第七周 多维随机变量，独立性

7.3 随机变量的独立性

随机变量的独立性

定义．设 n 维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$F_{X_i}(x_i)$ 为 X_i 的边缘分布函数，如果对任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i)$，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。即

$$P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le x_i)。$$

离散型等价定义： $P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$

连续型等价定义： $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i)$

****

例 7.3.1（例 7.1.3） 设二元随机变量 (X,Y) 的联合分布列为，

$X \setminus Y$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

，X,Y 是否独立？

解： $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$， $Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{4}{9}$， $P(X=1,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)=\frac{2}{9}$，

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1)=\dfrac{2}{9}$, $P(X=2,Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2)=\dfrac{1}{9}$

所以随机变量 X 和 Y 相互独立。

****

例 7.3.2 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$， $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$， 若 $P(XY=0)=1$，求

(1) (X,Y) 的联合分布列， (2) X,Y 是否独立

解： $P(XY=0)=1 \Rightarrow P(XY\neq 0)=0 \Rightarrow P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$

$X\backslash Y$	0	1	$P(X=x_i)$
-1	p_{11}	p_{12}	$1/4$
0	p_{21}	p_{22}	$1/2$
1	p_{31}	p_{32}	$1/4$
$P(Y=y_j)$	$1/2$	$1/2$	

$p_{12}=0,$
$p_{32}=0$
$\Rightarrow$

$X\backslash Y$	0	1
-1	1/4	0
0	0	1/2
1	1/4	0

$P(X=-1)\cdot P(Y=1)\neq P(X=1,Y=1)=0$，所以 X,Y 不独立。

****

例 7.3.3 设随机变量 X,Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，求 $X+Y$ 的分布。

解：$X+Y$ 的取值范围为全体非负整数，计算 $X+Y$ 的分布列，对任意非负整数 n

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

****

泊松分布和二项分布的可加性

泊松分布的可加性：若 $X_1 \sim P\left(\lambda_1\right)$，$X_2 \sim P\left(\lambda_2\right),\cdots,X_m \sim P\left(\lambda_m\right)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_m \sim P\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m\right)$

二项分布的可加性：$X_1 \sim B\left(n_1,p\right)$，$X_2 \sim P\left(n_2,p\right),\cdots,X_m \sim P\left(n_m,p\right)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_m \sim B\left(n_1+n_2+\cdots+n_m,p\right)$

****