

网球比赛的胜率计算

网球比赛胜率的概率计算

网球的单打比赛规则：网球单打比赛会进行若干局的争夺。

每一局比赛由同一位球员发球直至有其中一方赢取那局为止。

在一局比赛中，赢第一球时得 15 分，赢第二球时记为得 30 分，赢第三球时记为得 40 分。一方赢第四球时，另一方所得的分数如低于 40 分，则先赢四球者此局获胜。但如双方同样取得 40 分时，则进入到平分状态 (Deuce)，进入到平分状态后，赢第一球者被称占先 (Advantage)，如各赢一球则又进入平分状态 (Deuce)，直至一方占先后，再赢得接下来的一球，即净胜对手二球时，领先方赢得此局。

现在假设两名球员，甲和乙，在一局比赛中，每个球甲的获胜率均为 p ，乙的获胜率为 $q=1-p$ ，并且在比赛过程中每个得分都是相互独立的事件。问甲、乙两人各自赢得这一局比赛的概率。

我们考虑更一般的情况。甲、乙两名球员进行每局 m 分制的比赛，一方率先得到 m 分，同时领先对手至少 2 分时获胜。如果比赛出现 $m-1:m-1$ ，则进行至首次出现一方领先 2 分时，领先方获胜。

令 $w(i, j)$ 表示甲已得 i 分、乙已得 j 分情况下甲获胜一局的概率，

根据比赛规则与概率假设有

$$\begin{cases} w(i, j) = 1 & \text{当 } i \geq m, i - j \geq 2 \text{ 时} \\ w(i, j) = 0 & \text{当 } j \geq m, j - i \geq 2 \text{ 时} \\ w(m-2, m-2) = w(m-1, m-1) = w(m, m) = \dots \end{cases} \quad (1)$$

甲已得 i 分、乙已得 j 分后，继续比赛 1 分，

$$w(i, j) = P(\text{第 } i+j+1 \text{ 个球甲获胜}) \cdot P(\text{甲赢得这一局的胜利} | \text{第 } i+j+1 \text{ 个球甲获胜}) \\ + P(\text{第 } i+j+1 \text{ 个球乙获胜}) \cdot P(\text{甲赢得这一局的胜利} | \text{第 } i+j+1 \text{ 个球乙获胜})$$

即全概率公式：

$$w(i, j) = p \cdot w(i+1, j) + q \cdot w(i, j+1) \quad (2)$$

网球比赛的单局胜率，即 $m=4$ 情况下，计算 $w(0,0)$

$$w(0,0) = p \cdot w(1,0) + q \cdot w(0,1)$$

$$\left. \begin{aligned} w(1,0) &= p \cdot w(2,0) + q \cdot w(1,1) \\ w(0,1) &= p \cdot w(1,1) + q \cdot w(0,2) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow w(0,0) = p \cdot w(1,0) + q \cdot w(0,1) = p^2 \cdot w(2,0) + 2pq \cdot w(1,1) + q^2 \cdot w(0,2)$$

$$w(0,0) = p^3 \cdot w(3,0) + 3p^2q \cdot w(2,1) + 3pq^2 \cdot w(1,2) + q^3 \cdot w(0,3)$$

$$w(0,0) = p^4 \cdot w(4,0) + 4p^3q \cdot w(3,1) + 6p^2q^2 \cdot w(2,2) + 4pq^3 \cdot w(1,3) + q^4 \cdot w(0,4)$$

$$w(0,0) = p^4 \cdot w(4,0) + 4p^3q \cdot w(3,1) + 6p^2q^2 \cdot w(2,2) + 4pq^3 \cdot w(1,3)$$

$$w(0,0) = p^6 \cdot w(6,0) + 6p^5q \cdot w(5,1) + 15p^4q^2 \cdot w(4,2) + 20p^3q^3 \cdot w(3,3)$$

$$w(0,0) = p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3 \cdot w(3,3)$$

$$w(3,3) = p^2 \cdot w(5,3) + 2pq \cdot w(4,4) + q^2 \cdot w(3,5) = p^2 + 2pq \cdot w(4,4)$$

$$\left. \begin{aligned} w(3,3) &= p^2 + 2pq \cdot w(4,4) \\ w(3,3) &= w(4,4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow w(3,3) = \frac{p^2}{1-2pq}$$

$$w(0,0) = p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3 \cdot \frac{p^2}{1-2pq}$$

网球比赛的单局获胜率比较

每球获胜率	单局获胜率
0.50	0.5000
0.55	0.6231
0.60	0.7357
0.65	0.8296
0.70	0.9008
0.75	0.9782

网球单打比赛

五盘三胜制或三盘两胜制

每一盘打若干局，两名运动员轮流发球，先得到 6 局且领先对手至少 2 局的一方获得这一盘的胜利。如果 5:5 后，出现 7:5，领先方获胜；若 5:5 后，双方各赢一局，若达到 6:6，将由第 13 局决定这一盘的胜负，这一局称为抢 7。

抢七规则：

先得 7 分者为胜该局；首先发球员发第 1 分球，对方发第 2、3 分球，然后轮流发两分球，先得 7 分者获胜。

但是，抢七的规则也不是唯一的。每一盘胜负的规则和抢七的规则在历史上都不是完全统一的，实际还采用过长盘和抢七也要领先 2 球的规则等。同学们也可以根据网球、乒乓等不同比赛的不同规则，在一些合理的假设下，建立自己的模型，计算胜负概率。
