

第五周 随机变量函数的分布及随机变量的数字特征

5.3 随机变量的方差

方差：随机变量偏离期望的程度（随机变量分布的分散程度）

$$\text{Var}(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right),$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(XE(X)) + E(X)^2 = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2, \quad \text{Var}(aX + b) = \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}, \quad \text{标准差, 也记作 } \sigma_X$$

$$\text{Var}(X + Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

方差通常缩写为 $\text{Var}(X)$ (variance) 或 $D(X)$ (deviation)。

例 5.3.1 项目 1：投资 10 万元

可能回收 10 万元保本；40%可能回收 15 万元，盈利 5 万元

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{平均收益为 } E(X_1) = 0 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{2}{5} = 2 \text{ 万元},$$

项目 2：投资 10 万元

60%可能回收 0 万元，亏损 10 万元；40%可能回收 30 万元，盈利 20 万元

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{平均收益为 } E(X_2) = -10 \times \frac{3}{5} + 20 \times \frac{2}{5} = 2 \text{ 万元}$$

$$E(X_1^2) = 0 \times \frac{3}{5} + 5^2 \times \frac{2}{5} = 10, \quad Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 6;$$

$$E(X_2^2) = (-10)^2 \times \frac{3}{5} + 20^2 \times \frac{2}{5} = 220, \quad Var(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 216。$$

两项投资的期望相等，均为 2 万元，但它们的方差一个是 6，一个是 216，差异非常大。期望刻画平均收益，而方差则刻画收益的波动，反映了投资的风险程度。
