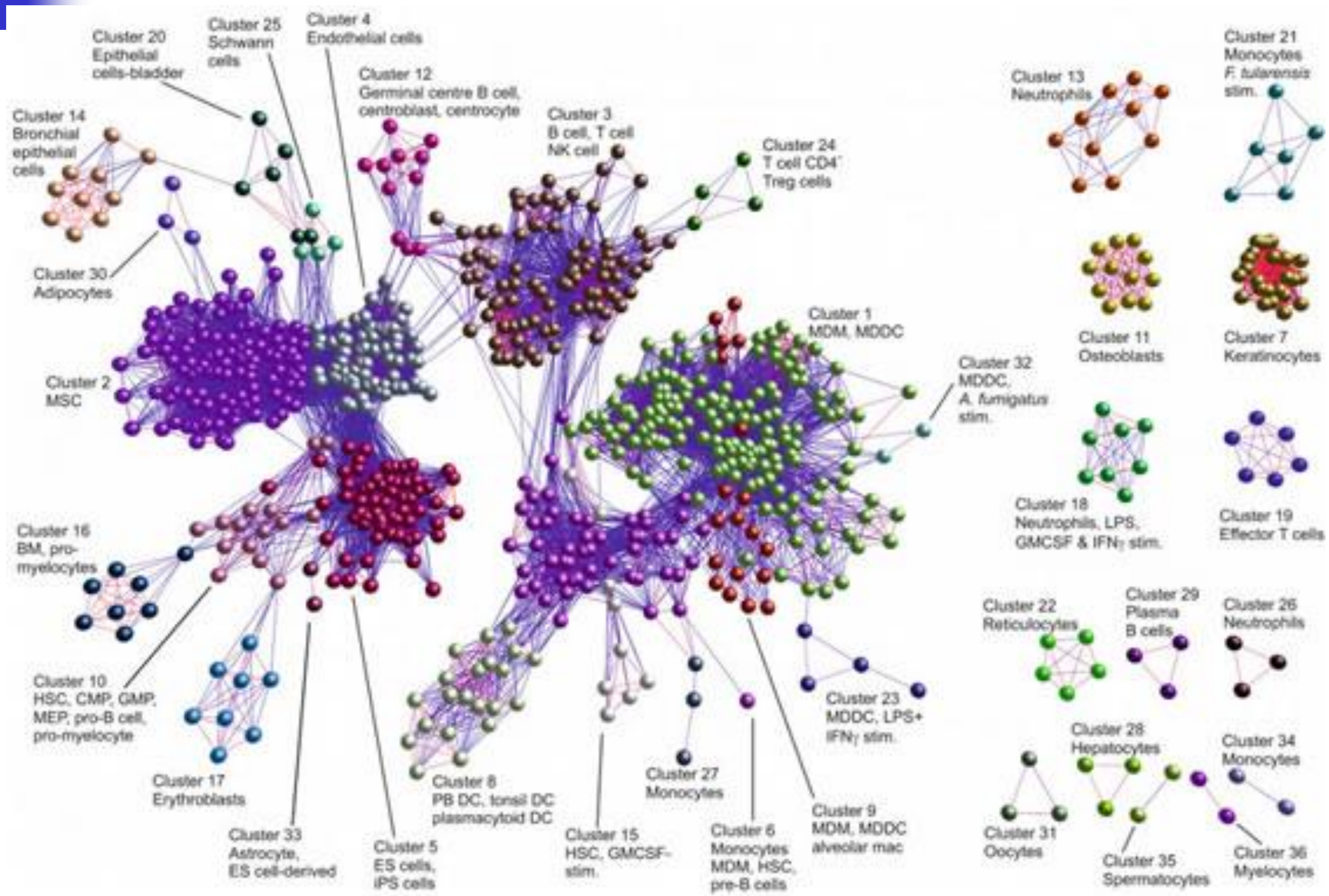
课程内容

第一章: 集合及其应用
第二章: 映射
第三章: 关系
第四章: 无穷集合及其基数
*第五章: 模糊集合论
第六章: 图的基本概念
第七章: 树和割集
第八章: 连通度和匹配
第九章: 平面图和图的着色
第十章: 有向图

图应用例子

社交网络

图应用例子

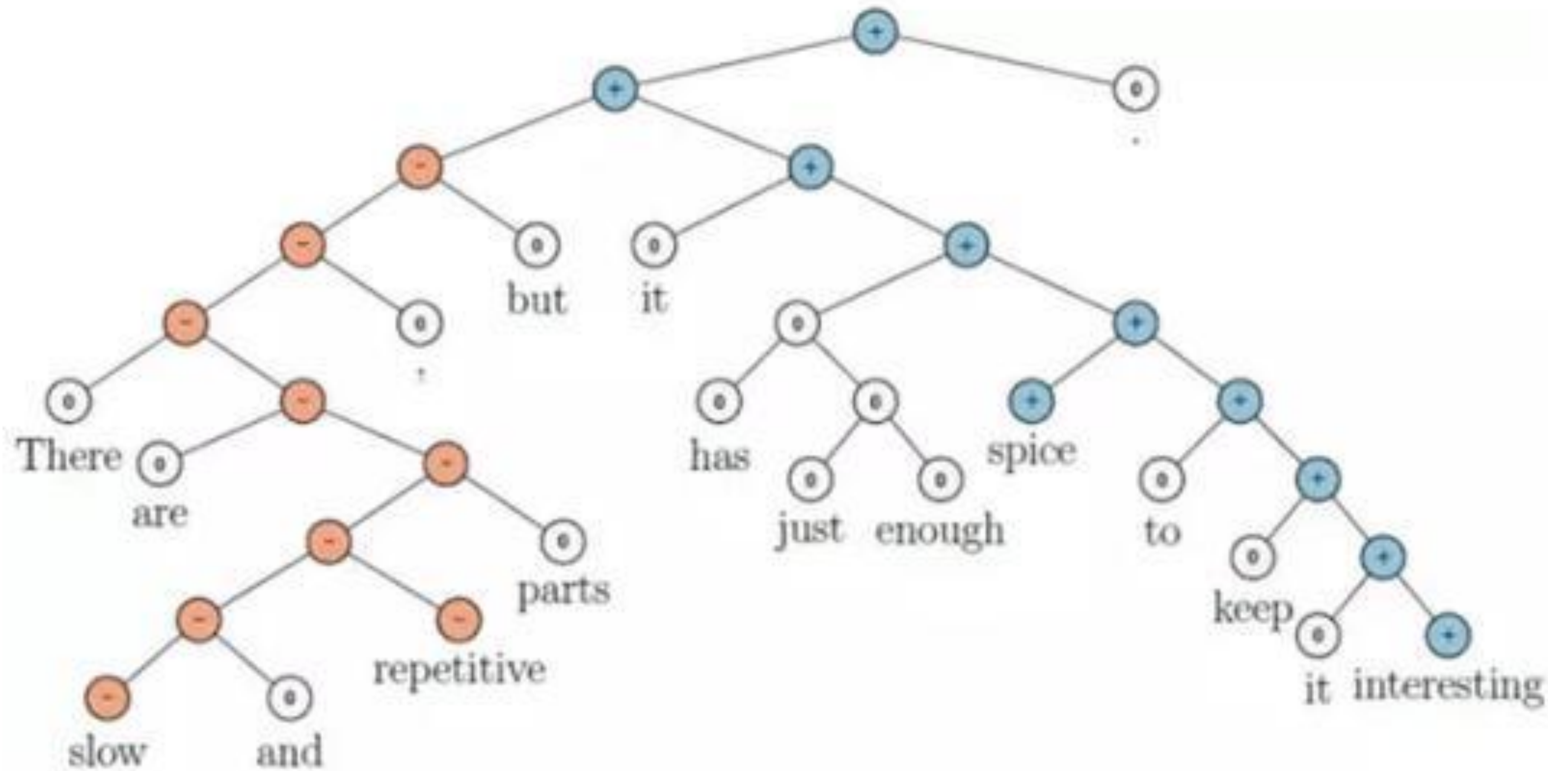


基因蛋白质网络

图应用例子

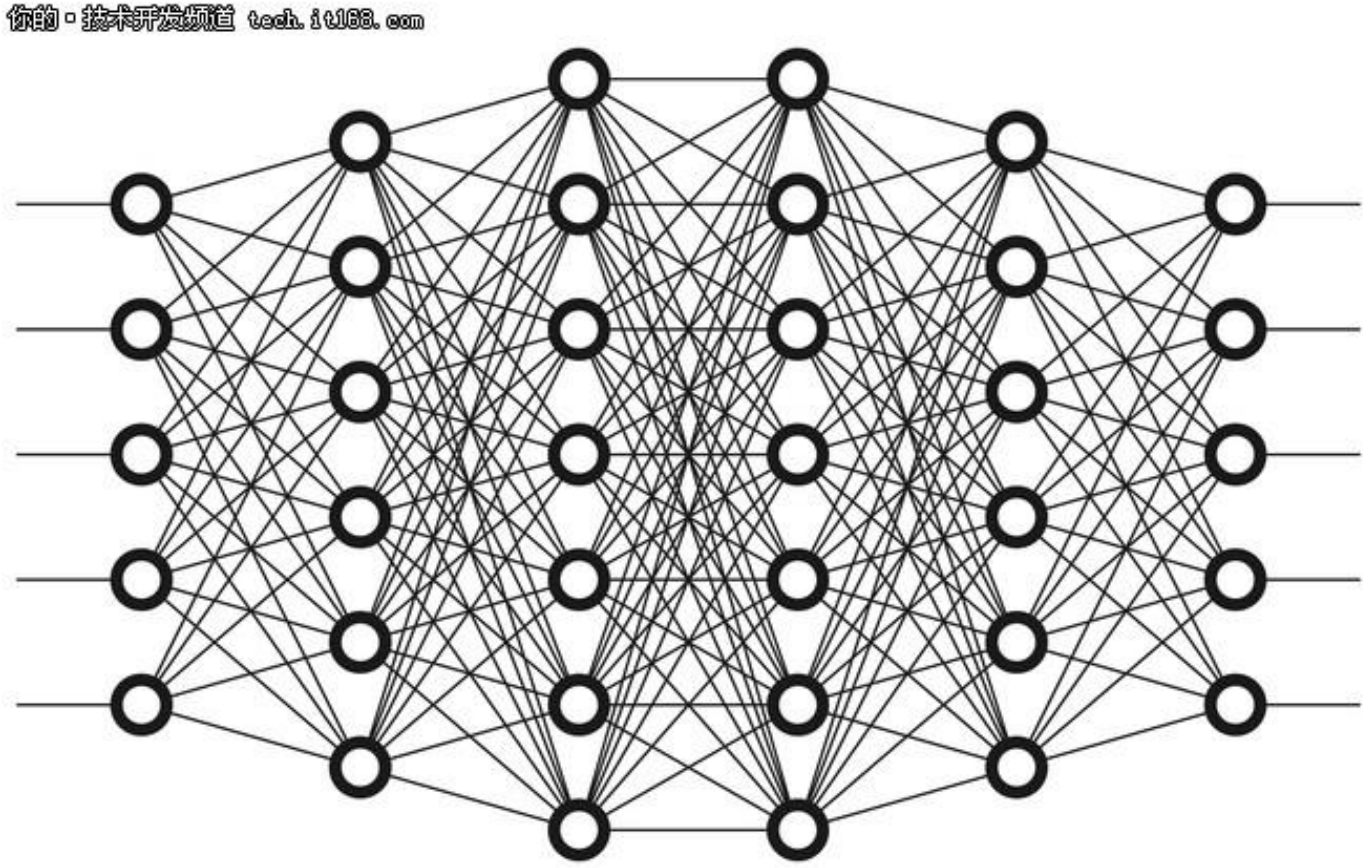
金融网络

图应用例子



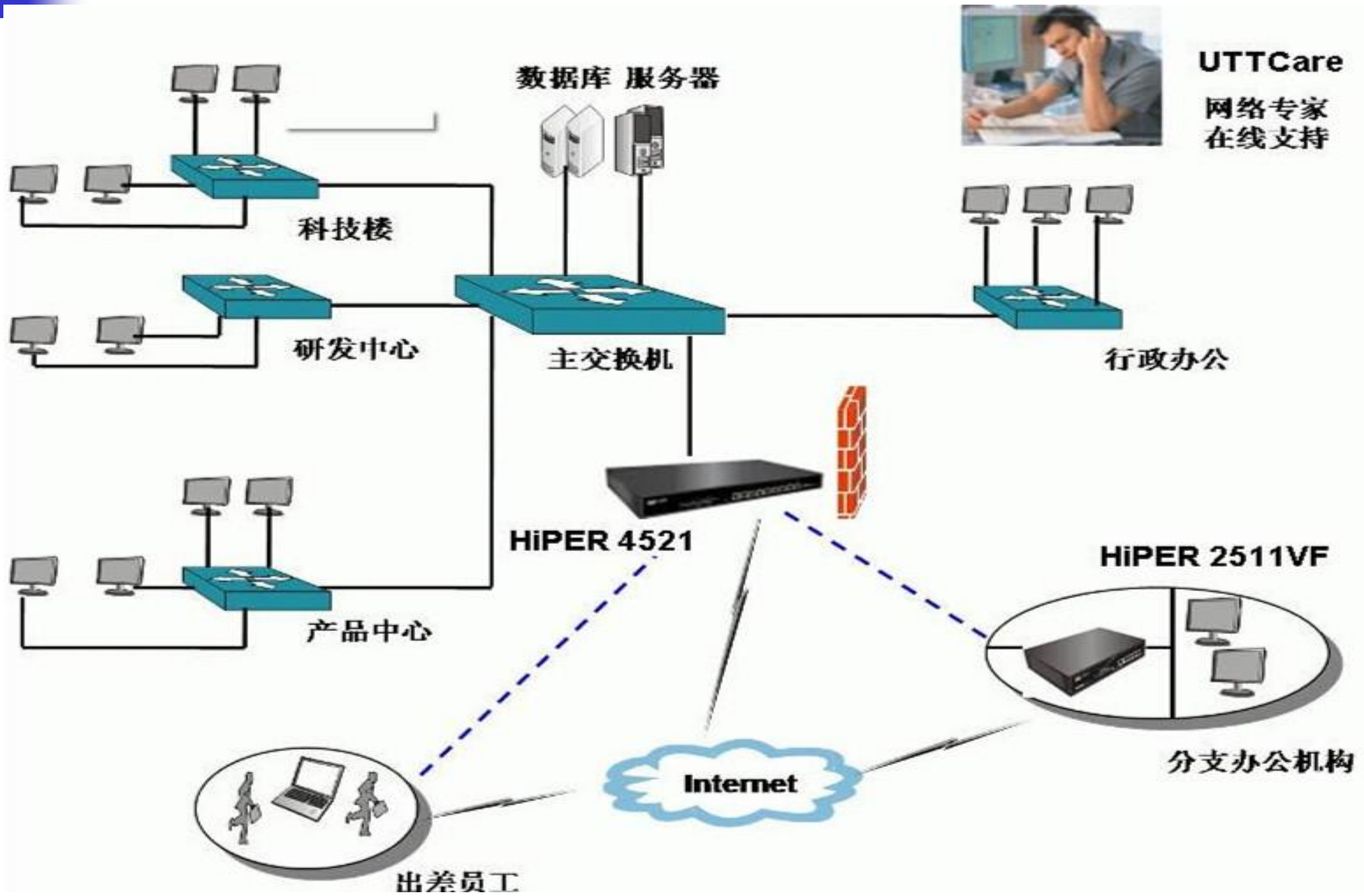
自然语言处理中的语法树

图应用例子



卷积神经网络（机器学习）

图应用例子



数据库 服务器
UTTCare
网络专家
在线支持
科技楼
研发中心
主交换机
行政办公
HiPER 4521
HiPER 2511VF
产品中心
分支办公机构
Internet
出差员工

计算机网络

第六章知识结构图

定义、性质、概念、一些特殊的图、**图的邻接矩阵、带权图与最短路径。**

内容

图的基本概念

建模

各种关系模型的直观建模：包括各种网络，涉及数据挖掘、人工智能、……

第六章：图论的基本概念

6.1 图论的产生与发展概述

6.2 基本定义

6.3 路、圈、连通图

6.4 补图、偶图

6.5 欧拉图

6.6 哈密顿图

6.7 图的邻接矩阵（不讲）

6.8 带权图与最短路问题（不讲）

6.1 图论的产生与发展概述

本节主要问题

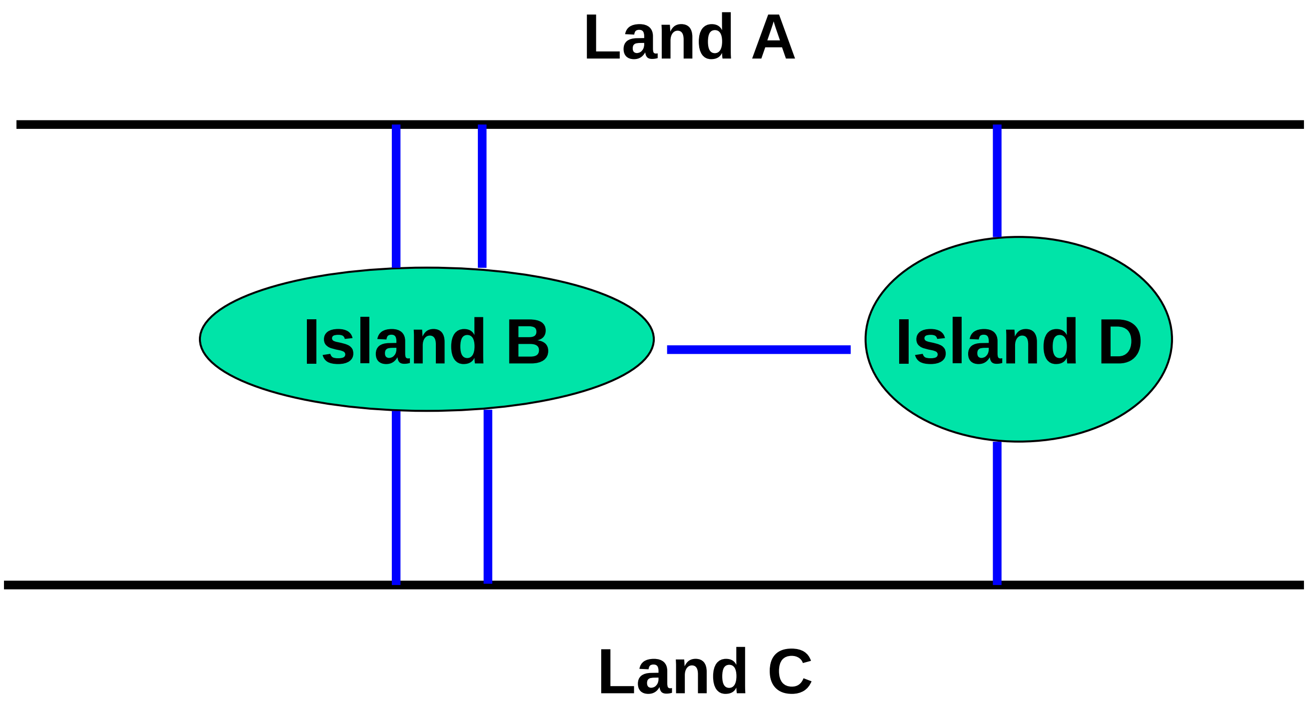
了解两个图论产生过程中的著名问题。

（1）哥尼斯堡城七桥问题

（2）四色定理

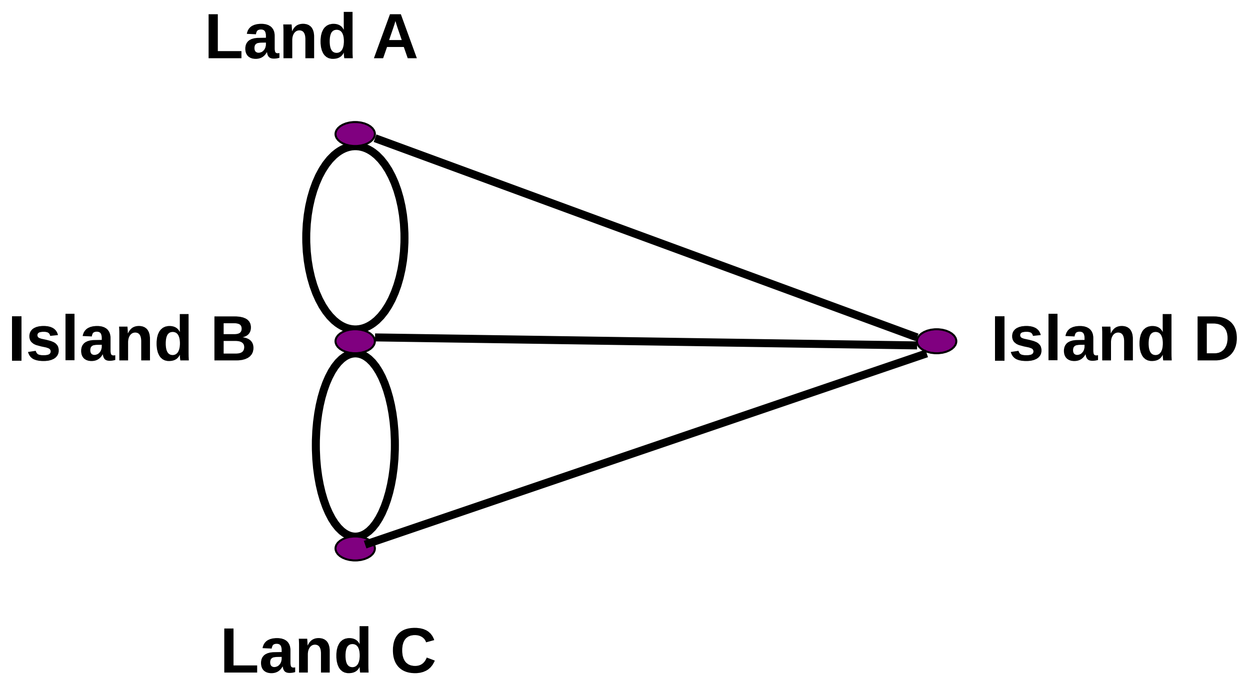
（1）哥尼斯堡城七桥问题

能否从某地开始，走每一座桥一次，而且只走一次，正好回到开始的地方。



（1）哥尼斯堡城七桥问题

欧拉将其简化为：能否从一个节点开始，走每一条边一次，而且只走一次，正好回到开始节点（一笔画问题）。



哥尼斯堡城七桥问题的拓扑结构图。

（2）四色定理

四色定理：每一个平面图都可以用四种颜色染色，相邻的区域颜色不同。

问题提出： Francis Guthrie (1852)

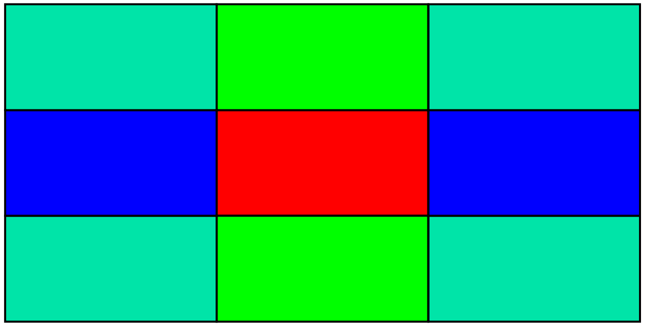
参与数学家：德·摩尔根，哈密顿

错误证明： 肯普(Alfred Kempe)

泰勒(Peter Guthrie Tait) (1878-1880)

发现错误： 29岁的赫伍德(1890)

正确证明： 1976, Apple, Haken



6.2 基本定义

本节主要问题

一、无向图的定义和性质

二、有向图的定义和性质

三、子图的定义和性质

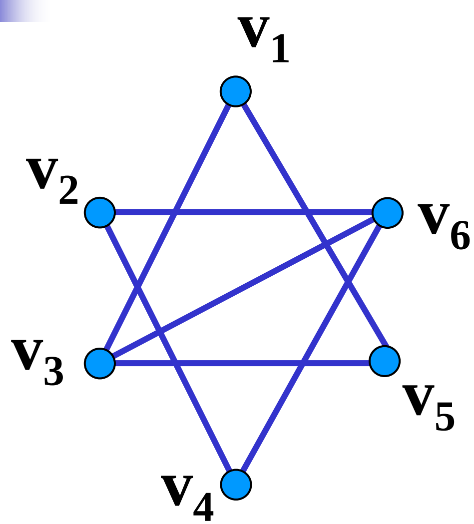
四、生成子图的定义和性质

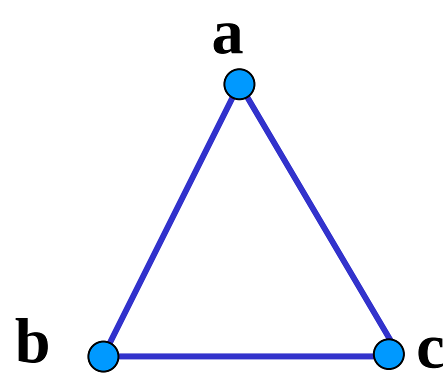
五、导出子图的定义和性质

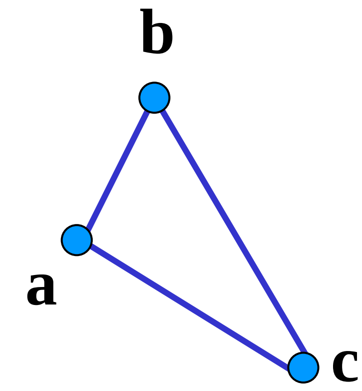
六、图的同构的定义和性质

七、顶点的度的定义和性质

一、无向图的定义和性质







图由两部分构成，顶点集合V和边集合E，G=(V, E)

上面图中V={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6}

E={{v_1, v_3},{v_1, v_4},{v_1, v_5}, ……}

这里的图是拓扑结构，也就是实体抽象图，与节点的位置和边的长度没有关系。

一、无向图的定义和性质—边的讨论

设V是一个非空集合，V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$, 即$P_2(V)=\{ A \mid A \subseteq V, \ |A| = 2 \}$

例如：V={a, b, c}，V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$, 即$P_2(V)=\{\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}\}$

$P_2(V)$有8个子集：

$E_1=\varnothing$, $E_2=\{\{a, b\}\}$,

$E_3=\{\{a, c\}\}$, $E_4=\{\{b, c\}\}$,

$E_5=\{\{a, b\},\{a, c\}\}$, $E_6=\{\{a, b\},\{b, c\}\}$,

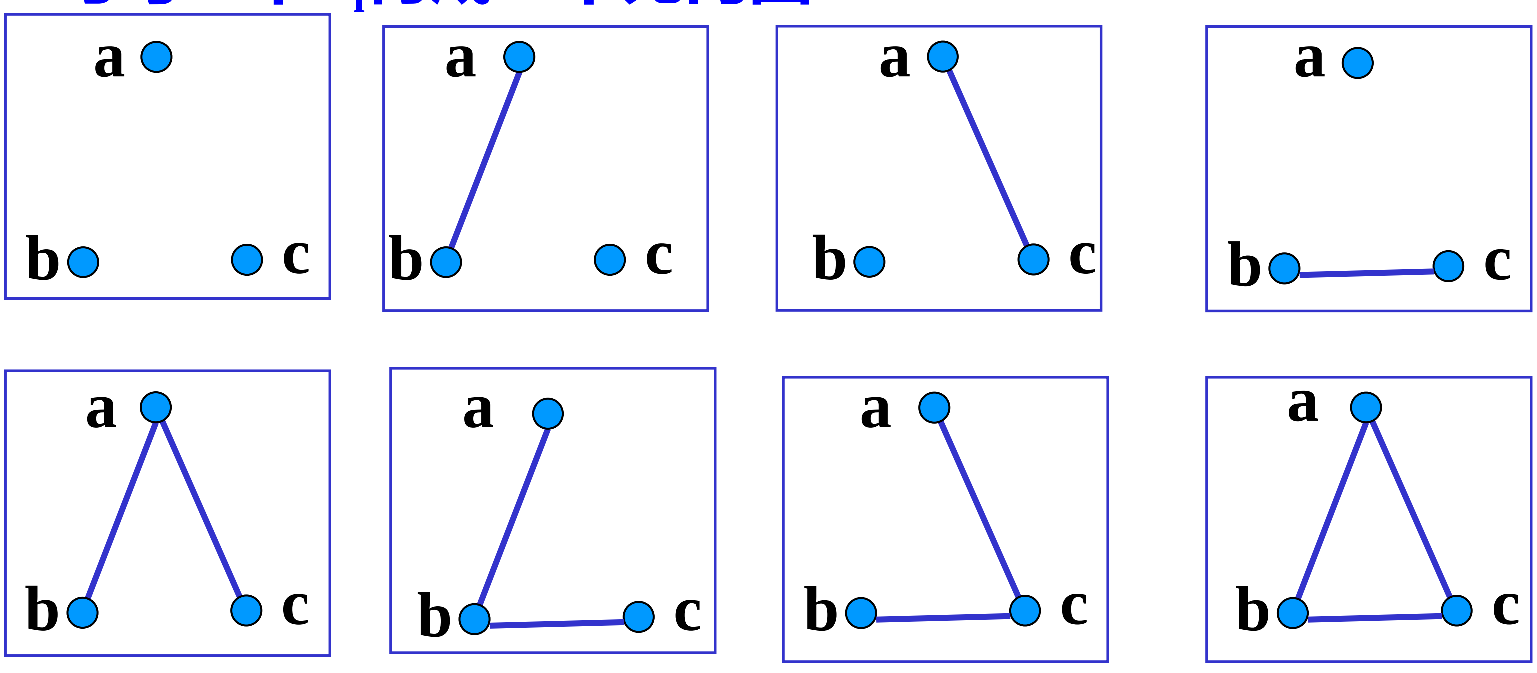
$E_7=\{\{a, c\},\{b, c\}\}$, $E_8=\{\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}\}$。

一、无向图的定义和性质

例如：V={a, b, c}, V的一切二元子集之集合记为 $P_2(V)$, 即 $P_2(V)$={{a, b},{a, c},{b, c}}

$P_2(V)$有8个子集：$E_1=\varnothing$, E_2={{a, b}}, E_3={{a, c}}, E_4={{b, c}}, E_5={{a, b},{a, c}}, E_6={{a, b},{b, c}}, E_7={{a, c},{b, c}}, E_8={{a, b},{a, c},{b, c}}.

V与每一个 E_i 构成一个无向图：



一、无向图的定义和性质

1、无向图的定义

定义6.2.1 设V是一个非空集合，$E \subseteq P_2(V)$，二元组(V, E)称为一个**无向图**，V中元素称为无向图的**顶点**，V为**顶点集**；E称为**边集**，E的元素称为图的**边**，如果$\{u, v\} \in E$，则称u与v**邻接**。

例如：V={a, b, c}，V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$，即$P_2(V)=\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

$P_2(V)$有8个子集：

$E_1=\varnothing$, $E_2=\{\{a, b\}\}$,

$E_3=\{\{a, c\}\}$, $E_4=\{\{b, c\}\}$,

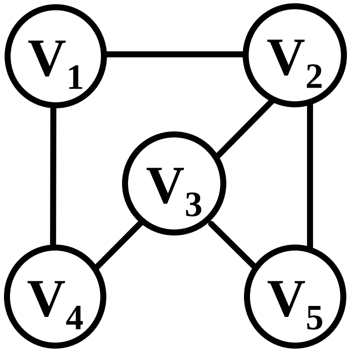
$E_5=\{\{a, b\},\{a, c\}\}$, $E_6=\{\{a, b\},\{b, c\}\}$,

$E_7=\{\{a, c\},\{b, c\}\}$, $E_8=\{\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}\}$。

一、无向图的定义和性质

2、无向图的术语

(1) 简单图



每个顶点都没有圈

任意两个顶点间最多只有一条边

任意一条边都可用它的两个端点来表示:

右图有6条边,可表示为$\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\}$, ……

也可以表示为：v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3 ……

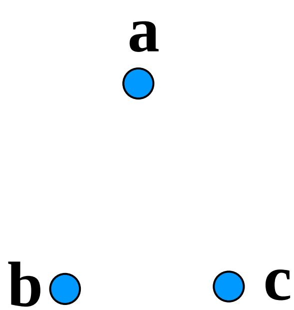
常用小写的英文字母u,v,w表示图的顶点(可以带下标);

常用小写的英文字母x,y,z表示图的边(可以带下标)。

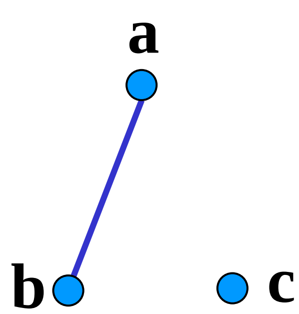
一、无向图的定义和性质

(2) (p, q) 图

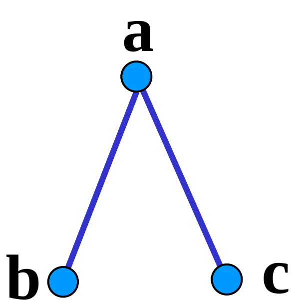
如果|V| = p, |E| = q，则称G为一个(p, q)图，即G是一个具有p个顶点q条边的图。



(3,0)图



(3,1)图



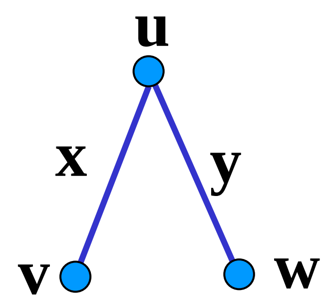
(3,2)图

(1,0)图又称为**平凡图**。

一、无向图的定义和性质

(3) 顶点与边的关联，边与边邻接

- 边可以用两端点表示，也可以命名，例如右图{u, v}是一条边，x也是这条边的**名**；记为x=uv或x=vu；
- 称u和v为边x的**端点**；
- 称顶点u和v与边x互相**关联**；
- 称u和v**邻接**；
- 若x与y是图G的两条边，且有一个公共端点，即 $|x\cap y|=1$,则称**边**x与y**邻接**。



(3,2)图

一、无向图的定义和性质

(4) 图的关系表示

由定义可知，一个无向图G就是一个非空集合V上定义的一个**反自反且对称**的二元关系E和V构成的系统。

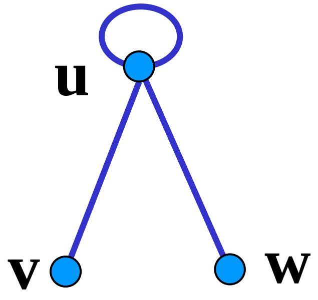
一、无向图的定义和性质

(5) 带环图

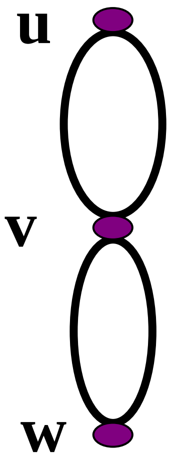
联结一个顶点与其自身的边称为**环**，允许有环存在的图称为**带环图**。

(6) 多重边图

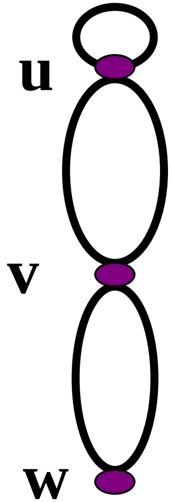
如果允许两个顶点之间有**两个以上**的边存在，这样的边称为**多重边**，允许有环与多重边存在的图，我们称为**伪图**。



带环图



多重边图



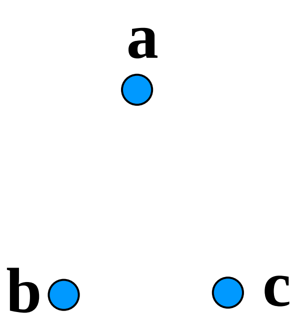
伪图

一、无向图的定义和性质

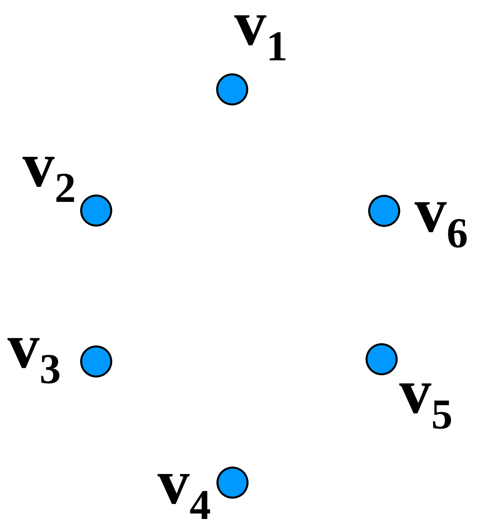
(7) 零图

定义6.6.2 设G=(V, E)为无向图，如果E=∅，则称G为零图。

n个顶点的零图称为n阶零图。



3阶零图



6阶零图

一、无向图的定义和性质

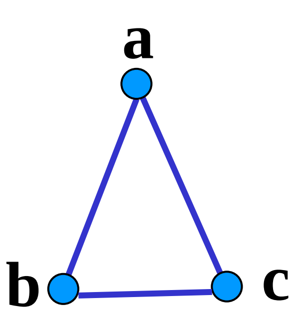
(8) 完全图

定义6.6.3 设G=(V,E)为无向图,如果G中任意两个顶点间都有唯一的边，则称G为完全图。

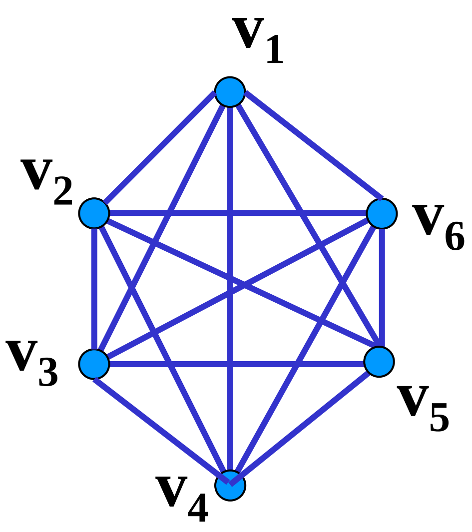
n个顶点的完全图用K_n表示。

K_n有多少条边？ n≥2

n(n-1)/2



K_3图



K_6图

一、无向图的定义和性质

问题：以$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点的无向图有多少个?

总边数$n(n-1)/2$

每条边可以选择出现或不出现，两种选择。

图的个数为$2^{n(n-1)/2}$。

二、有向图的定义及性质

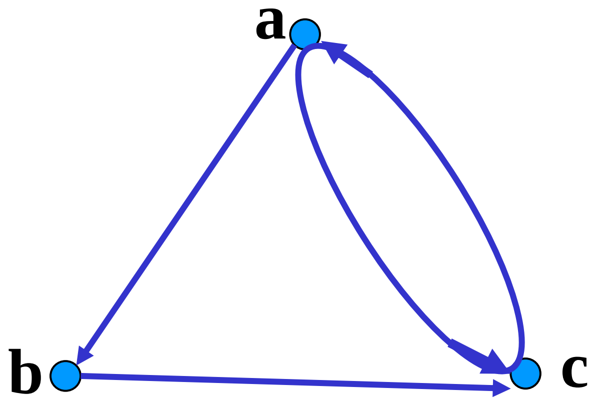
3 有向图的定义

定义6.6.3 设V为一个非空有限集：

$A \subseteq V \times V \setminus \{ (u,u) \in V \}$，二元组D=(V, A)称为一个有向图，V中的元素称为D的顶点，A中元素(u, v)称为D的从u到v的弧或有向边。

V={a, b, c}

A={(a,b), (b,c), (a,c), (c,a)}



有向图

二、有向图的定义及性质

定义6.6.3 设V为一个非空有限集：

$A \subseteq V\times V\backslash\{(u, u) \in V\}$，二元组D=(V, A)称为一个有向图，V中的元素称为D的顶点，A中元素(u, v)称为D的从u到v的弧或有向边。

例如：V={a, b, c},

$$V\times V \backslash \{(u,u) \in V\}$$
$$=\{(a, b), (a, c), (b, a), (b,c), (c, a), (c, b)\}$$

具有3个顶点a, b, c的有向图有多少种?

64种。

二、有向图的定义及性质

4、有向图的术语

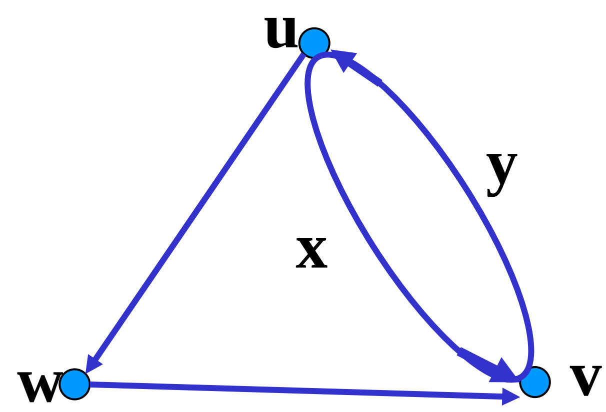
(1)弧,对称弧:

有向图的边也叫做**弧**。

如果$x=(u,v)$与$y=(v,u)$均为A的弧,则称x与y为一对**对称弧**.

(2)弧的起点和终点:

如果$x=(u,v)$是有向图的一条边,则称弧x为起于顶点u终于顶点v的弧,或从u到v的弧,u称为x的**起点**,v为**终点**。

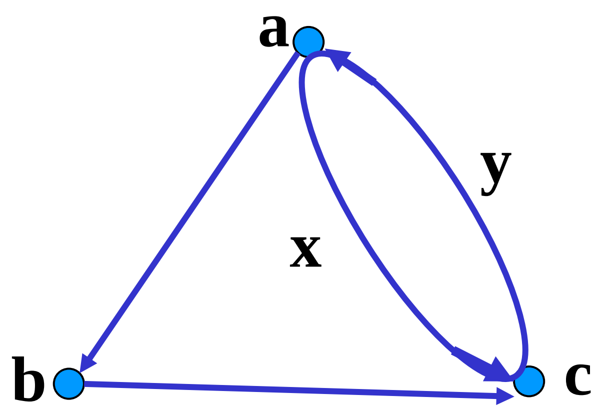


有向图

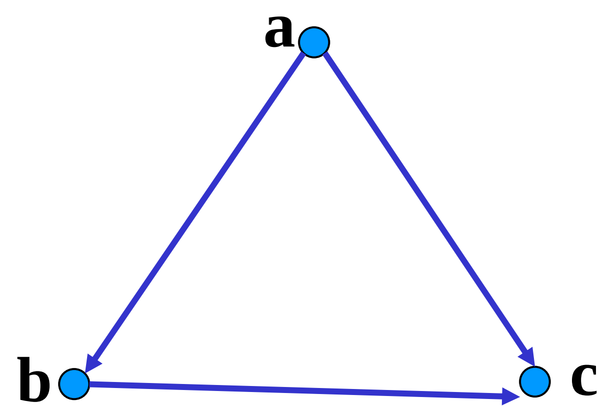
二、有向图的定义及性质

(2) 定向图

定义6.2.4 不含对称弧的有向图称为定向图。



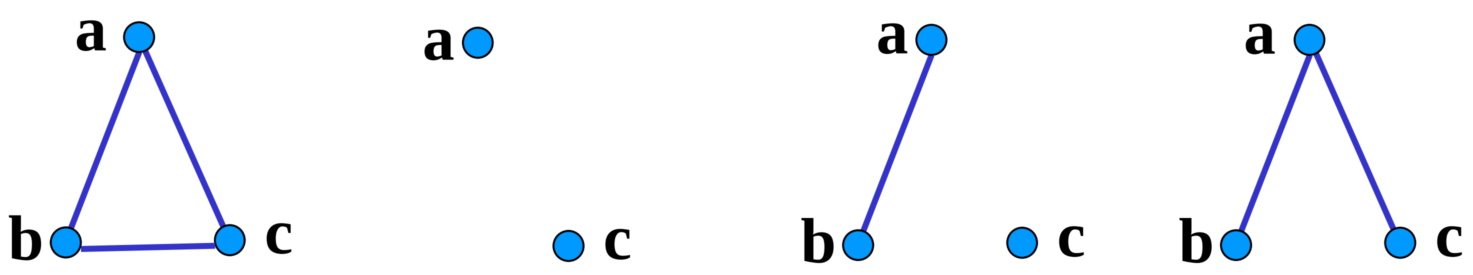
非定向图



定向图

三、子图的定义及性质

定义6.2.5 设$G = (V, E)$是一个图，图$H = (V_1, E_1)$称为G的一个子图，其中V_1是V的非空子集且E_1是E的子集。



K_3图

K_3有多少个子图?

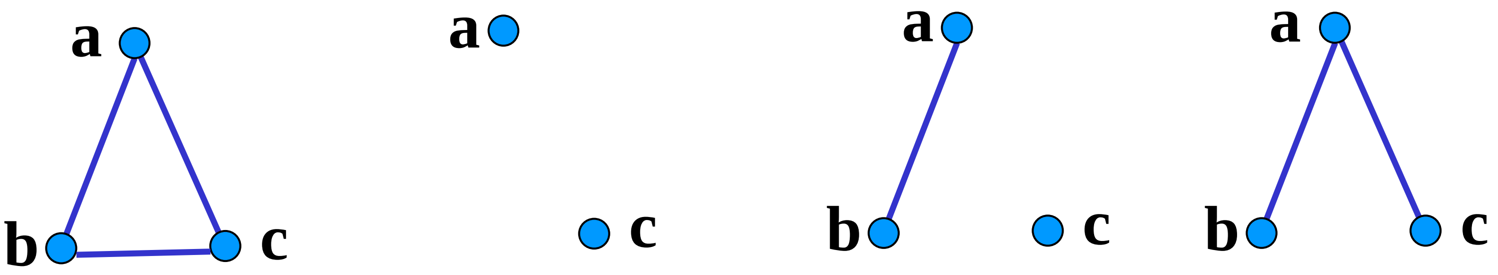
一个顶点的有3个，两个顶点的有6个，3个顶点的有8个，17个子图。

三、子图的定义及性质

真子图与图的包含关系

设G_1和G_2是图G的两个子图，如果$G_1 \neq G$，则称G_1是G的**真子图**。

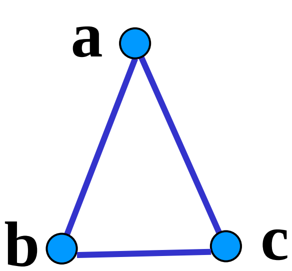
如果G_1是G_2的子图，则说G_2包含G_1。



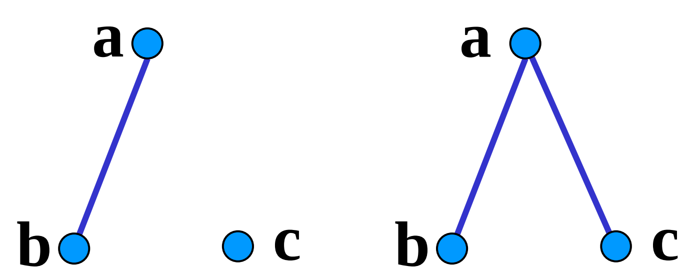
K_3图

四、生成子图的定义和性质

定义6.2.6 设G=(V，E)是一个图，如果F⊆E，则称G的子图H=(V, F)为G的生成子图。



K_3图



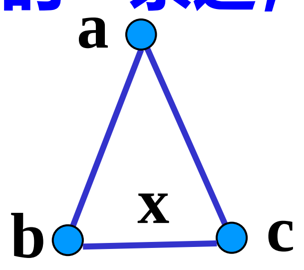
K_3有多少个生成子图?

8个生成子图。

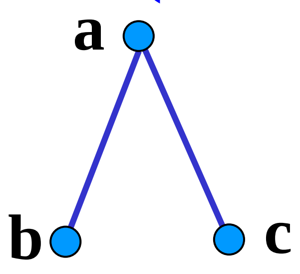
四、生成子图的定义和性质

生成子图的表示方法

设x是G的一条边，则G的生成子图(V, E\{x})简记为G-x。

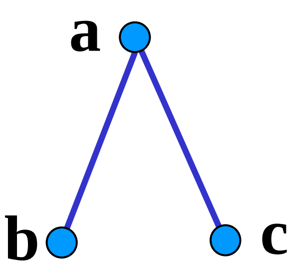


图G

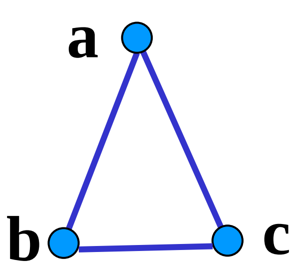


图G-x

如果u和v是G的两个不邻接的顶点，则图(V, E∪{u, v})简记成G+uv，它是在G的图解中，把u与v间联一条线而得到的图。



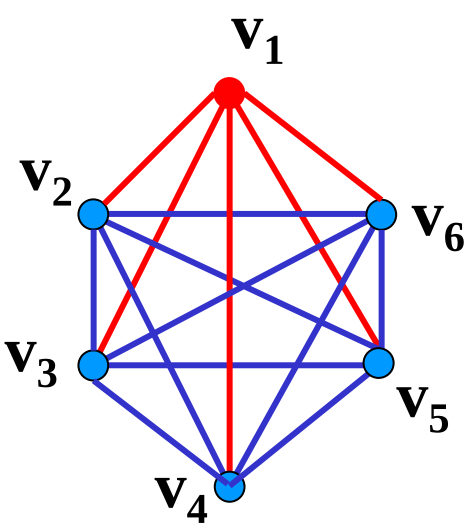
图G



图G+bc

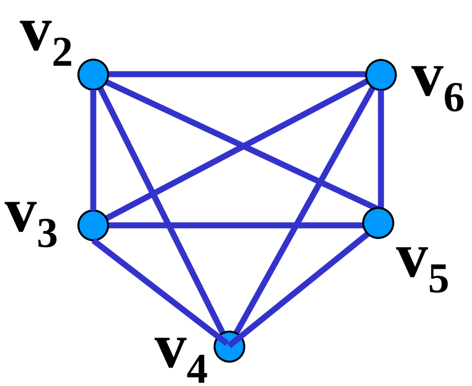
五、极大子图的定义和性质

设G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的真子图，则称H是具有此性质的**极大子图**。



K_6图

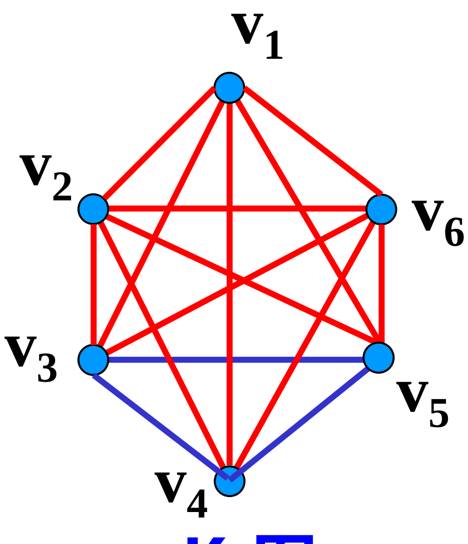
不包含顶点v_1的极大子图



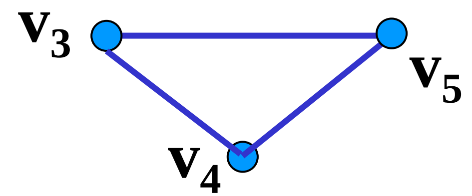
六、导出子图的定义及性质

定义6.2.7 设S为图G=(V, E)的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为**由S导出**的子图，记为<S>，形式地，$\langle S\rangle=(S, P_2(S)\cap E)$。

于是，S的两个顶点在<S>中邻接，当且仅当这两个顶点在G中邻接。



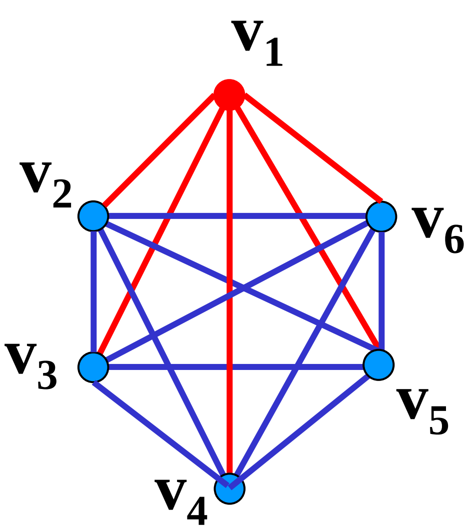
K_6图



六、导出子图的定义及性质

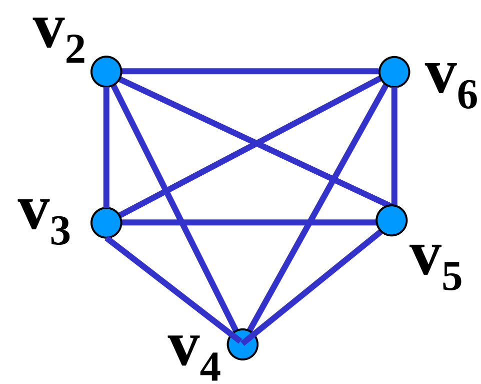
导出子图的表示方法

设G=(V,E)，v∈V，由V\{v}导出的子图<V\{v}>记成G-v。从图的图解上看，G-v的图解是从G的图中**去掉顶点v及与v关联的边**所得到的图解。



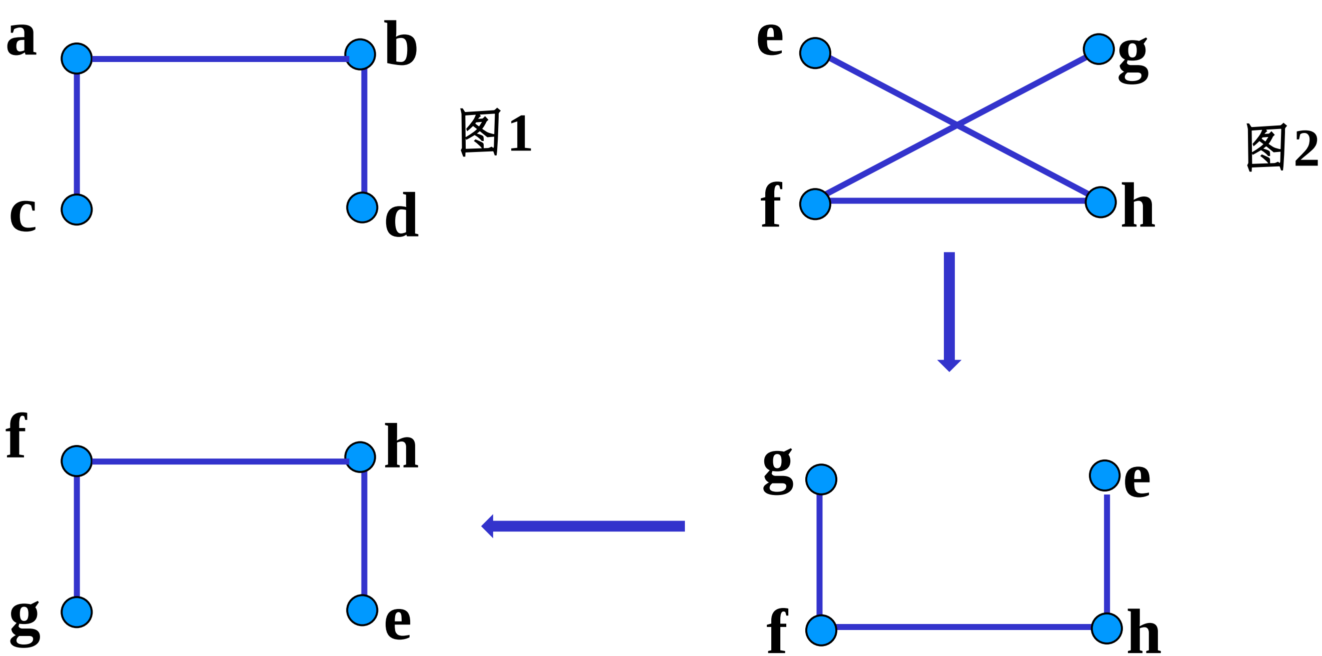
K_6图

K_6图-v_1的导出子图



七、图的同构定义及性质

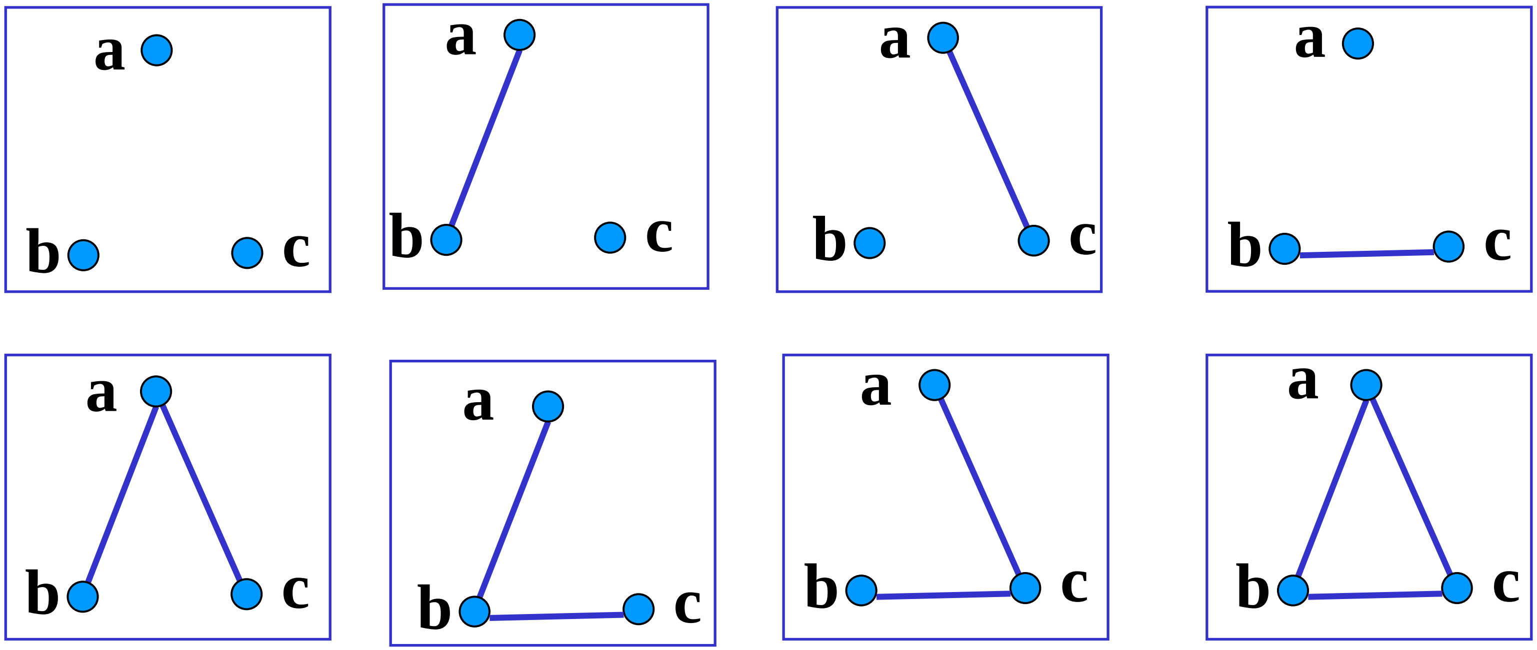
定义6.2.8 设G=(V,E)，H=(U,F)是两个无向图，如果存在一个一一对应φ:V→U，使得uv∈E当且仅当φ(u)φ(v)∈F，则称G与H同构，记为G≅H。



七、图的同构定义及性质

问题：3个顶点的无向图图有多少种?

（注：同构的算一种）



4种。

七、图的同构定义及性质

定义6.2.8 设$G=(V,E)$，$H=(U,F)$是两个无向图，如果存在一个一一对应$\varphi:V\rightarrow U$，使得$uv\in E$当且仅当$\varphi(u)\varphi(v)\in F$，则称G与H**同构**，记为$G\cong H$。

乌拉姆猜想 设$G=(V,E)$,$H=(U,F)$是两个图,

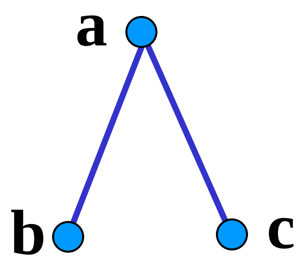
$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$,

$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$,$p\geq 3$.

如果对每个i,$G-v_i\cong H-u_i$,则$G\cong H$。

八、顶点的度的定义及性质

定义6.2.9 设v为图G=(V,E)的任一顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为deg v。

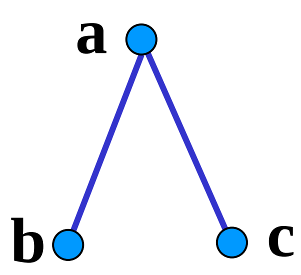


图G

八、顶点的度的定义及性质

定理6.2.1(Euler) 设G=(V,E)是一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即：

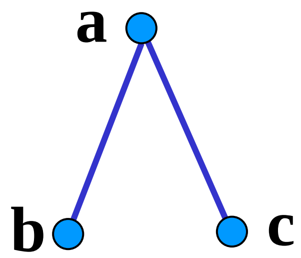
$$\sum_{v\in V}\deg v = 2q$$



图G

八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.1 任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。



图G

八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.1 任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

[证] 设G=(V,E),令度为奇数的顶点的集合为V_1，则$V_2=V\setminus V_1$为度为偶数的顶点之集；

由定理6.2.1有

$$\sum_{v\in V}\deg v=\sum_{v\in V_1}\deg v+\sum_{u\in V_2}\deg u=2q$$

从而

$$\sum_{v\in V_1}\deg v=2q-\sum_{u\in V_2}\deg u=\text{偶数}$$

也就是$|V_1|$个奇数相加是偶数，$|V_1|$的个数必为偶数

2015-2016图论有关复试题

2015年，共200分，占14分

7. 设$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中$d_i$为非负整数，$i=1, 2, \cdots, n$。若存在n个顶点的(简单)无向图，使得顶点$v_i$的度为$d_i$，则称d是可图解的。下面给出的各序列中哪个是可图解的？

A. （1,1,1,2,3） √

B. （1,2,2,3,4,5）

C. （1,3,3,3）

D. （1,3,3,4,5,6,6）

八、顶点的度的定义及性质

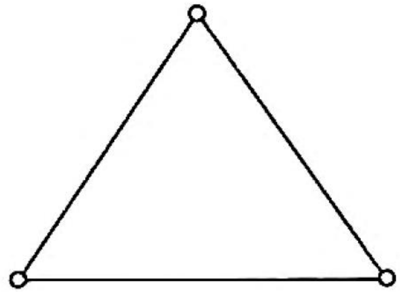
显然，对(p, q)图的每个顶点v，有$0 \le \deg v \le p-1$

$$\delta(G) = \min_{v \in V}\{\deg v\}, \quad \Delta(G) = \max_{v \in V}\{\deg v\},$$

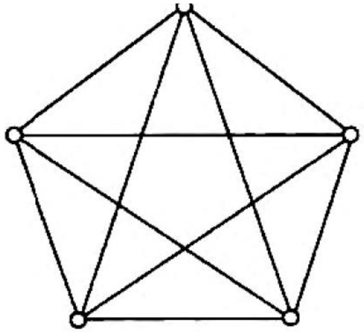
定义6.2.10 图G称为r度正则图，如果

$$\Delta(G) = \delta(G) = r$$

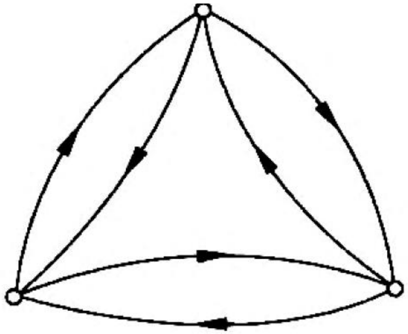
即G的每个顶点的度都等于r，3度正则图也叫做**三次图**，一个具有p个顶点的p-1度正则图称为p个顶点的完全图，记为K_p。



(a)



(b)



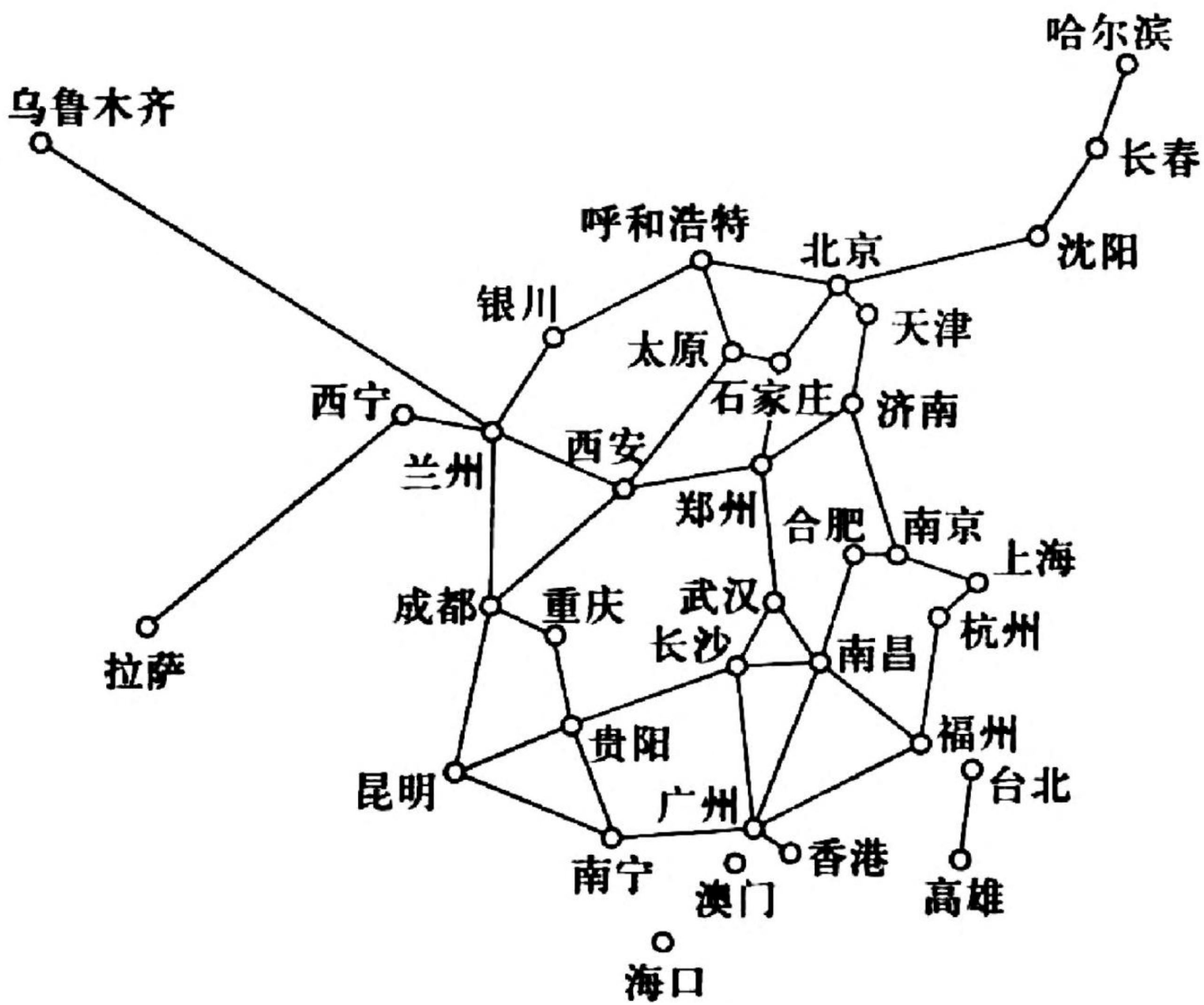
(c)

八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.2 每个三次图均有偶数个顶点.

度为零的顶点称为弧立顶点,0度正则图就是零图

6.3 路、圈、连通图


哈尔滨
乌鲁木齐
长春
呼和浩特
北京
沈阳
银川
天津
太原
西宁
石家庄
济南
西安
兰州
郑州
合肥
南京
上海
成都
重庆
武汉
长沙
杭州
拉萨
南昌
福州
贵阳
台北
昆明
广州
香港
南宁
澳门
高雄
海口

6.3 路、圈、连通图

本节主要问题

一、通道与闭通道的定义和性质

二、迹与闭迹的定义和性质

三、路与回路的定义和性质

四、连通图的定义与性质

一、通道与闭通道的定义和性质

定义6.3.1 设G=(V,E)是一个图，G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$v_0,x_1,v_1,x_2,v_2,x_3,\ldots,v_{n-1},x_n,v_n,$

其中$x_i=v_{i-1}v_i$, i=1, 2, ..., n, n称为通道的长，这样的通道常称为v_0-v_n通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$

当$v_0=v_n$时，则称此通道为闭通道；

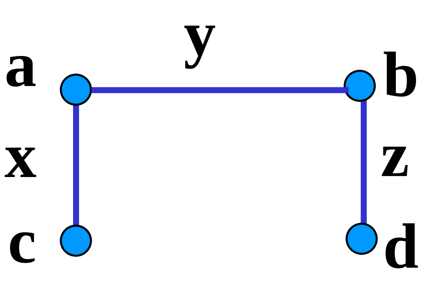


图1

a y b z d z b y a x c是一条通道

简写为abdbac

abdba是一条闭通道

一、通道与闭通道的定义和性质

在计算通道的长时，重复走过的边重复计算；

通道也叫做通路（entry）(复杂通路)。

闭通道也叫做回路（circuit）(复杂回路)。

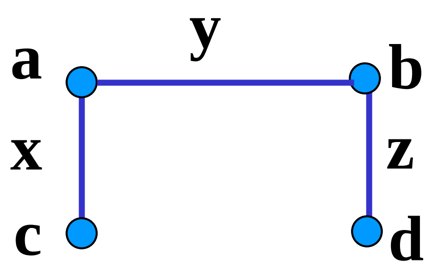


图1

求通道abdbac的长度?

长度5

二、迹与闭迹的定义和性质

定义6.3.2 如果图中一条通道上的**各边**互不相同，则称此通道为图的**迹**，如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为**闭迹**。

迹又叫做**简单通路**，闭迹又叫做**简单回路**。

cabce是一条迹

cabcedc是一条闭迹

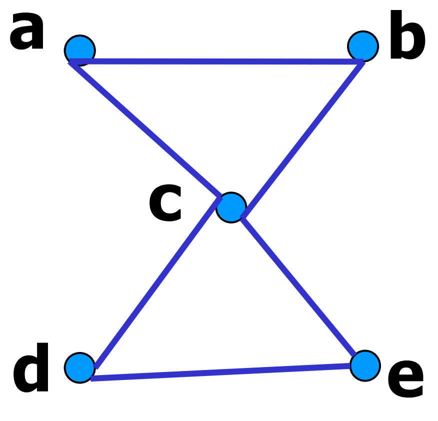


图1

三、路与回路的定义和性质

定义6.3.3 如果图中一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路，如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。

路又称作初级通路，圈又叫做初级回路。

abced是一条路
abca是一个圈

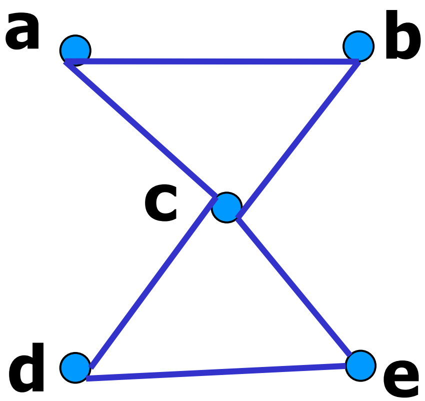
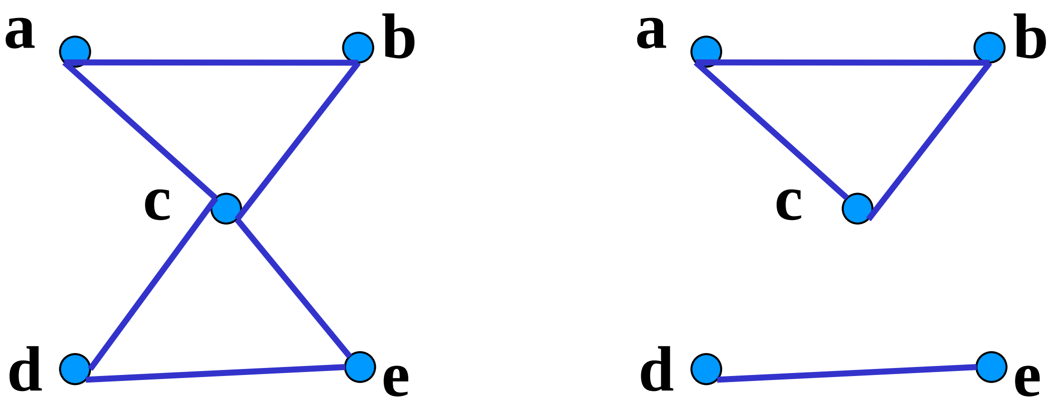


图1

四、连通图的定义与性质

定义6.3.4 设G=(V, E)是图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G是一个**连通图**(**connected graph**)。



连通图　　　　非连通图

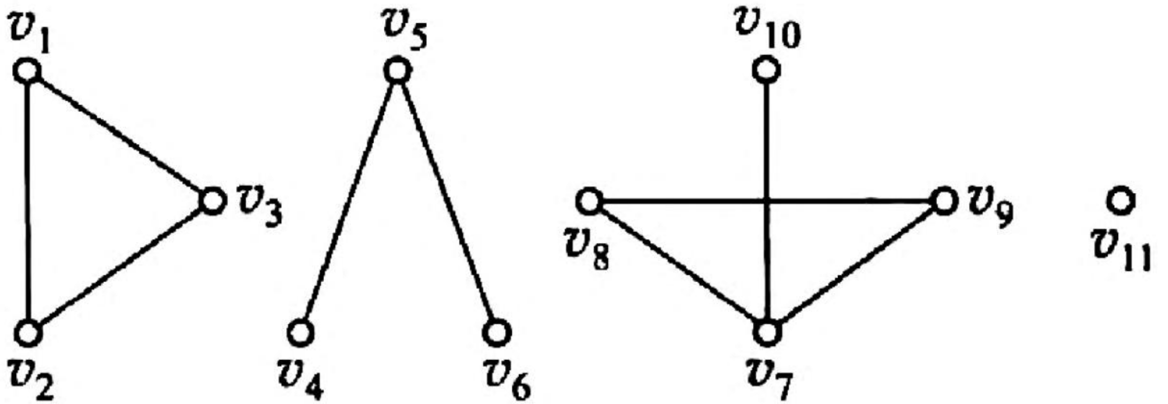
连通图分支

定义6.3.5 图G的极大连通子图称为G的一个**支**。

四、连通图的定义与性质

定义6.3.5 图G的极大连通子图称为G的一个支。

考虑下图的连通分支数并理解极大的含义



连通分支数是4

6.3 路、圈、连通图

定理6.3.2 设G=(V,E)是一个有p个顶点的图，若对G的任两个不邻接的顶点u和v，deg u+deg v ≥ p-1，则G是连通的。

证明思想：

如果G不连通,则G至少有两个支,设$G_1=(V_1, E_1)$是其中的一个支,其他各支构成的子图为$G_2=(V_2, E_2)$；

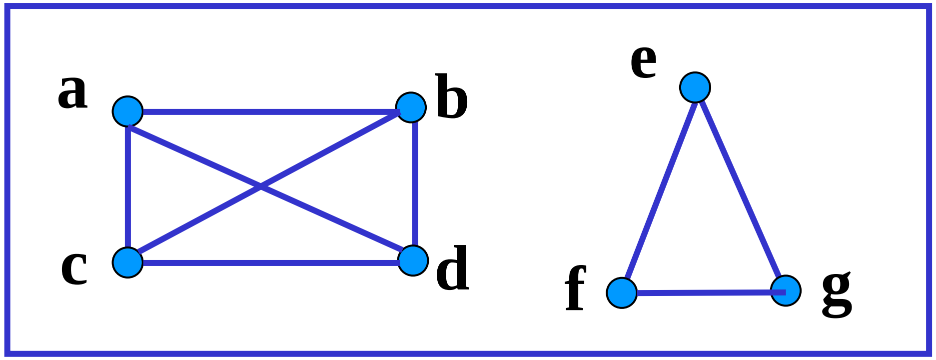


图1

考虑每个支中的最大度数

四、连通图的定义与性质

定理6.3.2 设$G=(V,E)$是一个有p个顶点的图，若对G的任两个不邻接的顶点u和v，$\deg u+\deg v \geq p-1$，则G是连通的。

[证]

如果G不连通,则G至少有两个支,设$G_1=(V_1,E_1)$是其中的一个支,其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$；

设$|V_1|=n_1$,则$|V_2|=p-n_1$,

在G_1中,$\forall u\in V_1$,$\deg u\leq n_1-1$;

在G_2中则$\forall v\in V_2$,有$\deg v\leq p-n_1-1$

$\deg u+\deg v\leq(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$

这与定理的假设矛盾,所以G是连通的。

四、连通图的定义与性质

定理6.3.3 设G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图，如果∀u∈V，deg u为偶数，则G中有圈。

证明思想：考虑图中的最长路 aebcd

因为d的度数是偶数，因此d除了与c相连外，还与其他的顶点x相连，x必然在最长路上，否则 aebcdx 更长，与 aebcd 是最长路矛盾。

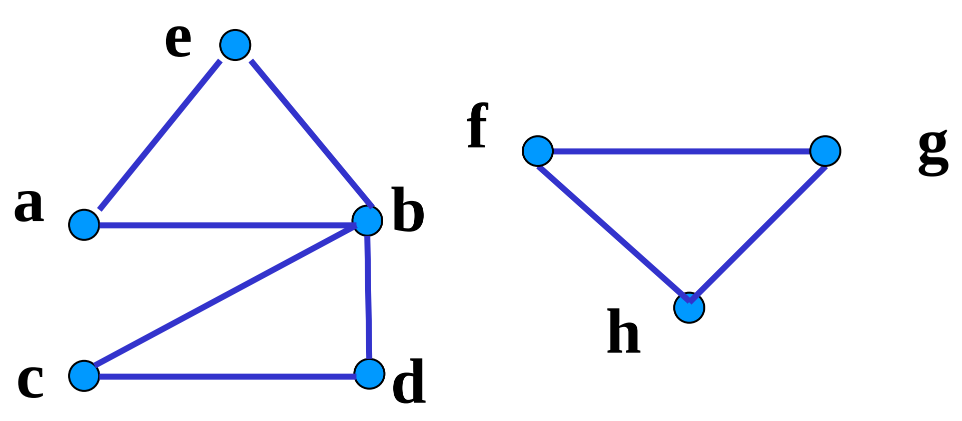


图1

四、连通图的定义与性质

定理6.3.3 设G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图，如果$\forall u \in V$，deg u为偶数，则G中有圈。

[证]

令P是G中的一条最长的路, $P=v_1v_2 \ldots v_n$,

$\deg v_1 \geq 2$, 除v_2外,必有某个顶点u和v_1邻接, 那么u必在P中,

如果u不在P中，$P_1=uv_1v_2 \ldots v_n$是一条更长的路;

所以u必是$v_2,\ldots,v_n$中的某个v_i, $i \geq 3$, 于是

$P=v_1v_2 \ldots v_iv_1$是G的一个圈。

四、连通图的定义与性质

定理6.3.4 如果图G中的两个不同顶点u与v间有两条不同路联结，则G中有圈。

证明思想：

a到d有两条路acd和abcd

边bc在abcd上不在acd上，去掉边bc的话,

b还能通过其他路到c，因此加上bc，一定形成圈。

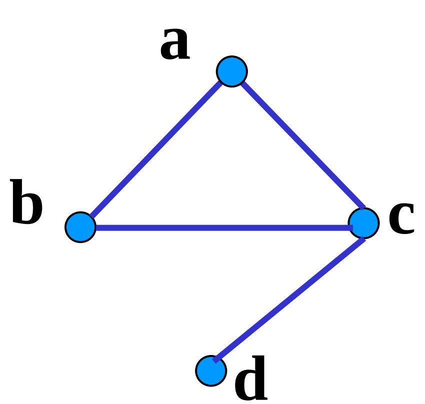
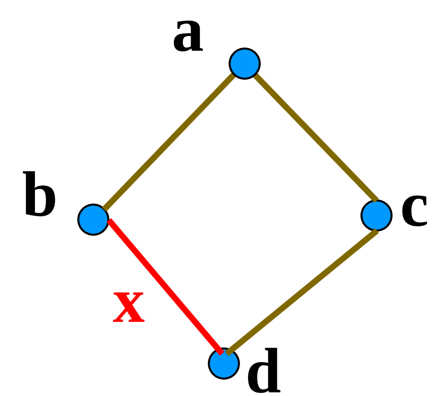


图1

四、连通图的定义与性质

定理6.3.4 如果图G中的两个不同顶点u与v间有两条不同路联结，则G中有圈。



[证]

令P_1和P_2是G中两条不同的u-v路；

因为$P_1 \neq P_2$，所以存在P_2的一条边$x=u_1v_1$不在P_1上，或者存在P_1的一条边$x=u_1v_1$不在P_2上；

由P_1和P_2上的顶点和边构成的G的子图记为$P_1 \cup P_2$

于是$(P_1 \cup P_2)-x$是G的一个连通子图,

所以$(P_1 \cup P_2)-x$中包含一条u_1-v_1路P,

于是$P+x=P+u_1v_1$就是G的一个圈。