第一周答案

一、选择题

CBABA

二、判断题

x√ √ √ √

三、简答题

1 、

答：（1）具有自反性，对称性，传递性的关系称作等价关系。

（2）{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a) }

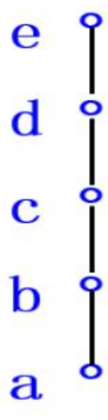
2

答：（1）

偏序关系是自反的，因此其关系图中，每个节点上都有环。既然都有，就可以省略。

由于反对称性，x, y 之间只能有一条有向边。如果从 x 到 y 有边，则把 y 放在 x 上方。表示箭头的方向。这样就可以省略箭头。

偏序关系是传递的，只要有(x, y)和(y, z),就必然有(x, z),因此只要在前驱和后继之间连线即可。



3

答：（1）包含 R 的自反对称关系的交集成为 R 的相容闭包。

（2）{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a)}

4 、

答：（1）设 $f:X\rightarrow Y$，如果存在一个映射 $h:Y\rightarrow X$，使得：$hf=I_x$，则称映射 f 是左可逆的，h 称为 f 的左逆映射

（2）{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)} 和{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 2)}

5

答：(1) 同时满足自反性、对称性、传递性的二元关系 R 称为等价关系（2 分）

(2) 集族 X={{1, 3, 5}，{2, 4, 6}}是 A 的一个二划分（2 分）

R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 6), (6, 4)}（1 分）

6

答：

(1) 集合 X 上的偏序关系 $\leq$ 叫做全序关系，如果 $\forall x, y \in X$，$x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立。（3 分）

(2)A 上的一个全序关系为：

“≤”={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}（2 分）

7. 设 X = {a, b, c, d, e, f, g }, R = {(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, g), (g, a)}

求：R^7（5 分）

答

所以 R^7= {（a, a），（b, b），（c, c），（d, d），（e, e），（f, f），（g, g）}

(5 分)

8. f 是集合 A= {1, 2, 3, 4, 5}到 B = {a, b, c, d}映射

给出 f 有右逆映射的充分必要条件（2 分）

如果 f({1,2})=a,f(3)=b,f(4)=c,f(5)=d,求 f 的右逆映射的个数（3 分）

答

（1）f 为满射（2 分）

（2）2（3 分）

四、证明题

1

证明

对于 $\forall x,y \in A,(x,y) \in R_2 \circ R_1$，根据关系的合成的定义，$\exists z \in A$ 使得 $(x,z) \in R_2$ 且 $(z,y) \in R_1$。　　（2 分）

因为 R_1 和 R_2 是 A 上对称的二元关系，所以 $(y,z) \in R_1$ 且 $(z,x) \in R_2$，从而有 $(y,x) \in R_1 \circ R_2$。　　（2 分）

已知 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$，则 $(y,x) \in R_2 \circ R_1$。根据关系的合成定义知，$\exists y_1 \in A$ 使得 $(y,y_1) \in R_2$ 且 $(y_1,x) \in R_1$。　（2 分）

因为 R_1 和 R_2 是 A 上对称的二元关系，所以 $(x,y_1) \in R_1$ 且 $(y_1,y) \in R_2$，从而有 $(x,y) \in R_1 \circ R_2$，因此 $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$。　（2 分）

综上所述，$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$。

2

证明：

（1）如果 R°S 具有对称性，∀（x, z）∈ R°S, 则：（z, x）∈ R°S, ∃ y,（z, y）∈ R,（y, x）∈ S, 由 R，S 的对称性得：
（y, z）∈ R,（x, y）∈ S, 因此（x, z）∈ S°R, 因此 R°S ⊆ S°R
∀（x, z）∈ S°R, ∃ y,（x, y）∈ S,（y, z）∈ R, 由 R，S 的对称性得：
（y, x）∈ S,（z, y）∈ R, 因此（z, x）∈ R°S, 由 R°S 的对称性，（x, z）∈ R°S
因此 S°R ⊆ R°S
因此 R°S = S°R

（2）如果 R°S = S°R。∀（x, z）∈ R°S, ∃ y,（x, y）∈ R,（y, z）∈ S, 由 R，S 的对称性得：

（y, x）∈ R,（z, y）∈ S, 因此（z, x）∈ S°R,（z, x）∈ R°S, 所以：R°S 对称

五、计算题

1 、

设 A={a, b, c, d, e}，则 A 的三划分有：

{{a},{b},{c, d, e}}，{{a},{c},{b, d, e}}，{{a},{d},{b, c, e}}，{{a}, {e}, {b, c, d}},

{{b}, {c}, {a, d, e}}，{{b}, {d}, {a, c, e}}，{{b}, {e}, {a, c, d}},

{{c}, {d}, {a, b, e}}，{{c}, {e}, {a, b, c}}

{{d}, {e}, {a, b, c}}　　　　C(5, 2)=10

{{a}, {b, c}, {d, e}}，{{a}, {b, d}, {c, e}}，{{a}, {b, e}, {c, d }}

……………………………………

C(5, 1)× C(4, 2)/2=15

A 上商集基数为 3 的等价关系的个数为 25

2

答：

设 A 为 E 上自反关系的个数，B 为 E 上反自反关系的个数，C 为 E 上对称关系的个数。

则原题要求的个数为

$$|A^c \cap B^c \cap C^c| = N$$

$$- |A| - |B| - |C|$$

$$+ |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$$

$$- |A \cap B \cap C|$$

$$= 2^{n\times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2}$$

$$+ 0 + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2}$$

$$-0$$

$$= 2^{n\times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2}$$

或

$$=2^{n\times n} - 2^{n(n-1)+1} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2+1}$$

或

$$=(2^n - 2)(4^{(n\times n - n)/2} - 2^{(n\times n - n)/2})$$

或

$$=(2^n - 2)(2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)/2})$$

或

$$=(2^n - 2)(2^{n\times n - n} - 2^{(n\times n - n)/2})$$