第八周 条件分布与条件期望

8.1. 条件分布

离散随机变量的条件分布

二元离散型随机变量(X,Y)的联合分布列：$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，

$P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}=p_{\cdot j}$，对一切使得$p_{\cdot j}>0$的$y_j$，

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad (i=1,2,\cdots)$$

称为给定$Y=y_j$条件下X的分布列。

在$Y=y_j$条件下X的分布函数$F(x\mid y_j)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i\mid Y=y_j)$。

****

例 8.1.1 设离散型随机变量(X,Y)联合分布列为$P(X=i,Y=j)=\frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$，

$(i=0,1,\cdots;j=0,1,\cdots)$，求$X+Y=n$条件下$X$的分布。

解： 首先计算$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}\sim b\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right).$$

实际上，如果我们更充分地利用已有的概率分布和独立性的知识，可以观察到本题中的二元离散型随机变量 X 和 Y 的边缘分布均服从泊松分布，X 服从参数为 λ_1 的泊松分布，Y 服从参数为 λ_2 的泊松分布，且 X，Y 相互独立。上一周我们曾经介绍过相互独立的泊松分布随机变量具有可加性，即可知道 $X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。

****

连续随机变量的条件分布

二元连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，对一切使 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)>0$ 的 y，给定 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布函数为：

$$F(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$

$$=\lim_{h\to 0}P(X\le x|y\le Y\le y+h)=\lim_{h\to 0}\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+h)}{P(y\le Y\le y+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+h}f(u,v)dudv}{\int_{y}^{y+h}f_Y(v)dv}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

条件密度函数 $f(x|y)=\dfrac{d\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du}{dx}=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

****

例 8.1.2 设 (X,Y) 服从 $G=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}$ 内的均匀分布，求 $f(x|y)$

解：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}},\quad |x|\le\sqrt{1-y^2},\ |y|<1。$$

****

连续场合下的全概率公式

$$f(x,y)=f_Y(y)f(x\mid y)\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f(x\mid y)\,dy$$

这一公式，可以理解为将 X 在某一个固定点 x 的密度，分解为 Y 的所有取值可能条件下 x 的密度用 y 出现的密度加权求和。一定程度上是有限或可列多种情况下的分情况讨论到不可数种情况的推广形式，因此称为连续型随机变量场合下的全概率公式。

连续场合下的贝叶斯公式

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\Rightarrow f(x\mid y)=\frac{f_X(x)f(y\mid x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f(y\mid x)\,dx}。$$

公式中将 Y 条件下 X 的密度函数表达为 X 条件下 Y 的条件概率，交换了条件与目标的顺序，称为连续场合下的贝叶斯公式。

****