第四章 无穷集合及其基数

4.1 可数集

4.2 连续统集

4.3 基数及其比较

4.4 康托-伯恩斯坦定理

*4.5 悖论、公理化集合论介绍

4.3 基数及其比较

本节主要问题

（1）无穷集合基数的定义

（2）无穷集合基数的性质

（1）无穷集合基数的定义

基数即个数，无穷集合的个数怎么定义？

定义4.3.1 集合A的基数是一个符号，凡与A对等（等势）的集合都赋以同一个记号，集合A的基数记为|A|，也记作cardA （Cardinality A)。

定义4.3.1′ 所有与集合A对等的集构成的集族称为A的基数。

（1）无穷集合基数的定义

定义4.3.2 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当A~B。

例如：1, 2, 3, ……

2, 4, 6, 8, ……

1, 3, 5, 7, ……

例如：[a, b]

(0, 1)

（1）无穷集合基数的定义

定义4.3.3 α, β是任意两个基数，A, B是分别以α, β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

例如：1, 2, 3, ……

(0, 1)

（1）无穷集合基数的定义

规定$\alpha \le \beta$当且仅当存在单射f: A→B。

规定$\alpha < \beta$当且仅当存在单射f: A→B, 且不存在A到B的双射。

如果用a表示可数集合的基数，c表示具有连续统之集合的基数,则有$|N| = a$, $|[0, 1]| = c$

那么，由定理4.2.1,显然有$a < c$, 这种多少的概念是建立在一一对应的基础上的。

(1) 无穷集合基数的定义

无穷集合的基数也称超穷数，超穷数也可以比较大小。

(1) 平面上的点多还是线多?

(2) 一维空间的点多还是n维空间的点多?

(3) 平面上的点多还是平面上的圆多?

(4) 集合[0, 1]中的数多还是自然数集N中的数多?

(5) 有理数多还是自然数多?

（2）无穷集合基数的性质

康托的连续统假设：

我们用a表示可数集合的基数，c表示具有连续统之集合的基数, 那么有没有一个基数b，使得a < b < c? 具体来说，要求：

1、存在一个集合S，S是无穷集但不是可数无穷集;

2、S不与[0, 1]对等但能与[0, 1]的一个不可数真子集对等。

康托认为没有这样的集合，即a、c之间没有基数，这就是康托的连续统假设。

（2）无穷集合基数的性质

无穷基数有多少?

有没有最大的无穷基数?

无穷基数有无穷多个。

并且没有最大的。

设N是可数集

则2^N是连续统

则2^{2^N}不与连续统对等

…………………

（2）无穷集合基数的性质

定理4.3.1 (康托)对任一集合M，$|M|<|2^M|$。

先看有限集合

例：$M = \phi$

$2^M=\{\phi\}$

例：$M = \{1\}$

$2^M=\{\phi, \{1\}\}$

(2）无穷集合基数的性质

定理4.3.1 (康托)对任一集合M，$|M|<|2^M|$。

再看无穷集合

例： $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

构造映射f: $f(1) = \{1\}$

$f(2) = \{2\}$

………………

显然, $f: M \to 2^M$ **是单射**,

证明f不是满射：令：$X = \{m \mid m \in M$ 且 $m \notin f(m)\}$

$X = \phi$, 显然，$X \in 2^M$，但无原象，故f**不是满射**。

规定$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f: A \to B$, 且不存在A到B的双射。

(2) 无穷集合基数的性质

定理4.3.1 (康托)对任一集合M，$|M| < |2^M|$ 。

证明：令$i: M \to 2^M$, 其定义为$\forall m \in M$, $i(m) = \{m\}$。于是i是M到2^M的单射，故$|M| \le |2^M|$。

还需要证明：如果$f: M \to 2^M$是单射，则f必不是满射。

令：$X = \{m \mid m \in M \text{且} m \notin f(m)\}$

显然，$X \in 2^M$。现在证明$\forall x \in M$, $f(x) \ne X$,即证明f不是满射。

实际上，如果存在$\exists x_0 \in M$, $f(x_0) = X$。

则，若：$x_0 \in X$，那么有X的定义得到$x_0 \notin X$

而，若：$x_0 \notin X$，那么有X的定义得到$x_0 \notin X$

矛盾！因此f不是满射！

4.4 康托—伯恩斯坦定理

本节主要问题

（1）康托—伯恩斯坦定理

（2）康托—伯恩斯坦定理

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定理4.4.1 (康托—伯恩斯坦)设A, B是两个集合。

如果存在单射f: A->B与单射g: B->A, 则A与B对等。

4.4 康托—伯恩斯坦定理

推论4.4.1 设$f:A\to B$与$g:B\to A$都是单射。令$\varphi:2^A\to 2^A$，$\forall E\in 2^A$, $\varphi(E)=A\backslash g(B\backslash f(E))$, 则$\varphi$在$2^A$中有一个不动点，即存在$D\in 2^A$使得$\varphi(D)=D$。

$$D=\{x\in A \mid x\notin g(B\setminus f(\{x\in A \mid x\notin g(B\setminus f(E))\}))\}$$

推论4.4.2 设α, β是任两个基数，则下三个式子

$\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$ 的人两个式子不能同时成立。

4.4 康托—伯恩斯坦定理

推论4.4.3 如果$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$, 且$A_1 \sim A$，则$A_2 \sim A$。

4.4 康托—伯恩斯坦定理

推论4.4.4 设α, β, γ为任意三个基数。如果$\alpha \le \beta$ 且 $\beta \le \gamma$, 则$\alpha \le \gamma$。

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定义4.4.1 设α, β为任意两个基数。A，B是两个集合且$|A| = \alpha$, $|B| = \beta$。集合 $A \cup B$ 的基数γ称为基数α与β之和，并记为$\alpha+\beta$

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定义4.4.2 设α, β为任意两个基数。A，B是两个集合且$|A| = \alpha$, $|B| = \beta$。集合$A\times B$的基数称为基数α与β之积，并记为$\alpha\cdot\beta$或简记为$\alpha\beta$

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定义4.4.3 设α, β为任意两个基数（不同时为零）。A，B是两个集合且$|A| = \alpha$, $|B| = \beta$。则$B^A=\{f \mid f:A\to B\}$的基数称为β的α次幂，记为β^α。对$\alpha=0$，定义$\beta^0=1$，而$0^\alpha=0$

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定理4.4.3 设α为可数集，c为连续统的基数，则

(1) $\forall n \in N \cup \{0\}$, $n + \alpha = \alpha$。

(2) $\forall n \in N$, $n \cdot \alpha = \alpha$。

(3) $\forall n_i \in N$, $i=1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{i=1}^{\infty} n_i \leq \alpha$。

(4) $\forall n \in N$, $n \cdot c = c$。

(5) $\alpha \cdot c = c$。

(6) $c \cdot c = c$。

(7) $2^{\alpha} = c$。

(8) $(2^{\alpha})^{\alpha} = 2^{\alpha}$。

(9) $(\alpha)^{\alpha} = 2^{\alpha}$。

4.4 康托—伯恩斯坦定理

定理4.4.2 设α , β, γ为任意基数，则

(1) 基数的加法和乘法分别满足交换律，即

$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$。

(2)基数的加法和乘法分别满足结合律，即

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$。

(3)基数的乘法对加法满足分配率，即

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

(4)幂运算的指数性质成立。

a)$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} + \alpha^{\gamma}$ b)$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$ c)$(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$

习 题

P136

1、设A为由序列a1, a2, a3, ...的所有项组成的集合，那么A是不是可数集，为什么?

序列a1, a2, a3, ... 是可数集。

所有项组成的集合是可数集的幂集，是连续统集。

习 题

P136

2、证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多是可数集。

这样的开区间可能是有限个，例如：

（-∞，0），（0，∞）

如果区间数不是有限的，因为不相交，可以把开区间按0的位置往左，往右从小到大排列为两个排列，设为：

(a11, a12), (a21, a22), ..., (ai1, ai2), ...

(b11, b12), (b21, b22), ..., (bi1, bi2), ...

明显的，这样的开区间可以排成一列。

习 题

P136

4、证明：任一可数集A的所有有限子集构成的集族是可数集合。

设：A = {a1, a2, a3, ...}

包含0个元素的集合个数是1个

包含1个元素的集合是可数集个

包含2个元素的集合是可数集个

包含n个元素的集合是可数集个

....

可数个可数集的并集还是可数集

习 题

P136

5、判断下列命题之真伪？

a） 若f:X->Y且f是满射，则只要X是可数集，那么Y是至多可数的； 对

b） 若f:X->Y且f是单射，则只要Y是可数集，则X也是可数的；

错

c） 可数集在任一映射下的像也是可数集。

错

习 题

P136

6、设A={a1, a2, a3, ...}是可数集。令

$A1=\{a_n \mid n = 2(2t-1),\ t = 1, 2, \ldots\}$

$A2=\{a_n \mid n = 2^2(2t-1),\ t = 1, 2, \ldots\}$

……

$Ak=\{a_n \mid n = 2^k(2t-1),\ t = 1, 2, \ldots\}$

……

证明：$A_i \cap A_j = \phi,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots$

习 题

P136

6、设A={a1,a2,a3,...}是可数集。令

$Ak=\{a_n \mid n = 2^k(2t-1), t = 1, 2, \ldots\}$

证明：$A_i \cap A_j = \phi, i, j = 1, 2, 3, \ldots$

证明：若$A_i \cap A_j \neq \phi$,

则存在$a_m \in A_i, m = 2^i(2h-1)$

$a_n \in A_j, n = 2^j(2l-1)$

$a_m=a_n$

$2^i(2h-1) =2^j(2l-1)$, 设$i >= j$

则$2^{i-j}(2h-1)=2l-1$，因此$i=j, h=l$

Ai和Aj是同一个集合。矛盾

习 题

P136

7、设A是有限集，B是可数集。证明：B^A（即从A到B的所有映射之集）是可数集。

证明：设A={a1,a2,...,an}

B={b1,b2,...,bn,...}

根据值域的个数分为：

值域基数为1的映射集合,是一个可数集

值域基数为2的映射集合,是一个可数集

……

值域基数为n的映射集合,是一个可数集

n个可数集的并集还是可数集。

习 题

P136

8、设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字$\in$）之集记为Σ^*。证明：Σ^*是可数集。

例如：$\Sigma = \{a, b, c, d\}$

由Σ中字母形成的字有：

1个字母的：a, b, c, d

2个字母的：aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, ...

3个字母的：aaa, bbb, ccb, ddb, aba, aca, ...

……………………………

习 题

P136

8、设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字∈）之集记为Σ^*。证明：Σ^*是可数集。

证明：根据Σ中n个字母形成的字的个数：

0个字母形成的字的个数是有限集

1个字母形成的字的个数是有限集

2个字母形成的字的个数是有限集

…………………………………

可数个有限集的并集或者是有限集，或者是可数集这里是可数集。

习 题

P142

1、定理4.2.2、4.2.3的两两不相交的条件可以除去，为什么?

定理4.2.2 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个两两不相交的连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$是连续统，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim [0,1]$。

定理4.2.3 设$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1]$, $k=1,2,3,\ldots$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim [0,1]$

相交的部分保留一个就行了。

习 题

P142

2、找一个初等函数f(x), 使得它是从(0, 1)到实数集R的一一对应。

$$f(x)=\arctan(\pi x-\pi/2)$$

习 题

P142

3、试给出一个具体函数，使得它是从(0, 1)到[0, 1]的一一对应。

解：

$(0, 1) = X \cup \{1/2, 1/3, ..., 1/i, ...\}$

$[0, 1] = X \cup \{0, 1, 1/2, 1/3, ..., 1/i, ...\}$

$f(1/2)=0$

$f(1/3)=1$

$f(1/i)=1/(i-2)$ $i > 3$时

其它：$f(x)=x$

习 题

P142

4、利用康托的对角线法证明2^A是不可数集，其中A为可数集。

（1）连续统集的定义

定理4.2.1 区间[0, 1]中的所有实数构成的集合是不可数无穷集合。

证：

约定每个有限位小数后均补以无限多0，例如0写成0.000...。0.5写成0.500...;

其中1写成0.999...;

区间[0，1]中每个实数,都可以写成十进制无限位小数形式$0.b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$, 其中:$b_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$;

假定定理不成立，于是[0,1]中全体实数可排成一个无穷序列: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$。

（1）连续统集的定义

每个a_i写成十进制无限小数形式排成下表

$a_1=0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\ldots a_{1n}\ldots$

$a_2=0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\ldots a_{2n}\ldots$

$a_3=0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\ldots a_{3n}\ldots$

....

$a_n=0.a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\,a_{n4}\ldots a_{nn}\ldots$

....

其中

$a_{ij}\in\{0,1,2,\ldots,9\}$。

构造一个新的小数$b=0.b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$

$$b_n=\begin{cases}2,若a_{nn}=1\\1,若a_{nn}\neq 1\end{cases},n=1,2,3,\ldots$$

显然，$b\in[0,1]$，但$\forall n\in N$，$b\neq a_n$，矛盾。

习 题

P142

4、利用康托的对角线法证明2^A是不可数集，其中A为可数集。

证明: 因为A是可数集，可设A = {a1, a2, a3, ...}

2^A中每一个元素都是{a1, a2, a3, ...}的子集

空集我们可以记为 0 0 0 0 0 0 0 0 ....

{a1}我们可以记为 1 0 0 0 0 0 0 0 ....

{a2}我们可以记为 0 1 0 0 0 0 0 0 ....

{a1, a2}我们可以记为 1 1 0 0 0 0 0 0 ....

{a2, a4}我们可以记为 0 1 0 1 0 0 0 0 ....

总之第i个位置为0表示没有ai, 为1表示有ai。

习 题

4、利用康托的对角线法证明2^A是不可数集，其中A为可数集。

证明:如果2^A是可数集，则这些集合可以表示为:

$b_1=a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\ldots a_{1n}\ldots$

$b_2=a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\ldots a_{2n}\ldots$

$b_3=a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\ldots a_{3n}\ldots$

……………………

$b_n=a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\,a_{n4}\ldots a_{nn}\ldots$

……………………

其中

$a_{ij}\in\{0,1\}$。

构造一个新的序列$c=c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots$

$$c_n=\begin{cases}0, & 若a_{nn}=1\\ 1, & 若a_{nn}=0\end{cases},\ n=1,2,3,\ldots$$

显然，$c\neq b_n$，矛盾。

习 题

P142

5、利用康托的对角线法证明0,1的无穷序列是不可数集。

与第4题一样。

习 题

P142　8、设$A_1, A_2, \ldots$为集序列，每个$A_i \sim [0, 1]$, 则

$S = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots\}$与$[0, 1]$对等。

证明：不妨设$a_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

$a_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$

……

$a_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$

……

令$(a_1, a_2, \ldots)$对应$0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}\ldots$

这是一个一一对应。

因此$S = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \ldots\}$与$[0, 1]$对等。