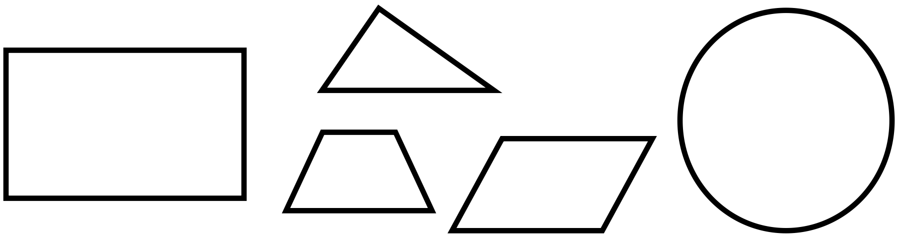
第三周　　随机变量及其概率分布

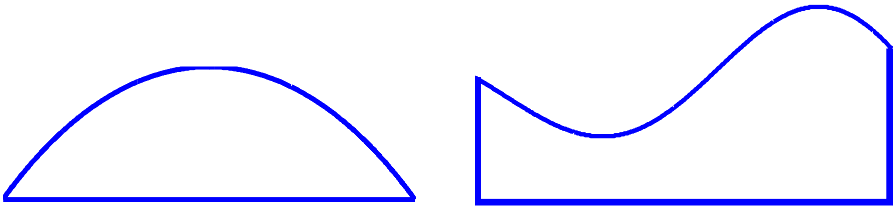
3.4 概率论所需微积分要点回顾

面积的计算

简单



困难



****

$$\text{面积} = \lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k = S(b) - S(a)$$

考虑曲线 $v(t)$ 围成的面积，我们不妨假设这条曲线代表某个物体的速度变化情况，用函数 v(t) 表示，曲线的起点 a 和终点 b 分别代表两个时刻。这时，曲线在 a，b 之间围成的面积就等于在 a，b 时刻之间物体走过的路程。计算面积就可以避开永远变化着的速度函数。如果知道路程随时间变化的函数 S(t)，则总路程即为 S(b)-S(a)，v(t) 在 a，b 两点间围成的面积就等于 S(b)-S(a)，只和两个点有关，而不再依赖无穷多个点！我们还发现，S(t) 和 v(t) 有内在的联系，路程的变化率等于速度，所以 S(t) 的导数等于 v(t)。要计算 v(t) 围成的面积，我们不用考虑它在无穷个点上的变化，只要找到哪个函数的导数是 v(t)，则这个面积用那个函数两个点的取值的差即可得到。

也就是无穷多个点所围面积实际上被另一个函数在两个点的信息所控制。如果我们得到这个控制函数，无穷多个点的变化就都化解了，而归结为两个点的信息。

我们会的总是简单的，所谓规律往往就是操纵变化过程的简单规则，关键是我们能

否认识到复杂表象下是否有简单的规则在背后操纵它们。如果发现了，我们的认识就提高了一步。当然，所谓简单也不是绝对的，积累的理论和实践经验越丰富，此时简单的内涵就越丰富。可以说理解清晰了，就是简单了。

****

微积分基本定理：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$，其中 $F'(x) = f(x)$。

常用函数的导数公式	常用函数的积分公式
复合函数的求导	积分的换元法
两个函数乘积的导数公式	分部积分法

****

基本导数公式

1. $(C)' = 0$

2. $(x^a)' = ax^{a-1}$

3. $(\sin x)' = \cos x$

4. $(\cos x)' = -\sin x$

5. $(e^x)' = e^x$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

基本积分公式

1. $\int_a^b 1dx = x\Big|_a^b = b - a$

2. $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

3. $\int_a^b \cos x dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$

4. $\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$

5. $\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$

6. $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_a^b = \ln\frac{b}{a}\ (0 < a < b)$

7. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x\Big|_a^b = \arcsin b - \arcsin a \quad (-1 \le a \le b \le 1)$

8. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x\Big|_a^b = \arctan b - \arctan a$

****

复合函数的求导公式

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

$$\Rightarrow df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b df(g(x)) = \int_a^b f'(g(x))g'(x)dx$$

换元积分公式

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b df(g(x)) = f(g(x))\Big|_a^b = f(g(b)) - f(g(a))$$

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f'(g(x))dg(x) \overset{\text{令 } y=g(x)}{=\!=\!=} \int_{g(a)}^{g(b)} f'(y)dy$$

****

例 3.4.1 计算积分 $\int_a^b xe^{-x^2} dx$

$$\int_a^b xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_a^b e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \int_a^b de^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_a^b = \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{2}$$

$$\int_a^b xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_a^b e^{-x^2} d(-x^2) \overset{\text{令 } y=-x^2}{=\!=\!=} -\frac{1}{2} \cdot \int_{-a^2}^{-b^2} e^y dy = -\frac{1}{2} e^y \Big|_{-a^2}^{-b^2} = \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{2}$$

****

乘积函数的求导公式

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}} \int_a^b [f(x)g(x)]' dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b g(x)df(x) + \int_a^b f(x)dg(x)$$

分部积分公式 $\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$

****

例 3.4.2 计算积分 $\int_a^b xe^{-x}dx$

$$\int_a^b xe^{-x}dx = \int_a^b xd\left(-e^{-x}\right) = -xe^{-x}\Big|_a^b - \int_a^b \left(-e^{-x}\right)dx$$

$$= -xe^{-x}\Big|_a^b - e^{-x}\Big|_a^b$$

$$= ae^{-a} - be^{-b} - e^{-b} + e^{-a} = (a+1)e^{-a} - (b+1)e^{-b}$$