機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成

Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 5-1:機率密度函數 PDF
- 5-2:連續機率分佈 I

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

5-1: 機率密度函數 PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

第五週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

人家有，我也想要有…

- 離散的隨機變數有 PMF 告訴我們某個數字發生的機率
- 連續變數的機率分佈常有不均等的情況發生，Ex: 睡覺的時間長度
- 對連續的隨機變數，我們也想知道某個數字發生的機會多大，可以用 PMF 嗎?

連續R.V. 的先天問題

- 以幸運之輪為例 $X \sim [0,1)$,

$$p_X(0.7) = ?$$

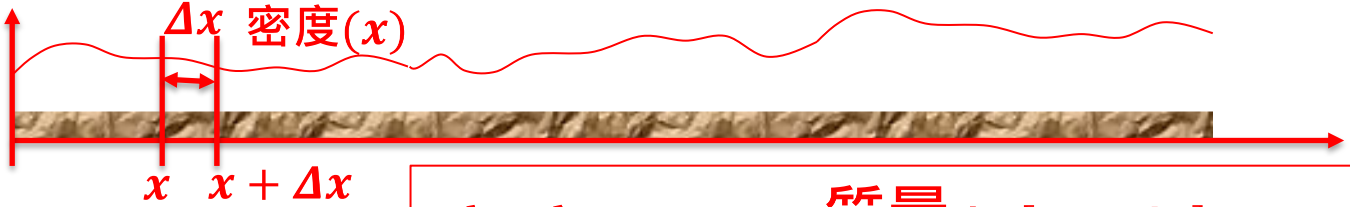
$[0,1)$ 中每個數字發生機率均等，令其為 p
$[0,1)$ 中有沒有超過 10^6 個數字？ 有！$\Rightarrow 10^6 \times p \le 1 \Rightarrow p \le 10^{-6}$
$[0,1)$ 中有沒有超過 10^8 個數字？ 有！$\Rightarrow 10^8 \times p \le 1 \Rightarrow p \le 10^{-8}$
…
所以 $p_X(0.7) = p = 0$?!!!!!

悲哀啊...

- 連續隨機變數跟 PMF 注定就是沒辦法在一起，悲哀啊！
- 關鍵於每個數字發生的機率都是 0！
- 還是很想知道在某個數字發生的機會多大，怎麼辦?

先看個亂七八糟的例子

- 因為拍戲，特別訂做合金寶劍
- 銅、金打造，如何得知有無偷工減料?
- 整根有質量，但是每點質量都是零？好熟悉！
- 不看質量看什麼？看密度！



$$\boxed{\text{密度 } at\ x \approx \frac{\text{質量 } in\ [x, x+\Delta x]}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續的東西，關鍵是密度！

- 寶劍有密度，機率也可有密度！
- 對隨機變數 X 而言，其機率密度：

$$PDF\colon f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

$$= F_X'(x)$$

$$\boxed{CDF\ \ F_X(x) \underset{\int_{-\infty}^{x}}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} PDF\ f_X(x)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

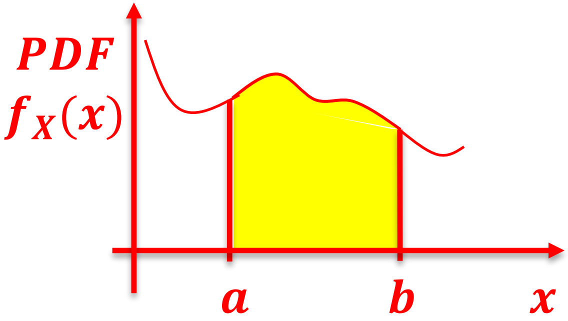
PDF 跟機率的關係

- 因為我們習慣處理機率，看到 PDF 如何把它跟機率連結呢?

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

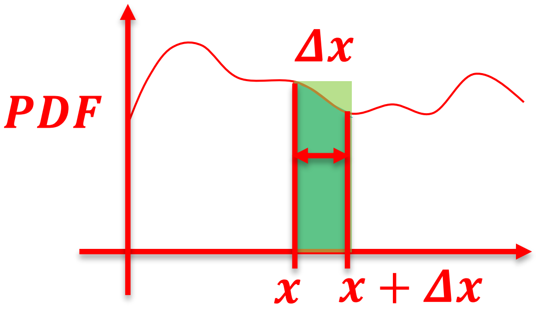


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 跟機率的關係

- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$
- 當 Δx 很小時：

$$P(x \le X \le x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 有哪些性質呢?

- $f_X(x) = F_X'(x)$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
- $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
- $f_X(x) \ge 0$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 連續隨機變數每點發生機率是？
- 什麼是機率密度函數 PDF？
- PDF 跟 CDF 的關係？
- PDF 的性質？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

5-2: 連續機率分佈 I
(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

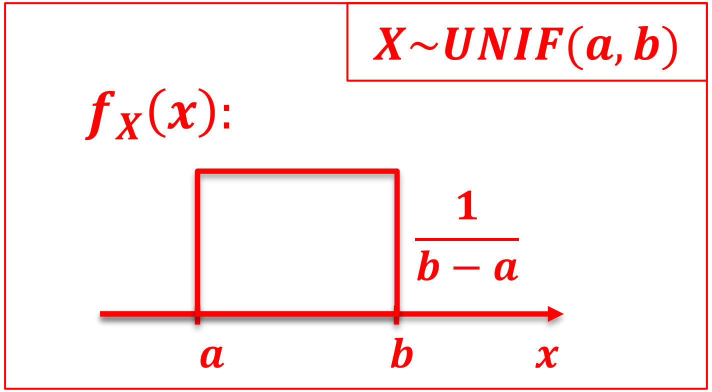
第五週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 機率分佈

- PDF:

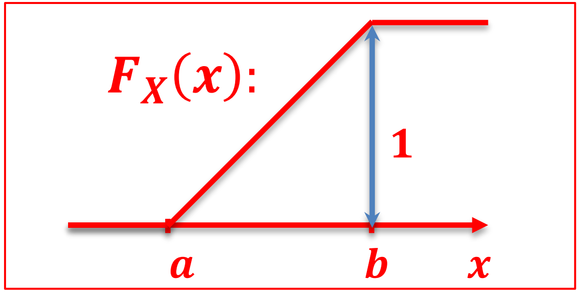
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



- CDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 機率分佈

- Ex: 已知1路公車每十分鐘一班。小美隨意出發到公車站，小美須等候公車之時間為 X

$X \sim UNIF(0, 10)$

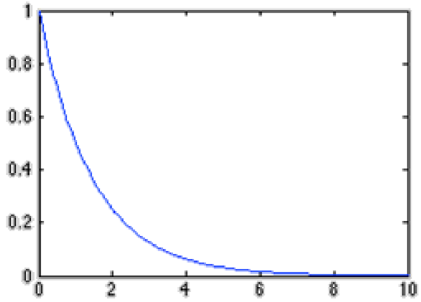
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Exponential 機率分佈

- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

$X \sim Exponential(\lambda)$



- CDF:
  - If $x \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du$$
$$= -\int_0^x e^{-\lambda u} d(-\lambda u)$$
$$= -\left[e^{-\lambda u}\right]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x}}$$

  - If $x < 0$: $F_X(x) = 0$.

Exponential 機率分佈

- Exponential 分佈有失憶的性質 (memoryless)，常被用來 model 有這種性質的事情
  - Ex: 小美出門化妝所需之時間
  - Ex: 某宅打LOL所花的時間

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈

- $X \sim Erlang(n, \lambda)$

Gamma Distribution

$$\text{PDF: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

※ $f_X(x) = \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) * (\lambda e^{-\lambda x}) * \cdots * (\lambda e^{-\lambda x})}_{n \text{ 次 } convolution}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈

- CDF: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & , x \geq 0; \\ 0 & \text{, otherwise.} \end{cases}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈

- $\boldsymbol{Erlang(n,\lambda)}$ 常被用來 model 一件有多個關卡事情的總時間，而每個關卡所需時間都是隨機的
  - 關卡數：$\boldsymbol{n}$
  - 每關卡所需時間之機率分佈 $\boxed{\boldsymbol{Exponential(\lambda)}}$
  - Ex: 打電動過三關所需時間 $\boxed{\boldsymbol{Erlang(3,\lambda)}}$
  - Ex: 寫完五科作業所需時間 $\boxed{\boldsymbol{Erlang(5,\lambda)}}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- Uniform 機率分佈？
- Exponential 機率分佈？
  - 有失憶性（以後會證明）
- Erlang 機率分佈？
  - 跟 Exponential 的關係？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University