第九章：平面图与图的着色

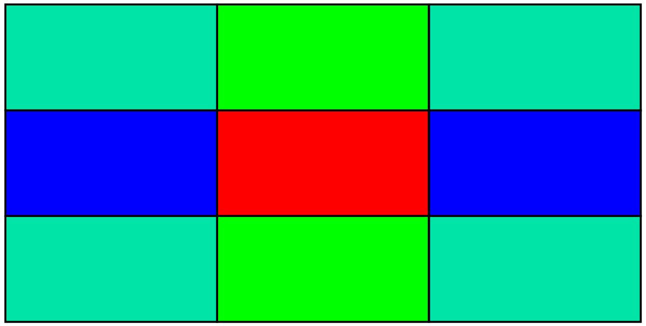
9.1 平面图及其欧拉公式

9.2 非哈密顿平面图

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

9.4 图的顶点着色

*9.5 图的边着色



9.4 图的顶点着色

本节主要内容

1、图的顶点着色的定义

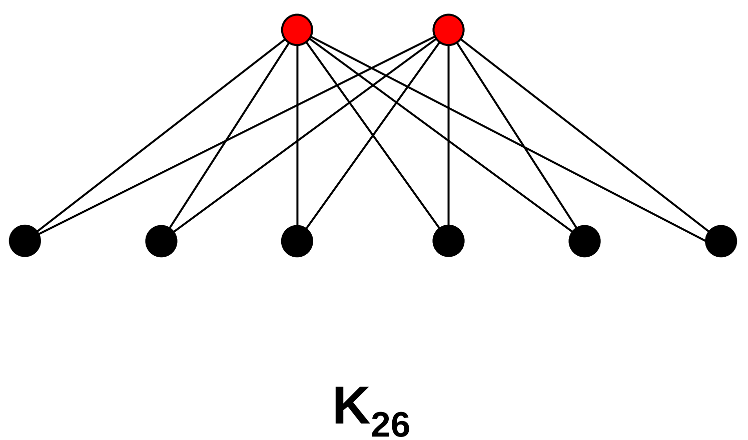
2、图的色数的定义

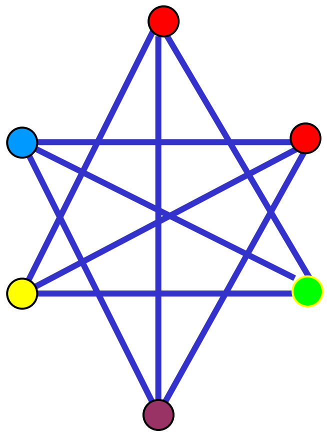
3、图的顶点着色的性质

4、图的顶点着色的应用

1、图的顶点着色的定义

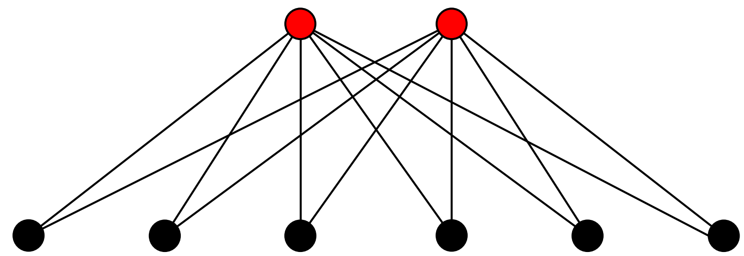
定义9.4.1 图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个邻接的顶点有同一颜色。





图的一种顶点着色是对图的顶点的一种分组，着同一颜色的为一组，要求顶点间有边的不能分在一组。

1、图的顶点着色的定义



图G

几个关于顶点着色的术语。

（1）图G的一个n—着色是用n种颜色对G的顶点着色;

（2）若图G=(V,E)的顶点已着色，则着同一颜色的那些顶点之集称为G的一个色组;

（3）同一色组内的各顶点是不邻接的，这样的顶点集合称为G的一个顶点独立集;

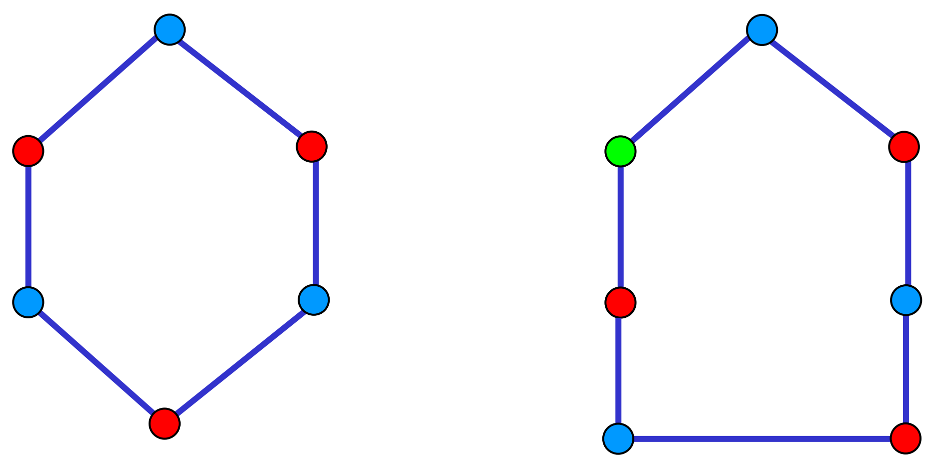
（4）如果G有一个n着色,则G的顶点集V被这种n着色划分为n个色组。

2、图的色数的定义

定义9.4.2 图G的色数是使G为n—着色的n的最小值，图G的色数记为 κ(G)，κ(G)≤n，则称G是n—可着色的，若 κ(G)=n，则称G是n色的。

若G是偶数个顶点的圈C_{2n}，则 $\kappa(C_{2n})=2$，

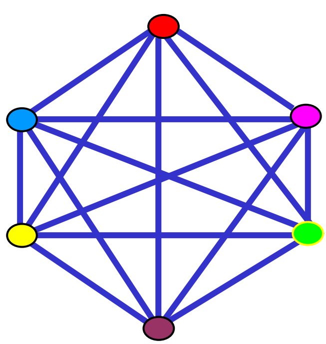
若G是奇数个顶点圈C_{2n+1}，则 $\kappa(C_{2n+1})=3$。



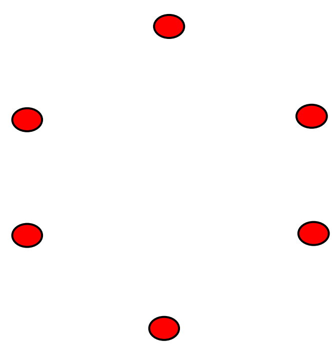
2、图的色数的定义

定义9.4.2 图G的色数是使G为n—着色的n的最小值，图G的色数记为 $\kappa(G)$，$\kappa(G)\le n$，则称G是n—可着色的，若 $\kappa(G)=n$，则称G是n色的。

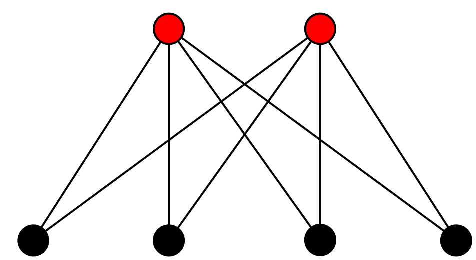
$\kappa(K_p)=p$，　$\kappa(K_p{}^c)=1$，　$\kappa(K_{m,n})=2$，



K_6



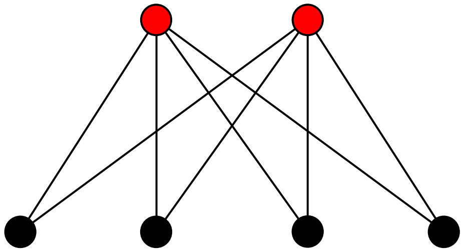
$K_6{}^c$



$K_{2,4}$

9.4 图的顶点着色

定理9.4.1 一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



偶图

一个图是可双色的当且仅当是偶图。

偶图的充分必要条件是它的圈的长度都是偶数。

9.4 图的顶点着色

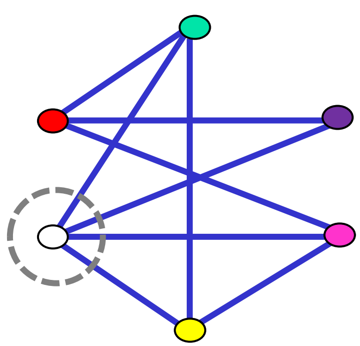
定理9.4.2 设Δ=Δ(G)为图G的顶点度的最大值，则G是(Δ+1)—可着色的.

[证] 对顶点数p用归纳法

显然，当p=1成立，

假设p=k时定理成立，(Δ+1)可着色

今设G是一个有p=k+1个顶点的图，



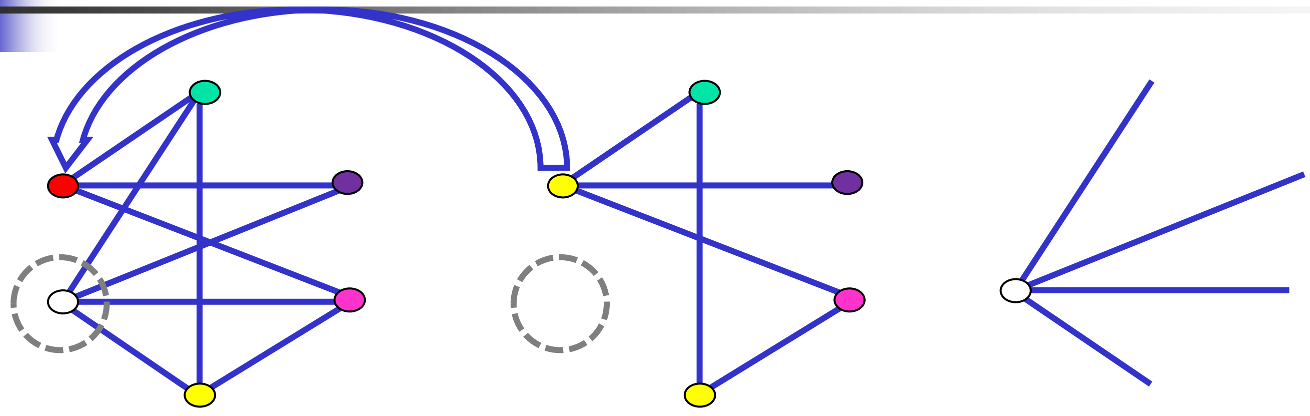
p=6

Δ(G)=4

则可用Δ(G)+1=5着色

图G

9.4 图的顶点着色



图G

从G中任意去掉一个顶点v，则G−v有k个顶点，

$\Delta(G-v) \leqslant \Delta(G)$

由归纳假设G−v是$(\Delta+1)$—可着色的，

观察到在G中与v邻接的顶点最多有Δ个，与v邻接的顶点最多用去Δ种颜色，剩下一种给顶点v本身着色即可。

9.4　图的顶点着色

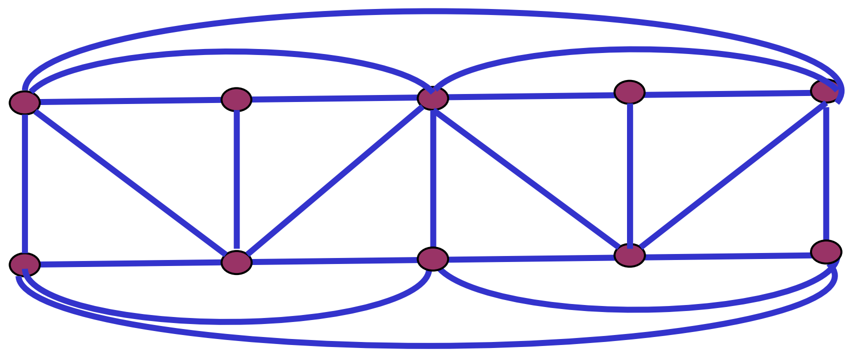
定理9.4.4 每个平面图都是6可着色的

[证] 对平面图的顶点数p用归纳法;

如果顶点数小于7,显然是6可着色的;

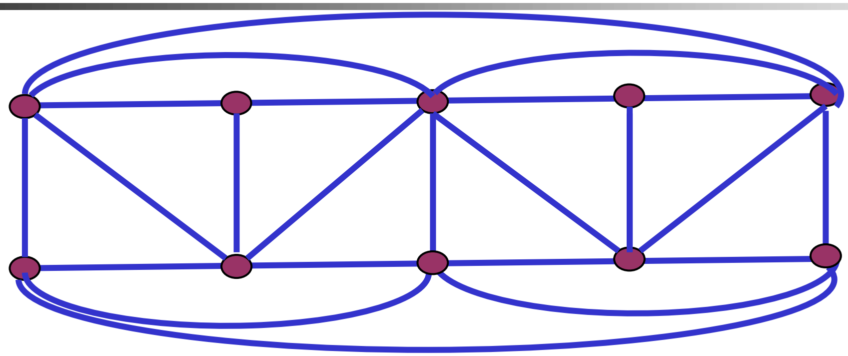
假设当p=k时的平面图是6可着色的,只需证对有p=k+1时平面图也是6可着色的即可;

设G是一个p=k+1的平面图;



平面图G

9.4 图的顶点着色


平面图G

由推论9.1.6知G有顶点v, $\deg v \leqslant 5$,

G-v是一个p=k的平面图,

由归纳假设，G-v是6可着色的，与v邻接的顶点至多5个，所以与v邻接的顶点着色时至多用了5种色，

用另一种未用的颜色对v着色即得G的一个6着色，因此，G是6可着色的。

推论9.1.6 每个平面图G中顶点度的最小值不超过5, 即$\delta(G) \leqslant 5$

9.4 图的顶点着色

定理9.4.5 每个可平面图是5可着色的

[证]对可平面图的顶点数进行归纳证明;

当$p \leqslant 5$时,定理显然成立;

假设$p=k$的可平面图都是5可着色的,证明$p=k+1$时可平面图也是5可着色的;

设G是一个$p=k+1$的可平面图,由推论9.1.6知G中有一个顶点v使$\deg v \leqslant 5$,于是,G-v是一个有k个顶点的可平面图,由归纳假设,G-v是5可着色的;

推论9.1.6 每个平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \leqslant 5$

9.4 图的顶点着色

1、如果$\deg v \leqslant 4$，则必有一种颜色，在$G-v$的一种5着色时，对与v邻接的顶点着色中未用此色，

用此色对顶点v着色便得到G的5着色；

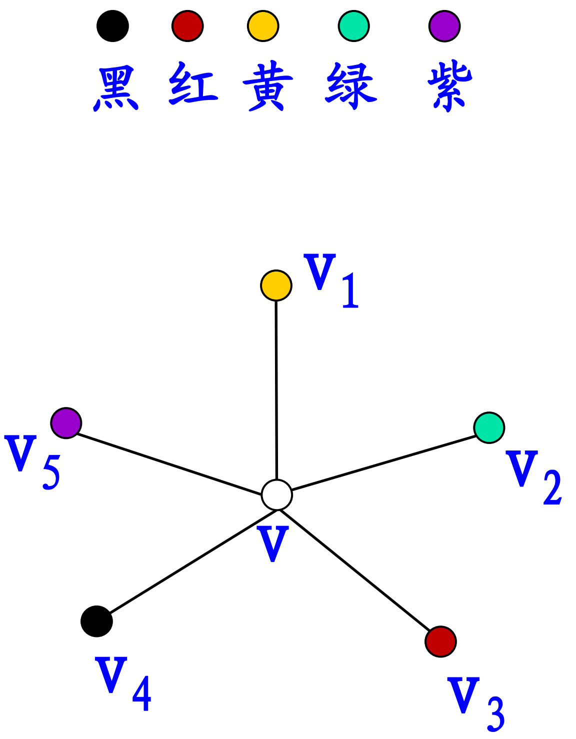
2、$\deg v=5$且对$G-v$的5着色中，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5分别着5种颜色c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。

9.4 图的顶点着色

例如：如图所示，用5种颜色给图染色，现在顶点v周围5种颜色已经用完了。

证明思想是**替换某个顶点的染色**。

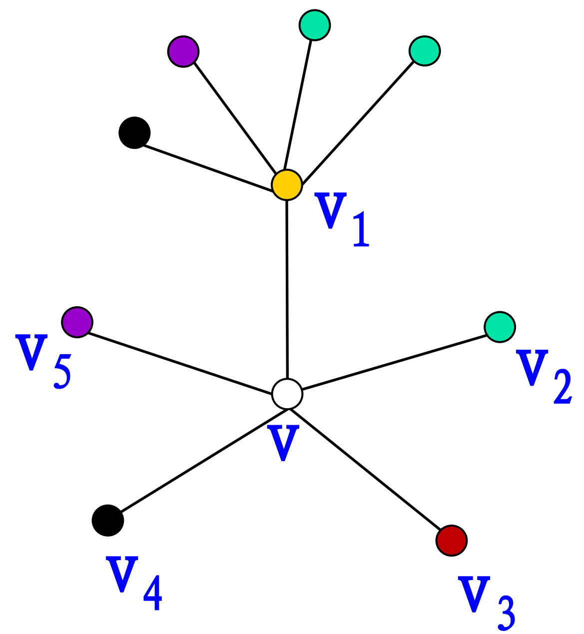
例如：如果能把v_1的当前颜色黄色换成红色，则v染成黄色即可。



9.4 图的顶点着色

v_1换成红色的过程中有以下三种情况:

(1) v_1不与红色顶点相邻。v_1直接换成红色。

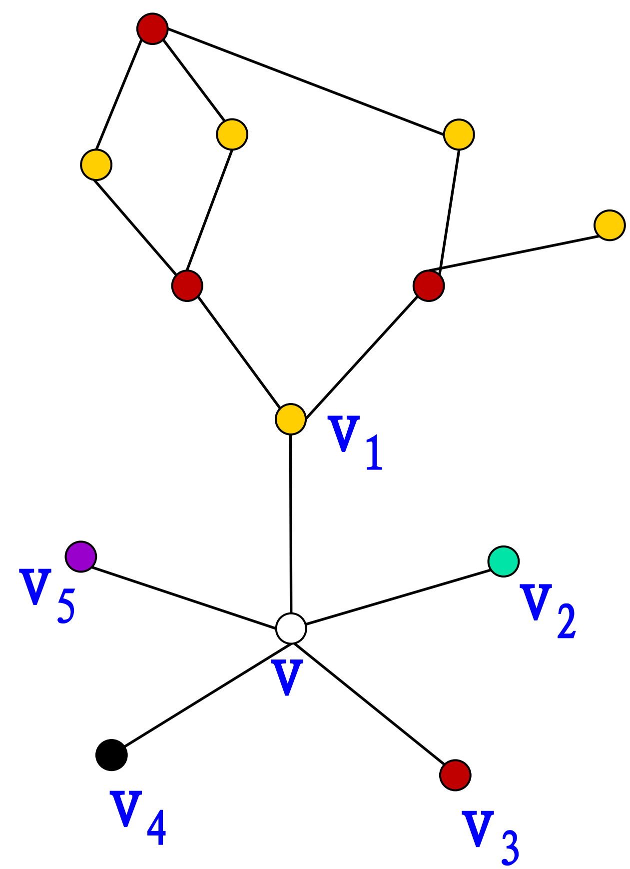


9.4 图的顶点着色

v_1换成红色的过程中有以下三种情况:

(2) v_1与红色顶点相邻，如图所示这种情况。

把包含v_1的红黄支中两种颜色互换。



9.4 图的顶点着色

v_1换成红色的过程中有

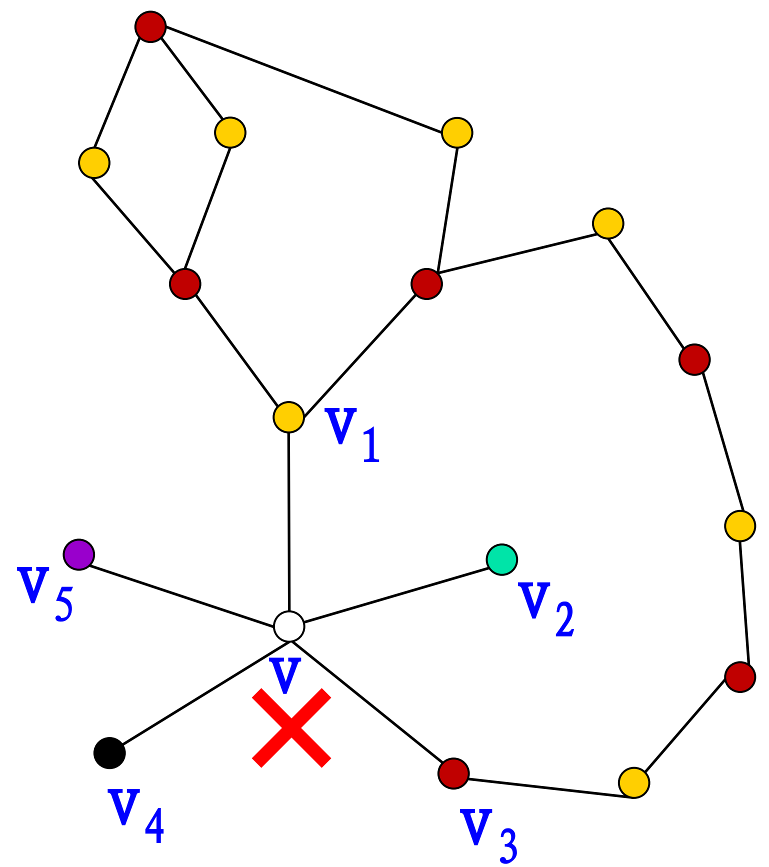
以下三种情况:

(3) 如图所示:

包含v_1的红黄支与包含v_3的红黄支是连通的。

红黄色互换的时候

v_1换成了红色，v_3又换成了黄色，此时v无法染成黄色。



9.4 图的顶点着色

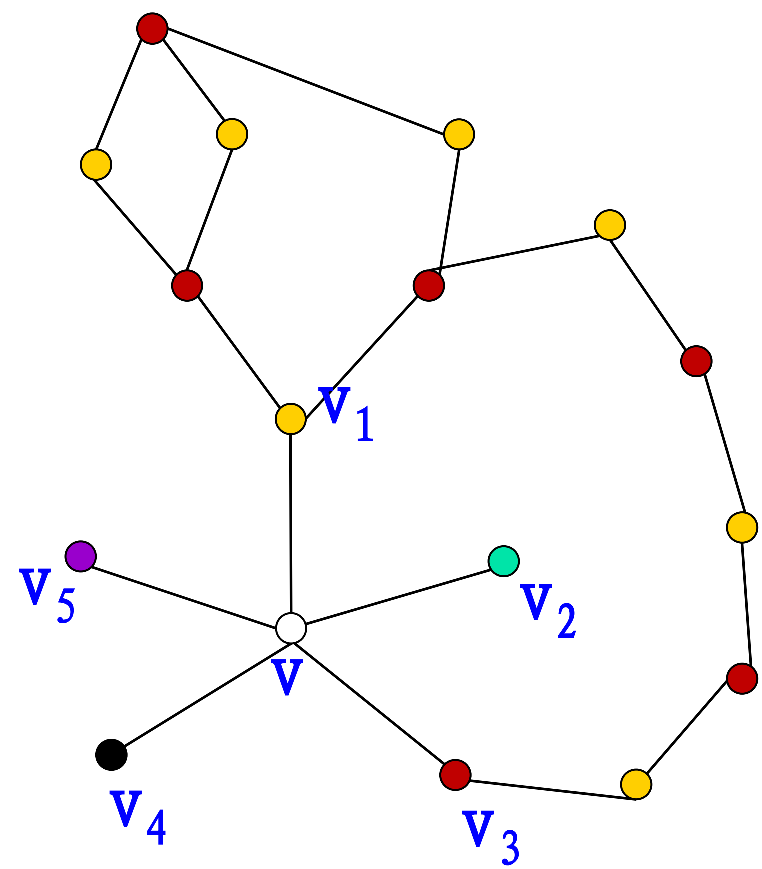
如果包含v_1的红黄支与包含v_3的红黄支是连通的。

如图所示：

则考虑v_2的绿色和v_4的黑色互换。

则会不会出现红黄色互换的第三种情况?

这时又用到了平面的图的性质。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.5 每个可平面图是5—可着色的

[证]对可平面图的顶点数进行归纳证明;

当$p\leqslant 5$时,定理显然成立;

假设$p=k$的可平面图都是5—可着色的,证明$p=k+1$时可平面图也是5—可着色的;

设G是一个$p=k+1$的可平面图,由推论9.1.6知G中有一个顶点v使$\deg v\leqslant 5$,于是,G-v是一个有k个顶点的可平面图,由归纳假设,G-v是5可着色的;

9.4 图的顶点着色

1、如果$\deg v \leqslant 4$，则必有一种颜色，在$G-v$的一种5着色时，对与v邻接的顶点着色中未用此色，

用此色对顶点v着色便得到G的5-着色；

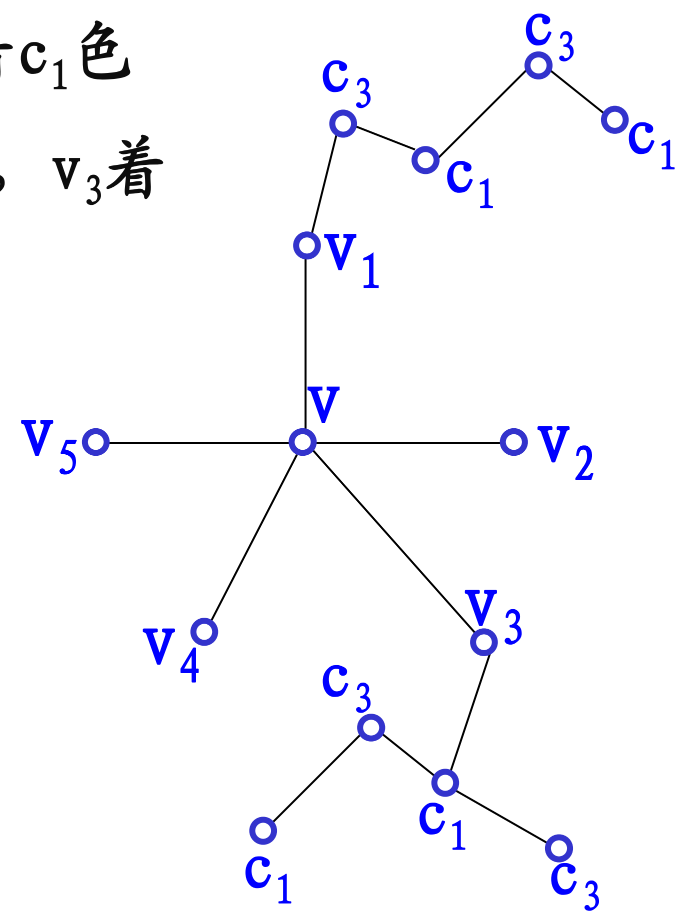
2、$\deg v=5$且对$G-v$的5-着色中，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5分别着5种颜色c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。

9.4 图的顶点着色

令G_{13}为G-v的一个子图，其顶点为着c_1色或c_3色的顶点之集V_{13}（v_1着色为c_1，v_3着色为c3），G_{13}就是V_{13}导出子图：

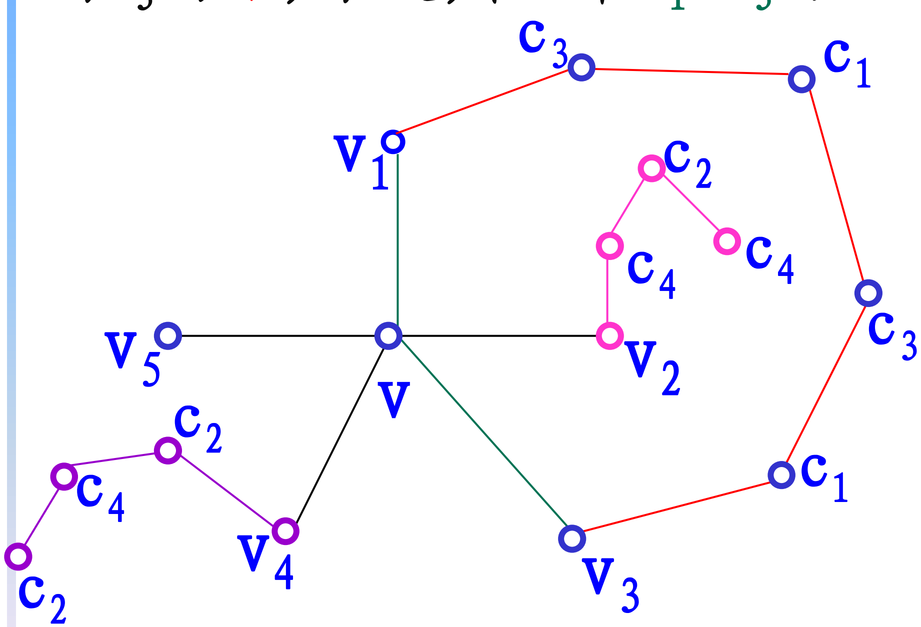
(1) 若v_1和v_3在G_{13}的不同支中，则在含v_1的支中交换两种色，即原着c_1色顶点改着c_3色，原着c_3色的顶点改着c_1色，

然后用c_1给顶点v着色，于是得到G的一种5—着色。



9.4 图的顶点着色

2、若v_1和v_3在G_{13}的同一个支中，则在G_{13}中有一条从v_1到v_3的**路**，于是，在G中v_1vv_3与这条路合起来形成一个圈，



这个圈或把v_2圈在圈内或把v_4和v_5圈在内，

任一种情况下，不存在联结v_2和v_4的路且路上各顶点或着c_2或着c_4色，

若令G_{24}表示G-v的由着c_2或c_4色的顶点导出的子图，则v_2与v_4属于G_{24}的不同支里，

交换G_{24}的含v_2支中着c_2色顶点与着c_4色顶点的颜色，然后，用c_2色为v着色得到G的一个5着色。

9.4　图的顶点着色

4色猜想　每个可平面图是4可着色的。

定理9.4.6　每个可平面图是4可着色的。

9.4 图的顶点着色

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为k，则G 中至少有多少条边？

A. k(k-1);

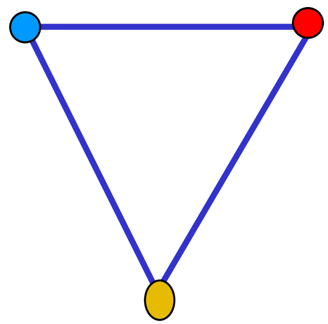
B. k(k+1);

C. k(k+1)/2;

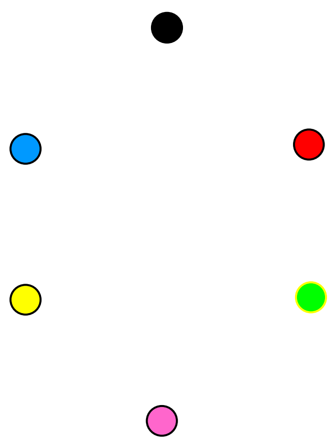
D. k(k-1)/2。

9.4　图的顶点着色

至少1条边



至少3条边



6×5/2 ，即k(k−1)/2

9.4 图的顶点着色

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为k，则G 中至少有多少条边?

A. k(k-1);

B. k(k+1);

C. k(k+1)/2;

D. k(k-1)/2。 √

任何两种颜色之间都应该有边，否则就可以用一种颜色代替。

图的顶点着色的应用

信号灯数设置问题:

例如：交通信号灯，十字路口要设置多少种颜色的信号灯，才能保证车辆按信号行走相互之间不影响。

（1）建模

（2）算法

图的顶点着色的应用

以如图这样一个简单十字路口为例。

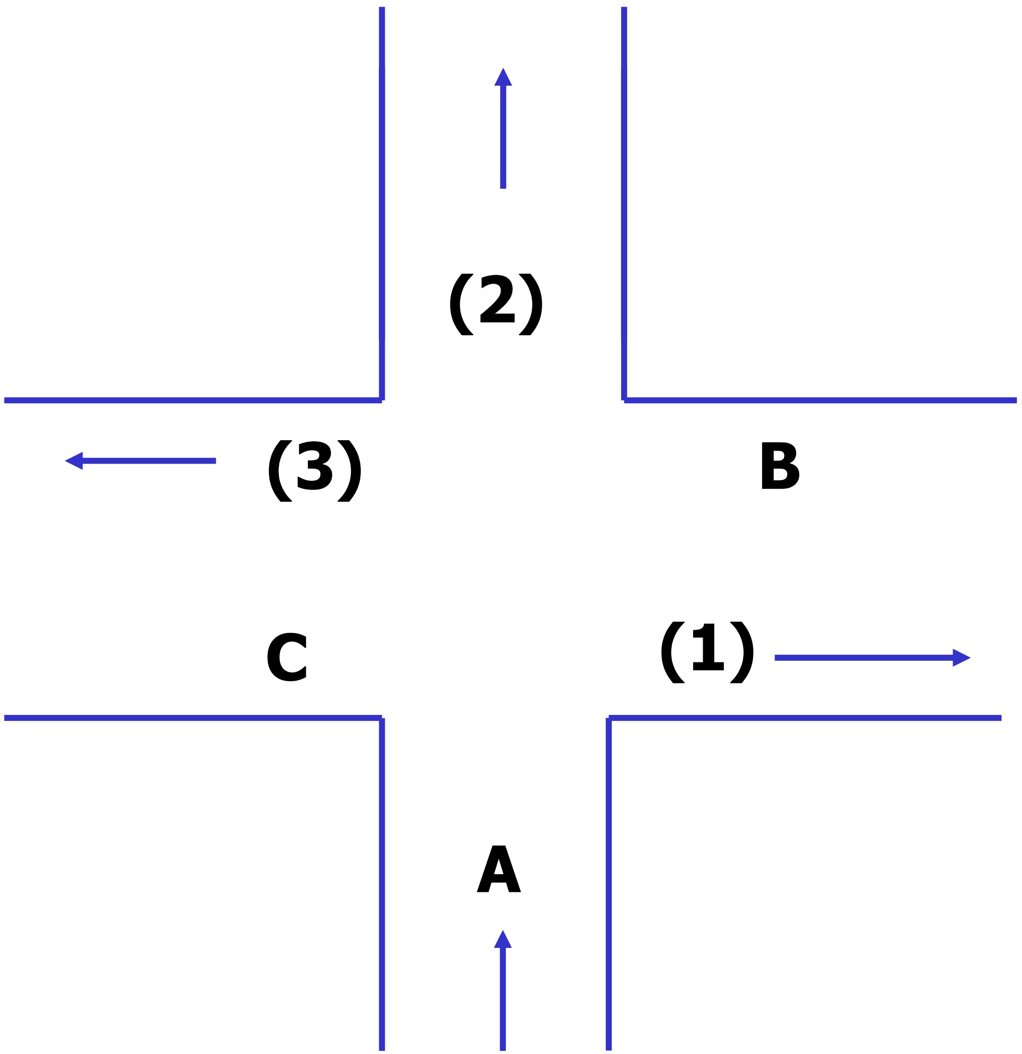
南北方向为单行线

东西方向为双向

其中A，B，C表示车辆来的方向；

(1)，(2)，(3)表示车辆去的方向。

两种符号合起来表示路线。

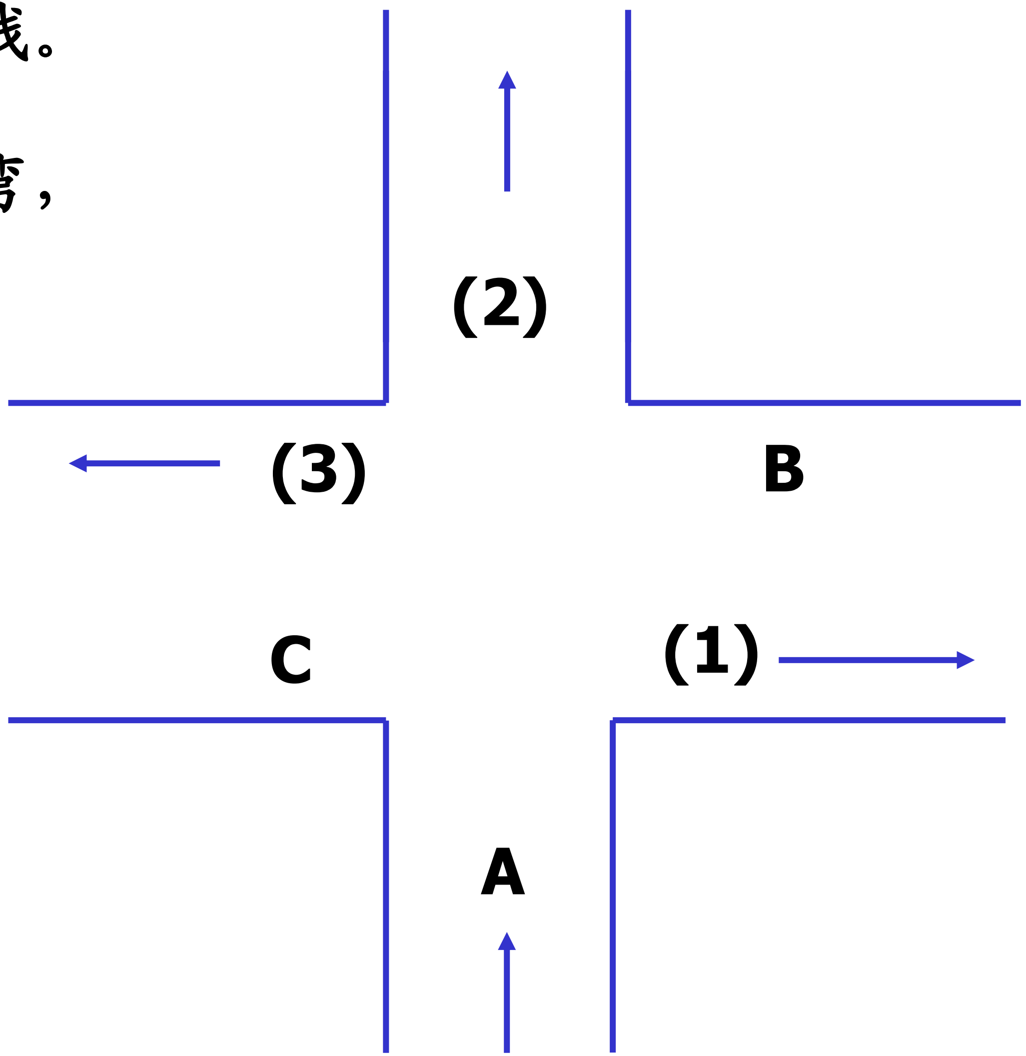


图的顶点着色的应用

例如：A(1)是一种路线。

规定只能直行，左转弯，
右转弯

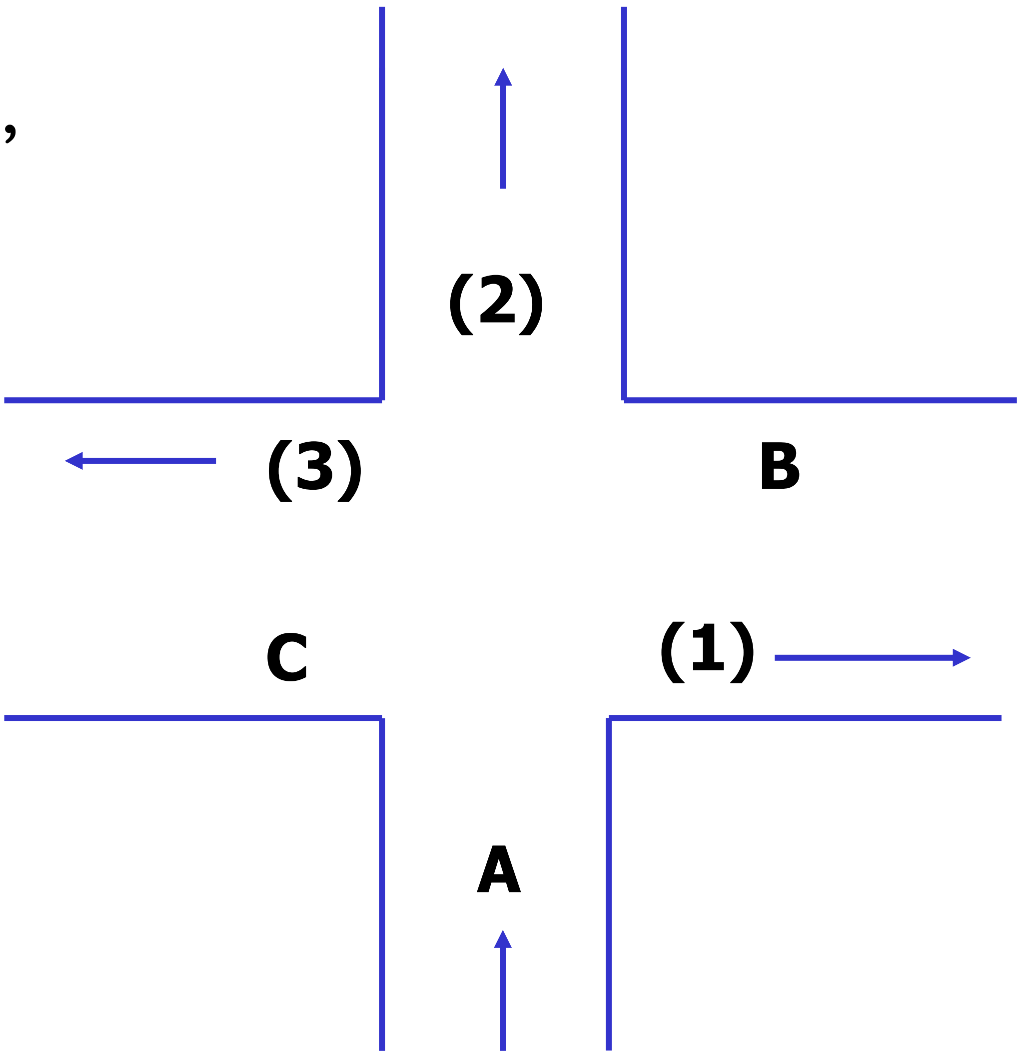
总的路线有：
A(1)，A(2)，A(3)，
B(2)，B(3)
C(1)，C(2)



图的顶点着色的应用

路线共有7种:
A(1), A(2), A(3), B(2),
B(3), C(1), C(2)

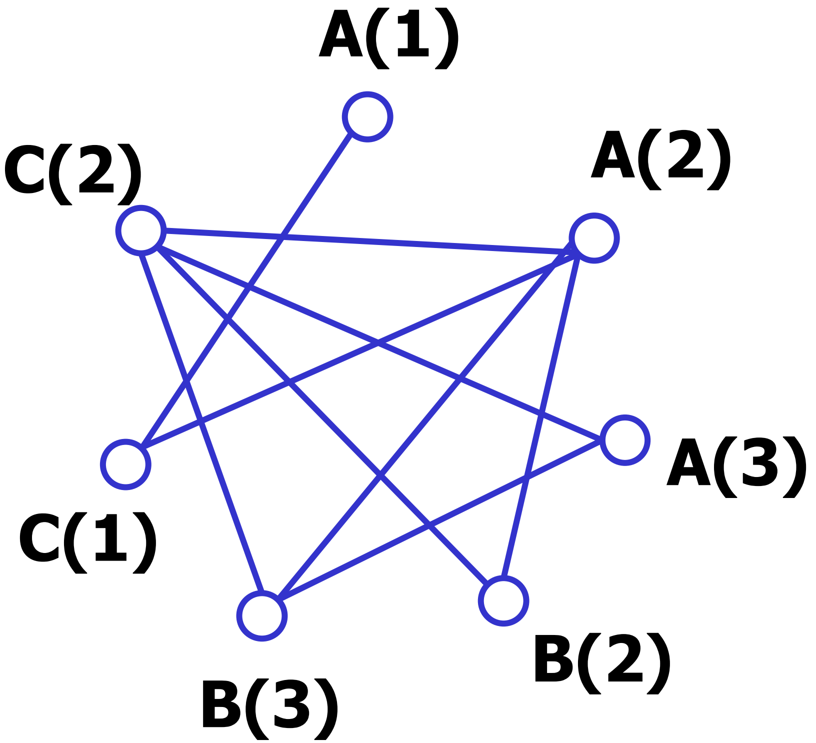
每条线路作为顶点，如果两条线路有可能造成冲突，就在两条线路之间连一条边。
例如：A(1)与C(1)冲突，就连边，
C(1)和B(2)不冲突，就不连边，这样就形成一个图。



图的顶点着色的应用

原问题化为图论的顶点染色问题。

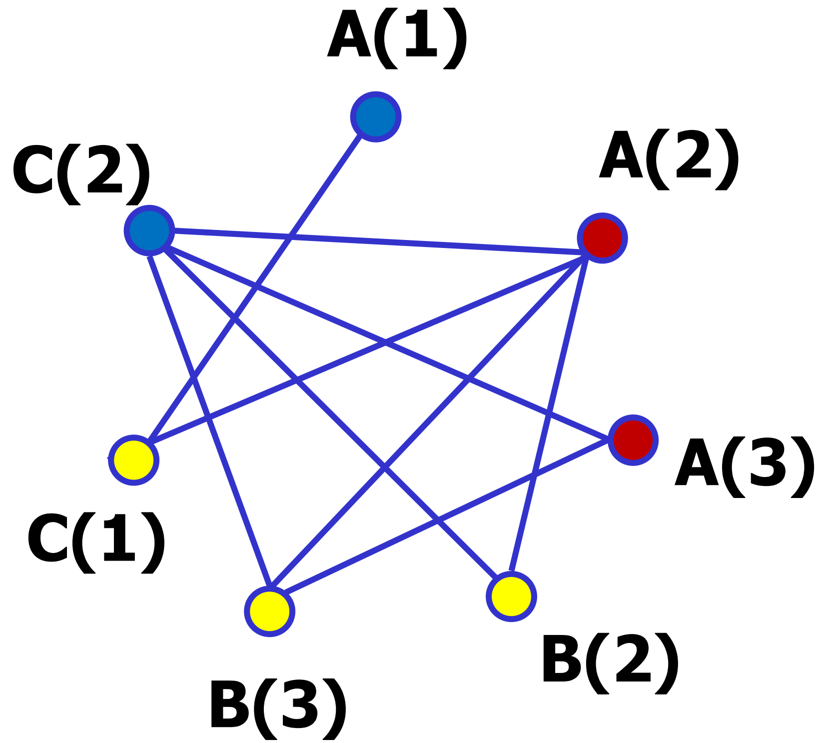
有边相连的顶点间不能用同一种颜色染色。



图G

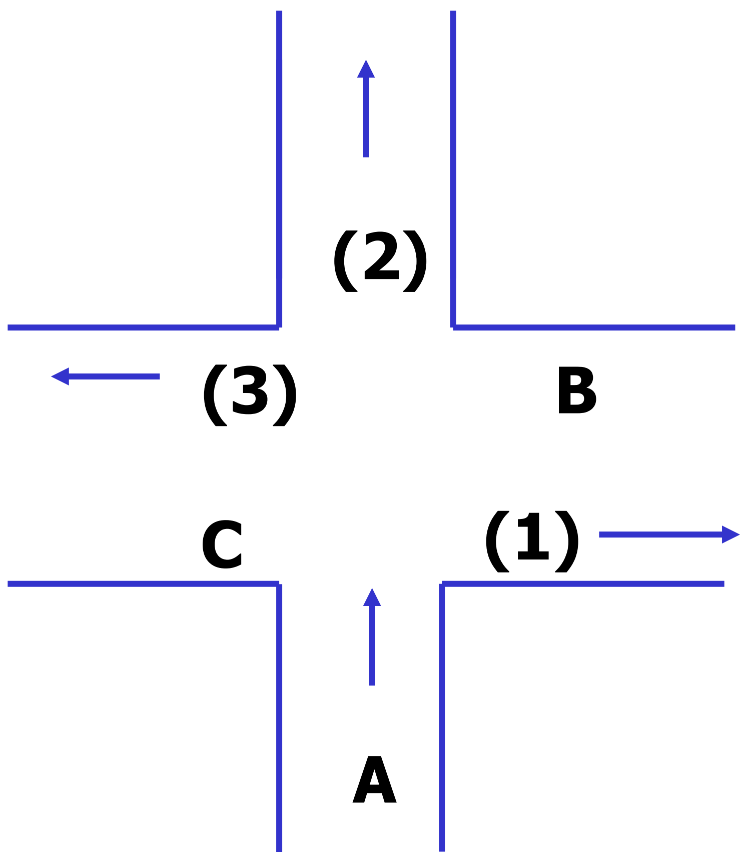
图的顶点着色的应用

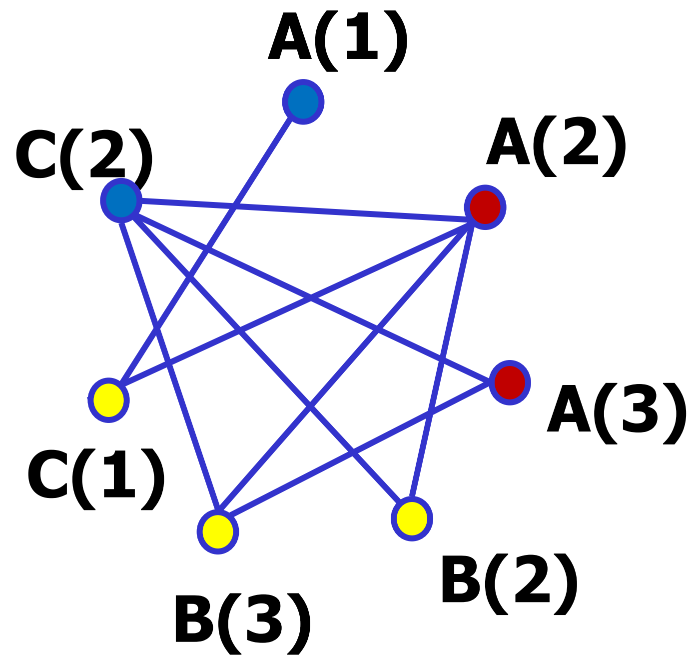
如图是一种染色方案。
用三种信号灯，例如：
红灯亮时，只允许A(2)和A(3)两种线路走，不会产生冲突。



图G

图的顶点着色的应用





看一看分组情况

图的顶点着色的应用

图的染色问题是组合问题。

最优算法是穷举法:

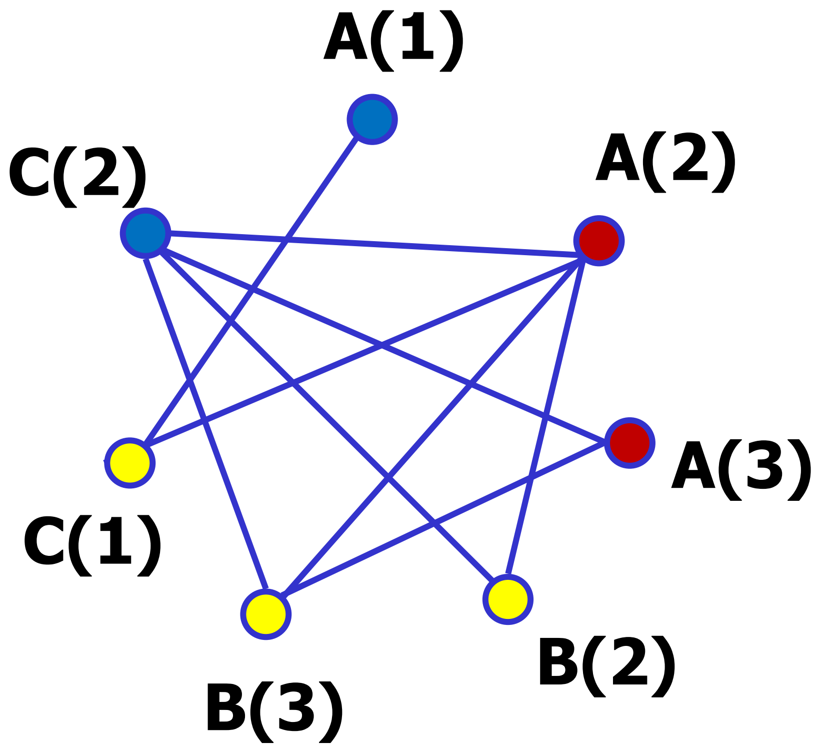
（1）先用一种颜色看看是否可以。

（2）一种颜色不行，再试用两种颜色是否行。

也就是顶点分成两组的可能性都列出来，看看有没有同组中顶点没有边的方案。

(3) 试三种颜色。

…… …… ……



图G

图的顶点着色的应用

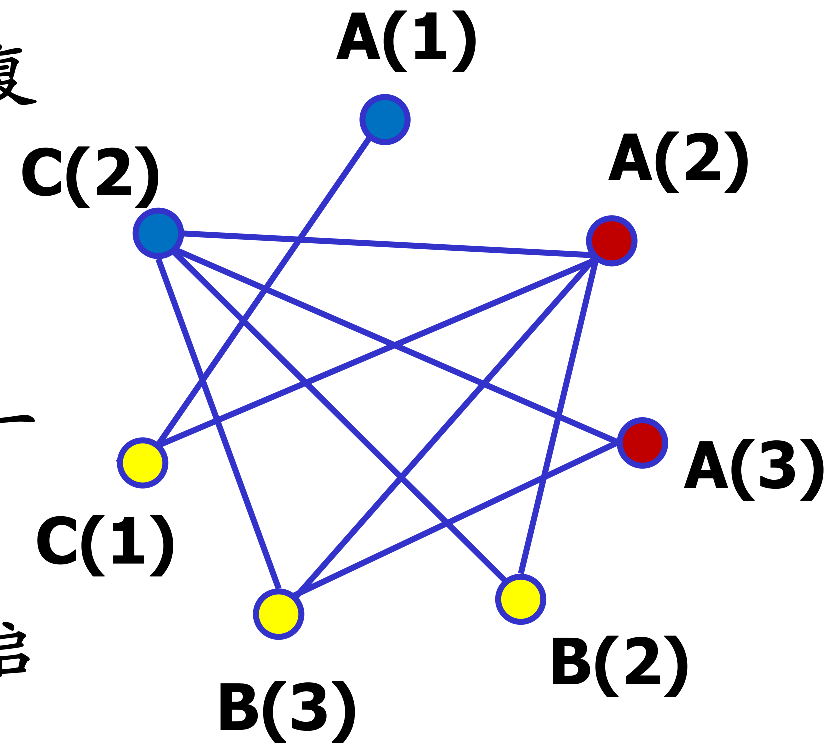
图的染色问题的最优解的时间复杂性很大。

是指数级的。

与汉诺塔问题的时间复杂性是一样的。

一般当顶点数比较大时都采用启发式算法:

下面介绍贪心算法（贪婪算法）。



图G

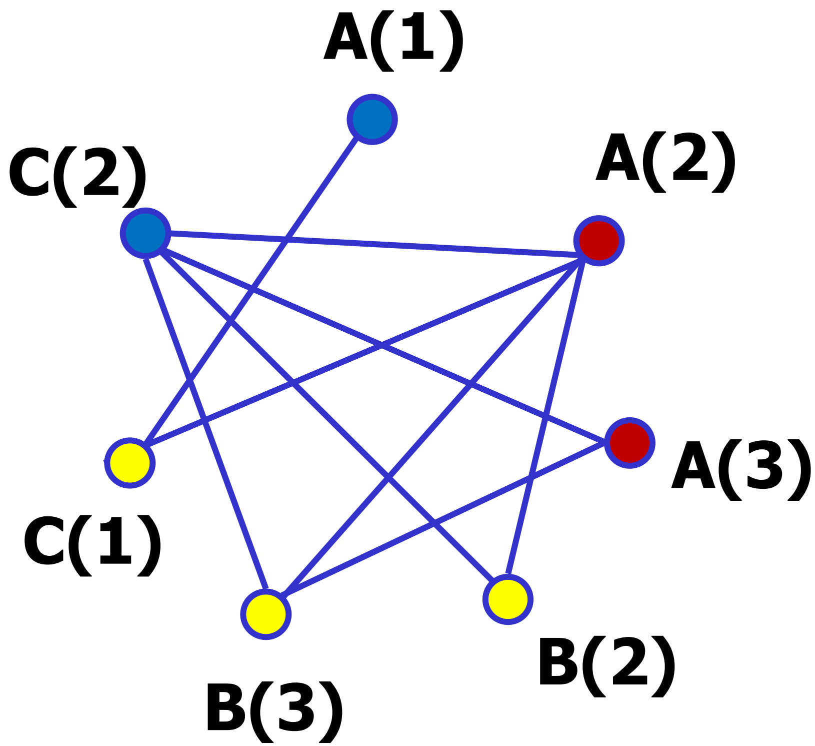
图的顶点着色的应用

图的顶点染色的贪心算法:

(1) 任选一种颜色1，任选一个顶点a，给a进行染色。

(2) 任选一个与a不连接的顶点b, 用颜色1染色。

(3) 任选一个既不与a连接也不与b连接的顶点c, 用颜色1染色，这样进行下去，直到不能再用颜色1染色为止。



图G

选第二种颜色，重复上面的过程。

选第三种颜色，重复上面的过程。……

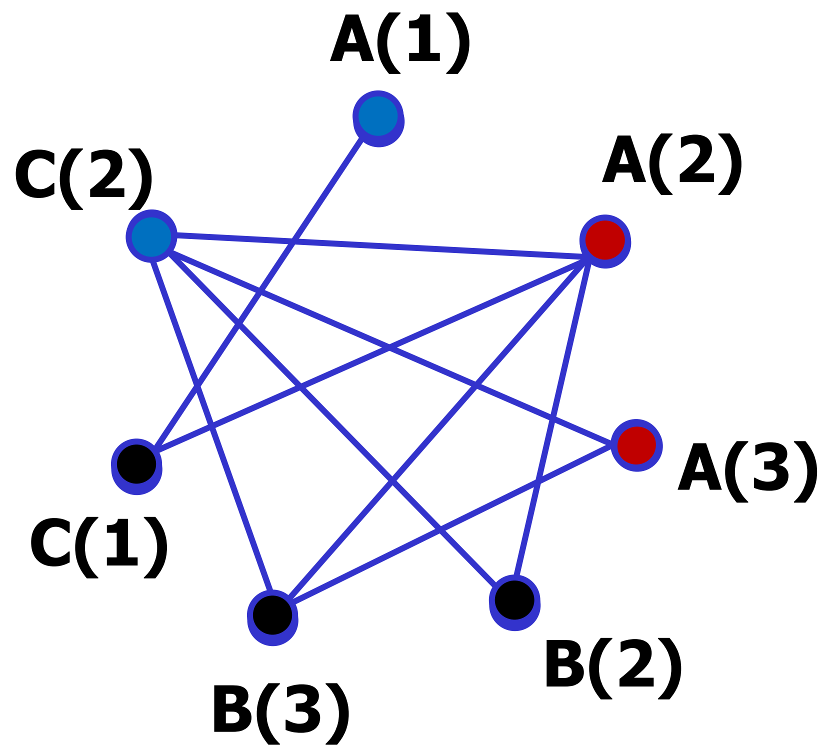
图的顶点着色的应用

图的顶点染色的贪心算法：

(1) 选一种颜色（例如蓝色），任选一个没染色的顶点（例如A(1)），用蓝色给A(1)染色。

(2) 任选一个与A(1)不连接的没染色的顶点(例如C(2))，用蓝色给C(2)染色。

(3) 任选一个既不与A(1)连接也不与C(2)连接没染色的顶点，如果找不到，选第二种颜色，例如：黑色。重复第一步。



图G

习 题

1(p294)、设G是一个没有三角形的平面图，应用欧拉公式证明G中有一个顶点v使得$\deg v \leqslant 3$。

证明：设$G=(p,q)$是没有三角形的平面图，

在没有三角形的图中，每个圈的长都是4时，边数最多

由推论9.13，G的每个面都是长为4的圈时，$q=2p-4$

因此在本题中$q \leqslant 2p-4$

假设每个顶点的度都大于3，也就是大于或等于4

则$2q \geqslant 4p$，也就是$q \geqslant 2p$

这与$q \leqslant 2p-4$矛盾

习 题

2(p294)、设G是一个没有三角形的平面图，应用数学归纳法证明G是4可着色的

证明　对顶点数p用归纳法，

当$p=1, 2, 3, 4$时显然成立，

假设当$p=k$时定理成立。

当$p=k+1$时。

存在一个顶点v，$\deg v \leqslant 3$，　令$G_1=G-v$

由归纳假设G_1是4可着色的，

因此：若在G中考虑，则与v邻接的顶点数最多有3个

因此：与v邻接的顶点最多用去3种颜色

用剩余一种颜色给v着色便得到G的一种4着色。

2015-2016集合论有关复试题

10.含有**5**个顶点、**3**条边的不同构的**(**简单**)**无向图有多少个?

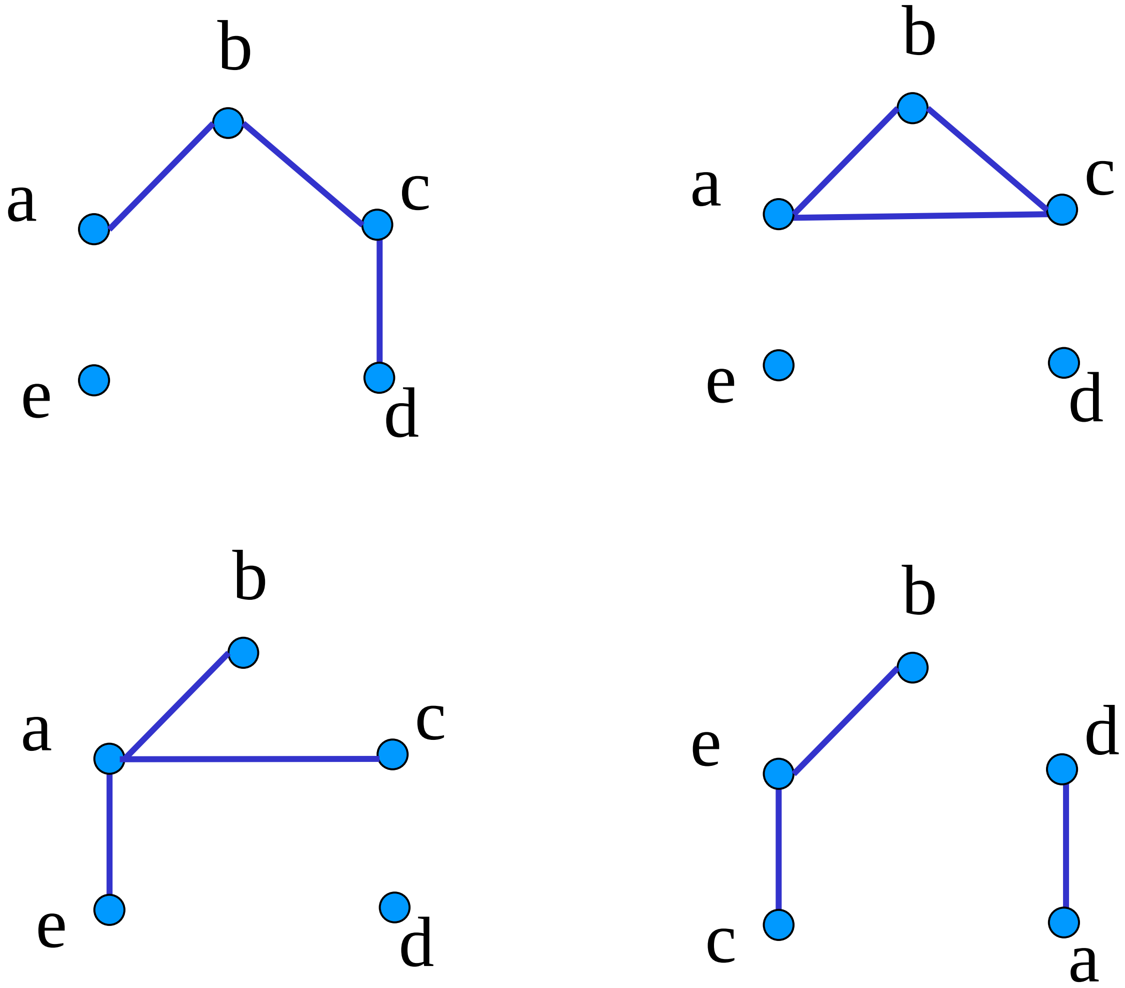
A. 2

B. 3

C. 4 √

D. 5

2015-2016集合论有关复试题



2015-2016集合论有关复试题

11.设树**T**中有**2n**个度为**1**的顶点,有**3n**个度为**2**的顶点,有**n**个度为**3**的顶点,则这棵树**T**有几个顶点和几条边?

A. 11，11

B. 11，10

C. 12，12

D. 12，11 √

2015-2016集合论有关复试题

12. 设G是p($p\geq 2$)阶无向图，G^c为G的补图，已知$\triangle(G)=k_1$,$\delta(G)=k_2$，则$\triangle(G^c)$ 和$\delta(G^c)$等于什么？

A. $p-k_1$，$p-k_2$

B. $p- k_2$，$p- k_1$

C. $p-1-k_1$，$p-1- k_2$

D. $p-1- k_2$，$p-1- k_1$ √

2015-2016集合论有关复试题

15.平面图**G**有两个分支，其顶点数为**8**，边数为**12**，则**G**有多少个面？

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7 √

2015-2016图论有关复试题

2016，不全

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为k，则G 中至少有多少条边?

A. k(k-1);

B. k(k+1);

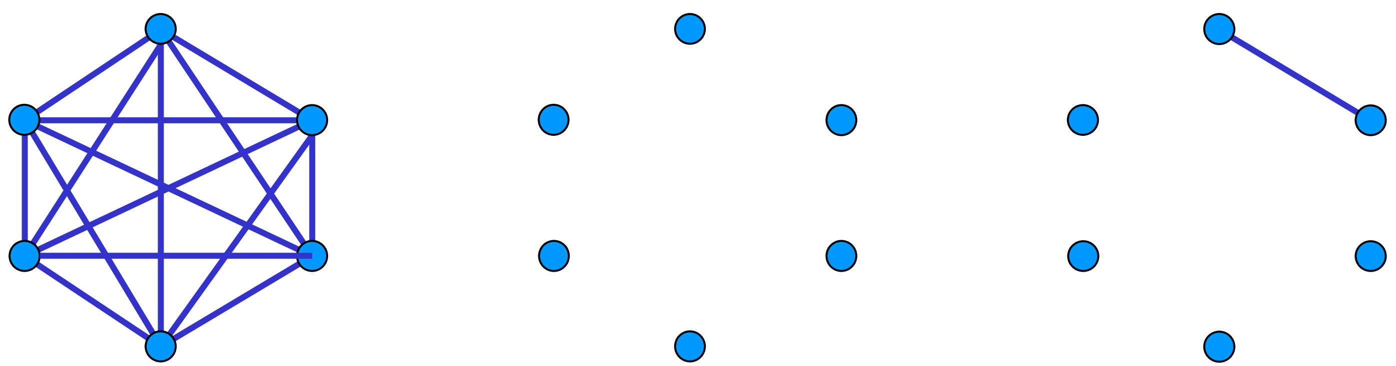
C. k(k+1)/2;

D. k(k-1)/2。 √

2015-2016集合论有关复试题

9.(2 分)

4. 设**V={v$_1$,v$_2$,…,v$_p$}**，计算以**V**为顶点集的无向图的个数有多少？



2015-2016集合论有关复试题

9.(2 分)

4. 设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，计算以V 为顶点集的无向图的个数有多少？

解：p个顶点的完全图的边的个数是$p(p-1)/2$

以V为顶点集的无向图当且仅当是它的完全图的生成子图。

每个边都可以选择出现和不出现

共有：

$2^{p(p-1)/2}$

2015-2016集合论有关复试题

9.(2 分)

4. 设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，计算以V 为顶点集的无向图的个数有多少？

A. 2^(p(p-1)/2)； √

B. 2^(p(p-1))；

C. p(p-1)/2；

D. p(p-1)。

2015-2016集合论有关复试题

10.(2 分)3. 设**G** 是一个无三角形的**(p,q)**平面图，则下列哪一个结论正确？

A. $q=3p-6$

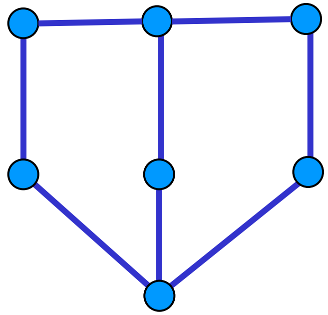
B. $q=4p-2$；

C. $q \le 2p-4$； √

D. $q \le 3p-6$。

2015-2016集合论有关复试题

23.(2 分)2. 设**G** 是一个**(p,q)**连通图，则**G** 中至少有多少个圈**?**



2015-2016集合论有关复试题

23.(2 分)2. 设G 是一个(p,q)连通图，则G 中至少有多少个圈?

A. p-q+1；

B. q-p+1; √

C. q-p；

D. p-q。