第二章：映射

2.1 函数的一般概念—映射

2.2 抽屉原理

2.3 映射的一般性质

2.4 映射的合成

2.5 逆映射

2.6 置换（续）

2.7 二元和n元运算

2.8 集合的特征函数

2.7 二元和n元运算

本节主要问题

（1）无穷序列和有穷序列的定义

（2）子序列的定义

（3）运算的定义

（4）运算的性质

（1）无穷序列和有穷序列的定义

序列是排成一列的对象

例如：序列ababc可以看做集合{1, 2, 3, 4, 5}到集合X = {a, b, c}的一个映射

例如：序列ababc...可以看做集合{1, 2, 3, 4, 5...}到集合X = {a, b, c}的映射

定义2.7.1 一个自然数集N到集合X的映射称为X上的一个无穷序列。而从{1, 2, . . . , n}到X的一个映射称为X上的一个长度为n的(有限)序列。

如果 $a: N \to X, \forall i \in N$, 令$a(i)=a_i$, 则a就可以写成

$a_1, a_2, a_3, \ldots$，还可简写成$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, a_i称为这个序列的第i项

n元组$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 也常记为（$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$）或 $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

（2）子序列的定义

例如：N的一个子序列1, 3, 6, 10, . . .

s(1), s(2), s(3), s(4), . . .

定义2.7.2 一个从N到N的映射s，如果∀i，j ∈ N，i < j时就有s(i) < s(j)，则称s为N的一个子序列。如果令s(i) = n_i，则这个子序列就记为n_1，n_2，n_3，. . . ，其中$n_1 < n_2 < n_3 <$. . . 。

又如：序列c b d b c b c c c c c b , . .

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}, . . .

as(1)=c, as(2)=d, as(3)=b, as(4)=c, . . .

则cdbc. . .是a的一个子序列

定义2.7.3 设a=$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$是X上的一个序列，s=$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$是自然数序列的一个子序列，则s与a的合成a°s称为a的一个子序列。

（3）运算的定义

基本运算和映射的关系举例

例：整数加法：1 + 1 = 2，1 +（-2）= -1

$f: Z \times Z \rightarrow Z$的映射

例：整数减法：1 - 1 = 0，1 -（-2）= 3

$f: Z \times Z \rightarrow Z$的映射

例：实数乘法：5.5 × 4 = 22

$f: R \times R \rightarrow R$的映射

例：实数除法：15 / 2 = 7.5

$f: R \times (R\backslash\{0\}) \rightarrow R$的映射

定义2.7.4 设X,Y,Z为任意三个非空集合。一个从X×Y到Z的映射φ称为X与Y到Z的一个二元运算或二元代数运算。当X = Y = Z时，称φ为X上的二元运算。

（3）运算的定义

定义2.7.4 设X, Y, Z为任意三个非空集合。一个从$X\times Y$到Z的映射φ称为X与Y到Z的一个二元运算或二元代数运算。当X = Y = Z时，称φ为X上的二元运算。

φ称为运算符号，表示运算法则，*X*和*Y*是运算对象的集合，*Z*是运算结果所在的集合。 $\forall (x,y)\in X\times Y$，如果$\varphi(x,y)=z$，习惯上记为 $x\varphi y=z$。

设|X| = m, |Y| = n, |Z| = q

问： X与Y到Z可以定义多少二元运算？ $q^{m\times n}$

（3）运算的定义

例2.7.3 设K={0, 1}，在K上定义加法和乘法，并分别用“+”和“∘”表示加法运算符和乘法运算符。两种运算规则分别有图2.7.2中（a）（b）两表给出。

+	0	1
0	0	1
1	1	0

(a)

∘	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

“and”

“or”

“xor”

?

图2.7.2 加法表和乘法表

（3）运算的定义

定义2.7.5 从集合X到集合Y的任一映射都称为X到Y的一元运算。若X = Y，则X到X的一元运算称为X上的一元运算，也叫做X的变换。

设K={0,1}，在K上的逻辑非运算

设K={0,1}，在K上可以定义多少一元运算？4种

$\varphi(0) = 0$，$\varphi(1) = 0$，

$\varphi(0) = 1$，$\varphi(1) = 1$，

设$|X| = m$，$|Y| = n$

问：X到Y可以定义多少一元运算？n^m

（3）运算的定义

定义2.7.6 设$A_1, A_2, ..., A_n$, D为非空集合。一个从$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$到D的映射φ称为$A_1, A_2, ..., A_n$到D的一个n元(代数)运算。如果$A_1=A_2=...=A_n=A$，则称φ为A上的n元运算。

设$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, ..., |A_n| = m_n, |D| = m$，问从$A_1, A_2, ..., A_n$到D有多少个n元运算?

$m^{m1 \times m2 \times ... \times mn}$

（4）运算的性质

定义2.7.7 设“∘”是集合X上的一个二元代数运算。

如果$\forall a,b,c \in X$,恒有$a \circ b = b \circ a$,则称二元运算“∘”满足交换律。

如果$\forall a, b, c \in X$，总有$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$则称二元运算“∘”满足结合律。

普通实数运算	加	减	乘	除
交换律?	√	×	√	×
结合律?	√	×	√	×

{0,1}上的+和∘

+	0	1
0	0	1
1	1	0

(a)

∘	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

	(a)	(b)
交换律?	√	√
结合律?	√	√

（4）运算的性质

定义2.7.8 设“+”与“∘”是集合X上的两个二元代数运算。

如果$\forall a, b, c \in X$，恒有$a\circ(b+c) = (a\circ b)+(a\circ c)$, 则称二元运算“∘”对“+”满足左分配率。

如果总有 $(b+c)\circ a = (b\circ a)+(c\circ a)$, 则称二元运算“∘”对“+”满足右分配率。

	加对乘	乘对加	乘对减	乘对除
左分配律?	×	√	√	×
右分配律?	×	√	√	×

（4）运算的性质

定义2.7.9 设“∘”是集合X上的一个二元代数运算。

如果∃一个元素e∈X,使得∀x∈X恒有e∘x=x∘e=x,则称e为二元运算“∘”的单位元素。

如果代数系(X, ∘)中有单位元素e, a为X中的某个元素，当∃b∈X使得a∘b=b∘a=e，则称b为a的逆元素。

加法的单位元? **0** 加法的逆元素? **-a**

减法的单位元? 无 减法的逆元素? 无

除法的单位元? 无 除法的逆元素? 无

乘法的单位元? **1** 乘法的逆元素? **1/a,a≠0**

+	0	1
0	0	1
1	1	0

单位元 0

逆元素

0对+的逆元是0,1对+的逆元是1

∘	0	1
0	0	0
1	0	1

单位元 1

逆元素

0对∘无逆元,1对∘的逆元是1

（4）运算的性质

定义2.7.10 设(S, +, °)与(T, ⊕, *)为两个代数系。如果存在一个一一对应φ:S->T，使得∀x, y∈S，有：

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\oplus\varphi(y),\ \varphi(x^\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)$$

则称(S, + , °) 与 (T, ⊕, *)同构，即为S≅T

+	0	1
0	0	1
1	1	0

(a)

∘	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

例如： **K = {0, 1}, (K, +, °)**

S = {F, T}, (S, xor, or)

2.8 集合的特征函数

本节主要问题

（1）集合和函数的对应关系

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

（3）同构

（1）集合和函数的对应关系

设全集X = {a,b,c,…,x,y,z}, E = {a, b, c}

若定义函数：$f(x)=\begin{cases}1,\text{如果}x\in E,\\0,\text{如果}x\notin E.\end{cases}$

则有f(a)=1, f(b)=1, f(c)=1, f(d)=0, …

可见按上述定义，建立起来的这个从X到{0,1}的映射f和X的一个子集E一一对应

定义2.8.1 设X是一个集合，E⊆X。从X到{0, 1}的如下的一个映射χ_E称为E的特征函数：

∀x∈X,

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1,\text{如果}x\in E,\\0,\text{如果}x\notin E.\end{cases}$$

可见, 集合E和集合的特征函数χ_E之间相互唯一确定。

或者说X的一个子集唯一确定一个函数，反过来，一个这样的函数也唯一确定X的一个子集。

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

1. 若E和F$\subseteq$X。且E$\neq$F，则$\chi_E \neq \chi_F$。

设全集X = {a,b,c,…,x,y,z}, E = {a, b, c}, F={c, d},

$\chi_E(a) \neq \chi_F(a)$

证明：由E$\neq$F可得，$\exists x \in E$，$x \notin F$ 或者$\exists x \in F$，$x \notin E$

不失一般性，我们令 $\exists x \in E$，$x \notin F$;

则$\chi_E(x)=1$; $\chi_F(x)=0$, 因此：$\chi_E \neq \chi_F$。

1*. 若E和F$\subseteq$X且$\chi_E \neq \chi_F$，则E$\neq$F。

定义2.8.1 设X是一个集合，E$\subseteq$X。从X到{0,1}的如下的一个映射χ_E称为E的特征函数：$\forall x \in X$,

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, 如果 x \in E, \\ 0, 如果 x \notin E.\end{cases}$$

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

2. 若$E\subseteq F$。则$\forall x\in X, \chi_E(x)\le\chi_F(x)$。

设全集$X = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$，$E = \{a, b\}$，$F=\{a, b, c\}$

$\chi_E(a)=\chi_F(a)=1$； $\chi_E(b)=\chi_F(b)=1$； $\chi_E(c)=0, \chi_F(c)=1$；
$\chi_E(d)=\chi_F(d)=0$； ……

2*. 若$\forall x\in X, \chi_E(x)\le\chi_F(x)$，$E\subseteq F$；

3. $\chi_\varnothing\equiv 0$，即$\forall x\in X, \chi_\varnothing(x)=0$；

4. $\chi_X\equiv 1$，即$\forall x\in X, \chi_X(x)=1$。

定义2.8.1 设X是一个集合，$E\subseteq X$。从X到{0,1}的如下的一个映射χ_E称为E的特征函数：$\forall x\in X$，

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, \text{如果} x\in E,\\ 0, \text{如果} x\notin E.\end{cases}$$

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

令 $Ch(X)=\{\chi|\chi: X\to\{0,1\}\}$

$Ch(X)$ 是集合当X中各子集为E时，构成E的特征函数的集合 χ_E。

例如：$X=\{a,b\}$，幂集为 $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$X=\{a,b\}$，$E=\varnothing$ $\Longleftrightarrow$ $\chi(a)=0$，$\chi(b)=0$

$X=\{a,b\}$，$E=\{a\}$ $\Longleftrightarrow$ $\chi(a)=1$，$\chi(b)=0$

$X=\{a,b\}$，$E=\{b\}$ $\Longleftrightarrow$ $\chi(a)=0$，$\chi(b)=1$

$X=\{a,b\}$，$E=\{a,b\}$ $\Longleftrightarrow$ $\chi(a)=1$，$\chi(b)=1$

$Ch(X)$ 与X的幂集 2^X 存在一一对应。

（3）同构

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

借助于以上加法、乘法的定义，我们可以定义Ch(X)中的加法和乘法，分别用“∨”与“∧”表示；

$\forall \chi, \chi' \in Ch(x)$ 及 $x \in X$；

$(\chi \vee \chi')(x) = \chi(x) + \chi'(x) + \chi(x)\chi'(x)$

$(\chi \wedge \chi')(x) = \chi(x)\chi'(x)$

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

其次，在Ch(X)中定义χ的补χ^C为，

$\chi^C(x) = 1 - \chi(x)$，

C	
0	1
1	0

可见，如果χ为E的特征函数的话，那么χ^C就是E^C的特征函数。

（3）同构

定理2.8.1 设X是一个集合，则代数系

$(2^X, \cup, \cap, ^c)$ 与 $(Ch(X), \vee, \wedge, ^c)$ 同构。

如果存在一个一一对应 $\Phi: 2^X \to Ch(X)$，

使得 $\forall A, B \in 2^X$，有

$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \wedge \Phi(B)$，

$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \vee \Phi(B)$，

$\Phi(A^c) = \Phi(A)^c$。

[证] 令 $\Phi: 2^X \to Ch(X)$ 其定义为 $\forall E \in 2^X$，$\Phi(E) = \chi_E$。

一、证Φ为一一对应。

1、Φ为单射 if $E \neq E'$ then $\chi_E \neq \chi_{E'}$ 所以Φ为单射

2、$\forall \chi \in Ch(X)$，构造 $F = \{x | \chi(x) = 1, x \in X\}$

$\Phi(F) = \chi = \chi_F$，所以Φ为满射；

Φ为一一对应。

（3）同构

二、证$\Phi(E\cap F)=\chi_E\cdot\chi_F$

设$E,F\subseteq X$，由定义可知：　$\Phi(E\cap F)=\chi_{E\cap F}$

只须证明$\chi_{E\cap F}=\chi_E\cdot\chi_F$即可。

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1,\text{如果}x\in E,\\0,\text{如果}x\notin E.\end{cases}$$

1、$x\in E\cap F$时，$x\in E$且$x\in F$

$\chi_{E\cap F}(x)=1=1\cdot 1=\chi_E(x)\cdot\chi_F(x)$

故这时$\chi_{E\cap F}(x)=\chi_E(x)\cdot\chi_F(x)$。

2、$x\notin E\cap F$，则$x\notin E$或$x\notin F$，或者$x\notin E$且$x\notin F$，

从而$\chi_E(x)=0$或$\chi_F(x)=0$，或者二者都等于0

$\chi_E(x)\cdot\chi_F(x)=0\cdot 1=0$或$\chi_E(x)\cdot\chi_F(x)=1\cdot 0=0$;

由$x\notin E\cap F$，$\chi_{E\cap F}(x)=0$;

总之$\chi_{E\cap F}(x)=\chi_E(x)\cdot\chi_F(x)$。因此，$\chi_{E\cap F}=\chi_E\cdot\chi_F$。

三、类似可以证明：$\Phi(E\cup F)=\chi_E\vee\chi_F$

（3）同构

四、$\Phi(E^c)=(\chi_E)^c$

因为$\Phi(E^c)=\chi_{E^c}$。只须证明$(\chi_E)^c=\chi_{E^c}$。

1、若$x\in E$，则$x\notin E^c$，从而$\chi_E(x)=1$，$\chi_{E^c}(x)=0$

$$(\chi_E)^c(x)=1-\chi_E(x)=0$$

2、若$x\notin E$，则$x\in E^c$，所以$\chi_E(x)=0$，$\chi_{E^c}(x)=1$，

$$(\chi_E)^c(x)=1-\chi_E(x)=1=\chi_{E^c}(x)。$$

因此：$\Phi(E^c)=(\chi_E)^c$。

综上，代数系$(2^X, \cup, \cap, ^C)$与$(Ch(X), \vee, \wedge, ^C)$同构。

第二章：映射

1(P55)、设$N=\{1, 2, 3, \ldots\}$。试构造两个映射f和g：$N \to N$，使得$fg=I_N$，但$gf \neq I_N$。

解：$g(x)=x+1$;

$f(x)=x-1$，当$x=1$时：$f(x)=1$。

$fg=I_N$，但$gf \neq I_N$。

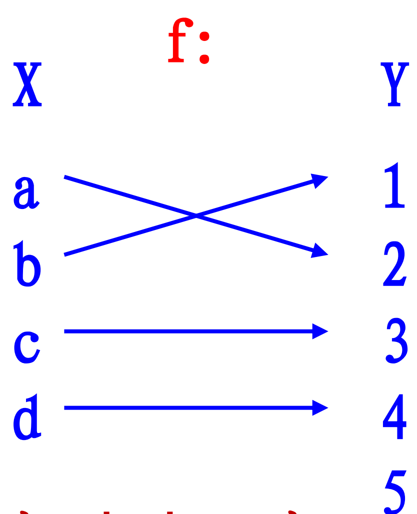
2(P55)、设f:X→Y。

(1)如果存在唯一的一个映射g:Y→X,使得gf=Ix，那么f是否可逆。不一定

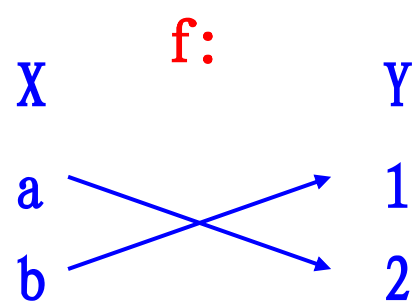
题意：f存在唯一的左逆映射，问f是不是一一对应？

因为gf=Ix，所以f为单射，那么f是否是满射呢？

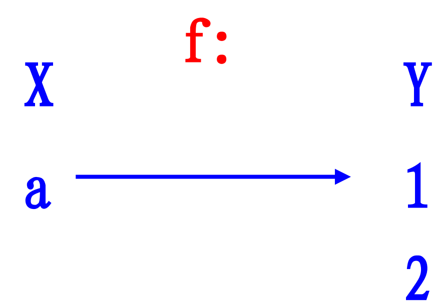
如果f再为满射，则f就是一一对应，即f可逆



当 |X|>2时，
g不唯一



当 |X|=2时，
g唯一，
f也是满射
f可逆



当 |X|=1时，
g唯一，
f不是满射
f不可逆

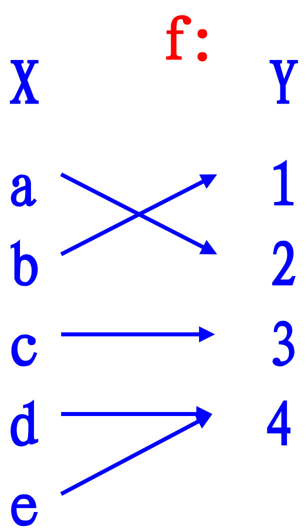
2(P55)、设f: X→Y。

(2)如果存在唯一的一个映射g: Y→X, 使得 $fg=I_Y$，那么f是否可逆。可逆

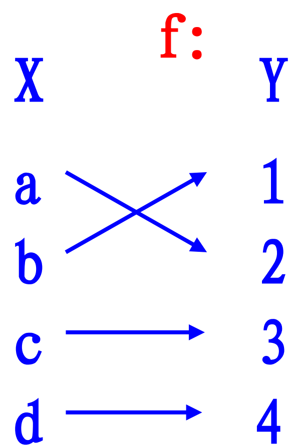
题意：f存在唯一的右逆映射，问f是不是一一对应?

因为 $fg=I_Y$，所以f为满射，那么f是否是单射呢?

如果f再为单射，则f就是一一对应，即f可逆



g不唯一



g唯一

证明：f可逆。

因为f右可逆，所以f是满射。

$\forall y\in Y$，如果 $|f^{-1}(y)|>1$,

则右逆映射不唯一。

因此，$|f^{-1}(y)|=1$，

所以，f也是单射

从而，f是双射

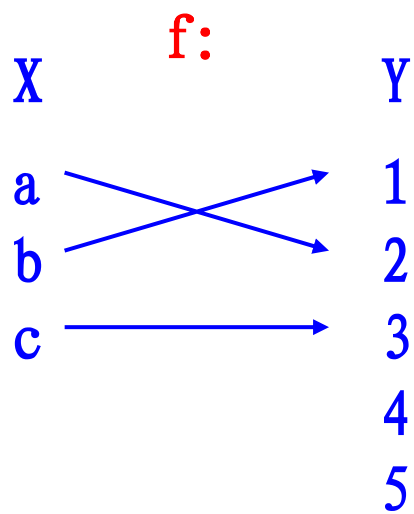
综上，f可逆。

第二章：映射

3(P55)、设f:X→Y。X和Y为有穷集合。

(1)如果f是左可逆的，那么f有多少个左逆映射?

题意：gf=Ix，所以f为单射，g为满射，g有多少个呢?



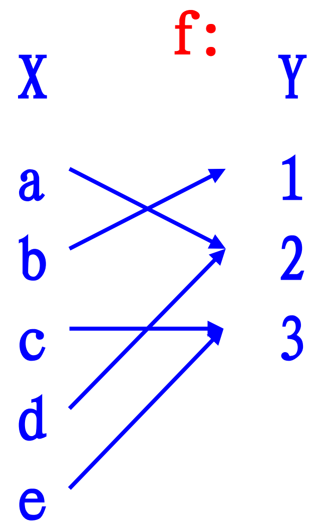
$$|X|^{|Y|-|X|}$$

第二章：映射

3(P55)、设f:X→Y。X和Y为有穷集合。

(2)如果f是右可逆的，那么f有多少个右逆映射?

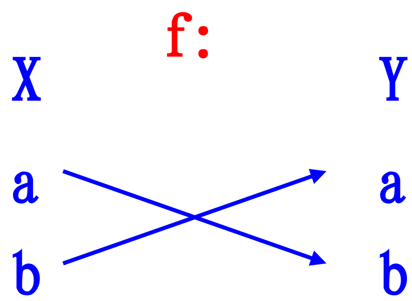
题意：$fg=I_Y$，所以g为单射,f为满射，g有多少个呢?



设 $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

则右逆映射的个数是：$|f^{-1}(y_1)| \times |f^{-1}(y_2)| \times \ldots \times |f^{-1}(y_n)|$

5(P55)、是否有一个从X到X的一个一一对应f，使得$f=f^{-1}$，但$f \neq I_X$?



存在！f为对换即可

判断：f是集合A到B的双射，则f(A)=B

✓

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

(1)有多少个不同的由X到Y的映射？n^m

(2)有多少个不同的由X到Y的部分映射？$(n+1)^m$

(3)有多少个不同的由X到Y的双射？$n!$ 且$m=n$

(4)有多少个不同的从X到Y的单射？$C(n,m)m!$ 且$n\geq m$

(5)有多少个不同的从X到Y的满射？$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m$

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

(5)有多少个不同的从X到Y的满射？

解：设y_i没有原象的映射之集为A_i ,则从X到Y的满射个数是：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$=N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

$=n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m -\ldots$

$+(-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m+(-1)nC(n,n)0^m$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m$$

例2.2.5 n^2+1个士兵站成1排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或形成一个按身高从大到小的队列。

题意：$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n^2+1}$是$n^2+1$不相等的实数组成的序列，则从这个序列中至少可选出一组由$n+1$个元素组成的或为单调增或为单调减的子序列。

例如：对于序列：5, 3, 16, 10, 15, 14, 9, 11, 6, 7，共3^2+1个。

证明：从序列中的每一个元素a_i向后可选出若干个单调增子序列，其中有一个元素最多的单调增子序列，设其元素个数为l_i, i=1, 2, ..., n^2+1, 于是得一序列

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_{n^2+1} \quad (L)$$

1. 若序列(L)中有一个元素$l_k \geqslant n+1$, 则定理得证。

2.设不存在元素个数超过n的单调增子序列，即：

$$0 < l_i \le n, i = 1,2,...,n^2 + 1$$

根据鸽巢原理的推论3.7，至少存在n+1个：

$l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots, l_{k_{n+1}}$ 的值相等

设$l_{k_1} = l_{k_2} = \ldots = l_{k_{n+1}} = l$

推论3.7 m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢里有不少于

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$ **只鸽子。**

设$k_1<k_2<\ldots<k_{n+1}$，已知条件中a_l是不同的实数，则有如下结论

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots > a_{k_{n+1}} \qquad \text{(A)}$$

如若不然，设$k_i<k_j$，有$a_{k_i}<a_{k_j}$，

从a_{k_j}开始向后的最长的单调增序列为l，从a_{k_i}开始向后的最长的单调增序列也是l，

如果把元素a_{k_i}加到从a_{k_j}开始的长度为l的单调增序列的前面，构成从a_{k_i}开始的长度为l+1的单调增序列，这和l是从a_{k_i}向后的最长单调增序列的假设矛盾。

序列(A)是一个单调减子序列，这就证明了若不存在n+1个元素的单调增子序列，便存在一个有n+1个元素的单调减子序列。