第六章：图论的基本概念

6.4 补图、偶图

本节主要问题

一、补图和自补图的定义

二、补图的性质

三、偶图的定义

四、偶图的性质

一、补图和自补图的定义

定义6.4.1 设G=(V,E)是一个图，图

$$G^c=(V, P_2(V)\backslash E)$$

称为G的补图。如果G与其补图G^c同构，则称G是自补图。

两个顶点u与v在G^c中邻接，当且仅当u与v在G中不邻接！

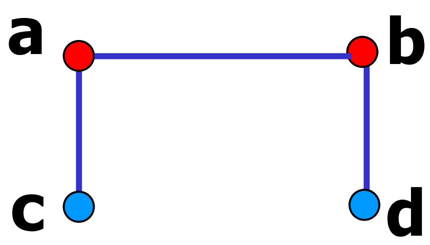


图6.4.1

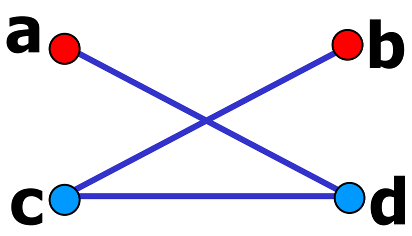


图6.4.1的补图

一、补图和自补图的定义

自补图　　　　n个顶点的自补图有多少条边?

如果图G与G^c同构，则称G是自补图。

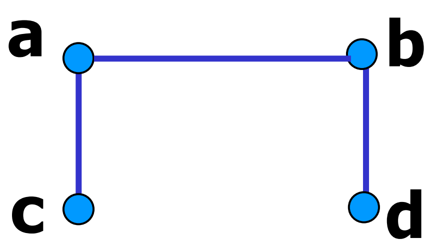


图6.4.1

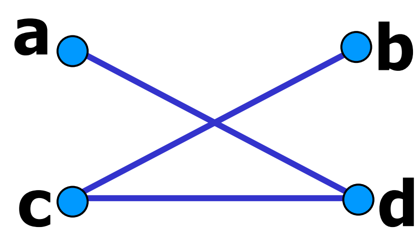


图6.4.1的补图

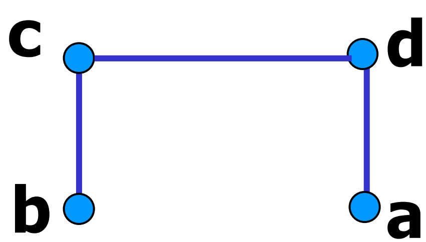


图6.4.1的补图

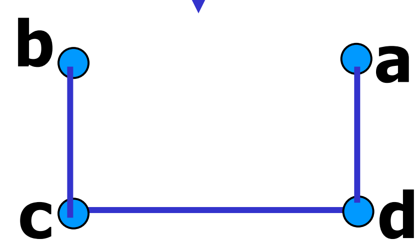


图6.4.1的补图

习 题

3(P216).证明：每一个自补图有4n或4n+1个顶点

证:

设$G_1=(V,E_1)$是一个自补图;

它的补图为$G_2=(V,E_2)$;

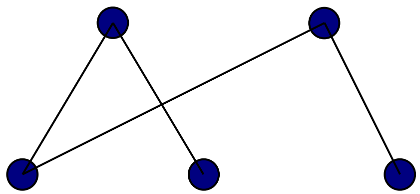
设$|V|=m$ $|E_1|+|E_2|=m(m-1)/2$

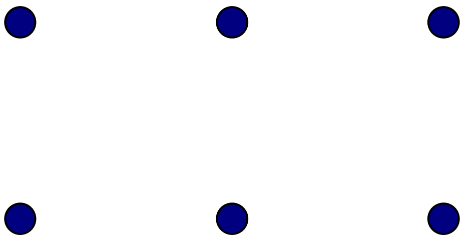
$|E_1|=m(m-1)/4$

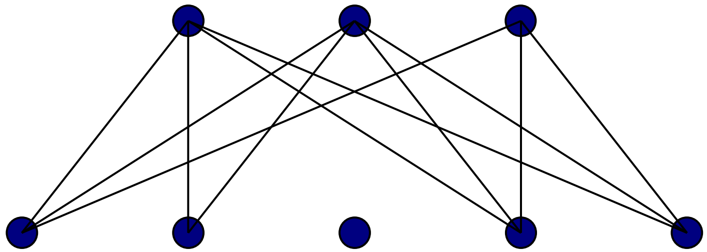
因此m能被4整除或m-1能被4整除

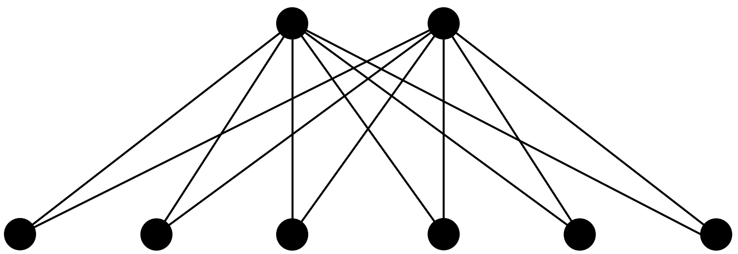
也就是m=4n或m=4n+1.

三、偶图的定义





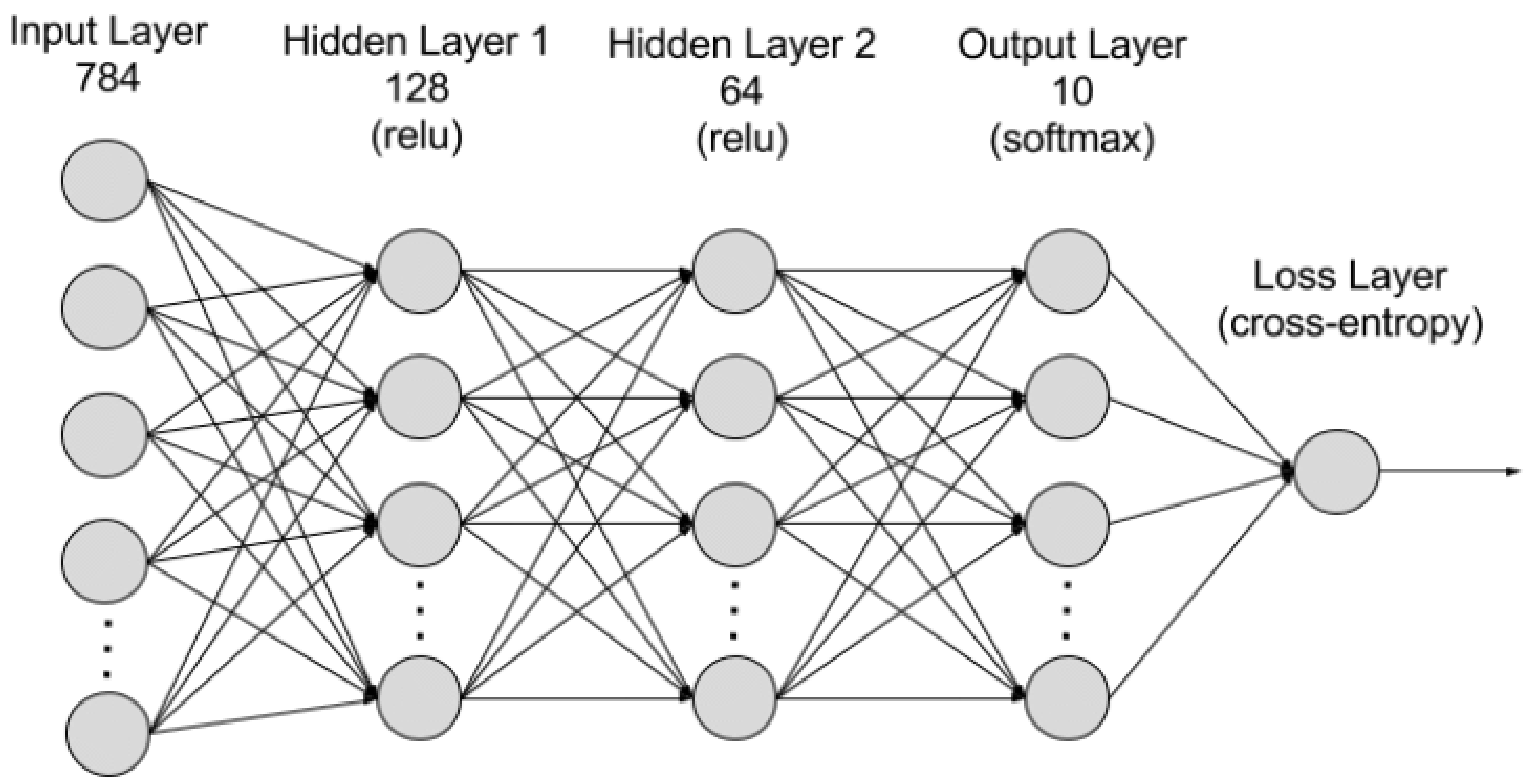




K26

偶图（二分图、二部图、双图、双色图）

三、偶图的定义



Input Layer
784
Hidden Layer 1
128
(relu)
Hidden Layer 2
64
(relu)
Output Layer
10
(softmax)
Loss Layer
(cross-entropy)

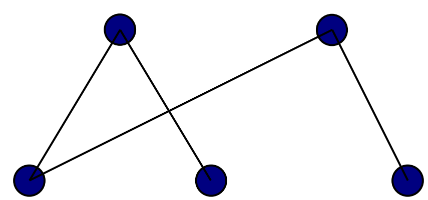
神经网络

三、偶图的定义

定义6.4.2 G=(V, E) 称为偶图

如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$；

使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，偶图有时记为$((V_1, V_2), E)$。



偶图（二分图、二部图、双图、双色图）

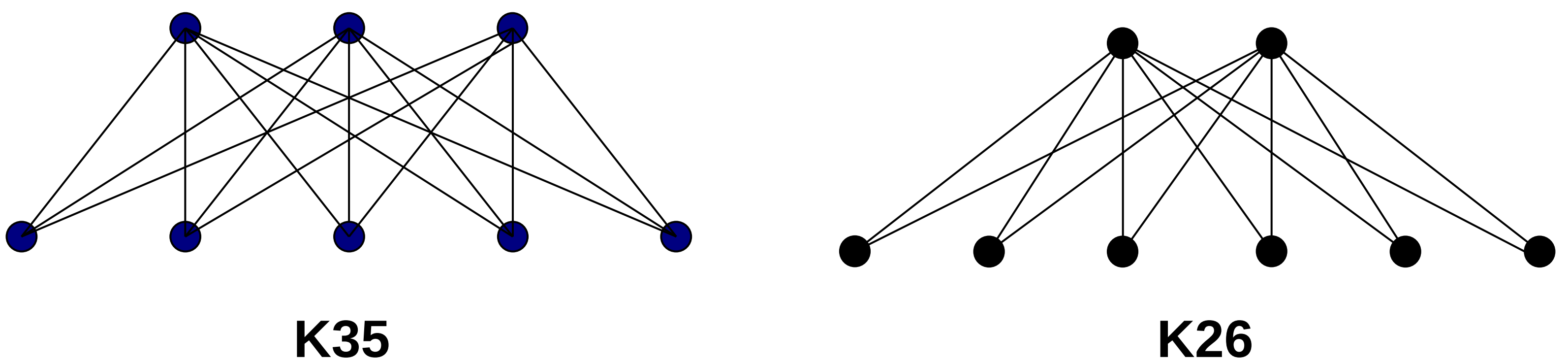
三、偶图的定义

完全偶图

如果$\forall u \in V_1$, $v \in V_2$均有$uv \in E$, 则这个偶图称为完全偶图，

并记为$K(m, n)$或$K_{m,n}$，其中$|V_1|=m$, $|V_2|=n$;

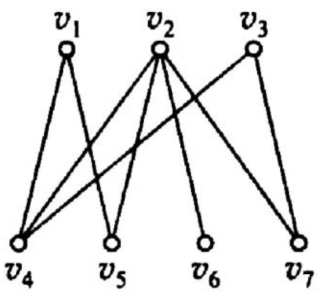
完全偶图有$m \times n$条边。



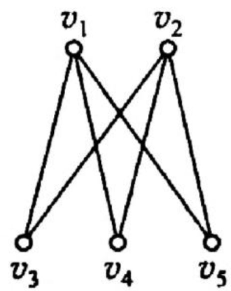
完全偶图

三、偶图的定义

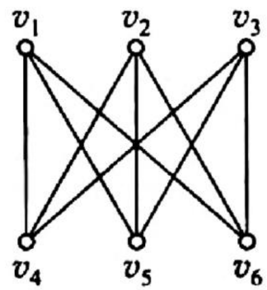
哪些图是偶图，哪些图是完全偶图?



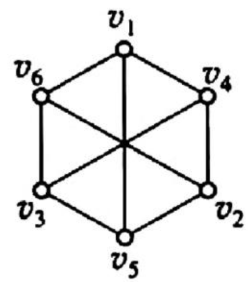
(a)



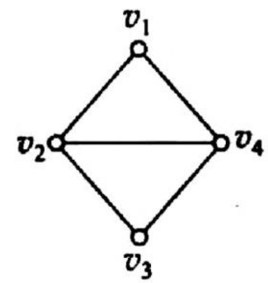
(b)



(c)



(d)

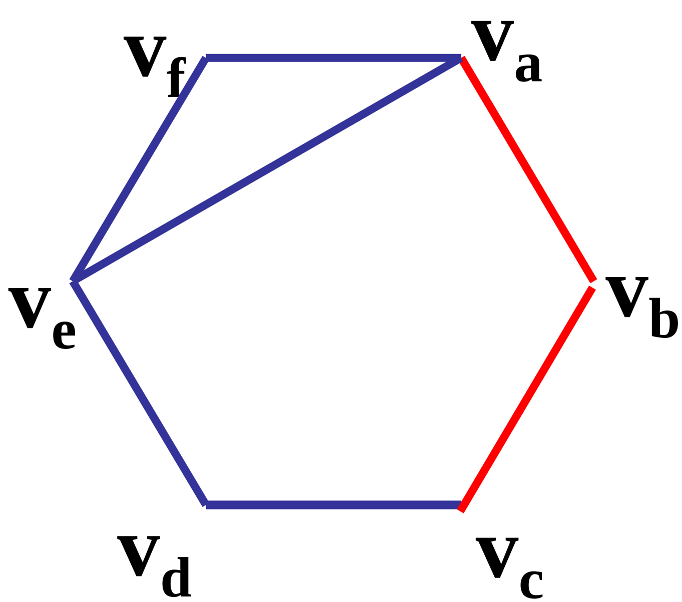


(e)

四、偶图的性质

两点间的距离

定义6.4.3 G=(V, E)是一个图，u和v是G的两个顶点。联结u和v的**最短路**的**长度**称为u与v之间的**距离**，并记为d(u, v)；如果u与v之间没有路，则定义d(u, v)=∞。

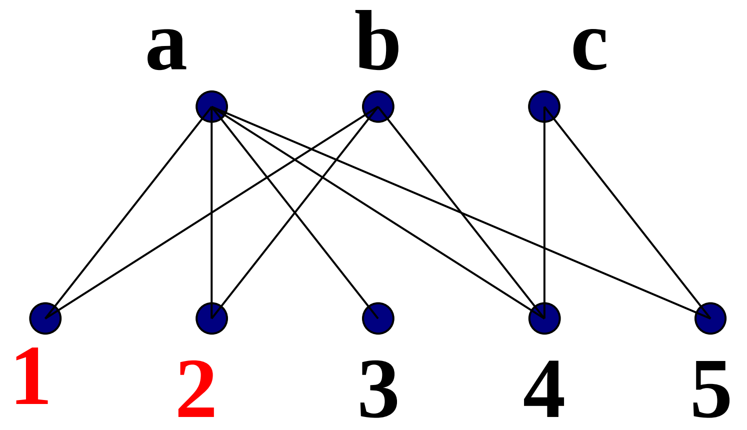


左图V_a到V_c的距离是2

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈（初级回路）都是偶数长。

[证]必要性:



偶图

分析圈a-1-b-2-a

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]必要性:

设$G=(V,E)$是偶图,则V有一个二划分$\{V_1,V_2\}$,使得对任一$uv\in E$有$u\in V_1$, $v\in V_2$;

设$v_1v_2v_3v_4...v_nv_1$是G的一个长为n的圈,不妨设$v_1\in V_1$;

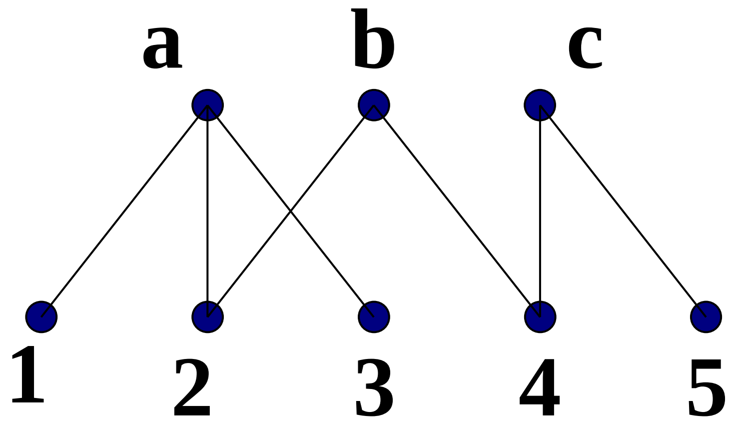
则这个圈$v_1v_2v_3v_4...v_nv_1$上奇数下标的顶点在V_1中,偶数下标的顶点在V_2中;

每个下标为偶数的顶点恰关联圈上两条边,所以此圈的长n为偶数。

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]充分性:



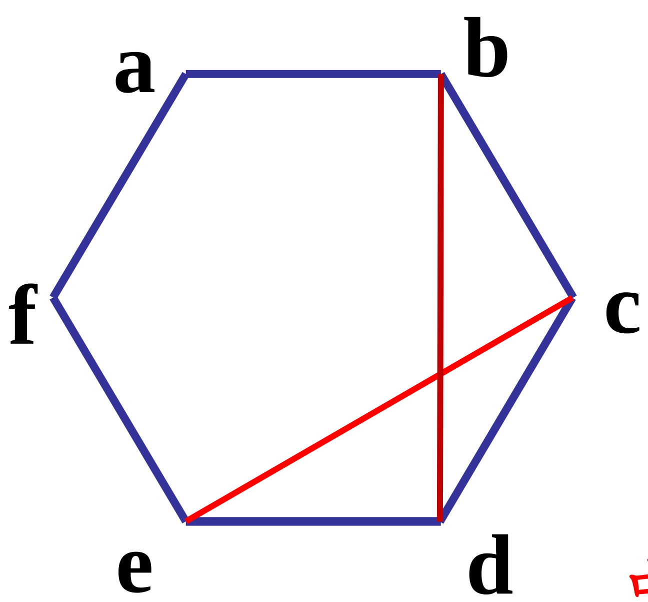
偶图

首先，分析同组顶点间的距离和异组顶点之间的距离有什么特点。

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证] 充分性:



所有圈都是偶数长，左图为其一

任选一顶点（例如a），与他的距离是奇数的分为一组，是偶数的分为一组。

分为两组:

{a, c, e}, {b, d, f}

根据偶图定义，只需证明同组中顶点间无边，即可证明为偶图。

检查：如果同组顶点ce间或bd间有边，则?

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证] 充分性:

即设G的每个圈的长为偶数，证G是偶图;

为此,不妨设G是连通图,否则可分别考虑G的每个支,任取G的一个顶点u,定义集合

$V_1=\{v|v\in V, d(u, v)$ 是偶数$\}$,

$V_2=\{v|v\in V, d(u, v)$ 是奇数$\}$。

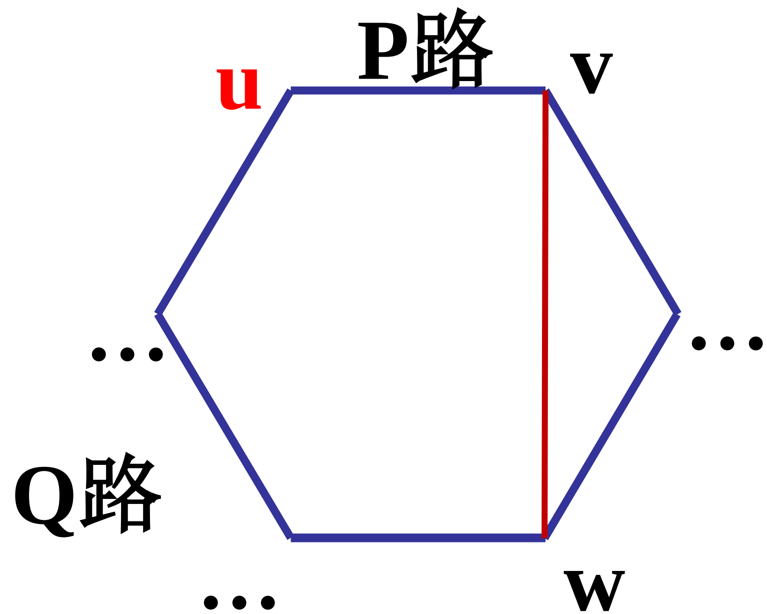
四、偶图的性质

则 $\{V_1, V_2\}$ 是V的一个二划分;

假设w与v是同组V_2的两个不同顶点,并且vw∈E;

令P是u与v间的最短路,Q为u与w间的最短路;

（1）如果除u点外P与Q不相交，又已知同组V_2中顶点间vw∈E ，即w、v有边，则P、Q和vw形成一个长度为奇数的圈，与题干矛盾，因此同组无边，因此为偶图。



四、偶图的性质

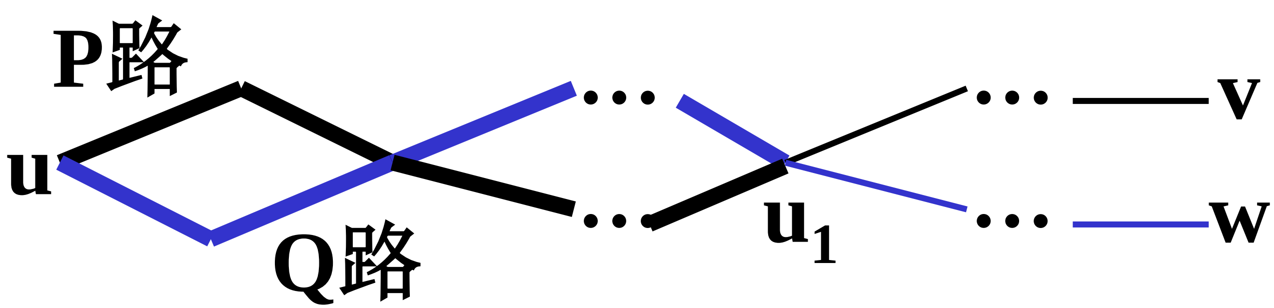
（2）如果P和Q除u外还有相交点

设u_1为从u开始，P与Q的最后的一个公共顶点；

因为P与Q是最短路，所以P和Q上的u-u_1段也是最短的u与u_1间路，故有相同的长；

而P与Q的长都是奇数，故“P的u_1到v的段”P_1与“Q的u_1到w的段”Q_1有相同的奇偶性；

于是，若同组V_2中顶点间w、v有边，则边vw，Q_1，P_1构成G中一个奇数长的圈，这与假设矛盾，所以V_2的任两不同顶点v与w间无边；



四、偶图的性质

例6.4.2　图6.4.5是半张象棋盘，一只马从某点跳了n步后又跳回到这点，试证：n是偶数.

1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	0	**1***	0	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0

[证]　如果按图上所示方法给棋盘的每个格点标上0或1，格点作为顶点。

两个顶点之间有边当且仅当两个顶点间符合马的跳动规则，这样正好构成一个偶图。

四、偶图的性质

例6.4.2　图6.4.5是半张象棋盘，一只马从某点跳了n步后又跳回到这点，试证：n是偶数.

1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	0	**1***	0	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0

马从某点跳n步又回到出发点，正好形成一个圈，偶图的所有圈都是偶数长。因此n是偶数。

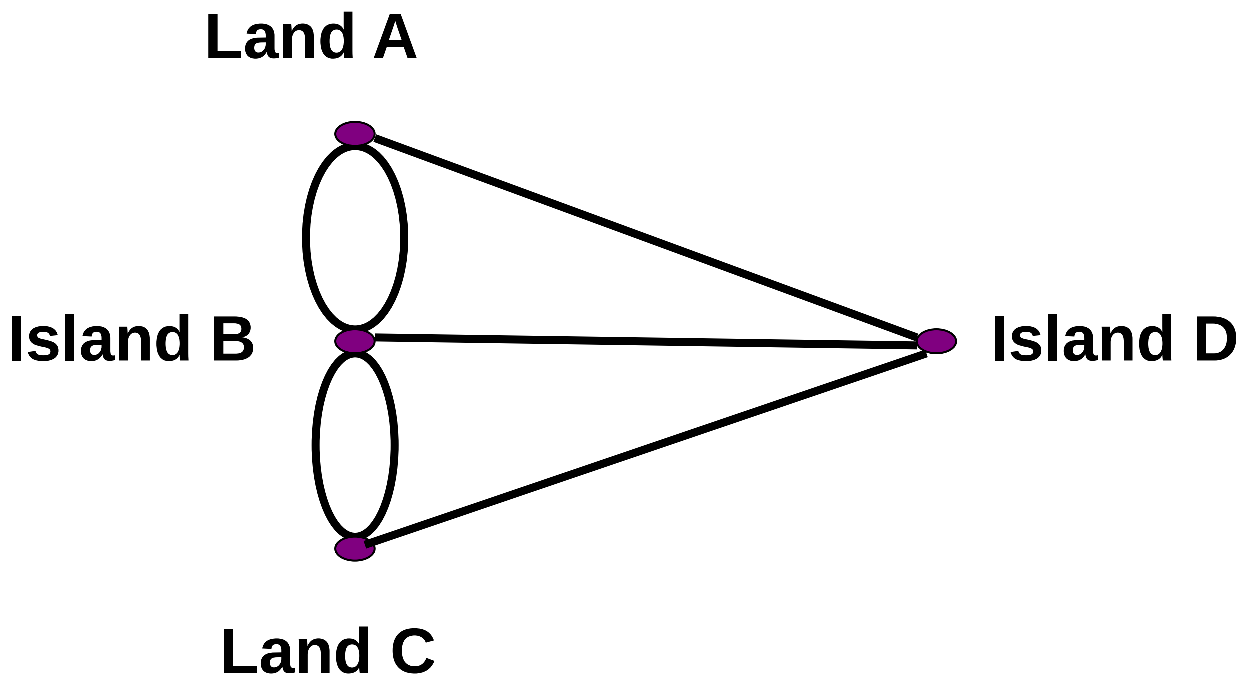
6.5 欧拉图

本节主要问题

一、欧拉图的定义

二、欧拉图的性质

欧拉将其简化为：能否从一个节点开始，走每一条边一次，而且只走一次，正好回到开始节点（一笔画问题）。

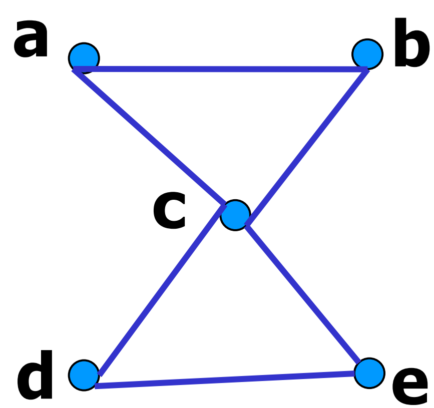


哥尼斯堡城七桥问题的拓扑结构图。

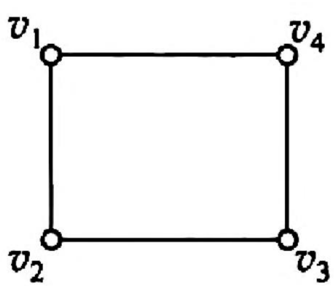
一、欧拉图的定义

定义6.5.1 包含图的所有顶点和所有边的闭迹（简单回路）称为欧拉闭迹（欧拉回路），存在一条欧拉回路的图称为欧拉图。

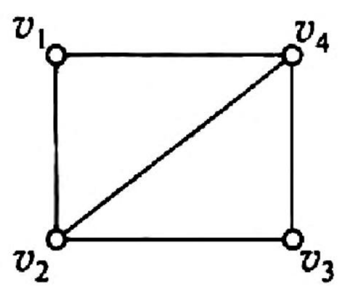
abcdeca是一条欧拉闭迹



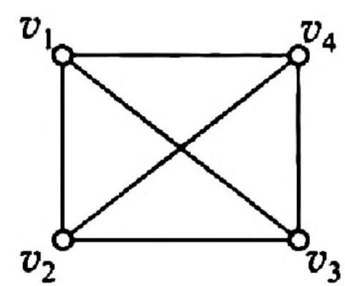
以下是否是欧拉图？是否存在欧拉回路



(a)



(b)

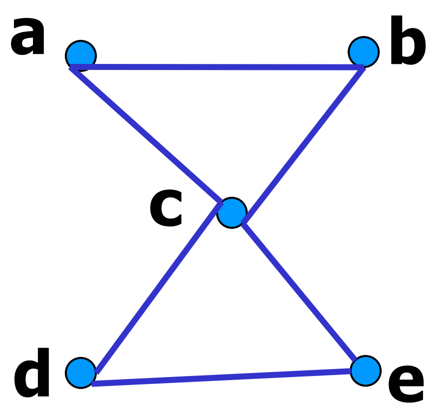


(c)

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

必要性：分析欧拉回路



abcdeca是一条欧拉回路

在这条欧拉回路上，每个顶点每出现一次都需要2度。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

[证]⇒设G是一个欧拉图，则G中有一条包含G的所有顶点和所有边的欧拉回路P，所以，G是连通的；

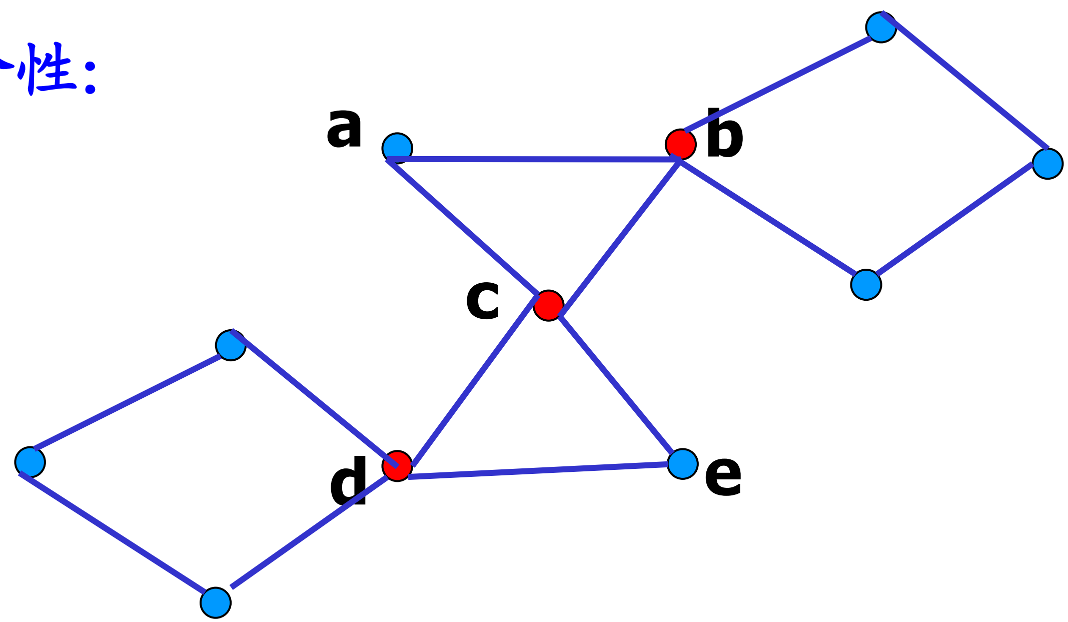
因为P包含了所有的边，因此P中体现了所有的度数；

当沿着这条闭迹走时，每经过一个顶点，均涉及两条以前未走过的边，其一是沿着这条边进入这个顶点，而另一条边是顺着它离开这个顶点，由于是欧拉回路，所以G的每个顶点的度都是偶数。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

充分性:



定理6.3.3 设G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图，如果$\forall u \in V$, deg u为偶数，则G中有圈。

二、欧拉图的性质

证充分性：设G是连通的且每个顶点的度都是偶数;

由定理6.3.3知G中有一个圈Z_1;

如果Z_1包含了G的所有边,从而也就包含了G的所有顶点,因此Z_1是G的欧拉回路,故G是欧拉图;

否则Z_1不包含G的所有边;

这时从G中删去圈Z_1上的边,得到的图记为G_1;

显然,G_1的每个顶点的度均为偶数; 并且至少有一个顶点的度数不为零。

二、欧拉图的性质

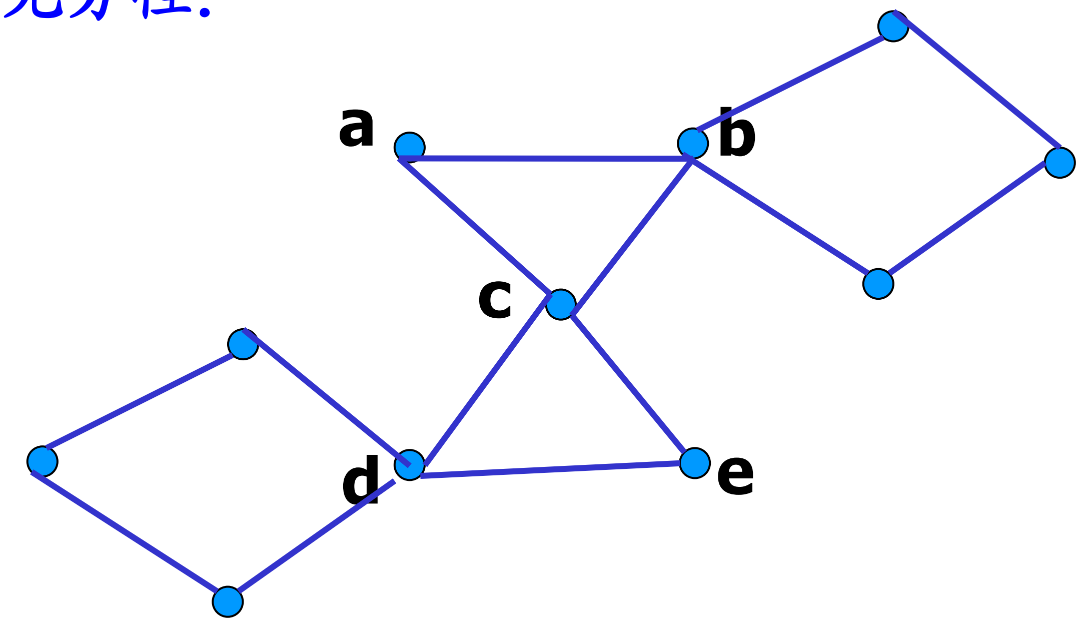
再用定理6.3.3，G_1中有圈Z_2，从G_1中删去圈Z_2上的边得到的图记为G_2，……，最后必得到一个图G_n，G_n中无边，于是我们得到了G中的n个圈$Z_1, Z_2, ..., Z_n$；

他们是两两无公共边的，由于G是连通的，所以每个圈Z_i至少与其余的某个圈有公共顶点，从而需要证明这些圈构成一个欧拉回路。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

充分性:

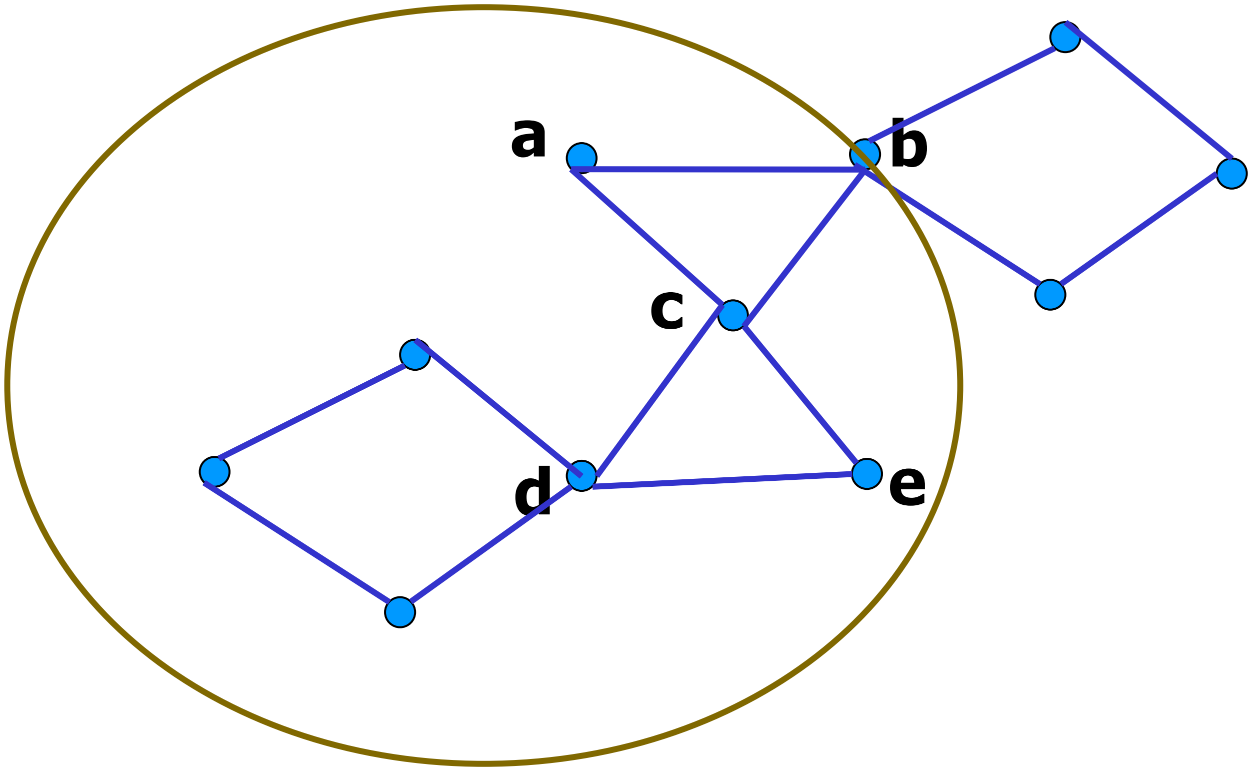


上一步已证明了度数都是偶数的连通图由n个圈构成，现在需要证明这些圈构成一个欧拉回路。

二、欧拉图的性质

对圈的个数n用归纳法，当n=1时，按圈的定义显然成立。

假设当n=k时成立，也就是k个边不重的有公共顶点的圈$z_1, z_2, \ldots, z_k$形成一个欧拉回路;

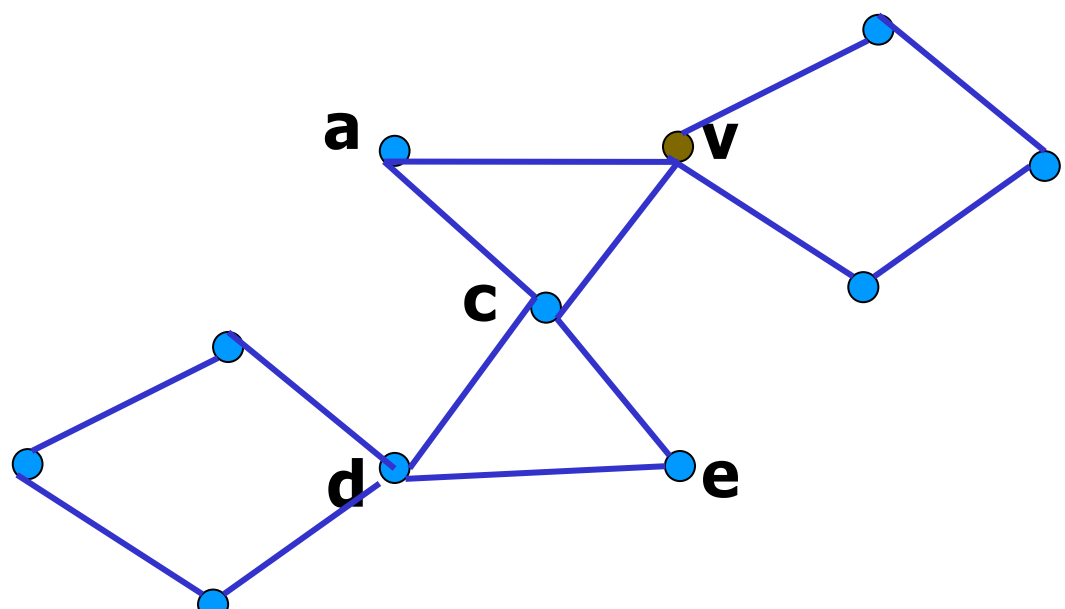


二、欧拉图的性质

当n=k+1，因为每个圈与其它圈有公共顶点，所以圈z_{k+1}必与某个圈Z_i有公共顶点，设这个公共顶点为v;

在圈z_{k+1}上从v开始走遍z_{k+1}，

按归纳假设前K个圈是一个欧拉回路，因此从v开始有一条欧拉回路。



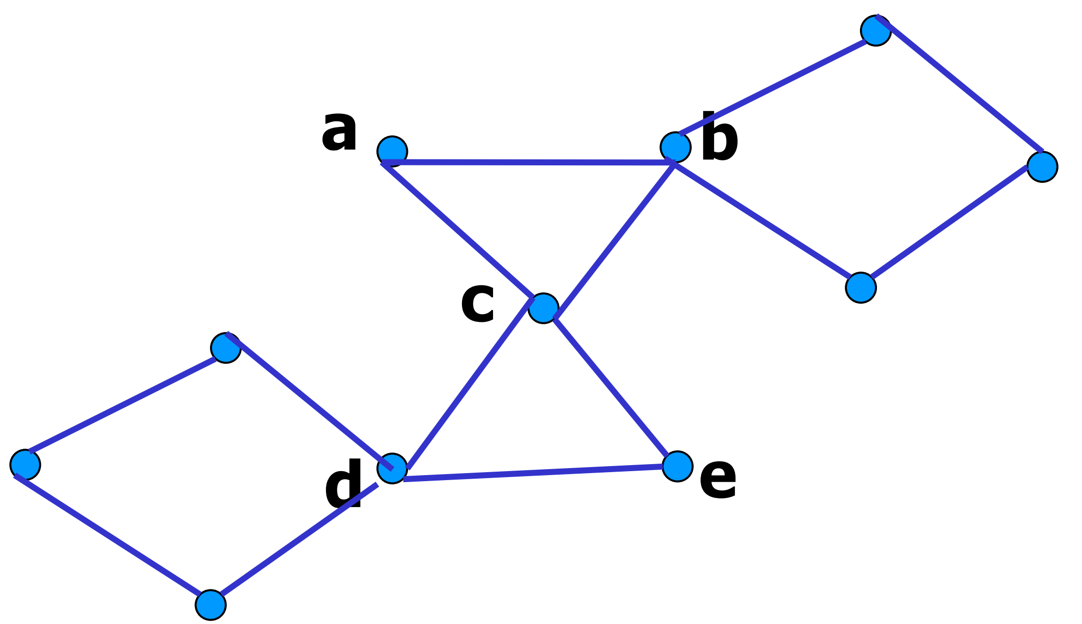
二、欧拉图的性质

推论6.5.1　设G是一个连通图，则下列命题等价.

(1) G是一个欧拉图.

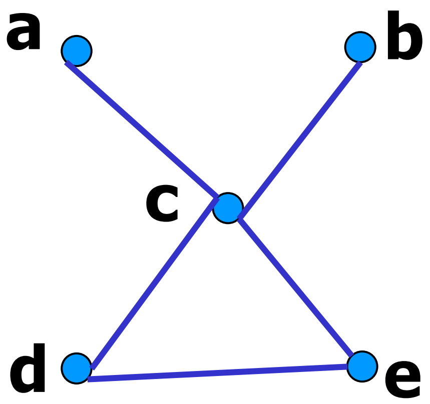
(2) G的每个顶点的度都是偶数.

(3) G的边集能划分成若干互相边不相交的圈。



二、欧拉图的性质

定义6.5.2　包含图的所有顶点和边的迹（简单通路）称为欧拉迹（欧拉通路）



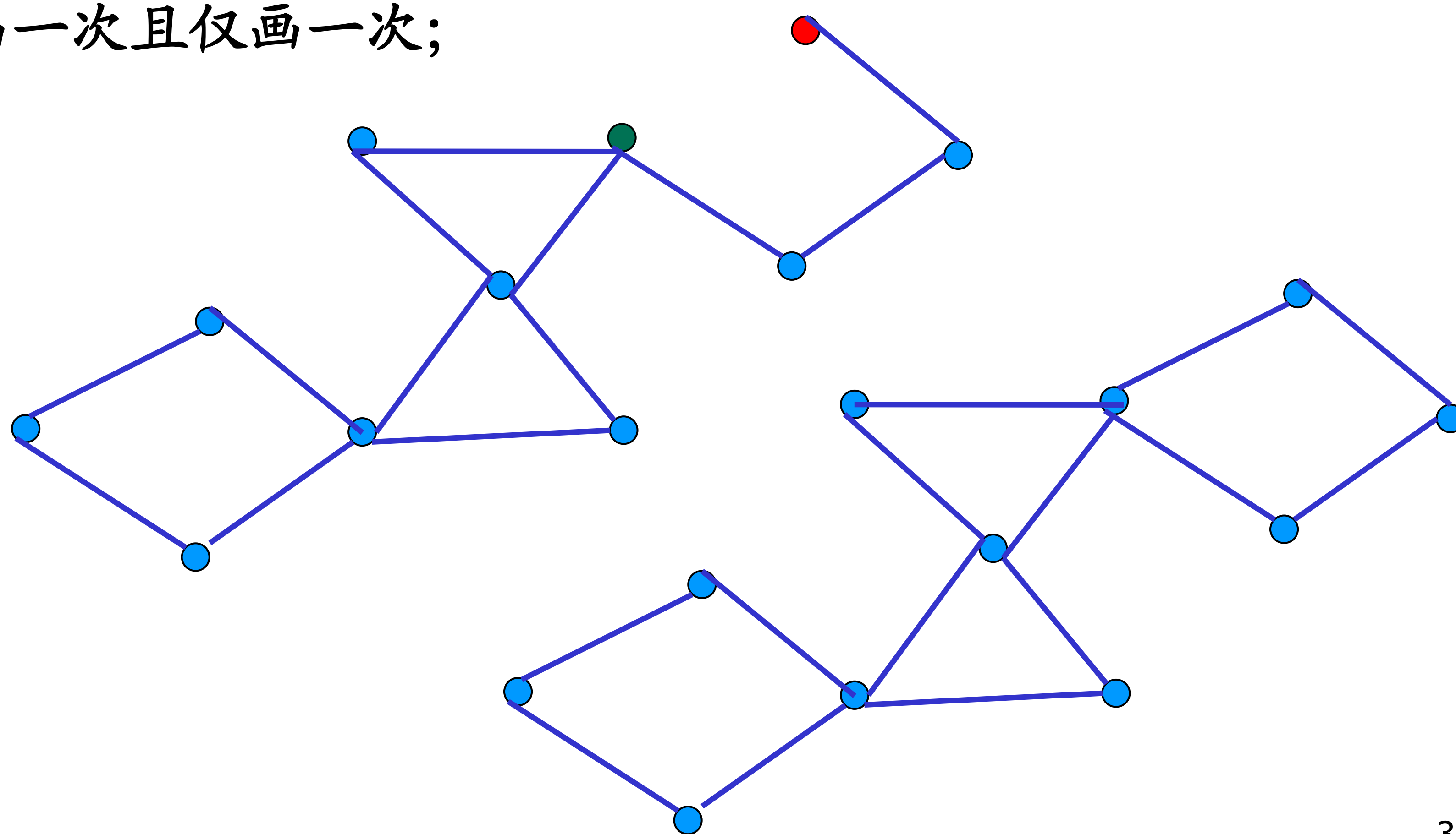
acdecb是一条欧拉迹

推论6.5.2　图G有一条欧拉迹（欧拉通路）当且仅当G是连通的且最多有两个奇度顶点。

二、欧拉图的性质

一笔画问题

一个图能否笔不离开纸而一笔画成，使每条边只画一次且仅画一次；



二、欧拉图的性质

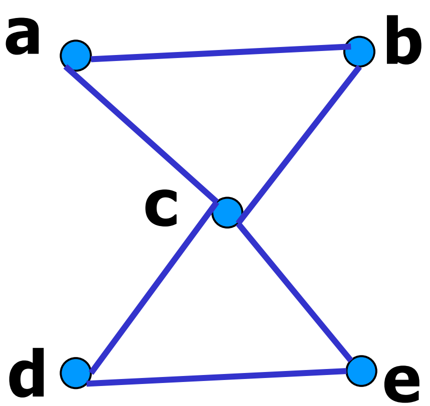
一笔画问题

欧拉给出的鉴别原则是只要看一下这个图的顶点的度数,如果恰有两个奇度顶点且图又是连通的,则这图能一笔画出,且应从一个奇度顶点开始画,最后终于另一个奇度顶点，即存在欧拉通路;

若每个顶点的度均为大于或等于2的偶数,图又是连通的,则这个图能一笔画出,并且最后还能回到出发点,即存在欧拉回路。

二、欧拉图的性质

定理6.5.2 设G是连通图，G恰有2n个奇度数顶点，n≥1. 则G的全部边可以排成n条开迹（欧拉通路），而且至少有n条开迹（欧拉通路）。



a-b-c-d-e-c-a是一条欧拉回路

从ab处断开:

2个奇度顶点，1条欧拉通路b-c-d-e-c-a

再从de处断开:

4个奇度顶点，

排成2条欧拉通路b-c-d和e-c-a

有b-c-d、 e-c-a、a-c-b、…欧拉通路

二、欧拉图的性质

定理6.5.2 设G是连通图，G恰有2n个奇度数顶点，n≥1. 则G的全部边可以排成n条开迹（欧拉通路），而且至少有n条开迹（欧拉通路）。

[证]G的2n个奇度顶点记为

$v_1, u_1, v_2, u_2, ..., v_n, u_n.$

在G中加入n条边$x_k=u_kv_k$, k=1, 2, 3, ..., n, 则得到一个图G^*, G^*可能是多重图, G^*是连通的且每个顶点的度都是偶数;

于是, 由定理6.5.1, G^*有欧拉回路Z;

在Z中去掉新加的边$x_1, x_2, ..., x_n$, 得到了G的n条欧拉通路, 也即G的全部边可以排成n条欧拉通路。

二、欧拉图的性质

假设G的全部边能排成q条欧拉通路，并且q<n；

则，不是这q条开迹中任一条端点的顶点，必是G的偶度顶点。

位于端点的顶点有2q个，因此，G至多有2q个奇度顶点；

由题干G恰有2n个奇度数顶点，因此，2n⩽2q，即n⩽q，这与假设q<n相矛盾，所以G的全部边至少排成n条开迹。

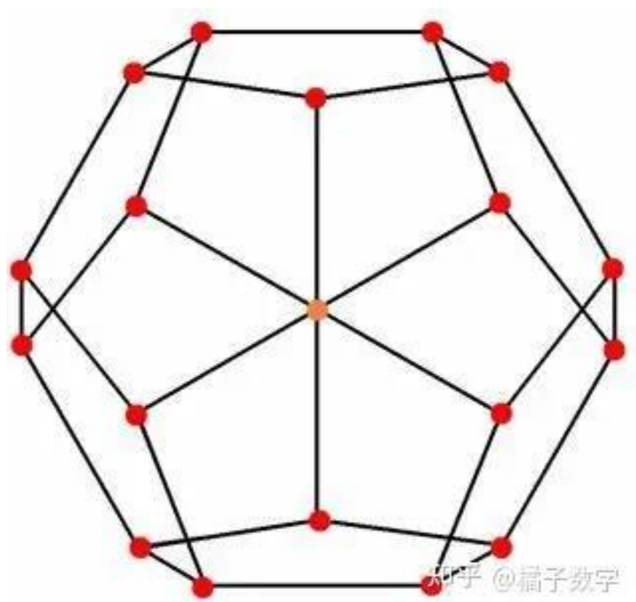
6.6 哈密顿图

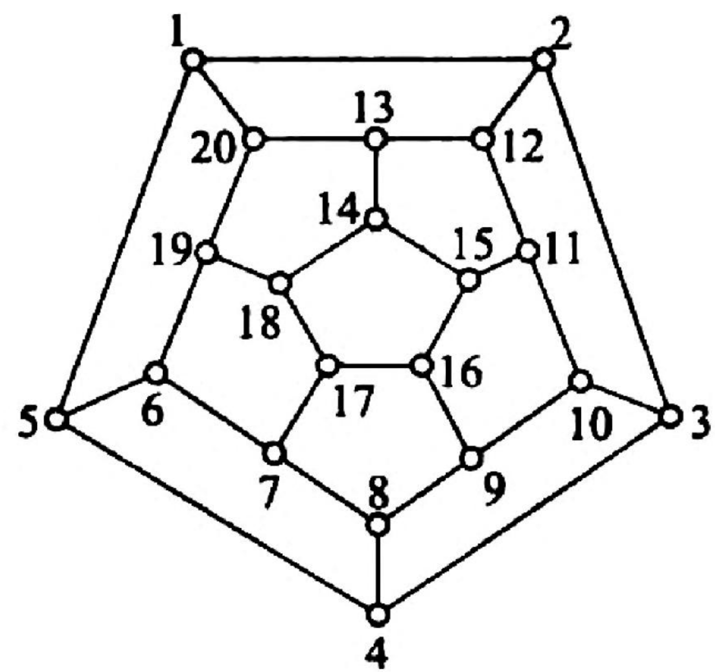
本节主要问题

一、哈密顿图的定义

二、哈密顿图的性质

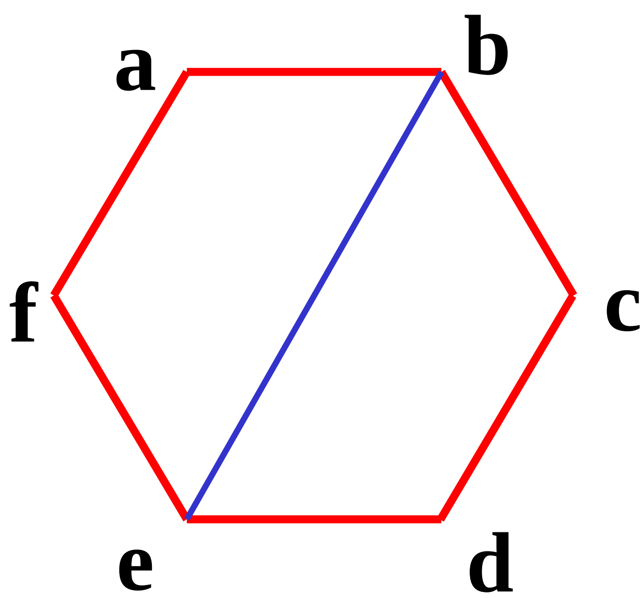
6.6 哈密顿图



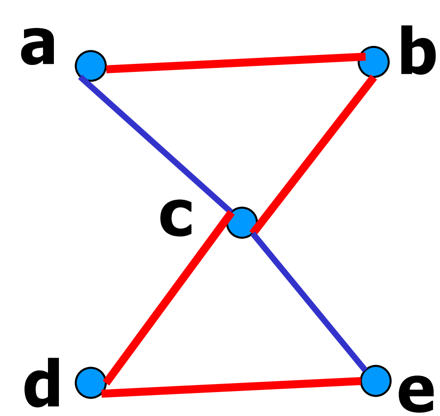


一、哈密顿图的定义

类似于确定一个图是否存在一条欧拉通路或欧拉回路的问题,哈密顿于1859年提出了确定一个图是否有一条生成路或生成圈的问题。



有生成圈。

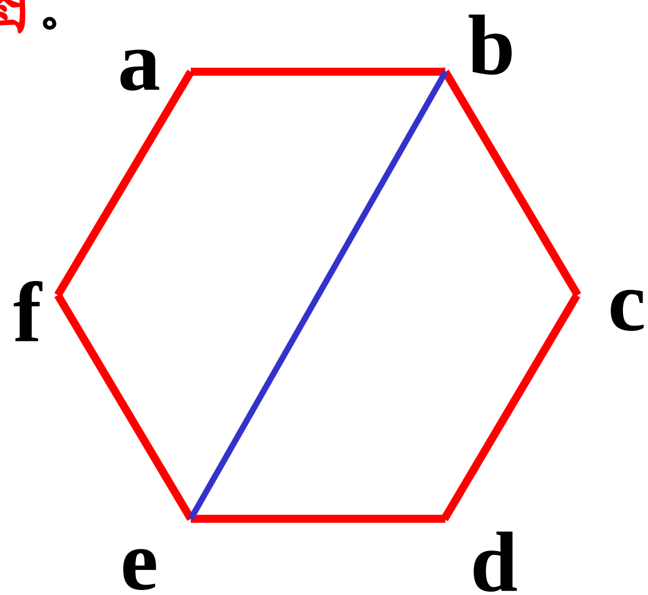


无生成圈。

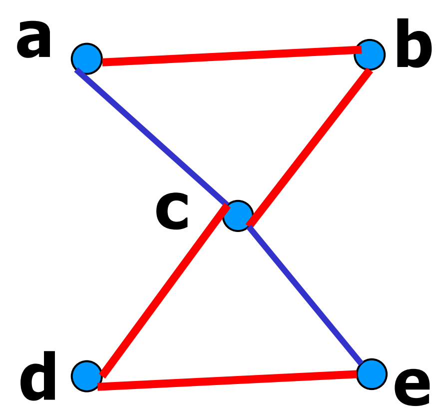
有生成路

一、哈密顿图的定义

定义6.6.1　图G的一条生成路称为G的哈密顿路（哈密顿通路），所谓G的生成路就是包含G的所有顶点的路。G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈（哈密顿回路），具有哈密顿圈（哈密顿回路）的图称为哈密顿图。



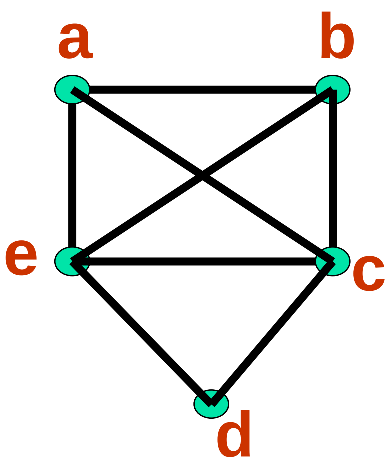
哈密顿图。



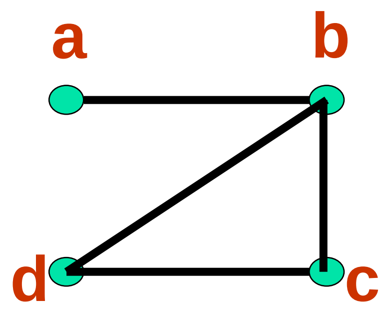
有哈密顿通路

一、哈密顿图的定义

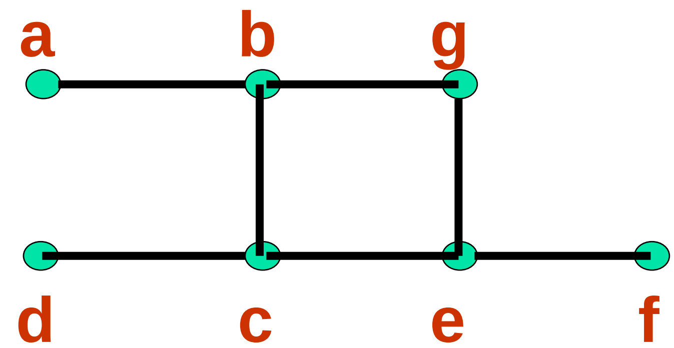
讨论下面的例子，是否存在哈密顿圈，路?



G_1



G_2



G_3

存在哈密顿回路

abcdea

不存在哈密顿回路

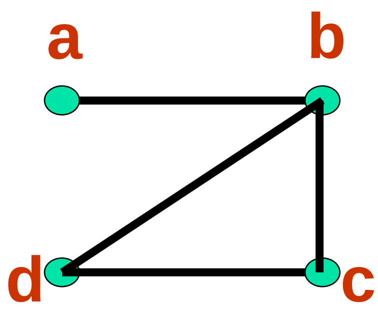
存在哈密顿通路:

abcd

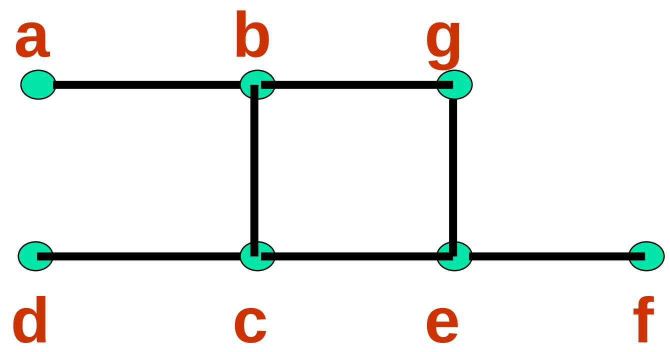
不存在哈密顿回路

不存在哈密顿通路

一、哈密顿图的定义



G_2



G_3

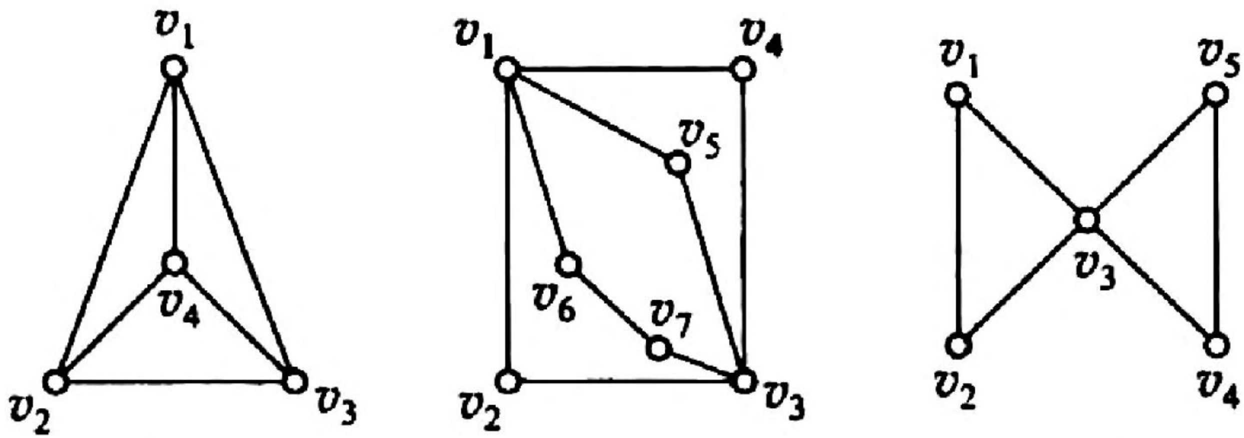
分析结果:

(1)哈密顿图是连通图且顶点度数不能小于2

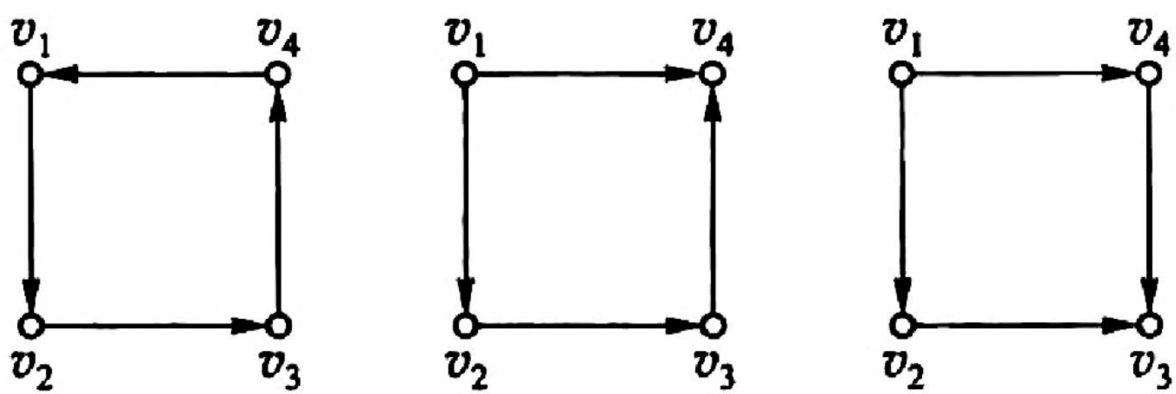
(2)有哈密顿通路的图是连通的，1度顶点不能多于2个。

一、哈密顿图的定义

讨论下面的例子，是否存在哈密顿通路和回路？



(a) (b) (c)

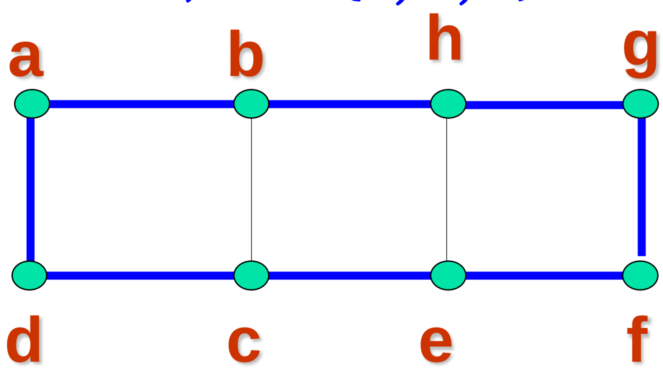


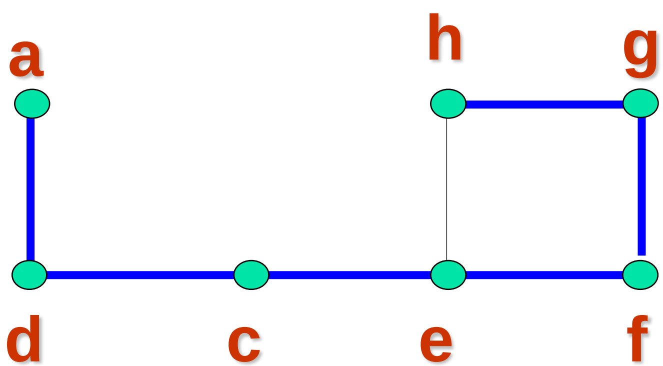
(d) (e) (f)

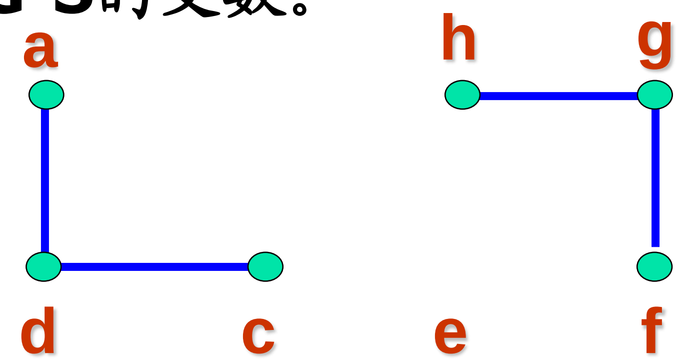
二、哈密顿图的性质

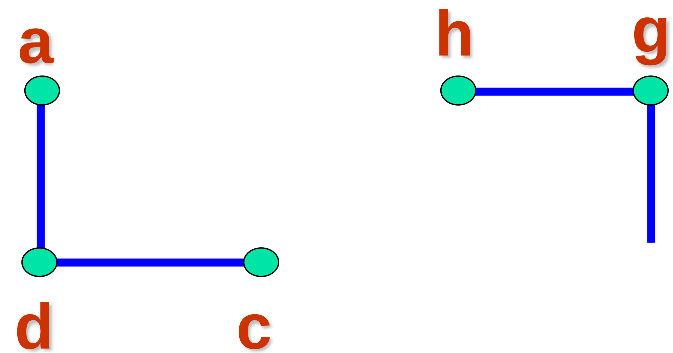
定理6.6.1 设G=(V,E)是哈密顿图,则对V的每个非空子集S,均有ω(G-S)≤|S|，其中G-S是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图,而ω(G-S)是图G-S的支数。

例如S={b, e, f}









ω(H-S) ≤ |S|

二、哈密顿图的性质

定理6.6.1　设$G=(V,E)$是哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有$\omega(G-S)\leqslant|S|$，其中G-S是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，而$\omega(G-S)$是图G-S的支数。

思路：　$\omega(G-S)\leqslant\omega(H-S)$　，　$\omega(H-S)\leqslant|S|$

[证]　设H是G的哈密顿回路，

则对于V的每个非空子集S，均有$\omega(H-S)\leqslant|S|$；

同时，H-S是G-S的一个生成子图，所以$\omega(G-S)\leqslant\omega(H-S)$，

因此有$\omega(G-S)\leqslant|S|$　。

二、哈密顿图的性质

定理6.6.2(Dirac定理)　设G是一个有p个顶点的图，$p \geqslant 3$. 如果$\delta(G) \geqslant p/2$，则G是一个哈密顿图.

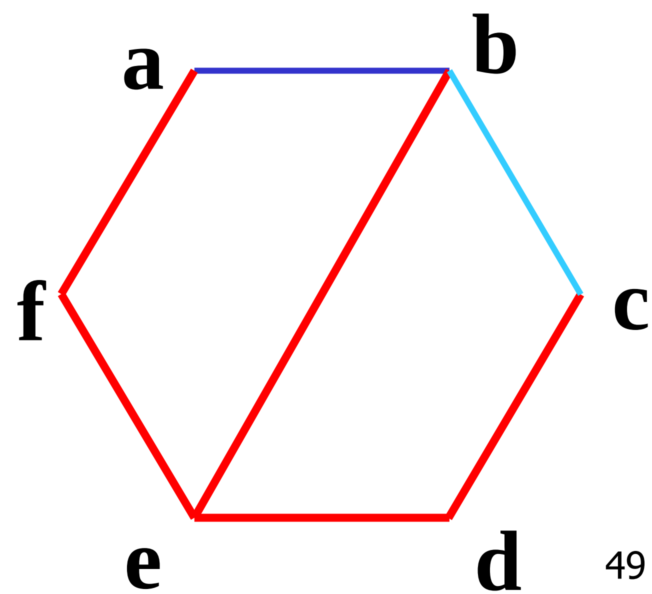
[证] 等价的命题:”设G是一个p个顶点的非哈密顿图，$p \geqslant 3$，则G中至少有一个顶点的度小于$p/2$。”

二、哈密顿图的性质

证明：任何一个p(p≥3)个顶点的非哈密顿图G，至少有一个顶点的度小于p/2。

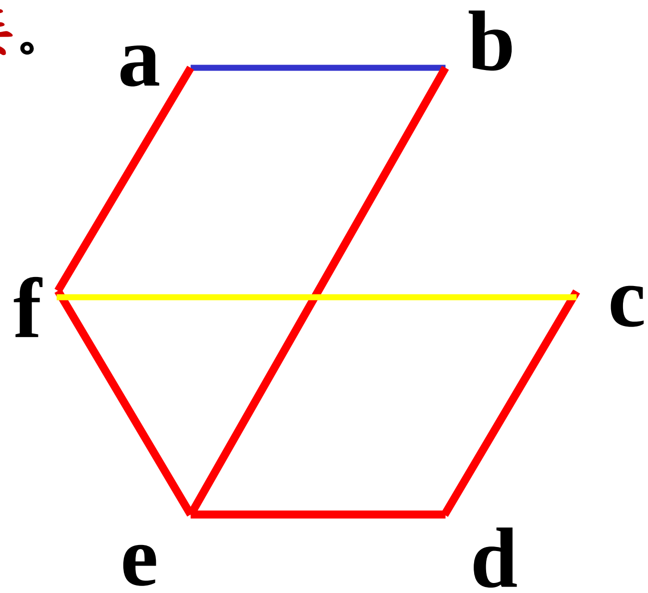
(1) 因为完全图是哈密顿图，因此G不是完全图；故G中至少有两个不邻接的顶点，把G中不邻接的两顶点间加一条边；如果图G不是哈密顿图，通过不断加边使之成为一个哈密顿图(经有限步后必得到一个哈密顿图)。

(2) 去掉最后加入的一条边，设这条边为v_1v_p，将得到的图记为G′，可见G′是一个有哈密顿路没有哈密顿圈的图，因此，只要证明G′中有一个顶点度小于 p/2即可。



二、哈密顿图的性质

(3) 由图G′的做法可知，G′中有一条起于v_1而终于v_p的哈密顿路；v_1-v_2-v_3-…-v_p，如果v_1与v_i邻接，则v_p不能与v_{i-1}邻接。



图G′

例如：左图G′有一条哈密顿通路

b-a-f-e-d-c

1-2-3-4-5-6

b与a,e邻接，则c不能与路上a或e前面的邻接

如果c与f邻接，则存在哈密顿回路

b-a-f-c-d-e-b

1-2-3-6-5-4-1

与G′不是哈密顿图矛盾。

二、哈密顿图的性质

(4)不妨设此生成路上各顶点依次为$v_1 v_2 ... v_p$,

设 $deg\ v_1=k$, 设G′中与v_1邻接的顶点为:

$v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$, 其中$2=i_1<i_2<...<i_k \le p-1$

这时路上顶点v_{i_r} (r=1, 2, . . . , k) 前面的顶点不能与顶点v_p邻接，否则G′有哈密顿圈$v_1 v_2 ... v_{i_r-1}$ $v_p v_{p-1} ... v_{i_r} v_1$；

因此：v_p至少与$v_1, v_2, ..., v_{p-1}$, 中的k个顶点不邻接，即$deg\ v_p \le p-1-k$。

由 $deg\ v_1=k$和$deg\ v_p \le p-1-k$可知

$degv_1+degv_p \le p-1$

因此v_1, v_p, 至少有一个度数小于p/2。

二、哈密顿图的性质

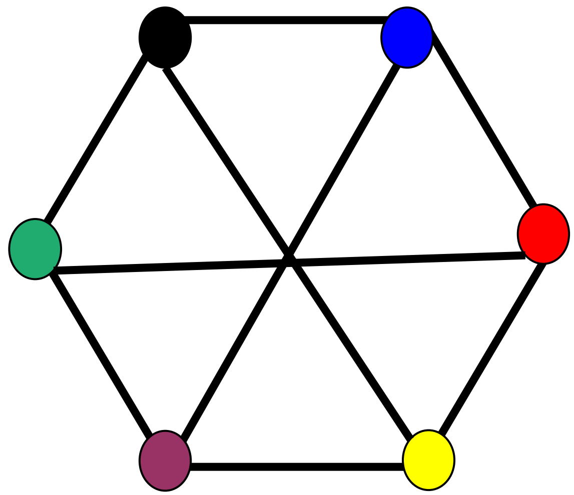
定理6.6.3　设G是一个有p个顶点的图，$p\geqslant 3$. 如果对图G的任意一对不邻接的顶点u和v均有$\deg u+\deg v\geqslant p$，则G是一个哈密顿图.

只需证明有$p(p\geqslant 3)$个顶点的每个非哈密顿图中至少有两个不邻接的顶点u和v，使得$\deg u+\deg v\leqslant p-1$即可。此过程已经包含在了定理6.6.2的证明之中了，所以本定理得证。

定理6.6.4　设G是一个有p个顶点的图，$p\geqslant 3$. 如果对图G的任意一对不邻接的顶点u和v均有$\deg u+\deg v\geqslant p-1$，则G有一个哈密顿路或生成路.

二、哈密顿图的性质

例6.6.3　某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布，双色布中，每一种颜色至少和其他3种颜色搭配，证明：可以挑出3种不同的双色布，它们含有所有6种颜色。



二、哈密顿图的性质

[证]

(1) 6个不同的点分别表示6种不同颜色的的纱;

(2) 两个点间联一条线当且仅当，这两点所代表的颜色的纱织成一种双色布;

(3) 由于每种颜色的纱至少和三种其它颜色的纱搭配，所以G的每个顶点的度至少是3;

由定理6.6.2，G有哈密顿圈，圈上有6条边，对应了6种不同颜色的双色布，间隔取出3条边，它们包含了全部6种颜色。