第二章：映射

2.1 函数的一般概念—映射

2.2 抽屉原理

2.3 映射的一般性质

2.4 映射的合成

2.5 逆映射

2.6 置换

2.7 二元和n元运算

2.8 集合的特征函数

2.4 映射的合成

本节主要问题

（1）映射合成的定义

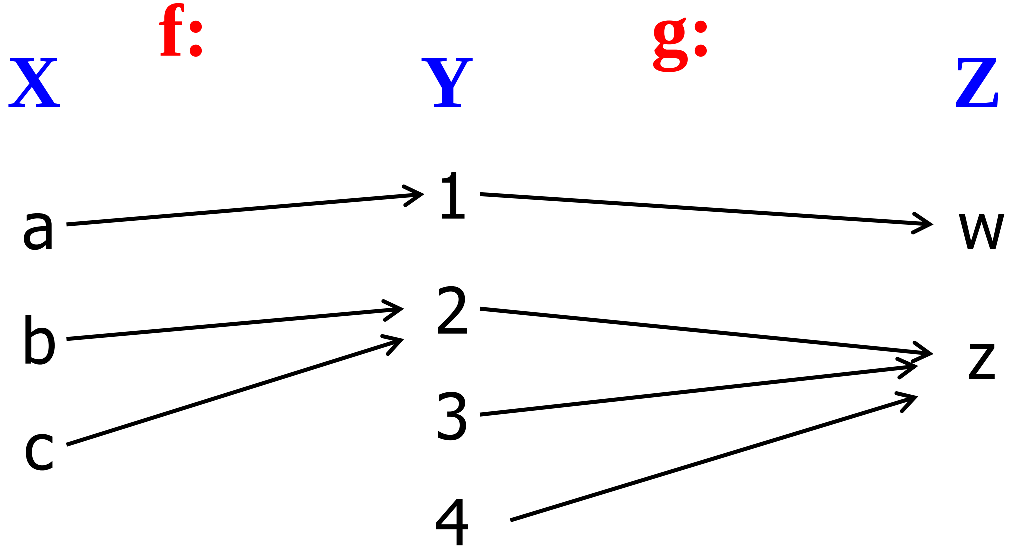
（2）映射合成的性质

（1）映射合成的定义

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}, Z={w, z}

映射f: f(a)=1,f(b)=2,f(c)=2

映射g: g(1)=w, g(2)=z, g(3)=z, g(4)=z



定义映射: gf(x)=g(f(x))

则: gf(a) =g(f(a)) =g(1) =w

gf(b) =g(f(b)) =g(2) =z

gf(c) =g(f(c)) =g(2) =z

（1）映射合成的定义

定义2.4.1 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$,

定义映射：$h:X\to Z$，$\forall x\in X$, $h(x)=g(f(x))$。h称为f与g的合成, “映射f与g的合成” h记为$g\circ f$,省略中间的“$\circ$”，简记为gf

按定义，$\forall x\in X$,我们有

$$g\circ f(x)=gf(x)=g(f(x))$$

注意：“映射f与g的合成”，在书写时写成gf

（2）映射合成的性质

定理2.4.1 设f: X→Y, g: Y→Z, h: Z→W, 则:

$$h(gf) = (hg)f$$

即映射的合成运算满足结合律。

只要明确这是映射相等的证明

需要证明：$\forall x$，$h(gf)(x) = (hg)f(x)$

按定义ab(x)=a(b(x))顺序展开

$$h(gf)(x) = h(gf(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(hg)f(x) = hg(f(x)) = h(g(f(x)))$$

（2）映射合成的性质

映射的合成运算满足结合律是合成运算的基本性质。据此**h(gf)和(hg)f就可简记为hgf**。

设 $f_1: A_1 \to A_2$,

$f_2: A_2 \to A_3, \ldots,$

$f_n: A_n \to A_{n+1}$。

这n个映射的合成就可以记为: $f_n f_{n-1} \ldots f_1$

$\forall x \in A_1$,

$f_n f_{n-1} \ldots f_1(x) = f_n(f_{n-1} \ldots (f_2(f_1(x))) \ldots)$

是一个从A_1到A_{n+1}的映射

（2）映射合成的性质

定理2.4.2 设$f: X\to Y$，则$f\circ I_X=I_Y\circ f$

明确两条:

① I_x和I_y是恒等映射

② 证明的是映射相等。

证明

$\forall x\in X$，$fI_x(x)=f(I_x(x))=f(x)$

$\forall x\in X$，$I_Y f(x)=I_Y(f(x))=f(x)$

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。

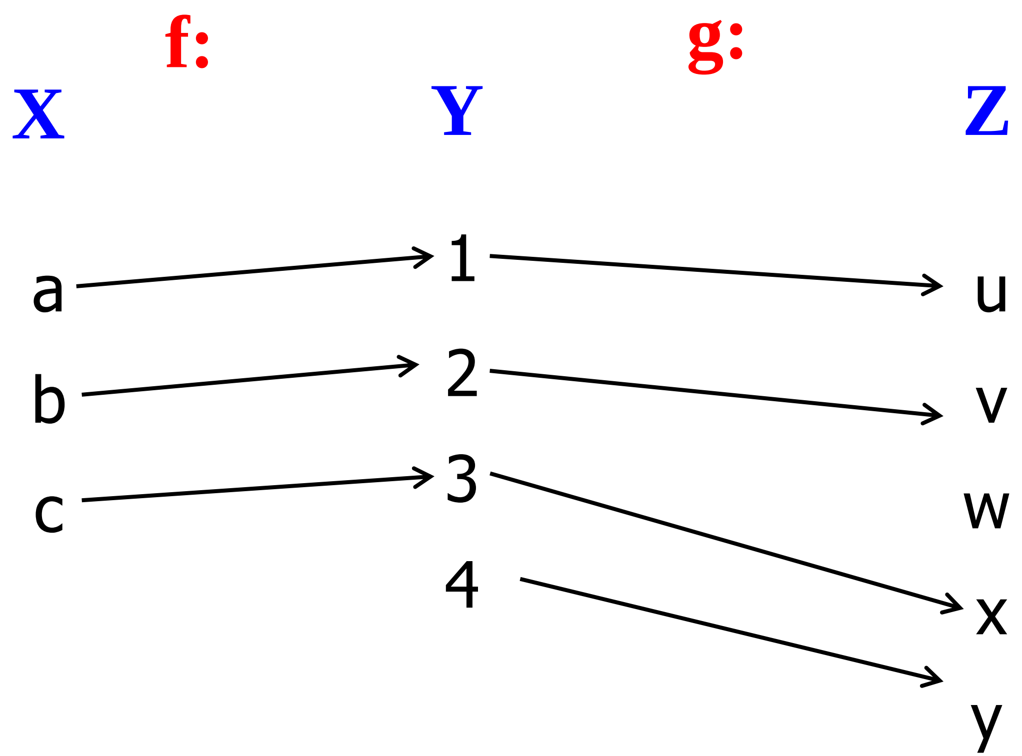
(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。

(3) 如果f与g都是双射的，则gf也是双射的。

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。



定义映射： gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。

首先清楚单射的定义:

$\forall\ x_1\neq x_2$， $gf(x_1)\ \neq\ gf(x_2)$

证明：$\forall\ x_1\neq x_2$，因为f是单射。

所以$f(x_1)\ \neq\ f(x_2)$

又因为g是单射，

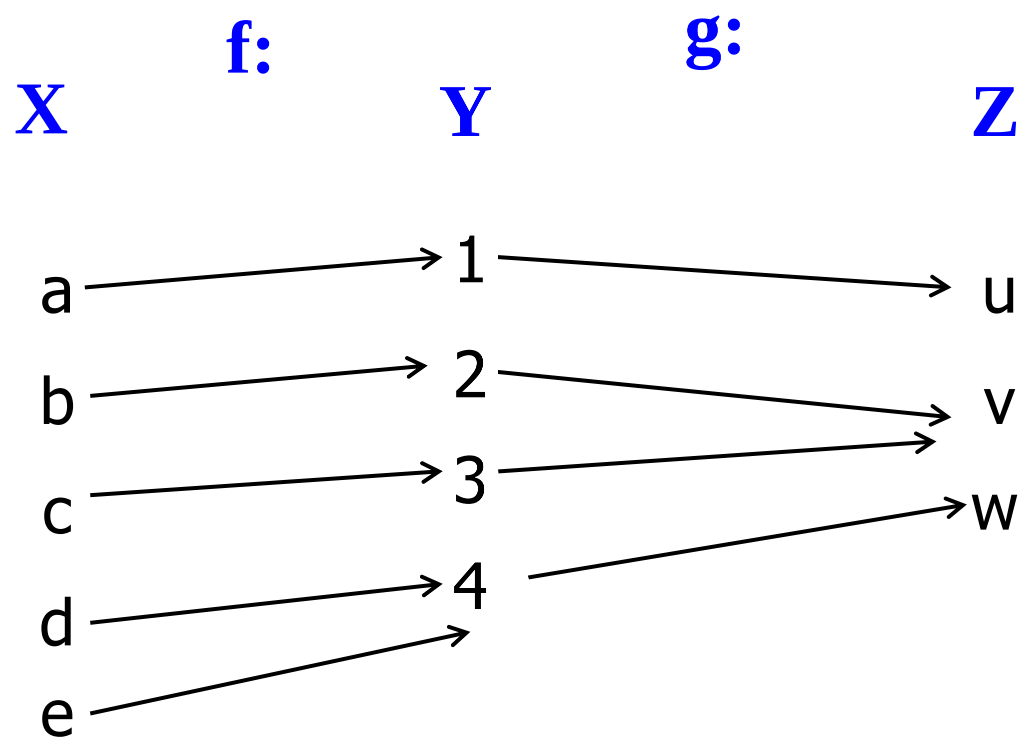
所以$gf(x_1)\ \neq\ gf(x_2)$

因此gf是单射。

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。



定义映射：gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 则

(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。

首先清楚满射的定义：

$\forall$ z，存在x, gf(x)=z

证明：$\forall$ $z\in Z$，因为g是满射。

所以存在$y\in Y$，$g(y) = z$

又因为f是满射，

所以存在$x\in X$, 对上述y有：$f(x)=y$

因此$gf(x)=g(y)=z$。

命题成立。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, 则

(1) 如果 gf 是单射，则 f 是单射。

(2) 如果 gf 是满射，则 g 是满射。

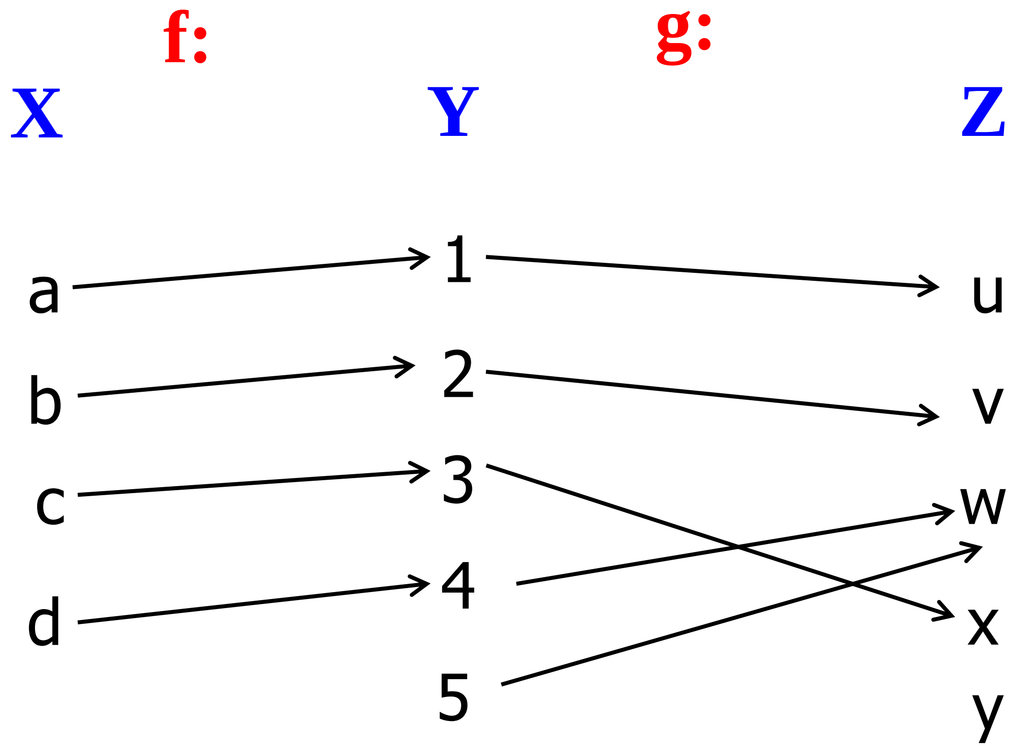
(3) 如果 gf 是双射，则 f 是单射且 g 是满射。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

正例

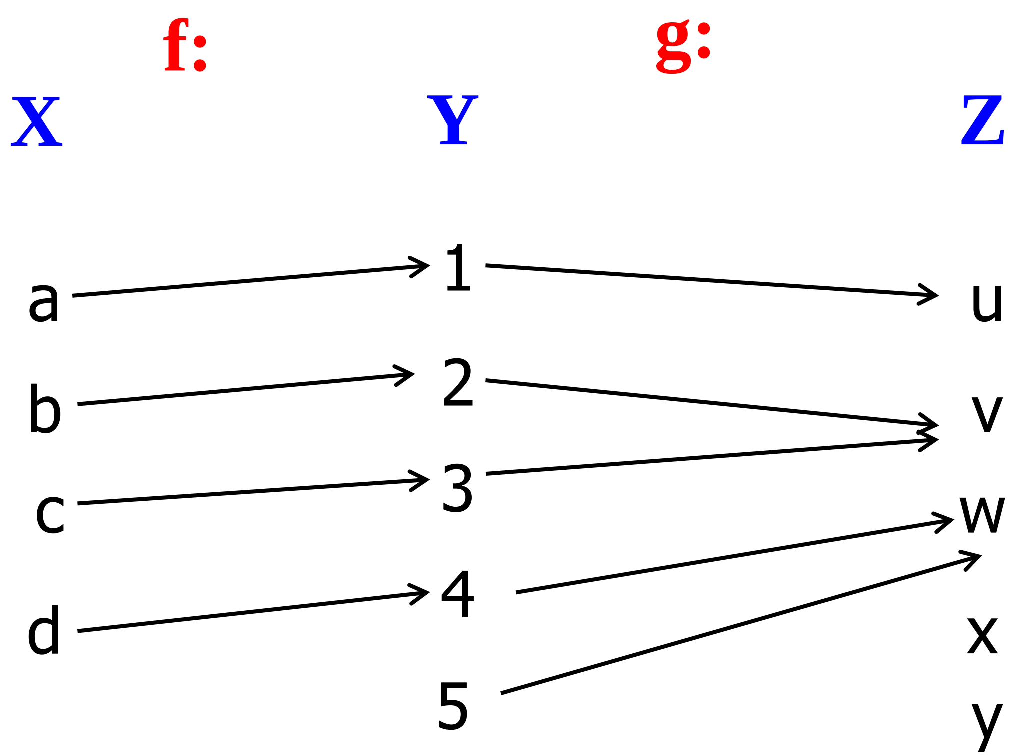


定义映射： gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。



反过来不成立

(如果f是单射，则gf是单射不成立)

定义映射：$gf(x)=g(f(x))$

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

首先清楚单射的定义:

$\forall\ x_1 \neq x_2,\ gf(x_1) \neq gf(x_2)$

证明：如果f不是单射，

存在$x_1 \neq x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$

因此$gf(x_1)=g(f(x_1))= g(f(x_2))= gf(x_2)$

这与gf是单射(即$gf(x_1) \neq gf(x_2)$）矛盾。

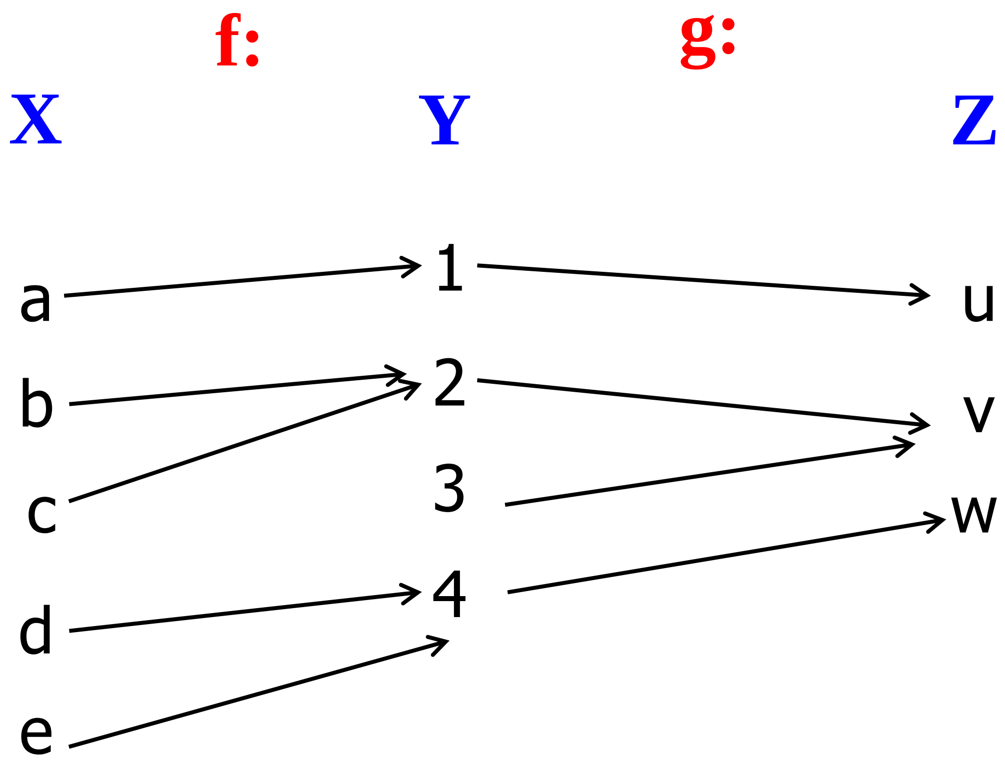
因此定理得证。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。

正例

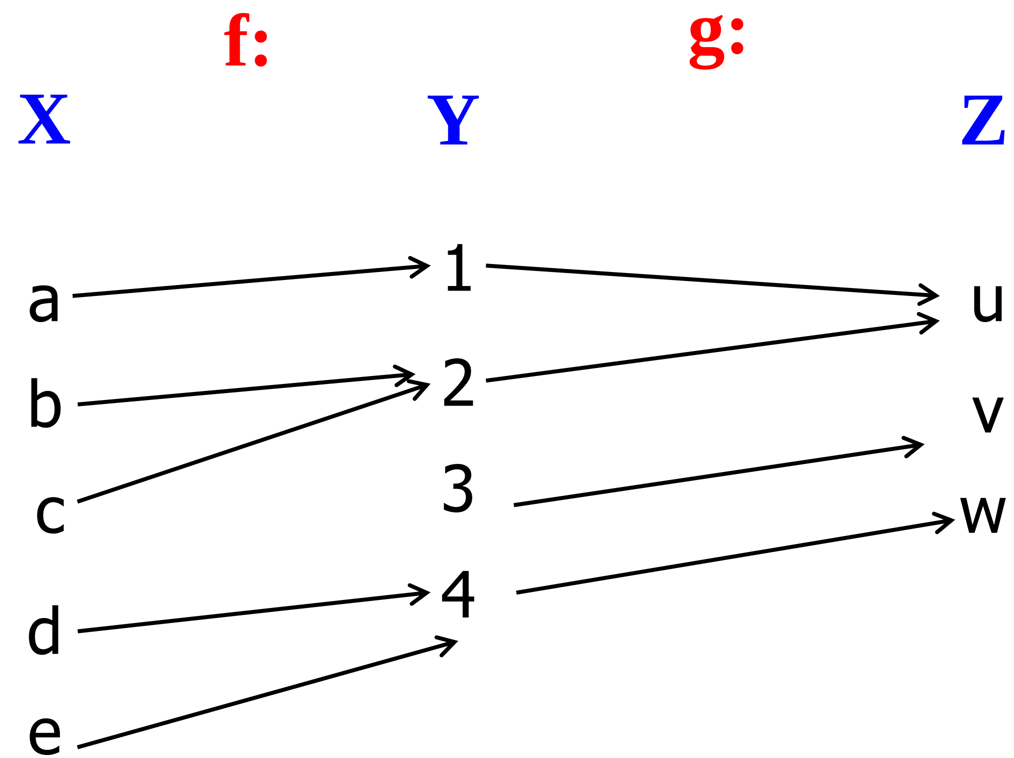


定义映射： gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设f: X→Y, g: Y→Z, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。



反过来不成立(如果g是满射，则gf是满射不成立)

定义映射： gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。

首先清楚满射的定义:

$\forall z$， $\exists x$, $gf(x)=z$

证明：如果g不是满射,

$\exists\, z\in Z$， $\forall\, y\in Y$， $g(y)\neq z$

又因为gf是满射， $\exists\, x\in X$， $gf(x)=z$

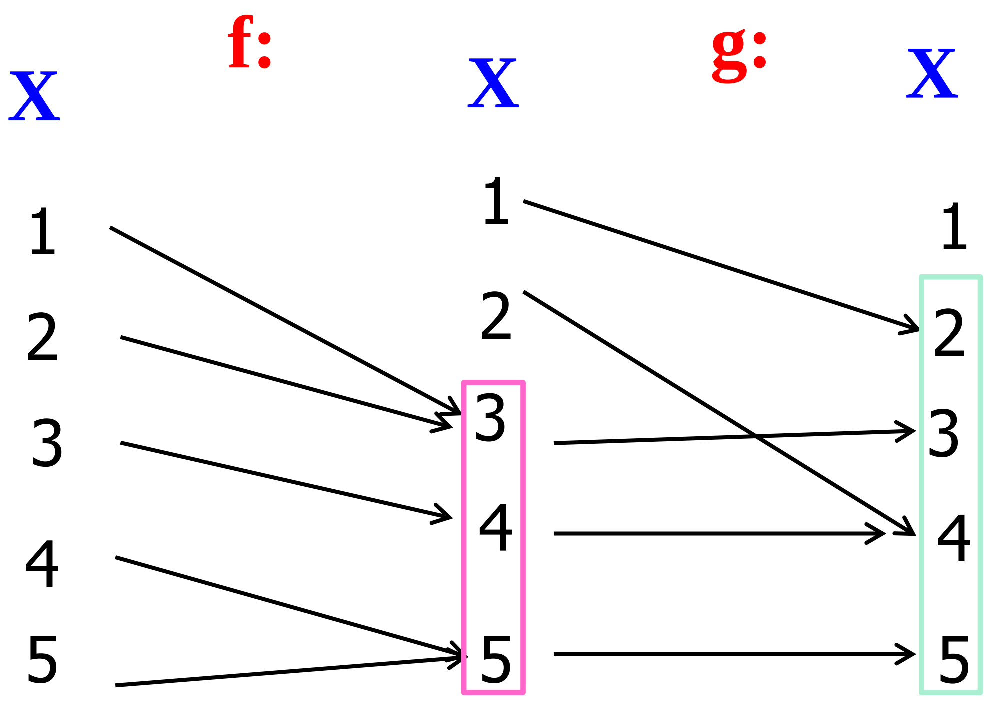
令$y=f(x)$, 根据fg是满射，有$g(y)=z$

这与g不是满射矛盾。

因此定理得证。

（2）映射合成的性质

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则 $I_m(f)\subseteq I_m(g)$ 的充分必要条件是存在一个映射 $h: X\rightarrow X$, 使得$f=gh$。



$I_m(f)=\{3,4,5\}$, $I_m(g)=\{2,3,4,5\}$

找到h使得$\forall x\in X$,

$f(x)=g(h(x))$

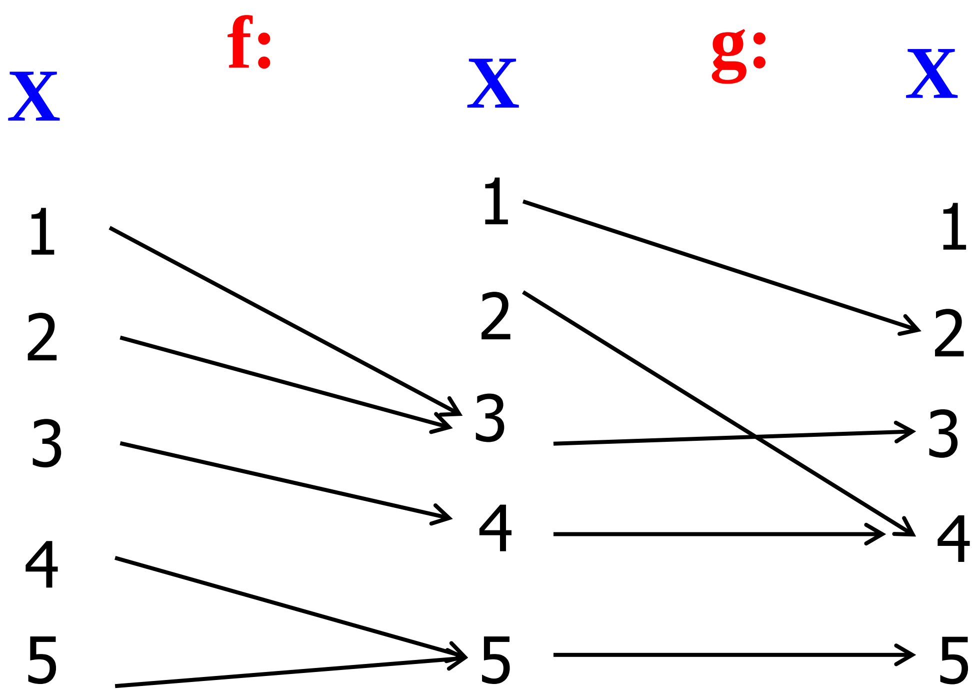
$f(1)=g(3)$	$h(1)=3$
$f(2)=g(3)$	$h(2)=3$
$f(3)=g(4)$	$h(3)=4$
$f(4)=g(5)$	$h(4)=5$
$f(5)=g(5)$	$h(5)=5$

$f(x)=g(h(x))$

$h(x)\in g^{-1}(f(x))$

（2）映射合成的性质

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则 $I_m(f)\subseteq I_m(g)$ 的充分必要条件是存在一个映射 $h: X\to X$, 使得 $f=gh$。



证充分性

设 $h: X\to X$, $f=gh$,

由于 $h(X)\subseteq X$,

所以 $g(h(X))\subseteq g(X)$

即 $f(X)\subseteq g(X)$,

$I_m(f)\subseteq I_m(g)$

$I_m(f)=\{3,4,5\}$, $I_m(g)=\{2,3,4,5\}$

2.4 映射的合成

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则 $I_m(f) \subseteq I_m(g)$ 的充分必要条件是存在一个映射 $h: X \to X$，使得 $f=gh$。

证必要性：$I_m(f) \subseteq I_m(g)$，则 $f(X) \subseteq g(X)$，

即 $\forall x \in X$, $f(x) \in g(X)$

所以，$\forall x \in X$，存在一个y，使 $g(y)=f(x)$

令 $h: X \to X$，h定义为 $\forall x \in X$, $h(x)=y$, y为 $g^{-1}(f(x))$ 中某个特定元素。

于是 $gh(x)=g(h(x))=f(x)$

**

2.5 逆映射

本节主要问题

（1）逆映射的定义

（2）左逆映射和右逆映射的定义

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

（1）逆映射的定义

例如: $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$

定义f: $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=c$

定义g: $g(a)=1$, $g(b)=2$, $g(c)=3$

$$
\begin{tikzcd}
 & X & Y & \\
 & 1 \arrow[r, shift left] & a \arrow[l, shift left] & \\
f: & 2 \arrow[r, shift left] & b \arrow[l, shift left] & g: \\
 & 3 \arrow[r, shift left] & c \arrow[l, shift left] &
\end{tikzcd}
$$

特点:

$gf(1)=g(a)=1$, $gf(2)=g(b)=2$, $gf(3)=g(c)=3$

$fg(a)=f(1)=a$, $fg(b)=f(2)=b$, $fg(c)=g(3)=c$

$gf=I_X$, $fg=I_Y$。

（1）逆映射的定义

定义2.5.1　设f: $X\rightarrow Y$, 如果存在一个映射g: $Y\rightarrow X$, 使得: $fg=I_Y$且$gf=I_X$,

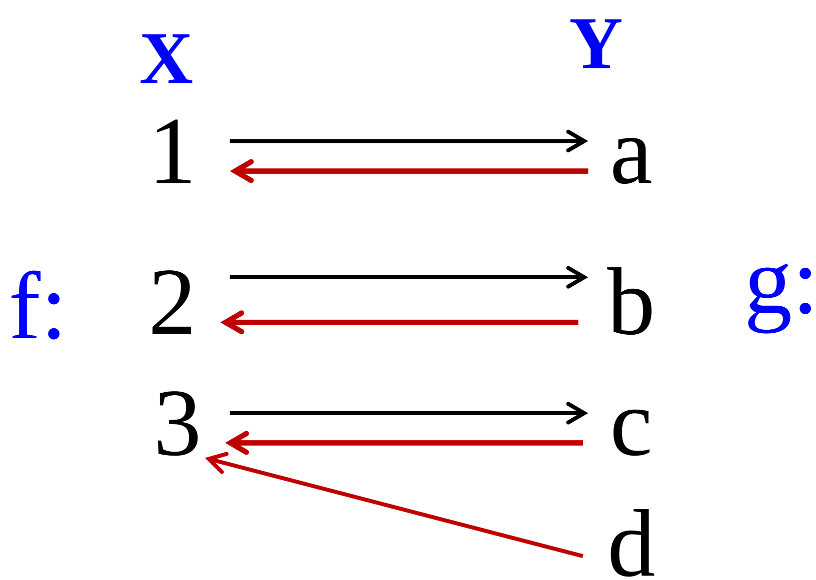
则称映射f是可逆的，而g称为f的逆映射

f可逆当且仅当$fg=I_Y$且$gf=I_X$同时成立，缺一不可。

（2）左逆映射和右逆映射的定义

定义2.5.2

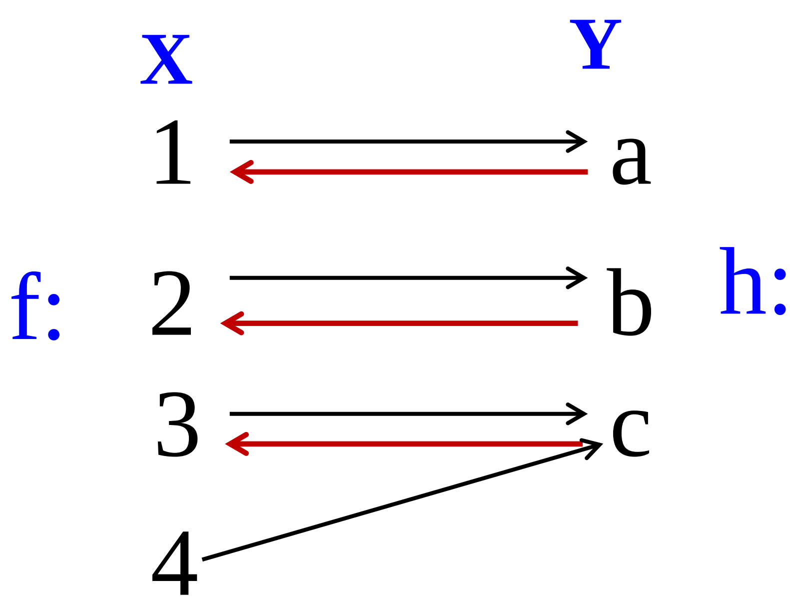
设f: X→Y, 如果存在一个映射g: Y→X, 使得: gf=I_X（先右再左）， 则称映射f是左可逆的，g称为f的左逆映射。



（2）左逆映射和右逆映射的定义

定义2.5.2 （续）

设f: X→Y, 如果存在一个映射h: Y→X, 使得: $fh=I_Y$（先左再右）， 则称映射f是右可逆的， h称为f的右逆映射



（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.1 设$f: X\to Y$，则f是可逆的充分必要条件是f为双射的（一一对应）。

[证]必要性：若f可逆，按定义存在一个映射$g: Y\to X$，使得$gf=I_X$，$fg=I_Y$。

由于恒等映射I_X，I_Y既是单射又是满射，因此，gf，fg即是单射又是满射。

由定理2.4.4，f既是满射又是单射，

因此f是双射。

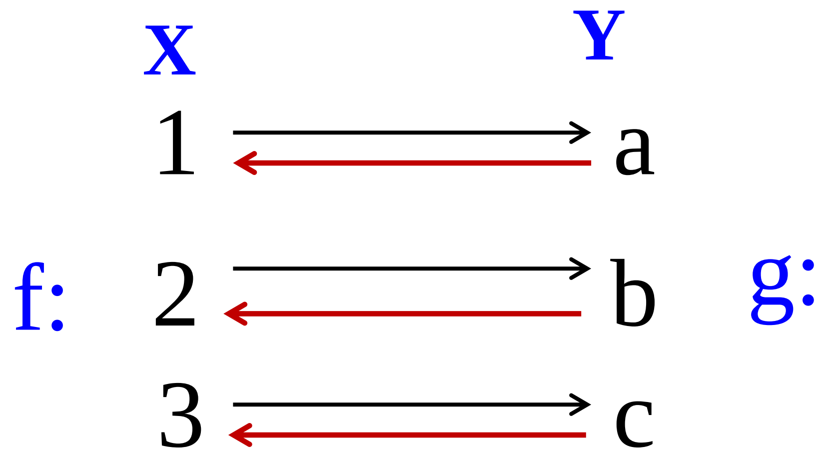
（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

[证]充分性:

若f是双射，则$\forall y\in Y$

有且仅有一个

$x\in X$, 使得$f(x)=y$。



因此, 令$g: Y\to X$, 对任一$y\in Y$, $g(y)=x$当且仅当$f(x)=y$。

$\forall x\in X$, $gf(x)=g(f(x))=g(y)=x$, 即: $gf = I_X$。

$\forall y\in Y$, $fg(y)=f(g(y))=f(x)=y$, 即: $fg = I_Y$。

因此f是可逆的

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.2 设f: X→Y, 则如果f是可逆的, 则f的逆映射是唯一的。f的逆记作f^{-1}。

[证]如果f的逆不唯一:

设f有两个逆映射 f_1^{-1}和f_2^{-1} 且$f_1^{-1} \neq f_2^{-1}$

$$\exists y \in Y,\ f_1^{-1}(y) \neq f_2^{-1}(y)$$

因为f是可逆的

$$ff_1^{-1}(y) = y \neq y = ff_2^{-1}(y)$$

因为f的逆映射是唯一的

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.3 设$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$都是可逆的，则gf也可逆且: $\boxed{(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1},}$ $(f^{-1})^{-1}=f$。

穿脱原则

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f: X \to Y$,则:

(1) f左可逆的充分必要条件是f为单射;

(2) f右可逆的充分必要条件是f为满射。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f: X\rightarrow Y$，则：

(1) f左可逆的充分必要条件是f为单射；

[证] 必要性：首先设f是左可逆的；

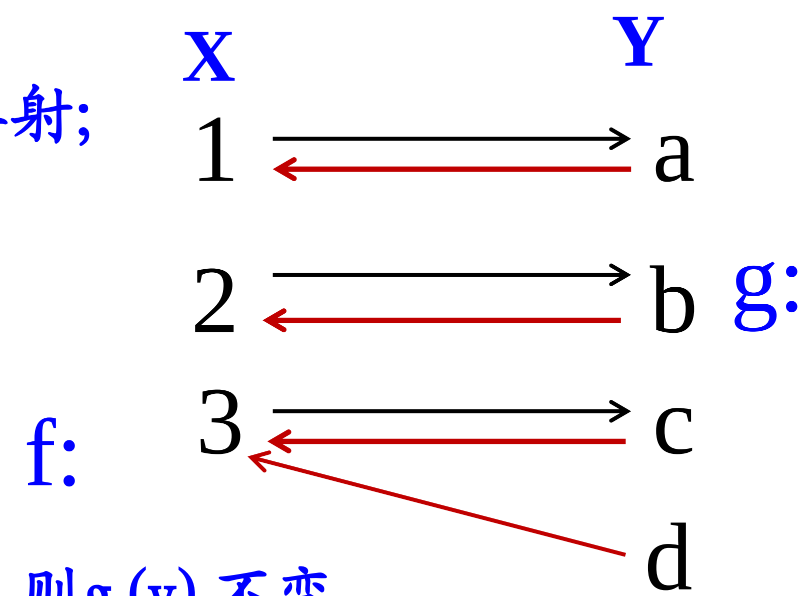
因此，存在$g: Y\rightarrow X$，使得$gf=I_X$；

因I_X是单射，得gf是单射，得f是单射；

[证] 充分性：若f为单射

则f可视为X到$I_m(f)$的一一对应。

因此有逆$g: I_m(f)\rightarrow X$，使得$gf=I_X$。



扩充g到Y上：$\forall y\in Y$，若$y\in I_m(f)$，则g(y)不变，

而当$y\in Y\backslash I_m(f)$时，规定g(y)为X中一固定元x_0，

则g就是Y到X的映射，且$gf=I_X$，所以，f是左可逆。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f: X \to Y$，则：

(2) f右可逆的充分必要条件是f为满射。

[证] 必要性：首先设f是右可逆的；

存在$g: Y \to X$，使得$fg = I_Y$；

由I_Y是满射可得f是满射；

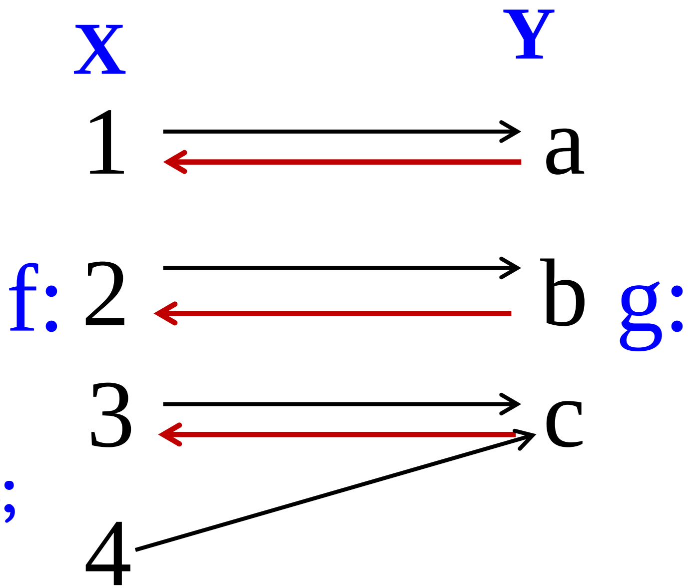
[证] 充分性：设f是满射

则$\forall y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) = \{x | f(x) = y\} \neq \varnothing$，

取一个$x_0 \in f^{-1}(\{y\})$，并令$g(y) = x_0$，

$(fg)(y) = f(g(y)) = f(x_0) = y$，于是$fg = I_Y$；

则$g: Y \to X$为f的一个右逆



2.6 置换

本节主要问题

（1）置换的定义

（2）置换的性质

（1）置换的定义

	X		X
f:	a	$\longrightarrow$	a
	b	$\longrightarrow$	c
	c	$\longrightarrow$	b

	X		X
g:	a	$\longrightarrow$	c
	b	$\longrightarrow$	b
	c	$\longrightarrow$	a

f(a)=a, f(b)=c, f(c)=b **g(a)=c, g(b)=b, g(c)=a**

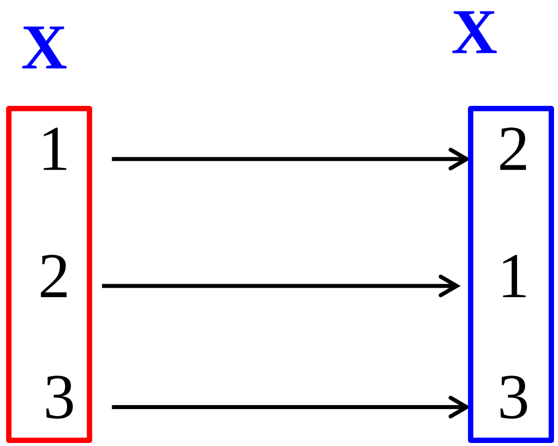
定义2.6.1 有限集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。|S|=n，则S上的置换就说成是n次置换。

有限集合S中的元素可以任意，为了叙述方便，一般采用S={1, 2, 3, . . . , n}。

（2）置换的性质

置换的表示方式

f:



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

（2）置换的性质

置换的表示方式

假定n个元素为1, 2, 3, . . . , n,

若元素1被1到n中某一元素k_1所取代, 2被其中某一元素k_2所取代，. . . , n被k_n所取代,

并且若$i \neq j$，$k_i \neq k_j$，i, j=1, 2, . . . , n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

（2）置换的性质

注意！只要对应一样，就是同一个置换

置换与表示方式或顺序无关

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

其实都是映射:

$\sigma(1)=4$， $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=2$, $\sigma(4)=1$

（2）置换的性质

置换的乘积（合成运算）

置换的乘积其实就是映射的合成运算，

例如：α，β是两个置换（双射），

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

α，β的合成是βα

βα(1)=2，βα(2)=4，βα(3)=3，βα(4)=1

为了保持与实数乘法的方式一致，置换的α，β的乘积记为：αβ，运算改为从左向右，例如：

(1)αβ=2, (2)αβ=4, (3)αβ =3, (4)αβ =1。

（2）置换的性质

置换的乘积（合成运算）

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

可以把置换β各列按α的第二行排列，例如:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

αβ的值就是α的第一行配上β的第二行。

（2）置换的性质

置换乘积具有封闭性

证明两个置换的乘积还是一个置换

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

把置换p2各列按p1的第二行排列。

$$p_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n} \end{pmatrix}$$

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n} \end{pmatrix}$$

p1p2仍然是一个置换，因此置换的乘积具有封闭性。

（2）置换的性质

置换的乘积满足结合律

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

（2）置换的性质

置换的单位元

像实数乘法中的1一样，x×1= 1×x=x，置换的乘积也具有这样的元素。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$ 恒等置换（恒等映射）

对于任意n个元素的置换，αI=Iα=α。

置换I我们称为单位元。

（2）置换的性质

置换的乘积具有逆元素（逆映射）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

因此：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ 的逆元素是 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

记为：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{-1}$

（2）置换的性质

n个元素的置换的个数是n!,

他们之间的置换乘法满足:

(1) 封闭性，　　(2) 结合律，

(3) 存在单位元，(4) 存在逆元素。

一般把满足这4个性质的运算称为群

因此n个元素的所有置换构成一个置换群。

（2）置换的性质

循环置换

例： S={1, 2, 3, 4, 5} $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1对应3，3对应4，4对应1，构成一个循环。

可以写成：$(1 \quad 3 \quad 4)(2)(5)$

简写成： $(1 \quad 3 \quad 4)$

例： S={1, 2, 3, 4, 5} $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

可以写成：$(1 \quad 3 \quad 4)(2 \quad 5)$

（2）置换的性质

定义2.6.2 设σ是S上的一个n次置换，若$i_1\sigma=i_2$, $i_2\sigma=i_3$, ...$i_{k-1}\sigma=i_k$, $i_k\sigma=i_1$, 而$\forall i\in S\backslash\{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $i\sigma=i$, 则称σ是一个**k-循环置换**，记为：$(i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_k)$，2循环置换称为**对换**。

$$(i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_k)=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

注意！循环置换$(a_1a_2...a_k)$实际上只与元素的相邻状况有关,而与哪个元素为首无关,

比如(1 2 3)=(2 3 1),

$(i\ \ j)^{-1}=(i\ \ j)$,

$$(i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_k)^{-1}=(i_k\ \ i_{k-1}\ \ \cdots\ \ i_1)$$

（2）置换的性质

定理2.6.1 设$\gamma=(i_1i_2\ldots i_r)$,则$\gamma^r=I$且$1\le k<r$时$\gamma^k\ne I$。

[证]

置换γ把i_1变i_2，把i_2变i_3,…,i_{r-1}变i_r,i_r变i_1。

置换γ^2把i_1变i_3，把i_2变i_4,…,i_{r-1}变i_1,i_r变i_2。

……………………………………

置换γ^{r-1}把i_1变i_r，把i_2变i_1,…,i_{r-1}变i_{r-2},i_r变i_{r-1}。

置换γ^r把i_1变i_1，把i_2变i_2,…,i_{r-1}变i_{r-1},i_r变i_r。

假设使$\sigma^k=I$的最小正整数k为σ的阶。

r–循环置换的阶为r。

（2）置换的性质

不相交循环置换

如若两个循环置换$(a_1a_2...a_n)$与$(b_1b_2...b_m)$没有相同的文字,则称为是不相交的,不相交两循环置换的乘积（合成）可交换.

$$(1\quad 3\quad 2)(4\quad 5)=(4\quad 5)(1\quad 3\quad 2)$$

定理2.6.2 设$\alpha=(i_1i_2...i_k)$与$\beta=\{j_1j_2...j_r\}$是两个没有共同数字的循环置换，则α与β可交换，即$\alpha\beta=\beta\alpha$。

[证]分三种情况讨论,1.被α变动的元素,2.被β变动的元素,3.不被二者变动的元素。

（2）置换的性质

定理2.6.2　设$\alpha = (i_1 i_2 \ldots i_k)$与$\beta=\{j_1 j_2 \ldots j_r\}$是两个没有共同数字的循环置换，则$\alpha$与$\beta$可交换，即$\alpha\beta=\beta\alpha$。

[证]分三种情况讨论,1.被α变动的元素,2.被β变动的元素,3.不被二者变动的元素。

1.针对被α变动的元素，$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$,知$i\alpha\neq i$,

因为i被α变动，所以i不被β变动,即$i\beta=i$,

因此$(i\beta)\alpha= i\beta\alpha= i\alpha$。

因为$i\alpha\neq i$,所以$i\alpha\alpha\neq i\alpha$,因此$i\alpha$被$\alpha$变动，

$i\alpha$不被β变动，所以$(i\alpha)\beta=i\alpha$。

2.针对被β变动的元素,同样可证

3.对于不被二者变动的元素显然有$\alpha\beta=\beta\alpha$。

（2）置换的性质

定理2.6.3 任何一个置换都可以表示成若干循环的乘积。

例如:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 8 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 8)(2\ \ 6)$$
$$= (1\ \ 3\ \ 5\ \ 8)(2\ \ 6)(4)(7)$$

证明:对已知置换 $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

不妨设从1开始搜索, $1 \to b_1$, $b_1 \to b_2$, $b_2 \to b_3$,……

这样找下去，总有一次不再是新的元素了，设第一个不是新元素的是b_{k+1}, $b_k \to b_{k+1}$, 则b_{k+1}一定是1,

如果b_{k+1}不是1， 设$b_{k+1} = b_i$, $i<k+1$, $b_i \neq 1$,

那么$b_{i-1} \to b_i$, $b_k \to b_{k+1} \Rightarrow b_{i-1} = b_k$ 矛盾!

（2）置换的性质

从1开始搜索,如果$1\to b_1\to b_2\to\ldots\to b_k\to 1$,

则得一循环置换$(1b_1b_2\ldots b_k)$，如若它包含了123...n的所有文字,则搜索停止,

否则从余下的文字中的任意一文字开始,如法进行,再得一循环,

如此反复直到所有文字都取完为止,这样便得到一组不相交的循环之积。

证毕。

（2）置换的性质

对换或换位

2阶循环(ij)叫做i和j的对换或换位

对换的性质

(ij) (ij)= (i) (j)=I　(ij)$^{-1}$ =(ij)

定理2.6.4 任意一个循环都可以表达成若干对换之积

证明只需给出一个分解的方法就可以了，

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ n)=(1\ \ 2)(1\ \ 3)\ldots(1\ \ n)$$

$$(i_1 i_2 \ldots i_k)=(i_1 i_2)(i_1 i_3)\ldots(i_1 i_k)$$

（2）置换的性质

定义2.6.3 若一个置换可分解成奇数个换位之积,叫做奇置换;若可分解成偶数个换位之积,叫做偶置换

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)=(1\ \ 2)(1\ \ 3)(1\ \ 4)$$

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)=(1\ \ 2)(1\ \ 3)(1\ \ 4)(1\ \ 5)$$

定理2.6.5 如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换的个数的奇偶性是不变的。

略:

（2）置换的性质

定理2.6.6 n次奇置换的个数和n次偶置换的个数相等，都等于n!/2。

证明思路是：

任意一个奇置换乘上一个奇置换构成一个偶置换。

同样任意一个偶置换乘上一个奇置换构成一个奇置换。

证明：令所有的n次奇置换所构成的集合为A，B为所有的偶置换构成的集合，则$S_n = A\cup B$且$A\cap B=\phi$

因此：$|S_n| = |A| + |B| = n!$

令$\sigma\in A$，则$\sigma A=\{\sigma\tau|\tau\in A\}\subseteq B$，所以$|\sigma A| \le |B|$

又$\sigma B=\{\sigma\gamma|\gamma\in B\}\subseteq A$，所以$|\sigma B| \le |A|$

只要证明$|\sigma A| = |A|$，$|\sigma B| = |B|$。

（2）置换的性质

定理2.6.6 n次奇置换的个数和n次偶置换的个数相等，都等于n!/2。

令φ: $A \to \sigma A$, $\forall \tau \in A$, $\varphi(\tau)=\sigma\tau$, 则φ为一一对应。

如若不然，设$\tau 1, \tau 2 \in A$且$\tau 1 \neq \tau 2$，但$\sigma\tau 1=\sigma\tau 2$，

则两边左乘以σ^{-1}，得到$\tau 1=\tau 2$，矛盾，

因此，$|A| = |\sigma A|$,

类似可证$|B| = |\sigma B|$,

所以$|A| \le |B|$, $|B| \le |A|$, 故$|A| = |B|=n!/2$

（2）置换的性质

例2.6.2 证明：任一n次置换都能被分解为若干形如(1 2),(1 3),...,(1 n)的一些对换之乘积。

证明：由定理2.6.3和定理2.6.4,任何一个置换都可以分解成对换的乘积。

$\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $i\neq j$, 易证:

$(i\ \ j)=(1\ i)(1\ j)(1\ i)$

因此，命题成立。

定理2.6.3 任何一个置换都可以表示成若干循环的乘积。

定理2.6.4 任意一个循环都可以表达成若干对换之积。