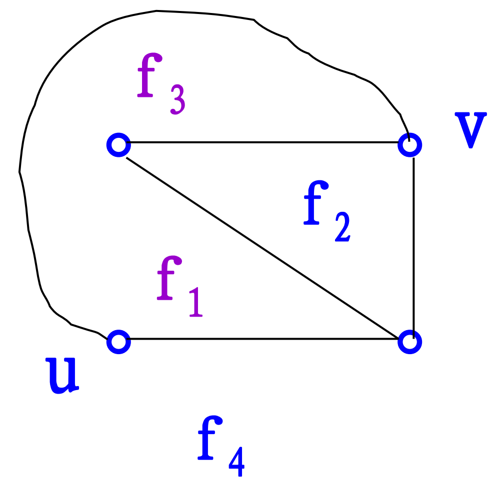


G-x有p个顶点，q-1条边，f-1个面

由归纳假设

$p-(q-1)+(f-1)=2$

$p-q+f=2$

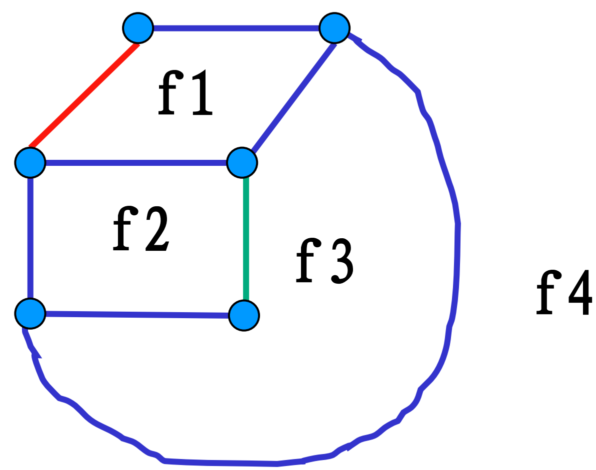


因此面数是f时也成立。

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

推论9.1.1 若平面连通图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$q=n(p-2)/(n-2)$



图G

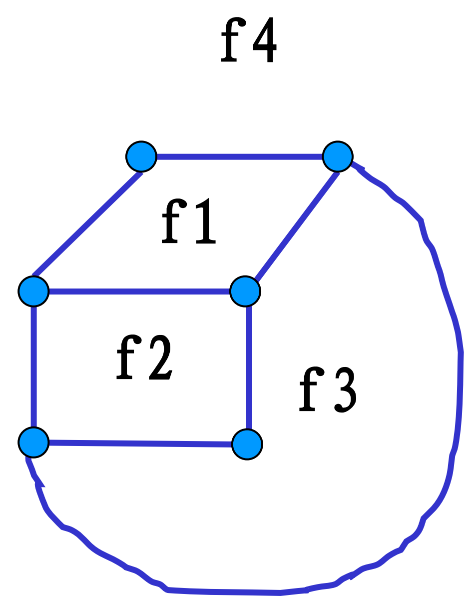
如图有4个长为4的面，边数为8，顶点数为6

$8=4(6-2)/(4-2)$

2、平面图的面数、顶点数、边数之间的关系。

推论9.1.1 若平面连通图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$q=n(p-2)/(n-2)$



证:

因为G的每个面都是长为n的圈围成的

并且G的每条边都在G的两个面上

$q=fn/2$ $f=2q/n$

$\boxed{p-q+2q/n=2}$ $q=n(p-2)/(n-2)$

定理9.1.1(欧拉公式) 如果一个平面连通图有p个顶点、q条边、f个面，则: $\boxed{p-q+f=2}$

3、最大(极大)可平面图

一个图称为最大可平面图，如果这个可平面图再加入一条边，新图必然是不可平面的。

观察下面两个图，他们是不是最大可平面图

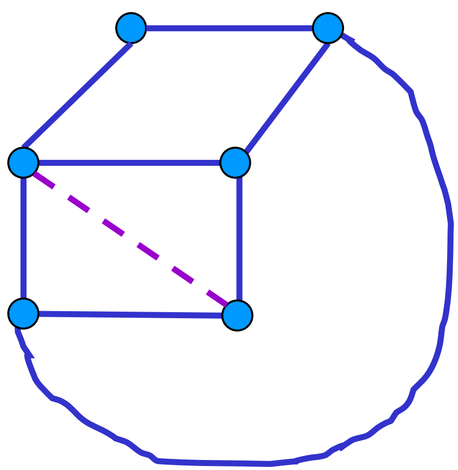


图1

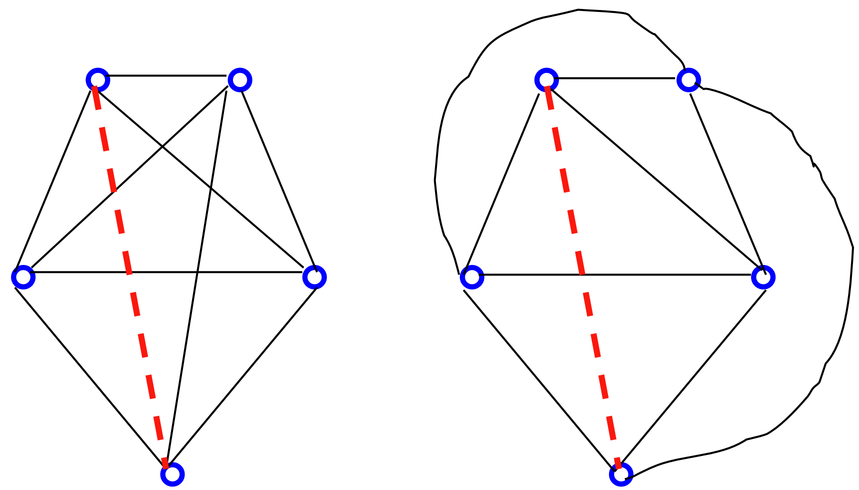
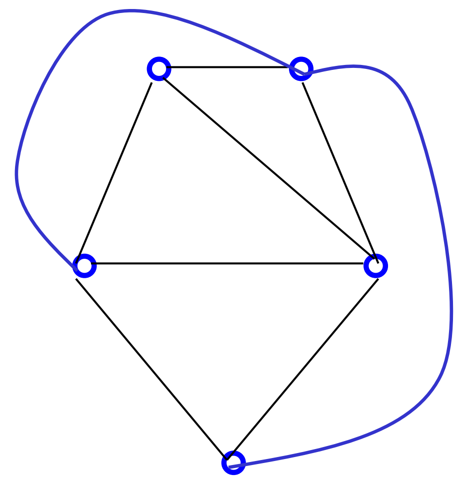


图2

图1不是最大可平面图　　图2是最大可平面图

4、最大(极大)平面图的性质

在一个非极大平面图中加边，观察极大可平面图每个面的边数的特点。



最大(极大)可平面图

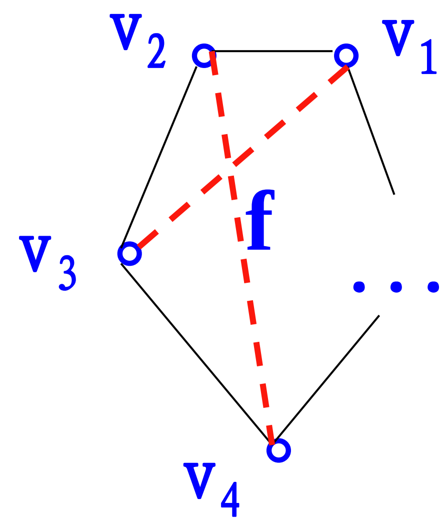
最大(极大)可平面图每个面都是三角形！

4、最大(极大)平面图的性质

证: 若G的一个面不是三角形(例如: 图中面f)

(1)假如面f上有两点之间没边，则在此面中把不相邻的两顶点连接起来，不影响平面性，与G是极大平面图矛盾。

因此不可能有两点之间没有边



(2)假如面f上每两点都有边

若v_1, v_3和v_2, v_4在G中都有边, 我们可以看到, 在保证面f的情况下，这两个边不可能不相交;

综合以上情况, 极大平面图的每个面都是三角形。

4、最大(极大)平面图的性质

推论9.1.2 设G是一个有p个顶点q条边的最大可平面图，则G的每个面都是三角形，

$q=3p-6, p \geqslant 3$。

推论9.1.1 若平面连通图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$q=n(p-2)/(n-2)$

4、最大(极大)平面图的性质

推论9.1.3 设G是一个(p,q)可平面连通图，而且G的每个面都是一个长为4的圈围成的，则：$q=2p-4$

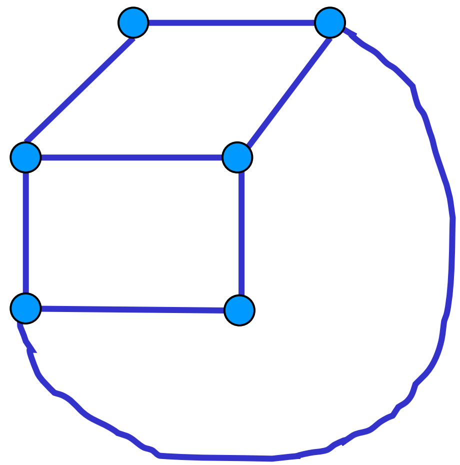


图1

推论9.1.1 若平面连通图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$q=n(p-2)/(n-2)$

4、最大(极大)平面图的性质

推论9.1.2 设G是一个有p个顶点q条边的最大可平面图，则G的每个面都是三角形，

$q=3p-6, p\geqslant 3$。

推论9.1.3 设G是一个(p,q)可平面连通图，而且G的每个面都是一个长为4的圈围成的，则：$q=2p-4$

推论9.1.4 若G是任一有p个顶点q条边的可平面图$p\geqslant 3$，则$q\leqslant 3p-6$，

若G是任一有p个顶点q条边的可平面图，$p\geqslant 3$且没有三角形，则$q\leqslant 2p-4$

4、最大(极大)平面图的性质

推论9.1.5 K_5与$K_{3,3}$都不是可平面图

证:

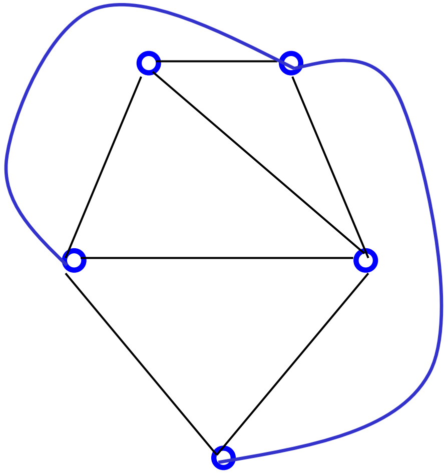
利用推论9.1.4, 任意(p, q)可平面图都满足
$q \leqslant 3p-6$, 这里$p \geqslant 3$

对于k_5来说:

$p=5$, $q=10$;

$q=10 \leqslant 3p-6=9$, 这是不成立的

所以K_5不是可平面图。



最大可平面图

4、最大(极大)平面图的性质

如果$K_{3,3}$是平面图

显然，在偶图中每个圈的长至少为4

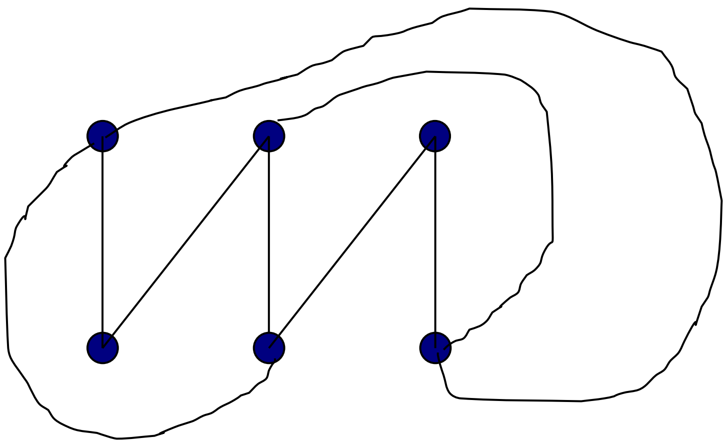
如果$K_{3,3}$是平面图

$K_{3,3}$应满足$q \leqslant 2p-4$

$K_{3,3}$中$p=6, q=9$

$9 \leqslant 8$

$K_{3,3}$不是平面图



$K_{3,3}$

4、最大(极大)平面图的性质

推论9.1.6 每个平面图G中顶点度的最小值不超过5，即$\delta(G)\leqslant 5$

仍然用推论9.1.4，$q\leqslant 3p-6$

如果G的每个顶点的度大于5，也就是$\geqslant 6$

那么所有顶点的度数和$\geqslant 6p$

也即$2q\geqslant 6p$，即$q\geqslant 3p$

不满足推论9.1.4，$q\leqslant 3p-6$

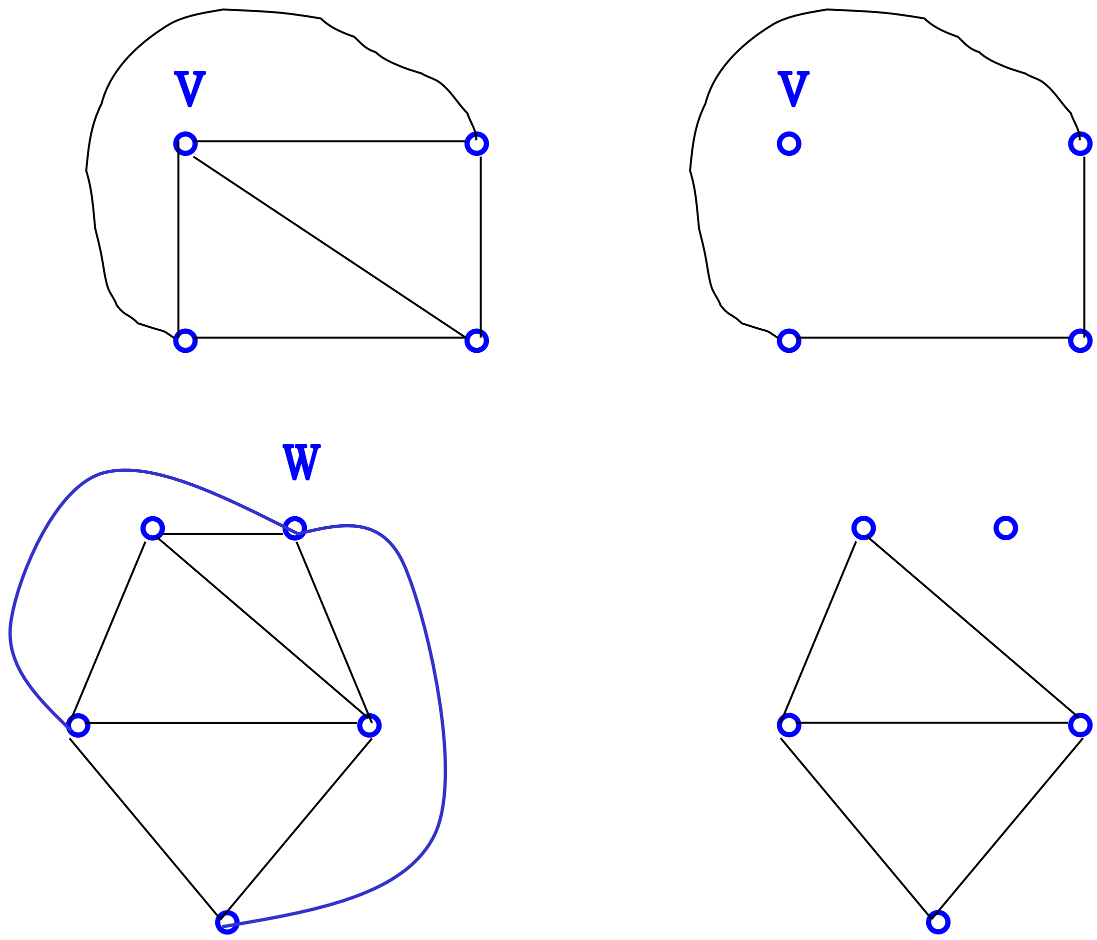
每个平面图G中顶点度的最小值不超过5，

即$\delta(G)\leqslant 5$。

4、最大(极大)平面图的性质

例题:顶点数p≥4的最大平面图,δ(G)≥3

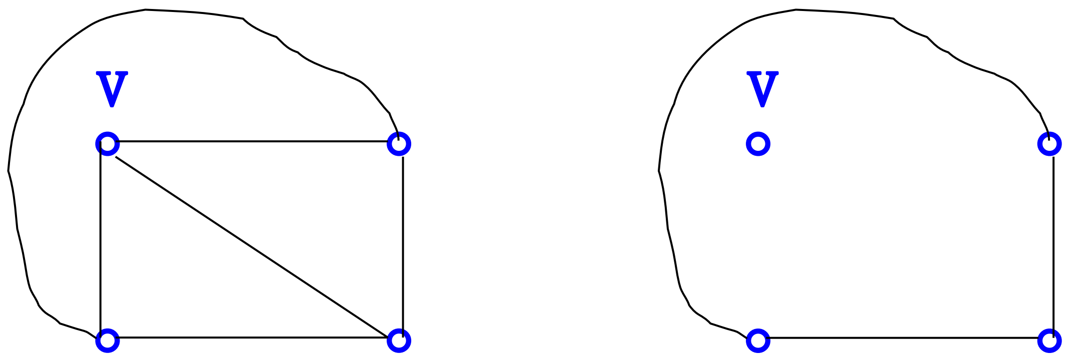
证明:



4、最大(极大)平面图的性质

例题：顶点数p$\geqslant$4的最大平面图，$\delta(G)\geqslant 3$

证明：



设G是最大平面图，其最小度顶点为v，

则G-v也是一个平面图，v在G-v的一个面内，

在这个面内，边界上至少有三个顶点，

由极大性，v必然与这些顶点都相连，

因此，$\delta(G)\geqslant 3$。

4、最大(极大)平面图的性质

1(P281)、设G是一个有p个顶点的平面图，$p\geqslant 4$，证明：G中有4个度不超过5的顶点

只要证明最大平面图有4个度不超过5的顶点即可

用反证法：若不超过5度的顶点没有4个，最多为3个，则至少有p-3个顶点的度数$\geqslant 6$

由刚才的例题 顶点数$p\geqslant 4$的最大平面图，$\delta(G)\geqslant 3$

因此其它三个顶点大于等于3

顶点度数和$\geqslant (p-3)\times 6+3\times 3=6p-9$

也即$2q\geqslant 6p-9$　　$q\geqslant 3p-4.5$

这与平面图满足$q\leqslant 3p-6$矛盾

因此，超过5的度数不可能大于等于p-3个。

4、最大(极大)平面图的性质

3(P281)、若G是顶点数$p>11$的平面图，试证G^c不是平面图。

证明:

设G的顶点数是p

则G与G^c的边数是$p(p-1)/2$。

如果G与G^c都是平面图

应该：$p(p-1)/2 \le 6p-12$

解不等式：大约 $p<=10.77$

所以：若G是顶点数$p>11$的平面图，

则G^c不是平面图。

9.1 平面图及欧拉公式

定理9.1.1(欧拉公式) 如果一个平面连通图有p个顶点、q条边、f个面，则：$p-q+f=2$

推论9.1.4 若G是任一有p个顶点q条边的可平面图$p\geqslant 3$，则$q\leqslant 3p-6$，若G没有三角形，则$q\leqslant 2p-4$

推论9.1.6 每个平面图G中顶点度的最小值不超过5，即$\delta(G)\leqslant 5$

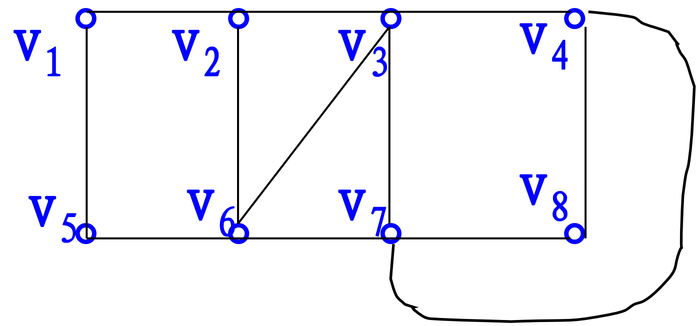
9.2 非哈密顿平面图

本节主要内容

1、平面哈密顿图的性质

2、平面哈密顿图的性质的应用

1、平面图哈密顿图的性质



有哈密顿圈$v_1v_2v_3v_4v_8v_7v_6v_5v_1$

圈内有3条边围成的面2个

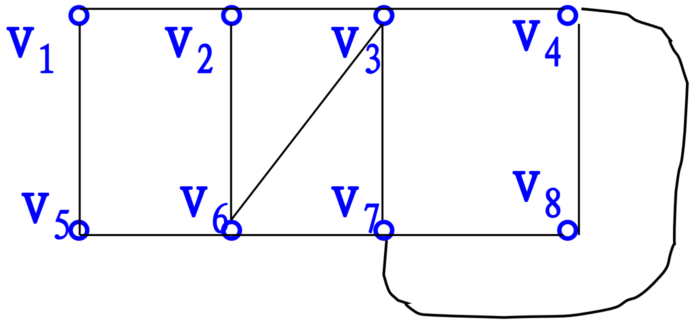
圈内有4条边围成的面2个

圈外有3条边围成的面1个

圈外有7条边围成的面1个

1、平面图哈密顿图的性质

定理9.2.1　设G=(V,E)是一个(p,q)平面哈密顿图,C是G的哈密顿圈,令f_i为C的内部由i条边围成的面的个数,g_i为C的外部i条边围成的面的个数,则:



$$1\times f_3+2\times f_4+3\times f_5+\ldots+(p-2)\times f_p=\sum_{i=1}^{p}(i-2)f_i=p-2$$

$$1\times g_3+2\times g_4+3\times g_5+\ldots+(p-2)\times g_p=\sum_{i=1}^{p}(i-2)g_i=p-2$$

$$\Downarrow$$

$$1\times(f_3-g_3)+2\times(f_4-g_4)+3\times(f_5-g_5)+\cdots=\sum_{i=1}^{p}(i-2)(f_i-g_i)=0$$

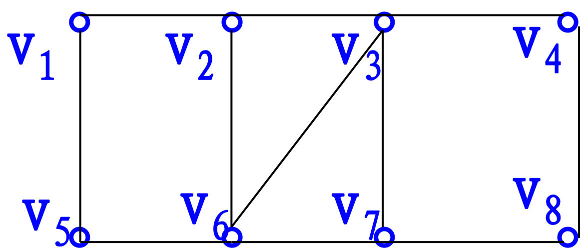
1、平面图哈密顿图的性质

[证] 已知C是G的哈顿圈

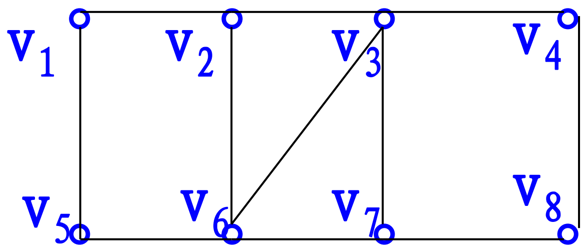
首先明确2件事。

(1) 因为C是G的哈密顿圈,所以G的所有顶点都在圈C上,因此C的内部与外部不再含有G的顶点,

(2) C的内部的每个面都是由C上的边及C上两顶点间的“连线”围成的区域。



1、平面图哈密顿图的性质



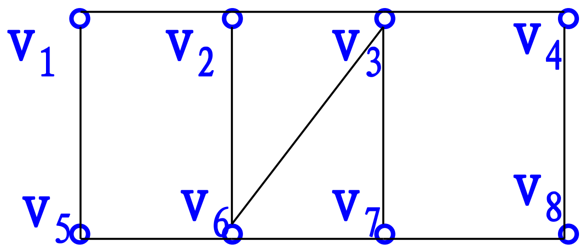
设q'是C的内部(不含C)边的条数，这些边之集记为E',

考虑q'与内部面的个数之间的关系。

考虑q'与内部面上的边数之间的关系。

1、平面图哈密顿图的性质

先把C内部的边都去掉，这时C里只有一个面，



把E′的一条边加入C中，就把C分成两个面，

再加入E′的另一条边就把这两个面之一分为两个面，如此进行，直到把E′的边都加入为止，

这样，C的内部就有q′+1个面。

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{p} f_i = q' + 1$$

1、平面图哈密顿图的性质

其次，由i条边围成面共f_i个，这些面上的边的总数为$i\times f_i$，所以，C内部的q′+1个面上的边数共有

$$3\times f_3+4\times f_4+5\times f_5+\ldots+p\times f_p=\sum_{i=1}^{p} i\times f_i$$

其中，C上的每条边在每个内部面上至多出现一次且不是两个内部面的公共边，所以在上述计数中C上每条边各计数一次，

但E′中的每条边是两个面之公共边，所以每条边计数两次，因此有

1、平面图哈密顿图的性质

$$3\times f_3+4\times f_4+5\times f_5+\ldots+p\times f_p=\sum_{i=1}^{p} i\times f_i=2q'+p \qquad \textbf{(2)}$$

回忆 $$f_1+f_2+f_3+\cdots=\sum_{i=1}^{p} f_i=q'+1 \qquad \textbf{(1)}$$

从(2)式两边分别减去(1)式两边的两倍即可得到

$$1\times f_3+2\times f_4+3\times f_5+\ldots+(p-2)\times f_p=\sum_{i=1}^{p}(i-2)f_i=p-2 \qquad \textbf{(3)}$$

用同样的方法可得:

$$1\times g_3+2\times g_4+3\times g_5+\ldots+(p-2)\times g_p=\sum_{i=1}^{p}(i-2)g_i=p-2 \qquad \textbf{(4)}$$

(3)式两边分别减去(4)式的两边得

$$1\times(f_3-g_3)+2\times(f_4-g_4)+3\times(f_5-g_5)+\cdots=\sum_{i=1}^{p}(i-2)(f_i-g_i)=0$$

2、平面图哈密顿图的性质的应用

9.2.2. 图9.2.2中的图是哈密顿图。证明：任一哈密顿圈上包含边x,那么这个哈密顿圈上就一定不包含边y

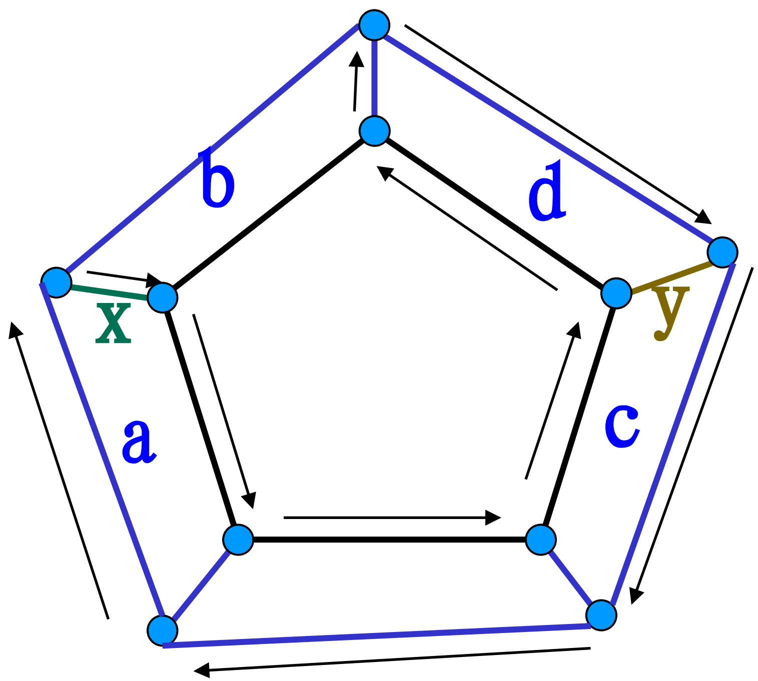


图9.2.2

2、平面图哈密顿图的性质的应用

9.2.2. 图9.2.2中的图是哈密顿图。证明：任一哈密顿圈上包含边x,那么这个哈密顿圈上就一定不包含边y

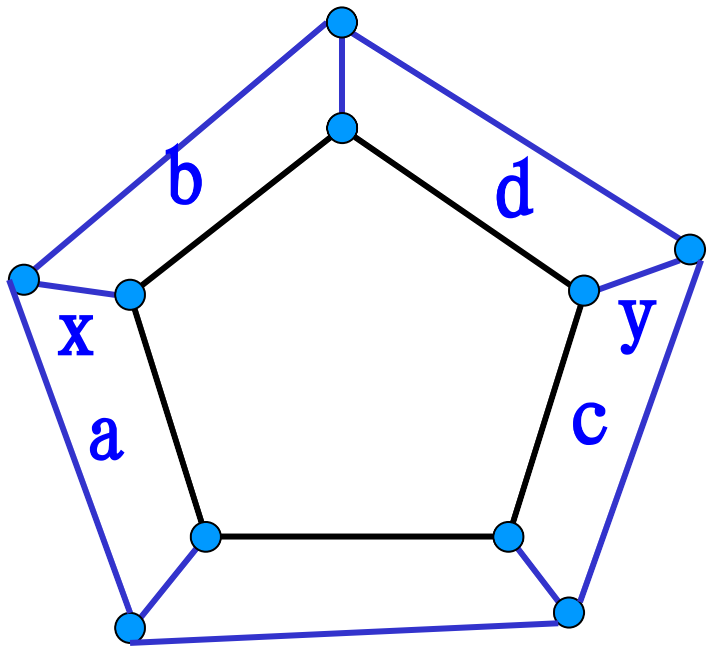


图9.2.2

图9.2.2中4条边的面5个，5条边的面2个

$$2(f_4-g_4)+3(f_5-g_5)=0$$

如果x和y都在哈密顿圈上

则面a和面b一个在外部面上，一个在内部面上，面c和面d也是这样。

则f_4-g_4=1或-1，根据定理9.2.1

$3(f_5-g_5)$=2或-2不可能

因此结论成立。

$$1\times(f_3-g_3)+2\times(f_4-g_4)+3\times(f_5-g_5)+\cdots=\sum_{i=1}^{p}(i-2)(f_i-g_i)=0$$

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

本节主要内容

1、图的细分的定义

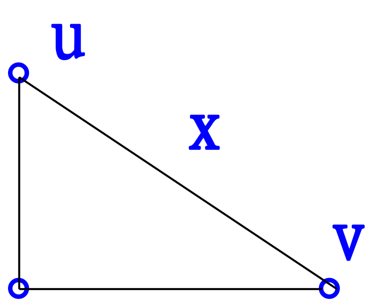
2、图同胚的定义

3、库拉托斯基定理

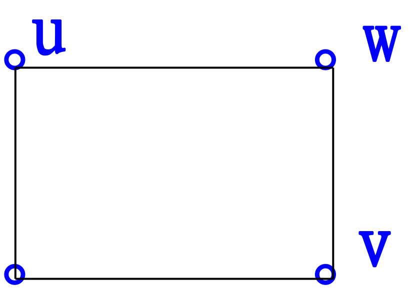
4、图的收缩的定义

1、图的细分的定义

定义9.3.1 设x=uv是图G=(V,E)的一条边，又w不是G的顶点，则当用边uw和wv代替边x时，就称x**被细分**，如果G的某些边被细分，产生的图称为G的细分图。



图G

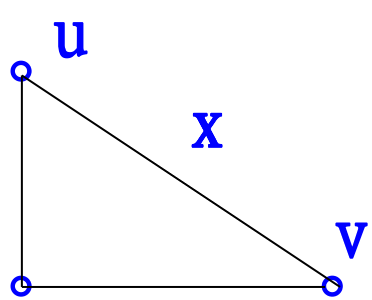


G的细分图

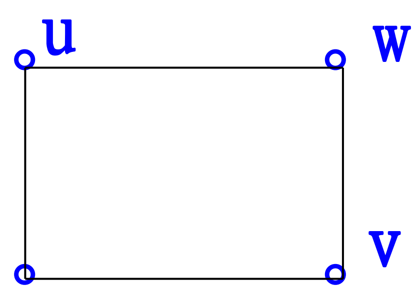
2、图同胚的定义

定义9.3.2 两个图称为同胚的，如果它们都可以从同一个图通过一系列的边细分得到。

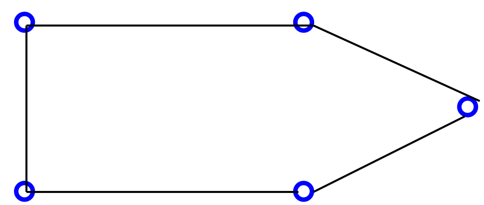
下面几个图是同胚的;



图G



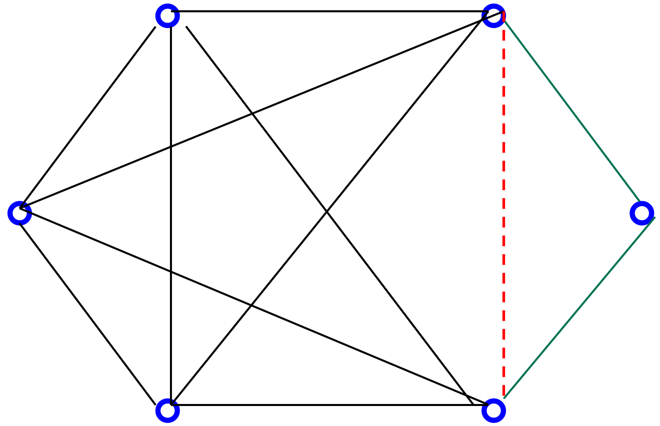
G的细分图



3、库拉托斯基定理

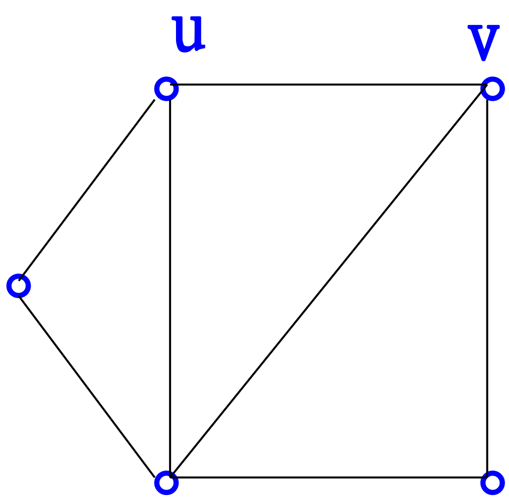
定理9.3.1（库拉托斯基, 1930）一个图是可平面的充分必要条件是它没有同胚于K_5和$K_{3,3}$的子图。

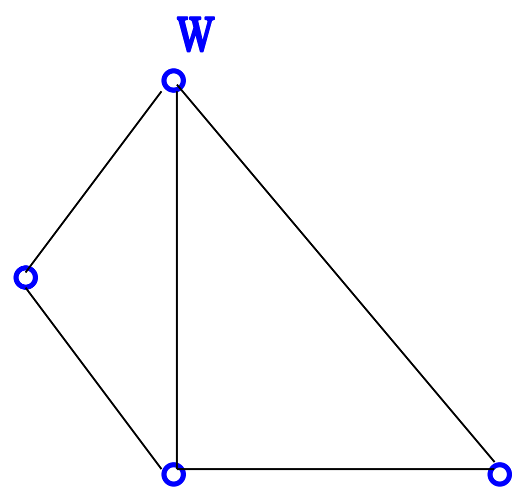
例如：证明右图不是可平面图



4、图G的初等收缩的定义

定义9.3.3 图G的一个**初等收缩**是合并两个邻接的顶点u和v，合并办法是：从G中去掉u和v，然后再加上一个新顶点w，使得w邻接于所有邻接于u或v的顶点。



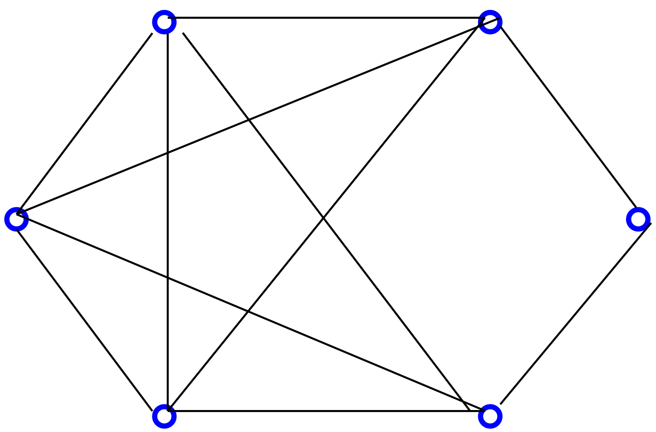


一个图G可收缩到图H，如果H可以从G经一系列的初等收缩得到。

5、图G的初等收缩的应用

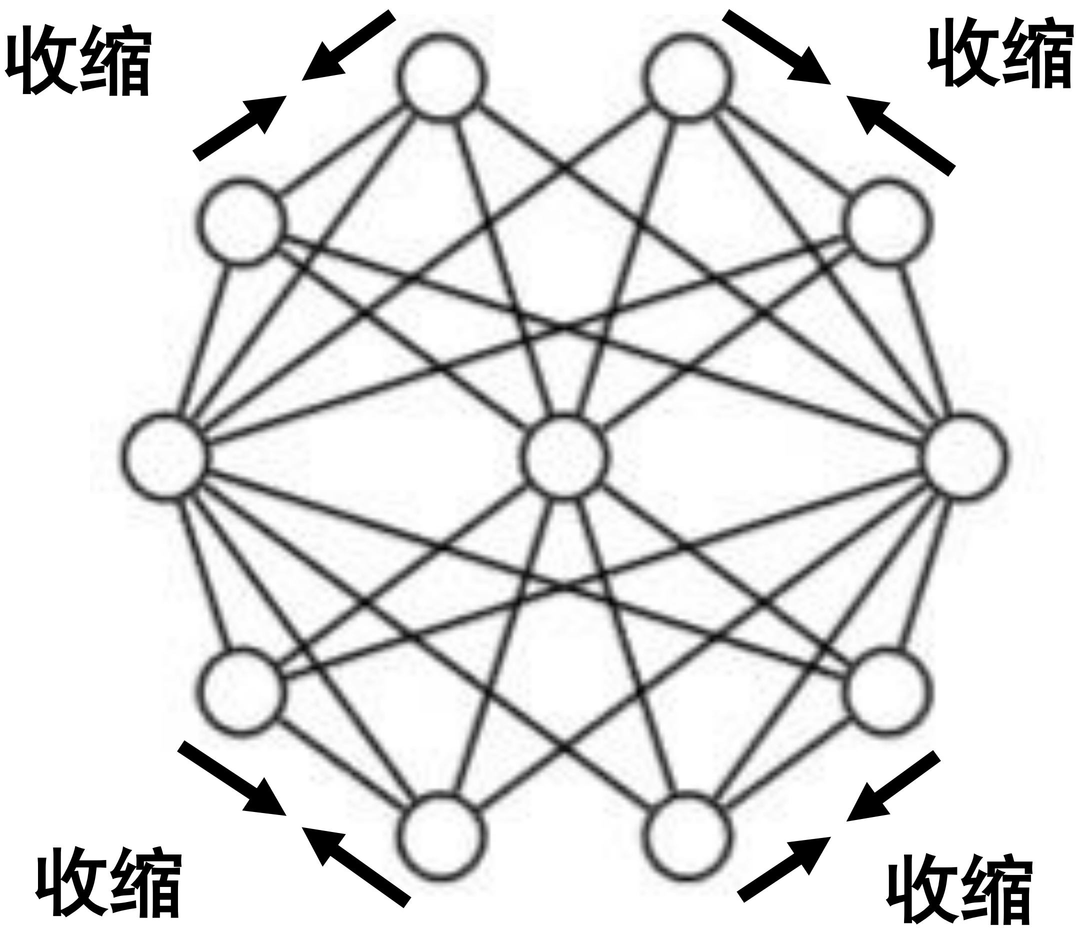
定理9.3.2 一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

例如：证明右图不是可平面图

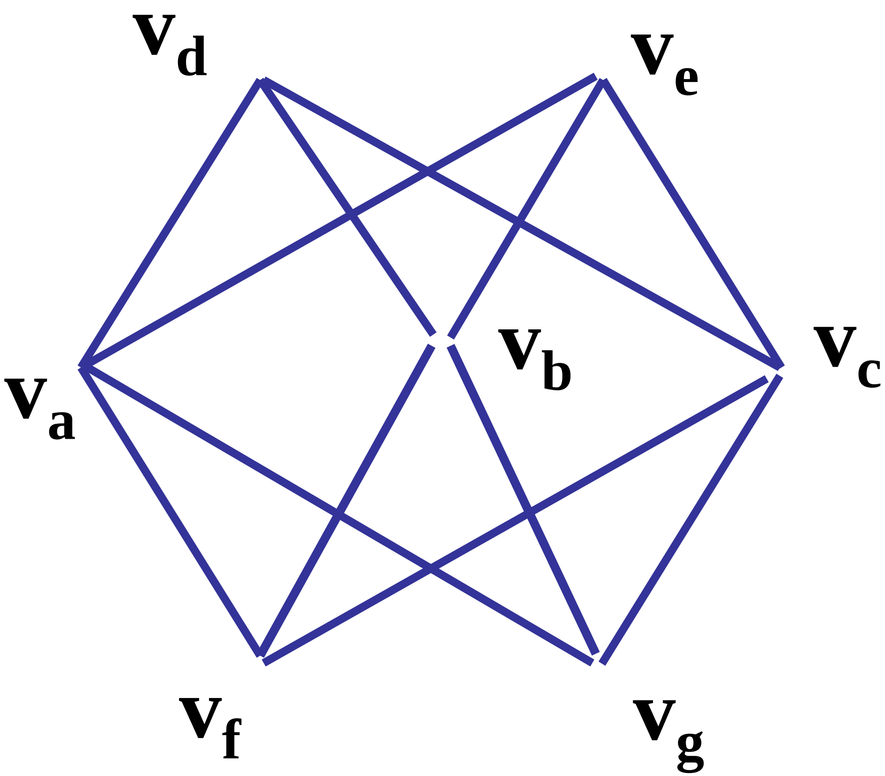


习 题

判断下图是不是平面图



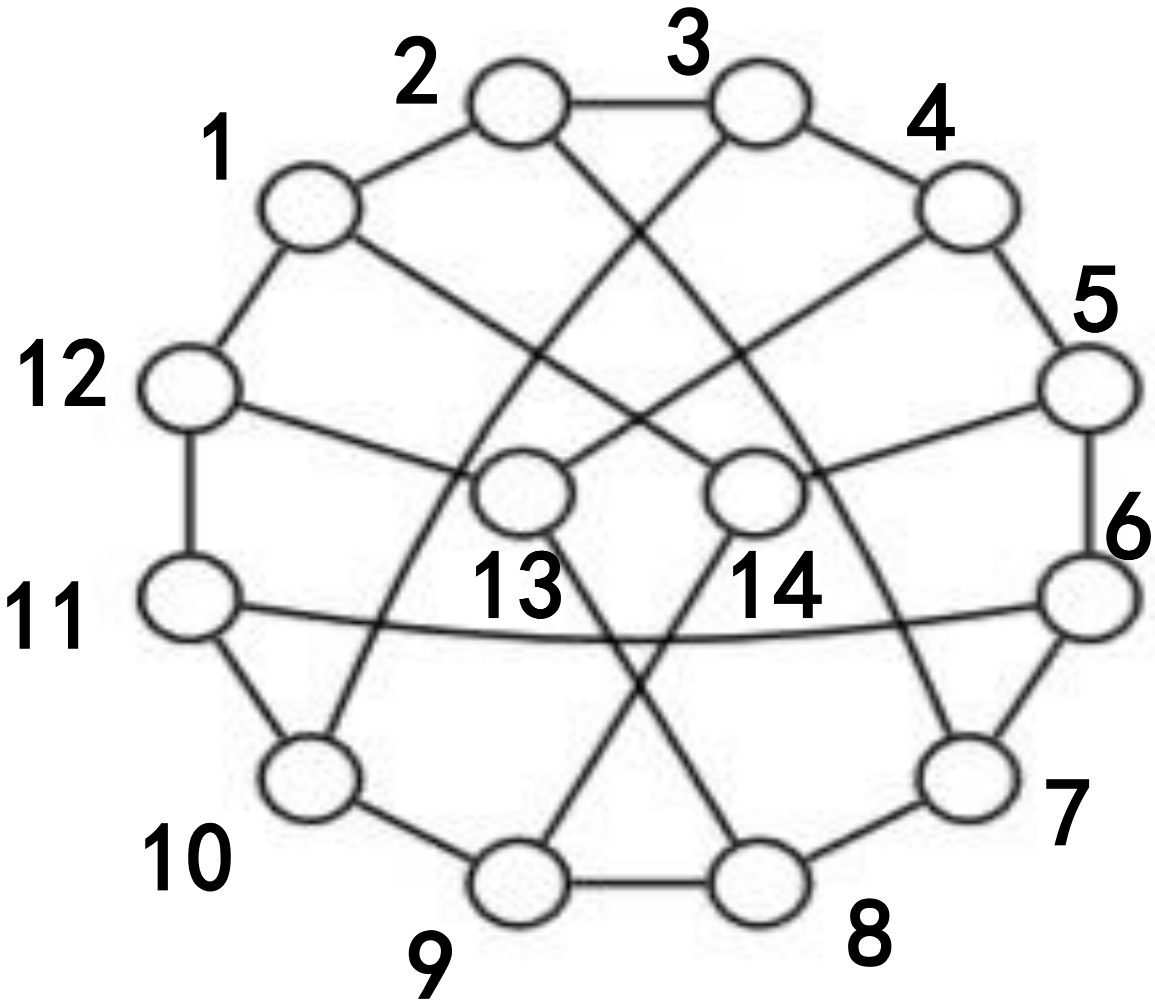
习 题



$K_{3,4}$ 不是平面图

习 题

判断下图是不是平面图



收缩

1和2

3和4

5和6

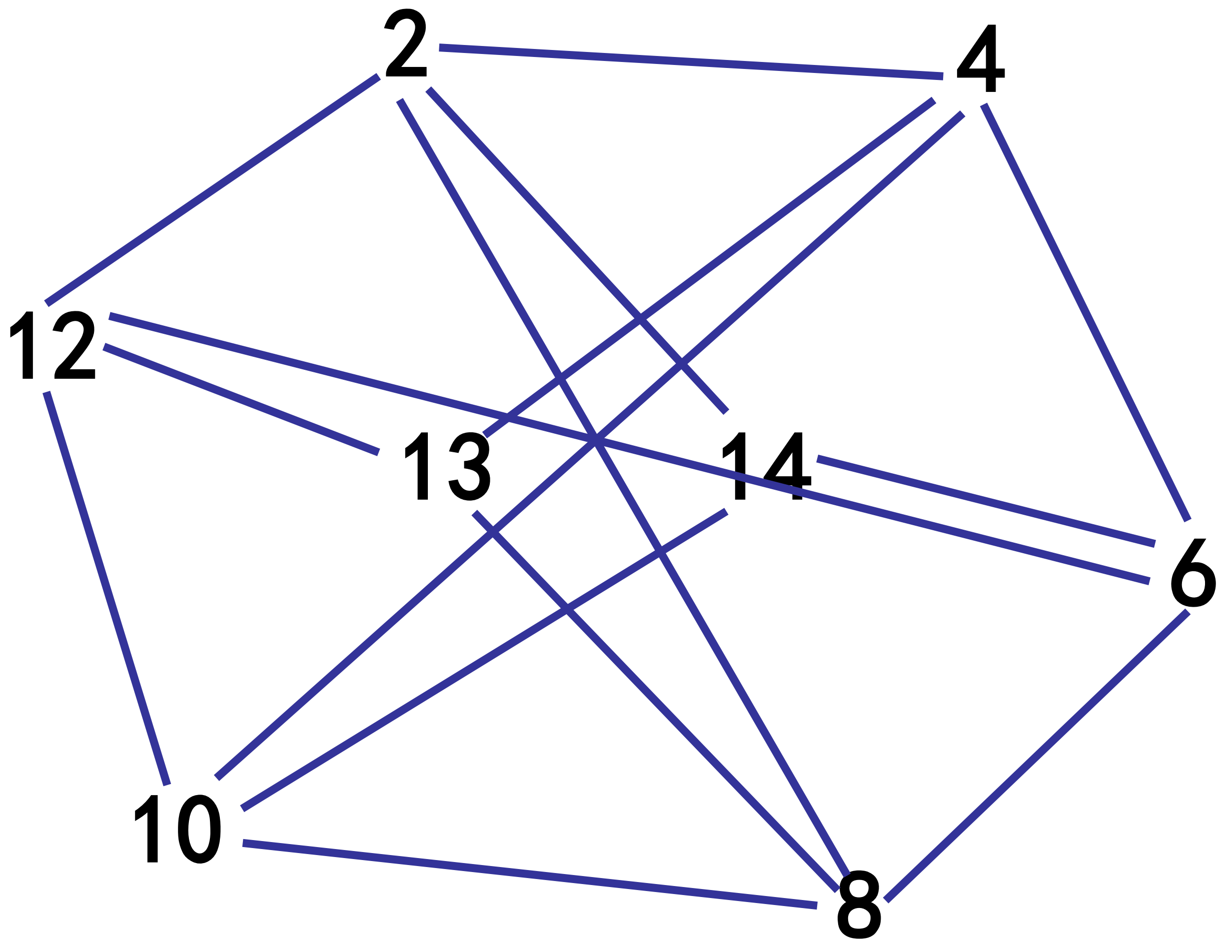
7和8

9和10

11和12

习 题

判断下图是不是平面图



收缩

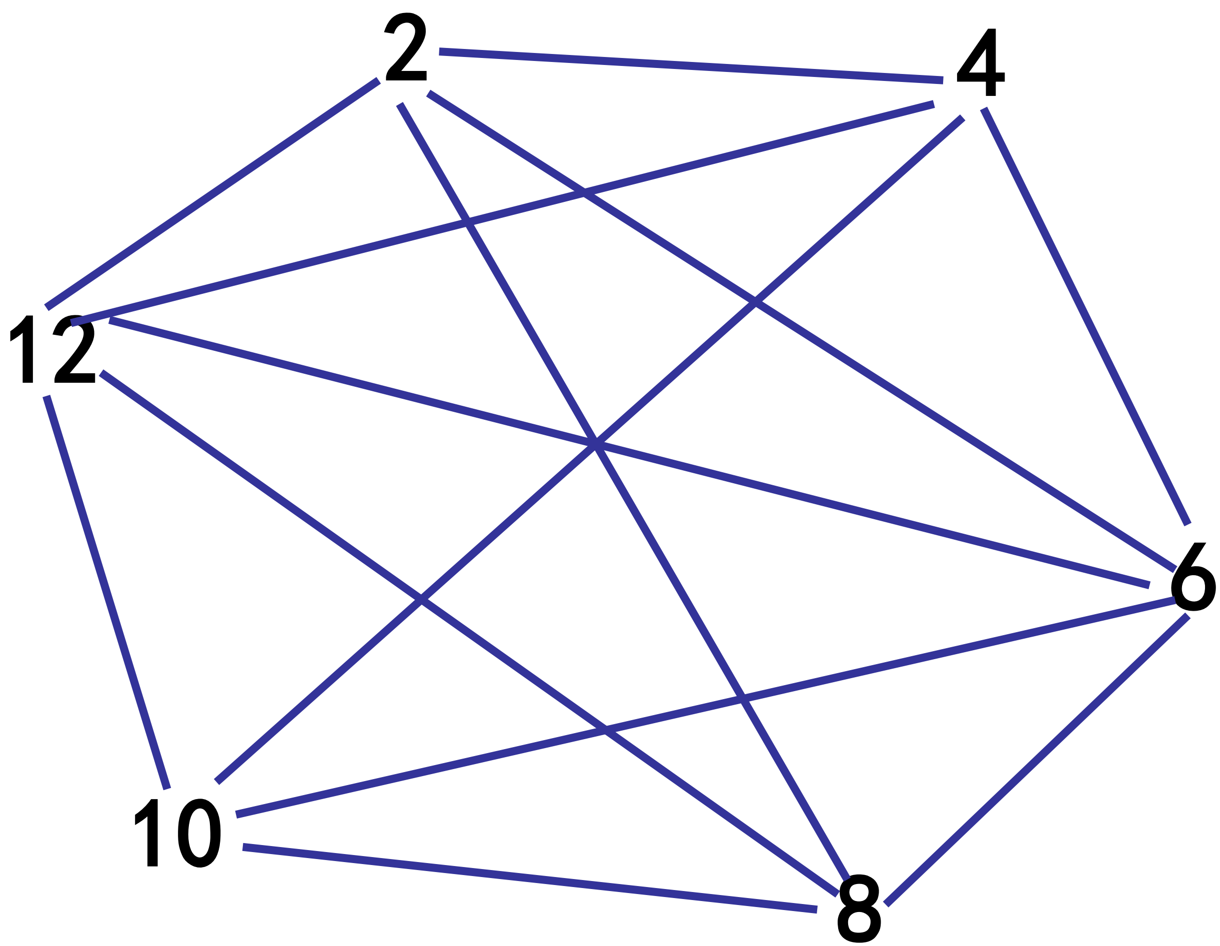
12和13

14和6

收缩

习 题

判断下图是不是平面图



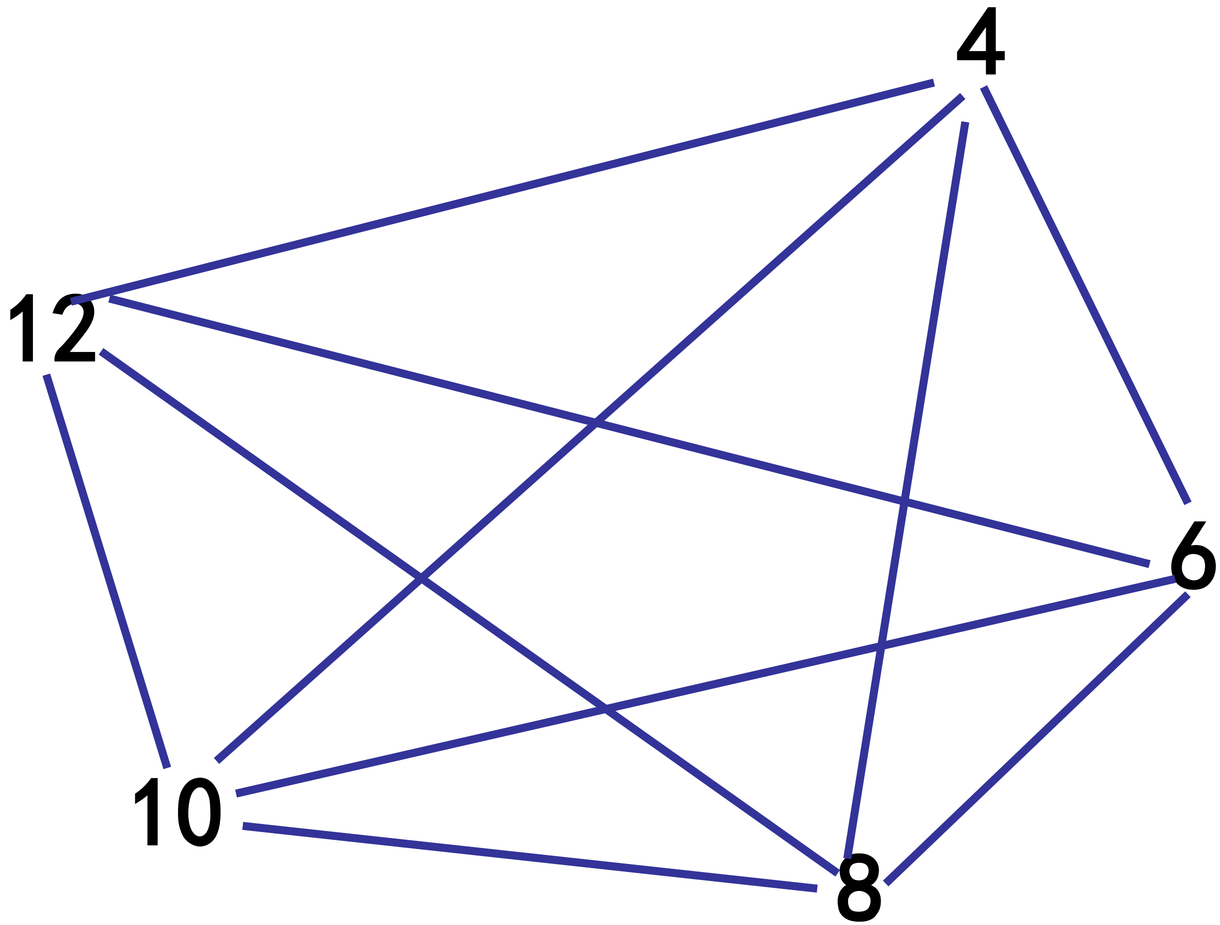
收缩

2和4

收缩

习 题

判断下图是不是平面图



收缩

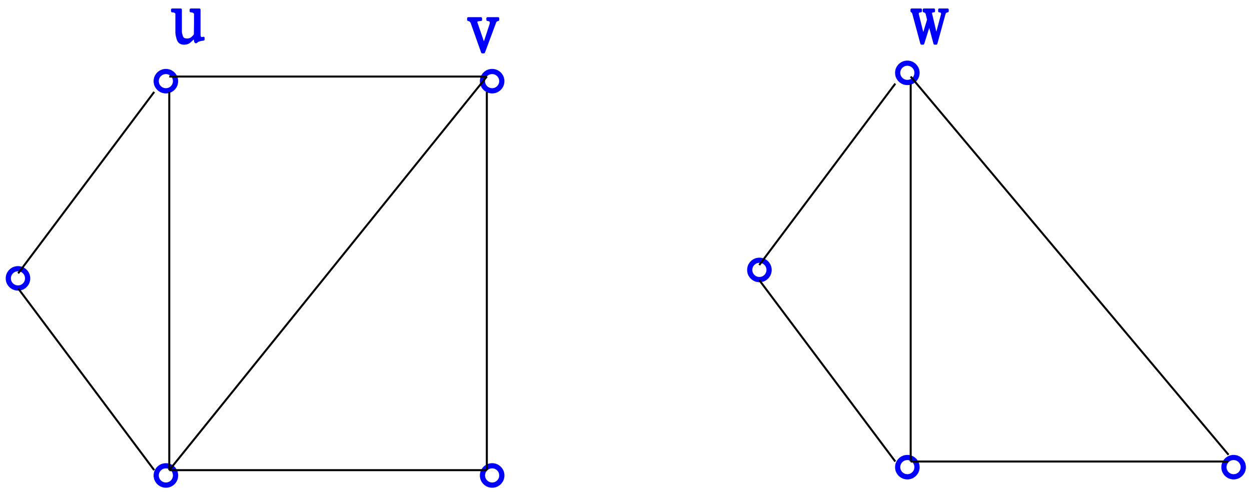
K5

收缩

习 题

证明：极大平面图G一定是连通图。

反证法。



习 题

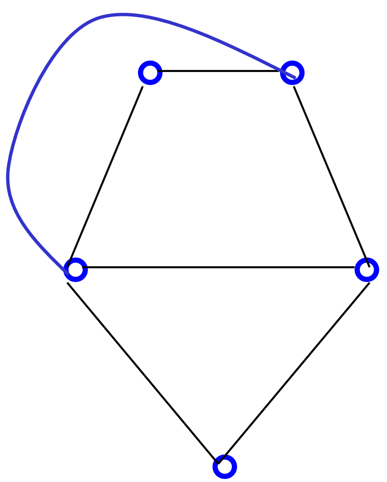
由6个顶点，12条边构成的平面连通图G中，每个面由几条边围成？为什么？

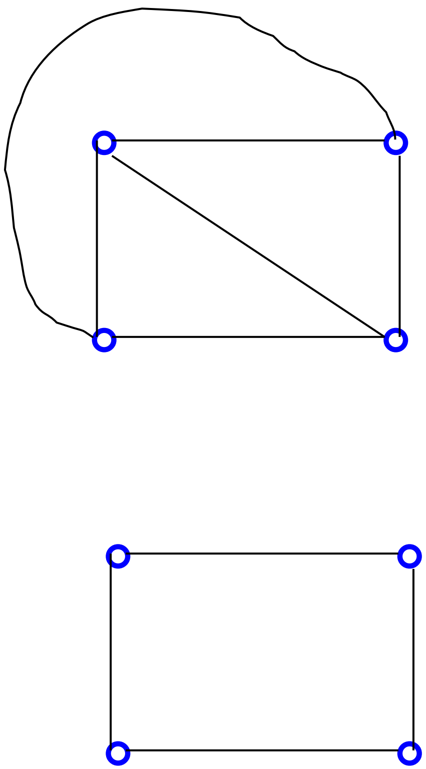
3条边，极大平面图

4、最大(极大)平面图的性质

2(P281)、设G是一个有k个支的平面图，若G的顶点数、边数、面数分别为p、q和f,试证:

p−q+f=k+1。





4、最大(极大)平面图的性质

15.平面图G有两个分支，其顶点数为8，边数为12，则G有多少个面？

A. 10
B. 9
C. 8
D. 7 √

8-12+f=3