第十章： 有向图

表示非对称关系

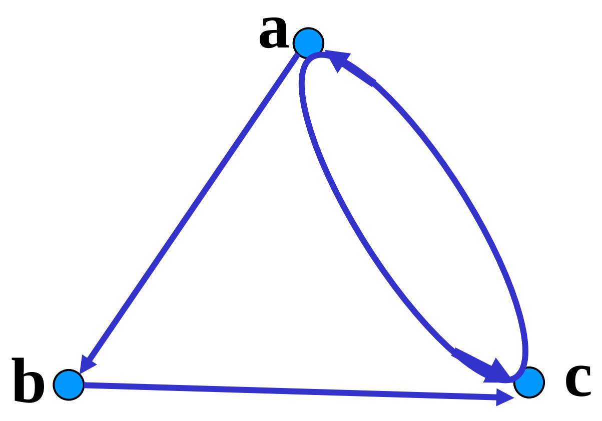
（1）家谱关系中的父子，爷孙...

（2）组织关系中的上下级，...

（3）活动的先后次序，...

（4）计算的先后次序,.....

....



有向图

第十章：有向图

10.1 有向图的概念

本节主要问题

（1）有向图的定义

（2）有向图的性质

一、有向图的定义

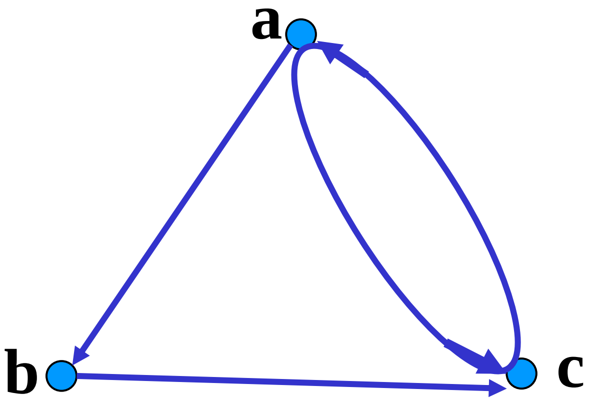
有向图的定义

定义10.1.1 设V为一个非空有限集:

$A \subseteq V \times V \setminus \{ (v,v) \mid v \in V\}$，二元组$D = (V, A)$称为一个有向图，V中的元素称为D的**顶点**，A中元素(u, v)称为D的从u到v的**弧**或有向边。

V={a, b, c}

A={(a,b), (b,c), (a,c), (c,a)}



有向图

二、有向图的定义及性质

定义10.1.1 设V为一个非空有限集：

$A \subseteq V \times V \backslash \{ (u, u) \in V \}$，二元组$D=(V, A)$称为一个有向图，V中的元素称为D的顶点，A中元素(u, v)称为D的从u到v的弧或有向边。

例如：$V=\{a, b, c\}$,

$$V \times V \backslash \{ (u,u) \in V \}$$
$$=\{ (a, b), (a, c), (b, a), (b,c), (c, a), (c, b)\}$$

具有3个顶点a, b, c的有向图有多少种？

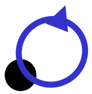
64种。

二、有向图的定义及性质

我们只讨论简单有向图

(1) 环

同一个顶点之间的边称作**环**。



a

有环图

(2) 多重边

如果从顶点a到不同于a的顶点b之间有多于1条边，则称为**多重边**。

b  c

多重边图

b  c

多重边图

我们讨论的是没有环和多重边的有向图—**简单有向图**。

二、有向图的定义及性质

有向图的术语

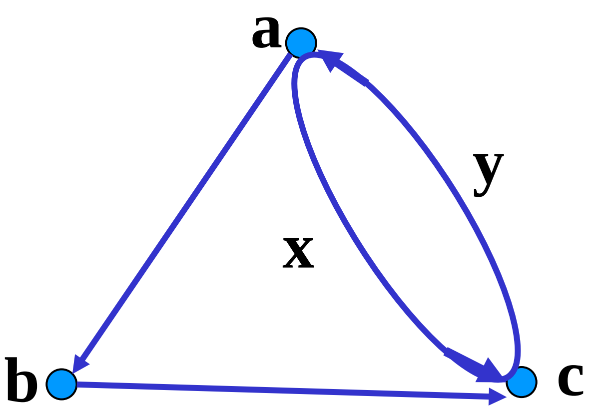
(1) 弧, 对称弧:

有向图的边也叫做弧。

如果x=(u, v)与y=(v, u)均为A的弧, 则称x与y为一对对称弧.

(2) 弧的起点和终点:

如果x=(u, v)是有向图的一条边, 则称弧x为起于顶点u终于顶点v的弧, 或从u到v的弧, u称为x的起点, v为终点。

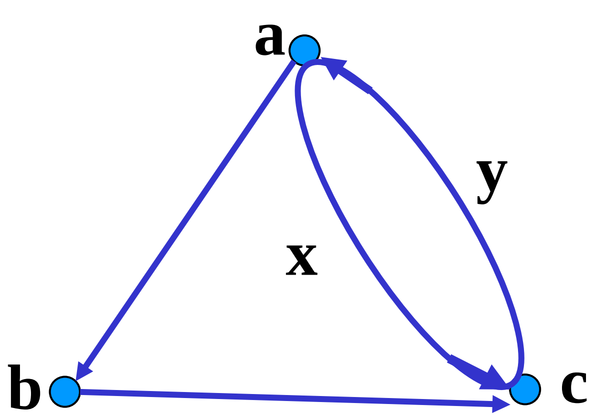


有向图

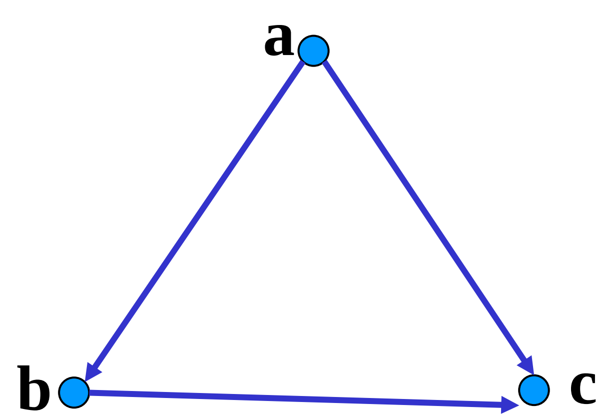
二、有向图的定义及性质

(2) 定向图

定义6.2.4 不含对称弧的有向图称为**定向图**。



非定向图

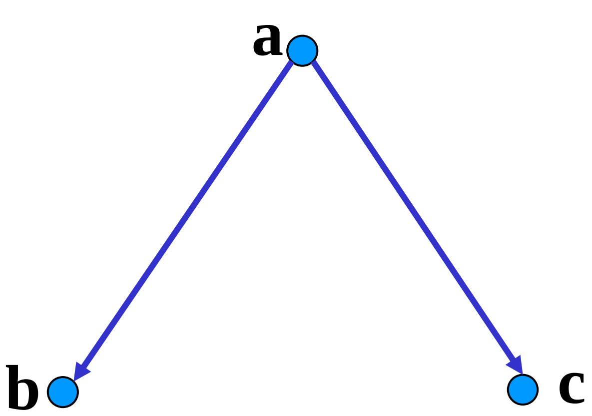


定向图

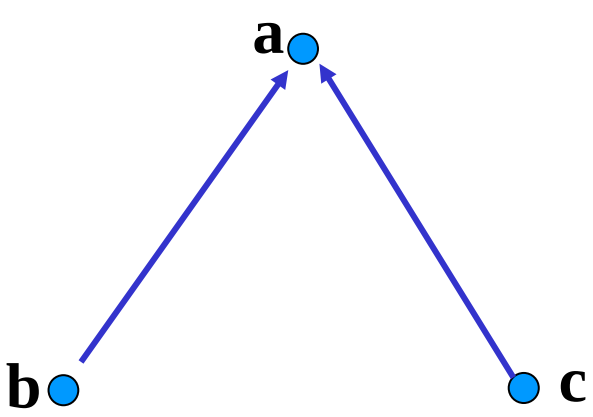
二、有向图的定义及性质

反向图的定义

定义10.1.2 设D=(V, A)是一个有向图，D的反向图是有向图D^T=(V, A^T) ,其中：A^T={(u,v) |(v,u)∈A}



有向图D



有向图D^T

二、有向图的定义及性质

入度，出度的定义

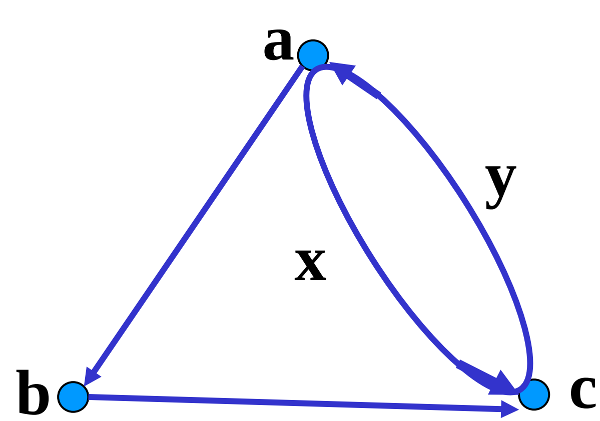
定义10.1.3 设D=(V, A)是一个有向图，v是D的任一顶点。顶点v的入弧的条数称为v的**入度**，记为id(v)。顶点v的出弧的条数称为v的**出度**，记为od(v)。显然：

$$id(v)=|\{u \mid (u,v)\in A, u\in V\}|$$

$$od(v)=|\{w \mid (v,w)\in A, w\in V\}|$$

显然有：

$$\sum_{v\in V} id(v) = \sum_{v\in V} od(v) = q$$



图D

二、有向图的定义及性质

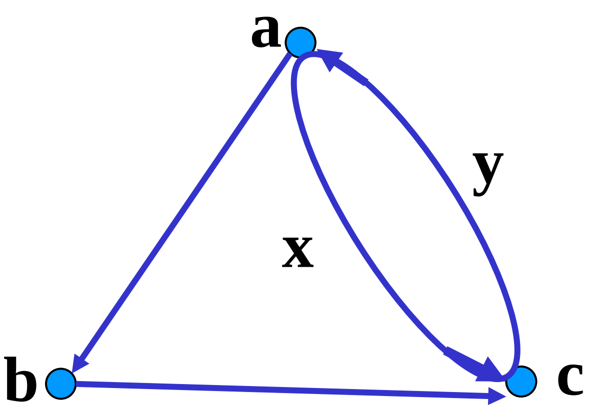
入度，出度和边的关系

定理10.1.1 设D=(V, A)是一个有向图且|A|=q，则

$$\sum_{v\epsilon V} id(v) = \sum_{v\epsilon V} od(v) = q$$

从而：

$$\sum_{v\epsilon V} (id(v) + od(v)) = 2q$$



图D

二、有向图的定义及性质

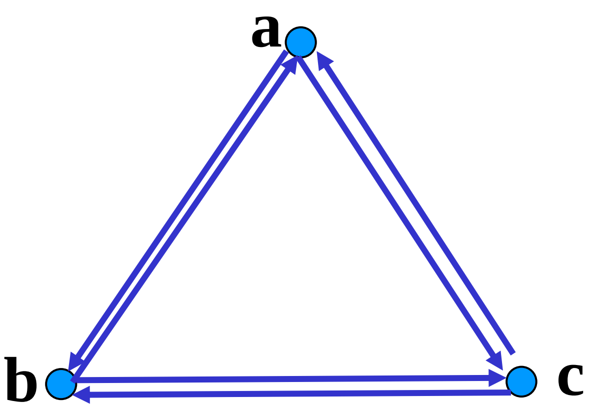
有向完全图的定义

定义10.1.4 有向图D=(V, A)称为完全有向图，如果

$A = V\times V \backslash \{ (u, u) \in V \}$

n个顶点的有向图完全图有多少条边?

n(n-1)

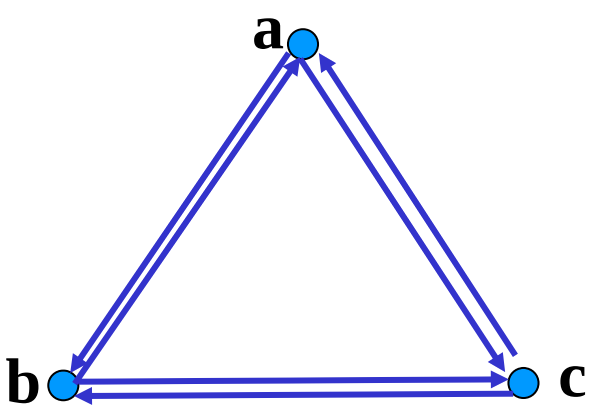


有向完全图

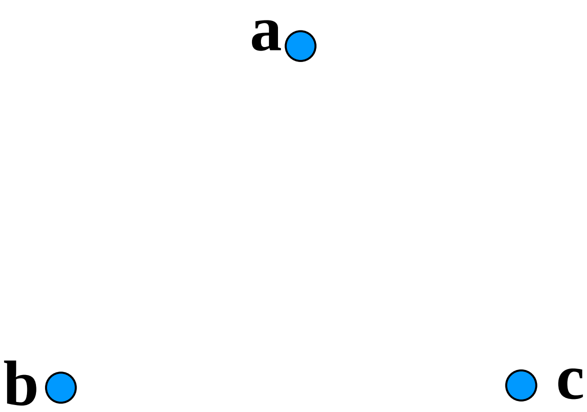
二、有向图的定义及性质

有向图的补图的定义

定义10.1.5 有向图$D=(V, A)$的补图D^C是有向图 $D^C=(V, A^C)$，其中$A^C=(V\times V\setminus\{(u, u)|u\in V\})\setminus A$



有向完全图D

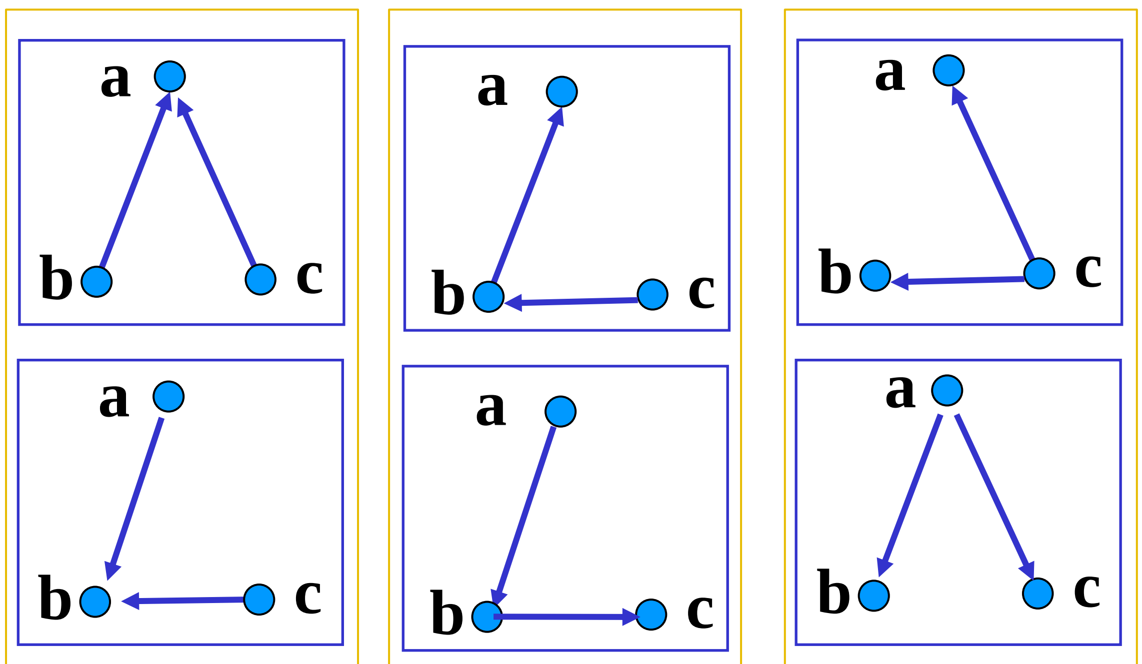


D的补图

二、有向图的定义及性质

有向图同构的定义

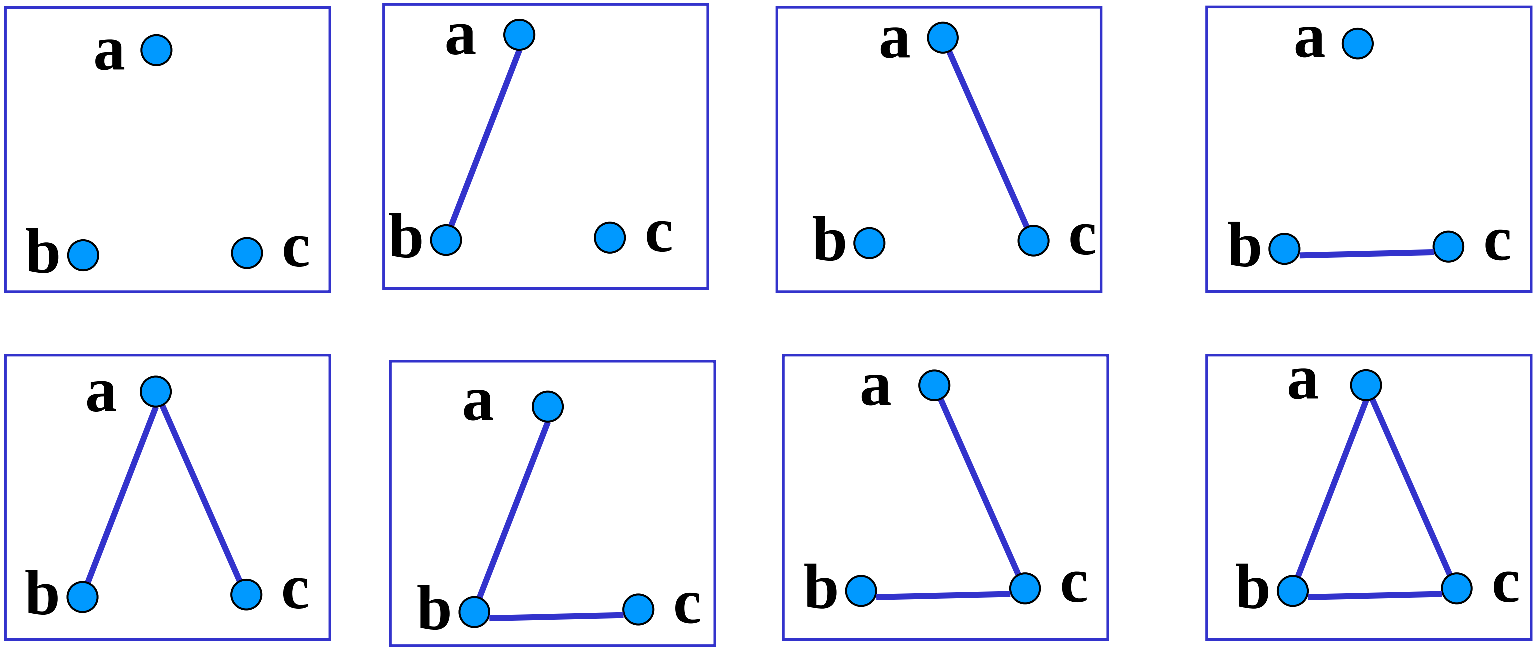
定义10.1.6 设$D_1 = (V_1, A_1)$， $D_2 = (V_2, A_2)$都是有向图，如果存在一个一一对应φ： $V_1 \rightarrow V_2$，使得$\forall u, v \in V_1$, $(u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$,则称$D_1$和$D_2$同构。



图的同构

问题：3个顶点的无向图有多少种?

（注：同构的算一种）

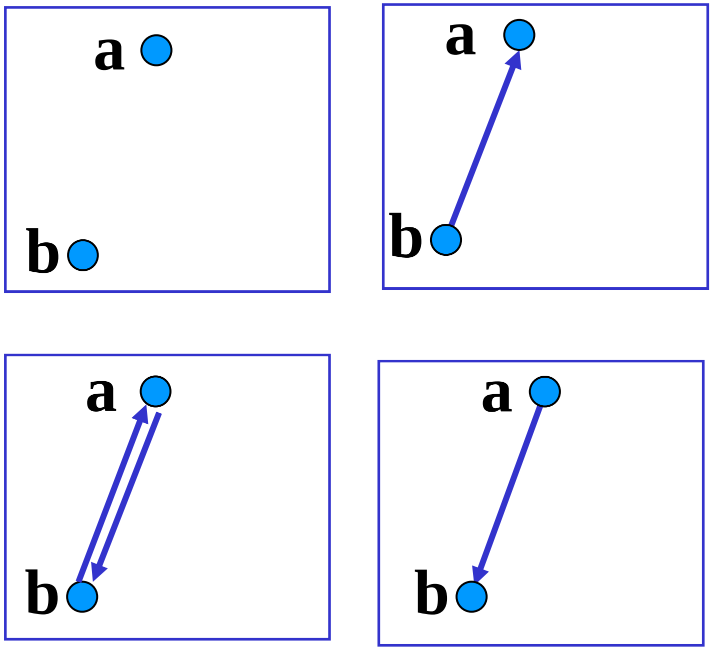


4种。

有向图的同构

问题：2个顶点的有向图有多少种?

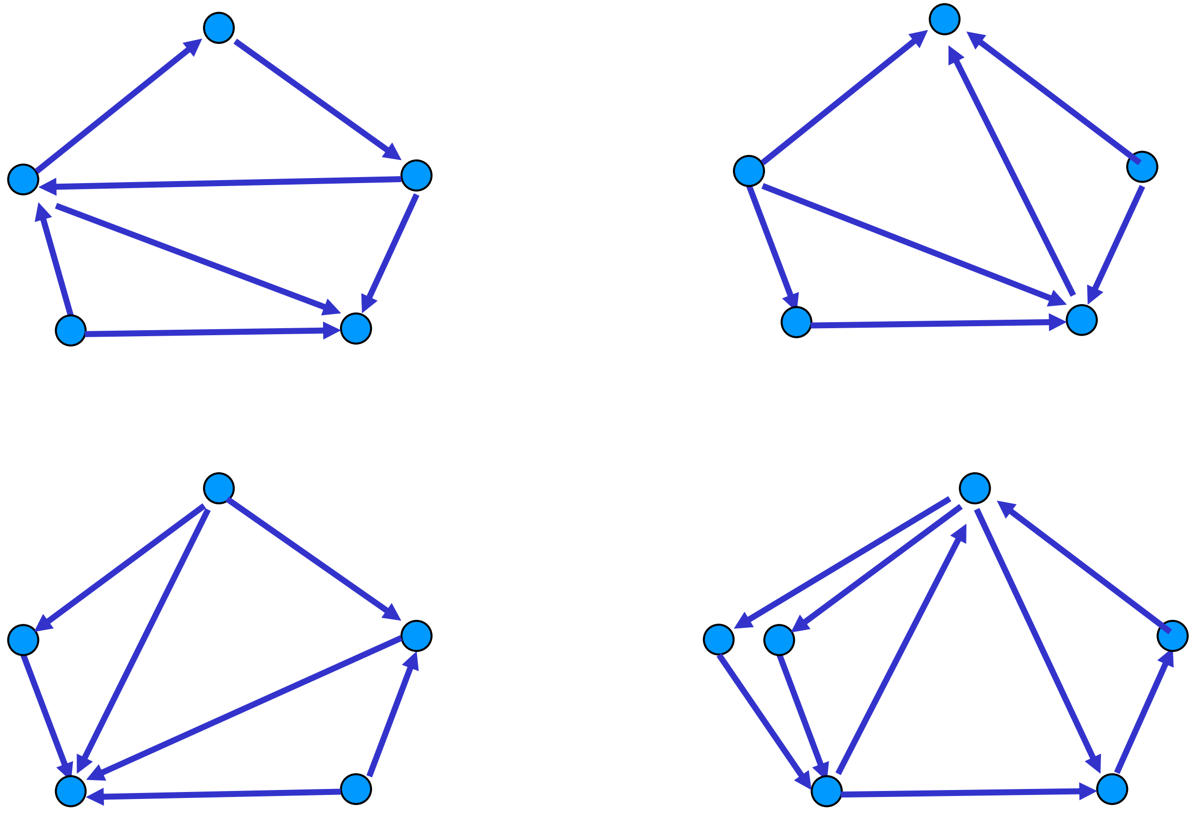
（注：同构的算一种）



3种。

习　题

301.4 找出下面哪两个图是同构的。



没有同构的

10.2 有向路和有向圈

本节主要问题

一、有向通道与有向闭通道

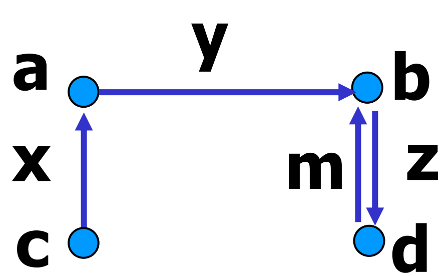
二、有向迹与有向闭迹的定义和性质

三、有向路与有向回路的定义和性质

四、有向连通图的定义与性质

一、有向通道与有向闭通道

定义10.2.1 设D=(V, A)是一个有向图，D的顶点和弧的交错序列$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, ..., v_{n-1}, x_n, v_n$, $x_i=(v_{i-1}, v_i)$，$i=1, 2, ..., n$，称为D的一个有向通道。v_0称为该通道的起点，v_n称为该通道的终点，n是长度。如果$v_0 = v_n$，则称它是闭有向通道，含D的所有顶点的通道（闭通道）称为D的生成通道（闭通道）



c x a y b z d m b

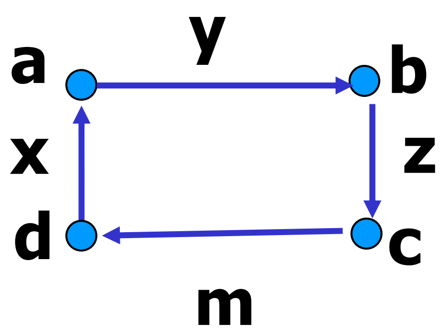
是一条有向通道

简写为 cabdb

bdb是一条闭通道

一、有向通道与有向闭通道

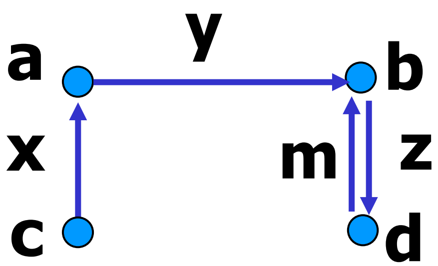
在计算通道的长时，重复走过的边重复计算;



abcdabc长度是？ 6

二、有向迹与有向闭迹的定义和性质

定义10.2.2 设D=(V,A)是一个有向图，如果图中一条有向通道上的各边互不相同，则称此有向通道为有向图的有向迹，如果一条闭有向通道上的各边互不相同，则此闭有向通道称为有向闭迹。

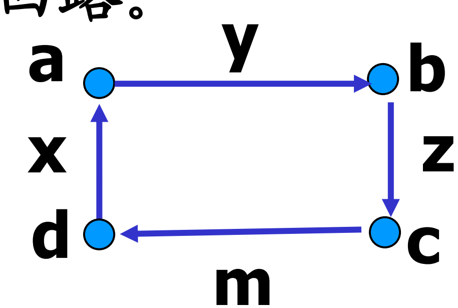


c x a y b z d m b

是一条有向迹

三、有向路与有向回路的定义和性质

定义10.2.3 设D = (V, A)是有向图。D的一条不含重复顶点的有向通道称为D的一条有向路，有向路上弧的条数称为该有向路的长，一条至少含有两个不同顶点的闭有向通道称为一个有向圈，如果该闭有向通道上各顶点互不相同（起点和终点除外）。有向圈也称为有向回路。

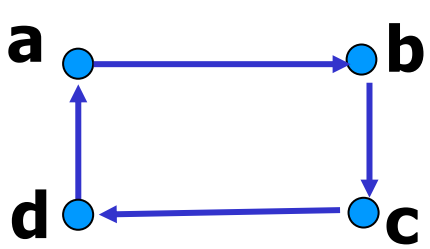


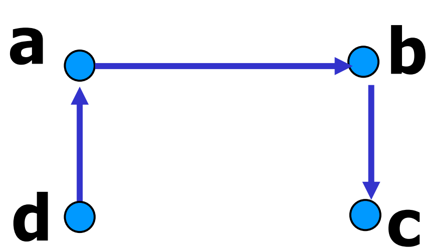
含有向图D的所有顶点的有向圈称为D的生成有向圈（哈密顿有向圈）。类似的，有生成有向路（哈密顿有向路）。

四、连通图的定义与性质

可达

定义10.2.4 设D=(V,A)是有向图，u和v是D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能到达顶点v，或v是从u可达的。当u = v时，我们认为u可达u。



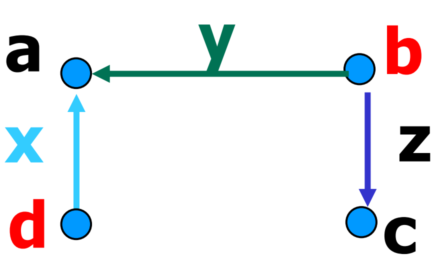


可达关系R是自反的和传递的。

四、连通图的定义与性质

半通道（弱通道）、闭半通道（闭弱通道）
半迹（弱迹）、闭半迹（闭弱迹）
半路（弱路）、半回路（弱回路）、半圈（弱圈）

定义10.2.5 设D = (V, A)是一个有向图，D的顶点和弧的交错序列$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, ..., v_{n-1}, x_n, v_n$，称为D的一条半通道或弱通道。如果$x_i=(v_{i-1}, v_i)$或$x_i=(v_i, v_{i-1})$ $i=1, 2, ..., n$，如果$v_0=v_n$，则称它是闭半通道或闭弱通道。

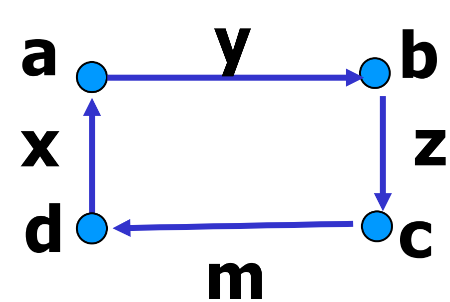


d x a y b z c

是一条半通道

简写为dabc

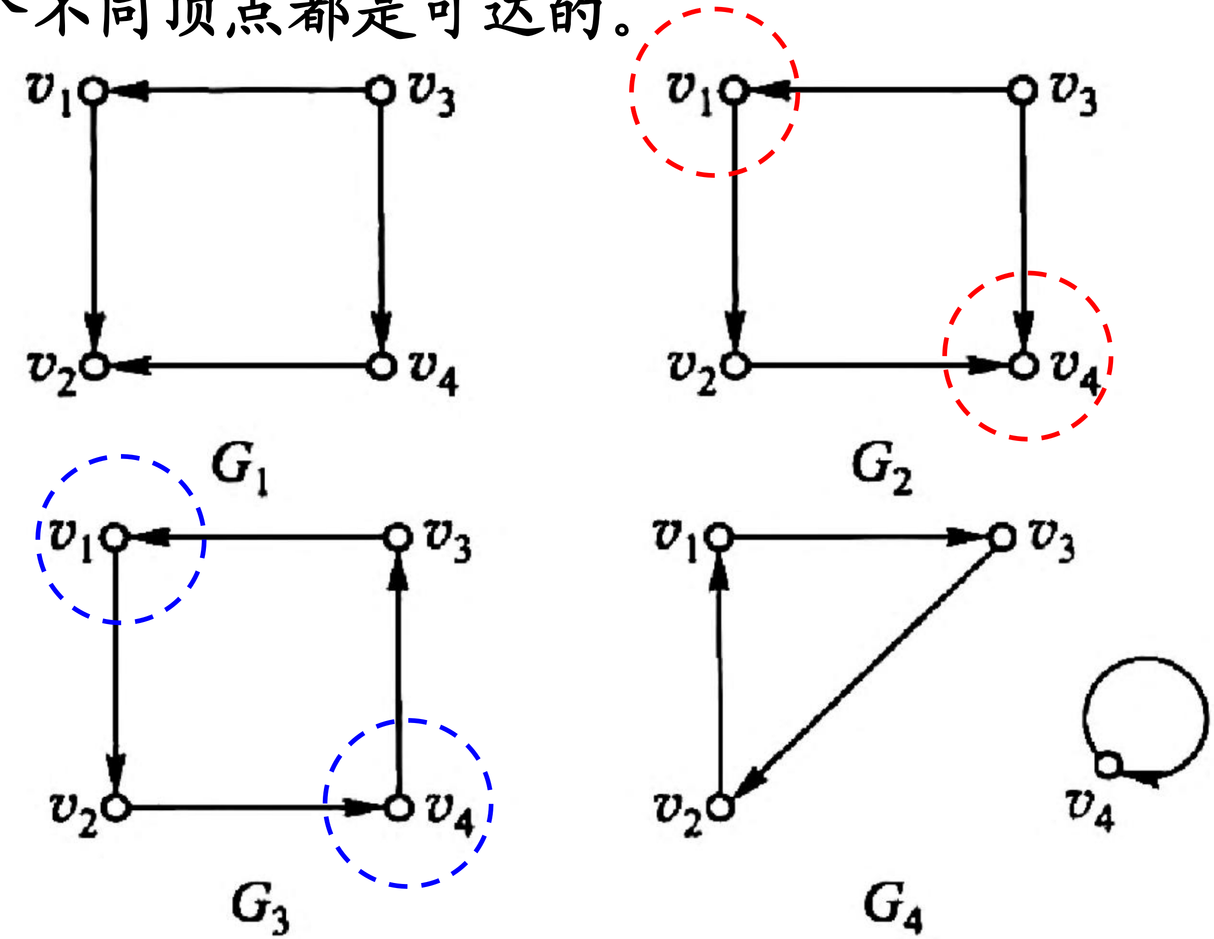
dabad是一条闭半通道



四、连通图的定义与性质

强连通图

定义10.2.6 有向图D称为强连通的，如果D的任意两个不同顶点都是可达的。



四、连通图的定义与性质

定理10.2.1 有向图D=(V,A)是强连通的，当且仅当D有一条闭生成通道。

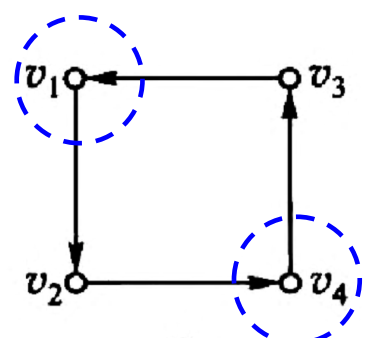
充分性显然。证：必要性：

用反证法，假设D中包含顶点最多的闭通道为L = $v_1v_2v_3...v_nv_1$，如果L包含所有的顶点，则必要性成立。

反之，如果L不包含所有的顶点，设u不在L中，

因为图是强联通的，所以v_n可达u，u可达v_1，

$v_1v_2...v_n...u...v_1$是一条包含比L更多顶点的闭通道，矛盾。因此必要性成立。

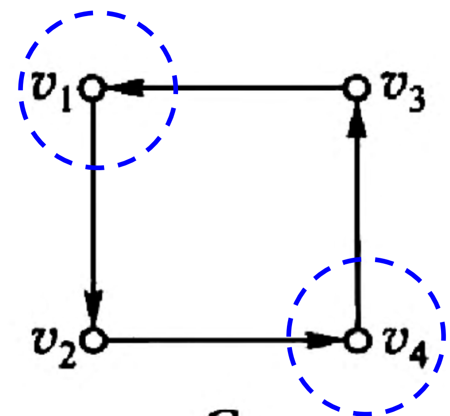


G_3

四、连通图的定义与性质

定理10.2.2 令D=(V, A)为有向图，R_D是V上的如下二元关系：$\forall u, v \in V$，uR_Dv当且仅当u和v互达，则R_D是V上等价关系。

1、自反性，2、对称性，3、传递性



G_3

有向图D=（V, a）是强连通的当且仅当等价关系Rd的等价类只有一个。

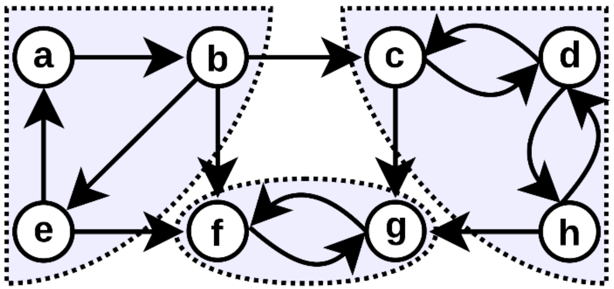
定义3.6.2

设R是X上的一个等价关系，$x \in X$, X的子集 $E_x = \{ y \mid y \in X \text{ 且 } x R y\}$（即X中与x等价的全体元素构成的子集）称为x关于R的等价类，或简记为x的等价类。

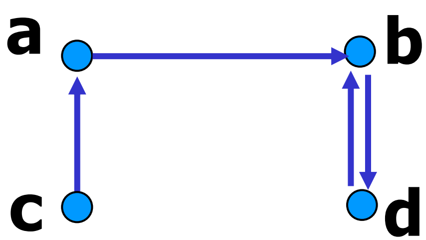
x的等价类常记为[x],即$[x]=\{y \mid y \in X \text{且} x R y\}$。

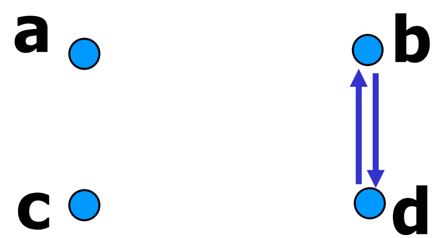
四、连通图的定义与性质

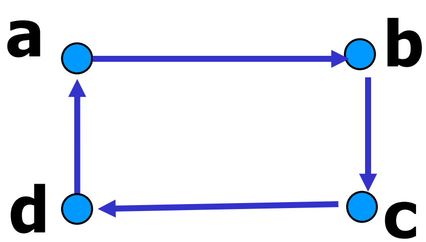
定义10.2.7 有向图D的极大强连通子图称为D的一个强支。

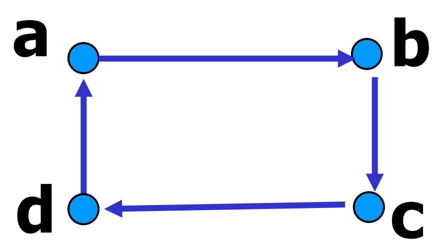


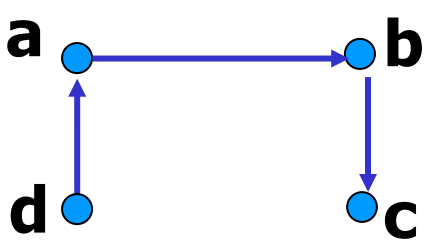
分别求下图三个图的强连通分支.

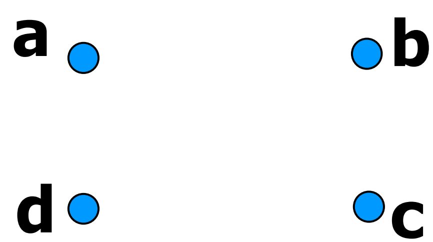












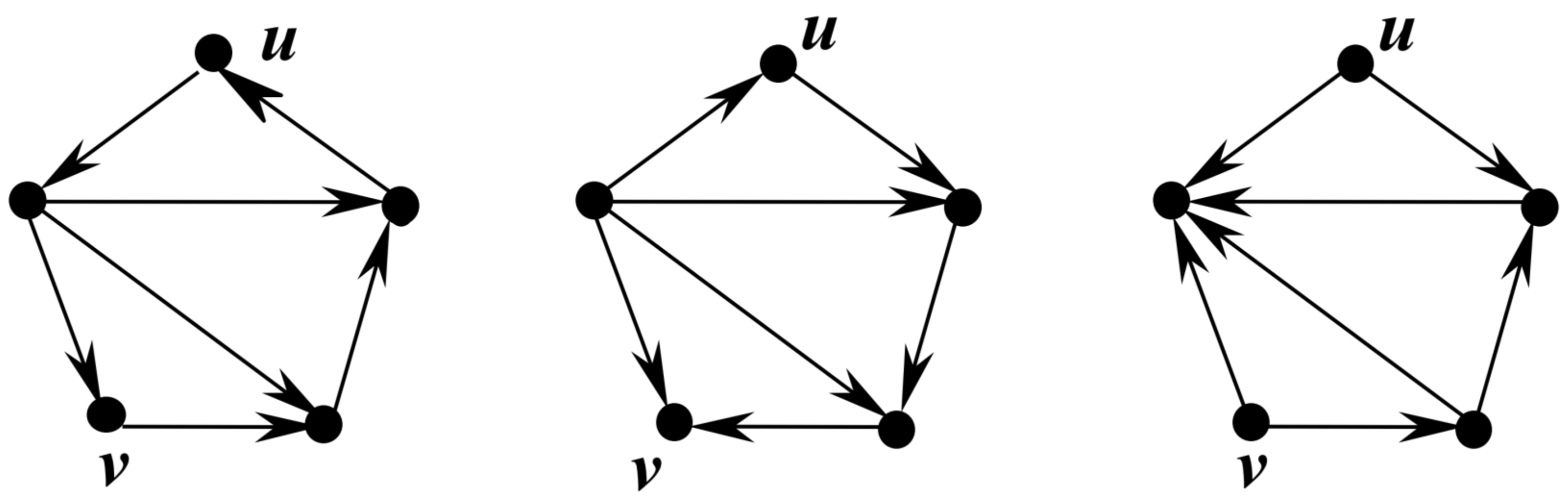
四、连通图的定义与性质

定理10.2.3 有向图D的每个顶点恰好在D的一个强支中。

证明略。

四、连通图的定义与性质

定义10.2.8 有向图D称为是单向连通的，如果对D的任两个不同顶点u和v，u可达v或者v可达u。



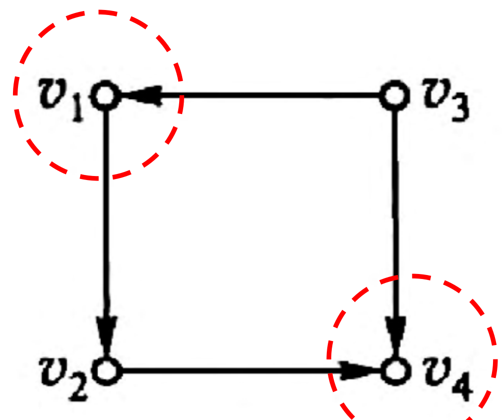
四、连通图的定义与性质

有向图D是单向连通的，当且仅当D有一条生成通道。

充分性显然。

必要性：设$L_1=v_1v_2...v_n$是包含最多顶点的通道，如果L包含D的所有顶点，则L就是一条生成通道。

反之，设w不在L中，由单向连通的定义，v_n可达w，则v_n到w有一条有向通道L_2，连接L_1和L_2得有向通道L，则L是一条包含更多顶点的通道，矛盾。

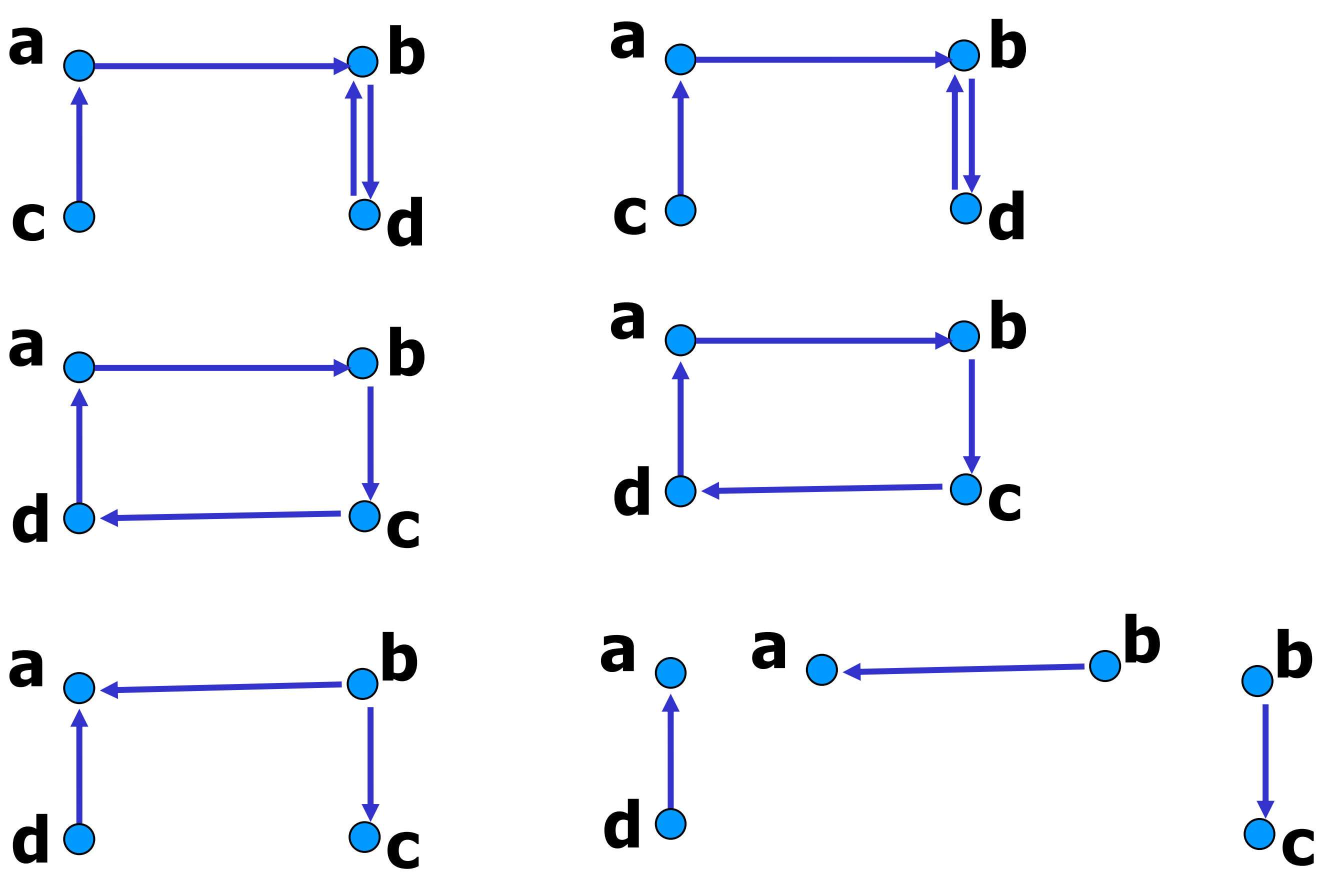


G_2

四、连通图的定义与性质

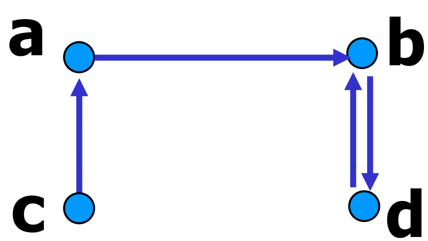
有向图D的极大单向连通子图称为D的单向支

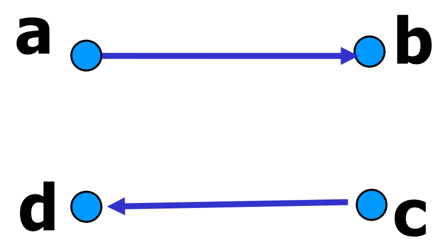
分别求下图三个图的单向（分）支?

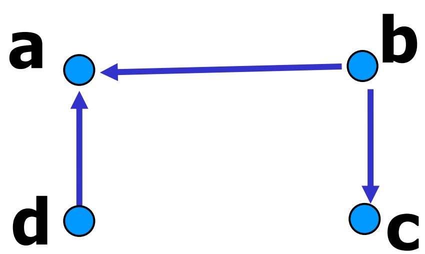


四、连通图的定义与性质

定义10.2.9 有向图D称为弱连通的，如果对D的任两个不同顶点u和v, u和v间有一条弱路。





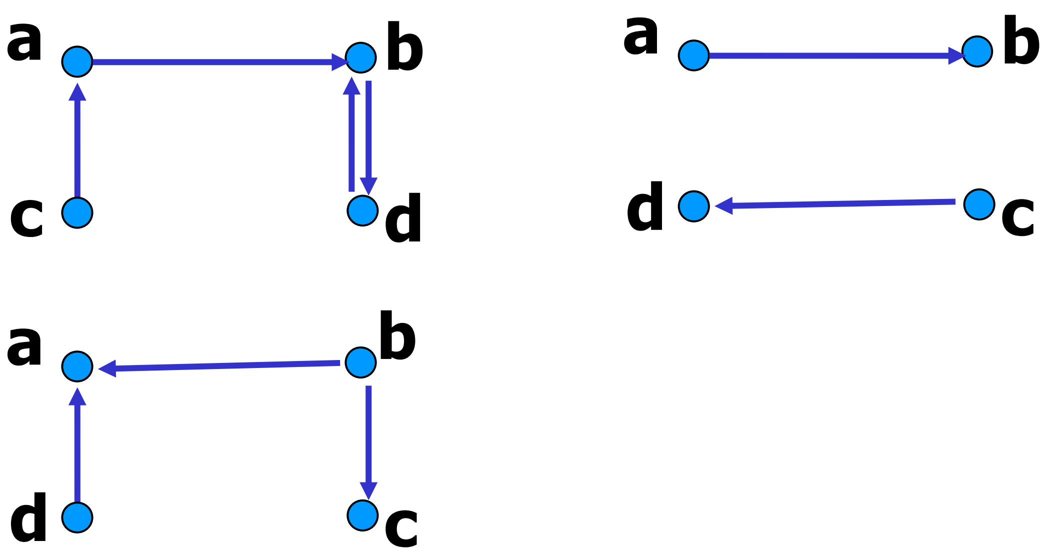


有向图D称为弱连通的，当且仅当去掉方向后是一个连通无向图。

D是弱连通的当且仅当有一条弱生成通道。

四、连通图的定义与性质

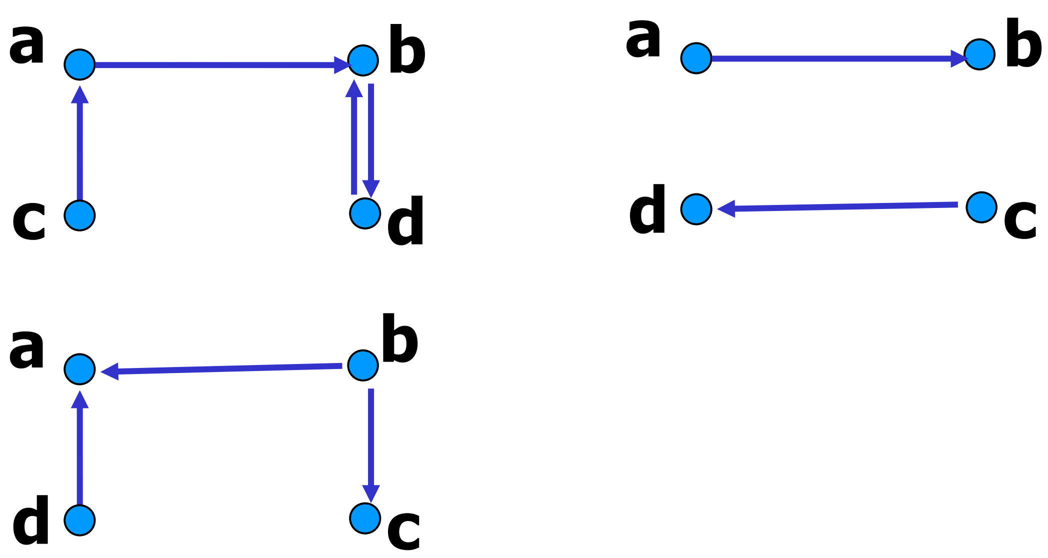
定理10.2.4 有向图D的每个顶点和每条弧恰在一个弱支中。



证明略。

四、连通图的定义与性质

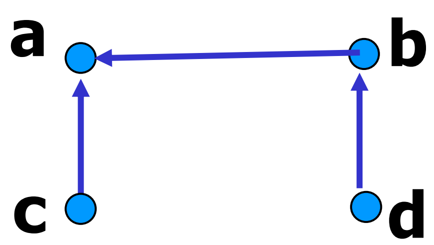
定义10.2.10 一个有向图称为连通的，如果它是弱连通的。

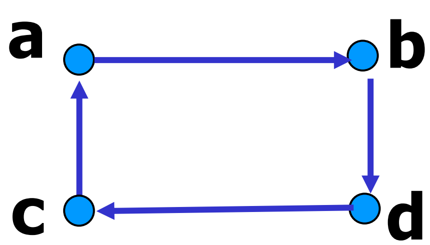


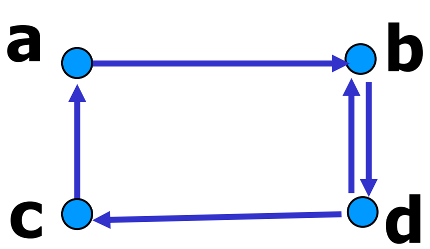
四、连通图的定义与性质

定理10.2.5 一个没有有向圈的有向图中至少有一个出度（入度）为零的顶点。

如果没有有向圈，则最长路中第一个顶点入度为零，最后一个顶点出度为零。







四、连通图的定义与性质

定理10.2.6 有向图D中没有有向圈当且仅当D中每一条有向通道都是有向路。

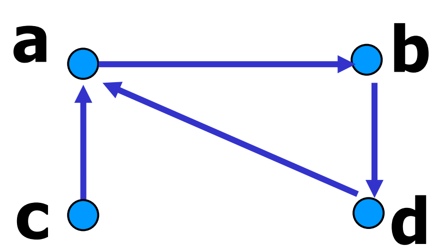
必要性：当有向图D中没有有向圈时，若存在一条有向通道不是有向路。那么在这条有向通道中，至少有一个顶点被重复访问，因此可以在通道中找到一个子序列，形成一个有向圈。这与假设D中没有有向圈矛盾。

充分性：当有向图D中每一条有向通道都是有向路时，若D中存在一个有向圈。那么可以找到一个有向通道，其中包含有向圈中的所有顶点和边，因此这个通道并不是一条有向路（至少有一个顶点被重复访问）。这与假设矛盾。

四、连通图的定义与性质

定理10.2.7 有向图$D=(V,A)$有有向圈的充分必要条件是D有一个子图$D_1=(V_1,A_1)$，使得$\forall v\in V_1$，$id(v)>0$且$od(v)>0$。

必要性：设D有有向圈C，那么由C上顶点和边构成的子图即满足要求。



四、连通图的定义与性质

定理10.2.7 有向图D=(V, A)有有向圈的充分必要条件是D有一个子图D_1=(V_1, A_1)，使得∀v∈V_1, id(v)>0且od(v)>0。

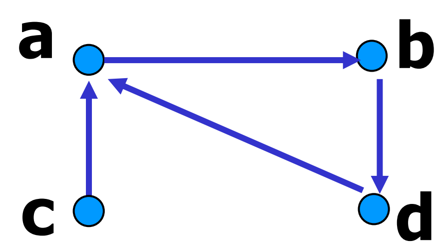
充分性：设D有一个子图D_1=(V_1, A_1)，使得∀v∈V_1, id(v)>0且od(v)>0。

设L = $v_1v_2...v_{n-1}v_n$是子图D_1中的最长路。

由已知条件od(v_n) > 0，

所以至少有一个顶点u，(v_n, u)是有向边。

u如果不在L中，$v_1v_2...v_{n-1}v_n$u是一条更长的路，矛盾，u在L中，必有圈。



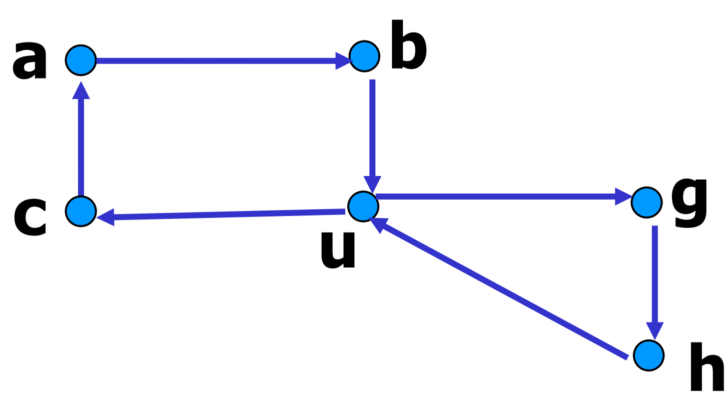
四、连通图的定义与性质

定理10.2.8 D=(V, A)是一个连通的有向图。如果$\forall v \in V$, od(v)=1。则D中恰有一个有向圈。

证明：由定理10.2.7 D中有圈，如果只有一个有向圈，则定理得证。

假设D中至少有两个有向圈。设C_1和C_2是其中的两个有向圈。

如果C_1和C_2有公共顶点u，则u的出度不可能是1，矛盾。



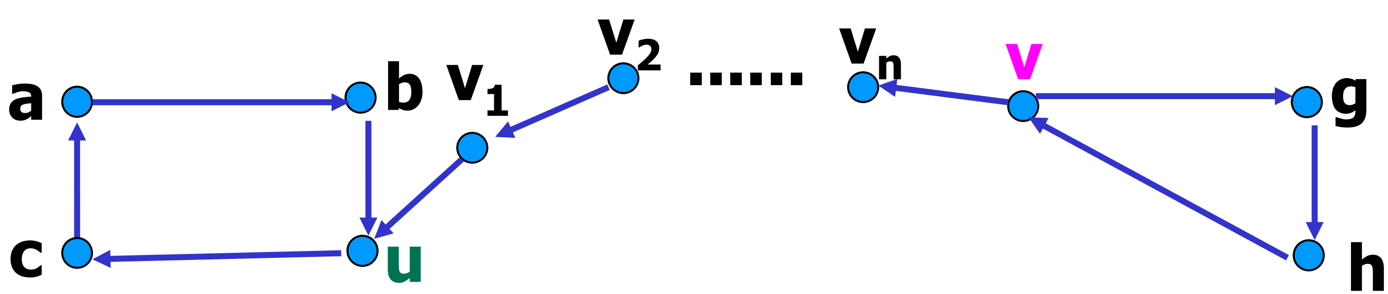
四、连通图的定义与性质

如果C_1和C_2没有有公共顶点，由于是连通图，则这两个圈之间必有一条弱路连接。

设这条弱路为$uv_1v_2...v_nv$，其中u是C_1上的顶点，v是C_2上的点，由od(u)=1，因此：id(u)>1，

由$\forall v_i$，由$od(v_i)=1$，可得od(v)>1，矛盾。

因此，定理成立。



习　　题

1. 设D是一个有p个顶点q条弧的有向图。如果D是连通的，证明：$p-1 \le q \le p(p-1)$

证明：$q \le p(p-1)$显然

D是连通的相当于把D看成一个无向图是连通的，最少需要p-1条边。

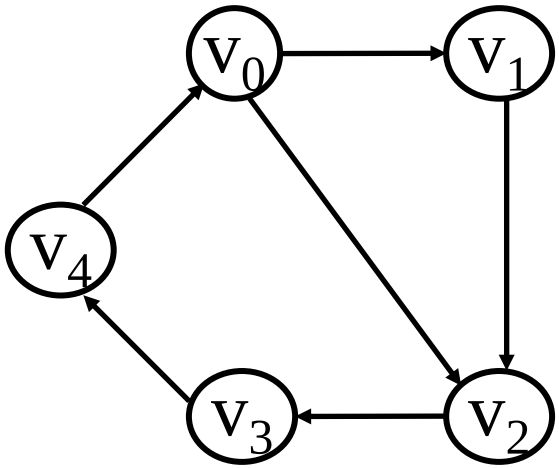
习　　题

2. 设D是一个有p个顶点q条弧的强连通的有向图，则q至少是多大?

$q = p$

10.4、有向图的邻接矩阵

例　有向图的邻接矩阵



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

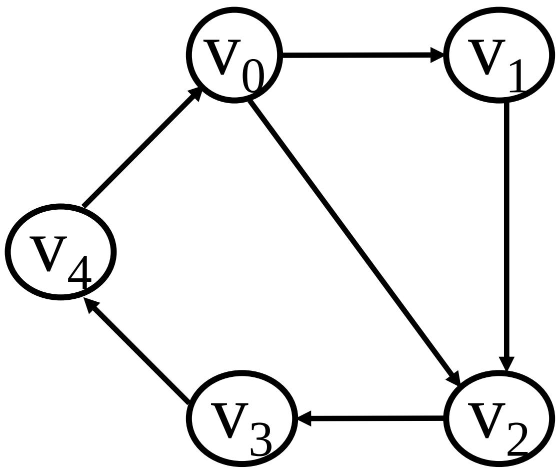
讨论：

有向图中第i个顶点的出度和入度在邻接矩阵中如何体现？

边数是多少？

10.4、有向图的邻接矩阵

例　有向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

答案：

第i行的非零元个数之和；

第i列的非零元个数之和；

边数为非零元的个数。

10.4、有向图的邻接矩阵

定义10.4.1 设D = (V, A)是一个有向图，V中的元素编号为$v_1,v_2,\ldots,v_p$, $p\times p$矩阵$B=(b_{ij})$称为D的邻接矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}(v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{若}(v_i, v_j) \notin E\end{cases}$$

若$B=(b_{ij})$是有向图D=(V, A)的邻接矩阵，|V|=p，则：

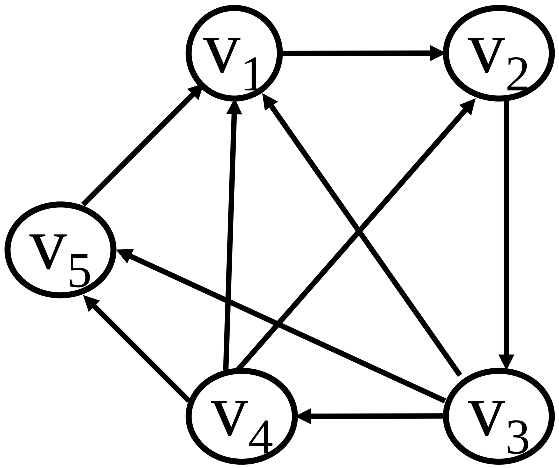
$$id(v_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}$$

$$od(v_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}$$

D的反向图D^T的邻接矩阵为B^T。

10.4、有向图的邻接矩阵

例 有向图的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

B

$B^2[3][1]$

$= 1\times0 + 0\times0 + 0\times1 + 1\times1 + 1\times1$

$= 2$

10.4、有向图的邻接矩阵

定理10.4.1 设B是有向图G = (V, E)的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$, 则从顶点v_i到v_j的长为l的有向通道的条数等于B^l的第i行第j列元素$(B^l)_{ij}$的值。

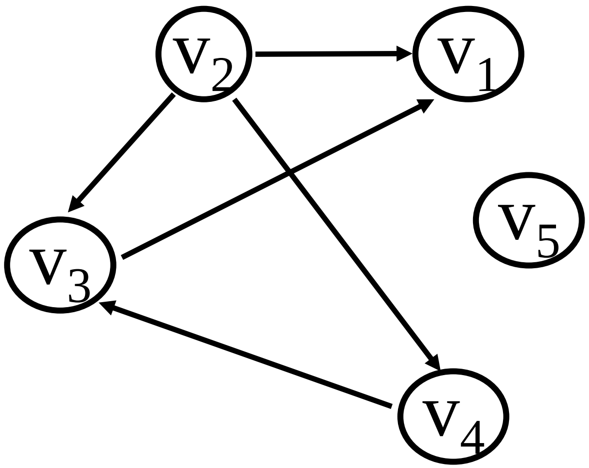
证明方法类似无向图中定理6.7.2的证明。

10.4、有向图的邻接矩阵

定义10.4.2 设D = (V, A)为有向图，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$, $p\times p$矩阵$R=(r_{ij})$称为D的可达矩阵，如果$i\neq j$,

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果从}v_i\text{可达到}v_j, \\ 0 & \text{如果从}v_i\text{不能达到 }v_j,\end{cases}$$

$r_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, p$



$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

10.4、有向图的邻接矩阵

定理10.4.2 设$p \times p$ 矩阵B是有向图D = (V, A)的邻接矩阵，则D的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \ldots \vee B^{(p-1)}$$

说明：I保证了对角线是1，$\forall v \in V$, v可达v。

B保证了u, v之间有有向边，则可达。

……

$B^{(i)}$保证了u, v之间有长度为i的有向通道，则可达。

u, v之间可达，则u,v间有长度不超过p-1的有向通道！

10.4、有向图的邻接矩阵

定理10.4.2 设$p \times p$ 矩阵B是有向图$D = (V, A)$的邻接矩阵，则D的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$$

证明: 如果$r_{ij} = 1, i \neq j$, 则从顶点v_i能达到v_j, 故从v_i到v_j有一条有向路, 其长$\leq p-1$。

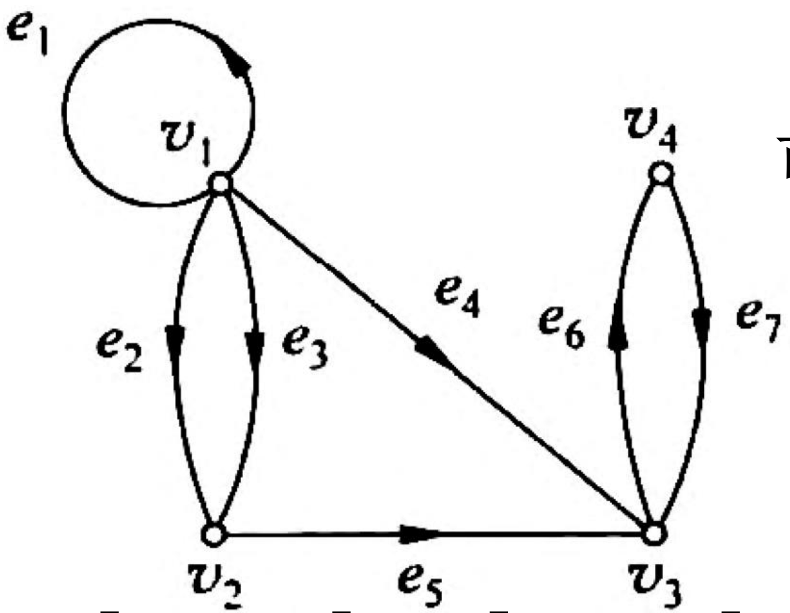
因此，有l ($1 \leq l \leq p-1$)，使$(B^{(l)})_{ij} = 1$,

从而矩阵$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$的第i行第j列元素为1。

若$r_{ij} = 0$, 则v_i不能达到v_j, 故从v_i到v_j没有有向路, 所以对$k = 1, 2, \dots, p-1$, 有$(B^{(l)})_{ij} = 0$,

因此，$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$的第i行第j列的元素为0。所以，$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$。

10.4、有向图的邻接矩阵



例：写出图D的邻接矩阵、可达矩阵

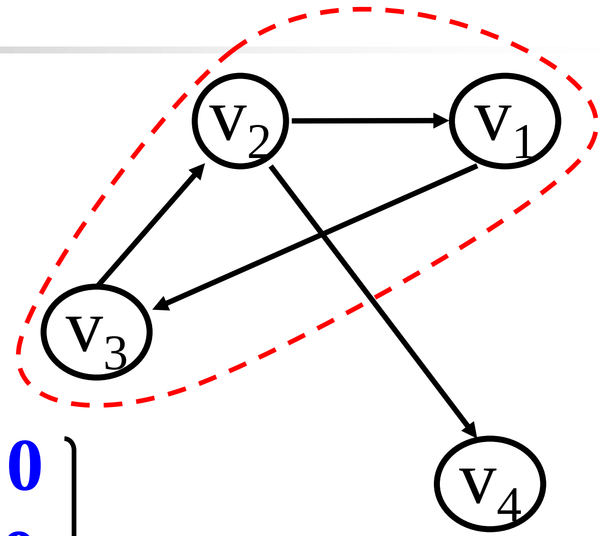
$$\mathbf{B}(D)=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\mathbf{B}^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{B}^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3=\mathbf{B}+\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^3=\begin{bmatrix}3&6&8&4\\0&0&2&1\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

10.4、有向图的邻接矩阵

例：如图



$$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad R^T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$C=R\wedge R^T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

10.4、有向图的邻接矩阵

定理10.4.3 设p × p 矩阵R为有向图 D = (V, A)的可达矩阵, C = R ∧ R^T, C的第i行上为1的元素为$c_{ij_1}, c_{ij_1}, \ldots, c_{ij_k}$, 则$v_i$在由$V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}\}$诱导出的D的子图—D的强支中。

证明：因为$c_{ij_1} = c_{ij_1} = \cdots = c_{ij_k} = 1$, 第i行上其它元素为0, 所以由R ∧ R^T 的定义知

$r_{ij_t} = r_{j_t i} = 1$, t = 1, 2, ..., k。

于是, 从顶点v_i能到达v_{j_t}, 并且从v_{j_t}能达到v_i, 故v_i与v_{j_t}互达。反之，设v_i与v_j互达，则$r_{ij} = r_{ji} = 1$,

故， $c_{ij} = r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$。

因此, 在等价关系R$_D$下, v_i所在的等价类为V_i 。从而, v_i在V_i导出的强支中。

10.4、有向图的邻接矩阵

定义10.4.3 设D = (V, A)是一个有p个顶点q条弧的有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$, $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$, $p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为D的关联矩阵，如果

$$h_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}v_i\text{是弧}x_j\text{的起点,}\\ -1 & \text{如果}v_i\text{是弧}x_j\text{的终点,}\\ 0 & \text{如果}v_i\text{不是弧}x_j\text{的起点也不是终点,}\end{cases}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$