第三周　随机变量及其概率分布

3.3 分布函数的性质与特殊的例子

分布函数的性质

任意随机变量的分布函数$F(x)$都具有如下三条基本性质

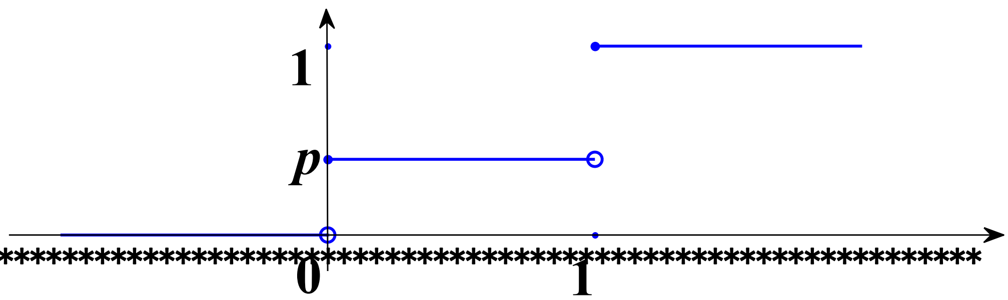
（1）　单调性　　$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上单调非减函数，即$\forall x_1<x_2, F(x_1)\le F(x_2)$；

（2）　有界性　　$\forall x\in R$，有$0\le F(x)\le 1$，

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1;$$

（3）　右连续性　$F_X(x)$是关于x的右连续函数，即$\forall x_0\in R$，有

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0),\quad F(x_0+0)=F(x_0)$$



****

利用分布函数计算随机变量在不同区域上的概率

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)$$

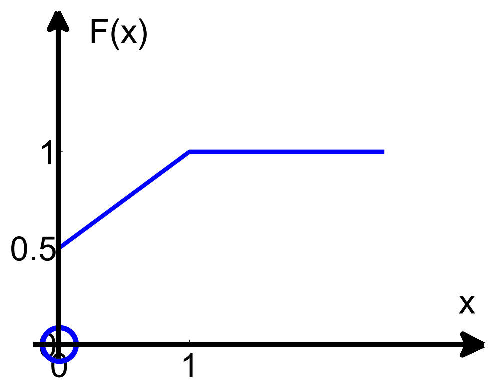
$$P(X=a)=P(X\le a)-P(X<a)=F(a)-\lim_{x\to a^-}F(x)=F(a)-F(a-0)$$

$$P(X\ge b)=1-P(X<b)=1-[P(X\le b)-P(X=b)]=1-F(b-0),$$

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)+P(X=a)=F(b)-F(a)+P(X=a)=F(b)-F(a-0)$$

****

既非离散型也非连续型的随机变量



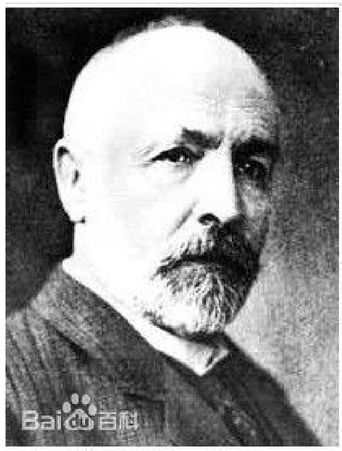
例 3.3.1 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x+1}{2} & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(F_1(x)+F_2(x)\right)$$

$$F_1(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases},\quad F_2(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

****

例 3.3.2 既非连续也非离散的分布，康托尔（Cantor）分布

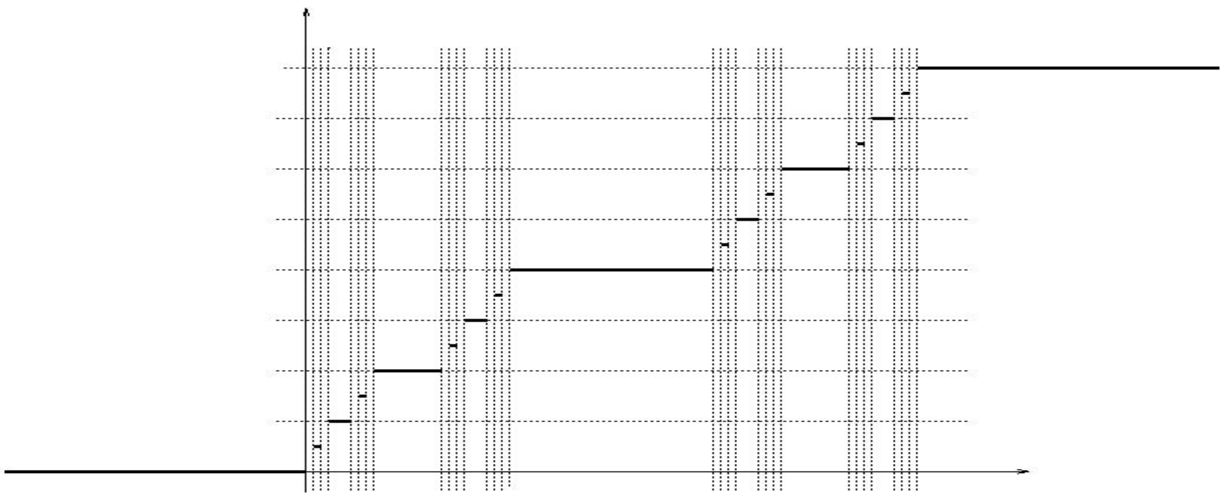


$$C_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad C_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),$$

$$C_3=\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)\cup\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)\cup\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)\cup\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right),$$

$$C_4=\cdots$$

定义函数 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{2k-1}{2^n} & \text{当} x\in C_n \text{的第} k \text{个子集时}, 0<k\le 2^{n-1}, n=1,2,\cdots, \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$



对所有$n=1,2,\cdots$，第n级集合C_n包括2^{n-1}个小区间，每个区间的长度为$\frac{1}{3^n}$，

则所有C_n （$n=1,2,\cdots,$）的长度和为 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+2^2\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}\right)=1$。

给$(0,1)$内剩余的点赋值使$F(x)$满足连续性，则$F(x)$为单调不减的连续函数。

$F(x)$符合分布函数的定义，此函数定义了一个随机变量，记为X。

由于在这个实数域内几乎处处有 $f(x)=F'(x)=0$，

则 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F'(x)dx=0$，$F(x)$不存在密度函数，所以$X$不是连续型。

离散型随机变量：有限个或可数多个取值，其分布函数为有限或可数多个取值变化的阶梯函数，不可能在整个实数域内都是连续的。

$F(x)$是R上的连续函数，所以X也不是离散型。

所以由$F(x)$定义的随机变量既非离散型也非连续型。

****