第四周　　常见随机变量

4.3 几何分布与指数分布

几何分布

连续不断独立地重复进行一个参数为 p 的伯努利试验，若记 X 为首次出现“成功”时所需的试验次数，X 是一个离散型随机变量，取值为全体正整数。则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.$$

若随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

这里 $0<p<1$，则称 X 服从参数为 p 的几何分布，记为 $X\sim Ge(p)$。

****

例 4.3.1 父亲要孩子们去后院整理杂物，于是他的 3 个孩子就用每人同时抛一个硬币来决定谁去整理，他们规定，谁抛出的面与另外两人的不同就谁去整理，若三人抛出的面相同则需重抛，直到选出为止，假设硬币出现正面的概率为 p，出反面为 q，求

(1)　他们抛了不到 n 轮就能选出人的概率;

(2) 若 $p=\dfrac{1}{2}$，最少要抛多少轮，才能以 0.95 以上的概率可以选出人来。

解 （1）设投出正面的次数为随机变量 Y，则 $Y\sim B\left(3,p\right)$,

在一轮中，选出人选的概率为 $P\left(Y=2\right)+P\left(Y=1\right)=C_3^2p^2q+C_3^1pq^2=3pq$.

记 X 为选出人时所需要抛的轮数，故 $X\sim Ge(3pq)$。

因此所求概率为 $P(X<n)=1-P(X\geq n)=1-(1-3pq)^{n-1}$。

（2）求最小的 n，使得 $P(X\leq n)>0.95$，　$P(X\leq n)=1-P(X>n)$,

$$P(X>n)=(1-3pq)^n=(\frac{1}{4})^n$$，故

$$P(X\le n)=1-P(X>n)=1-(\frac{1}{4})^n>0.95$$，解出，$n>2.16$。

故最少要抛 3 轮，才能以 0.95 以上的概率可以选出人。

****

几何分布的无记忆性：

若随机变量 X 服从几何分布，对任意 $s>0$ 和 $t>0$，有 $P\left(X>s+t \mid X>s\right)=P\left(X>t\right)$。

$$P\left(X>j\right)=\sum_{k=j+1}^{\infty}q^{k-1}p=pq^j\sum_{k=0}^{\infty}q^k=pq^j\frac{1}{1-q}=q^j \qquad (q=1-p)$$

$$P(X>s+t\mid X>s)=\frac{P(X>s+t,\,X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{q^{s+t}}{q^s}=q^t=P(X>t)$$

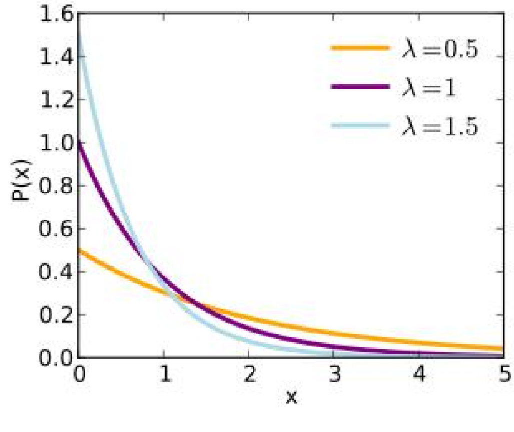
我们举一个例子说明几何分布的无记忆性。假设甲、乙两同学参加射击训练，每一轮射击两人同时发枪。假设两人每次射击命中的概率都是 1/4，并且假设两人射击命中与否是互不影响、相互独立的。则甲、乙两人射中一次所需的射击次数均服从几何分布。如果刚刚结束的一轮射击甲命中，而乙已经连续 8 轮没有射中了。则在下一轮射击中，甲、乙命中的概率仍然相同；或更一般地描述，若在之后的 k 轮两人都没有命中，则在第 k+1 轮两人命中的概率仍然相同。这种条件概率大小与之前发生情况无关的性质，就是几何分布的无记忆性。

****

指数分布

$X\sim Exp(\lambda),\ \lambda>0$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & ,x>0\end{cases}$$



当 $x>0$ 时，$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dx=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=\int_{0}^{x} d\left(-e^{-\lambda t}\right)=-e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$$

****

指数分布实例：假设一种电子元件的寿命 X 随机变量，对已使用了 t 小时的元件，在以后 Δt 小时内失效的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，其中 λ 为不依赖 t 的常数，称为失效率，求该元件寿命的分布函数。

由题设有 $P(X\le t+\Delta t\mid X>t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，记 $f(t)=P(X>t)$

$$f(t+\Delta t)=P(X>t+\Delta t)=P(X>t+\Delta t,X>t)=P(X>t)P(X>t+\Delta t\mid X>t)$$

$$=P(X>t)\big(1-P(X\le t+\Delta t\mid X>t)\big)=f(t)\big(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\big)$$

$$\Rightarrow f(t+\Delta t)=f(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]\Rightarrow\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=-\lambda f(t)+o(1)\Rightarrow\frac{df(t)}{dt}=-\lambda f(t)$$

考虑 $f(0)=1$，有 $f(t)=e^{-\lambda t}$，$F(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-e^{-\lambda x}$。

****

指数分布的无记忆性：

$$P(X\le t+\Delta t\mid X>t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$X\sim Exp(\lambda),\ \lambda>0$$

对任意 $s>0$ 和 $t>0$，有 $P(Y>s+t\mid Y>s)=P(Y>t)$。

可以验证，指数分布也满足无记忆性的条件概率关系。而且指数分布是唯一具有无记忆性的连续型分布。同时，几何分布是唯一具有无记忆性的离散型分布。

****