第二章：映射

2.1 函数的一般概念—映射

2.2 抽屉原理

2.3 映射的一般性质

2.4 映射的合成

2.5 逆映射

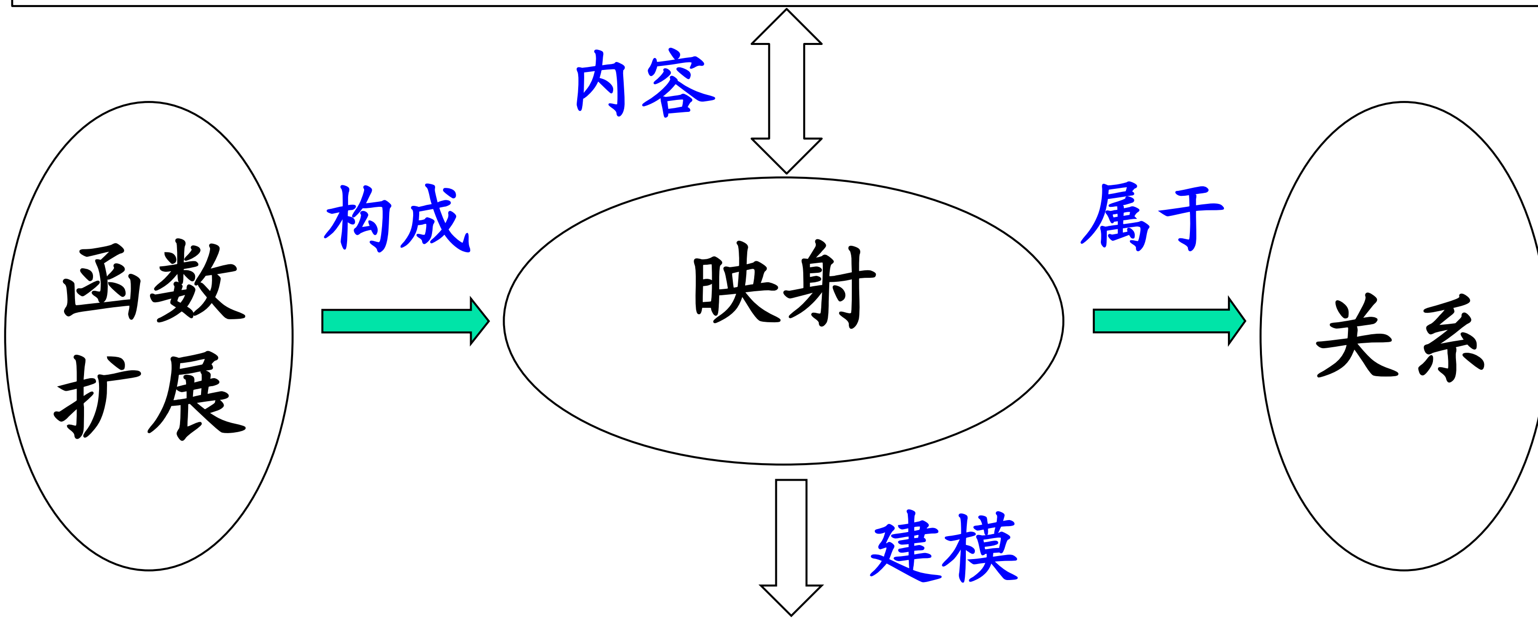
*2.6 置换

*2.7 二元和n元运算

2.8 集合的特征函数

第二章 映射的内容和用途

映射的概念、性质、合成、逆映射，抽屉原理和集合的特征函数。



密码学、编码理论、数据存储、机器学习、……，具体到抽象的过程基本都是映射的过程。

2.1 函数的一般概念——映射

本节主要问题

（1）映射与函数的关系

（2）映射的基本术语

（3）映射与笛卡尔集的关系

（4）映射的扩展和一些特殊映射

（1）映射与函数的关系

例2.1.1：$y=x^2+1$，$x\in[0,1]$ √

例2.1.2 $y=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$ $x\in[-1,\ 1]$

例2.1.3 $y=\begin{cases}0, & \mathbf{x}\geq \mathbf{0}\\ \mathbf{1}, & \mathbf{x}\leq \mathbf{0}\end{cases}$ $x\in[-1,\ 1]$

以上3个公式构不构成函数?

例2.1.1是函数，例2.1.2和2.1.3不是函数。

（1）映射与函数的关系

函数的定义：设X和Y是两个数集，如果依据某一法则f，使X中的每一数x总有Y中的唯一确定的数y与之对应，则称f是定义在X上取值于Y中的函数。

X称为函数f的定义域，值域包含在Y中

例2.1.1：　$X=[0,1]$，$Y=(-\infty,+\infty)$

$f(x)=x^2+1$。

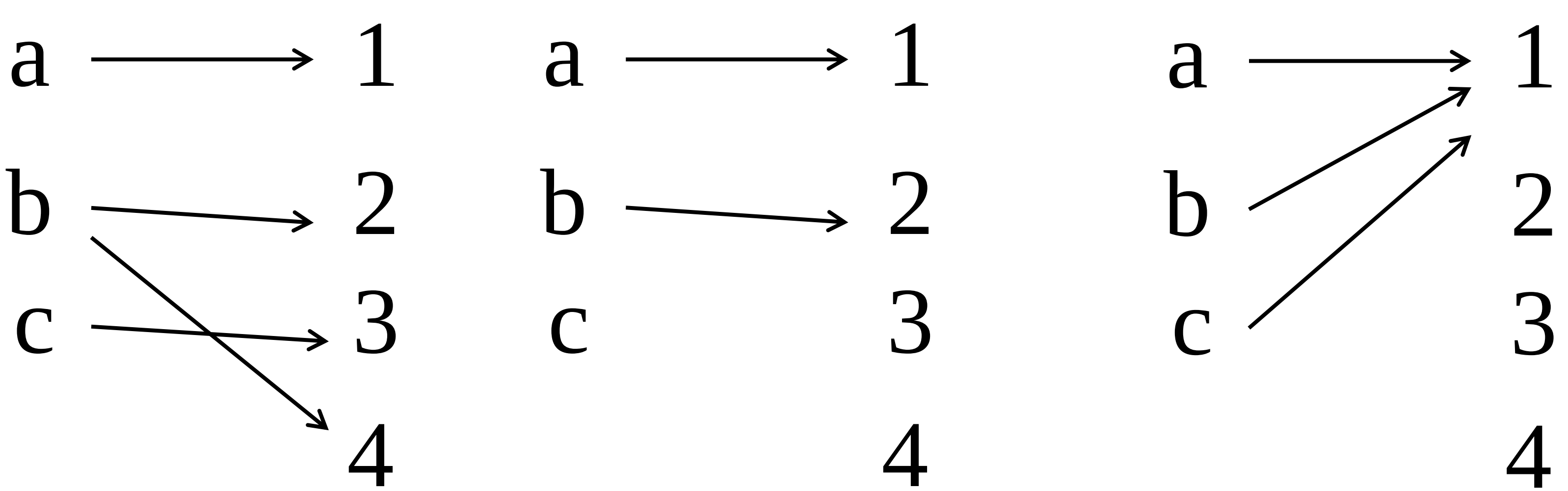
（1）映射与函数的关系

例:设X={a,b,c}， Y={1,2,3,4} 以下哪个对应关系是映射?

f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3,f(b)=4 ×

f(a)=1,f(b)=2 ×

f(a)=1,f(b)=1,f(c)=1。 √

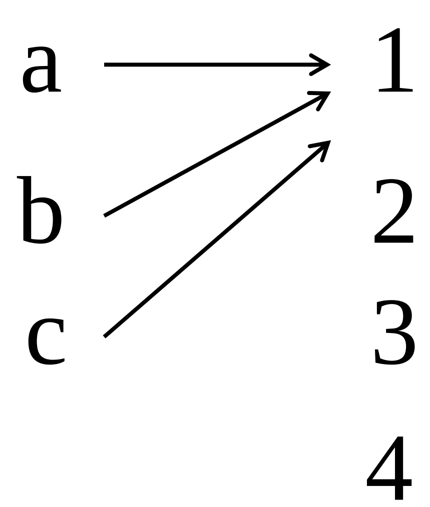


（1）映射与函数的关系

定义2.1.1 设X和Y是两个**非空集合**，如果依据**某一法则**f，使X中的**每一元素**x总有Y中的唯一确定的元素y与之对应，则称f是集合X到集合Y的映射。

例：

f(a)=1,f(b)=1,f(c)=1。



（2）映射的基本术语

例:设X={a,b,c}， Y={1,2,3,4}

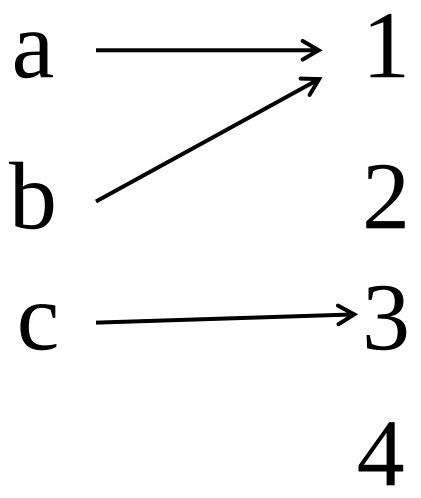
f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 3

"f是X到Y的映射"这句话常记为 f: X→Y

象与原象的概念。

设x对应y，常称作x在f下的象为y，

常记作f(x)。x是y的原象。



定义域与值域

集合{f(x)|x∈X}称为f的值域或象，

记为$I_m(f)$，例如在上例中$I_m(f)$=?

（3）映射与笛卡尔集的关系

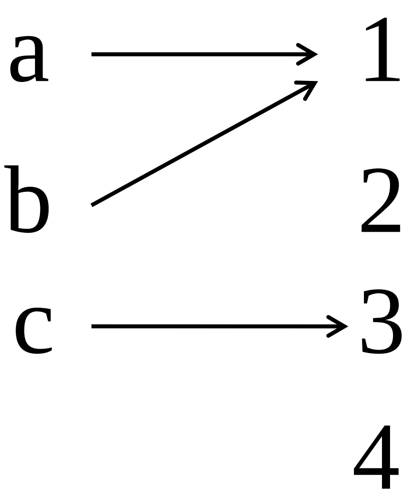
例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}

f(a)=1,f(b)=1,f(c)=3

上例的映射关系可以写成:

{(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))}

={(a,1),(b,1),(c,3)}



定义2.1.2　设X和Y是两个非空集合，一个从X到Y的映射是一个满足以下条件的X×Y的子集f:

$\forall x \in X$，$\exists$唯一的$y \in Y$,使得$(x, y) \in f$。

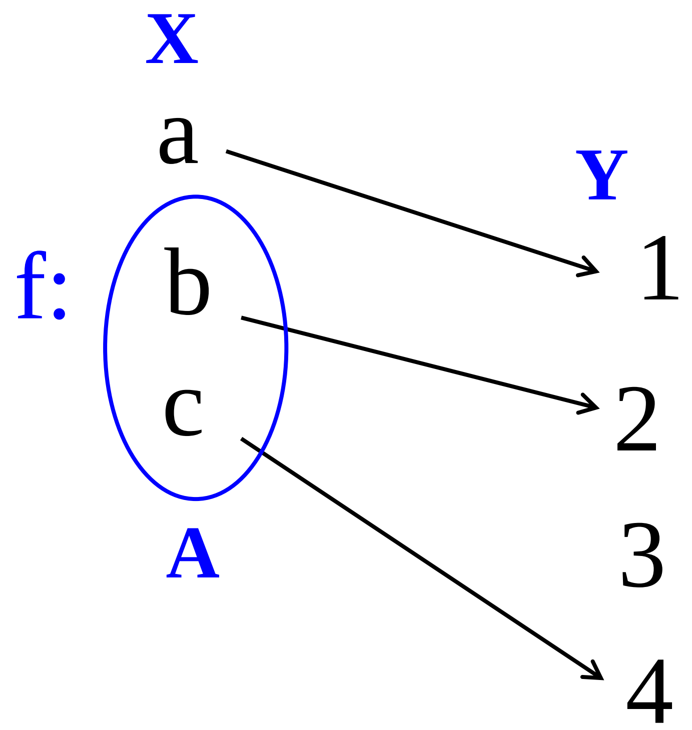
（4）映射的扩展和一些特殊映射

① $A \subseteq X$， f在A上的限制

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}

f(a)=1,f(b)=2,f(c)=4

A={b, c}



f在A上的限制是集合

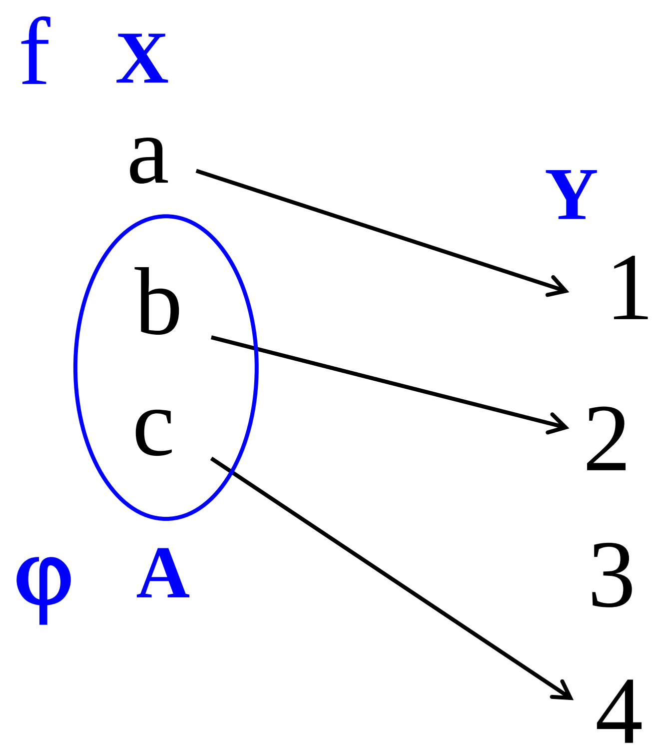
A到集合Y的一个映射，

记为：常记为 f|A

（4）映射的扩展和一些特殊映射

① $A\subseteq X$，f在A上的限制

定义2.1.3　设$f: X\to Y$，$A\subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\varphi: A\to Y$，$\forall x\in A$，$\varphi(x)=f(x)$，φ被称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来代替φ，反过来，我们说f是φ在X上的扩张。

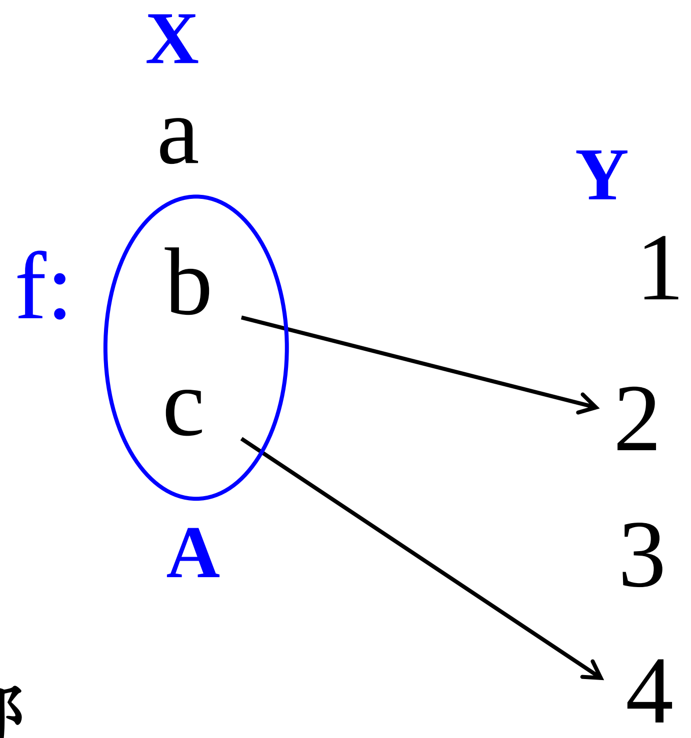


（4）映射的扩展和一些特殊映射

f是A={b, c}到Y的映射

② 部分映射(偏函数)

定义2.1.4 设f: A→Y, A⊆X, 则称f是X上的一个部分映射。



（4）映射的扩展和一些特殊映射

③ 映射相等的概念

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}

映射f: f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3

映射g: g(a)=1,g(b)=2,g(c)=3

定义2.1.5　两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都是X到Y的映射，并且$\forall x \in X$，总有$f(x)=g(x)$。

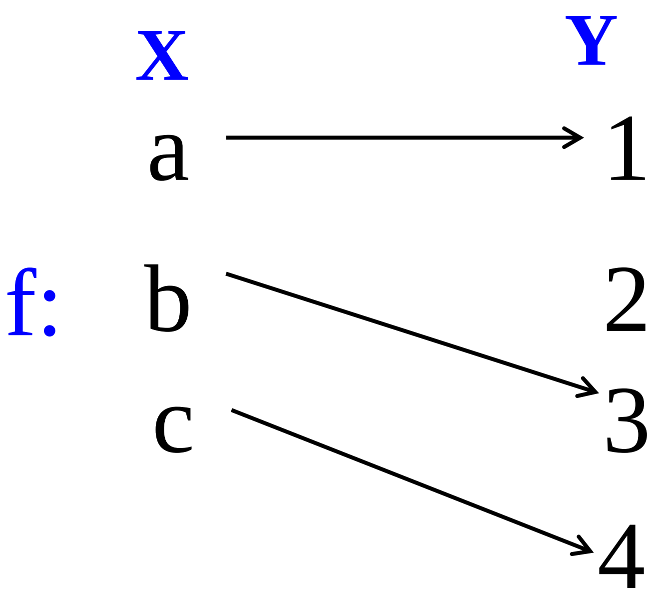
（4）映射的扩展和一些特殊映射

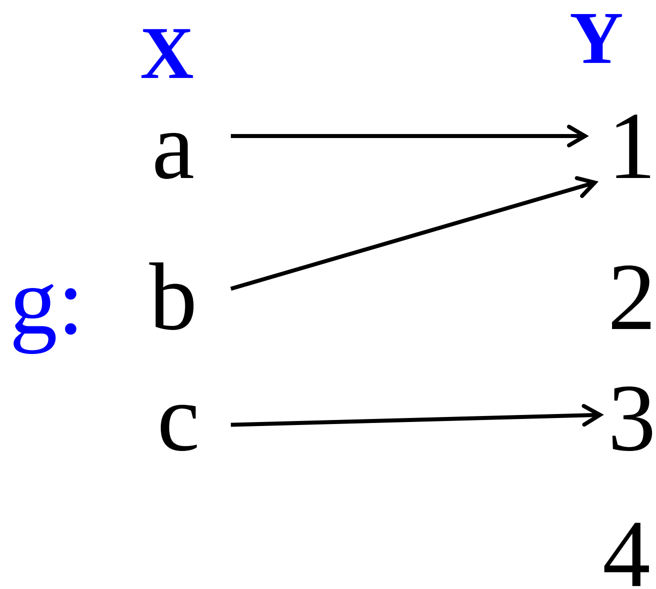
④ 单射

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}

映射f: f(a)=1,f(b)=3,f(c)=4

映射g: g(a)=1,g(b)=1,g(c)=3

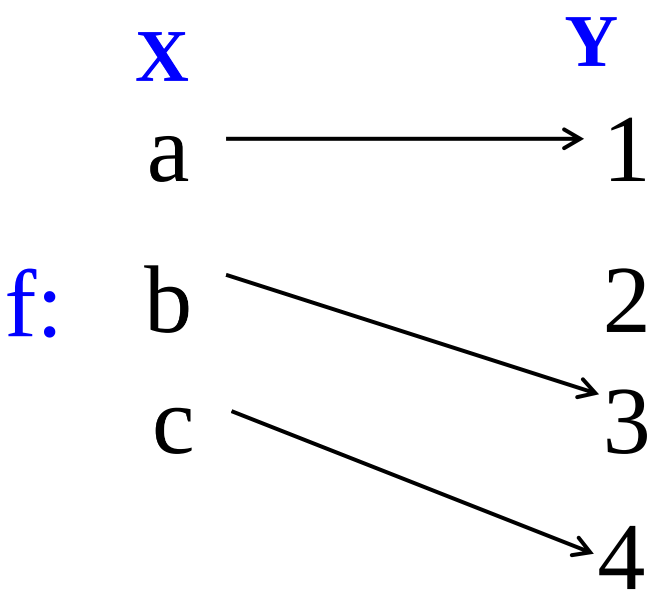


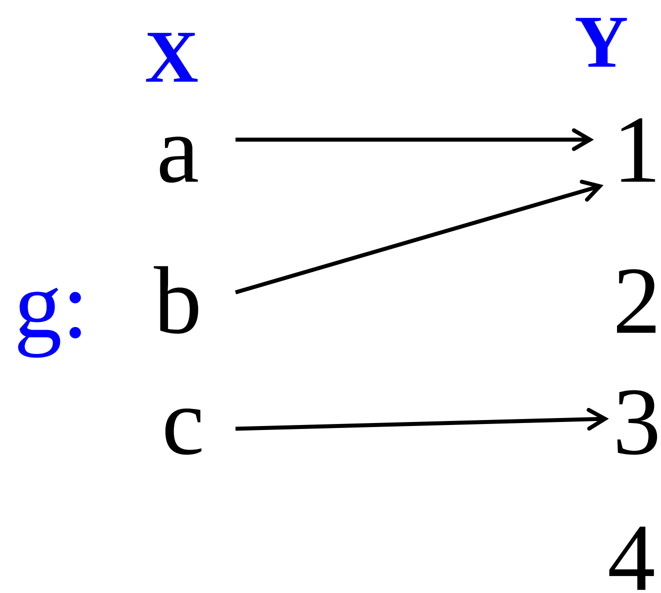


（4）映射的扩展和一些特殊映射

④ 单射

定义2.1.6　设f：X→Y，如果∀x, x′∈X，只要x≠x′，就有f(x)≠f(x′)，则称f为从X到Y的单射(injection)　。





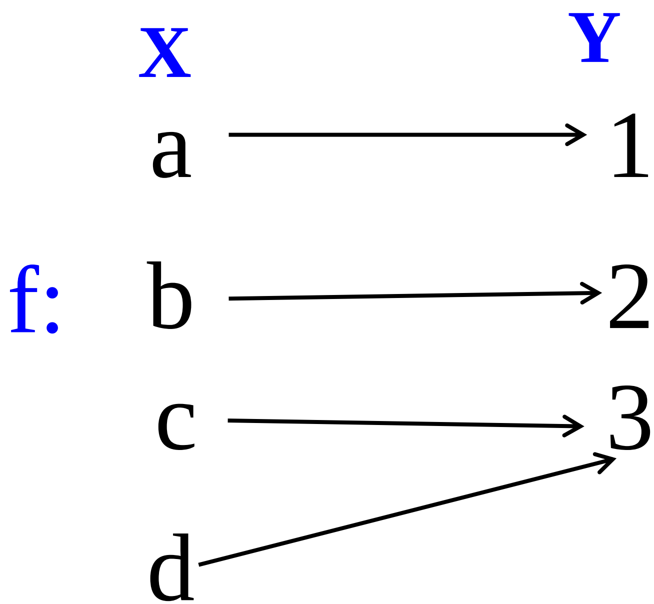
（4）映射的扩展和一些特殊映射

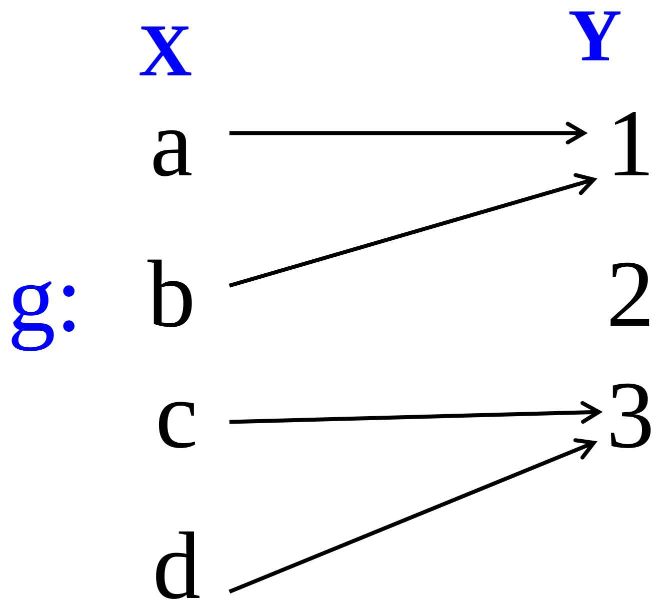
⑤ 满射

例:设X={a,b,c,d},Y={1,2,3}

映射f: f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3, f(d)=3

映射g: g(a)=1,g(b)=1,g(c)=3,g(d)=3

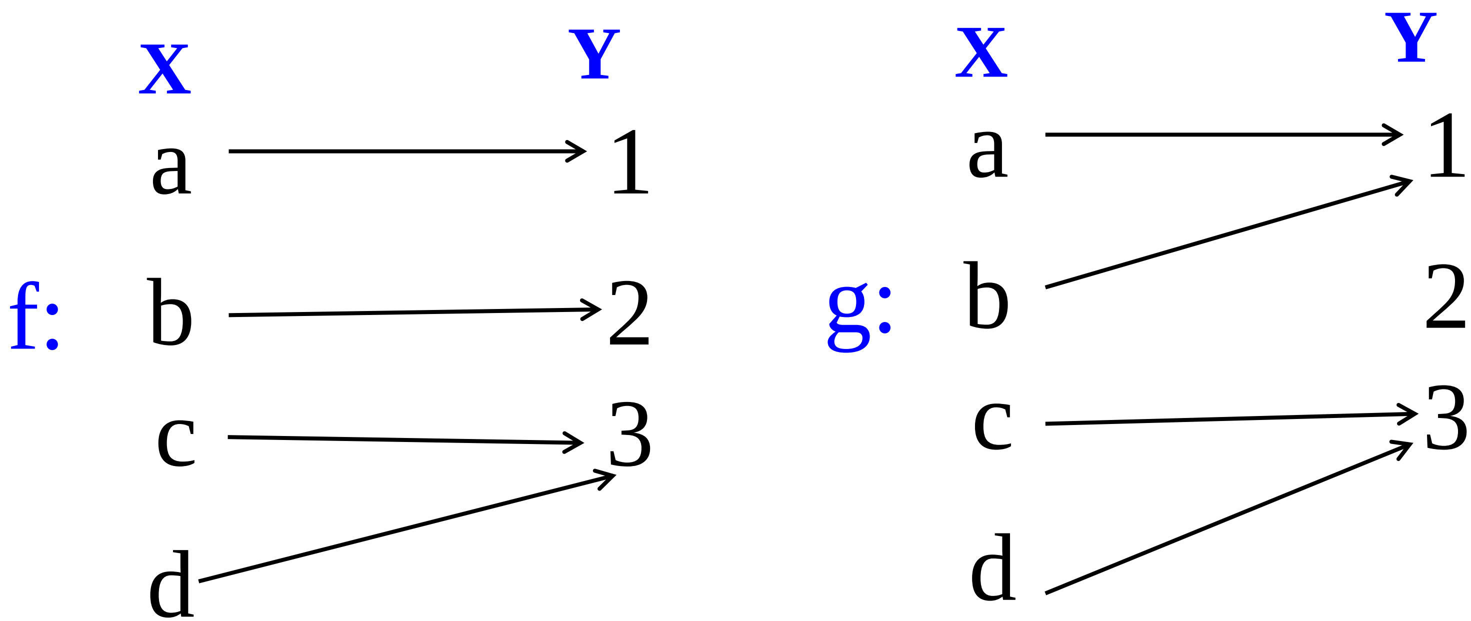




（4）映射的扩展和一些特殊映射

⑤ 满射

定义2.1.7 设f：X→Y，如果$\forall y\in Y, \exists x\in X$，使得f(x)=y，则称f为从X到Y上的满射(surjection)。



（4）映射的扩展和一些特殊映射

例:设X={a,b,c,d},Y={1,2,3,4}

映射f: f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3, f(d)=4

⑥ 双射或一一对应

定义2.1.8 设f：X→Y,若f既是单射又是满射,则称f为双射,或称为一一对应。也称X与Y对等，记为X~Y。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

例:设X={a,b,c,d}

映射f：f(a)=a,f(b)=b,f(c)=c, f(d)=d

⑦ 恒等映射

定义2.1.9 设f：$X \to X$，如果$\forall x \in X$，$f(x)=x$，则称f为X上的恒等映射。X上的恒等映射常记为I_X或者1_X

X上的恒等映射只有一个。

恒等映射是双射。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

定理2.1.1　设A和B是有限集，f: $A \to B$。

(1) 如果f是满射的，则$|A| \geq |B|$;

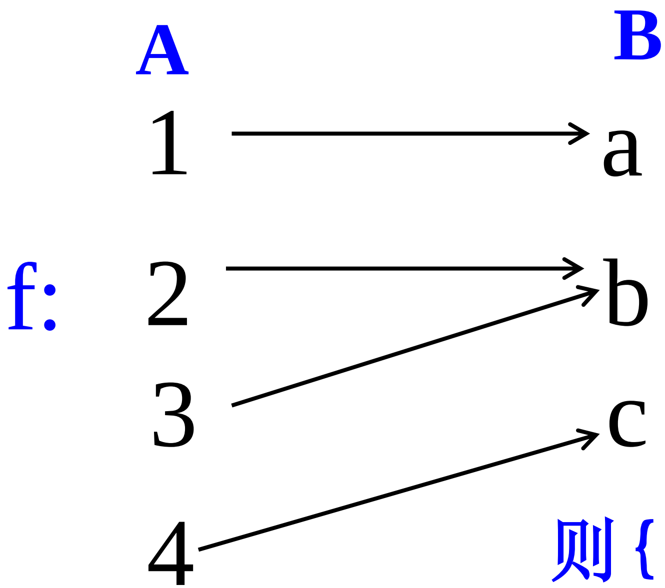
(2) 如果f是单射，则$|A| \leqslant |B|$;

(3) 如果f是双射，则$|A| = |B|$。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

定理2.1.1 设A和B是有限集，f: A→B。

(1) 如果f是满射的，则|A|≥|B|



证明：

∀y∈B ⇒ ∃ x∈A f(x)=y

设B={y1, y2, …ym}

∀yi∈B, 任取A中yi的一个原像，不妨设为xi

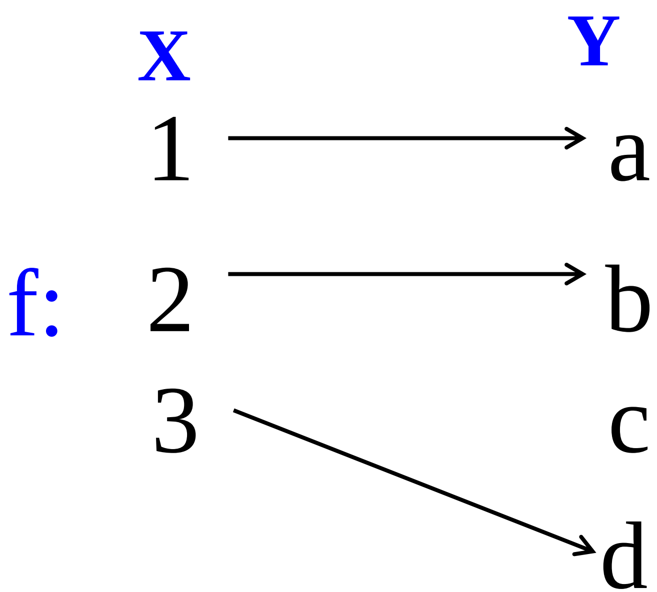
则{(x1, y1), (x2, y2), …, (xm, ym)}构成一个一一对应

集合B与A的子集存在一一对应

因此定理成立。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

定理2.1.1　设A和B是有限集，f: A→B。
(2) 如果f是单射，则|A| ≤ |B|。



证明：略

（4）映射的扩展和一些特殊映射

定理2.1.2 设A和B是有限集，|A|=|B|，则

f: A→B是单射当且仅当f是满射。

必要性. 设f是单射，显然 f 是从A到$f(A)$的满射，故f是从A到$f(A)$的双射，因此$|A| = |f(A)|$，因此$|f(A)| = |B|$. 由 $|f(A)| = |B|$且$f(A) \subseteq B$，得 $\boldsymbol{f(A) = B}$，故f是A到B的满射。

充分性. 设f是满射。任取$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，假设$f(x_1) = f(x_2)$，由于$f$是从$A$到$B$的满射，所以$f$也是$A - \{x_1\}$到$B$的满射，故$|A - \{x_1\}| \geqslant |B|$，即$|A| - 1 \geqslant |B|$，这与$|A| = |B|$矛盾. 因此$f(x_1) \neq f(x_2)$，故$f$是从$A$到$B$的单射.

（4）映射的扩展和一些特殊映射

判断题：

$|A|=|B|$，则$f: A\to B$是单射当且仅当f是满射。

例2.1.3 令$N=\{1, 2, 3, ...\}$

$s: N\to N$，其定义为$\forall n\in N$，$s(n)=n+1$。s称为自然数集N上的后继函数

s是单射的，但不是满射的，因为$\forall n\in N$，$s(n)\neq 1$。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

例:设$X=\{a,b\},Y=\{1,2\}$

映射f: $f(a)=1,f(b)=1$

映射f: $f(a)=1,f(b)=2$

映射f: $f(a)=2,f(b)=1$

映射f: $f(a)=2,f(b)=2$

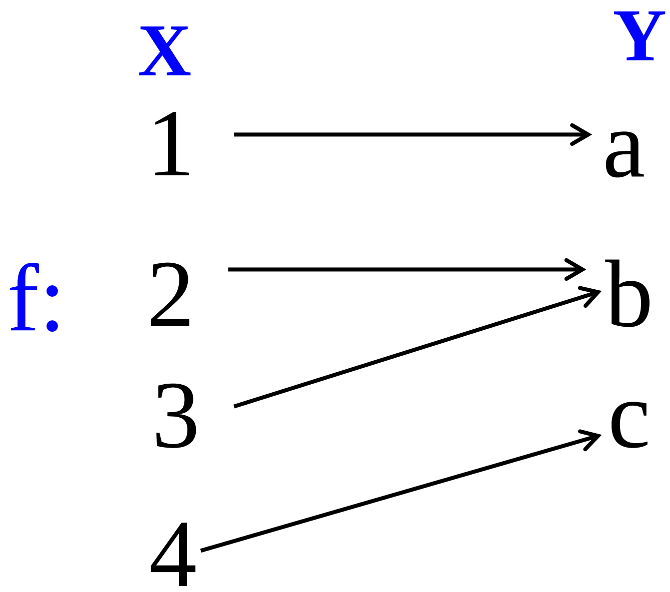
定义　从X到Y的所有映射之集记为Y^X，即:

$$Y^X=\{f|f: X\to Y\}$$

（4）映射的扩展和一些特殊映射

性质1、设X, Y均为有穷集合, $|X|=n$, $|Y|=m$,

且$n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, 则$|Y^X|=m^n$



证明：

设$X=\{x1, x2, \ldots, xn\}$

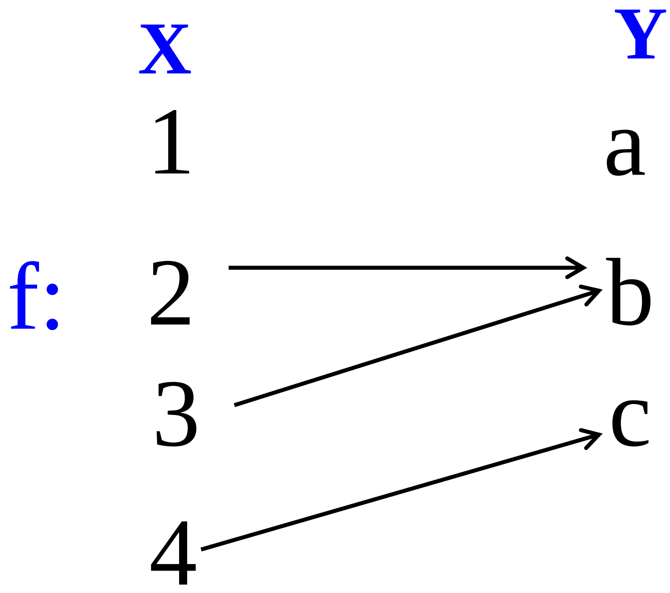
$\forall xi \in X$, xi有m种选择

因此X到Y的映射个数是m^n。

（4）映射的扩展和一些特殊映射

问题：设X,Y均为有穷集合,|X|=n, |Y|=m,

那么X到Y的部分映射有多少？



证明：

设X={x1, x2, …, xn}

$\forall x_i \in X$, x_i有m+1种选择

因此X到Y的映射个数是 $(m+1)^n$

（4）映射的扩展和一些特殊映射

性质2、设X为有穷集合，|X|=n，且n ≥ 1，

则：从X到X共有n!个双射。

$$f:\quad\begin{array}{ccc} X & & Y \\ 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

2.2 抽屉原理

本节主要问题

（1）什么是抽屉原理

（2）抽屉原理和映射的关系

（3）抽屉原理的应用

（1）什么是抽屉原理

鸽巢原理：n个鸽子巢，若有n+1只鸽子在里面，则至少有一个巢里的鸽子数不少于2

抽屉原理：如果把n+1个物体放到n个抽屉里，则必有一个抽屉里至少放了两个物体。

（2）抽屉原理和映射的关系

设$X=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $Y=\{1, 2, ..., n\}$

如果把X看作m个物件之集，把Y看作n个盒子时。

则一个映射f：X→Y就可以看作是把m个物件放进n个盒子里的一种放法;

若$f(a_i)=j$,则可以看作是把物件a_i放进第j个盒子里;

当m>n时,如果把全部m个物件放进n个盒子里,必有一个盒子至少装了两个物件;

用数学的术语来讲，当m>n时,从X到Y的每个映射都不是单射，即至少有两个元素的象相同。

（3）抽屉原理的应用

1、366个人中必然有至少两人生日相同(不包括闰年);

2、抽屉里散放着10双手套，从中任意抽取11只，其中至少有两只是成双的;

3、某次会议有n位代表参加，则至少有两个人认识的人数是一样的（假设认识是对称的）;

4、任给5个整数，其中至少有3个数的和被3除尽。

（3）抽屉原理的应用

3、某次会议有n位代表参加，则至少有两个人认识的人数是一样的；

证明：（1）每个人最多认识n-1人，假如每个人至少认识一个。则每个人认识的人数取值范围是[1, n-1]。根据抽屉原理，成立。

（2）假如有人一个人也不认识，如果这样的人两个以上，成立。

（3）假如只有一个人不认识任何人。也就是说剩下n-1个人至少认识一个人，去掉那个人，按第（1）种情况考虑这n-1个人，成立。

（3）抽屉原理的应用

4、任给5个整数，至少有3个整数的和被3除尽。

证明：任何整数除以3所得余数只能是，0, 1, 2

（1）5个余数中0, 1, 2都有，取余数分别为0, 1, 2的整数各一个，则加起来是3的倍数。

（2）否则余数只有0, 1, 2中的两种，两种余数必有一种余数的个数大于等于3，取余数相同的三个整数，加起来必然是3的倍数。

（3）抽屉原理的应用

5、设从1到10中任意选出6个数，那么其中有2个数的和是11。

证明：从1到10中，2个数和为11共有5种可能，即 $A_1=\{1,10\}, A_2=\{2,9\}, A_3=\{3,8\}, A_4=\{4,7\}, A_5=\{5,6\}$。根据鸽笼原理，。。。

（3）抽屉原理的应用

例2.2.1　任取11个数，求证其中至少有两个数它们的差是10的倍数。

证明：

一个数是不是10的倍数取决于这个数的个位数是不是0，是0就是10的倍数；

一个数的个位数只可能是0,1,...,9十个数，任取11个数，其中必有两个数个位数相同，

那么这两个数的差的个位数必然是0。

（3）抽屉原理的应用

例2.2.2, A是{1, 2, ... , 2n}中任意n+1个数，试证至少存在一对a, b∈A使得a与b互素。

证明：

相邻数互素；

从A中任意取n+1个数，必有两个数相邻，相邻数互素；

如果这n+1个数没有两个数相邻

不妨设这n+1个数从小到大为$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$，如果两两不相邻；

构造序列$a_1, a_1+1, a_2, a_2+1, \ldots a_n, a_n+1, a_{n+1}$，是2n+1个属于集合A的不同的正整数；

与已知条件矛盾。

（3）抽屉原理的应用

推广形式之一

设k和n都是任意的正整数，若至少有kn+1只鸽子分配在n个鸽巢里，则至少存在一个鸽巢中有不少于k+1只鸽子。

推论3.7 m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢里有不少于

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$ 只鸽子。

（3）抽屉原理的应用

推论3.8　若取$n(m-1)+1$个球放进n个盒子，则至少有1个盒子的球数不少于m个。

推论3.9　若$m_1, m_2, \ldots, m_n$是n个正整数，而且

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} > r - 1$$

则$m_1, m_2, \ldots, m_n$中至少有1个数不小于r。

（3）抽屉原理的应用

例2.2.3：下图中画出了3行9列共27个小方格，将每一个方格涂上红色或者蓝色，证明：无论如何涂色，其中必有至少两列它们的涂色方式完全相同。

解：每个方格的涂色方案有红和蓝2种，每列有3个格子，因此每列有：

$2\times 2\times 2=8$种涂色方案

现在有9列，根据鸽巢原理，必有至少两列它们的涂色方式完全相同。

（3）抽屉原理的应用

例2.2.4：能否在一个n×n的棋盘的每个方格填上1，2或3，使得棋盘上各行、各列、对角线上的数字之和都不相等。

解：棋盘共包含2n+2个行、列、对角线，因此对应数字之和共有2n+2个数值。

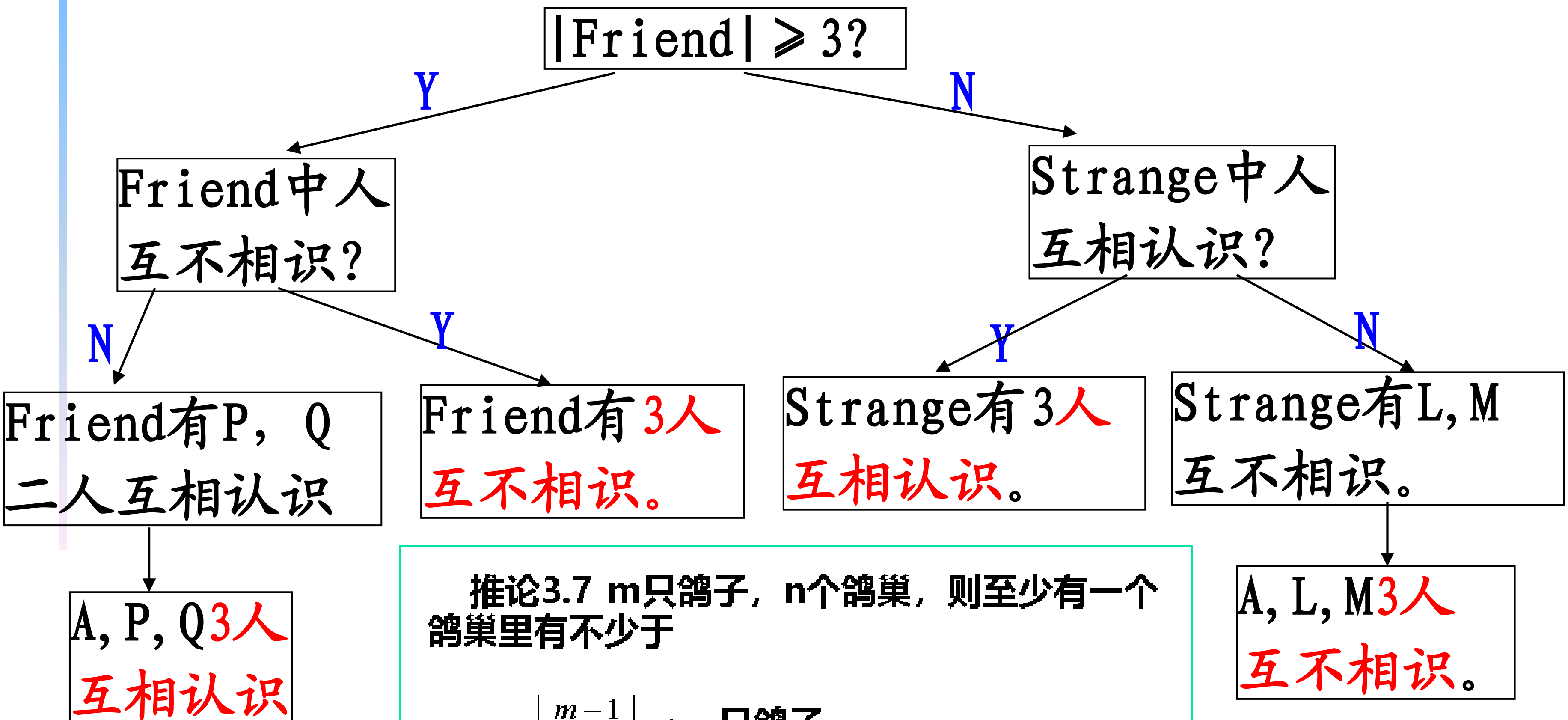
从1，2或3中取n个数，

这n个数的最大和值是3n，最小和值是n，共有2n+1个数值

答案是否定的。

例2.2.5 试证6个人在一起，其中至少存在3个人或互相认识，或互相不认识。

推理过程如下：**A**以外的**5**个人相对于**A**



推论3.7 m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢里有不少于

$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ 只鸽子。

**

2.3 映射的一般性质

本节主要问题

（1）映射的扩展

——由元素之间的映射

到集合之间的映射

（2）原象的扩展

（3）定理证明

（1）映射的扩展

—由元素之间的映射到集合之间的映射

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}

映射f: f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3

设A={a, b}, B={c}, C=∅;

令f(A)={f(a), f(b)}={1,2}

f(B)={f(c)}={3}

f(C)= ∅;

f:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{X} & & \mathbf{Y} \\
a & \longrightarrow & 1 \\
b & \longrightarrow & 2 \\
c & \longrightarrow & 3 \\
 & & 4
\end{array}
$$

得到X的子集到Y的子集的对应关系。

(1) 映射的扩展
—由元素之间的映射到集合之间的映射

若$A\subseteq X$，那么由f和A就唯一地确定了Y的一个子集,记为f(A):

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

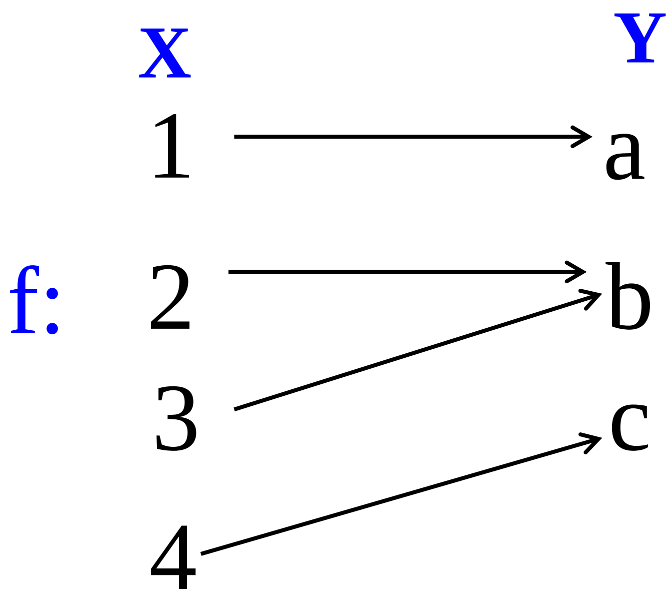
f(A)称为A在f下的象。利用这种方法，由f就确定了一个从2^X到2^Y的映射，$2^X\to 2^Y$，即习惯上这个映射仍记为f

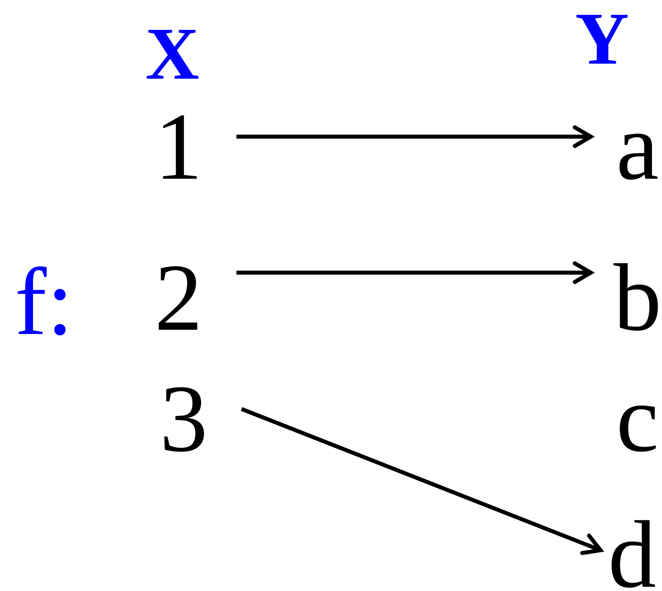
$f(\varnothing)=\varnothing$，$f(X)=I_mf$。

（1）映射的扩展
—由元素之间的映射到集合之间的映射

性质:

a. f是X到Y的满射当且仅当f(X)=Y



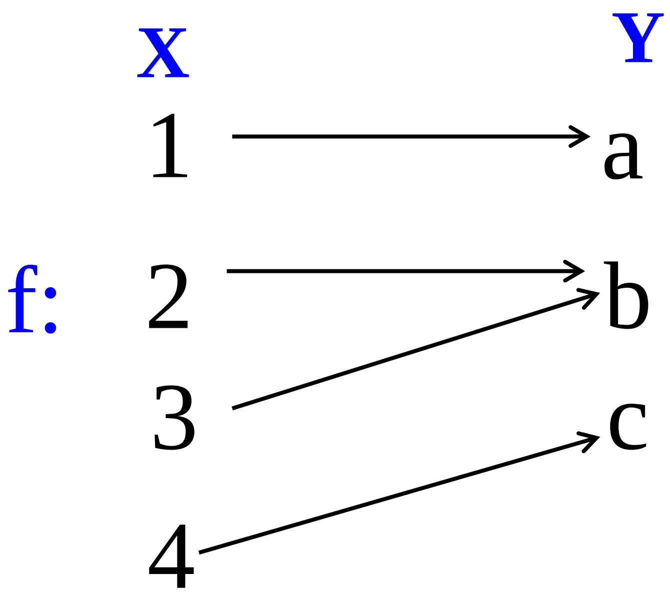


（1）映射的扩展

—由元素之间的映射到集合之间的映射

性质：

b. 如果$A \subseteq B \subseteq X$，则$f(A) \subseteq f(B)$。



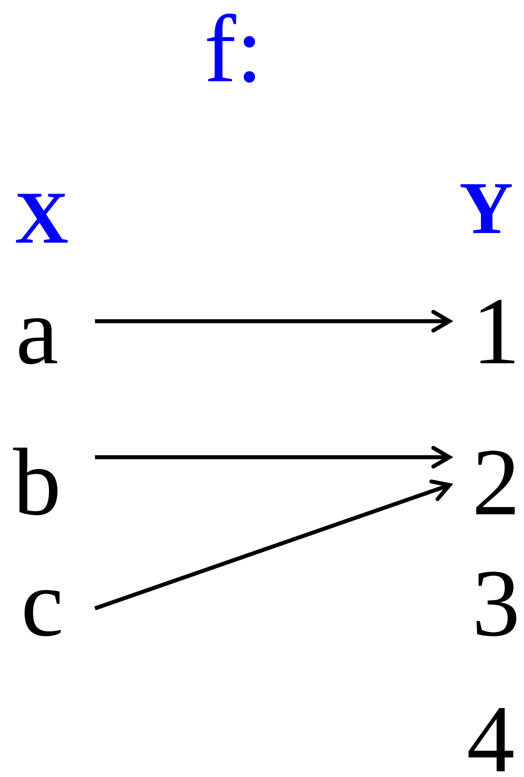
例如：$A=\{1, 2\}$

$B=\{1, 2, 4\}$

(2) 原象的扩展

例:设$X=\{a,b,c\}$,$Y=\{1,2,3,4\}$

映射f: $f(a)=1, f(b)=2, f(c)=2$



设$A=\{1, 2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\varnothing$;

令$f^{-1}(A)=\{a, b, c\}$

$f^{-1}(B)=\varnothing$

$f^{-1}(C)=\varnothing$;

得到Y的子集到X的子集的对应关系

如果$B\subseteq Y$，则由f和B唯一确定了X的一个子集。

$f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B, x\in X\}$。

(2) 原象的扩展

如果$B \subseteq Y$，则由f和B唯一确定了X的一个子集。

$\{x | f(x) \in B, x \in X\}$

这个子集习惯上用$f^{-1}(B)$表示。$f^{-1}(B)$是X中在f下的象落在B里的那些元素组成的

$f^{-1}(B)$叫做在f下B的**原象**

利用这种方法，又得到一个2^Y到2^X的一个映射，记为f^{-1}。

(2) 原象的扩展

例2.3.1 设$X=\{1,2,3,4\}$，

$Y=\{a,b,c,d,e\}$，

$f: X\to Y$，

$f(1)=a, f(2)=b, f(3)=b, f(4)=c$

令$A=\{1,2\}$，$B=\{b,c,d\}$

求$f(A)$，$f^{-1}(B)$，$f^{-1}(\{d\})$，$f^{-1}(\{b\})$

解：$f(A)=\{a,b\}$　　$f^{-1}(B)=\{2,3,4\}$

$f^{-1}(\{d\})=\varnothing$。　　$f^{-1}(\{b\})=\{2,3\}$

为了书写方便，$f(\{a\})$常记为$f(a)$，

$f^{-1}(\{b\})=f^{-1}(b)$。

（3）定理证明

定理2.3.1 设f：$X \to Y, C \subseteq Y, D \subseteq Y$，则：

(1) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$；

(2) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$；

(3) $f^{-1}(C \Delta D) = f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$；

(4) $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$。

（3）定理证明

定理2.3.1 设f：$X \to Y, C \subseteq Y, D \subseteq Y$，则：

(3) $f^{-1}(C \Delta D) = f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$

证明：（1）

$\forall x \in f^{-1}(C \Delta D) \Rightarrow f(x) \in C \Delta D \Rightarrow$

$\{(f(x) \in C \text{ and } f(x) \notin D)$

$\text{or } (f(x) \in D \text{ and } f(x) \notin C)\} \Rightarrow$

$x \in f^{-1}(C) \text{ and } x \notin f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(D) \text{ and } x \notin f^{-1}(C) \Rightarrow x \in f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$

因此$\forall x \in f^{-1}(C \Delta D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$

（2）反之同理可证。

（3）定理证明

定理2.3.2 设f：$X\rightarrow Y, A\subseteq X, B\subseteq X$,则：

$(5) f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

$(6) f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$;

$(7) f(A\Delta B)\supseteq f(A)\Delta f(B)$。

（3）定理证明

定理2.3.2 设f: $X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq X$,则:

$$(6) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

证明:

$\forall y \in f(A \cap B) \Longrightarrow \exists\ x \in A \cap B$ and $f(x)=y \Longrightarrow$

$x \in A$ and $x \in B$ and $f(x)=y$

$x \in A$ and $f(x)=y \Longrightarrow y \in f(A)$

$x \in B$ and $f(x)=y \Longrightarrow y \in f(B)$

因此: $\forall y \in f(A \cap B) \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 成立