機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 8-1: 聯合機率分佈
- 8-2: 邊際機率分佈
- 8-3: 雙變數期望值

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

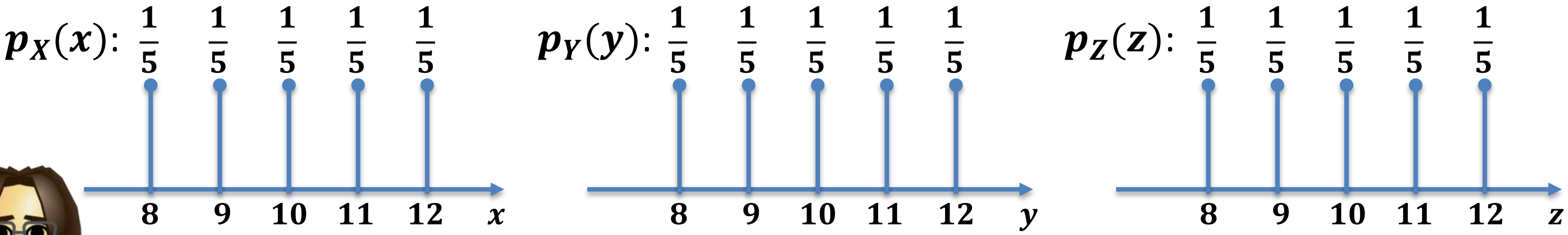
8-1: 聯合機率分佈 (JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當小明出國去交換時

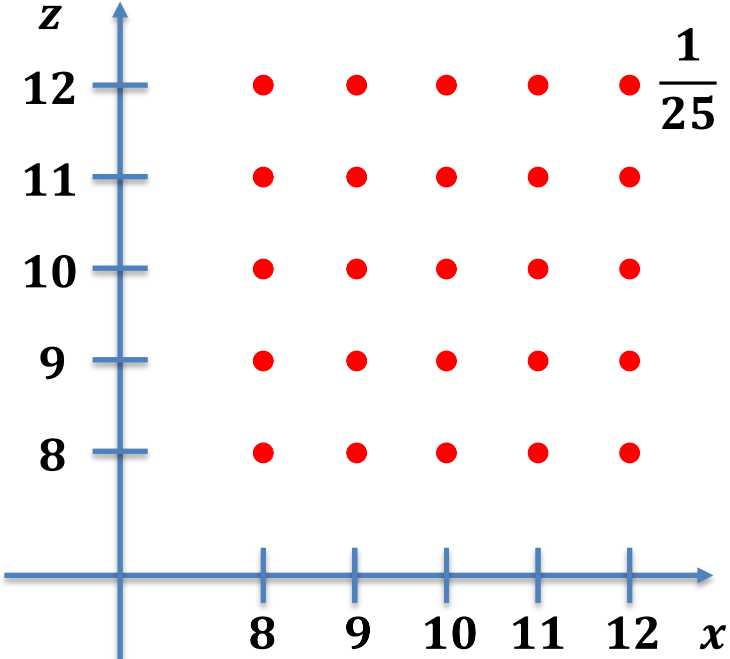
- $\boldsymbol{X}$: 小美臉書/QQ 離線時間，$\boldsymbol{X \sim UNIF(8, 12)}$
- $\boldsymbol{Y}$: 小華臉書/QQ 離線時間，$\boldsymbol{Y \sim UNIF(8, 12)}$
- $\boldsymbol{Z}$: 小園臉書/QQ 離線時間，$\boldsymbol{Z \sim UNIF(8, 12)}$
- 假設 $\boldsymbol{X, Y, Z}$ 都是離散隨機變數



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當小明出國去交換時

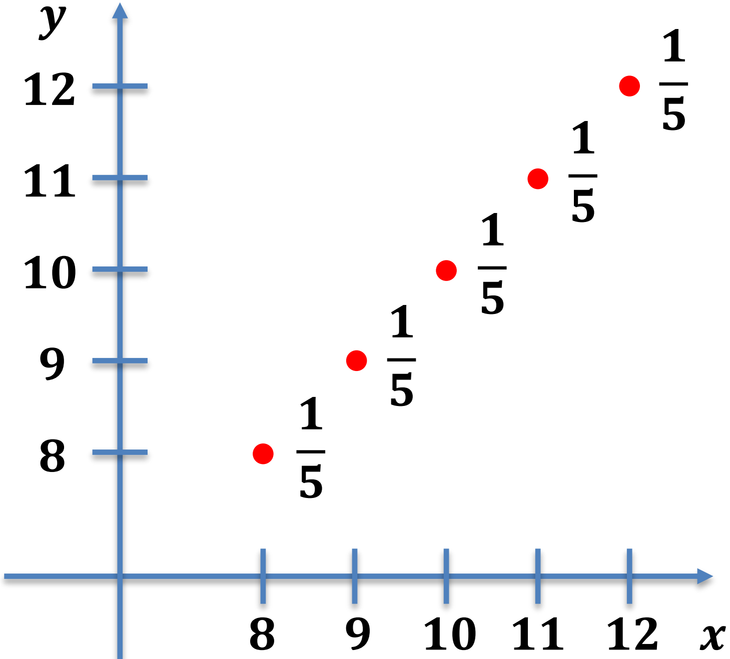
- 若將小美離線時間 X 與小園離線時間 Z 一起看呢？
- 畫出 $P(X=x, Z=z)$：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

滿山盡是君雅照！

- 若將小美離線時間 X 與小園離線時間 Y 一起看呢？
- 畫出 $P(X=x, Y=y)$，赫然發現！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合機率分佈

- 同時將多個隨機變數的行為一起拿來看，我們可以看出更多以往看不到的資訊！
- 同時考慮多個隨機變數的機率分佈稱之為聯合機率分佈 (joint probability distribution)
- 聯合機率分佈亦有離散與連續的分別

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)

- 若 X, Y 皆為離散隨機變數，我們可以定義他們的聯合PMF

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ 且 } Y = y)$$

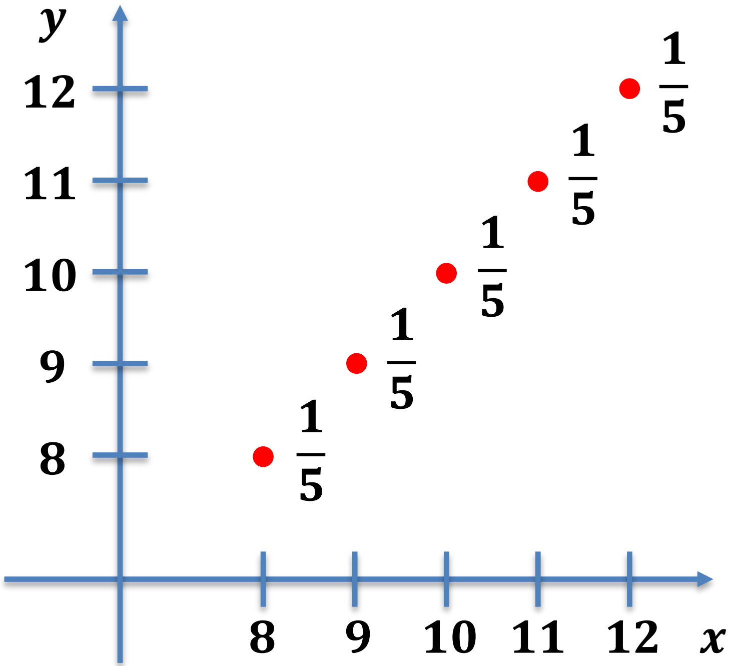
- 聯合PMF 決定了X, Y 的聯合機率分佈

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)

Ex: 小美離線時間 X 與小華離線時間 Y 的聯合 PMF：

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)\text{：}$$



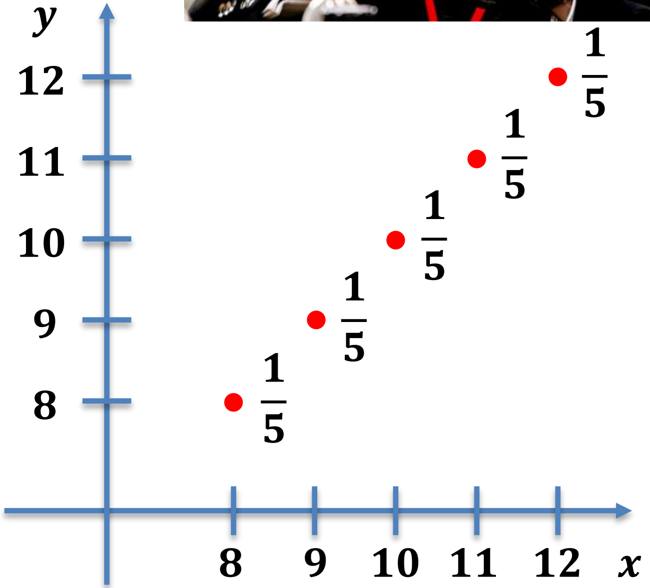
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 的性質

- $0 \le p_{X,Y}(x,y) \le 1$
- $\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = 1$
- X,Y 獨立

$$\begin{aligned} P_{X,Y}(x,y) &= P(X=x, Y=y) \\ &= P(X=x)\cdot P(Y=y) \\ &= P_X(x)P_Y(y) \end{aligned}$$

- 對任何事件 B： $P(B) = \sum_{(x,y)\in B} P_{X,Y}(x,y)$



Ex: B：美、華下線時間不晚於十點

$P(B) =)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

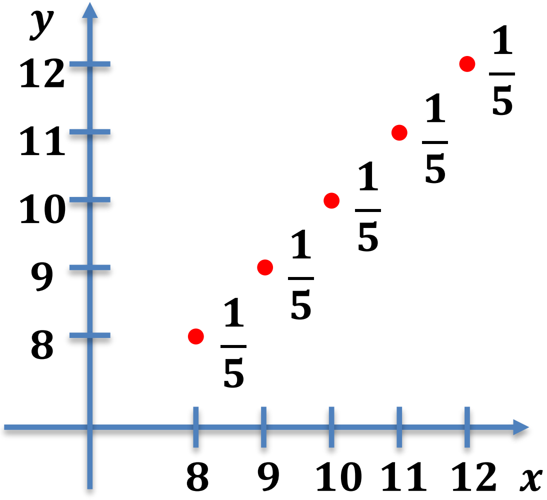
聯合 CDF (Joint CDF)

- 若考慮兩個隨機變數 X,Y 的聯合機率分佈，

  我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \text{ 且 } Y \le y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$F_{X,Y}(\,10\,,10) =$$



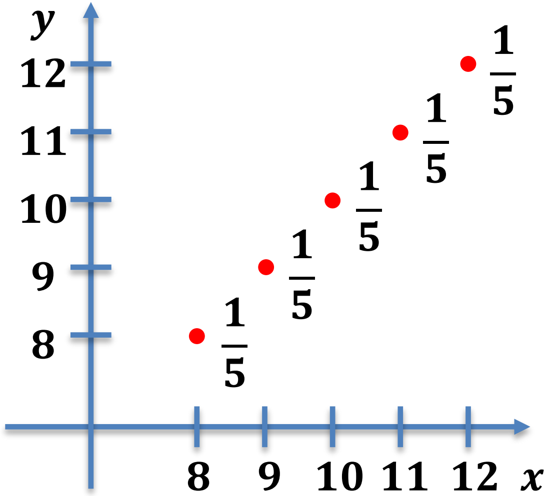
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- 若考慮兩個隨機變數 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 的聯合機率分佈，
  我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$\boldsymbol{F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)}$$

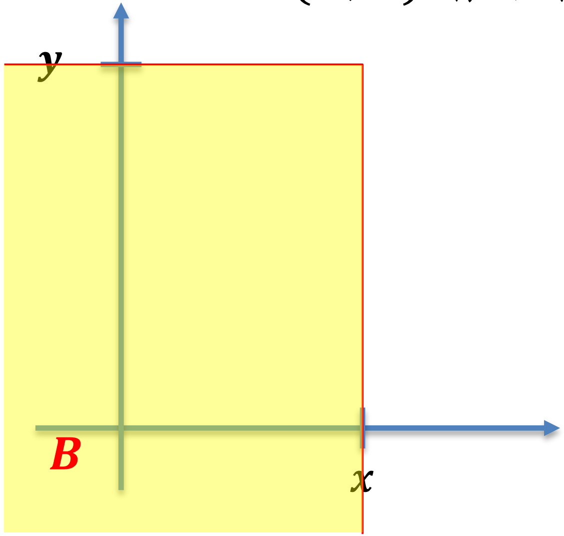
$\boldsymbol{F_{X,Y}(9,11) =}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
  $= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率



1D: $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x)$
$= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

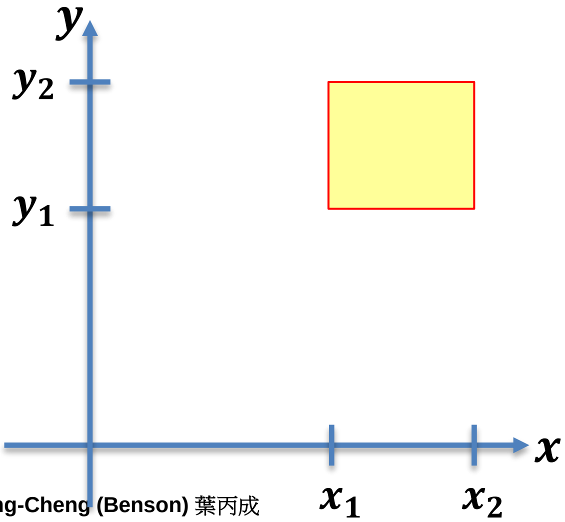
聯合 CDF 的性質

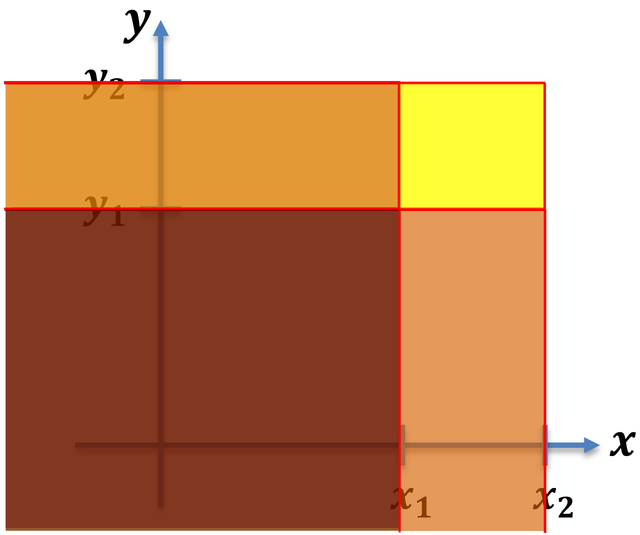
- $0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$
- 若 $x_1 \le x_2$ 且 $y_1 \le y_2$, 則$F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)$
- $F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x) = F_X(x)$
- $F_{X,Y}(\infty,y) = P(X \le \infty, Y \le y) = P(Y \le y) = F_Y(y)$
- $F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \le \infty, Y \le \infty) = 1$
- $F_{X,Y}(x,-\infty) = P(X \le x, Y \le -\infty) \le P(Y \le -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(-\infty,y) = P(X \le -\infty, Y \le y) \le P(X \le -\infty) = 0$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF 的性質

- 四方格性質：
  $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$
  $= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$



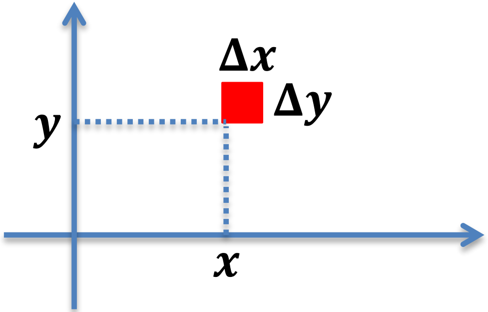


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若X, Y 皆為連續隨機變數怎辦？

- 回想之前一個變數時PDF怎麼定義？
- $f_X(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x}$

- 如何延伸到兩個變數的情況？
- $f_{X,Y}(x, y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{P((X,Y) \in \blacksquare)}{\Delta x \Delta y}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

- 若 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 皆為連續隨機變數，我們可以定義聯合 PDF：

$$f_{X,Y}(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\big((X,Y)\in\blacksquare\big)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X\leq x+\Delta x \text{ 且 } y<Y\leq y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

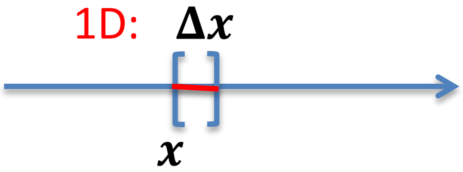
聯合 PDF (Joint PDF)

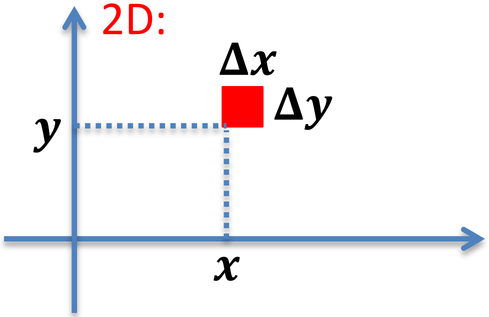
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial F_{X,Y}(x,y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right]$

  $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

  $\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

- 1D: Δx 極小時 $\Rightarrow P(X \in [x, x+\Delta x]) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$
- 2D: $\Delta x, \Delta y$ 極小時 $\Rightarrow P((X,Y) \in$ ■$) \approx f_{X,Y}(x,y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$





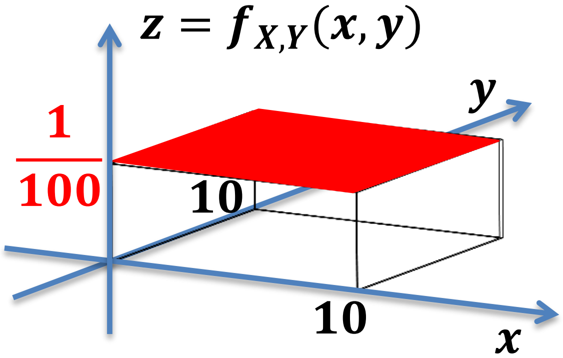
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF

Ex：小美等公車時間為 $\boldsymbol{X}$, 小園等公車時間為 $\boldsymbol{Y}$

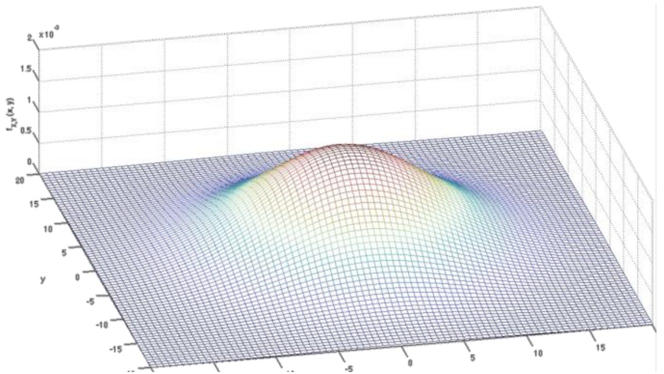
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 兩者獨立且皆為連續之機率分佈 $\boldsymbol{UNIF}(0,10)$。則

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$之聯合 PDF 為



其他聯合 PDF 的例子：

Bivariate Gaussian



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

- 聯合 PDF 亦決定了 X, Y 的聯合機率分佈
- 聯合 PDF 跟聯合 CDF 之間的關係：

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

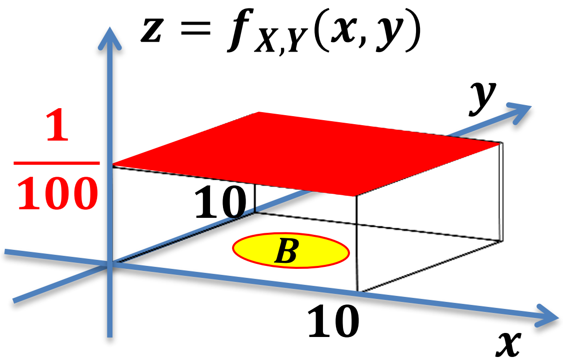
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 的性質

- $f_{x,y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = 1$
- 若 X, Y 獨立 $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- 對任何事件 B,

$$P(B) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 何謂聯合機率分佈？
- 為何要看聯合機率分佈？
- 聯合 PMF 的定義？
- 聯合 CDF 的定義？
- 聯合 PDF 的定義？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-2: 邊際機率分佈
(MARGINAL PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

已知聯合 PMF，欲得個別 PMF

- Ex：X, Y 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下：

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $p_X(x) = ?\; p_Y(y) = ?$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PMF (Marginal PMF)

- 已知聯合 PMF $\boldsymbol{p_{X,Y}(x,y)}$，則可求得 $\boldsymbol{p_X(x)}$、$\boldsymbol{p_Y(y)}$，稱之為邊際 PMF
- 邊際 PMF 算法：
  - $\boldsymbol{p_X(x)} =$
  - $\boldsymbol{p_Y(y)} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)

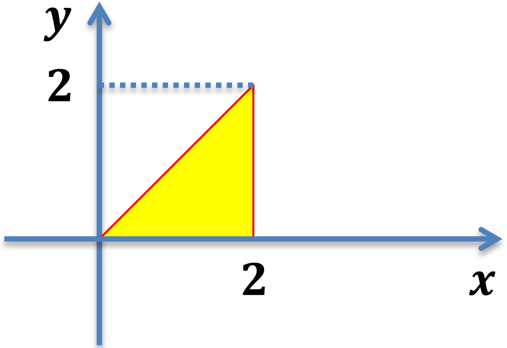
- 已知聯合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，則可求得 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，稱之為邊際 PDF
- 邊際 PDF 算法：
  - $f_X(x) =$
  - $f_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)

- Ex：已知

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & if\ 0 \le y \le x \le 2, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$



- $f_X(x) =$

- $f_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 邊際 PMF 的定義？怎麼算？
- 邊際 PDF 的定義？怎麼算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-3: 雙變數期望值

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值

- 回想只考慮一個離散隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 時其任意函數 $\boldsymbol{g(X)}$ 的期望值是：
  $\boldsymbol{E[g(X)]} =$
- 若同時考慮兩個離散隨機變數 $\boldsymbol{X, Y}$ 時，他們的任意函數 $\boldsymbol{h(X, Y)}$ 的期望值是
  $\boldsymbol{E[h(X, Y)]} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值

- Ex：$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{E[|X-Y|]=}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

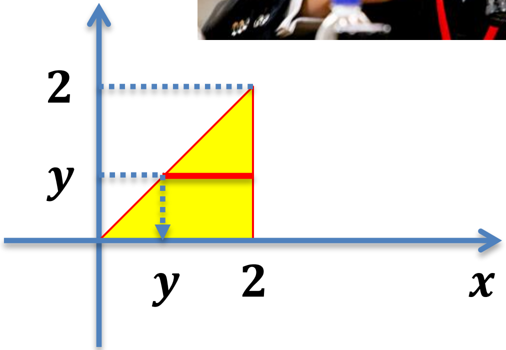
聯合 PDF 下的期望值

- 回想只考慮一個連續隨機變數 X 時其任意函數 $g(X)$ 的期望值是：
  $E[g(X)] =$
- 若同時考慮兩個連續隨機變數 X, Y 時，他們的任意函數 $h(X,Y)$ 的期望值是
  $E[h(X,Y)] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 下的期望值

- Ex：已知 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & if\ 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$



$E[X+Y]=$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

證明 (離散)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)]\, p_{X,Y}(x,y)$$

$=$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

證明 (連續)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)] \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- 若$\boldsymbol{X,Y}$獨立，則

$$\boldsymbol{E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]}$$

證明(離散)：

$$\boldsymbol{E[g(X)h(Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_{X,Y}(x,y)}$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- 若X, Y獨立，則

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

證明(連續)：

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 相關的性質

- $Var(X+Y) = E[(X+Y-\underbrace{E[X+Y]}_{\mu_X+\mu_Y})^2]$

$=$

※ X, Y獨立 $\Rightarrow 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
$= 2E[(X-\mu_X)]E[(Y-\mu_Y)] = 0$
$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 期望值的定義？
- 期望值的性質？
- 兩隨機變數獨立的話，期望值的計算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University