第六周　常见随机变量的期望与方差和应用实例

6.3 均匀、指数和正态分布的期望与方差

均匀分布 $X \sim U(a,b)$，　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & X\in[a,b] \\ 0 & 其他\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}。$$

b-a 越大，则随机变量取值越分散，其方差也越大。

****

指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$，　$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & ,x>0\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}xd\left(-e^{-\lambda x}\right)$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{+\infty}-e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}x^2d\left(-e^{-\lambda x}\right)$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx^2=\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

****

标准正态分布 $X \sim N(0,1)$， $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in R$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx \ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ 为奇函数，且 $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 有界，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} -xde^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1,$$

$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=1$。

****

一般正态分布随机变量 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$， $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=0 \ \Rightarrow \ E(X)=\mu$$

$$Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu)=1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sigma^2}Var(X)=1 \ \Rightarrow \ Var(X)=\sigma^2$$

所以，正态分布的参数 mu 和 sigma 方具有明确的概率意义，就是正态随机变量的期望和方差。

****