第七周 多维随机变量，独立性

7.4 独立随机变量期望和方差的性质

独立随机变量乘积的期望的性质：

X,Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

以离散型随机变量为例，设二元随机变量 (X,Y) 的联合分布列 $P(X=x_i,Y=y_j)$ 已知，

则 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$， $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jP(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}x_iP(X=x_i)\sum_{j=1}^{n}y_jP(Y=y_j)=E(X)E(Y)$$

****

独立随机变量和的方差的性质：

X,Y 独立，则 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

$$Var(X+Y)=E\left[(X+Y)^2\right]-E(X+Y)^2$$

$$=E(X^2+2XY+Y^2)-\left[E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\right]$$

$$=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2+2E(XY)-2E(X)E(Y)$$

$$=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2=Var(X)+Var(Y)$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都存在方差，则 $Var(X_1+X_2+\cdots+X_m)=\sum_{k=1}^{n}Var(X_k)$

****

利用独立的 0-1 分布求和计算二项分布随机变量 $X\sim b(n,p)$ 期望和方差

我们在推导二项分布随机变量的方差时，已经利用了独立随机变量和的方差等于方差

求和的性质。这里我们再回顾一下。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且均服从 0-1 分布$B(1,p)$，则$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

对所有$k=1,\cdots,n$，$E(X_k)=1\times p+0\times(1-p)=p$，　$E(X_k^2)=1\times p+0\times(1-p)=p$

$$Var(X_k)=E({X_k}^2)-E(X_k)^2=p-p^2=p(1-p),$$

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

$$Var(X)=Var(X_1+X_2+\cdots+X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n)=np(1-p)$$

****

负二项分布随机变量

$Y\sim NB(r,p)$: 连续不断且独立地重复进行一个参数为p的伯努利试验，第r次“成功”出现时所进行的试验次数。更细致地考虑由伯努利试验构造参数为 r，p 的负二项分布随机变量的过程。从伯努利试验开始到第一次成功，所进行试验的次数是随机的，记为随机变量X_1，则X_1服从参数为 p 的几何分布；然后继续独立地进行伯努利试验，到第二次试验成功，我们记从第一次试验成功后开始计算的试验次数为X_2，则X_2仍然服从参数为 p 的几何分布；如此进行下去，到第 r 次“成功”出现时所进行的总的伯努利试验次数 Y 就等于 X1 加 X2 一直加到 Xr。

设$X_1,X_2,\cdots,X_r$相互独立，且均服从几何分布$Ge(p)$，

则$Y=X_1+X_2+\cdots+X_r$；　$E(X_k)=\dfrac{1}{p}$，$Var(X_k)=\dfrac{1-p}{p^2}$，　$k=1,2,\cdots,r$

$$E(Y)=E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=E(X_1)+\cdots+E(X_r)=\frac{r}{p}$$

$$Var(Y)=Var(X_1+X_2+\cdots+X_r)=Var(X_1)+\cdots+Var(X_r)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

****

例 7.4.1 设随机变量 X,Y 相互独立，已知它们的期望分别为 $E\left(X\right)$ 和 $E\left(Y\right)$。令 $U=\max\left\{X,Y\right\}$，$V=\max\left\{X,Y\right\}$，求 $E\left(UV\right)$。

解：分别考虑 $X\geq Y$ 和 $X<Y$ 两种情况，

当 $X\geq Y$ 时，$U=X$，$V=Y$；当 $X<Y$ 时，$U=Y$，$V=X$；

所以 $UV=XY$，

$E\left(UV\right)=E\left(XY\right)=E\left(X\right)E\left(Y\right)$。