第三章：关系

3.3 关系的合成运算

本节主要问题

（1）关系合成运算的定义

（2）关系合成运算的性质

a. 合成运算不满足交换律

b. 合成运算满足结合律

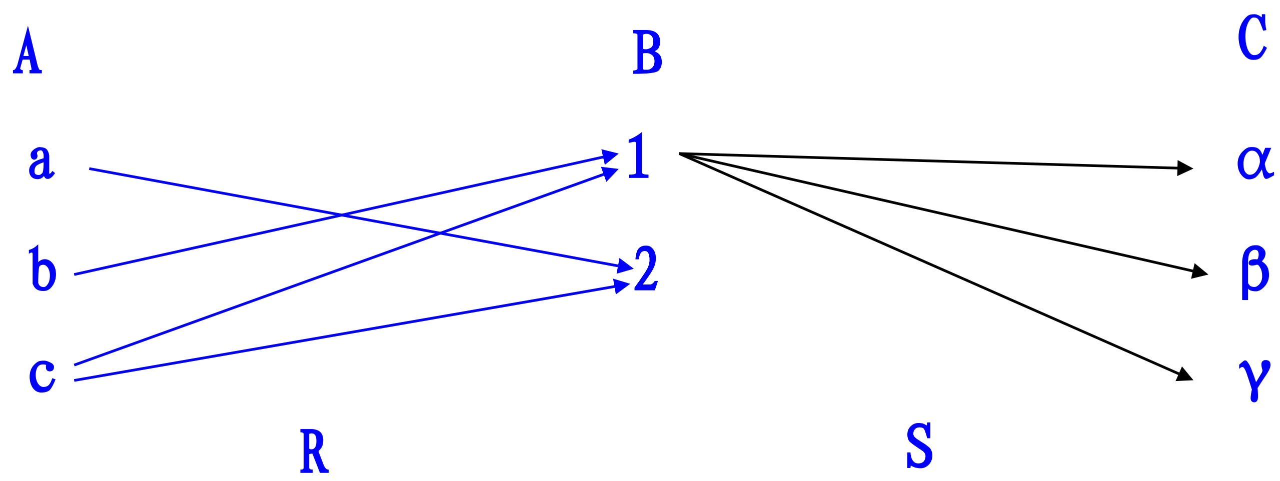
c. 合成运算对并、交运算的分配关系

d. 合成运算对差运算不满足分配律

e. 关系的逆的合成

f .关系幂运算的定义

（1）关系合成运算的定义



R={(a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2)}

S={(1, α), (1, β), (1, γ)}

R°S ={(b, α), (b, β), (b, γ), (c, α), (c, β), (c, γ)}

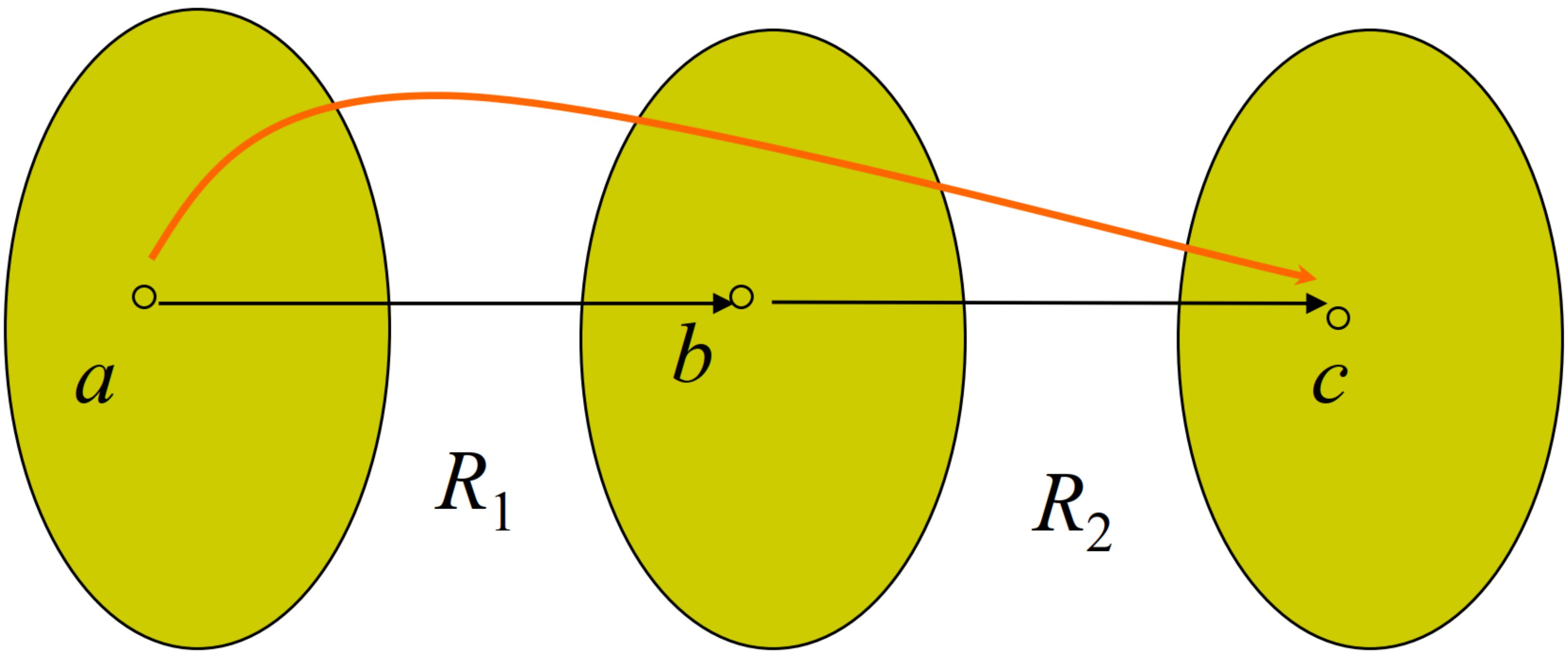
定义3.3.1 设R是A到B, S是B到C的二元关系。R与S的合成是A到C的一个二元关系，记成R°S，并且

$R \circ S=\{(x, z) \mid \exists y \in B$ 使得 xRy 且 $ySz\}$。

（1）关系合成运算的定义

定义3.3.1　设R是A到B，S是B到C的二元关系。R与S的合成是A到C的一个二元关系，记成$R \circ S$，并且

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \in B\text{使得}xRy\text{且}ySz\}\text{。}$$



（2）关系合成运算的性质

a. 合成运算不满足交换律

b. 合成运算满足结合律

c. 合成运算对并、交运算的分配关系

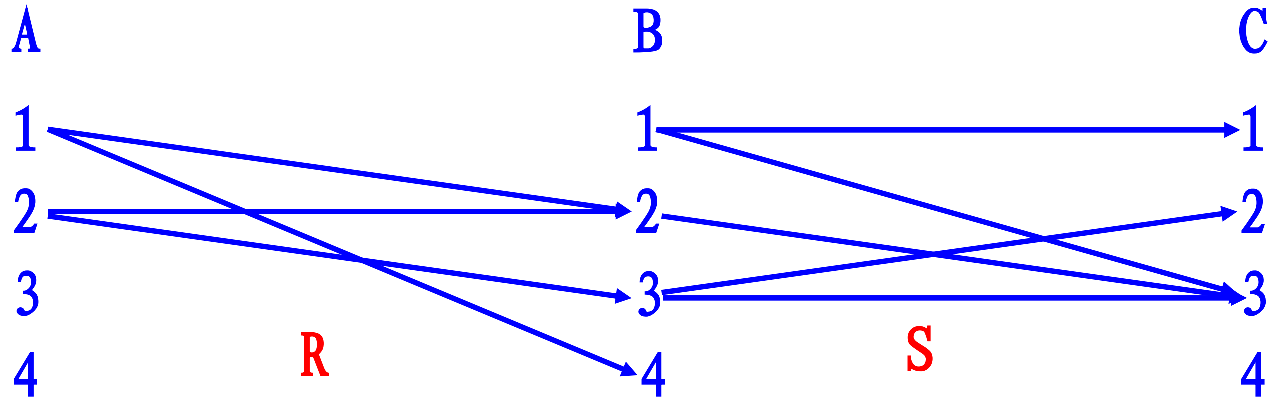
d. 合成运算对差运算不满足分配律

e. 关系的逆的合成

f. 关系幂运算的定义

a. 合成运算不满足交换律

由合成定义可知 $R \circ S \neq S \circ R$



$R=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,3)\}$

$S=\{(1,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

$R \circ S = \{(1,3),(2,2),(2,3)\}$

$S \circ R = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,3)\}$

b. 合成运算满足结合律

定理3.3.1 设R_1, R_2, R_3分别是从A到B，B到C，C到D的二元关系，则$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

[证]

(1) 证$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

$\forall (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\exists\ c \in C$，使得$(a, c) \in R_1 \circ R_2$且$(c, d) \in R_3$

由$(a, c) \in R_1 \circ R_2$，$\exists b \in B$, $(a, b) \in R_1$且$(b, c) \in R_2$,

由$(b, c) \in R_2$, 且$(c, d) \in R_3$, 知$(b, d) \in R_2 \circ R_3$;

又由$(a, b) \in R_1$, 因此$(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$。

因此$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$，反之亦然。

c. 合成运算对并、交运算的分配关系

定理3.3.2　设R_1是A到B的二元关系，R_2，R_3是从B到C的二元关系，设R_4是从C到D的二元关系，则：

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

c. 合成运算对并、交运算的分配关系

定理3.3.2　设R_1是A到B的二元关系，R_2，R_3是从B到C的二元关系，设R_4是从C到D的二元关系，则：

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

[证]

(1) $\forall (b, d) \in (R_2 \cap R_3) \circ R_4$

$\Rightarrow \exists\ c \in C$，使得 $(b, c) \in R_2 \cap R_3$ 且 $(c, d) \in R_4$

$\Rightarrow \exists\ c \in C$，使得 $(b, c) \in R_2$ 且 $(c, d) \in R_4$，同时

使得 $(b, c) \in R_3$ 且 $(c, d) \in R_4$

$\Rightarrow (b, d) \in (R_2 \circ R_4)$，同时

$(b, d) \in (R_3 \circ R_4)$

$\Rightarrow (b, d) \in (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

$\Rightarrow (R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

d.一般说来，合成运算对差运算不满足分配律:

$R_1 \circ (R_2 \backslash R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \backslash (R_1 \circ R_3)$

$(R_2 \backslash R_3) \circ R_4 \neq (R_2 \circ R_4) \backslash (R_3 \circ R_4)$

例3.3.3 设$X=\{a, b, c\}$, $R_1=\{ (a, a),(a, b) \}$,
$R_2=\{(a, a), (b, c)\}$, $R_3=\{(a, c),(b, b)\}$

$R_2 \backslash R_3= \{(a,a), (b,c)\}$

$R_1 \circ (R_2 \backslash R_3)= \{(a,a), (a,c)\}$

$(R_1 \circ R_2)= \{(a,a), (a,c)\}$

$(R_1 \circ R_3)= \{(a,c), (a,b)\}$

$(R_1 \circ R_2) \backslash (R_1 \circ R_3)= \{(a,a)\}$。

e. 关系的逆的合成:

定理3.3.3　设R, S是集合X上的两个二元关系，则

(1) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

[证] $\forall (x, z) \in (R \circ S)^{-1}$

$\Rightarrow (z, x) \in R \circ S$

$\Rightarrow \exists\ y \in X,\quad (z, y) \in R\ ,\ (y, x) \in S$

$\Rightarrow (y, z) \in R^{-1}\ ,\ (x, y) \in S^{-1}$

$\Rightarrow (x, z) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ 因此 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$

仿1可证 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$。故命题成立

(2) $R \circ R^{-1}$是对称的

[证] $\forall (x, z) \in R \circ R^{-1}$

$\Rightarrow \exists y \in X$，使得 $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$, $(z, y) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R \circ R^{-1}$

因此：命题成立

（1）关系合成运算的定义

定理3.3.4 设R是X上的二元关系，则R是传递的当且仅当：$R \circ R \subseteq R$。

需要证明:

(1) 必要性(从左到右)

要证：$\forall (x, y) \in R, (y, z) \in R$ 则 $(x, z) \in R \Rightarrow R \circ R \subseteq R$

证：对于 $\forall (x, z) \in R \circ R \Rightarrow \exists y$，使 $(x, y) \in R$，$(y, z) \in R$

又 ∵ R是传递的，

∴ 对于 $\forall (x, z) \in R \circ R$，$(x, z) \in R$，故 $R \circ R \subseteq R$

(2) 充分性（从右到左）

要证：$R \circ R \subseteq R \Rightarrow \forall (x, y) \in R, (y, z) \in R$ 则 $(x, z) \in R$

证：$(x, y) \in R$，$(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \circ R$

∵ $R \circ R \subseteq R$

∴ $(x, z) \in R \circ R \in R$

∴ R是传递的

f. 关系幂运算

定义3.3.2 设R是X上的一个二元关系，R的n次幂记作R^n，n为非负整数。

(1) $R^0=I_X$, $R^1=R$, $R^2=R\circ R$;

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$。

例：设X={a, b, c, d}，R是X到X的一个二元关系：R={(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)}

(1) $R^0=I_X$={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}

(2) $R^1=R$ ={(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)}

(3) $R^2=R\circ R$={(a, a), (a, c), (b, b), (b, d)}

(4) $R^3=R^2\circ R$={(a, b), (a, d), (b, a), (b, c)}。

f. 关系幂运算

定理3.3.5 设R是X上的一个二元关系。则对任意的非负整数m, n有:

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,

用归纳法证明:

当n=1时，由幂运算的定义可有: $R^m \circ R^1 = R^{m+1}$。

假设当n=k时成立: $R^m \circ R^k = R^{m+k}$

则当n=k+1时:

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ R^k \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$$

因此，命题成立。

复习定义

(1) $R^0 = I_X$,

$R^1 = R$,

$R^2 = R \circ R$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$。

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = R^{mn} \circ R^m = R^{m+m+m} = R^{m(n+1)}$$

f. 关系幂运算

定理3.3.6 设X是一个有限集合且$|X| = n$，R为X上的任一二元关系，则存在非负整数s, t使得$0 \le s < t \le 2^{n^2}$且$R^s = R^t$。

[证]

因为$|X|=n$，

所以$|X\times X|=n^2$

从而$|2^{X\times X}|=2^{n^2}$

故X上共有2^{n^2}个不同的二元关系

列出R的各次幂 $R^0, R, R^2, \ldots R^{2^{n^2}}, R^{2^{n^2}+1}, R^{2^{n^2}+2}, \ldots$

观察其中的前$2^{n^2}+1$个二元关系

由抽屉原理得到至少有两个是相等的，

从而有非负整数$s,t,0\le s<t\le 2^{n^2}$，使得$R^s=R^t$。

f. 关系幂运算

定理3.3.7 设R是X上的二元关系。如果存在非负整数s,t,s<t，使得$R^s=R^t$,则:

(1)$R^{s+k}=R^{t+k}$,k为非负整数； $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2)$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$,其中p=t-s,而k,i为非负整数;

用归纳法证明：当k=1时成立。

假设当k=m时成立，也就是：$R^{s+mp+i}=R^{s+i}$,

则当k=m+1时：$R^{s+(m+1)p+i}=R^{s+mp+i+p}=R^{s+mp+i}\circ R^p=R^{s+i}\circ R^p$

$=R^{s+p+i}=R^{s+i}$ 因此，命题成立。

(3)令$S=\{R^0,R,\ldots R^s,\ldots,R^{t-1}\}$,则对任意非负的整数q有$R^q\in S$。

如果q＜t,显然成立

否则,设q=s+kp+i, p=t-s, $0\le i<p$ 则$R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$

由$0\le i<p=t-s$，有s+i＜t 因此，$R^q\in S$

f. 关系幂运算

例： 设$s=3,t=10$, $R^3=R^{10}$,则$R^{35}=?$

$$R^{35}=(R^{10})^3\circ R^5=(R^3)^3\circ R^5$$

$$=R^9\circ R^5=R^{14}=R^{10}\circ R^4$$

$$=R^3\circ R^4=R^7$$

R^0	R^1	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	R^{12}
R^0	R^1	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^3	R^4	R^5

周期为7

f. 关系幂运算

习题8. p98 是否存在X（$|X|=n$）上的二元关系R，使得$R, R^2, R^3, \ldots, R^n$两两不相同？

一个元素显然

2个元素设为x_1, x_2

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$ $R^2=\{(x_1, x_1), (x_2, x_2)\}$

3个元素设为x_1,x_2,x_3

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3,x_1)\}$

$R^2=\{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3,x_2)\}$

$R^3=\{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3,x_3)\}$

……

n个元素设为$x_1,x_2,\ldots\ldots, x_n$

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots\ldots,(x_{n-1},x_n), (x_n, x_1)\}$。

3.4 关系的闭包

本节主要问题

（1）关系的闭包的定义

（2）传递闭包

（3）自反传递闭包

（4）自反闭包

（5）对称闭包

（1）关系的闭包的定义

关系的闭包的思想是想通过增加一些元素，使原来的关系符合某种性质。

但增加的元素要最少。

例如：A={a, b}，关系R={(a, a), (a, b)}不是自反的，可以通过增加元素使其变为自反的，以下哪一个是R的自反闭包?

R_1={(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)} ×　　R_2={(a, a), (a, b), (b, b)} √

下面哪种关系可使用闭包扩充得到?

1、自反关系 √　　2、反自反关系 ×

3、对称关系 √　　4、反对称关系 ×

5、传递关系 √　　6、相容关系 √

（2）传递闭包

令X={a, b, c}, R={(a, b), (b, c)}，求R的传递闭包

增加最少的元素，使它符合传递性。增加(a, c)。

R^+={(a, b), (b, c), (a, c)}是R的传递闭包。

定义3.4.1　设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示，也有用t(R)表示的，即：　$R^+ = \bigcap_{R\subseteq R'} R'$. R'是传递的

换个说法，更直观：

定义3.4.1*　设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系为：$R_1,R_2,\ldots\ldots,R_n$，则R的传递闭包用R^+表示，也有用t(R)表示的，且：$R^+=R_1\cap R_2\cap\ldots\ldots\cap R_n$

（2）传递闭包

定义3.4.1* 设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系为：$R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$，则R的传递闭包用$R^+$表示，也有用t(R)表示的，且：$R^+=R_1 \cap R_2 \cap \ldots\ldots \cap R_n$

R^+必须满足传递闭包的三个条件

(1) $R^+ \supseteq R$

(2) R^+是(二元)传递关系

(3) R^+是包含R的（二元）传递关系中“最小的”。

证明：

$\forall i,\ R \subseteq R_i \Rightarrow R \subseteq R_1 \cap R_2 \cap \ldots\ldots \cap R_n \Rightarrow R \subseteq R^+$ 即(1)成立

$\forall (x, y) \in R^+, (y,z) \in R^+ \Rightarrow \forall i,\ (x, y) \in R_i, (y, z) \in R_i$

$\because R_i$是传递的 $\Rightarrow \forall i,\ (x, z) \in R_i \Rightarrow (x, z) \in R^+$ 即(2)成立

$\forall (x, y) \in R^+ \Rightarrow \forall i,\ (x, y) \in R_i \Rightarrow \forall i, R^+ \subseteq R_i$ 即(3)成立

（2）传递闭包

定理3.4.2 设R为X上的二元关系，则：

$$R^{+}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots$$

(1) $R^{+}\supseteq R$
(2) R^{+}是(二元)传递关系
(3) R^{+}是包含R的（二元）传递关系中“最小的”。

证明:

(1) $\forall(x, y)\in R\Rightarrow(x, y)\in R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots\Rightarrow R\subseteq R$ 即(1)成立

(2) $\forall(x, y)\in R^{+}, (y, z)\in R^{+}\Rightarrow\exists m\geq1, (x, y)\in R^{m}$ 及 $\exists n\geq1, (y, z)\in R^{n}$

$\Rightarrow(x, z)\in R^{m}\circ R^{n}\Rightarrow(x, z)\in R^{m+n}\Rightarrow(x,z)\in R^{+}$ 即(2)成立

(3)即证：对于$\forall$传递关系R'，如果$R\subseteq R'$，就有$R^{+}\subseteq R'$

$\forall(x, y)\in R^{+}\Rightarrow\exists m\geq1$,有$(x, y)\in R^{m}\Rightarrow\exists x_1, (x, x_1)\in R, (x_1, y)\in R^{m-1}$

$\Rightarrow\exists x_2, (x_1, x_2)\in R, (x_2, y)\in R^{m-2}\Rightarrow\ldots$

$\Rightarrow\exists x_{m-1}, (x_{m-2}, x_{m-1})\in R, (x_{m-1}, y)\in R$

$\Rightarrow(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{m-2}, x_{m-1}), (x_{m-1}, y)\in R'$

$\because R'$是传递的$\Rightarrow(x, y)\in R'$ 即(3)成立

（2）传递闭包

定理3.4.3　设X为n元集，R为X上的二元关系，则

$$R^{+}=\bigcup_{i=1}^{n}R^{i}$$

定理3.4.4　设R,S是X上的二元关系,则

(1)$\varnothing^{+}=\varnothing$;

(2)$R\subseteq R^{+}$;

(3)$(R^{+})^{+}=R^{+}$;

(4)$(R\cup S)^{+}\supseteq R^{+}\cup S^{+}$。

（2）传递闭包

例3.4.1 设X为人的集合,R为X上的“父子”关系，看一看xR^+y的实际关系是什么?

解: $R^+=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$

xR^+y当且仅当存在自然数m使得xR^my;

由关系合成的定义,存在$x_1, x_2, ..., x_{m-1}$, 使得:

$xRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{m-1}Ry$。

因此，R^+为后代子孙关系。

（3）自反传递闭包

定义3.4.2　设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的自反且传递的二元关系的交称为R的自反传递闭包，记为R^*。

由定义知，R^*是(二元)自反且传递关系。

令X={a,b,c},R={(a,b),(b,c)},求R的传递闭包，自反传递闭包。

R^+={(a,b),(b,c),(a,c)}。

R^*={(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)}

定理3.4.5　设R为X上的二元关系。则

$$R^*=R^0\cup R^+$$

易见

$$R\circ R^*=R^*\circ R=R^+$$

$$(R^*)^*= R^*$$

（3）自反传递闭包

例3.4.2 设N为自然数集，R为N上的如下定义的二元关系—“后继”关系：aRb当且仅当a+1=b。

分析R^+与R^*的实际意义。

(1) 分析xR^+y实际意义。$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

xR^+y当且仅当存在自然数m使得xR^my;

由关系合成的定义，存在$x_1, x_2, ..., x_{m-1}$，使得：$xRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{m-1}Ry$。 $y=x+m, m \geqslant 1$。

(2) 分析xR^*y实际意义。 $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

xR^*y当且仅当存在自然数m使得xR^my;

由关系合成的定义，存在$x_1, x_2, ..., x_{m-1}$，使得：$xRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{m-1}Ry$。 $y=x+m, m \geqslant 0$。

（4）自反闭包

定义3.4.3 设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的自反的二元关系的交称为R的**自反闭包**，记为r(R)。

令X={a,b,c},R={(a,b),(b,c)}

求R的自反闭包

r(R) = {(a, a), (b, b), (c, c),(a,b),(b,c)}

定理3.4.6 设R是X上的二元关系，则

$r(R)=R^0 \cup R$。

r(R)必须满足自反闭包的3个条件

(1) $r(R) \supseteq R$

(2) r(R)是自反的

(3) r(R)是包含R的自反关系中“最小的”。

（5）对称闭包

定义3.4.4　设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的对称的二元关系的交称为R的对称闭包，记为s(R)。

令X={a, b, c},R={(a, b), (b, c)}　求R的对称闭包

s(R) = {(a, b), (b, c), (b, a), (c, b)}

定理3.4.7　设R是X上的二元关系，则

$s(R)=R\cup R^{-1}$。

s(R)必须满足对称闭包的3个条件

(1) $s(R)\supseteq R$

(2) s(R)是对称的

(3) s(R)是包含R的对称关系中“最小的”。

定理3.4.6 设R是X上的二元关系，则:

(1) $r(s(R))=s(r(R))$

(2) $r(R^+)=r(R)^+=R^*$

(3) $s(R)^+ \supseteq s(R^+)$

**