第三章：关系

3.8 偏序关系与偏序集

本节主要问题

（1）偏序关系的定义

（2）偏序集的定义

（3）全序关系和全序集

（4）偏序集的有关术语

（1）偏序关系的定义

例3.8.1 分析实数集R上“≤”关系的性质。

(1) 自反性

对于实数集上任意元素x，x≤x，故自反性成立。

(2) 反对称性

∀x，y∈R，如果x≤y，并且y≤x，则x=y，故反对称性成立。

(3) 传递性

∀x，y，z∈R,如果x≤y，并且y≤z，则有x≤z，因此,传递性成立。

（1）偏序关系的定义

设$X=\{a, b\}$，$2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$
\text{“}\subseteq\text{”} = \{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}),
(\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}),
(\{a\},\{a,b\}),
(\{b\},\{a,b\})\}。
$$

(1) 自反性 (2) 反对称性 (3) 传递性

满足以上三个性质的关系称作偏序关系。

（1）偏序关系的定义

定义3.8.1 集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

1. R是自反的，　　当且仅当$I_X \subseteq R$;

2. R是反对称的，　如果xRy，且yRx，则x=y;

3. R是传递的，　　当且仅当$R^2 \subseteq R$

当抽象地讨论X上的偏序关系时，常用符号“≤”表示偏序关系。如果a≤b，则读作“a小于或等于b”

约定x≤y且x≠y时，就记为x<y。

（1）偏序关系的定义

当抽象地讨论X上的偏序关系时，常用符号“≤”表示偏序关系。如果a≤b，则读作“a小于或等于b”

需要特别注意！

“≤”只是表示一个偏序关系，完全没有小于等于的意思。

例如：“⊆”和“⊇”都可以用“≤”表示。

（1）偏序关系的定义

X是非空集合，判断以下关系是否是偏序关系？

a. 2^X上集合的包含于"$\subseteq$"关系。√

b. 2^X上集合的真包含于"$\subset$"关系。 ×

c. I_X √

d. I_X的任一非空真子集$R \subset I_X$ ×

e. 实数集上的"小于或等于"关系√"$\leqslant$"

f. 实数集上的小于关系"<"? ×

g. 自然数上的模n同余关系。×

h. 映射的核关系。×

i. 自然数的整除关系。√

（2）偏序集的定义

定义3.8.2　设≤是X上的一个偏序关系，则称二元组(X, ≤)为偏序集。

设X= {a, b}，2^X= {∅, {a}，{b}，{a, b}}

"⊆" = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}),
({b},{a,b})}。

(2^X, "⊆")是一个偏序集

一个集合上可能存在多个偏序集。

（2）偏序集的定义

定义3.8.2　设$\leq$是X上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为偏序集。

设$X=\{a, b\}$，$2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

“$\supseteq$” $= \{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}),$

$(\{a\},\varnothing), (\{b\},\varnothing), (\{a,b\},\varnothing),$

$(\{a,b\},\{a\}),$

$(\{a,b\},\{b\})\}$。

$(2^X$, “$\supseteq$” $)$是一个偏序集;

实数集上存在$(R, \leq)$和$(R, \geq)$等偏序集。

（3）全序关系与全序集

定义3.8.3 集合X上的偏序关系 $\leq$ 叫做全序关系，如果 $\forall x, y \in X$, $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立，全序关系也称为线性序关系。X与全序关系 $\leq$ 构成的二元组 $(X, \leq)$ 称为全序集。

设 $X=\{a, b\}$, $2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$
\text{“}\subseteq\text{”} = \{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}),\\
(\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}),\\
(\{a\},\{a,b\}),\\
(\{b\},\{a,b\})\}。
$$

$(2^X$, “$\subseteq$” $)$是不~~是~~全序集?

因为 $(\{a\}, \{b\}) \notin$ “$\subseteq$” 并且 $(\{b\}, \{a\}) \notin$ “$\subseteq$”

（3）全序关系与全序集

定义3.8.3 集合X上的偏序关系 ≤ 叫做全序关系，如果$\forall x, y \in X$, $x \le y$与 $y \le x$ 至少有一个成立，全序关系也称为线性序关系。X与全序关系 ≤ 构成的二元组$(X, \le)$称为全序集。

设$X=\{a, b\}$, $2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$R = \{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}), (\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{a\}, \{b\}) (\{b\},\{a,b\})\}。$$

$(2^X, R)$是不是全序集。√

（3）全序关系与全序集

下面哪种关系是全序关系？

1. 实数间的常用的“小于或等于”关系。√

2. 集合间的包含关系。×

3. 自然数间的整除关系 ×

（4）偏序集的有关术语 – 前驱和后继

定义3.8.4 设（X，≦）是一个偏序集。我们称y盖住x,如果x<y，且对每一个 z∈X，若x≦z≦y，则x=z或y=z 。如果y盖住x，则记为:

$$x \overset{\infty}{\subset} y$$

并且y称为x的后继，而x称为y的前驱。

例3.8.7 令={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系 “|” 下构成一个偏序集(X, |)。

判断下面说法是否正确

6是2, 3的后继，6是12的前驱。

24是6的后继。

3是2的后继。

（4）偏序集的有关术语－前驱和后继

例 考虑任务集 T, 它包含了拍摄一张室内开启闪光灯的照片必须按顺序完成的任务:

(1) 打开镜头盖;

(2) 照相机调焦;

(3) 开启闪光灯;

(4) 按下快门按钮 .

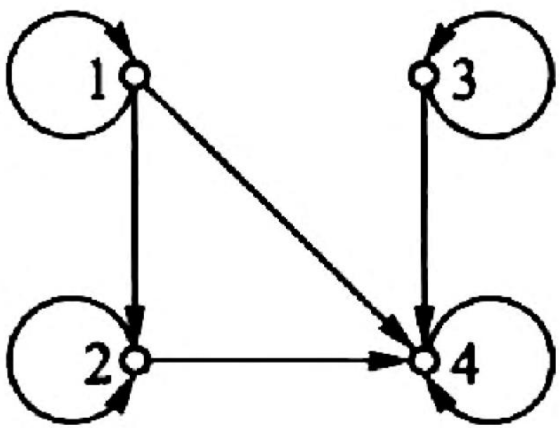
在 T 上定义关系 R 如下:

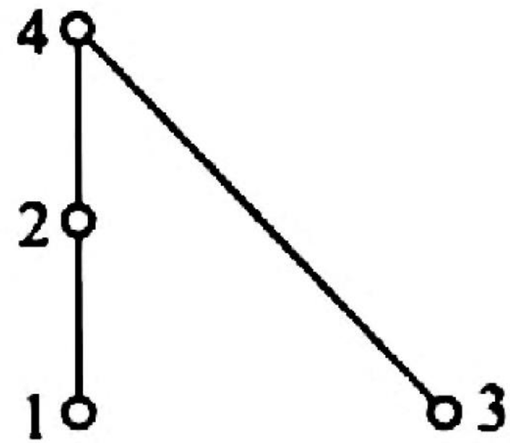
$(i, j) \in R \Leftrightarrow$ 如果 $i = j$ 或者任务 i 必须在任务 j 之前完成

试判断 R 是否是 T 上的偏序关系并画出它的关系图.

（4）偏序集的有关术语 – 前驱和后继

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,4),(2,4),(3,4)\}$





（4）偏序集的有关术语－哈斯图

哈斯图（Hasse图）的概念:

例3.8.7 令A={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集（A, |），讨论它的关系图。

“|” ={(2, 2), (2, 6), (2, 12), (2, 24), (2, 36)

(3, 3), (3, 6), (3, 12), (3, 24), (3, 36)

(6, 6), (6, 12), (6, 24), (6, 36)

(12, 12), (12, 24), (12, 36)

(24, 24)

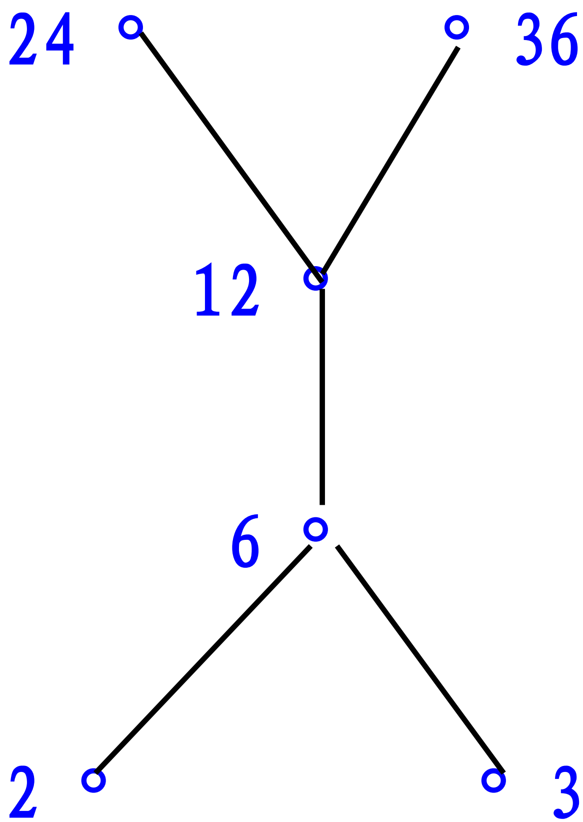
(36, 36)}

关系图太复杂，太麻烦

哈斯图的目的是简化关系图的画法。

（4）偏序集的有关术语－哈斯图

例3.8.7 的哈斯图。



1、偏序关系是自反的，因此其关系图中，每个节点上都有环。既然都有，就可以省略环。

2、由于反对称性，x, y之间只能有一条有向边。如果从x到y有边，则把y放在x上方。表示箭头的方向。这样就可以省略箭头。

3、偏序关系是传递的，只要有(x, y)和(y, z)，就必然有(x, z)，因此只要在前驱和后继之间连线即可。

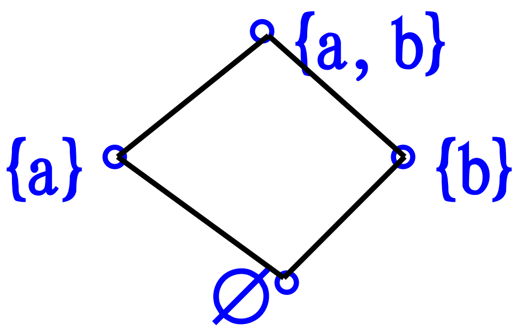
（4）偏序集的有关术语－哈斯图

例：画出下面偏序关系的哈斯图。

设$X=\{a, b\}$，$2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

"$\subseteq$" = $\{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}),$
$(\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}),$
$(\{a\},\{a,b\}),$
$(\{b\},\{a,b\})\}$。

$(2^X$，"$\subseteq$"$)$是一个偏序集



（4）偏序集的有关术语 – 哈斯图

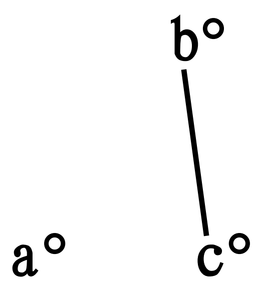
例：求X={a, b, c}上偏序集的个数。

下面哈斯图对应的偏序关系是?

a°　b°　c°

是{(a, a), (b, b), (c, c)}

下面哈斯图对应的偏序关系是?

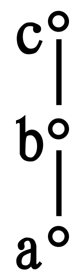


是{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b)}

（4）偏序集的有关术语 – 哈斯图

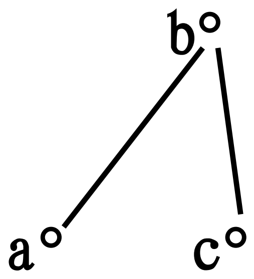
例：求X={a, b, c}上偏序集的个数。

右边哈斯图对应的偏序关系是?



是{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)}

右边面哈斯图对应的偏序关系是?



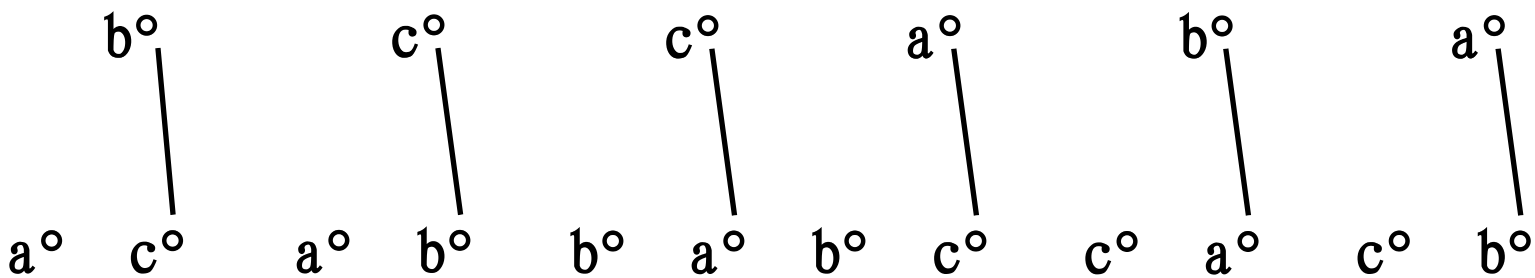
是{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (c, b)}

（4）偏序集的有关术语 – 哈斯图

（1）三个元素无边的哈斯图

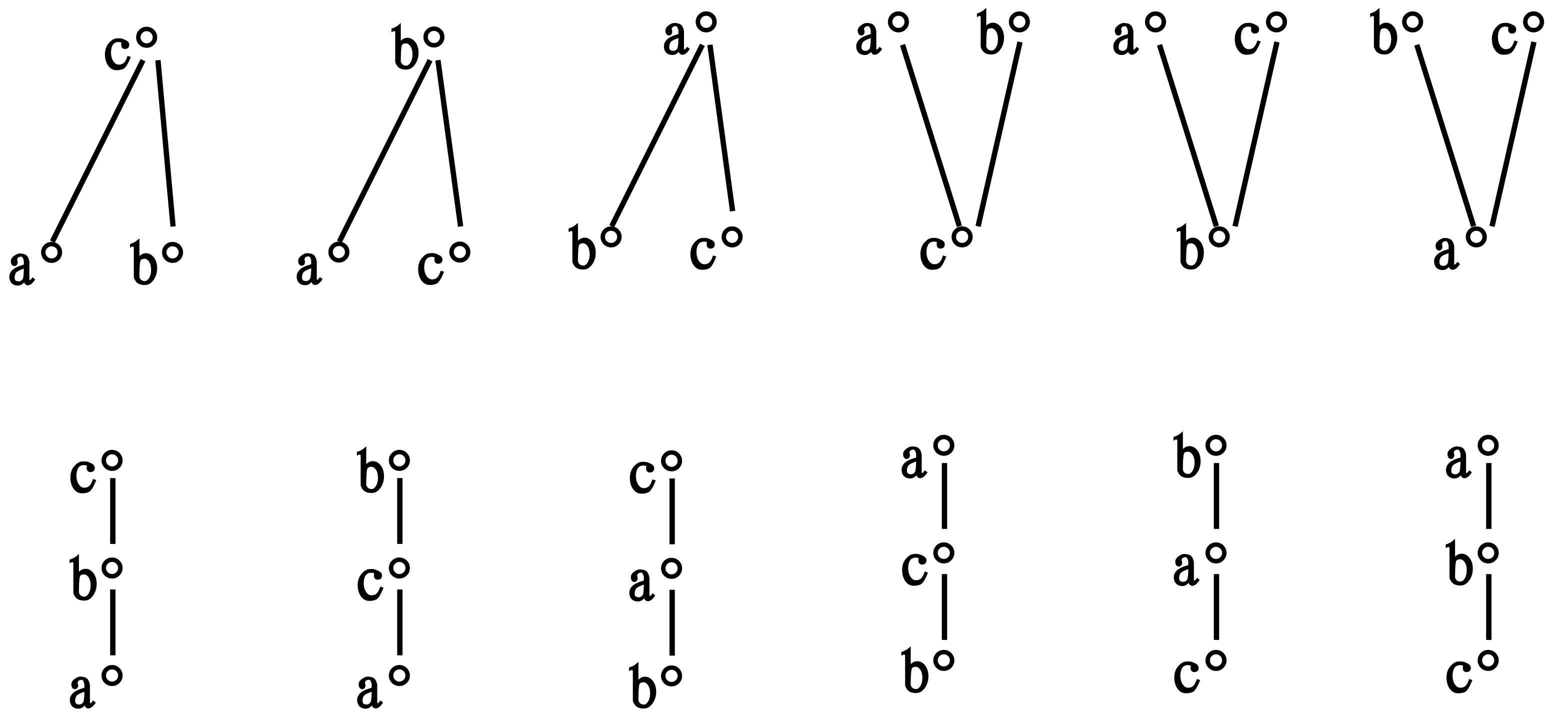
a° b° c°

（2）三个元素一条边的哈斯图



（4）偏序集的有关术语－哈斯图

（3）三个元素二条边的哈斯图



X={a, b, c}上偏序集的个数是19

（4）偏序集的有关术语－链和反链

定义3.8.5设（X，≦）是一个偏序集。A ⊆X。如果∀a, b ∈ A, a≦b 与 b≦a必有一个成立，则称A为X中的链。如果对A中任意两个不同的元素a与b, a≦b 与 b≦a 均不成立，则称A为X中的一个反链。|A|称为链或者反链的长度。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。

判断下面说法是否正确

A={12, 24, 36}是一条链 ×

A={2, 6, 12, 24}是一条链 √

（4）偏序集的有关术语 – 上界和下界

定义3.8.6设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果存在一个元素a $\in$X, 使得对B中每个元素x, 有x≦a, 则称a为B的一个上界。

如果存在一个元素b$\in$X, 使得对B中每个元素x, 有b≦x, 则称b为B的一个下界。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

6和2都是集合B={6, 12, 24, 36}的下界 √

36和24都是集合B={2, 6, 12, 24}的上界 ×

（4）偏序集的有关术语 – 上界和下界

定义3.8.6设（X， ≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果存在一个元素a $\in$X, 使得对B中每个元素x, 有x≦a, 则称a为B的一个上界。

如果存在一个元素b$\in$X, 使得对B中每个元素x, 有b≦x, 则称b为B的一个下界。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系"|" 下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

36和24都是集合B={2, 6, 12}的上界

√

（4）偏序集的有关术语－最大（最小）元素

定义3.8.7设（X，≦）是一个偏序集。B ⊆X。

如果存在一个元素a ∈B, 使得∀x ∈ B, 有x≦a, 则称a为B中的最大元素。

如果存在一个元素b∈B, 使得∀x ∈ B, 有b≦x, 则称b是B中的最小元素。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系"|"下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

36是集合B={6, 12, 24, 36}的最大元素 ×

24是集合B={2, 6, 12, 24}的最大元素 √

（4）偏序集的有关术语－最大（最小）元素

定义3.8.7设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果存在一个元素a $\in$B, 使得$\forall$x $\in$ B, 有x≦a, 则称a为B中的最大元素。

如果存在一个元素b$\in$B, 使得$\forall$x $\in$ B, 有b≦x, 则称b是B中的最小元素。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

2是集合B={2, 3, 6, 12}的最小元素

（4）偏序集的有关术语－上（下）确界

定义3.8.8设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果B有上界且B的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为B的上确界，记为supB。

类似的，如果B有下界且B的一切下界之集有最大元素，则称这个最大下界称为B的下确界，记为inf B。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36, 48, 72}, A在整除关系"|"下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

72是B={6, 12, 24, 36}的上确界 √

2和3都不是B={6, 12, 24}的下确界 √

（4）偏序集的有关术语－上（下）确界

定义3.8.8设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果B有上界且B的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为B的上确界，记为supB。

类似的，如果B有下界且B的一切下界之集有最大元素，则称这个最大下界成为B的下确界，记为inf B。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36, 48, 72}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

72是B={6, 12, 24}的上确界

（4）偏序集的有关术语－极大（小）元素

定义3.8.9设（X，≦）是一个偏序集。A ⊆X。

A中元素s称为A的极大元素，如果A中不存在与s不同的元素L，且s≦L。

如果A中有元素d，使得∀x ∊ A, x不等于d，x不小于 d，那么d被称为A的极小元素。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

A={6, 12, 24, 36}中24是极大元素 √

A={2, 3, 6, 12, 24}中2,3都是极小元素 √

**

（4）偏序集的有关术语 – 最大（最小）元素

注意这里的“最大”、“最小”、“极大”、“极小”与传统意义有区别，与“关系”相关！

看下面例子:

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在“被整除”关系“|”下构成一个偏序集(X, |)，求下列各小题的最大或极大元素。

{6, 12, 24, 36}　　最大元素6

{2, 3, 6, 12, 24}　　没有最大，极大元素2和3

（5）偏序集的性质

定理3.8.1设（X，≦）是一个偏序集。如X中每个链的长至多为n，则X的全部元素能被分成n个非空不相交反链之并。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。

最长链为4

{2, 3}, {6}, {12}, {24, 36}

**

（5）偏序集的性质

定理3.8.1设（X，≦）是一个偏序集。如X中每个链的长至多为n，则X的全部元素能被分成n个非空不相交反链之并。

证明：对n用归纳法：当$n = 1$是显然。

假设当$n = k \geq 1$时成立，则当$n = k+1$时。

设（X，≦）的最长链为k+1，则X中有极大元素，令M为X的所有极大元素之集，则$M \neq \phi$且$X \neq M$。考虑偏序集$(X \setminus M, \leqq)$。易证$X \setminus M$中最长链的长度为k。

由归纳假设，$X \setminus M$可以分解成k个反链之并。M也是一个反链，所以X能分解成k+1个反链之并。

**

（5）偏序集的性质

推论3.8.1设（X，≦）是一个偏序集。|X| = mn+1，则X中或存在一个长至少为n+1的链，或存在一个长至少为m+1的反链。

证明：假设结论不成立，则X中每个链的长度≦n，而且每个反链的长度≦m。设X中的最长链的长度为k，则k ≦n。由定理3.8.1, X能被分解成k个不相交反链之并。由假设每个反链之长≦m，所以，

$$|X| \leqq km \leqq mn$$

与假设矛盾。

**

（5）偏序集的性质

定义3.8.10 集合X上的二元关系R称为拟序关系，如果R是反自反的和传递的。拟序关系常记为<。如果x<y，则读为“x小于y”。

设 X={a, b, c}　R1={(a, b)},

R2= {(a, b), (b, c)},

R2= {(a, b), (b, c), (a, c)},

R2= {(a, b), (a, c)},

**

P126,7.设R是X上的偏序关系。证明：R是X上的全序关系当且仅当$X\times X=R\cup R^{-1}$

证明：

必要性：R是X上的全序关系=>$X\times X=R\cup R^{-1}$

(1) $\forall(x, y)\in X\times X$ => $(x, y)\in R$或者$(y,x)\in R$

=> $(x, y)\in R$或者$(x,y)\in R^{-1}$

=> $(x, y)\in R\cup R^{-1}$

=> $X\times X\subseteq R\cup R^{-1}$

(2) $R\cup R^{-1}\subseteq X\times X$

因此：必要性成立。

P126,7.设R是X上的偏序关系。证明：R是X上的全序关系当且仅当$X\times X=R\cup R^{-1}$

证明：

充分性：$X\times X=R\cup R^{-1}$=>R是X上的全序关系

也就是证明：$\forall x\in X, \forall y\in X \Rightarrow (x, y)\in R$或者$(y,x)\in R$

$\forall x\in X, \forall y\in X \Rightarrow (x, y)\in X\times X$

$\Rightarrow (x, y)\in R$或者$(x,y)\in R^{-1}$

$\Rightarrow (x, y)\in R$或者$(y,x)\in R$

因此：充分性性成立。

2015-2016集合论有关复试题

2015年，共200分，占16分

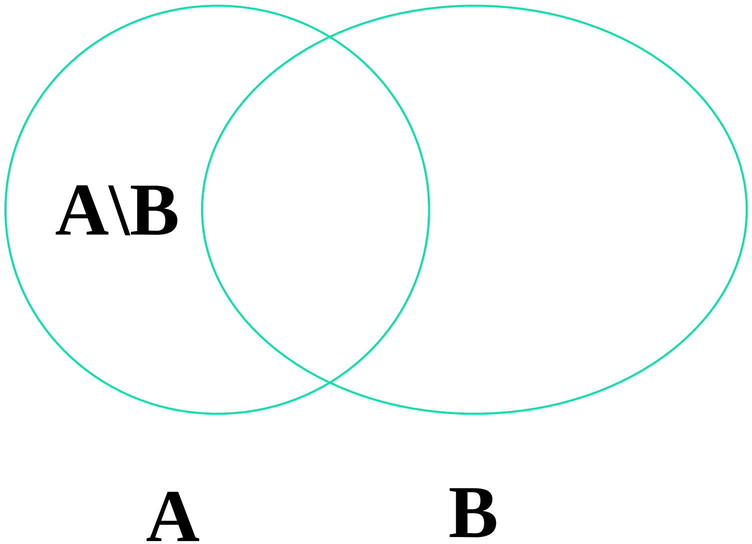
1.设A,B为集合，使下列两式 A\B=⊄ 和 (A∪B)\B=(A\B)∪B同时成立的充要条件是什么？

A. A⊆ B

B. B⊆ A

C. A=B

D. A=B=⊄ √



2.若映射f和g的合成$g \circ f$是双射，则下列论断哪个是正确的?

A. f 和g都是双射

B. f是单射，g是满射√

C. f是满射，g是单射

D. 以上论断都不对

2015-2016集合论有关复试题

3.设A={1,2,3}，则A上可以定义多少个自反的二元关系？

A. 16

B. 32

C. 64 √

D. 128

2015-2016集合论有关复试题

4.设A={1,2,3}，则A上至多可以定义多少个等价关系?

A. 4

B. 5 √

C. 6

D. 7

2015-2016集合论有关复试题

5. 自然数集N是可数的，则N×N是否是可数的？N的幂集2^N是否是可数的？

A. 可数，可数

B. 可数，不可数 √

C. 不可数，可数

D. 不可数，不可数

2015-2016集合论有关复试题

6.设A,B,C为任意集合，则下列论断哪个是正确的？

A. 若$A\in B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$

B. 若$A\subseteq B$，$B\in C$，则$A\in C$

C. 若$A\in B$，$B\subseteq C$，则$A\in C$ √

D. 若$A\subseteq B$，$B\in C$，则$A\subseteq C$

2015-2016集合论有关复试题

13.设Z是整数集合，映射$f:Z\to Z$，$f(x)=|x|-2x$，则f应满足什么性质？

A. 单射 √

B. 满射

C. 双射

D. 以上答案都不对

2015-2016集合论有关复试题

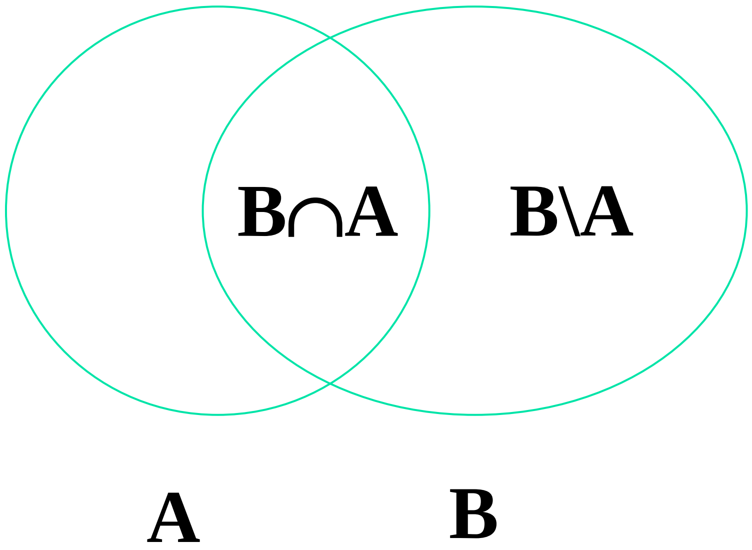
14.设A与B是两个任意集合，若{A∩B,B\A}是A∪B的一个划分，则A和B有何关系？

A. A\B=⊄ √

B. B\A=⊄

C. A=B=⊄

D. 以上答案都不对



2015-2016集合论有关复试题

2016，不全

6.(2 分) 设N 是自然数集合（$0 \in N$），$f: N \to N \times N, f(n)=(n,n+1)$，则f 满足下列哪个性质？

A. f 既是单射也是满射，即双射；

B. f 既不是单射也不是满射；

C. f 是单射但不是满射； √

D. f 不是单射但是满射。

2015-2016集合论有关复试题

22.(2 分)
设X={1,2,3}，则X 上具有多少个反自反且反对称性的二元关系？

A. 9

B. 27 √

C. 32

D. 64

2015-2016集合论有关复试题

35.(2 分)8.设X={1,2,3,4}，则X 上可以定义多少个商集基数为2 的等价关系？

A. 5

B. 6

C. 7 √

D. 8

2015-2016集合论有关复试题

37.(2 分)设A,B 是两个集合，若{A∩B}是A∪B 的一个划分，则A 与B 之间的关系是下列结论中哪一个？

A. A=B； √

B. A=B=⊄ ；

C. A?B；

D. B?A；

第一章：集合及其应用

1.1 集合的概念

1.2 子集、集合的相等

1.3 集合的基本运算

1.4 余集、DeMorgan公式

1.5 笛卡尔乘积

1.6 有穷集合的基数

例(多项选择)集合A是以空集为唯一元素的集合,集合 B=P(P(A))，则有：( )。

(1) $\varnothing \in B$; √

(2) $\varnothing \subseteq B$; √

(3) $\{\varnothing\} \subseteq B$; √

(4) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\} \subseteq B$; √

(5) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\} \in B$。 ×

$A=\{\varnothing\}$

$P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(P(A))=$
$\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

第二章：映射

2.1 函数的一般概念—映射

2.2 抽屉原理

2.3 映射的一般性质

2.4 映射的合成

2.5 逆映射

*2.6 置换

*2.7 二元和n元运算

2.8 集合的特征函数

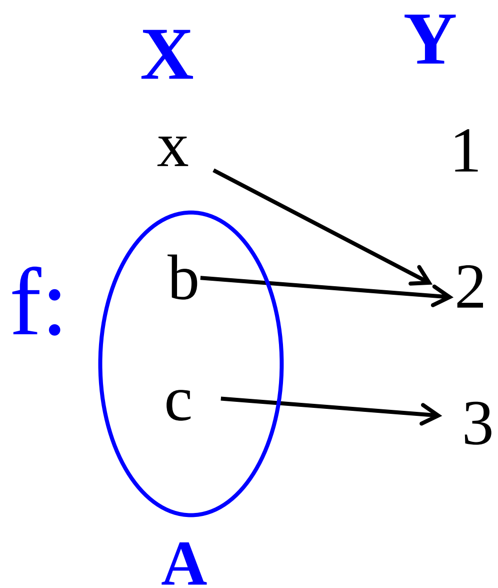
4. p46 设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$， $B\subseteq Y$，以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（1）(a) 若$f(x)\in f(A)$ 则x未必在A中

(b) 若$f(x)\in f(A)$ 则$x\in A$

(c) 若$f(x)\in f(A)$ 则$x\notin A$

(d) 若$f(x)\in f(A)$ 则$x\in A^c$



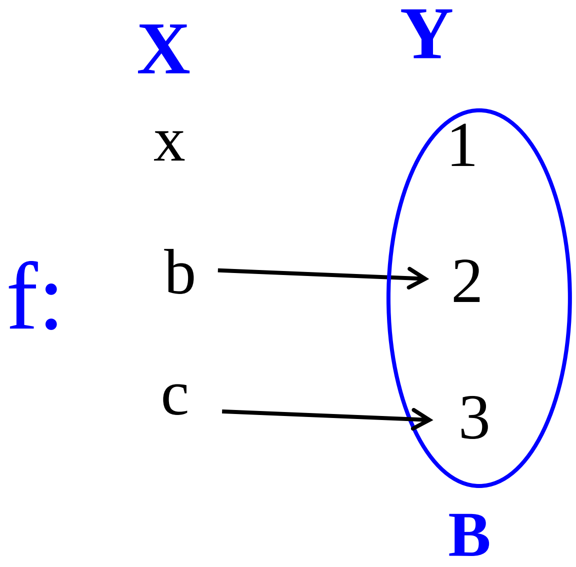
4. p46 设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$， $B\subseteq Y$，以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（2）**(a) $f(f^{-1}(B)) = B$**

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(c) $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$

(d) $f(f^{-1}(B)) = B^c$



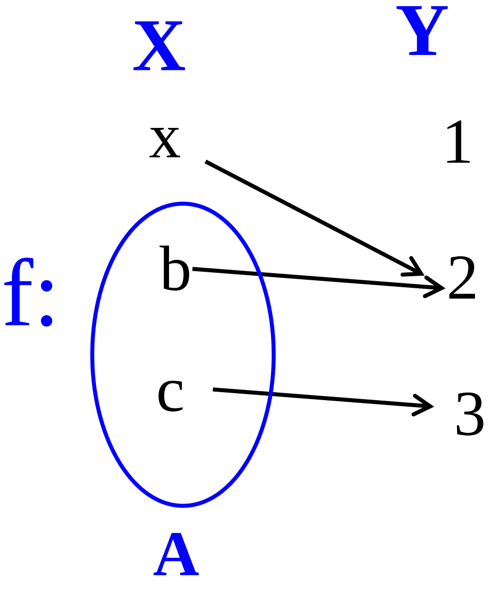
4. p46 设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$， $B\subseteq Y$，以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（3）**(a) $f^{-1}(f(A)) = A$**

(b) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

(c) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

(d) 以上都不对



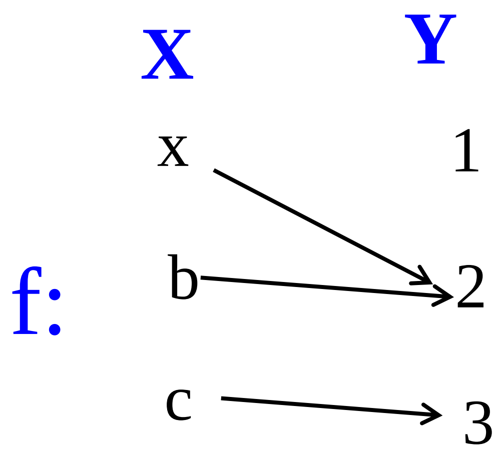
4. p46 设f:X→Y，A⊆X， B⊆Y，以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（4）(a) $f(A) \neq \varnothing$

(b) $f^{-1}(B) \neq \varnothing$

(c) 若$y \in Y$, 则$f^{-1}(y) \in X$

(d) 若$y \in Y$, 则$f^{-1}(y) \subseteq X$



第三章：关系

第三章：关系

1. 设A，B是两个集合，$f:2^A \to 2^B$。如果对A的任何子集E和F有$f(E\cup F)=f(E)\cup f(F)$，则称f是可加的。试证：一个从A到B的二元关系可定义为从2^A到2^B的一个可加映射。

举例：$A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$

$R=\{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2) \}$

$f(\varnothing)= \varnothing$

$f(\{a\})= \{1, 2\}$

$f(\{b\})= \{1, 3\}$

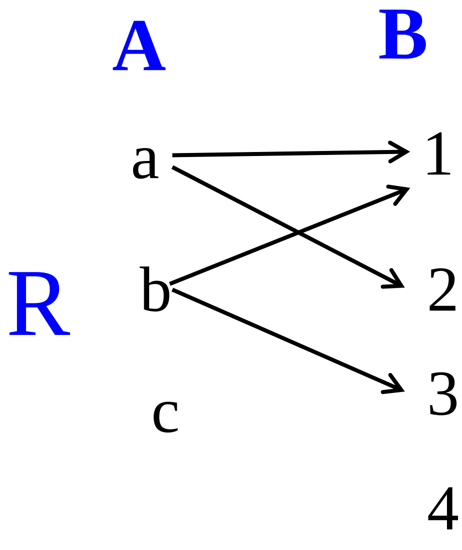
$f(\{c\})= \varnothing$

$f(\{a,b\})= \{1,2,3\}$

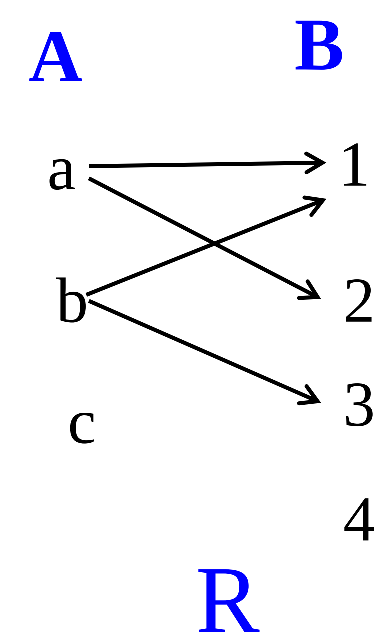
$f(\{a,c\})= \{1, 2\}$

$f(\{b,c\})= \{1, 3\}$

$f(\{a,b,c\})= \{1,2,3\}$



1. 设A，B是两个集合，$f:2^A \rightarrow 2^B$。如果对A的任何子集E和F有$f(E \cup F)=f(E) \cup f(F)$，则称f是可加的。试证：一个从A到B的二元关系可定义为从2^A到2^B的一个可加映射。



证明：$\forall H \subseteq A$

$$f(H)=\{y \mid \exists x \in H，(x, y) \in R\}$$

$\forall E, F \subseteq A$

$$\begin{aligned} f(E \cup F) &= \{ y \mid \exists x \in E \cup F，(x, y) \in R\} \\ &= \{ y \mid \exists x, x \in E \text{或} \\ &\qquad x \in F，(x, y) \in R\} \\ &= f(E) \cup f(F) \end{aligned}$$

例 设R是A上的二元关系，下面的结论是否正确？并证明你的结论.

（1）R是自反的，则R·R也是自反的 √

（2）R是对称的，则R·R也是对称的。 √

（3）R是反自反和传递的，则R是反对称的。√

（1）R是自反的，则R·R也是自反的

证明：$\forall x$

$$(x, x) \in R,$$

$$(x, x) \in R,$$

$$\Rightarrow (x, x) \in R \cdot R$$

（2）**R是对称的，则R·R也是对称的。**

证明：$\forall\ (x, z) \in R\cdot R$,

$\exists y, (x, y) \in R, (y, z) \in R$,

$\Rightarrow (y, x) \in R, (z, y) \in R$,

$\Rightarrow (z, x) \in R\cdot R$.

（3）**R**是反自反和传递的，则**R**是反对称的。

证明：如果**R**不是反对称的，

$\exists x \neq y, (x, y) \in R, (y, x) \in R$

由传递性$(x, x) \in R$

与反自反性矛盾。

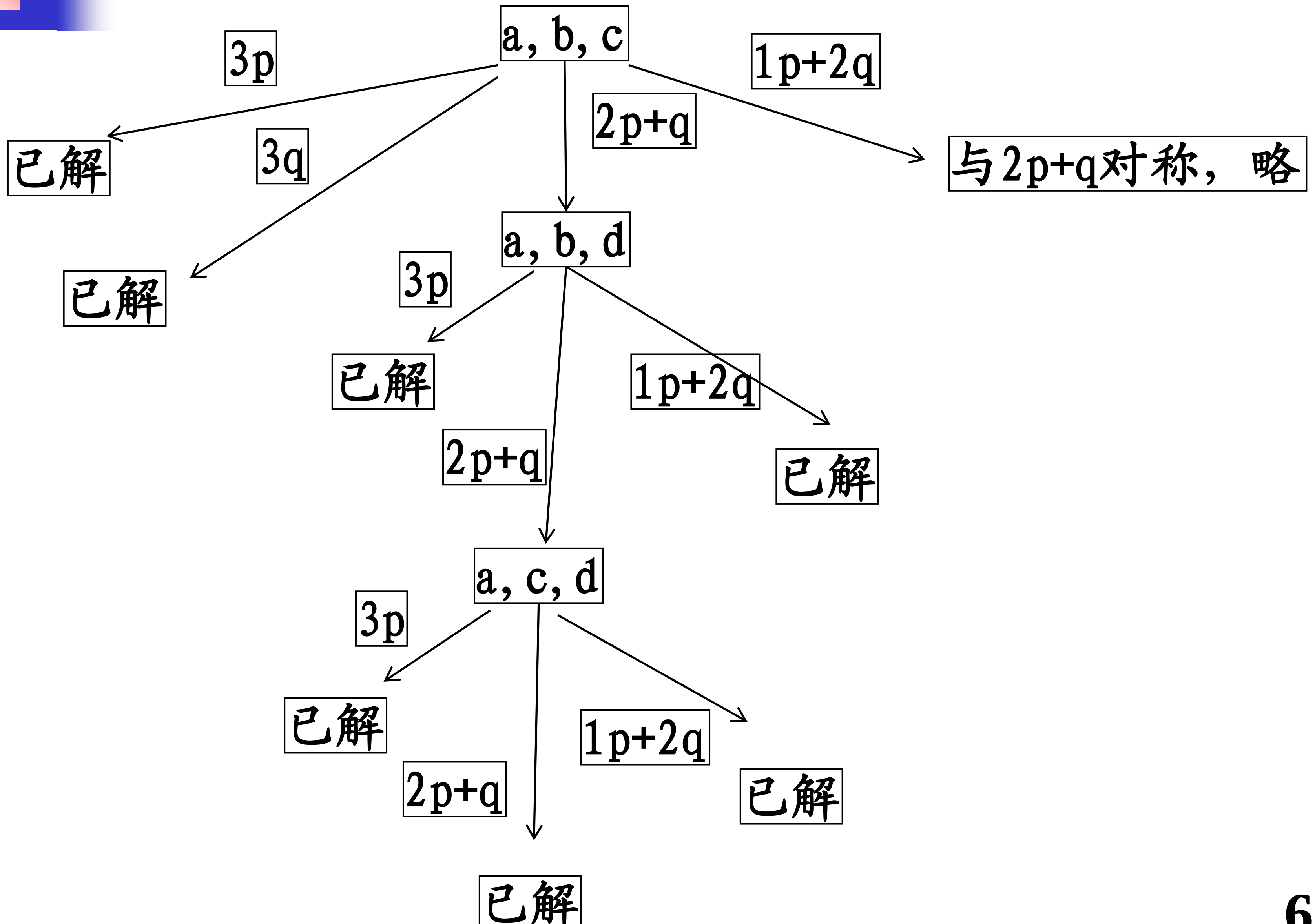
集合论复习

P44,6.珍珠4颗，有真有假，真珍珠重量相同且为p,假珍珠重量相同且为q, p>q,用秤（不是天平）仅称量3次，查出真假，应该怎么做?

解：设4颗珍珠分别为a,b,c,d

思想：先选3个一起称，如果确定不了，更换其中一个再称。

集合论复习


a, b, c
3p
已解
3q
已解
2p+q
1p+2q
与2p+q对称，略
a, b, d
3p
已解
1p+2q
已解
2p+q
a, c, d
3p
已解
1p+2q
已解
2p+q
已解