一、 选择题（每小题 2 分，共 20 分）

（请将答案填写在首页的答题纸中，在本处答题无效！）

1．$A\Delta B=\phi$的充要条件是：

A. A=B; B. $B=\phi$; C. $A=\phi$; D. $A\cap B=\phi$

2．A={1,2,3}到 B={a, b, c, d, e}的单射的个数是：

A. 60; B. 20; C. 120; D. 30。

3． |A|=7，A 中既自反又反对称二元关系的个数是：

A. 3^{21}; B. 0; C. 3^{42}; D. 2^{21}。

4． 在无穷集合基数的讨论中，以下哪个说法不正确？

A. 可数集的幂集还是可数集。

B.连续统个连续统集的并集还是连续统。

C.可数集与连续统的并集是连续统。

D.可数个可数集的并集还是可数集。

5． 6 个顶点的 3 条边的无向简单图有多少（同构的算一个）

A． 3 *B. 5* C. 4 D. 6

6． f 是集合 A 到 B 的单射，则：

A． |A|=|B| *B．* |A|≤|B| C． |A|≥|B| B． 不能确定

7． 以下哪个答案可能是 6 个顶点的图的度数分布：

A. （2,2,2,2,2,6） *B.*（1,1,1,1,1,1）

C. （1,2,2,3,5,5） D.（3,3,3,3,3,4）

8 n（n>1）个顶点的图，去掉一个顶点，可形成的最大支数和最小支数分别是：

A. n 和 1 *B.* n-1 和 1 C. n-1 和 2 D. n 和 2

9． 图 G1 和 G2 同构，下面哪条不正确？

A. G1 和 G2 顶点数相等

B. G1 和 G2 边数相等

C. 如果 G1 有一个 m 度顶点，则 G2 也有一个 m 度顶点。

D. G1 的边数+G2 的边数=完全图的边数

10.　色数是 1 的图当且仅当是？

A. 1 个顶点　　B. 偶图　C. 稀疏图　　*D.*零图

二、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

（对的打√，错的打×，请将答案填写在首页的答题纸中，在本处答题无效！）

1．去掉一个割点可以形成很多分支，去掉桥正好形成两个分支。√

2．简单来说，映射和关系都可以看做是笛卡尔积的子集。√

3．既对称又反对称的关系是存在的。√

4．极大平面图不一定是连通图×

5．A, B 为集合，则 $A \times B \subseteq A$ 不可能成立。　√

三、简答题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 简述：（1）简述什么是等价关系？　(2 分)

（2）给出集合 A = {a, b, c, d}上的一个 6 个元素的等价关系　(3 分)

答：（1）具有自反性，对称性，传递性的关系称作等价关系。

（2）{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a) }

2. （1）简述哈斯图的画法　（2 分）

（2）画出集合 A = {a, b, c, d, e}上的偏序关系 R={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)}的哈斯图（3 分）

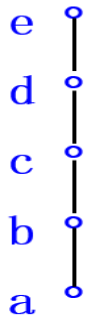
答：（1）

偏序关系是自反的，因此其关系图中，每个节点上都有环。既然都有，就可以省略。

由于反对称性，x, y 之间只能有一条有向边。如果从 x 到 y 有边，则把 y 放在 x 上方。表示箭头的方向。这样就可以省略箭头。

偏序关系是传递的，只要有(x, y)和(y, z),就必然有(x, z),因此只要在前驱和后继之间连线即可。

（2）



3. （1）简述什么是关系 R 的相容闭包。（2 分）

（2）给出集合 A = {a, b, c, d, e}上的关系 R={(a, b), (a, c), (a, d)}的相容闭包（3 分）

答：（1）包含 R 的自反对称关系的交集成为 R 的相容闭包。

（2）{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a)}

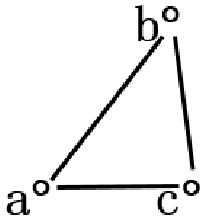
4. （1）说明什么是欧拉图？什么是哈密顿图？（2 分）

（2） 给出一个既是欧拉图又是哈密顿图的图。（3 分）

答：（1）包含图 G 的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹，有欧拉闭迹的图成为欧拉图。

包含图 G 的所有顶点的圈成为哈密顿圈，有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

（2）



5. （1）说明什么是顶点连通度、边连通度和最小度？（2 分）

（2）现有 1 个图的的顶点连通度、边连通度和最小度分别为 3, 4, 5,

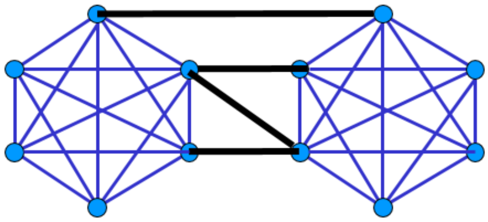
请画出这个图。（3 分）

答：（1）

图 G 的顶点连通度κ=κ(G)是为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点的数目。

图 G 的边连通度λ=λ(G)是为了使 G 产生不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边数。

（2）



6. （1）说明什么是割点？桥和割集？ （2 分）

（2）画出一个图，该图中有两个割点和两个桥。 （3 分）

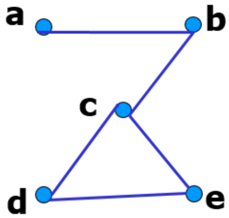
答：（1）

设 v 是图 G 的一个顶点，如果 G-v 的支数大于 G 的支数，则称顶点 v 为图 G 的一个割点。

图 G 的一条边 x 称为 G 的一座桥，如果 G-x 的支数大于 G 的支数。

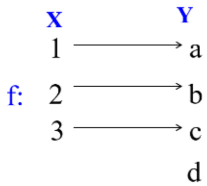
图 G=(V,E)，S⊆E，如果从 G 中去掉 S 中的所有边得到的图 G-S 的支数大于 G 的支数，而去掉 S 的任一真子集中的边得到的图的支数不大于 G 的支数，则称 S 为 G 的一个割集。

（2）



7. （1）简述什么是左逆映射和存在左逆映射的条件？ （2 分）

（2）给出如下映射 f 的两个左逆映射。 （3 分）



答：（1）设 f:X→Y,如果存在一个映射 h:Y→X, 使得: $hf=I_x$,则称映射 f

是左可逆的，h 称为 f 的左逆映射

（2）{(a,1),(b,2),(c,3),(d,1)} 和{(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)}

8. （1）简述什么树。（2 分）

（2）给出树的三个性质（定义中的性质除外）（3 分）

答：（1）无圈的连通图成为树。

（2）设顶点数为 p，边数为 q，则 p = q+1

去掉一条边，正好形成两个支

加一条边，形成唯一的一个圈

树是偶图

至少有两个 1 度顶点

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 证明：证明恰有两个一度顶点的树是一条路。

证明：用归纳法

当 p=2 时成立

设 p=k 时成立

当 p=k+1 时，去掉一条边正好形成两个树，

可证每棵树恰有两个一度顶点或只有一个顶点。

也就是说每棵树要么是一条路，要么是一个顶点，

合起来还是一条路。

2. 设 R,S 都是非空集合 A 上的二元关系，且他们都是对称的。证明：R°S 具有对称性当且仅当 R°S = S°R。

证明：

（1）如果 R°S 具有对称性，∀（x, z）∈ R°S,则：(z, x) ∈ R°S,∃ y, (z, y) ∈ R, (y, x) ∈ S,由 R，S 的对称性得：

(y, z) ∈ R, (x, y) ∈ S,因此(x, z) ∈ S°R, 因此 R°S ⊆ S°R

∀ (x, z) ∈ S°R, ∃ y, (x, y) ∈ S, (y, z) ∈ R,由 R，S 的对称性得：(y, x) ∈ S, (z, y) ∈ R,因此(z, x) ∈ R°S,由 R°S 的对称性，(x, z) ∈ R°S 因此 S°R ⊆ R°S

因此 R°S = S°R

（2）如果 R°S = S°R。∀ (x, z) ∈ R°S,∃ y, (x, y) ∈ R, (y, z) ∈ S,由 R，S 的对称性得：

(y, x) ∈ R, (z, y) ∈ S, 因此(z, x) ∈ S°R，(z, x) ∈ R°S，
所以：R°S 对称

五、计算题（每小题 5 分共 20 分）

1. 集合|A|=5，计算 A 上商集基数为 3 的等价关系的个数。（计算结果并给出步骤）

答:
设 A={a, b, c, d, e}, 则 A 的三划分有：

{{a},{b},{c, d, e}}, {{a},{c},{b, d, e}}, {{a},{d},{b, c, e}}, {{a}, {e}, {b, c, d}},

{{b}, {c}, {a, d, e}}, {{b}, {d}, {a, c, e}}, {{b}, {e}, {a, c, d}},

{{c}, {d}, {a, b, e}}, {{c}, {e}, {a, b, c}}

{{d}, {e}, {a, b, c}}　　　　　　　　C(5, 2)=10

{{a}, {b, c}, {d, e}}, {{a}, {b, d}, {c, e}}, {{a}, {b, e}, {c, d }}
……………………………………

C(5, 1)× C(4, 2)/2=15

A 上商集基数为 3 的等价关系的个数为 25

2. 求 K_4 的子图的个数（计算出结果并给出说明）。
答：
1 个节点的子图个数为 4
2 个节点的子图个数为 C(4,2)*2=12
3 个节点的子图的个数为 C(4,3)*2^3=32
4 个节点的子图的个数为 2^6=64

K_4 的子图的个数是 112

3. 有限集合|E| = n (n>0)，计算到 E 上的既不是自反，也不是反自反，还不是对称的二元关系的个数。（计算出结果并给出说明）。
答：
设 A 为 E 上自反关系的个数，B 为 E 上反自反关系的个数，C 为 E 上对称关系的个数。
则原题要求的个数为

$|A^c \cap B^c \cap C^c| = N$
$- |A| - |B| - |C|$
$+ |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$
$- |A \cap B \cap C|$

$= 2^{n\times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2}$
$+ 0 + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2}$
-0
$= 2^{n\times n} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2} + 2^{n(n-1)/2}$
或
$=2^{n\times n} - 2^{n(n-1)+1} - 2^{n(n+1)/2} + 2^{n(n-1)/2+1}$
或
$=(2^n - 2)(4^{(n\times n - n)/2} - 2^{(n\times n - n)/2})$
或
$=(2^n - 2)(2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)/2})$
或
$=(2^n - 2)(2^{n\times n - n} - 2^{(n\times n - n)/2})$

4. 求集合 A={a, b, c, d}到集合 B={1, 2, 3}的满射的个数
答：
设 Ai 为 i 没有原象映射集合，则从 A 到 B 的满射个数是：

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$=3^4 - C(3,1)(3-1)^4 + C(3,2)(3-2)^4 - C(3, 3)0^4$
$=81-48+3$
$=36$