逻辑代数的基本公式和常用公式

一．基本定义与运算

代数是以字母代替数,称因变量为自变量的函数,函数有定义域和值域。——这些都是大家耳熟能详的概念。如

$$y=\sqrt{x^2-2x-3}\quad x\in[3,\infty) \text{ 或 } (-\infty,-1]\ ;\quad x\notin(-1,3)$$

$$y\in[0,\infty)$$

当自变量的取值（定义域）只有0和1（非0即1）函数的取值也只有0和1（非0即1）两个数——这种代数就是逻辑代数，这种变量就是逻辑变量，这种函数就是逻辑函数。

逻辑代数，亦称布尔代数，是英国数学家乔治·布尔（George Boole）于1849年创立的。在当时，这种代数纯粹是一种数学游戏，自然没有物理意义，也没有现实意义。在其诞生100多年后才发现其应用和价值。其规定：

1．所有可能出现的数只有0和1两个。

2．基本运算只有“与”、“或”、“非”三种。

与运算（逻辑与、逻辑乘）定义为（$\cap$为与运算符，后用$\cdot$代替）

$$0\cap 0=0 \quad 0\cap 1=0 \quad 1\cap 0=0 \quad 1\cap 1=1 \text{ 或}$$

$$0\cdot 0=0 \quad 0\cdot 1=0 \quad 1\cdot 0=0 \quad 1\cdot 1=1$$

或运算（逻辑或、逻辑加）定义为（$\cup$为或运算符，后用＋代替）

$$0\cup 0=0 \quad 0\cup 1=1 \quad 1\cup 0=1 \quad 1\cup 1=1 \text{ 或}$$

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=1$$

非运算（取反）定义为：

$$\bar{0}=1 \quad \bar{1}=0$$

至此布尔代数宣告诞生。

二、基本公式

如果用字母来代替数（字母的取值非0即1），根据布尔定义的三种基本运算，我们马上可推出下列基本公式：

$$A\cdot A=A \qquad A+A=A$$

$$A\cdot 0=0 \qquad A+0=A$$

$$A\cdot 1=A \qquad A+1=1$$

$$A\cdot\bar{A}=0 \qquad A+\bar{A}=1$$

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C \qquad A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \qquad A+BC=(A+B)\cdot(A+C)$$

$$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B} \qquad \overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$$

$$\bar{\bar{A}}=A$$

上述公式的证明可用穷举法。如果对字母变量所有可能的取值，等式两边始终相等，该公式即告成立。现以$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$为例进行证明。对A、B两个逻辑变量，其所有可能的取值为00、01、10、11四种（不可能有第五种情况）列表如下：

A	B	A·B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	结论
0	0	0	1	1	1	1	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$
0	1	0	1	1	0	1	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$
1	0	0	1	0	1	1	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

由此可知：

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

成立。

用上述方法读者很容易证明：

$$\overline{A\cdot B\cdot C\cdots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots$$

$$\overline{A+B+C+\cdots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\cdots$$

三、常用公式

1. $A+AB=A$

∵左边＝$A\cdot 1+A\cdot B=A\cdot(1+B)=A\cdot 1=A$＝右边

2. $A+\overline{A}B=A+B$

∵左边＝$A+AB+\overline{A}B=A+(A+\overline{A})B=A+1\cdot B=A+B$＝右边

例题：将下列函数化为最简与或表达式。

$=1$

$Y_1=A\overline{B}+B+\overline{A}B=A\overline{B}+(B+B\overline{A})$ （公式1：$A+AB=A$）

$=A\overline{B}+B=A+B$ (公式2：$A+\overline{A}B=A+B$)

$Y_2=A\overline{B}C+\overline{A}+B+\overline{C}$

$=\overline{A}+\overline{C}+B+\overline{B}AC$

$=\overline{A}+\overline{C}+B+AC$ ($A+\overline{A}BCD=A+BCD$)

$=\overline{A}+\overline{\overline{A}}C+B+\overline{C}$

$=\overline{A}+C+B+\overline{C}$

$$Y_3 = A\overline{B}CD + ABD + A\overline{C}D$$

$$= AD(\overline{B}C + B + \overline{C})$$

$$= AD(C + B + \overline{C})$$

$$= AD$$

$$Y_4 = \overline{\overline{AB}C} + \overline{A\overline{B}} = A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + B = 1$$

$$Y_5 = A\overline{B}(\overline{A}CD + \overline{AD + \overline{B}\overline{C}})(\overline{A} + B)$$

$$= (\overline{A}CD + \overline{AD + \overline{B}\overline{C}}) \cdot (\overline{A} + B) \cdot A\overline{B}$$

$$= 0$$

练习题:

$$L_1 = A\overline{C} + ABC + AC\overline{D} + CD =$$

$$L_2 = A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{C}\overline{D} + D =$$

3．异或运算和同或运算（放到最小项卡诺图中讲）

四、逻辑函数

1．定义：如果有若干个逻辑变量（如A、B、C、D）按与、或、非三种基本运算组合在一起，得到一个表达式L。对逻辑变量的任意一组取值（如0000、0001、0010···）L有唯一的值与之对应，则称L为逻辑函数。逻辑变量A、B、C、D的逻辑函数记为：

L=f(A、B、C、D)

2．真值表：

在举重比赛中，通常设三名裁判：一名为主裁，另两名为副裁。竞赛规则规定运动员每次试举必须获得主裁及至少一名副裁的认可，方算成功。裁判员的态度只能同意和不同意两种；运动员的试举也只有成功与失败两种情况。举重问题可用逻辑代数加以描述：

用A、B、C三个逻辑变量表示主副三裁判：取值1表示同意（成功），取值0表示不同意（失败—）。

举重运动员用L表示，取值1表示成功，0表示失败。显然，L由A、B、C决定。L为A、B、C的逻辑函数。列表如下：

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

该表称为逻辑函数L的真值表。

注意：真值表必须列出逻辑变量所有可能的取值所对应的函数值，不能有遗漏。（二个变量有$2^2=4$，三个逻辑变量有$2^3=8$，四个变量有$2^4=16$种可能的取值……）

3．由真值表写出逻辑表达式：

从真值表可看出L取值为1只有三项，A、B、C的取值分别为101、110、和111三种情况L才等于1。$A\overline{B}C$ 、 $AB\overline{C}$ 、 ABC 三项与上述三种取值对应。

$$\therefore L = A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$= A\overline{B}C + ABC + AB\overline{C} + ABC \quad (A = A + A)$$

$$= AC + AB$$

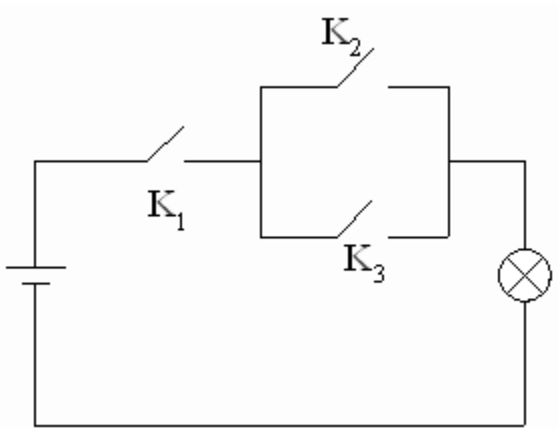
$$= A(B + C)$$

练习：1.已知函数Y=C(D+E)列出其真值表。

2.写出与下列真值表相对应的逻辑表达式并化简：

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

例：三个开关控制一个灯的电路如下图所示。试用逻辑代数（数学）对该电路进行描述。



解：如果规定开关合上用1表示，断开用0表示；灯亮用1表示，灯灭用0表示。显然该问题是一个逻辑问题。L是K_1、K_2、K_3三变量的逻辑函数，所以可以直接写出

$$L= K_1(K_2+K_3)$$

我们也可以列出真值表：

K_1	K_2	K_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$L = K_1\overline{K_2}K_3 + K_1K_2\overline{K_3} + K_1K_2K_3 \ (A = A + A)$$

$$= K_1\overline{K_2}K_3 + K_1K_2K_3 + K_1K_2\overline{K_3} + K_1K_2K_3$$

$$= K_1K_3 + K_1K_2$$

$$= K_1(K_3 + K_2)$$

显然这就是举重裁判的控制电路。并联的开关可用或运算，串联的开关可用与运算来描述。