第二周　　条件概率和独立性

2.3 事件的独立性

事件的独立性

事件独立是指互不影响：$P(A|B)=P(A)$　　$P(B|A)=P(B)$

条件概率：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$　$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

定义．对于事件 A,B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立，

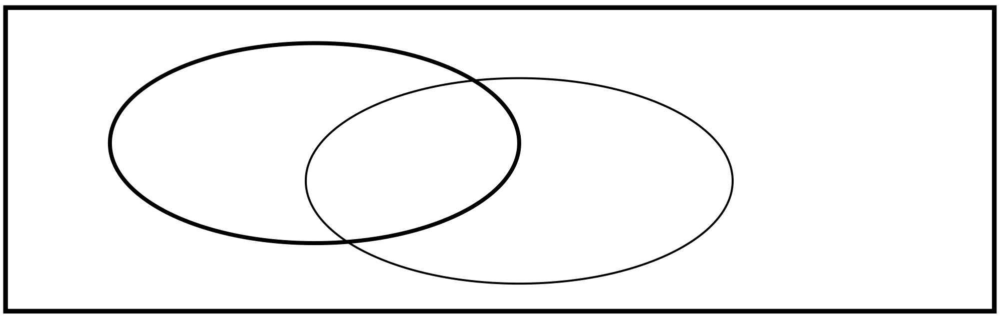
简称 A 与 B 独立，否则称 A 与 B 不独立或相关。

****

例 2.3.1 若事件 A 和 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}).$$



利用“事件 A 和 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立”的结果：

将 A 和 B 互换位置，则得到 $\overline{A}$ 与 B 独立

若 $\overline{A}$ 与 B 独立，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

****

例 2.3.2　3 人独立破译密码，他们单独能破译的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，试求此密码能被破译出的概率.

解：设事件 $B=\{$该密码被破译$\}$，$\bar{B}=\{$该密码未被破译$\}$.

设事件 $A_i=\{$第 i 个人能破译密码$\}$ $(i=1,2,3)$，则 $\bar{B}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}.$$

****

分赌本的例子

这是一个历史上曾经发生过的，一个很出名的问题叫做分赌本问题甲乙两个徒进行一场 9 局 5 胜制的赌博，先赢 5 局者获胜，假设每一局，都能分出胜负甲乙各压本金 100 元获胜方获得全部的 200 元本金那么这个规则非常明确　，应该没有任何问题但问题是呢如果当赌博进行到, 甲 3 比 1 领先的时候被迫中止了那么这 200 元本金该如何分配

****

多个事件相互独立，三个事件相互独立

$$P(A\,|\,BC)=P(A),\ P(C\,|\,A\cup B)=P(C),P(AB\,|\,C)=P(AB),\cdots\cdots$$

三个事件相互独立的定义对于 A,B,C 三个事件，如果它们之间两两独立，即：

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$

且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则事件 A,B,C 相互独立。

注：　A,B,C 两两独立不能保证 A,B,C 相互独立。

****

A,B,C 两两独立，但 A,B,C 不相互独立的例子

例 2.3.3 将一个正四面体，三个面分别涂红色、黄色和蓝色，剩下一个面涂上红、黄、蓝三色。

设事件 A,B,C 分别表示“将四面体投掷一次，底面含有红、黄、蓝色” 。

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$， $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}\Rightarrow A,B,C$ 两两独立，

$P(A\mid BC)=1\neq P(A)$ 所以事件 A,B,C 不是相互独立的

$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$。

****