第八周 条件分布与条件期望

8.4 全期望公式（下）

例 8.4.1 随机变量 X 的密度函数为阶梯形函数，$f(x)=\begin{cases}2/3, & 0\le x<1\\ 1/3, & 1\le x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$，

设定事件 $A=\{X\text{落入区间}[0,1)\}$，$B=\{X\text{落入区间}[1,2)\}$，试利用全期望公式计算期望 $E(X)$ 和方差 $Var(X)$。

解：先计算事件 A、B 发生的概率，得到

$$P(A)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3},\qquad P(B)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$$

$$f(x|A)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\qquad f(x|B)=\begin{cases}1, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X|A)=\int_0^1 x\cdot f(x|A)dx=\int_0^1 x\cdot 1dx=\frac{1}{2},$$

$$E(X|B)=\int_1^2 x\cdot f(x|B)dx=\int_1^2 x\cdot 1dx=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2|A)=\int_0^1 x^2\cdot f(x|A)dx=\int_0^1 x^2\cdot 1dx=\frac{1}{3},$$

$$E(X^2|B)=\int_1^2 x^2\cdot f(x|B)dx=\int_1^2 x^2\cdot 1dx=\frac{7}{3}$$

$$E(X)=P(A)E(X|A)+P(B)E(X|B)=\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{3}{2}=\frac{7}{6}$$

$$E(X^2)=P(A)E(X^2|A)+P(B)E(X^2|B)=\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

****

例 8.4.2 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，证明：$E(XY)=\rho\sigma_1\sigma_2$。

证明：$E(XY)=E\left[E(XY\mid X)\right]=E\left[X\cdot E(Y\mid X)\right]$

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{x^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left(y-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x\right)^2\right\}$$

$$E(Y\mid X=x)=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x\ \Rightarrow\ E(Y\mid X)=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}X\quad\Rightarrow$$

$$E(XY)=E\left[E(XY\mid X)\right]=E\left[X\cdot E(Y\mid X)\right]=E\left(\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}X^2\right)=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}{\sigma_1}^2=\rho\sigma_1\sigma_2。$$

****

例 8.4.3 （随机多个独立随机变量的和的期望） 假设某医生每天门诊挂号的病人数为 N，是服从参数为 a 的泊松分布随机变量。又假设每位病人门诊看病的时间也为随机的，均服从参数为 b 的指数分布随机变量，且相互独立。这名医生总的门诊看病时间记为 T，求 $E(T)$ 和 $Var(T)$

解： 设 N 位病人的看病时间分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_N$， $X_k\sim Exp(b)\ (k=1,2,\cdots,N)$

则 $T=X_1+X_2+\cdots+X_N$，利用全期望公式，

$$E(T)=E\big(E(T|N)\big)=E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\middle|N\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)\cdot E\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\middle|N=n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)\cdot E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)\cdot n\cdot E(X_1)$$

$$=E\left(X_1\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P\left(N=n\right)=E\left(X_1\right)E\left(N\right)$$

$$E\left(T^2\right)=E\left(E\left(T^2\middle|N\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N=n\right)\cdot E\left(\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\right)^2\middle|N=n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N=n\right)\cdot E\left(\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N=n\right)\cdot E\left(\sum_{k=1}^{n}{X_k}^2+\sum_{1\le i,j\le n,i\ne j}X_iX_j\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N=n\right)\cdot\left(n\cdot E\left({X_1}^2\right)+n\cdot\left(n-1\right)\cdot E\left(X_1\right)^2\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N=n\right)\cdot\left(n\cdot E\left({X_1}^2\right)-n\cdot E\left(X_1\right)^2+n^2\cdot E\left(X_1\right)^2\right)$$

$$=\left(E\left({X_1}^2\right)-E\left(X_1\right)^2\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P\left(N=n\right)+E\left(X_1\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot P\left(N=n\right)$$

$$=Var\left(X_1\right)\cdot E\left(N\right)+E\left(X_1\right)^2\cdot E\left(N^2\right)$$

因为 N 服从参数为 a 的泊松分布，X_1 服从参数为 b 的指数分布，所以

$E\left(N\right)=Var\left(N\right)=a$，$E\left(N^2\right)=a^2+a$，$E\left(X_1\right)=\frac{1}{b}$，$Var\left(X_1\right)=\frac{1}{b^2}$

$E\left(T\right)=E\left(X_1\right)E\left(N\right)=\frac{a}{b}$,

$E\left(T^2\right)=Var\left(X_1\right)\cdot E\left(N\right)+E\left(X_1\right)^2\cdot E\left(N^2\right)=\frac{a^2+2a}{b^2}$，$Var\left(T\right)=E\left(T^2\right)-E\left(T\right)^2=\frac{2a}{b^2}$

****