第八周 条件分布与条件期望

8.3 全期望公式（上）

全期望公式（重期望公式） $E(X)=E(E(X|Y))$

以离散型为例证明：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}P(X=x_i,Y=y_j)\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}P(Y=y_j)P(X=x_i|Y=y_j)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}P(Y=y_j)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|Y=y_j)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}P(Y=y_j)E(X|Y=y_j)=E(E(X|Y))$$

随机变量 $E(X|Y)$ 的期望，相当于计算 Y 的不同取值下，X 的条件期望，再用 Y 的各个取值概率对条件期望值加权求和。相当于将 X 的期望分解为 Y 的各个取值条件下 X 在此局部的期望，然后再将各局部的期望加权汇总为 X 整个的期望。类似于全概率公式将事件 A 的概率，分解为一个样本空间分割下不同事件条件下 A 的局部概率，再汇总的到 A 的总的概率。因此这一公式被称为全期望公式。又因为该公式刻画期望的期望，此公式也往往被形象地称为重期望公式。

****

例 8.3.1 口袋里有编号 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球，任取 1 个，若取到为 1 号则得 1 分停止，若为 i（$i\geq 2$）号，则得到 i 分，放回继续摸球。求总得分的期望。

解：设 X 为总得分，Y 为第一次抽到的号码

则 $P(Y=k)=\frac{1}{n}$ （$k=1,\cdots,n$），

$$E(X|Y=1)=1,\quad E(X|Y=k，k\neq 1)=k+E(X)$$

$$E(X)=E(E(X|Y))=\sum_{k=1}^{n}E(X|Y=k)P(Y=k)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left[k+E(X)\right]$$

$\Rightarrow E(X)=\frac{n(n+1)}{2}$。

****

例 8.2.4 设随机变量 $X \sim Ge(p)$，$0<p<1$，　$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$，　$k=1,2,\cdots$，计算 X 的期望和方差。

解：　设定义随机变量 $Y=\begin{cases}1, & X=1\\ 0, & X>1\end{cases}$，则由全期望公式

$$E(X)=E\left(E\left(X|Y\right)\right)=P(Y=1)\cdot E\left(X|Y=1\right)+P(Y=0)\cdot E\left(X|Y=0\right)$$

$$=P(X=1)\cdot E\left(X|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X|X>1\right)$$

$E\left(X|X=1\right)=1$，　$E\left(X|X>1\right)=1+E(X)$

$$E(X)=P(X=1)\cdot E\left(X|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X|X>1\right)=p\cdot 1+(1-p)\cdot\left(1+E(X)\right),$$

解得，$E(X)=\frac{1}{p}$。

****

例 8.2.4 设随机变量 $X \sim Ge(p)$，$0<p<1$，　$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$，　$k=1,2,\cdots$，计算 X 的期望和方差。

解：　$E\left(X^2\right)=E\left(E\left(X^2|Y\right)\right)=P(X=1)\cdot E\left(X^2|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X^2|X>1\right)$

$E\left(X^2|X=1\right)=1$，　$E\left(X^2|X>1\right)=E\left((1+X)^2\right)=1+2E(X)+E\left(X^2\right)$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1+2(1-p)E(X)}{p}=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p},$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{1-p}{p^2}$$

****

例 8.2.5．投掷一枚公平的硬币，直至首次出现相继的两个正面停止，求投掷次数的期望。

解：设 X 为投掷次数， Y 定义为 $\begin{pmatrix} T & HH & HT \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$，其中 T 表示第一次掷出反面，HH 表示前两次依次掷出正、正，HT 表示前两次依次掷出正、反。

$$E(X)=E\big(E(X\,|\,Y)\big)$$

$$=P(Y=T)E(X\,|\,Y=T)+P(Y=HH)E(X\,|\,Y=HH)+P(Y=HT)E(X\,|\,Y=HT)$$

$$=\frac{1}{2}\big(1+E(X)\big)+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\big(2+E(X)\big)$$

$$E(X)=\frac{1}{2}\big(1+E(X)\big)+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\big(2+E(X)\big) \quad \Rightarrow \quad E(X)=6\text{。}$$

思考：X 的方差如何计算？

****