集合论与图论（离散数学I）

平时成绩20分

期末考试80分

1、教学QQ群：**770648969**　密码：老师的姓名

2、云班课-班课号：

3、雨课堂

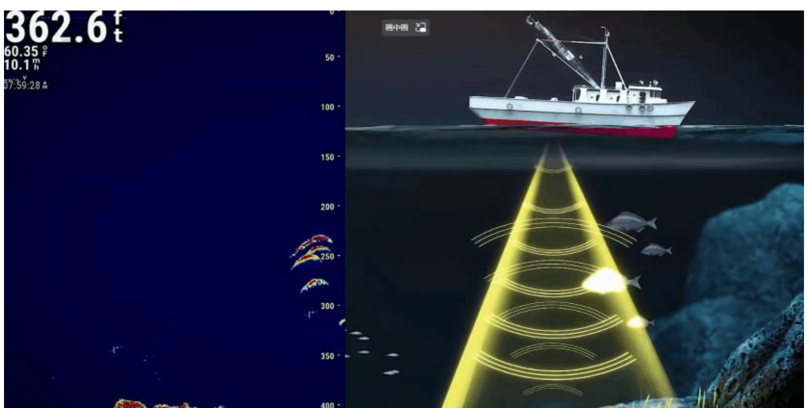
集合论与图论（离散数学I）

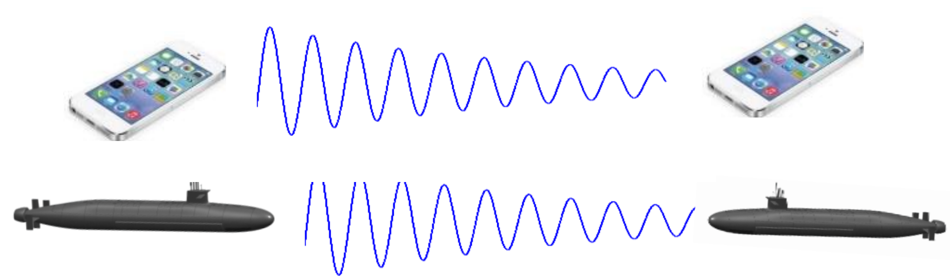
娄毅，工学博士，副教授，硕导。

http://homepage.hit.edu.cn/louyi

邮箱：louyi@ieee.org

《Stochastic Process》《随机过程》





集合论与图论—离散数学I

一、离散数学的前世今生?

二、集合论和图论的用途?

三、教材和主要参考书?

四、课程内容?

一、离散数学的前世今生

数论

主要研究整数的性质，例如：奇数、偶数、素数（质数）、质因子分解等概念。著名问题有：

哥德巴赫猜想（**1742**年）
任一大于**2**的偶数都可写成两个素数之和。
8=3+5，**14=3+11**

1966年陈景润证明了“**1+2**”成立，即“任一充分大的偶数都可以表示成二个素数的和，或是一个素数（**1**）和一个半素数（**2**）的和（**+**）”。**16=2+2×7**

一、离散数学的前世今生

数论

把整数扩展到『符号』

主要研究整数的性质，例如：奇数、偶数、素数（质数）、质因子分解等概念。著名问题有：

费马大定理（**1621**年）

当整数**n > 2**时，关于**x,y,z**的不定方程

$x^n + y^n = z^n$ 无正整数解。

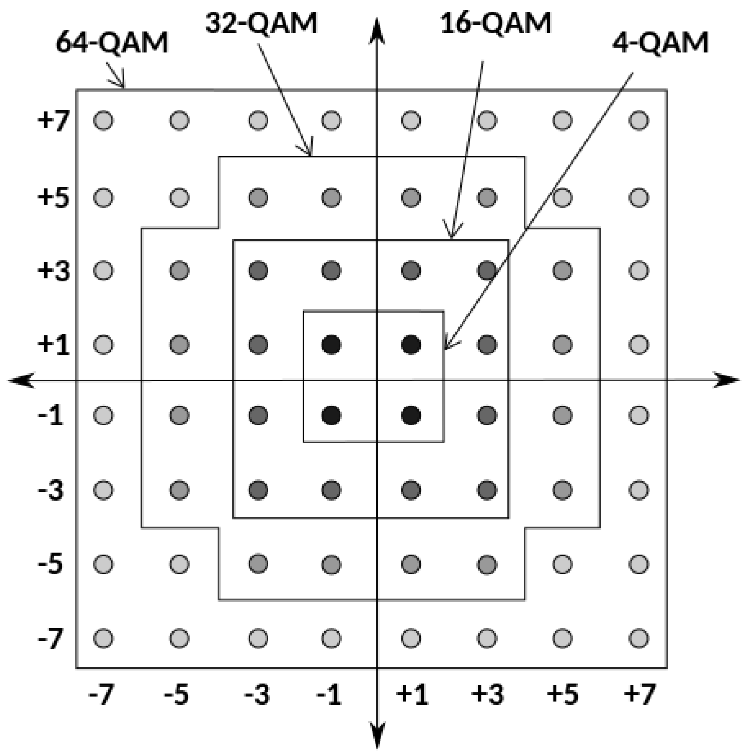
1994年英国数学家安德鲁·怀尔斯（**Andrew Wiles**）完成证明。

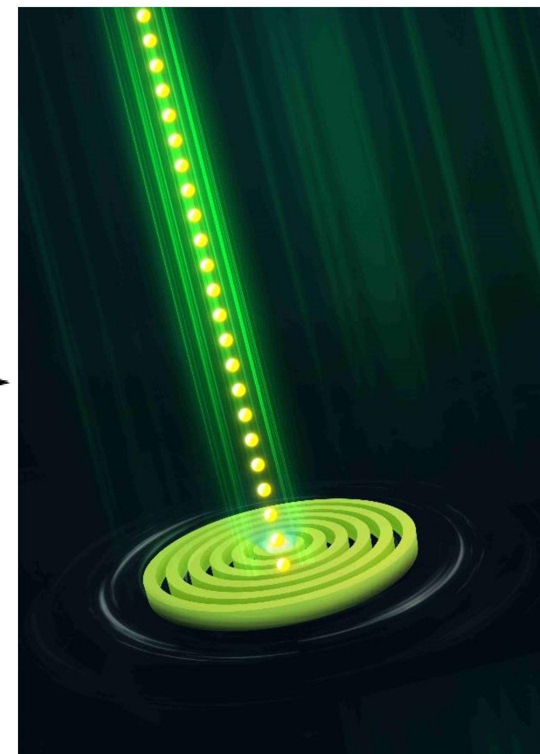
一、离散数学的前世今生

集合论

集合论是研究集合（由一堆抽象“符号”构成的整体）的数学理论，包含了元素、集合、映射、关系等最基本的数学概念。集合论常用来建立数学模型、描述算法。

给『符号』定义运算规则





一、离散数学的前世今生

近世代数

近世代数（抽象代数）
在集合的“符号”间增加运算；
把运算从数字之间扩展到符号之间。
这种“运算”的不同特点形成：
群、环、域等概念。

男人 = 吃饭 + 睡觉 + 挣钱
猪 = 吃饭 + 睡觉
男人 = 猪 + 挣钱
猪 = 男人 - 挣钱
结论：男人不挣钱的都是猪

一、离散数学的前世今生

数论

集合论 ⟷ 图论 ⟷

近世代数

图论可以看做是集合论的可视化应用。用点、线的来分别表示元素和元素之间的各种关系，在计算机科学中应用广泛。

组合数学：(排列、组合、生成函数、算法)。

数理逻辑：逻辑学的符号表示和推演。

二、集合论和图论的用途

例1：文本相似性计算—比较如下两段文字的相似性。

金正恩在会上对强化发展革命武装力量作出指示。他说：人民军今年要集中精力完善军事斗争准备。金正恩还明确了今后势必同美国一战的作战方式和相应战术问题。

金正恩在会上强调了发展革命武装力量的重要性。他说：人民军今年要集中精力加强军事斗争准备。他还明确了要与美国一战的决心并讲到了作战方式和相应战术问题。

→ 建立数学模型

二、集合论和图论的用途

金正恩在会上对强化发展革命武装力量作出指示。他说：人民军今年要集中精力完善军事斗争准备。金正恩还明确了今后势必同美国一战的作战方式和相应战术问题。

分词

A={金正恩，会上，强化，发展，革命武装力量，作出，指示，他，说，人民军，今年，集中精力，完善，军事斗争准备，明确了，今后，势必，美国一战，作战方式，相应，战术问题}

二、集合论和图论的用途

金正恩在会上强调了发展革命武装力量的重要性。他说：人民军今年要集中精力加强军事斗争准备。他还明确了要与美国一战的决心并讲到了作战方式和相应战术问题。

分词

B={金正恩，会上，强调，发展，革命武装力量，重要性，他，说，人民军，今年，集中精力，加强，军事斗争准备，明确了，要，美国一战，决心，讲到了，作战方式，相应，战术问题}

二、集合论和图论的用途

将两段文字通过分词形成两个集合:

A={金正恩，会上，强化，发展，革命武装力量，作出，指示，他，说，人民军，今年，集中精力，完善，军事斗争准备，明确了，今后，势必，美国一战，作战方式，相应，战术问题}

B={金正恩，会上，强调，发展，革命武装力量，重要性，他，说，人民军，今年，集中精力，加强，军事斗争准备，明确了，要，美国一战，决心，讲到了，作战方式，相应，战术问题}

将两段文本的相似性问题转化为两个集合间的相似性问题

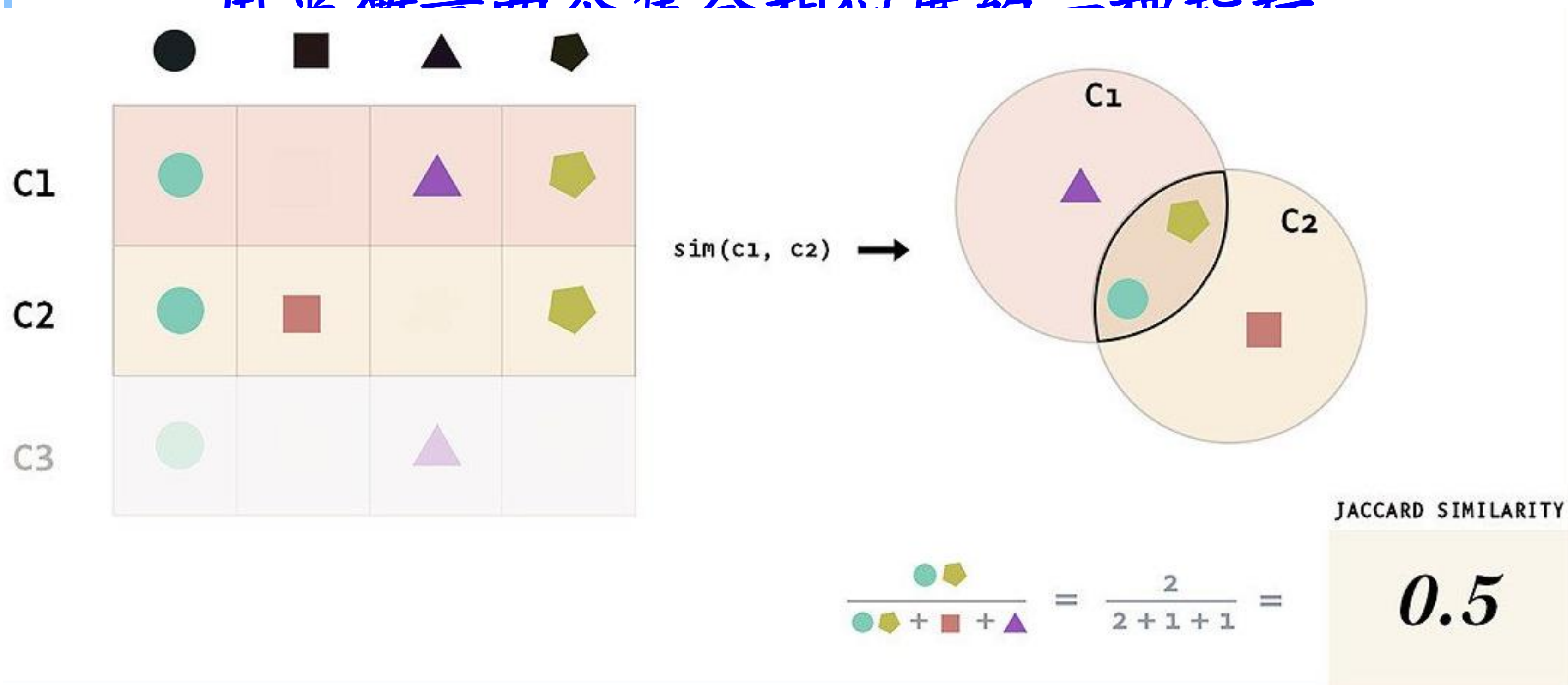
算法设计

二、集合论和图论的用途

杰卡德相似系数(Jaccard similarity coefficient)，

也称杰卡德指数(Jaccard Index)，

用来衡量两个集合相似度的一种指标



还的用的更广泛。

二、集合论和图论的用途

集合论与图论是:

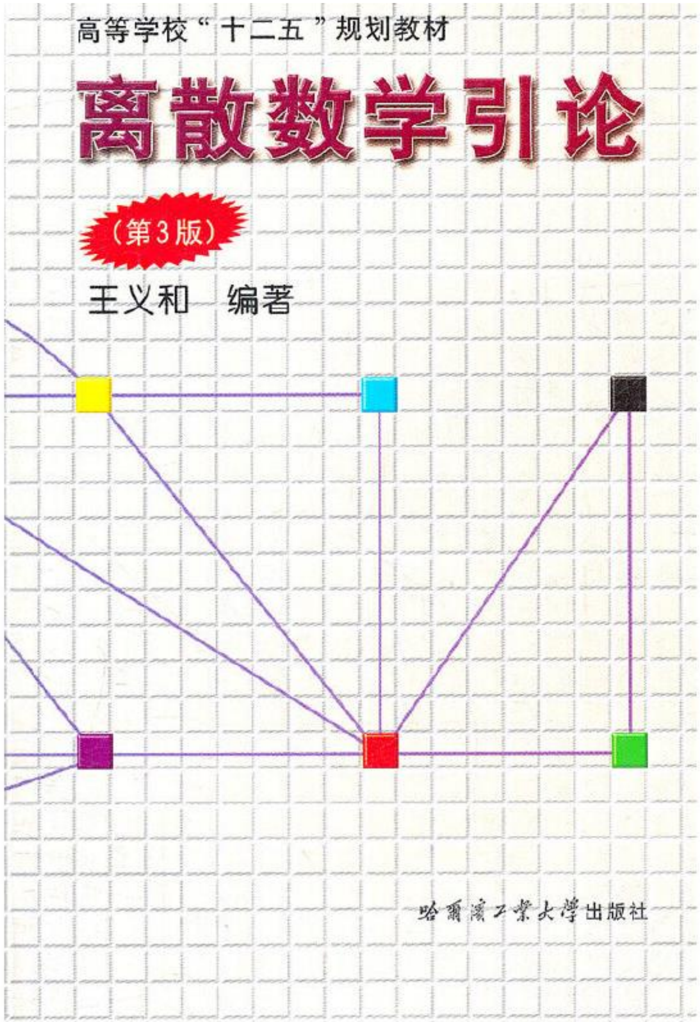
数据结构、算法设计与分析、计算机图形学、图像处理、密码学编码理论、信号处理、数据压缩、人工智能、信息安全、通信网络设计等计算机和信息课程的基础课程。

可以说《集合论和图论》是计算机方向所有软件课程的基础。

考研复试课程

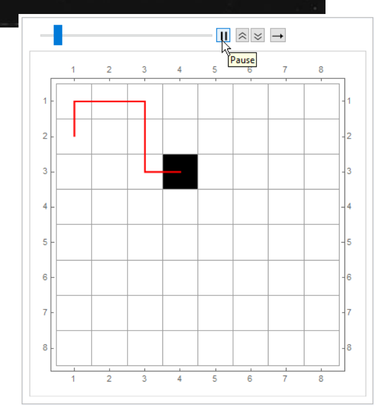
2015年考研复试课总共200分

集合论占18分,图论占14分


高等学校"十二五"规划教材
离散数学引论
(第3版)
王义和 编著
哈尔滨工业大学出版社


计 算 机 科 学 丛 书
Mc Graw Hill
原书第8版
离散数学及其应用
[美] 肯尼思·H. 罗森 (Kenneth H. Rosen) 著
徐六通 杨娟 吴斌 译
经典教材全面升级，全球数百万学生阅读，新版包含超过800道例题和4200道习题
Kenneth H. Rosen
Discrete Mathematics and Its Applications
Discrete Mathematics and Its Applications
Eighth Edition
机械工业出版社
China Machine Press

机械工业出版社


Pause

四、课程内容

第一章:集合及其应用
第二章:映射
第三章:关系
第四章:无穷集合及其基数
*第五章:模糊集合论
第六章:图的基本概念
第七章:树和割集
第八章:连图度和匹配
第九章:平面图和图的着色
第十章:有向图

第一章：集合及其应用

1.1 集合的概念

1.2 子集、集合的相等

1.3 集合的基本运算

1.4 余集、DeMorgan公式

1.5 笛卡尔乘积

1.6 有穷集合的基数

1.1集合的概念

具体

金庸的书：飞、雪、连、天、射、白、鹿；笑、书、神、侠、倚、碧、鸳；越

金庸的书 = {飞，雪，连，天，射，白，鹿，笑，书，神，侠，倚，碧，鸳，越}

集合的名字

集合的元素

抽象

X= {a, b, c, d, e, f, g}

集合的元素（一般用小写字母）

集合的名字(一般用大写字母)

1.1集合的概念

1、集合的概念：通常把具有某种性质的，互不相同的元素的全体称做集合。

在朴素集合论体系中,“集合”是一个原始概念，在朴素集合论中“集合”不能严格定义。

常用大写英文字母A,B,C,...表示集合，用小写英文字母a,b,c,...,表示集合中的元素。

1.1集合的概念

对于一个集合A来说，元素x或者是集合A的元素，或者不是，两者必居其一。

A= {x, y, z, o, p, q}

x是集合A的元素，我们说x属于A，

记为：$x \in A$;

b不是集合A的元素，我们说b不属于A，

记为：$b \notin A$。

1.1集合的概念

2、集合的表示方法:

（1）列举法（显示法，静态的）：列出集合中全部元素或部分元素（且能看出未列出元素明显规律。

例如：设A是由26个英文字母为元素的集合，

则:A={a, b, c, ..., x, y, z} 等价 A={z, y, x, ..., a, b, c } 。

思考：区间[0,1] 所有实数组成的集合使用枚举法?

（2）描述法（隐式法，动态的）：通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合，例如

$$A = \{x \mid x\text{具有性质}P\}$$

例如:$A = \{x \mid x\text{是素数}\}$

集合的描述法定义引起第三次数学危机!

1.1集合的概念

3、三次数学危机:

（1）无理数引起的危机

著名问题：公元前5世纪，毕达哥拉斯定理：一切数均可表示成整数或整数之比。

解决结果：出现了无理数

（2）无穷小（微积分的基础）引起的危机。

著名问题：贝克莱悖论，即无穷小量是否为0。

解决结果：柯西等人建立极限定理

（3）集合的定义引起的危机。

著名问题：罗素悖论

解决结果：康托尔公理集合论的诞生

1.1集合的概念

罗素悖论

一天，某村理发师挂出一块招牌：
“村里所有不自己理发的人都由我给他们理发，我也只给这些人理发。”

设理发师为i，被i理发的人的集合为：

$A=\{x \mid i给x理发\}$

下面我们来看一下理发师i是否属于集合A。

(1) 如果 $i \in A$ ⟶ i给i理发 ⟶ $i \notin A$

(2) 如果 $i \notin A$ ⟶ i不给i理发 ⟶ $i \in A$

这就是第三次数学危机的来源，

对集合论进行修正，避免悖论。代表性成果是公理集合论。

1.1集合的概念

对于（朴素集合论中的）集合的表示法应该注意以下几点:

(1)（朴素）集合中的元素是各不相同的;

判断题: A={a, a, b}

理由: 规定集合中的元素不能相同是因为: 集合中存在相同元素没有意义。

(2) 集合中的元素不规定顺序;

{a, b} = {b, a}

(3) 集合的两种表示法有时是可以互相转化的。

列举法 ⟷ 描述法

1.2 子集、集合的相等

(1)、子集的概念

A={a, b}　B= {a, b, c}

A是B的子集，记作$A\subseteq B$

定义1.1 设A, B为集合, 若A中每个元素都是B中元素，则称A是B的子集。记作$A\subseteq B$，读作“A是B的子集”或“A被B包含”或“B包含A”。

符号化形式为：$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x, \boxed{x\in A \rightarrow x\in B}$

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A, x\in B$

或者：$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x, x\notin B \rightarrow x\notin A$

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\notin B, x\notin A$

$A\subseteq B \Leftrightarrow$ 不在B中的元素必不在A中

1.2 子集、集合的相等

$A=\{a, b, c\}$　$B=\{a, b, d\}$

A不是B的子集，记作$A \not\subseteq B$

怎么证明A不是B的子集?

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in A$使得$x \notin B$

若A，B，C是集合。“$\subseteq$”有以下性质:

(1) $A \subseteq A$

(2) 如果$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$

要注意“∈”与“⊆”在概念上的区别。

判断题：有人说元素有时候也是集合，集合有时候又是元素，对吗？√

对于X和Y，$X \in Y$ 与 $X \subseteq Y$ 可能同时成立 √

对照上面这两个概念，比较集合{a}与{a, {a}}。

$\boxed{\{a\}} \in \{a, \boxed{\{a\}}\}$。并且 $\{\boxed{a}\} \subseteq \{\boxed{a}, \{a\}\}$

$A \in B$ 与 $A \subseteq B$ 有可能同时成立！

1.2　子集、集合的相等

观察：$A=\{a,b\}$ 是 $B=\{a,b,c\}$ 的子集。并且 $A\neq B$

(2)、真子集的概念

定义1.2.2　设A，B为二集合，若 $A\subseteq B$ 且 $\exists x\in B$ 且 $x\notin A$，则称A是B的真子集，记作 $A\subset B$，读作“**A是B的真子集**”，$A\not\subset B$ 读作“**A不是B的真子集**”。

$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B$ 并且 $\exists x\in B$ 且 $x\notin A$

设A, B, C为3个集合，下面3个命题为真：

(1) $A\not\subset A$。

(2) $A\subset B$，则 $B\not\subset A$。

(3) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$。

1.2 子集、集合的相等

观察：$A=\{a,c,b\}$，$B=\{a,b,c\}$

(3)、集合相等的概念

定义1.2.3 如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$（即,集合A和B由完全相同的元素组成）,则称A与B相等，记作$A=B$。

其符号化形式为：$A=B\Leftrightarrow\forall x, x\in A \boxed{\leftrightarrow} x\in B$ 重要!

由子集与集合相等的概念，可知：

(1) $A\neq B\Leftrightarrow A\not\subseteq B$或者$B\not\subseteq A$

(2) $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$A\neq B$。

(3) 如果$A\subset B$且$B\subset C$,则$A\subset C$。

1.2 子集、集合的相等

(4)、空集的概念

定义1.2.4 不拥有任何元素的集合称为空集，记作Ø。

例如：$A=\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in R\}$

$B=\{(x, y) \mid x^2+y^2<0 \wedge x, y \in R\}$ 都是空集。

{Ø} 不是空集！

{Ø} 它是包含一个空集的集合。

定理1.2.1 空集是一切集合的子集。

证明：需要证明：

对于空集∅和任意集合A

$\forall x, x \in \emptyset \rightarrow x \in A$

需要数理逻辑的知识，对于一个命题来说，如果前提不成立，这个命题就是对的。

推论：空集是唯一的。

证明：设∅和∅'都是空集，则定理1.2.1可知

$\emptyset \subseteq \emptyset'$且$\emptyset' \subseteq \emptyset$，得到$\emptyset = \emptyset'$

从而空集是唯一的。

定理1.2.1 空集是一切集合的子集。

设有命题：若A，则B，即A→B。归谬法从假设A为真、B为假，推出矛盾。这就说明当A为真时，B必为真，从而证明P为真。

证明方法2（归谬法）：假设存在一个集合A，有$\emptyset \not\subseteq A$，即$\exists x_0$，$x_0 \in \emptyset \wedge x_0 \notin A$，$x_0 \in \emptyset$，这与空集定义相矛盾，证明完成。

1.2 子集、集合的相等

(5)、集族的概念

$A_1=\{1,2,3\}$ $A_2=\{2,3,4\}$ $A_3=\{5,6,7\}$

$A=\{A_1,A_2,A_3\}$

例如：在学校中，每个班级的学生形成一个集合，而全校的各个班级就形成一个集族。

定义1.2.4 以集合为元素的集合称为集族。

集族的表示方法：

设$A=\{A_1,A_2,A_3 \cdots A_n\}$为一个集族。

若令$I=\{1,2,3,\cdots n\}$，则$\forall i\in I$，i确定了一个唯一（对应）的集合A_i。于是集族A又常写成$\{A_h\}_{h\in I}$。

1.2 子集、集合的相等

例1.2.3 设$S=\{1,2,3\}$，S的所有子集构成的集合为:

$$B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

B称作S的幂集，记作2^S

(6)、幂集的概念

定义1.2.5 把集合S的所有子集(显然，包括空集Ø和S本身)形成的集族称为S的幂集，记为2^S或P(S)。幂集符号化为：$2^S=\{A|A\subseteq S\}$。

表示法的来历:

2^S：$(1+1)^s$

P(S)：Power Set

1.2 子集、集合的相等

定理1.2.2 设集合A的元素个数$|A|=n$(n为自然数),则$|P(A)|=2^n$。

证明:

A的0个元素的子集个数为:$C(n,0)$

A的1个元素的子集个数为:$C(n,1)$

A的2个元素的子集个数为:$C(n,2)$

....

A的S个元素的子集个数为:$C(n,n)$

$$|P(A)|=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$$

$$=2^n$$

注意，$2^{\emptyset}=\{\emptyset\}$。

在这里要区分$\emptyset$和$\{\emptyset\}$

$\emptyset$为空集，而$\{\emptyset\}$是一个集族。

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ ？

$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$。？

1.3 集合的基本运算

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$　$B=\{2,3,5,7\}$

$A\cup B=\{2,3,5,6,7,8,9,10\}$。

(1)、并集的概念

定义1.8　设A,B为二集合，称由A和B所有（至少属于A与B之一）元素组成的集合为A与B的并集,记作$A\cup B$,称$\cup$为并运算符，$A\cup B$的描述法表示如下：

$A\cup B=\{x\mid x\in A$或者$x\in B\}$。

1.3　集合的基本运算

定理1.3.1　设A, B, C为任意的三个集合

1°. 交换律成立，　即$A\cup B=B\cup A$;

2°. 幂等律成立, 即$A\cup A=A$;

3°. $\varnothing\cup A=A$;

4°. $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$。

5°. 结合律成立, 即$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

1.3 集合的基本运算

将集合的并运算推广到多个集合的并集。

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$定义为至少属于$A_1, A_2, ..., A_n$中之一的那些元素构成的集合。

简记为：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

若$A_1, A_2, ..., A_n, ...$是一个集合的无穷序列，则它们的并集记为：$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$，

简记为：$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

一般地，若$\{A_l\}_{l \in I}$是任一集族，则集族中各集的并集记为

$$\bigcup_{l \in I} A_l = \{x \mid \exists l \in I, x \in A_l\}$$

**

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{2,3,5,7\}$

$A\cap B=\{5,7\}$。

(2)、交集的概念

定义1.9 设A,B为二集合，称由A和B的公共(既属于A又属于B)元素组成的集合为A与B的交集，记作$A\cap B$，称$\cap$为交运算符。

$A\cap B$的描述法表示为：

$A\cap B=\{x \mid x\in A且x\in B\}$

定理1.3.2 设A, B, C为任意的三个集合，则:

6°. 交换律成立, 即$A\cap B=B\cap A$;

7°. 幂等律成立, 即$A\cap A=A$;

8°. $\varnothing\cap A=\varnothing$;

9°. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

10°. 结合律成立, 即$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

1.3 集合的基本运算

与并运算类似，可以将集合的交推广到有限个或可数个集合：

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, x \in A_i)\}$$

类似定义

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in N, x \in A_n\}$$

对于集族 $\{A_l\}_{l \in I}$ 中各集的交记为：$\bigcap_{l \in I} A_l$ 其定义为

$$\bigcap_{l \in I} A_l = \{x \mid \forall m \in I, x \in A_m\}$$

定理1.3.3 设A为一集合，$\{B_l\}_{l\in I}$为任一集族，则：

$$A \cup \left(\bigcap_{l\in I} B_l\right) = \bigcap_{l\in I}(A \cup B_l)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{l\in I} B_l\right) = \bigcup_{l\in I}(A \cap B_l)$$

证明: $A\bigcup(\bigcap_{l\in I}B_l)=\bigcap_{l\in I}(A\bigcup B_l)$

(1) $\forall x\in A\boxed{\bigcup}(\bigcap_{l\in I}B_l)$

$\Rightarrow x\in A\ or\ x\in\boxed{\bigcap_{l\in I}}B_l$

$\Rightarrow\forall l\in I,x\in A\bigcup B_l$

$\Rightarrow x\in\bigcap_{l\in I}(A\bigcup B_l)$

(2) 略

定理1.3.4（定理1.3.3特例） 设A,B,C为任意三个集合，则:

11°.交运算对并运算满足分配律,

即$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

12°.并运算对交运算满足分配律,

即$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

定理1.3.5 对任何集合A,B,吸收律成立。

13°. $A\cap(A\cup B)=A$;

14°. $A\cup(A\cap B)=A$。

1.3 集合的基本运算

定义1.3.3 设A, B为任意集合，若 $A \cap B = \varnothing$，则称A, B不相交。若集序列A_1, A_2, ..., A_n, ...对于任意的A_i与$A_j(i \neq j)$不相交，则称A_1, A_2, ... , A_n, ...是两两不相交的集序列。

A={5, 6, 7, 8, 9, 10}　B ={2, 3, 5, 7}

A\B ={6, 8, 9, 10}

(3)、差集的概念

定义1.11 设A, B为两个任意集合，由属于A而不属于B的全体元素组成的集合称为A与B的差集，记作A\B。

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}.$$

定理1.3.6 设A, B, C为任意三个集合，则

15°. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$。 重要!

定理1.3.7 设A, B为任意二个集合，则

$(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$。

差运算不满足交换律

即一般情况下：$A\backslash B \neq B\backslash A$

$A=\{5, 6\}$　　　$B=\{5\}$

$A\backslash B = \{6\}$　$B\backslash A = \varnothing$

差运算不满足结合律。

$(A\backslash B)\backslash C \neq A\backslash(B\backslash C)$

$A=\{5, 6\}$　　　$B=\{5\}$　　　$C=\{5\}$

$(A\backslash B)\backslash C=\{6\}$　　$A\backslash(B\backslash C)=\{5, 6\}$。

1.3 集合的基本运算

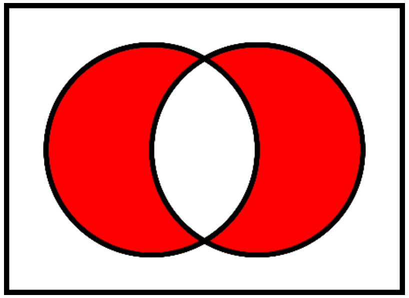
$A=\{5,6,7,8,9,10\}$　　$B=\{2,3,5,7\}$

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$　　$=\{6,8,9,10,2,3\}$

(3)、对称差的概念

定义1.3.5 设A, B为任意两个集合，称$A\setminus B$与$B\setminus A$的并集称为A与B的对称差，记作$A\Delta B$(也记作$A\oplus B$)

$$
\begin{aligned}
A\Delta B&=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\\
&=\{x\mid (x\in A\text{且}x\notin B)\text{或}(x\notin A\text{且}x\in B)\}\\
&=\{x\mid x\in A\cup B\text{且}x\notin A\cap B\}\\
&=(A\cup B)\setminus(A\cap B)。
\end{aligned}
$$



1.3　集合的基本运算

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$　$B=\{2,3,5,7\}$

$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$　$=\{6,8,9,10,2,3\}$

(3)、对称差的概念

定义1.3.5 设A,B为任意两个集合，称A\B与B\A的并集称为A与B的对称差，记作$A\Delta B$(也记作$A\oplus B$)

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$	(定义)
$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$	(补交转换律)
$=((A\cap\sim B)\cup B)\cap((A\cap\sim B)\cup\sim A)$	(∪对∩分配律)
$=((A\cup B)\cap(\sim B\cup B))\cap((A\cup\sim A)\cap(\sim B\cup\sim A))$	(∪对∩分配律)
$=(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)$	(排中律,同一律)
$=(A\cup B)\cap(\sim(A\cap B))$	(德摩根律)
$=(A\cup B)-(A\cap B)$	(补交转换律)

定理1.3.8 设A,B,C为任意三个集合,则

16°. $A\Delta B=B\Delta A$;

17°. $A\Delta A=\varnothing$;

18°. $A\Delta\varnothing=A$;

19°. $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

20°. 交运算关于对称差满足分配律,即

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$。

***