第八章：连通度和匹配

8.1 顶点连通度和边连通度

*8.2 门格尔定理

8.3 匹配、霍尔定理

8.1 顶点连通度和边连通度

本节主要内容

1、顶点连通度的定义

2、边连通度的定义

3、顶点连通度、

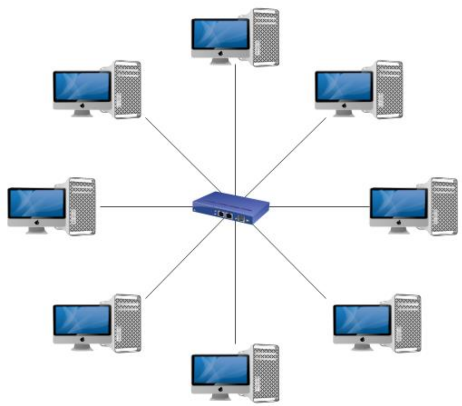
边连通度

最小度的关系

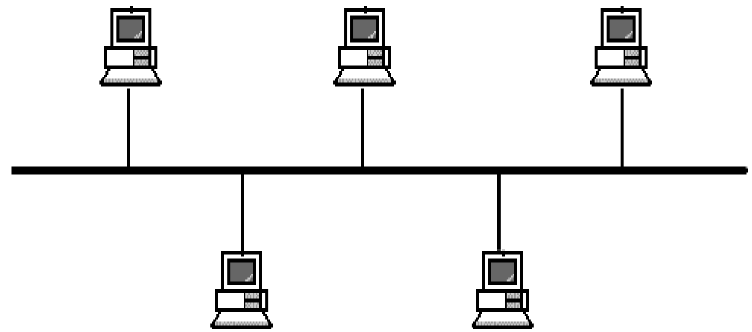
4、n-连通和n-边连通的定义

目的是讨论图的连通程度

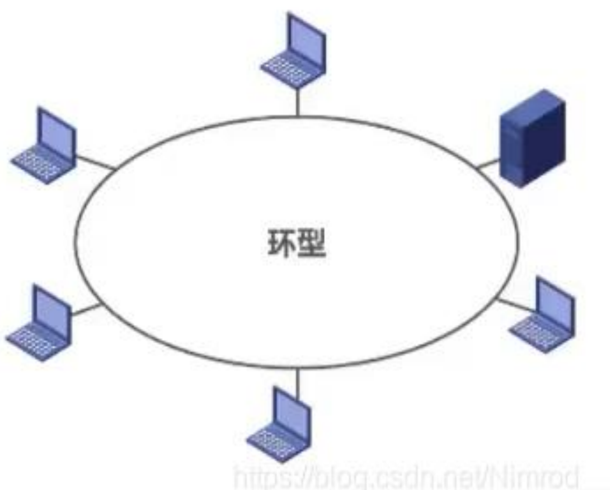
8.1 顶点连通度和边连通度



星型网络



总线型拓扑结构



哪种网络结构安全性好?

顶点?

边?

1、顶点连通度的定义

定义8.1.1 设G=(V,E)是一个无向图，图G的顶点连通度$\chi=\chi(G)$是为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点的数目。

图G的“顶点连通度”，以后简称G的“连通度”。

求以下各图的连通度。

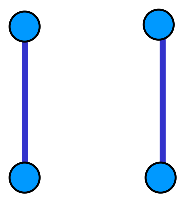


图8.1.1

连通度为0

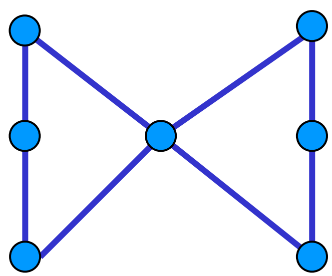


图8.1.2

连通度为1

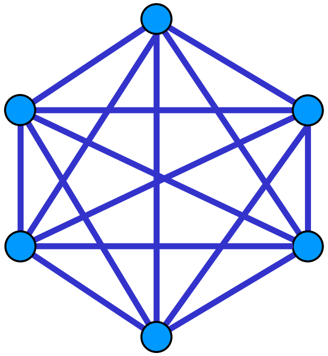


图8.1.3

连通度为5

1、顶点连通度的定义

不连通的图的顶点连通度为0;

有割点的连通图的连通度是1;

完全图K_p的连通度为p-1;

平凡图（K_1）的连通度为0。

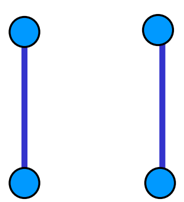


图8.1.1

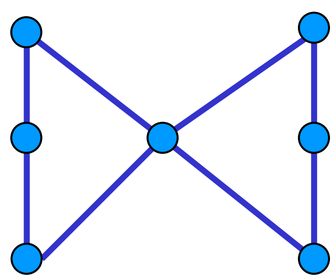


图8.1.2

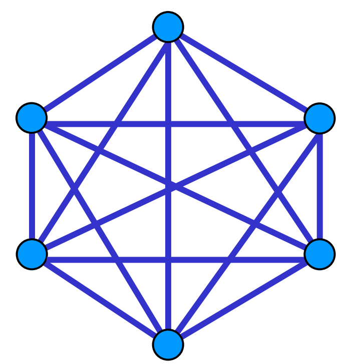


图8.1.3

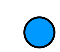


图8.1.4

2、边连通度的定义

定义8.1.2 图G的边连通度λ=λ(G)是为了使G产生不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边数。

求以下各图的边连通度。

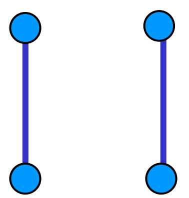


图8.1.1

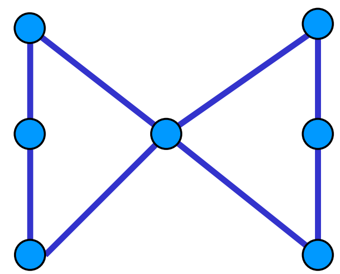


图8.1.2

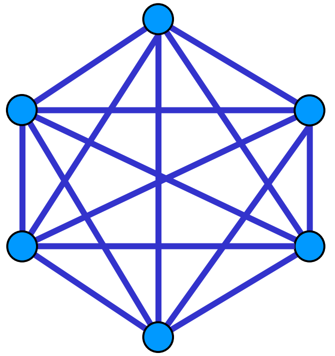


图8.1.3

边连通度为0　边连通度为2　边连通度为5

2、边连通度的定义

(1)不连通的图和平凡图（K_1）的边连通度为0

(2)$\lambda(K_p)=p-1$

(3)非平凡树的边连通度为1;

(4)有桥的连通图的边连通度为1。

图8.1.1

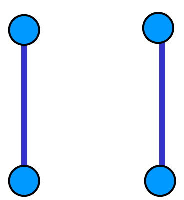


图8.1.2

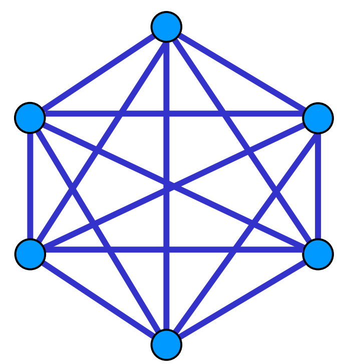


图8.1.3

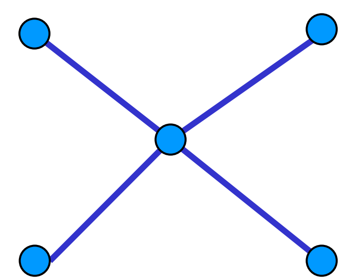


图8.1.4

割集和连通度的区别和联系

区别:

- 割集关注的是能够使图变为非连通的顶点集合或边集合，而连通度关注的是需要删除的最小顶点数量或边数量才能使图变为非连通。
- 割集可以有多个，而连通度是一个固定的数值。

联系:

- 割集和连通度都是用来度量图的连接性的，它们都关注图中顶点和边的连接情况。
- 当我们找到一个顶点割集或边割集时，可以通过计算割集中顶点或边的数量来估计图的顶点连通度或边连通度。但是，我们需要找到最小的割集，才能确定实际的连通度。

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

图的连通度、边连通度、最小度之间有以下的关系：

定理8.1.1 对任一图G,有

$$\chi(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

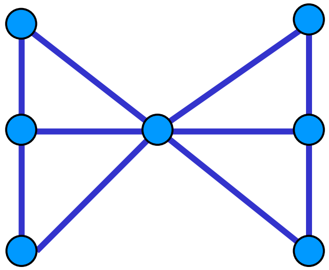
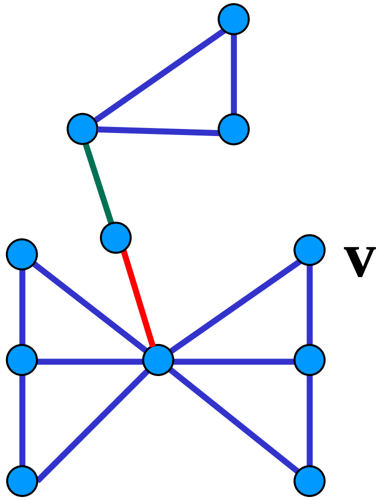
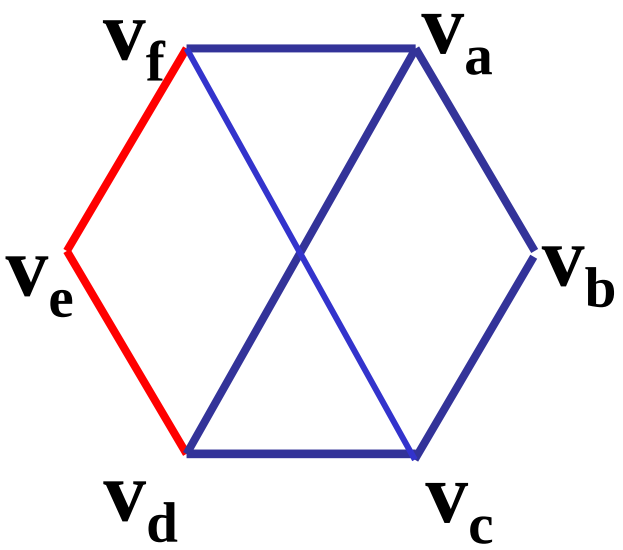


图8.1.4

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系





先观察$\lambda(G) \le \delta(G)$

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

图1(平凡图)

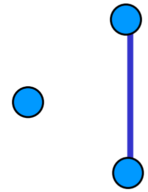


图2

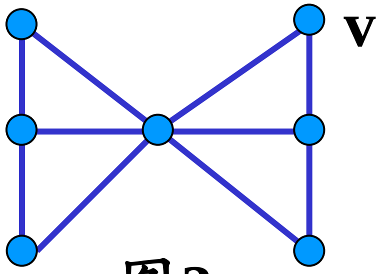


图3

[证] 证明：$\lambda(G) \le \delta(G)$:

如果$\delta(G) = 0$，则G是平凡图或不连通，则$\lambda(G) = 0$，这时有$\lambda(G) \le \delta(G)$;

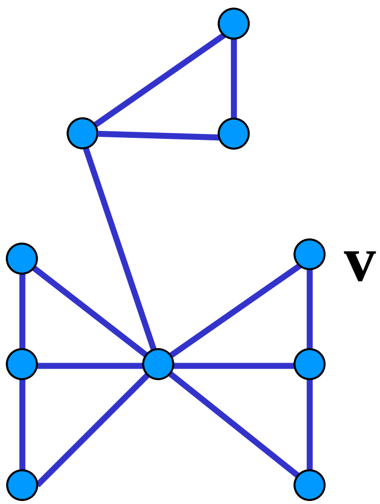
$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$;

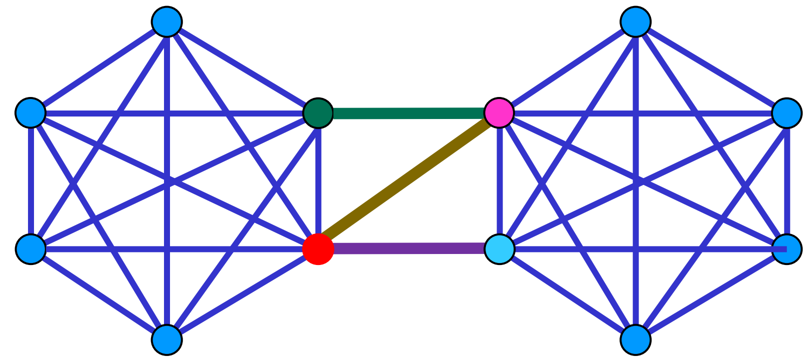
从G中去掉与v关联的$\delta(G)$条边后，得到的图中v是孤立顶点;

所以，这时$\lambda(G) \le \delta(G)$;

因此对任何图G有$\lambda(G) \le \delta(G)$。

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系





先观察$\chi(G) \leqslant \lambda(G)$

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

证明：　$\chi(G) \leqslant \lambda(G)$

分2种情况讨论:

(1) 平凡图或不连通图

(2) $\lambda(G) \geqslant 1$

(1) 平凡图或不连通图，因为$\chi(G) = \lambda(G)$

所以此时成立。

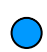


图1(平凡图)

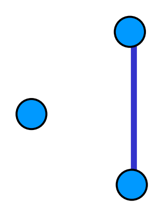


图2

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(2) λ(G) ⩾ 1;

从G中去掉λ(G)条边得到一个不连通图。此时从G中去掉这λ(G)条边的每一条的某个端点后，至少去掉了这λ(G)条边，于是，产生了一个不连通图或平凡图，从而χ(G) ⩽ λ(G)。

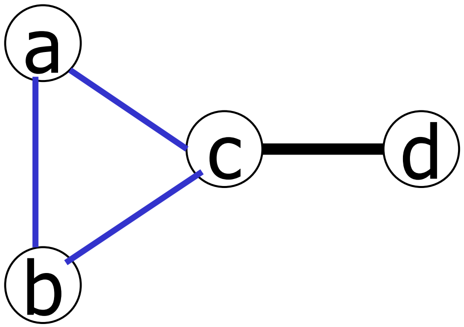


图1

图2

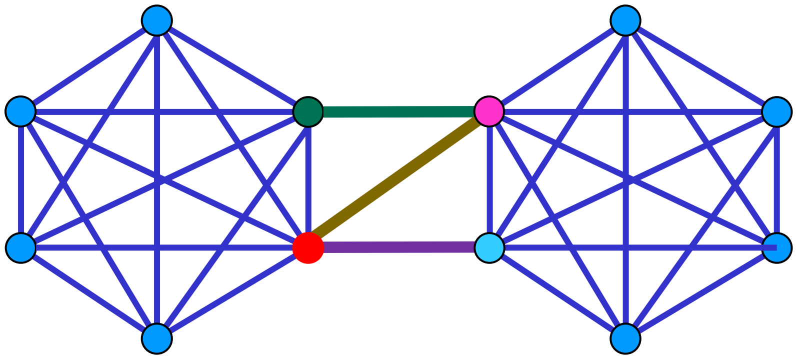


图3

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

定理8.1.2 对任何正整数a, b, c, $0 < a \le b \le c$, 存在一个图G使得

$\chi(G) = a,\ \lambda(G) = b,\ \delta(G) = c$。

分以下几种情况讨论:

(1) $a = b = c$

(2) $a = b < c$

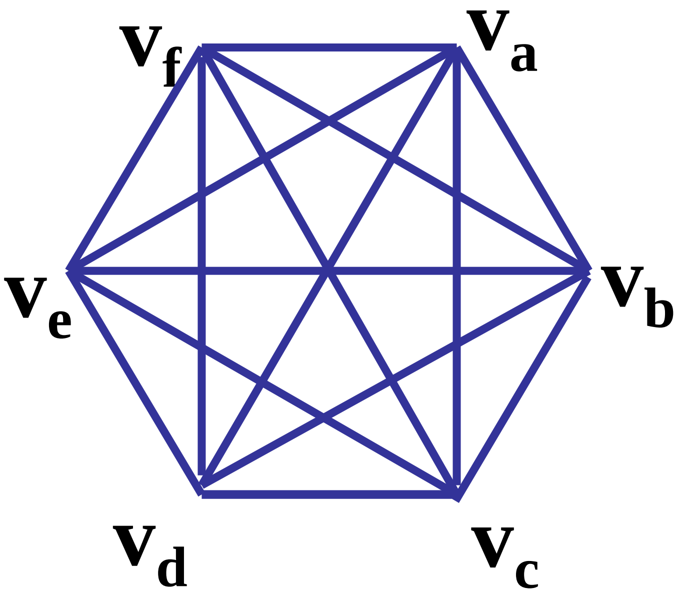
(3) $a < b = c$

(4) $a < b < c$

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(1) a = b = c,

最小度是c。



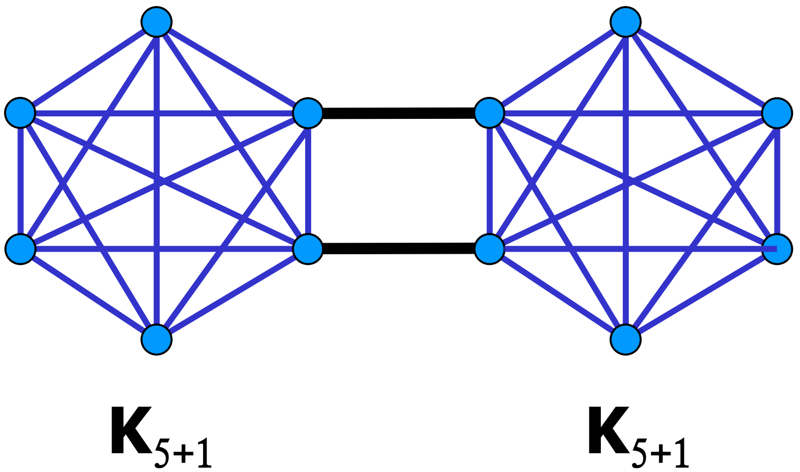
例如：6个顶点的完全图K_6，其顶点连通图、边连通度、最小度都是5

图$G = K_{a+1}$就是所要求的图。

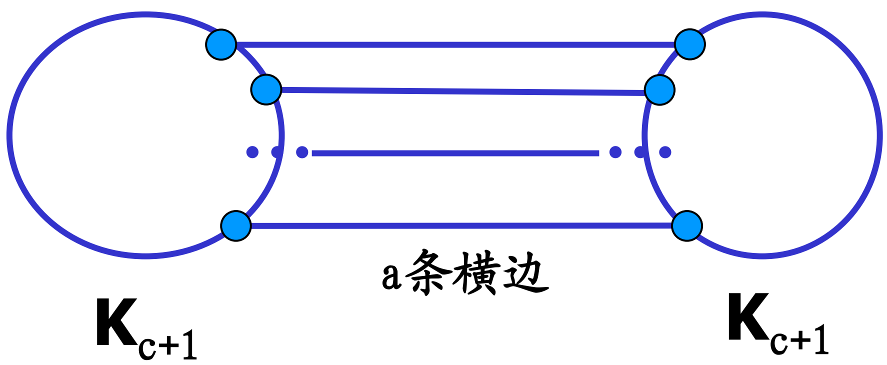
3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(2) a = b < c,

例如：2 = 2 < 5,

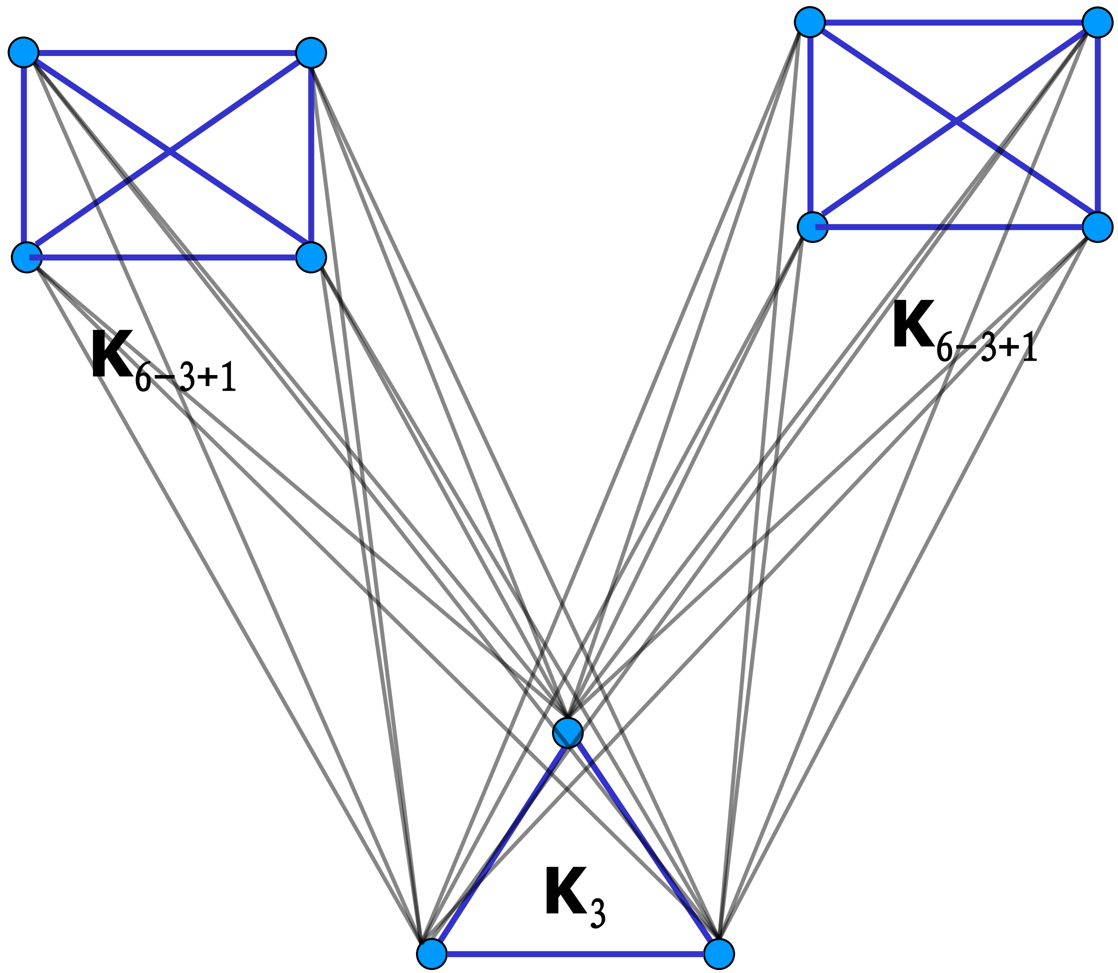


则所要求的图G的图解如下：



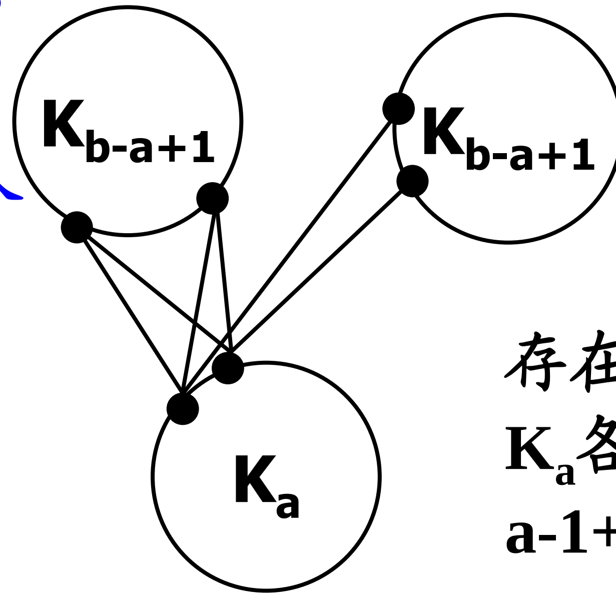
3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(3)、a < b = c,　　例如、3 < 6 = 6,



3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(3)、如果a < b = c,



K_{b-a+1}部分任意一个顶点都与K_a部分的任意一个顶点相连,各顶点度数为b

(i)由于K_{b-a+1}中每个顶点的度为b，K_a中每个顶点的度为2b-a+1，且2b-a+1>b,所以δ(G)=b

存在两个K_{b-a+1}时，K_a各顶点得度数为a-1+2(b-a+1)=2b-a+1

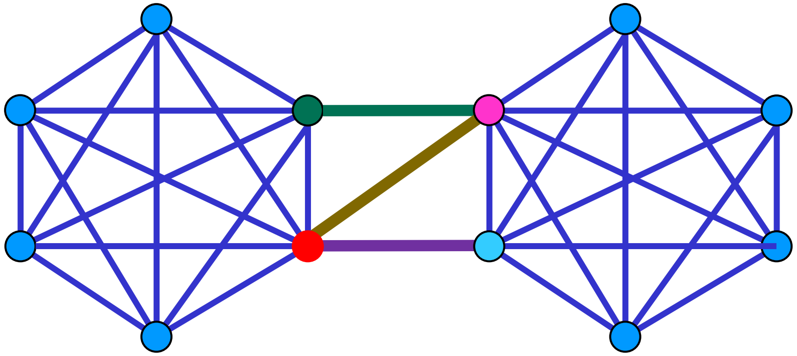
(ii)把K_a中的a个顶点去掉就可分离图G ,得到两个K_{b-a+1} ,其它分离办法都必须包含K_a中的a个顶点,所以χ(G)=a

(iii)去掉K_a中某个点关联的2b-a+1条边或去掉K_{b-a+1}中某个点关联的b条边或去掉K_a与某个K_{b-a+1}关联的a(b-a+1)条边都能使图G分离，b是三者中最小，所以λ(G)=b

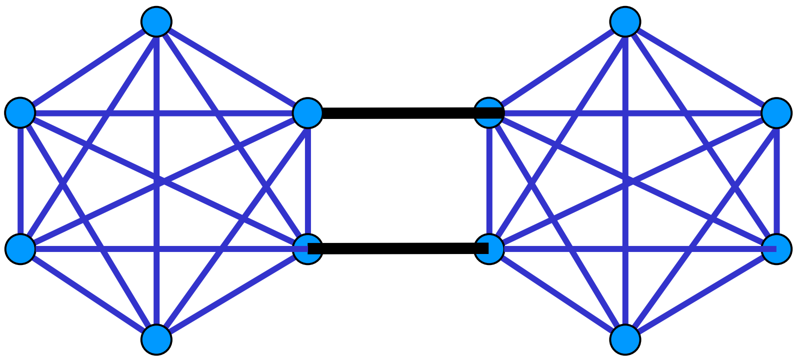
3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(4)如果a < b < c,

例如：2 < 3 < 5,

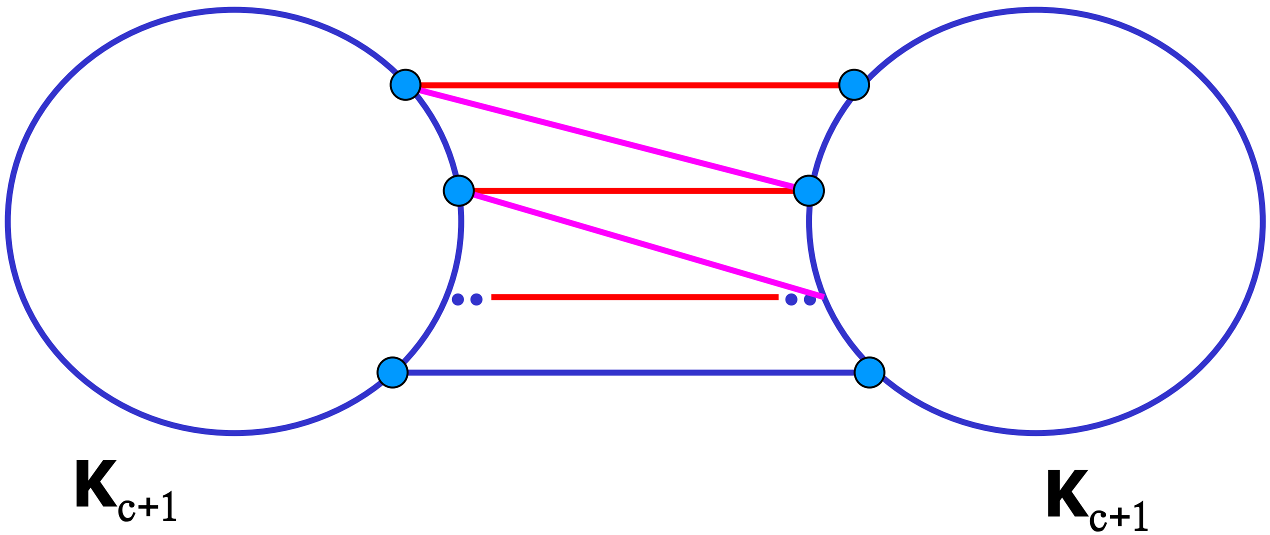


回忆：2 = 2 < 5,



3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(4)如果a < b < c, 则所要的图G的图解如下:



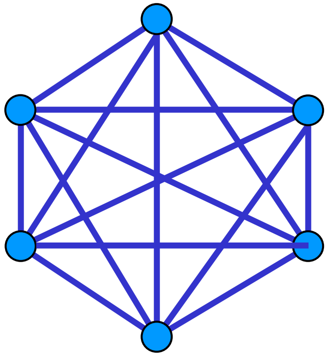
1) 两个K_{c+1}保证了最小度是c

2) 在两个K_{c+1}上各任选a个顶点，建立一一对应连边
保证了顶点连通度为a

3) 在两个K_{c+1}上选定的顶点间加b-a条边。
保证了边连通度b。

4、n-连通和n-边连通的定义

定义8.1.3 设G是一个图,如$\chi(G) \geq n$,则称G是n-顶点连通的，简称n-连通；如果$\lambda(G) \geq n$,则称G是n-边连通的

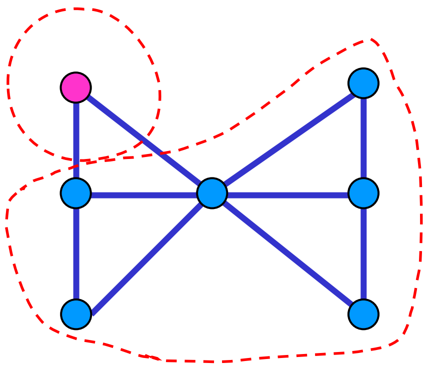


连通度为5

是5连通的，当然也是4、3、2、1连通的。

顶点连通度、边连通度

引理8.1.1　设G = (V, E)是一个图且λ(G) > 0, 则存在V的真子集A，使得G中连接A中顶点与V\A中顶点的边总数恰为λ(G)。



观察图

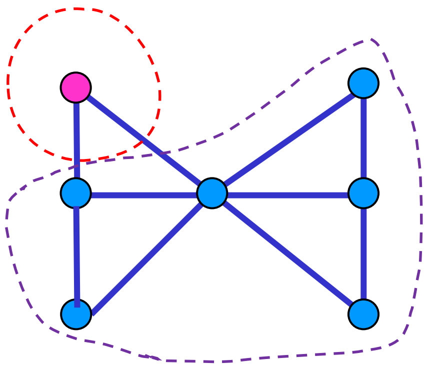
该图边连通度为2，按引理的意思，存在顶点集合的真子集A，A中顶点与V\A中顶点的边数是2，也即连通度。

该图λ(G) = 2, 意味最少要去掉2条边才能不连通，去掉两条边最多形成两个分支。

设一个分支顶点集为A，另一个分支顶点集为V\A，就符合题意。

顶点连通度、边连通度

引理8.1.1　设G = (V, E)是一个图且λ(G) > 0, 则存在V的真子集A，使得G中连接A中顶点与V\A中顶点的边总数恰为λ(G)。



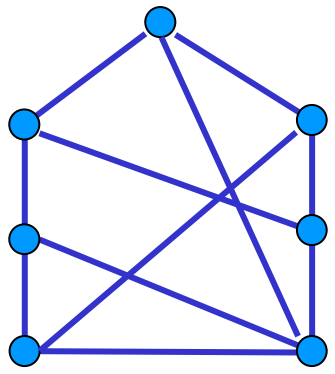
观察图

证明：1、因为λ(G) > 0, G中存在λ(G)条边，去掉后正好形成2个分支;

2、一个分支为A，另一个分支为V\A，那些被去掉的每一条边，其一个端点在A中，另一个端点在V\ A中。这些边当然为λ(G)条。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.3　设G =（V，E）有p个顶点且$\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。



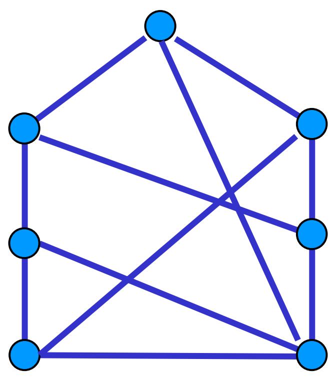
观察图

证明：1、由定理8.1.1 对任一图G，有$\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

2、只要证明$\lambda(G) > \delta(G)-1$即可。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.3 设G = （V，E）有p个顶点且$\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。



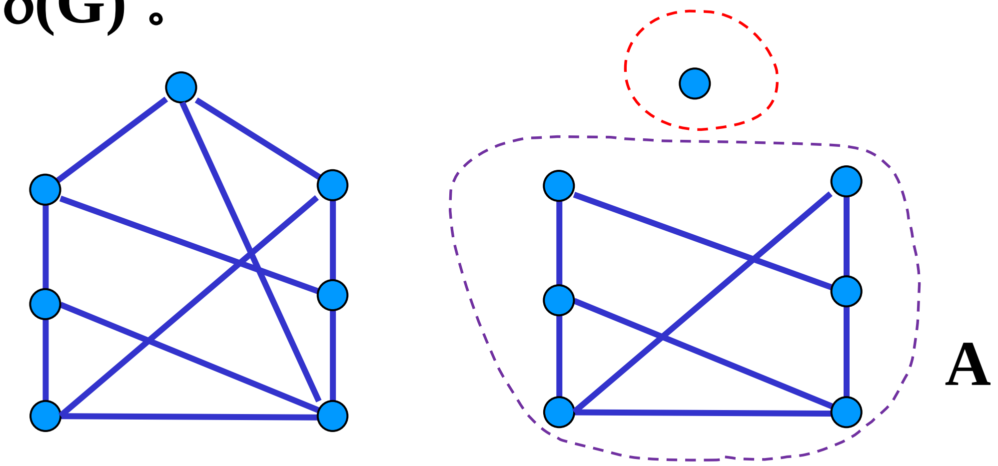
观察图

要证 $\lambda(G) \geq \delta(G)$

注意到：引理8.1.1 设G=（V，E）是一个图，且$\lambda(G) > 0$，则存在V的真子集A，使得G中连接A中的一个顶点与V\A中一个顶点的边的总数恰为$\lambda(G)$。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.3 设G =（V，E）有p个顶点且$\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。



设$|A| = m$，则G中两个端点均属于A的边的条数至少为（$m\,\delta(G) - \lambda(G)$）/2 ------！总度数的一半

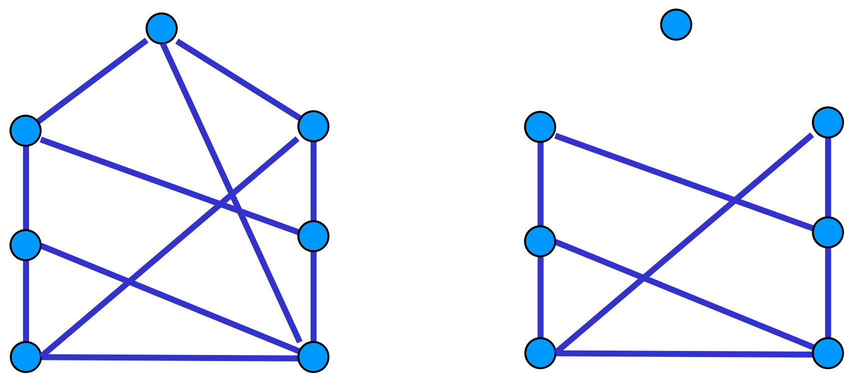
假如$\lambda(G) < \delta(G)$，则

（$m\,\delta(G) - \lambda(G)$）/2 ＞（$m\,\delta(G) - \delta(G)$）/2

（$m\,\delta(G) - \lambda(G)$）/2 ＞（$m - 1$）$\delta(G)$ /2

顶点连通度、边连通度

定理8.1.3 设G =（V，E）有p个顶点且$\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。



A

$(m\,\delta(G) - \lambda(G))/2 > (m-1)\,\delta(G)/2$

若$m \leq \delta(G)$

$\Longrightarrow (m\,\delta(G) - \lambda(G))/2 > (m-1)\,m/2$　　不可能

$\Longrightarrow m > \delta(G)$

因此$\delta(G)<m$，于是：$m \geq \delta(G)+1 \geq \lfloor p/2 \rfloor+1 \geq (p+1)/2$

同理可证$|V \backslash A| = p-m \geq (p+1)/2$，得出$|V| \geq (p+1)$，矛盾，

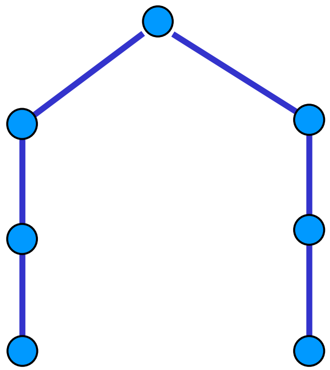
因此$\lambda(G) \geq \delta(G)$

顶点连通度、边连通度

定理8.1.4 设G = 是一个(p, q)图，则

1、若$q < p-1$, 则$\chi(G) = 0$;

2、若$q \geq p-1$, 则$\chi(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$。



观察图

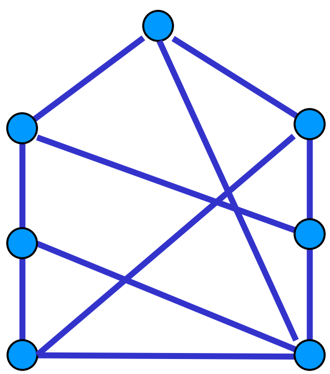
1的证明：最少要p-1条边，图才能连通，因此不是连通图，$\chi(G) = 0$。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.4　设G = 是一个(p, q)图，则

1、若$q < p-1$, 则$\chi(G) = 0$;

2、若$q \geq p-1$, 则$\chi(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$。



观察图

$\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

只需证明$\delta(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$

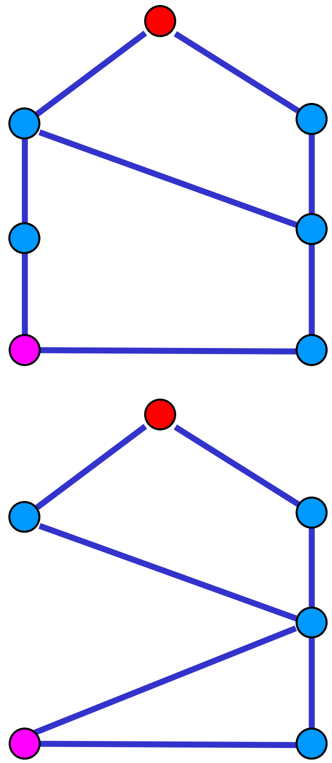
2的证明：若$q \geq p-1$, 又因为G中所有顶点度之和为2q,

所以，顶点的平均度数为$\lfloor 2q/p \rfloor$，

因此$\delta(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$, 因此$\chi(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$

顶点连通度、边连通度

定理8.1.5　设G = (V, E) 是一个p个顶点的图，p≥3, 则G是2- 连通的, 当且仅当G的任两个不同顶点在G的同一个圈上。



证明：充分性，如果G的任一两个顶点都在同一个圈上;

则G没有割点，因此是2连通的。

顶点连通度、边连通度

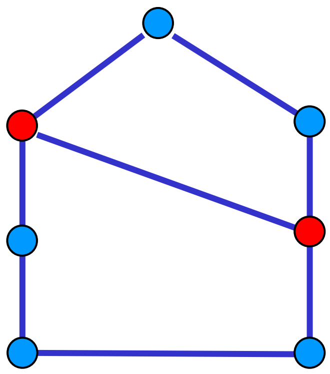
定理8.1.5 设G =（V，E）是一个p个顶点的图，p≥3,则G是2-连通的，当且仅当G的任两个不同顶点在G的同一个圈上。

必要性。即证：如果G是2-连通的，则G的任意2个顶点都在同一个圈上。

$\forall$u, v$\in$V, 对u, v间的距离d(u, v)用归纳法。

若d(u, v)=1，也就是u, v有边相连。

因为G是2连通的，因此去掉边uv还是连通的，因此u和v在一个圈上。

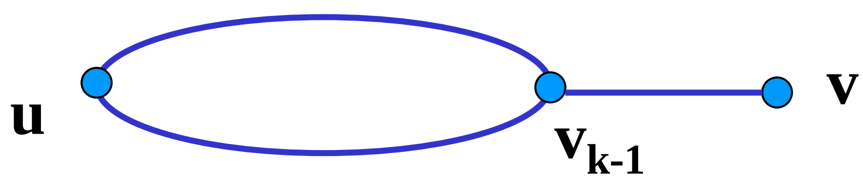


观察图

顶点连通度、边连通度

假设$d(u, v) < k$时，u和v在一个圈上。

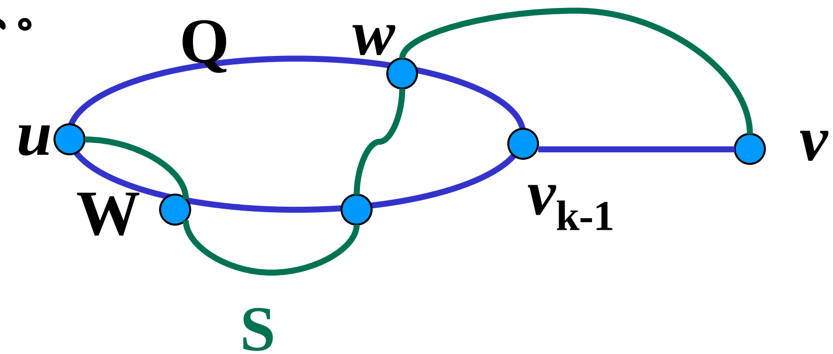
今设$d(u, v) = k$，考虑G中u和v间的一条长为k的路，$P=uv_1v_2...v_{k-1}v$，显然$d(u, v_{k-1}) = k-1$,



顶点连通度、边连通度

由归纳假设，u和v_{k-1}在某一圈上，因此，u和v_{k-1}间有两条没有公共顶点的路W和Q。

由于G是2连通的，没有割点，因此$G-v_{k-1}$还是连通的， 因此，$G-v_{k-1}$中有u到v的路S，u是W,Q和S的公共顶点。

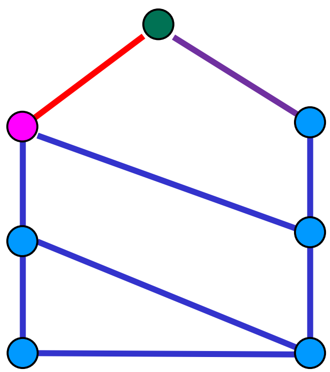


设w是S上从u到v且在Q或W上的最后一个顶点。

不妨设w在Q上，则在G中就有含u与v的圈。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.6 图G = (V, E) 是n–边连通的充分必要条件是不存在V的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V \ A的一个顶点的边的总数小于n。

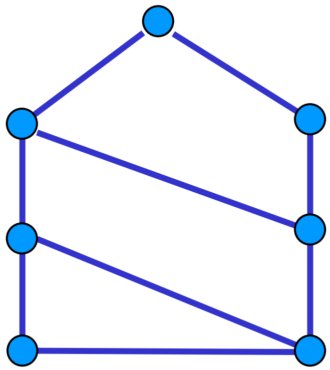


观察图

如图是2-边连通的，充分必要条件是不存在G的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V\A的一个顶点的边的总数小于2

顶点连通度、边连通度

定理8.1.6 图G = (V, E) 是n–边连通的充分必要条件是不存在V的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V \ A的一个顶点的边的总数小于n。



观察图

证明：必要性，设G是n-边连通的，则λ(G) ≥ n。

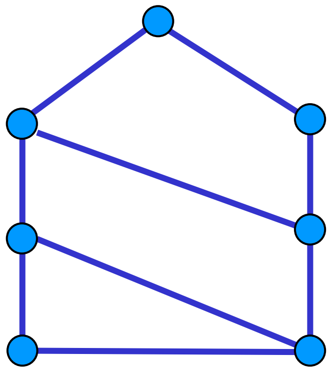
如果存在V的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V \ A的一个顶点的总数j < n。

则去掉这j条边便得到一个不连通图，这与λ(G) ≥ n相矛盾。

顶点连通度、边连通度

定理8.1.6 图G = (V, E) 是n–边连通的充分必要条件是不存在V的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V \ A的一个顶点的边的总数小于n。

证明：充分性，如果$\lambda(G) < n$。



观察图

由引理8.1.1, 存在V的真子集A，使得G的连接A的一个顶点与V \ A的一个顶点的总数为$\lambda(G) < n$,

这与假设不存在V的满足这样性质的真子集A相矛盾。所以$\lambda(G) \geqslant n$。