第四章 无穷集合及其基数

第四章 无穷集合及其基数

无穷集合元素“个数”讨论

“无穷”集合元素
“个数”有区别吗?

怎么比较?
有哪些方法?
有多少种类?

讨论的基础
是一一对应

第1节 可数集

本节主要问题

（1）可数集的定义

（2）可数集的性质

（1）可数集的定义

先说一个概念：如果从集合X到集合Y存在一一对应，则称集合X与Y**对等**，记作X～Y。

$$
\begin{array}{llcl}
\mathbf{X} & & & \mathbf{Y} \\
 & 1 & \longrightarrow & 2 \\
f: & 3 & \longrightarrow & 4 \\
 & 5 & \longrightarrow & 6 \\
 & 7 & \longrightarrow & 8 \\
 & \cdots & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

奇数集合{1, 3, 5, …}与偶数集合{2, 4, 6, …}对等。

自然数集合采用{1, 2, …}

1到3的整数采用{1, 2, 3}。

（1）可数集的定义

观察一下下面4个集合，我们能不能像 “数数” 一样把集合中的数一直数下去，保证每个数都能数到？

(1) 自然数集合：{1, 2, 3, ……} √

(2) 整数集合：{…,-3,-2,-1,0, 1, 2, 3, ……} √

(3) 有理数集合 ?

(4) [0, 1]区间中的实数组成的集合 ?

（1）可数集的定义

(1) 自然数集合：{1, 2, 3, ……}

(2) 整数集合：{…,-3,-2,-1,0, 1, 2, 3, ……}

定义4.1.1 如果从自然数集合N到集合X存在一个一一对应 $f: N \rightarrow X$,则称集合X是无穷可数（可数无穷）集合, 简称可数集或可列集。

如果X不是可数集且X不是有穷集,则称X为不可数无穷集,可简称为不可数集。

注意：可数集与不可数集是对无穷集合而言的,有穷集既不称作不可数集也不称作可数集。

（1）可数集的定义

例4.1.1 证明整数集Z是可数集。

Z={…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ……}

Z可变化一下形式

$$\begin{array}{lccccccccc} & \{0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots\} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{列出N} & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots\} \end{array}$$

令φ:Z→N, 用表达式表示为:∀n∈Z,

$$\boxed{\varphi(n)=\begin{cases}-2n, \text{如果} n<0 \\ 2n+1, \text{如果} n\geq 0\end{cases}}$$

（2）可数集的性质

定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

例如：1, 2, 3, ……

2, 4, 6, 8, ……

1, 3, 5, 7, ……

k, k+1, k+2, ……

m/k, (m+1)/k, (m+2)/k, ……

$a_1, a_2, \ldots\ldots$

定义4.1.1　如果从自然数集合N到集合X存在一个一一对应f: N→X, 则称集合X是无穷可数集合, 简称可数集或可列集。

（2）可数集的性质

定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

必要性：如果A为可数集，则A与自然数集之间存在一一对应，按对应的次序：

A可写成$A=\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$

充分性：如果A可写成$A=\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$:

则A与自然数集合间可建立一一对应关系：

$\varphi:N\to A, \varphi(n)=a_n$。

定义4.1.1　如果从自然数集合N到集合X存在一个一一对应$f: N\to X$，则称集合X是无穷可数集合，简称可数集或可列集。

（2）可数集的性质

定理4.1.2 无穷集A必包含可数子集。

例如这些无穷集:

$1, 2, 3, \ldots\ldots$

$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$

$1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

$k, k+1, k+2, \ldots\ldots$

$m/k, (m+1)/k, (m+2)/k, \ldots\ldots$

$a_1, a_2, \ldots\ldots$

$[a, b]$

$(0, 1)$

（2）可数集的性质

定理4.1.2 无穷集A必包含可数子集。

证明:

1. 从A中取第一个元素,记为a_1;

2. 从$A\setminus\{a_1\}$中取第二个元素，记为a_2;

…………

n. 从$A\setminus\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}\}$中取第n个元素，记为$a_n$;

…………

如此继续下去,便得到一个无穷集合

$M=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$

显然M是可数集且$M\subseteq A$

集合M即为所求。

（2）可数集的性质

定理4.1.3 可数集的任一无穷子集也是可数集。

例如：自然数集合中的偶数形成的集合:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，……}

参考定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

（2）可数集的性质

定理4.1.3 可数集的任一无穷子集也是可数集。

证明：设A为可数集,则A的全部元素可以排成一个没有重复项的无穷序列: $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$

设B是A的一个无穷子集。

由于$B\subseteq A$,所以$\forall b\in B$,b必在上述序列中出现;

1. 令从左到右发现的B中的第一个元素与1对应;

2. 令从左到右发现的B中的第二个元素与2对应; ……

n. 令从左到右发现的B中的第n个元素与n对应; ……

因为B为无穷集,这样我们就建立了B与自然数集合的一一对应,所以B是可数集。

（2）可数集的性质回顾

定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

定理4.1.2 无穷集A必包含可数子集。

定理4.1.3 可数集的任一无穷子集也是可数集。

⇓

推论4.1.1 从可数集A中除去一个有穷集M,则A\M仍是可数集。

例如：自然数集合形成的集合：

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，……}

（2）可数集的性质

定理4.1.4 设A是可数集，M是有穷集，则A∪M是可数集。

例如：自然数集合形成的集合:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，……}

英文字母集合:

{ a, b, c, …, x, y, z }

证明（略）

定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

（2）可数集的性质

定理 4.1.5 设$A_1,A_2,\ldots,A_n(n\geq 1)$都是可数集,则它们的并集也是可数集。

$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots\ldots\}$

$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots\ldots\}$

……

$A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \ldots\ldots\}$

证明（略）

定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

（2）可数集的性质

定理4.1.6 可数个有穷集之并至多是可数集。即若$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$是有限集的可数序列,则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$或为有限集,或为可数集。

$A_1= \{a_{11}, a_{12}, a_{13} \}$

$A_2= \{a_{21}, a_{22} \}$

……

$A_n= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4} \}$

……

（2）可数集的性质

定理4.1.6 可数个有限集之并至多是可数集。即若$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$是有限集的可数序列,则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$或为有限集,或为可数集。

$A_1=\{1, 2\}$	$A_1=\{1, 2\}$
$A_2=\{2, 3\}$	$A_2=\{1, 2\}$
$A_3=\{3, 4\}$	$A_3=\{1, 2\}$
……	……

证明略:

（2）可数集的性质

定理4.1.7 设$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是可数集，即可数个可数集之并是可数集。

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\}$$

$$A_2 = \{1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, 6/2, \ldots\ldots\}$$

$$A_3 = \{1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3, 6/3, \ldots\ldots\}$$

……

（2）可数集的性质

证：设$A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$是两两不相交的，

因每个A_n是可数集，则$A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$可写成如下形式：

A_1的元素排为$a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \ a_{14}\ \dots a_{1n}\dots$

A_2的元素排为$a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23}\ \ a_{24}\dots\ a_{2n}\dots$

A_3的元素排为$a_{31}\ \ a_{32}\ \ a_{33}\ \ a_{34}\dots\ a_{3n}\dots$

A_4的元素排为$a_{41}\ \ a_{42}\ \ a_{43}\ \ a_{44}\dots\ a_{4n}\dots$

……………………………………

按照这样的规律排列，称p+q为元素a_{pq}的高度，按高度大小编号，在同一高度中按p的值由小到大编号，这样就将$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$中所有元素编成一列；

因此：定理成立。

定理4.1.8 全体有理数之集Q是可数集。

证明：$Q=Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$,$Q_+$与$Q_-$对等，因此只需证$Q_+$是可数集即可。

根据有理数性质，每个正有理数当可写成p/q形式，其中p与q为自然数。

当q=1时:令 $A_1=\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

当q=2时:令 $A_2=\{1/2,\ 2/2,\ 3/2, \ldots\ldots\}$

....

$$Q_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$$

由定理4.1.7 Q_+是可数集，从而Q是可数集。

（2）可数集的性质

定理4.1.8　全体有理数之集Q是可数集。

⇓

推论4.1.2　区间[0,1]中的一切有理数之集是可数集。

（2）可数集的性质

定理4.1.9 设M是一个无穷集, A是有穷或可数集, 则M~M∪A。

例如 M= (0, 1)， A={1, 2, 3, … }， 则

M=(0, 1) =X ∪ {1/2, 1/3, 1/4, …}

M∪A =(0, 1) ∪ {1, 2, 3, … }=X∪ {1/2, 1/3, 1/4, … } ∪ {1, 2, 3, … }

定理4.1.2 无限集A必包含可数子集。

（2）可数集的性质

定理4.1.9 设M是一个无穷集, A是有穷或可数集, 则M~M∪A。

[证]只证A是可数集的情况

因为M是一个无穷集，所以由定理4.1.2知M必有一个可数子集D,

M = (M\D)∪D → D是可数集

M∪A = (M\D)∪D∪A → D ∪A是可数集

因(M\D)~(M\D), 且(D∪A)~D,

所以M ~ (M∪A)

定理4.1.2 无穷集A必包含可数子集。

（2）可数集的性质

定理4.1.10 设M是一个无穷不可数集，A为M的至多可数子集(即A有穷或可数),则M~M\A。

例：M = [0, 1]是一个无穷不可数集，

A = {1/1, 1/2, 1/3, ...}

例：M = [0, 1]\A ∪ A ,

M\A = [0, 1] \ A

定理4.1.9 设M是一个无穷集, A是有限或可数集, 则M~M∪A。

（2）可数集的性质

定理4.1.10 设M是一个无穷不可数集，A为M的至多可数子集(即A有穷或可数),则M~M\A。

[证]因为M是无穷不可数集,A至多可数, 所以M\A是无穷集。

由定理4.1.9

M\A~(M\A)∪A

即M\A~M

定理4.1.9 设M是一个无限集, A是有限或可数集, 则M~M∪A。

（2）可数集的性质

与自己的真子集存在一一对应是无穷集合独有的特点，有限集合没有这样的性质。

推论4.1.1 从可数集A中除去一个有限集M,则A\M仍是可数集。

定理4.1.10 设M是一个无穷不可数集，A为M的至多可数子集(即A有穷或可数),则M~M\A。

定义4.1.2 凡能与自身的一个真子集对等的集合称为无穷集合,或无限集合。

（2）可数集的性质

定理4.1.11 设$A_1,A_2,\ldots,A_n(n\geq 2)$都为可数集，则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$是可数集。

证：对n用归纳法

当n=2时，证明$A_1\times A_2$为可数集;

令$A_1=\{a_1,a_2,\ldots\}$，$A_2=\{b_1,b_2,\ldots\}$

$A_1\times A_2=\{(a_i,b_j)|i,j=1,2,3\ldots\}$

令$B_1=\{(a_1,b_j)\mid j=1,2,3\ldots\}$, 则$B_1$是可数集;

$B_2=\{(a_2,b_j)\mid j=1,2,3\ldots\}$, 则$B_2$是可数集;

………

因此，$A_1\times A_2=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$，是可数集;

（2）可数集的性质

定理4.1.11 设$A_1,A_2,\ldots,A_n (n\geq 2)$都为可数集，

则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$是可数集。

假设n=k时定理成立，现证n=k+1时成立;

令$D=A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$, 则由归纳假设D是可数集;

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_{k+1}\sim D\times A_{k+1}$,

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_{k+1}$是可数集;

因此对一切$n\geq 2$, $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$是可数集。

（2）可数集的性质

定理4.1.11 设$A_1,A_2,\ldots,A_n(n\geq 2)$都为可数集，则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$是可数集。

推论4.1.3 整系数代数多项式的全体是一个可数集。

注意！不能是无穷多项，变量个数也不能是无穷多项。

（2）可数集的性质

定义4.1.3　整系数代数多项式的根称为代数数，非代数数称为超越数。

$$q_n z^n + \cdots + q_1 z + q_0 = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \neq 0$$

定理4.1.12　代数数的全体是可数集。

4.2　连续统集-不可数的无穷集

本节主要问题

（1）连续统集的定义

（2）连续统集的性质

（1）连续统集的定义

定理4.2.1 区间[0, 1]中的所有实数构成的集合是不可数无穷集合。

证:

约定每个有限位小数后均补以无限多0，例如0写成0.000…。0.5写成0.500…;

其中1写成0.999…;

区间[0, 1]中每个实数,都可以写成十进制无限位小数形式$0.b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$, 其中:$b_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$;

假定定理不成立，于是[0,1]中全体实数可排成一个无穷序列: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$。

（1）连续统集的定义

每个a_i写成十进制无限小数形式排成下表

$a_1=0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\ldots.a_{1n}\ldots$

$a_2=0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\ldots\,a_{2n}\ldots$

$a_3=0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\ldots.a_{3n}\ldots$

……………………

$a_n=0.a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\,a_{n4}\ldots\,a_{nn}\ldots$

……………………

其中

$a_{ij}\in\{0,1,2,\ldots,9\}$。

构造一个新的小数$b=0.b_1b_2b_3\ldots\,b_n\ldots$

$$b_n=\begin{cases}2,\text{若}a_{nn}=1\\1,\text{若}a_{nn}\neq 1\end{cases},n=1,2,3,\ldots$$

显然，$b\in[0,1]$，但$\forall n\in N$，$b\neq a_n$，矛盾。

（1）连续统集的定义

定义4.2.1 凡与集合[0,1]对等的集合称为具有“连续统的势”的集合，或简称连续统。

（1）连续统集的定义

例4.2.1 设a与b为实数且$a < b$，则区间$[a, b]$中的一切实数之集是个连续统。

建立一一对应。

$\varphi:[0, 1]\rightarrow[a, b]$，$\forall x\in[0, 1]$，$\varphi(x)=a+(b-a)x$,

证明单射： $\forall x_1\neq x_2$

$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (b-a)(x_1-x_2)$,

因此 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

证明满射： $\forall y \in[a, b]$,

$\varphi((y-a)/(b-a))=y$

φ是一个一一对应，从而$[0, 1]\sim[a, b]$，因此$[a, b]$是连续统。

（1）连续统集的定义

定义4.2.1 凡与集[0,1]对等的集称为具有“连续统的势”的集,或简称连续统。

[0,1]~(a,b] (a, b]是一个连续统

[0,1]~[a,b) [a, b)是一个连续统

(a,b)~[0,1] (a, b)是一个连续统

根据：例4.2.1 设a与b为实数且a<b，则区间[a, b]中的一切实数之集是个连续统。

根据：定理4.1.10 设M是一个无穷不可数集，A为M的至多可数子集(即A有穷或可数)，则M~M\A。

（2）连续统集的性质

定理4.2.2 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个两两不相交的连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$是连续统，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim [0,1]$。

证：

把[0, 1]区间分成n份。

设$p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-1} < p_n = 1$

$[0, 1] = [0, p_1) \cup [p_1, p_2) \cup \ldots \cup [p_{n-1},p_n]$

$A_1 \sim [0, p_1),\ A_2 \sim [p_1,p_2), \ldots, A_n \sim [p_{n-1}, p_n]$

由于$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互不相交

于是$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim [0,1]$

（2）连续统集的性质

定理4.2.3 设$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$为两两不相交的集序列。如果$A_k\sim[0,1]$, $k=1,2,3,\ldots$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim[0,1]$

证:

把[0, 1]区间分成可数集份。

设$p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-1} < p_n$ …… $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$

例如: $p_n = n/(n+1)$

$[0, 1] = [0, p_1) \cup [p_1, p_2) \cup \ldots \cup [p_{n-1},p_n]\ldots\ldots$

$A_1 \sim [0, p_1)$, $A_2 \sim [p_1,p_2)$, ..., $A_n \sim [p_{n-1}, p_n]\ldots\ldots$

由于$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互不相交,以及

于是$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim[0,1]$

（2）连续统集的性质

定理4.2.3 设$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$为两两不相交的集序列。如果$A_k\sim[0,1]$, $k=1,2,3,\ldots$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim[0,1]$

↓

推论4.2.1　全体实数之集是一个连续统。

↓

推论4.2.2　无理数之集是一个连续统。

↓

推论4.2.3　超越数之集是一个连续统。

（2）连续统集的性质

定理4.2.4 令B为所有0、1的无穷序列所构成的集合，则B~[0,1]。

例如：1111111111111111………

1010101010010101………

0000000000000000………

……………………………

需要建立这样的序列和[0, 1] 区间的数的一一对应。把[0, 1] 区间的数都转换成2进制。

例如：1111111111111111………

对应：0.111111111111111………

（2）连续统集的性质

定理4.2.4 令B为0、1的无穷序列所构成的集合，则 $B\sim[0,1]$。

证明：

[0,1]中任一小数，都可以转换成二进制小数, 在有限小数后面补无穷个零。

对于任意一个无穷项二进制小数

$0.a_1 a_2 \ldots .a_n \ldots, \forall i \in N, a_i=0$ 或 1

都对应着一个0,1的无穷序列 $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$

反过来任何一个0,1无穷序列 $b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ 都对应着一个二进制小数 $0.b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \ \forall i \in N, b_i=0$ 或 1

因此B与[0,1]存在一一对应，$B\sim[0,1]$。

（2）连续统集的性质

定理4.2.5 令$S = \{ f / f: N \to \{0, 1\} \}$, 则:

(1) $S \sim [0, 1]$,

(2) 若A为可数集, 则$2^A \sim [0, 1]$。

[证] (1) S中的任一个映射f都可以写成

$\{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3)\ldots\}$其中$\forall i$，$x_i$=0或1

因此S中的任一个映射f与0，1无穷序列$x_1x_2x_3\ldots$一一对应。

由0，1的无穷序列之集与[0, 1]对等,因此S~[0,1]。

（2）连续统集的性质

定理4.2.5 令$S = \{ f \,/ f: N \to \{0, 1\} \}$, 则:

(1) $S \sim [0, 1]$,

(2) 若A为可数集, 则$2^A \sim [0, 1]$。

(2)由于$2^A \sim Ch(A)$

$Ch(A)=\{\chi|\chi:A\to\{0,1\}\}$

$Ch(A)\sim S$，因此$2^A\sim[0,1]$。

2015-2016集合论有关复试题

5. 自然数集N是可数的，则N×N是否是可数的？N的幂集2^N是否是可数的？

A. 可数，可数

B. 可数，不可数 √

C. 不可数，可数

D. 不可数，不可数

（2）连续统集的性质

定理4.2.6 正整数的无穷序列之集与[0,1]对等。

正整数的有穷序列之集是可数集。

Z^{+}={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……}

{1, 2, 3, 4, 5}

{8, 9, 10}

{1, 3, 6, 7, 8}

{9, 10, 99008}

{………………}

怎么排成一排?

（2）连续统集的性质

定理4.2.6 正整数的无穷序列之集与[0,1]对等。

$Z^+=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\ldots\}$

$\{1, 3, 5, \ldots\ldots\}$

$\{8, 9, 10, \ldots\ldots\}$

$\{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$

$\{9, 99, 999, \ldots\ldots\}$

$\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Z^+的每一个无穷序列对应Z^+的一个可数子集。

[证] 把Z^+的无穷序列中的每个数换成2进制

可得Z^+的每一个无穷序列与一个0、1无穷序列一一对应。

则Z^+的所有无穷列与所有的0、1无穷序列对等

从而Z^+的无穷序列之集~[0,1]

（2）连续统集的性质

定理4.2.7 设A_1, A_2均为连续统，则 $A_1\times A_2\sim[0, 1]$。

[证] 已知$A_1\sim[0, 1], A_2\sim[0, 1]$,

$\forall(x, y)\in A_1\times A_2$,

x对应的二进制小数为$0.x_1x_2x_3\ldots$,

y对应的二进制小数为$0.y_1y_2y_3\ldots$,

令$\varphi((x, y))=0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$

则φ是从$A_1\times A_2$到$[0, 1]$的一一对应；

因此$A_1\times A_2\sim[0, 1]$。

（2）连续统集的性质

定理4.2.7 设A_1,A_2均为连续统，则

$A_1 \times A_2 \sim [0,1]$。

推论4.2.1 平面上所有点的集合是一个连续统。

定理4.2.8 若$A_1,A_2,\ldots,A_n$均为连续统，则：$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \sim [0,1]$。

（2）连续统集的性质

定理4.2.9 设 $I \sim [0, 1]$，并且 $\forall m \in I$，$A_m \sim [0, 1]$,

则 $\bigcup_{m \in I} A_m \sim [0, 1]$

意思是连续统个连续统的并集还是连续统。

（1）平行于X轴的直线A_m上的点，与实数对等，
是一个连续统。

（2）平行于X轴的直线有多少个？
是Y轴上点的个数，是连续统个。

证明（略）