第三章：关系

3.1 关系的概念
3.2 关系的性质
3.3 关系的合成运算
3.4 关系的闭包
3.5 关系矩阵和关系图
3.6 等价关系和集合的划分
3.7 映射按等价关系分解
3.8 偏序关系与偏序集
3.9*良序集与数学归纳法

第三章知识结构图

关系的概念、性质、合成、闭包、关系矩阵和关系图、集合的划分、映射的划分、偏序关系和偏序集。

内容

关系

图表示（可视化）

建模

社交网络、生物信息学、数据挖掘、人工智能、XXX预测、……

3.1 关系的概念

本节主要问题

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

（2）“关系”和映射的区别

（3）关系的一些术语

（3）映射与笛卡尔积的关系

例:设X={a,b},Y={1,2}

$X \times Y = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$, 幂集（关系）有 $2^{|X\times Y|} = 2^4 =$ **16** 个，包括: ∅, {(a, 1)}, …, {(a, 1), (b, 1)}, …, {(a, 1), (a, 2), (b, 1)}, …, {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)}，其中只有**4**个是**映射**: {(a, 1), (b, 1)}，{(a, 1), (b, 2)}，{(a, 2), (b, 1)}，{(a, 2), (b, 2)}。

定义2.1.2 设X和Y是两个非空集合，一个从X到Y的**映射**是一个满足以下条件的X×Y的子集f:

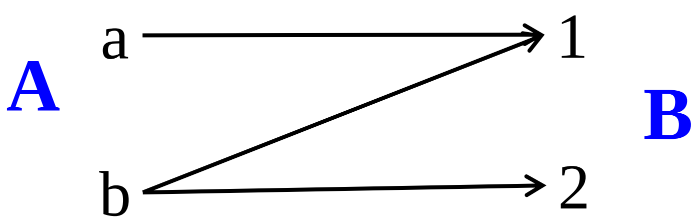
∀x∈X，∃唯一的y∈Y，使得(x, y)∈f。

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

例3.1.1：设A是一个学校的学生集合，B是这个学校的所有课程的集合。

设A={张三，李四}，B={C语言，离散数学}

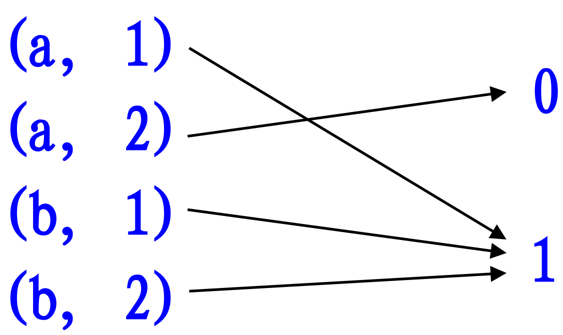
集合元素用符号代替：A={a，b}，B={1，2}

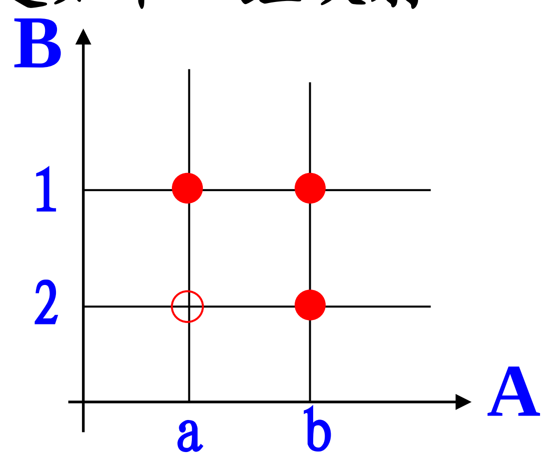


x指向y表示学生x选了课程y

这种选课关系可以看成是如下一组映射

A×B





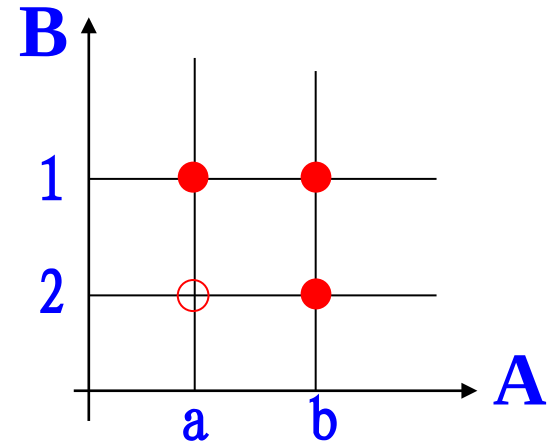
（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

这种选课关系可以看成是如下一组映射

A×B

(a, 1)
(a, 2)
(b, 1)
(b, 2)

0
1



关系的初始定义：

定义3.1.1 设A, B是两个集合，一个从A×B到{是, 否}的映射R，称为从A到B的一个二元关系，或A与B间的一个二元关系。

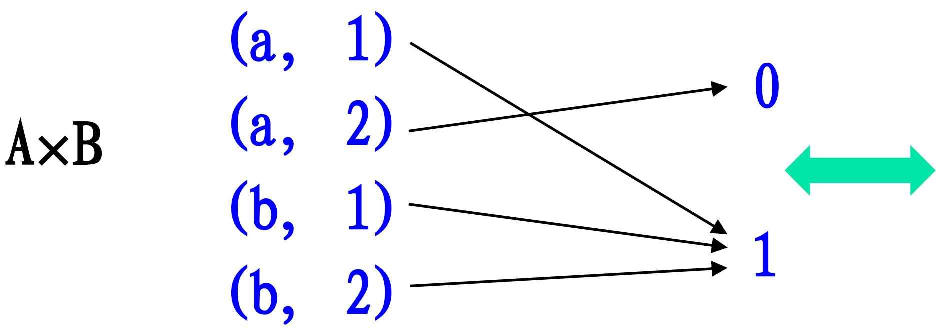
$\forall (a, b) \in A\times B$，如果(a, b)在R下的象为“是”，则a与b符合关系R，记为aRb；

如果(a, b)在R下的象为“否”，则a与b没有关系R或不符合关系R，记为$a \not R b$。

若A=B，则称R为A上的二元关系。

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

这种选课关系可以看成是一个映射。



$\{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}$

从A到B的一个二元关系R就是A×B的一个子集的特征函数。

A×B的一个子集的特征函数和这个子集一一对应。

关系的定义：

定义3.1.2 设A到B是两个集合。A×B的任一子集 R称为从A到B的一个二元关系。

关系的定义：

定义3.1.2 设A到B是两个集合。$A\times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。

例：设X={a， b， c， d}，R是X到X的一个二元关系：R={(a, a), (a, b), (b, c)}

例：设X是一个集合，集合的包含于“$\subseteq$”是2^X上的二元关系。 怎么理解？

设X={a, b}，2^X={∅，{a}，{b}，{a, b}}

“$\subseteq$” = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}),
({b},{a,b})}。

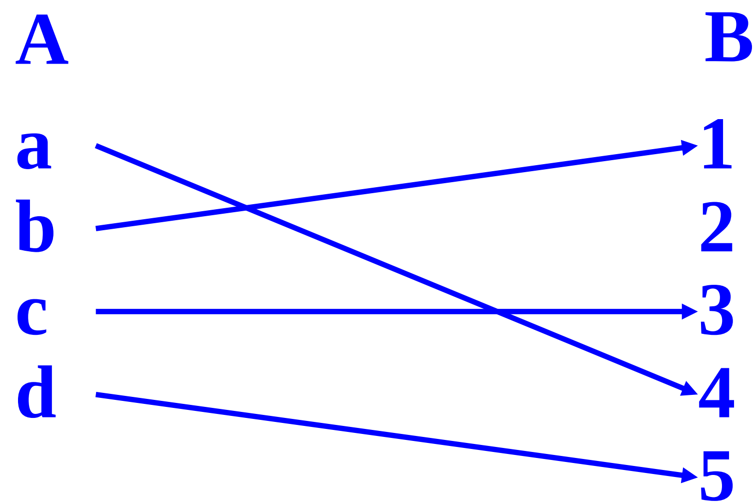
例：考虑整数集{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}上的模3同余关系。

$$(a, b)\text{满足}a \equiv b(\bmod 3)$$

R={ (1, 1), (1, 4), (1, 7)
(2, 2), (2, 5), (2, 8)
(3, 3), (3, 6)
(4, 1), (4, 4), (4, 7)
(5, 2), (5, 5), (5,8)
(6, 3), (6, 6)
(7, 1), (7, 4), (7, 7)
(8, 2), (8, 5), (8, 8)}

（2）“关系”和映射的区别

关系图



映射是一个特殊的二元关系

(1) 映射：$\forall x \in A$，存在唯一$y \in B$, $f(x)=y$, 即xfy;

(2) 关系：对于从A到B的任意二元关系R，$\forall x \in A$，不一定有$y \in B$使得xRy;

(3) 关系：如果对某个$x \in A$, 存在$y \in B$, 使得xRy, 那么y不一定唯一，甚至有多个，乃至无穷多个。

关系举例

例3.1.4 设N={1, 2, 3, . . .}，则N×N可用下图中的表示。

	1	2	3	. . .	n	. . .
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	. . .	(1, n)	. . .
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	. . .	(2, n)	. . .
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	. . .	(3, n)	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	(n, 1)	(n, 2)	(n, 3)	. . .	(n, n)	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

1、N上的“小于或等于关系“≤”是表中对角线上及对角线上方的那些序对构成的集合;

2、“大于或等于关系“≥”是表中对角线上及对角线下方那些序对所构成的集合。

（3） 关系的一些术语

按定义3.1.2，A×B的任一子集R都称为A到B的一个二元关系。

全关系、空关系、恒等关系、关系的个数、定义域、值域等概念。

① 全关系

A×B也是A×B的一个子集，按定义A×B也是从A到B的一个二元关系。我们把A×B叫做A到B的全关系

例如：A={a，b}，B={1，2}

A×B={（a，1），(a，2)，(b，1)，(b，2)}

是A到B的全关系。

② 空关系

空集∅叫做A到B的空关系。

（3） 关系的一些术语

③ 恒等关系

集合$\{(a,a)|a\in A\}$称为A上的恒等关系或相等关系，并记为I_A

例如：$A=\{a, b\}$

$\{(a, a), (b, b)\}$

是A到A的恒等关系。

④ A到B的关系的个数

例如：$A=\{1,2\}, B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$A\times B$有2^6个子集，因此从A到B就有2^6个关系；

一般地：设$|A\times B|=m$，那么A到B上就有2^m个关系。

（3） 关系的一些术语

⑤定义域和值域

设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$

$\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,c)\}$是一个二元关系

$\{1,2,3\}$是定义域，$\{a,b,c\}$是值域

定义3.1.3 设$R\subseteq A\times B$，

集合$\{x|x\in A$且$\exists y\in B$使得$(x,y)\in R\}$称为R的定义域，并记为$dom(R)$；

集合$\{y|y\in B$且$\exists x\in A$使得$(x,y)\in R\}$称为R的值域，并记为$ran(R)$；

一般情况下$A\neq dom(R)$；$B\neq ran(R)$

$dom(R)\subseteq A$；$ran(R)\subseteq B$。

（3） 关系的一些术语

二元关系到n元关系的推广

定义3.1.4 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个集合，一个$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的子集R称为$A_1,A_2,\ldots,A_n$间的**n元关系**，每个$A_i$称为R的一个域。

（3） 关系的一些术语

例3.1.5设

1、A为某单位职工“姓名”的集合;

2、B为“性别”之集合，B={男，女}，

3、C为职工年龄集合 C={1,2,...,100};

4、D表示“文化程度”，

D={小学,初中,高中,大学,硕士,博士};

5、E是“婚否”集合，E={是，否}

6、F表示月工资，F=[0,20000]

姓名 A	性别 B	年龄 C	文化程度 D	婚否 E	工资 F
张三	男	28	大学	是	400
李四	男	50	硕士	是	1400
李晓芬	女	18	高中	否	300

$R \subseteq A \times B \times C \times D \times E \times F$，构成了关系型数据库的一个数据表

**

3.2　关系的性质

本节主要问题

(1) 自反关系
(2) 反自反关系
(3) 对称的关系
(4) 反对称的二元关系
(5) 传递关系
(6) 相容关系
(7) 关系的逆
(8) 关系的集合运算

(1)、自反关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,d)}

R是一个自反关系

定义3.2.1　X上的二元关系R称为自反的，如果$\forall x \in X, xRx$

在这个定义中，要求X的每个元素x，都有xRx，即$(x,x) \in R$
但这并不排斥对某序对 $(x,y), x \neq y$，仍有 xRy 。

设I_X是X上的恒等关系，即：$I_X=\{(x,x) | x \in X\}$

显然，R是自反的，当且仅当$I_X \subseteq R$。

(2)、反自反关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(c,d),(b,c)}

R是一个反自反关系

定义3.2.2 X上的二元关系R称为反自反的，

如果: $\forall x \in X$, 都有 $(x,x) \notin R$

① 若X不空，反自反的二元关系必不是自反的;

② 若X不空，自反的二元关系必不是反自反的;

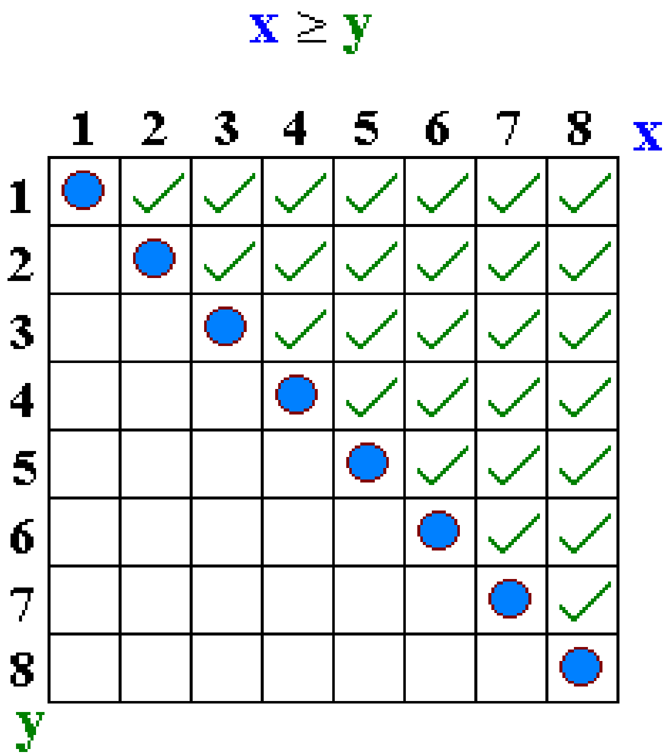
③ 但不是自反的二元关系，却不一定是反自反;

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

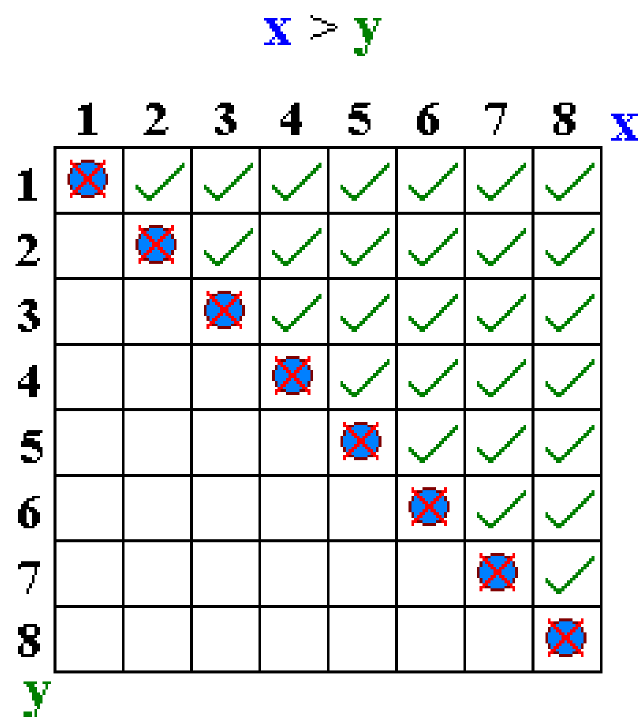
R={(a,b),(c,d),(b,c),(a,a)}

既不是反自反的，也不是自反的。

(1)、自反关系



自反关系



反自反关系

(1)、自反关系

$R=\{\{1,1\},\{1,2\},\{2,2\},\{3,3\}\};$ 自反关系

$S=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\};$ 反自反关系

$T=\{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,1\},\{3,3\}\}.$ 都不是

$$\mathbf{M}_R=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}_S=\begin{pmatrix}\boxed{0} & 1 & 0\\ 0 & \boxed{0} & 1\\ 1 & 0 & \boxed{0}\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}_T=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 0 & \boxed{0} & 0\\ 1 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}$$

(2)、反自反关系

例：设X是一个集合，则X上的自反二元关系，反自反二元关系，既不是自反的，也不是反自反的关系分别是多少？

解：

A上所有具有自反性的关系的个数就等价于求集合 $A\times A-I_{\mathbf{A}}$ 的所有不同子集的个数，即求 $A\times A-I_A$ 的零元子集、一元子集 $\cdots\cdots(n\times n-n)$ 元子集的个数之和.

$$\mathrm{C}_{n(n-1)}^{0}+\mathrm{C}_{n(n-1)}^{1}+\cdots+\mathrm{C}_{n(n-1)}^{n(n-1)}=2^{n(n-1)}$$

根据关系反自反性的定义，只需求出集合 $B=A\times A-I_A$（A 上的恒等关系）的所有子集即可.

因此在 A 上既不是自反的，也不是反自反的关系的个数为 $2^{n\times n}-2\times 2^{n(n-1)}=2^{n(n-1)}(2^n-2)=2^{n(n-1)+1}(2^{n-1}-1)$

(3) 对称关系

设A={a，b，c，d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a, b), (b, a), (a, a)}

R是一个对称关系。

定义3.2.3 设R为X上的二元关系。如果：

$\forall x, y \in X$, 只要xRy就有yRx，则称R是对称的。

(4) 反对称的二元关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(a,c),(a,a),(b,c)}

R是一个反对称关系。

定义3.2.4 设R为X上的二元关系。对X的任意元素x,y,如果：xRy且yRx，则x=y,那么就称R为**反对称**的。

(4) 反对称的二元关系

$R = \{\{1,1\},\{1,3\},\{3,1\},\{4,4\}\};$ 对称关系

$S = \{\{1,1\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\};$ 反对称关系

$T = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,1\},\{1,4\}\};$ 都不是

$V = \{\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\},\{4,4\}\}.$ 都是

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) 传递关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a, b), (b, c), (a, c)}

R是一个传递关系。

定义3.2.5 设R为X上的二元关系。

如果对X上的任意x, y, z, 只要xRy且yRz, 就有xRz，则称R为传递关系。

(1) 婚姻关系； ×

(2) 飞机航线的直达关系； ×

(3) 飞机航线的可达关系. √

(5) 传递关系

$(1) R = \{\{1,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\};$ 传递关系

$(2) S = \{\{1,2\}\};$ 传递关系

$(3) T = \{\{1,1\},\{1,2\},\{2,3\}\};$ 不是传递关系

$(4) V = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{2,1\}\}.$ 不是传递关系

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) 相容关系

设A={a， b， c}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,a)，(b,b)，(c,c)，(a,b)，(b,a)}

R是一个自反且对称的二元关系。

定义3.2.6　集合X上的二元关系R称为是相容关系，如果R是自反的且又是对称的。

设R为X={a, b}上的二元关系，如果R=∅, R中没有任何元素，根据定义，讨论以下5种关系。

自反性 ×

反自反性 √

对称性 √

反对称性 √

传递性 √

相容性 ×

(7) 关系的逆

例如：设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$

$R=\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,c)\}$

$R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,2),(c,3)\}$

定义3.2.7 设R是A到B的二元关系，

则R的逆记为R^{-1}，R^{-1}是B到A的二元关系且：

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$$

(8) 关系的集合运算

X到Y的一个二元关系R就是X×Y的一个子集。

因此可以在关系上定义并、交、差、对称差、余集和笛卡尔积运算。

例如，若R，S都是X到Y的二元关系，则：

$R\cup S=\{(x,y)\mid(x,y)\in R$或$(x,y)\in S\}$也是X到Y的二元关系，

如果x与y符合$R\cup S$;

记作$xR\cup Sy$,意思是xRy或xSy;

仿照并集运算,就可以由集合的运算定义关系的其它运算。

(8) 关系的集合运算

二元关系的笛卡尔积定义:

设R是A到B的二元关系，S为C到D的二元关系，则定义$R\times S$为A,B,C,D间的一个四元关系:

$R\times S=\{(a,b,c,d)|(a,b)\in R$且$(c,d)\in S\}$,为A,B,C,D间的一个四元关系;

而不是$\{((a,b),(c,d))|(a,b)\in R$且$(c,d)\in S\}$

二元关系R的余积定义

$R^c=(A\times B)\backslash R$

(8) 关系的集合运算

习题5. p86 设R与S是X上的二元关系，证明：

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

证明：

(1) $\forall(x, y)\in(R\cap S)^{-1}$

$\Rightarrow (y, x)\in R\cap S$

$\Rightarrow (y, x)\in R$ 且 $(y, x)\in S$

$\Rightarrow (x, y)\in R^{-1}$ 且 $(x, y)\in S^{-1}$

$\Rightarrow (x, y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

(2) $\forall(x, y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

$\Rightarrow (y, x)\in R$ 且 $(y, x)\in S$

$\Rightarrow (y, x)\in R\cap S$

$\Rightarrow (x, y)\in(R\cap S)^{-1}$

由(1)和(2),命题得证。

关系的判断

X是非空集合，判断以下关系是自反的、反自反的、对称的、反对称的、传递的还是相容关系？

a. 集合的包含于“$\subseteq$”是2^X上的二元关系。

b. 集合的真包含于“$\subset$”是2^X上的二元关系。

c. I_X

d. I_X的任一真子集$R \subset I_X$

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leqslant$”

f. 实数集上的小于关系“$<$”

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等, 则称m与k为模n同余，并记为: $m \equiv k \pmod n$

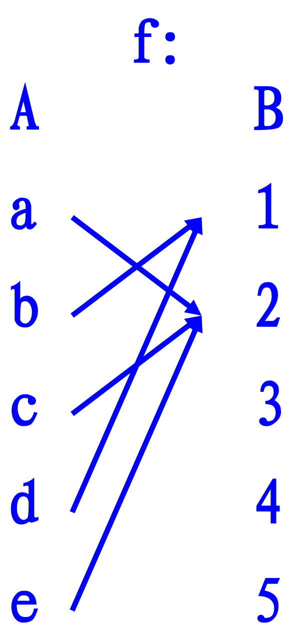
	自反	反自反	对称	反对称	传递	相容
a	√			√	√	
b		√		√	√	
c	√		√	√	√	√
d			√	√	√	
e	√			√	√	
f		√		√	√	
g	√		√		√	√

映射的核

例3.2.6　令f: A→B,

$Ker(f)=\{(x, y) \mid x, y \in A且f(x)=f(y)\}$

Ker(f)称为f的核。f下A中象相同的那些元素形成的有序对集合



(1)　自反

(2)　反自反

(3)　对称

(4)　反对称

(5)　传递

(6)　相容

$Ker(f)=\{(a, c), (a, e), (c, e), (c, a), (e, a), (e, c), (b, d), (d, b), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

关系性质分析

设X是一个非空集合，例如：X={a, b, c}，问：在集合的包含意义下，X上符合以下关系的最小的关系是什么？最大的关系是什么？

(1) 自反关系	恒等关系Ix和全关系X×X
(2) 反自反关系	空关系∅和(X×X)\ Ix
(3) 对称关系	空关系∅和全关系X×X
(4) 反对称关系	空关系∅和???
(5) 传递关系	空关系∅和全关系X×X
(6) 相容关系	恒等关系Ix和全关系X×X。

关系性质举例

例3.2.7　设R为X上的二元关系。如果$R\neq\varnothing$且R是反自反和对称的，则R不是传递的。

证明:

因为$R\neq\varnothing$，所以$\exists(x,y)\in R$,

根据R是对称的，则$(y,x)\in R$

如果R是传递的，则，$(x,x)\in R$

这与R是反自反的矛盾。

因此：命题成立。

2015-2016集合论有关复试题

3.设A={1,2,3}，则A上可以定义多少个自反的二元关系？

A. 16

B. 32

C. 64 √

D. 128

有序对个数$3\times3=9$

自反关系必须包含(1,1),(2,2),(3,3)这三个有序对

其它6个有序对可出现，可不出现

方案数是2^6。