



機 率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo 臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: psych.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主題概述

- 5-1: 機率密度函數 PDF
- 5-2: 連續機率分佈 I





5-1: 機率密度函數 PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

第五周



人家有，我也想要有...



- 離散的隨機變數有 PMF 告訴我們某個數字發生的機率
- 連續變數的機率分佈常有不均等的情況發生，
Ex: 睡覺的時間長度
- 對連續的隨機變數，我們也想知道某個數字發生的機會多大，可以用 PMF 嗎？



連續R.V. 的先天問題

- 以幸運之輪為例 $X \sim [0, 1)$,

$$p_X(0.7) = ?$$

$[0, 1)$ 中每個數字發生機率均等，令其為 p

$[0, 1)$ 中有沒有超過 10^6 個數字？有！ $\Rightarrow 10^6 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-6}$

$[0, 1)$ 中有沒有超過 10^8 個數字？有！ $\Rightarrow 10^8 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-8}$

...

所以 $p_X(0.7) = p = 0$?!!!!



悲哀啊...

- 連續隨機變數跟 PMF 註定就是沒辦法在一起，悲哀啊！
- 關鍵於每個數字發生的機率都是 0！
- 還是很想知道在某個數字發生的機會多大，怎麼辦？



先看個亂七八糟的例子



- 因為拍戲，特別訂做合金寶劍
- 銅、金打造，如何得知有無偷工減料？
- 整根有品質，但是每點品質都是零？好熟悉！
- 不看品質看什麼？看密度！



$$\text{密度 at } x \approx \frac{\text{品質 in } [x, x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$



連續的東西，關鍵是密度！

- 寶劍有密度，機率也可有密度！
- 對隨機變數 X 而言，其機率密度：

$$\begin{aligned} \text{PDF: } f_X(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \\ &= F'_X(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \text{ CDF } F_X(x) \Leftrightarrow \text{PDF } f_X(x) \int_{-\infty}^x$$

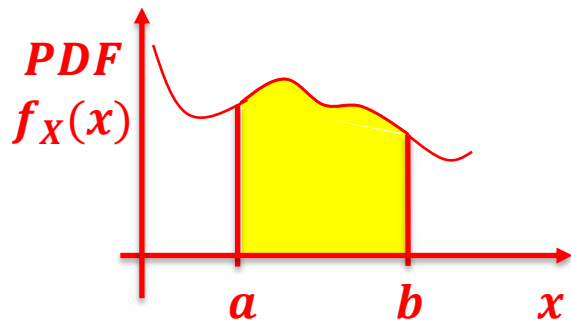


PDF 跟機率的關係

- 因為我們習慣處理機率，看到 PDF 如何把它跟機率連結呢？



$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \\ &= \int_a^b f_X(x) dx \end{aligned}$$

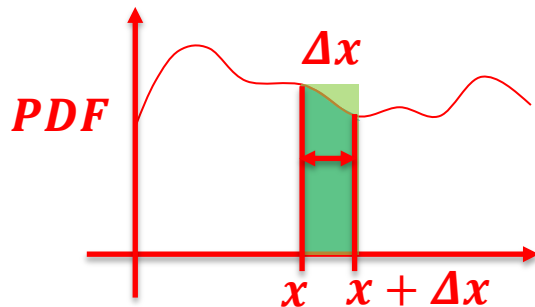


PDF 跟機率的關係

- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$

- 當 Δx 很小時：

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$$



PDF 有哪些性質呢?

- $f_X(x) = F'_X(x)$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- $f_X(x) \geq 0$



本節回顧

- 連續隨機變數每點發生機率是？
- 什麼是機率密度函數 PDF？
- PDF 跟 CDF 的關係？
- PDF 的性質？





5-2: 連續機率分佈 I

(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

第五周



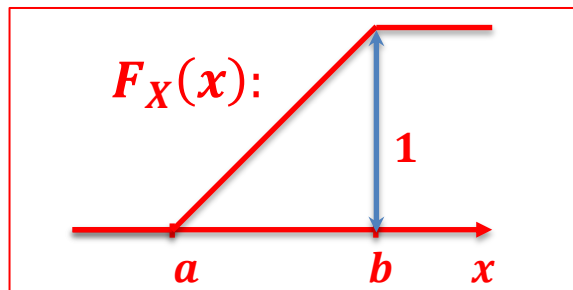
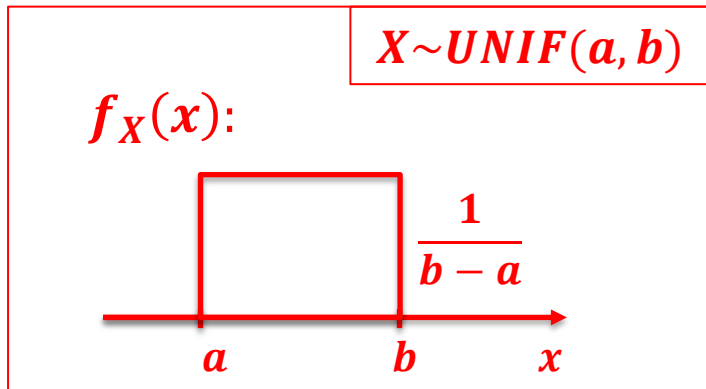
Uniform 機率分佈

- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Uniform 機率分佈

- Ex: 已知1路公車每十分鐘一班。

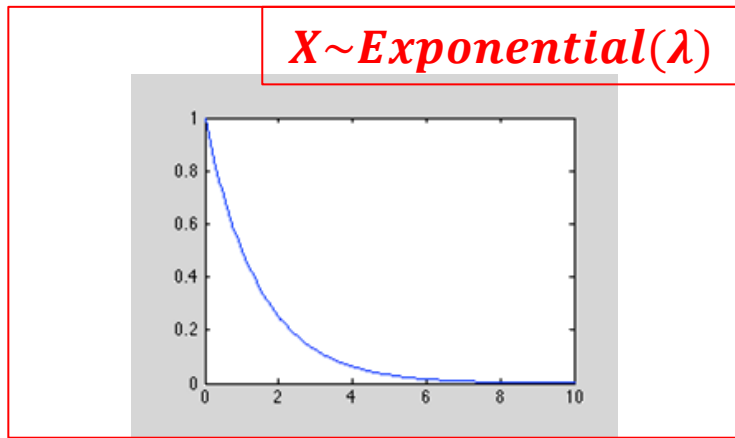
小美隨意出發到公車站，小美須等候公車之時間為 X



Exponential 機率分佈

- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



- CDF:

- If $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(u) du \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= - \int_0^x e^{-\lambda u} d(-\lambda u) \\ &= -[e^{-\lambda u}]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x}} \end{aligned}$$

- If $x < 0$: $F_X(x) = 0$.



Exponential 機率分佈

- Exponential 分佈有失憶的性質 (memoryless)，常被用來 model 有這種性質的事情
 - Ex: 小美出門化妝所需之時間
 - Ex: 某宅打LOL所花的時間



Erlang 機率分佈

- $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$

Gamma Distribution



$$\text{PDF: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{※ } f_X(x) = \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) * (\lambda e^{-\lambda x}) * \dots * (\lambda e^{-\lambda x})}_{n \text{ 次 convolution}}$$



Erlang 機率分佈



- CDF: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & , x \geq 0; \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$



Erlang 機率分佈



- ***Erlang***(n, λ) 常被用來 model 一件有多個關卡事情的總時間，而每個關卡所需時間都是隨機的
 - 關卡數： n
 - 每關卡所需時間之機率分佈 ***Exponential***(λ)
 - Ex: 打電動過三關所需時間
 - Ex: 寫完五科作業所需時間



本節回顧

- Uniform 機率分佈？
- Exponential 機率分佈？
 - 有失憶性（以後會證明）
- Erlang 機率分佈？
 - 跟 Exponential 的關係？

