第八章：连通度和匹配

8.1 顶点连通度和边连通度

*8.2 门格尔定理

8.3 匹配、霍尔定理

8.3 匹配、霍尔定理

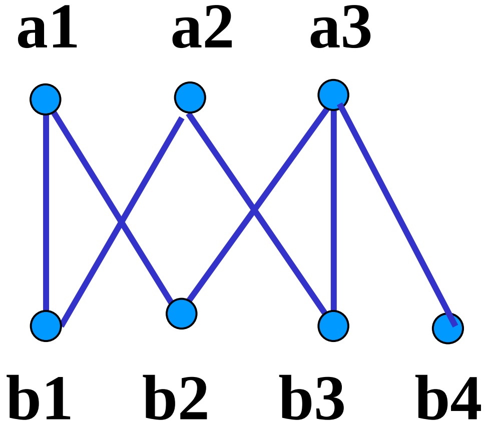
本节主要研究的问题

1、工作匹配（什么人干什么工作）

2、合作匹配（哪两个人进行合作）

3、婚姻匹配

……………………………………



8.3 匹配、霍尔定理

本节主要内容

1、匹配的定义

2、最大匹配的定义

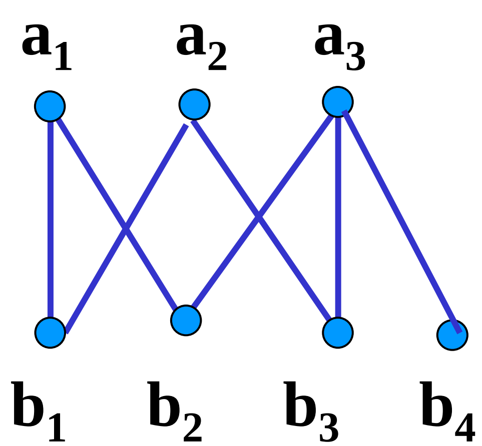
3、完全匹配的定义

4、霍尔定理

目的是讨论各种情况下的匹配情况。

1、匹配的定义

定义8.3.1　设G=(V,E)是一个图，图G的任意两条不邻接的边x与y称为是相互独立的。G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条边是互相独立的。



$(a_1,b_1), (a_2,b_3)$ 相互独立

$(a_1,b_1), (a_1,b_2)$ 不相互独立

$E = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2,b_3), (a_3,b_2), (a_3,b_3), (a_3,b_4)\}$

$Y_1=\{\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$

$Y_2=\{(a_1, b_1)\}$

$Y_3=\{(a_1, b_1), (a_2,b_3), (a_3,b_2)\}$

1、匹配的定义

定义8.3.1 设G=(V,E)是一个图，图G的任意两条**不邻接**的边x与y称为是相互独立的。G的边集E的子集Y称为G的一个**匹配**，如果Y中任意两条边是互相独立的。

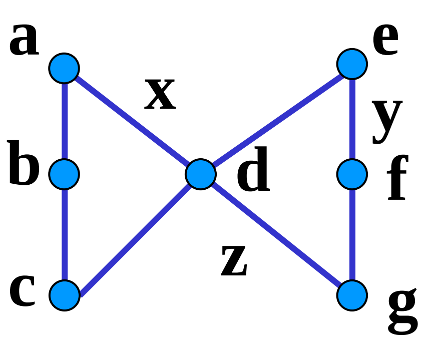


图8.3.1

$Y_1=\{(a,b), (c,d),(e,f)\}$

$Y_2=\{(a,b)\}$

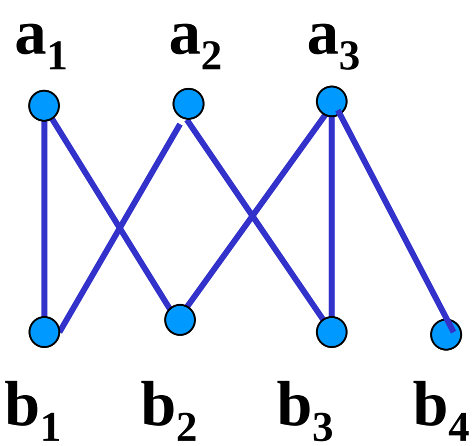
$Y_3=\{(a,b),(b,c)\}$

如Y是G的一个匹配，$\forall v\in V$，v至多与Y中一条边关联。

反之：如Y不是G的一个匹配，则$\exists v\in V$，v关联Y中至少两条边。

2、最大匹配的定义

定义8.3.2　图G的一个匹配Y称为是**最大匹配**，如果对G的任一匹配Y′，恒有|Y′|≤|Y| 。



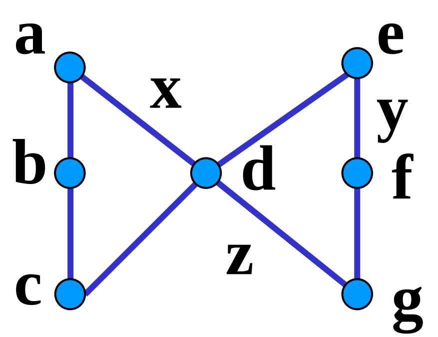


图8.3.1

$Y_3=\{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\}$

$Y_1=\{(a, b), (c, d), (e, f)\}$

$Y_2=\{(a, b)\}$

$Y_3=\{(a, b), (b, c)\}$

$Y_4=\{(a, b), (d, e), (f, g)\}$

3、完全匹配的定义

定义8.3.3 设G = (V, E) 是一个偶图且$V = V_1 \cup V_2$，$\forall x \in E$, x是连接V_1的一个顶点与V_2的一个顶点的边，如果存在G的一个匹配Y使得$|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$, 则称Y是**偶图的完全匹配**。

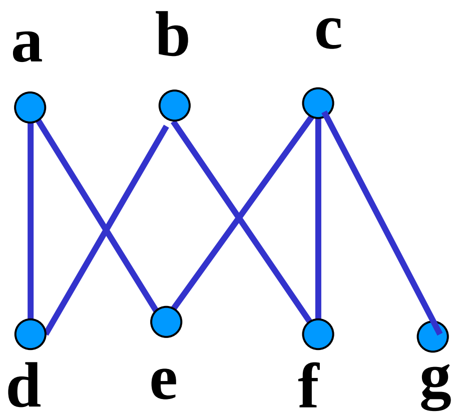


图8.3.2

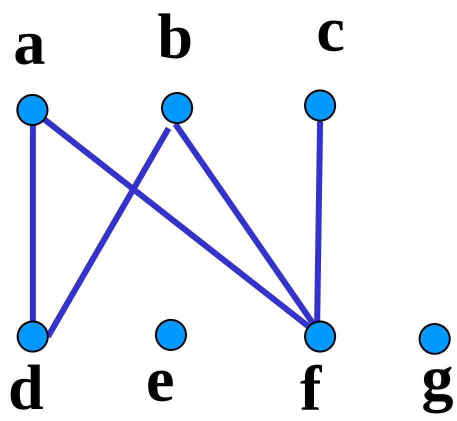


图8.3.3

$Y_1=\{(a, d), (b, f), (c, e)\}$ $Y_1=\{(a, d), (b, f)\}$

4、霍尔定理

问题8.3.1（结婚问题）已知由若干个小伙子组成的集合F，若干个姑娘之集合为G，每个姑娘都有一张可接受为配偶的小伙子名单。问在什么条件下才能把所有的姑娘嫁出去?

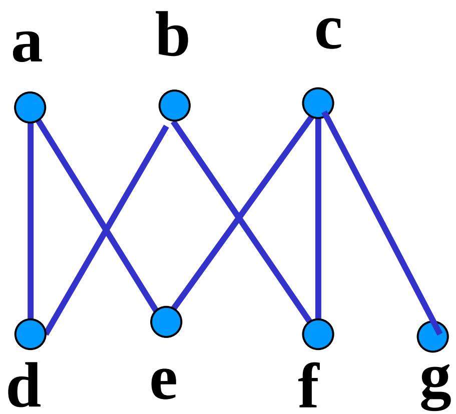


图8.3.2

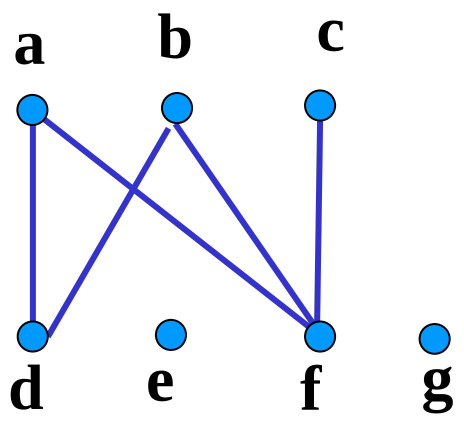


图8.3.3

$Y_1=\{(a, d), (b, f), (c, e)\}$　　$Y_1=\{(a, d), (b, f)\}$

4、霍尔定理

问题8.3.2（工作安排问题）一个车间有m个工人和n件不同的工作，每件工作只需一位工人干，而每位工人仅能熟练地干其中的几件工作。问在什么情况下车间主任才能为每位工人分配一件他能胜任的工作。或者：每件工作都能分配合适的工人。

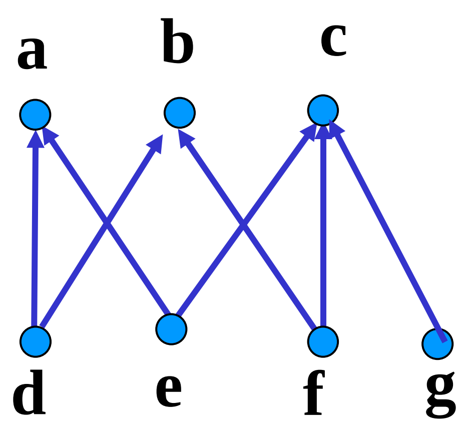


图8.3.4

4、霍尔定理

数学问题 设X是一个有穷集合，$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$是X的子集的一个序列，问在什么情况下存在X的一个n元子集S，使得S为$A_1, A_2, \ldots, A_n$中各取一个元素组成的？亦即若$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$，则$s_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$。如果存在这样的n元集S，则S称为系统T: $A_1, A_2, \ldots, A_n$的相异代表系。

例1　$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A_1=\{2, 3\}, A_2=\{3, 4\}, A_3=\{4, 5\}, A_4=\{5, 1\}, A_5=\{1, 2\}$

$S=\{2, 3, 4, 5, 1\}$

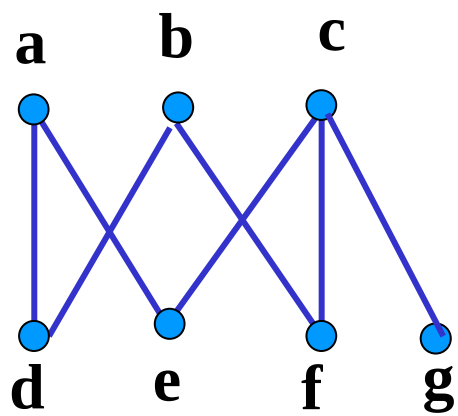
例2　$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

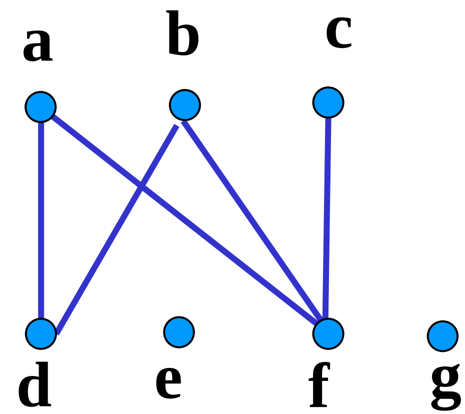
$A_1=\{1, 2, 3, 4\}, A_2=\{2, 3, 5\}, A_3=\{3, 5\}, A_4=\{5\}, A_5=\{3\}$

S=?

4、霍尔定理

定理8.3.1 设有m个姑娘，n个小伙，则结婚问题有解的充分必要条件是对任意的k($1\le k \le m$)及任意k个姑娘，认识的小伙子总数不少于k。





必要性：使用数学归纳法，对姑娘的个数m进行归纳, 必要性显然。

充分性：归纳基础：当$m = 1$时，显然。

归纳假设：姑娘个数$\le m-1$时，即姑娘都能嫁出去，结婚问题有解。

4、霍尔定理

归纳结论：设有m个姑娘，并且对任意的k($1\leq k\leq m$)及任意k个姑娘，认识的小伙子总数≥k。

情况1：对任意的k($1\leq k\leq m-1$)及任意k个姑娘，认识的小伙子总数≥k+1 。

这时可先安排一对，而剩下m-1个姑娘和n-1个小伙子，仍满足定理的充分条件，由归纳假设，剩下的m -1个姑娘也能嫁出去，充分性成立。

4、霍尔定理

情况2：存在某个确定k ($1\le k\le m-1$)及 k个姑娘，认识的小伙子总数=k。由归纳假设知，这k个姑娘可以嫁出去，关键是剩下的m-k个姑娘能否嫁出去。

只需证明剩下的m - k个姑娘和剩下的n - k个小伙满足归纳假设。

如果剩下的m - k个姑娘和剩下的n - k个小伙不满足归纳假设。

则必有i个姑娘，她们认识剩下的n - k个小伙中少于i个。

于是这i个姑娘和已出嫁的k个姑娘共k + i个人，她们认识n个小伙子中的总数少于k + i个，这与假设k + i个姑娘认识的小伙总数不少于k + i相矛盾。

于是：剩下的m - k个姑娘和n - k个小伙也满足归纳假设。充分性得证。

4、霍尔定理

定理8.3.2 (Hall, 1935) 设X是一个有限集, 系统T: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是X的子集组成的, 则T有相异代表系的充分必要条件是$\forall$ I $\subseteq$ {1, 2, ..., n} 有

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |\mathrm{I}|$$

X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

A_1={2, 3}, A_2={3, 4}, A_3={4, 5}, A_4={5, 1}, A_5={1, 2}

S={2, 3, 4, 5, 1}

X={1, 2, 3, 4, 5}

A_1={1, 2, 3, 4}, A_2={2, 3, 5}, A_3={3, 5}, A_4={5}, A_5={3}

S=?

证：必要性显然成立。

4、霍尔定理

定理8.3.2 (Hall, 1935) 设X是一个有限集, 系统T: $A_1, A_2, ..., A_n$ 是X的子集组成的, 则T有相异代表系的充分必要条件是$\forall$ I $\subseteq$ {1, 2, ..., n} 有

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I|$$

证: 充分性的基本思想是: 如果T: $A_1, A_2, ..., A_n$ 满足Hall条件且每个A_i都是单元素集, 即A_i = {a_i}, 则它们两两不相交且有相异代表系。

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

A_1={3}, A_2={4}, A_3={5}, A_4={7}, A_5={1}

S={3, 4, 5, 7, 1}

4、霍尔定理

如果T中各个集A_i不都是单元素集, 例如: 某个$|A_i| \geq 2$, 则从A_i中去掉某个元素后得到B_i,

那么新的系统T′: $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1} \ldots, A_n$ 仍满足Hall条件。重复这个过程若干次，最后必得到一个满足Hall条件且都是单元素集的系统。

定理8.3.2 (Hall, 1935) 设X是一个有限集, 系统T: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是X的子集组成的, 则T有相异代表系的充分必要条件是$\forall$ I $\subseteq$ {1, 2, ..., n} 有

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |I|$$

4、霍尔定理

定理8.3.2 (Hall, 1935) 设X是一个有限集, 系统T: $A_1, A_2, ..., A_n$ 是X的子集组成的, 则T有相异代表系的充分必要条件是$\forall I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ 有

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I|$$

例: $I=\{1,2\}$时, $\left|\bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i\right| \geq |\{1,2\}|$

证: 为了叙述方便, 不妨设$|A_1| \geq 2$, $a, b \in A_1$, $a \neq b$。现证明系统:

T_a: $A_1\backslash\{a\}, A_2,...,A_n$

T_b: $A_1\backslash\{b\}, A_2,...,A_n$ 必有一个满足Hall条件

例 **X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**

$A_1=\{3, 4\}$, $A_2=\{4\}$, $A_3=\{5\}$, $A_4=\{7\}$, $A_5=\{1\}$

需证 **T_a: $A_1\backslash\{3\}, A_2,...,A_5$**

T_b: $A_1\backslash\{4\}, A_2,...,A_5$ 必有一个满足Hall条件

4、霍尔定理

如果没有满足Hall条件得，则有A、B ⊆ {2, 3, 4, ..., n}使得

$$\left|\bigcup_{i\in A} A_i \cup (A_1 \setminus \{a\})\right| < |A| + 1$$

$$\left|\bigcup_{i\in B} A_i \cup (A_1 \setminus \{b\})\right| < |B| + 1$$

令

$$P = \bigcup_{i\in A} A_i \cup (A_1 \setminus \{a\})$$

$$Q = \bigcup_{i\in B} A_i \cup (A_1 \setminus \{b\})$$

则

$$|P \cup Q| = \left|\bigcup_{i\in A\cup B} A_i \cup A_1\right|$$

$$|P \cap Q| \geq \left|\bigcup_{j\in A\cap B} A_j\right|$$

4、霍尔定理

于是：　$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A_1=\{3, 4\}, A_2=\{4\}, A_3=\{5\}, A_4=\{7\}, A_5=\{1\}$

$$|A|+|B| \geq |P|+|Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q|$$

$$\geq \left| \bigcup_{i \in A \cup B} A_i \cup A_1 \right| + \left| \bigcup_{j \in A \cap B} A_j \right|$$

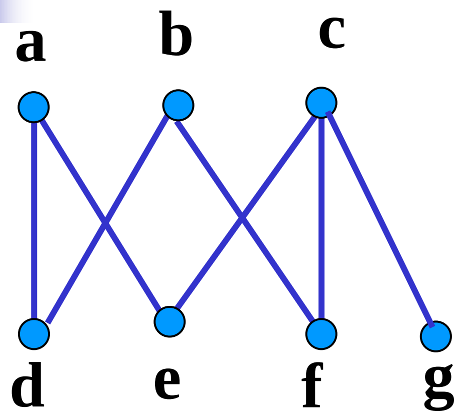
$$\geq (|A \cup B|+1) + |A \cap B|$$

$$= |A|+|B|+1$$

矛盾：所以T_a和T_b中必有一个满足Hall条件。

反复利用这个过程就得到一个满足Hall条件的系统，它的每个集均是单元素集。因此，T有相异代表系。

4、霍尔定理



左图$V_1 = \{a, b, c\}, V_2, = \{d, e, f, g\}$

$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，

$|V_1| \le |V_2|$

令$\varphi: V_1 \rightarrow 2^{V_2}, \forall v_i \in V_1, \ \varphi(v_i)=\{u_j \mid u_j \in V_2$且$v_i u_j \in E\}$

于是，偶图$G = (V_1 \cup V_2, E)$确定了V_2上的一个系统

$T: \ \varphi(v_1), \varphi(v_2), ..., \varphi(v_m)$

令$\varphi(a)=\{d, e\}, \varphi(b)=\{d, f\}, \varphi(c)=\{e, f, g\}$

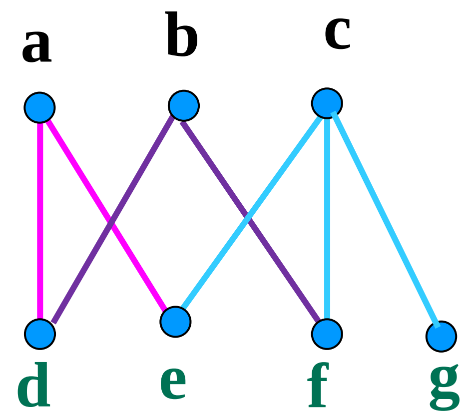
于是偶图$G = (V_1 \cup V_2, E)$确定了V_2上的一个系统

$T: \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f, g\}$

4、霍尔定理

显然，偶图G有完全匹配当且仅当G确定的系统T有相异代表系。

由Hall定理8.3.2, T有相异代表系当且仅当$\forall S \subseteq V_1$，总有$|\varphi(S)| \geq |S|$。因此，偶图$G=(V_1 \cup V_2, E)$有完全匹配当且仅当对每个自然数k, $1 \leq k \leq |V_1|$，与V_1中任意k个顶点邻接的那些顶点数至少为k。



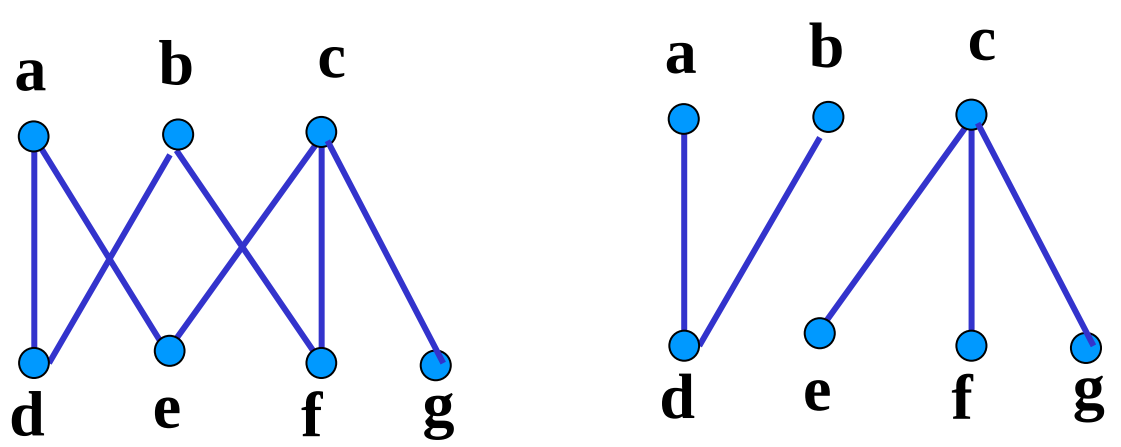
X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
A_1={2, 3}, A_2={3, 4}, A_3={4, 5},
A_4={5, 1}, A_5={1, 2}
S={2, 3, 4, 5, 1}

令φ(a)={d, e}, φ(b)={d, f}, φ(c)={e, f, g}
于是偶图$G=(V_1 \cup V_2, E)$确定了V_2上的一个系统
T: {d, e}, {d, f}, {e, f, g}

4、霍尔定理

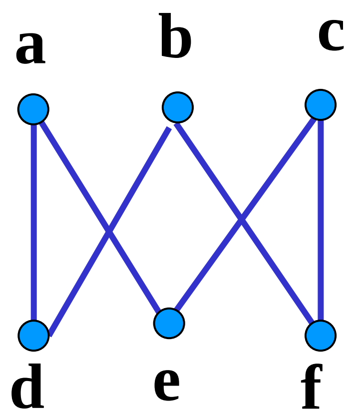
推论8.3.1 $G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，$|V_1| \leq |V_2|$, 则G有完全匹配的充分必要条件是$\forall S \subseteq V_1$, 总有$|\varphi(S)| \geq |S|$。

其中$\varphi(S) = \{u \mid u \in V_2且\exists v \in S使得vu \in E\}$



5、完美匹配的定义

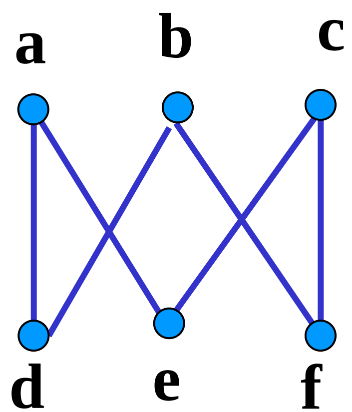
定义8.3.4 设Y是图G=(V, E) 的一个匹配，如果2|Y|= |V|，则称Y为G的一个完美匹配。



Y = {(a,d), (b,f), (c,e)}

5、完美匹配的定义

推论8.3.2 任何r正则偶图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 必有一个完美匹配，其中$|r| \geq 1$。



$Y = \{(a,d), (b,f), (c,e)\}$

5、完美匹配的定义

推论8.3.2 任何r正则偶图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 必有一个完美匹配，其中$|r| \geq 1$。

证：因为G是r正则图，所以$r|V_1| = r|V_2| = |E|$

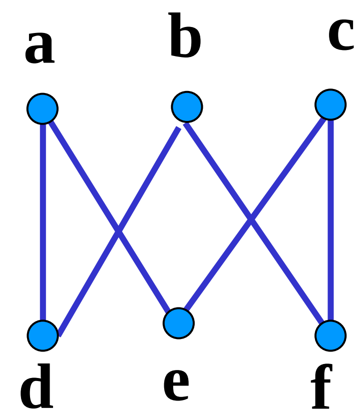
因此$|V_1| = |V_2|$。

对$S \subseteq V_1$，$|\varphi(S)| = |\{u \mid u \in V_2$ 且 $\exists v \in S$使得 $vu \in E\}|$

与S中顶点关联的总边数为$r|S|$，而与$\varphi(S)$中顶点关联的总边数为$r|\varphi(S)|$，

显然，与S某个顶点关联的边必与$\varphi(S)$中某个顶点关联，所以$r|\varphi(S)| \geq r|S|$，

因此：$|\varphi(S)| \geq |S|$，由Hall定理8.3.2，G有一个完全匹配，这个完全匹配就是完美匹配。



S={a}关联的边为ad, ae;
φ(S)=φ({a})={d, e}关联的边为da, db, ea, ec。

5、完美匹配的定义

设T: $A_1, A_2, \ldots, A_n$是一个有限集X的子集构成的系统，系统T的子系统S是T的子序列 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ 构成的系统，$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$。

如果T的子系统S有相异代表系，则称子系统S的相异代表系为系统T的**部分相异代表系**。

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

T: $A_1=\{2, 3\}, A_2=\{3\}, A_3=\{5\}, A_4=\{5, 1\}, A_5=\{1, 2\}$

S: $A_1=\{2, 3\}, A_2=\{3\}, A_3=\{5\}, A_4=\{5, 1\}$

则 $\{2, 3, 5, 1\}$ 是S的相异代表系，也是T的部分相异代表系。

5、完美匹配的定义

定理8.3.3 设T: $A_1, A_2, ..., A_n$为有限集X的子集组成的系统，则T有一个由t个不同元素组成的T的部分相异代表系的充分必要条件是$\forall A \subseteq I = \{1, 2, ..., n\}$,

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |A| - (n-t)$$

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

T: $A_1=\{2, 3\}, A_2=\{3\}, A_3=\{5\}, A_4=\{5, 1\}, A_5=\{1, 2\}$

S: $A_1=\{2, 3\}, A_2=\{3\}, A_3=\{5\}, A_4=\{5, 1\}$

则 {2, 3, 5, 1} 是S的相异代表系，也是T的部分相异代表系。

5、完美匹配的定义

定理8.3.4 设T: $A_1, A_2, ..., A_n$为有限集X的子集组成的系统，则T的部分相异代表系所含元素个数的最大值t等于

$$\min_{A\subseteq I}\left\{\left|\bigcup_{i\in A} A_i\right| + (n - |A|)\right\}$$

其中，I = {1, 2, ..., n}。

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

T: A_1={2, 3}, A_2={3}, A_3={5}, A_4={5, 1}, A_5={1, 2}

S: A_1={2, 3}, A_2={3}, A_3={5}, A_4={5, 1}

则 {2, 3, 5, 1} 是S的相异代表系，也是T的部分相异代表系。

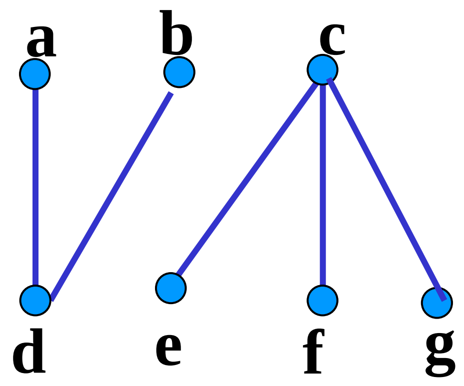
5、完美匹配的定义

设$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，$|V_1| = |V_2|$，G的最大匹配中边的条数记为M(G)。由定理8.3.4得到:

推论8.3.3 设$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，$|V_1| \le |V_2|$，则

$$M(G) = \min_{A \subseteq V_1}\{\left|\bigcup_{v \in A}\phi(v)\right| + (|V_1| - |A|)\}$$

$$= \min_{A \subseteq V_1}\{|A| + |\phi(v_1 \setminus A)|\}$$



习　　题

1. 设X = {1, 2, 3, 4, 5}。判断下列各系统哪些有相异代表系：

(a) {1}, {2, 3}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4, 5}　　没有

(b) {1, 2}, {2, 3}, {4, 5}, {4, 5}　　有

(c) {1, 3}, {2, 3}, {1, 2}, {3}　　没有

(c) {1, 3, 4}, {1, 4, 5}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5},　　有

习　　题

2. 设X = {1, 2, ..., 50}。

系统T: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, ..., {49, 50}, {50}

有多少个相异代表系?

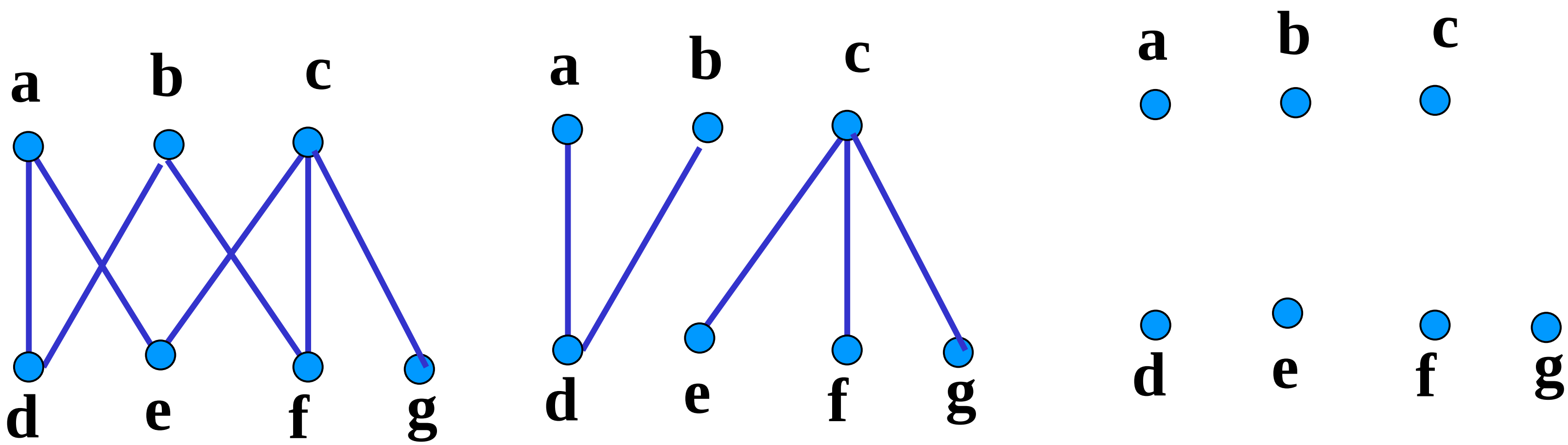
1个

习　　题

3. 设$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，

如果$\forall\, u \in V_1$ 及 $v \in V_2$，$\deg u \geq \deg v$,

试证：G有一个完全匹配

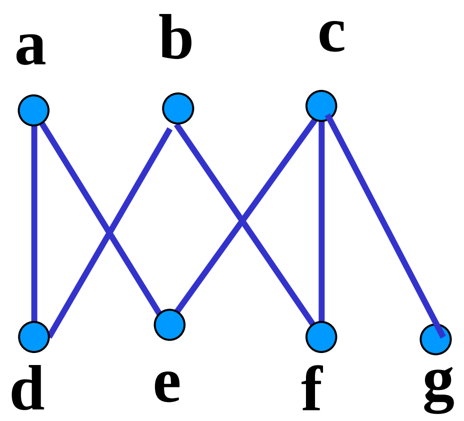


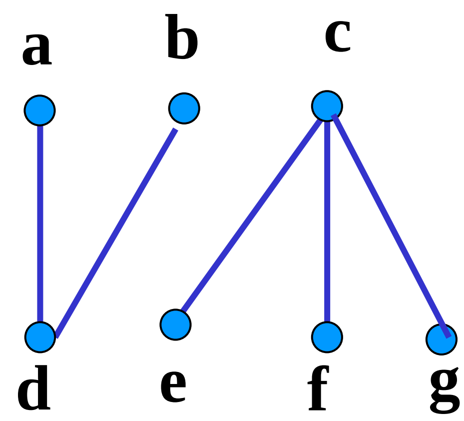
4、霍尔定理

推论8.3.1 G = (V1∪V2, E)是一个偶图，

$|V1| \le |V2|$，则G有完全匹配的充分必要条件是$\forall S \subseteq V1$，总有$|\varphi(S)| \ge |S|$。

其中$\varphi(S) = \{u \mid u \in V2$且$\exists v \in S$使得$vu \in E\}$





习　　题

3. 设$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，

如果$\forall\ u \in V_1$ 及 $v \in V_2$，$\deg u \ge \deg v > 0$,

试证：G有一个完全匹配

证明：$|V_1| \le |V_2|$,

设V1中的最小度数为a, V2中的最大度数为b

由已知条件$a \ge b$

则V1中的度数和$\deg V1 \ge a|V_1|$

则V2中的度数和$\deg V2 \le b|V_2| \le a|V_2|$

因为$\deg V1 = \deg V2$

$a|V_2| \ge a|V_1|$

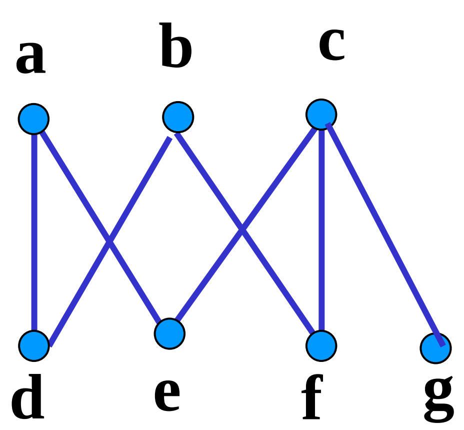
得到

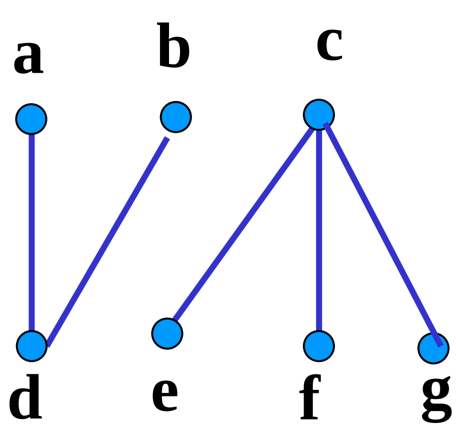
$|V_1| \le |V_2|$

4、霍尔定理

推论8.3.1 G = (V1∪V2, E)是一个偶图，|V1| ≤ |V2|, 则G有完全匹配的充分必要条件是∀S ⊆ V1, 总有|φ(S)| ≥ |S|。

其中φ(S) = {u| u ∈ V2且∃v ∈ S使得vu ∈ E}





习　　题

3. 设$G = (V_1 \cup V_2, E)$是一个偶图，

如果$\forall\ u \in V_1$ 及 $v \in V_2$，$\deg u \ge \deg v > 0$,

试证：G有一个完全匹配

证明：$\forall S \subseteq V1$, 总有$|\varphi(S)| \ge |S|$。

设$\varphi(S)$中的最大度数为a, S中的最小度数为b

则$\varphi(S)$中的度数和$\deg \varphi(S) \le a|\varphi(S)|$

则S中的度数和$\deg S \ge b|S|$

S中的边都与$\varphi(S)$相连

因此$b|S| \le a|\varphi(S)|$

$|S| \le (a/b)\ |\varphi(S)|$

因为$a \le b$

因此 $|S| \le |\varphi(S)|$

满足推论8.3.1的条件，命题成立。