第一周　　随机事件及其概率运算

1.2 古典概型

****

古典概型

如果每个基本事件都等可能出现，此时某一事件的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{全部可能的基本事件数}} \quad \text{或} \quad P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所占区域大小}}{\text{样本空间所占区域大小}}$$

称为古典概型，也叫等可能概型。

****

例 1.2.1（生日问题）$n(n\le 365)$个人的生日互不相同的概率 p_n。

解：我们只考虑一年 365 天的情况，

$$p_n=\frac{365\cdot(365-1)\cdots(365-(n-1))}{365^n}。$$

p_n估值　$p_n=\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$

$$\ln(1-x)\approx -x\ (x<<1),$$

$$\ln p_n\approx-\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{365}=-\frac{n(n-1)}{730}, \qquad p_n\approx e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

n越大则估计的精度越低，$\overline{p}_{10}=0.884, p_{10}=0.883$，　$\overline{p}_{30}=0.3037, p_{30}=0.2937$

****

例 1.2.2（盒子模型）　设有n个球，每个球都等可能地被放到$N\ (n\le N)$个不同的盒子中的任意一个，求指定的n个盒子中各有 1 球的概率 p

根据对球和盒子性质的不同假设，分为以下三种情况：

1）Maxwell-Boltzman 统计，n 个球不同（可分辨的），盒子容量不限；　$p=\dfrac{n!}{N^n}$；

2）Fermin-Dirac 统计，每个盒子至多容纳 1 个球，小球不可分辨（小球完全相同）；

$p=1/C_N^n$；

****

例 1.2.2（盒子模型）设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 $N\,(n\le N)$ 个不同的盒子中的任意一个，求指定的 n 个盒子中各有 1 球的概率 p

根据对球和盒子性质的不同假设，分为以下三种情况：

3）Bose-Einstein 统计，n 个球是不可分辨的（小球完全相同），盒子容量不限。

$N=3,n=2$ 时，第（1）种假设的样本空间为

$$\begin{array}{lll} \boxed{1.(ab,-,-)} & 2.(-,ab,-) & 3.(-,ab,-) \\ \boxed{4.(a,b,-)\quad 5.(b,a,-)} & & 6.(a,-,b) \\ 7.(b,-,a) & 8.(-,a,b) & 9.(-,b,a) \end{array}$$

第（3）种假设的样本空间为

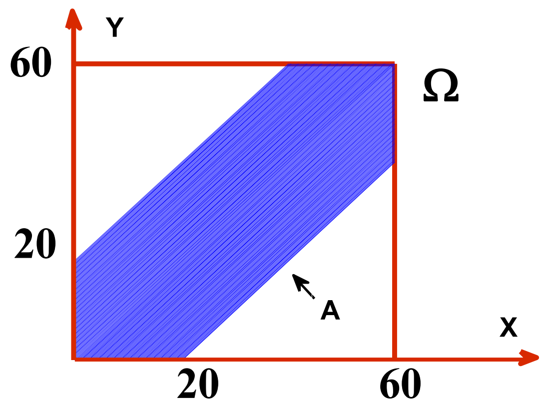
$$\begin{array}{lll} 1.(**,-,-) & 2.(-,**,-) & 3.(-,-,**) \\ 4.(*,*,-) & 5.(*,-,*) & 6.(-,*,*) \end{array}$$

共 n+N-1 个可变位置

$$p=\frac{1}{C_{N+n-1}^{n}}=\frac{n!(N-1)!}{(N+n-1)!}$$

****

例 1.2.3 （会面问题） 甲、乙约定在下午 4 点至 5 点之间见面，并约定等候 20 分钟，过时即离去，求二人的会面概率。



解 设甲、乙二人分别在 4 点 x 分和 4 点 y 分到达，

则两人会面等价为下面不等式成立。

$$|x-y|\le 20,\ 0\le x,y\le 60$$

$$P=\frac{S_A}{S_\Omega}=1-\frac{2\times 40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

古典概型是做了等可能假设的非常特殊的样本空间下的一种概率模型，其功能是很有局限的。为了处理千变万化随机现象，还需要引入更一般的概率模型。下一节课我们学习一般样本空间中随机事件之间的关系和事件的概率运算。

****