機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 8-1: 聯合機率分佈
- 8-2: 邊際機率分佈
- 8-3: 雙變數期望值

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-1: 聯合機率分佈 (JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當小明出國去交換時

- X: 小美臉書/QQ 離線時間，$X \sim UNIF(8, 12)$
- Y: 小華臉書/QQ 離線時間，$Y \sim UNIF(8, 12)$
- Z: 小園臉書/QQ 離線時間，$Z \sim UNIF(8, 12)$
- 假設 X, Y, Z 都是離散隨機變數

x	8	9	10	11	12
$p_X(x)$:	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

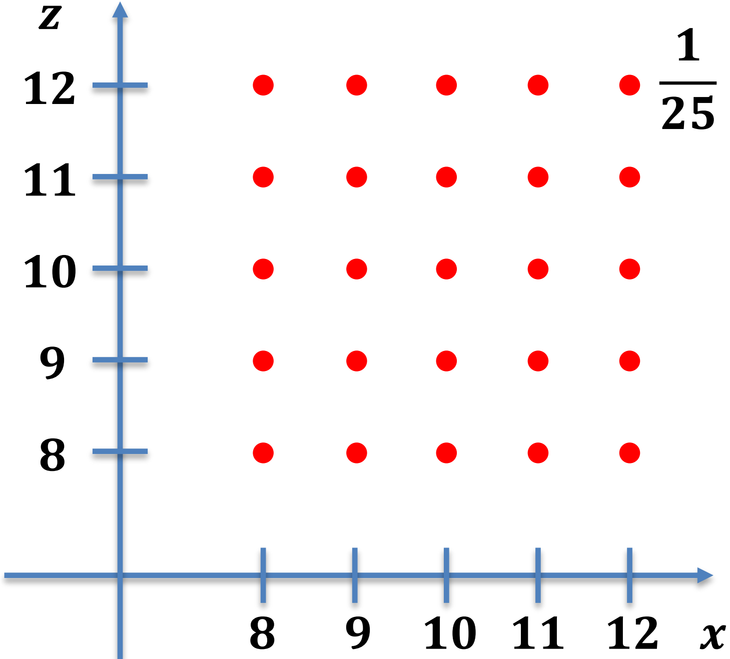
y	8	9	10	11	12
$p_Y(y)$:	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

z	8	9	10	11	12
$p_Z(z)$:	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當小明出國去交換時

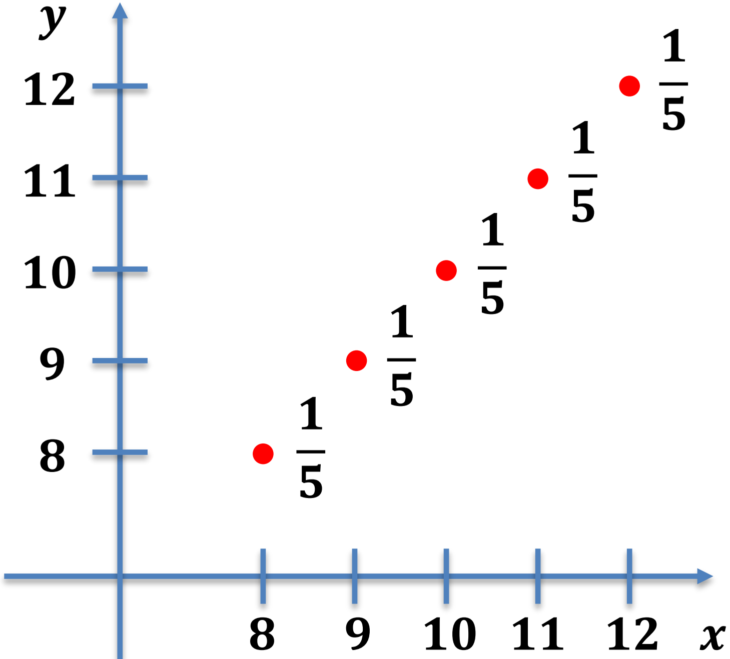
- 若將小美離線時間 $\boldsymbol{X}$ 與小園離線時間 $\boldsymbol{Z}$ 一起看呢？
- 畫出 $\boldsymbol{P(X=x, Z=z)}$：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

滿山盡是君雅照！

- 若將小美離線時間 X 與小園離線時間 Y 一起看呢？
- 畫出 $P(X=x, Y=y)$，赫然發現！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合機率分佈

- 同時將多個隨機變數的行為一起拿來看，我們可以看出更多以往看不到的資訊！
- 同時考慮多個隨機變數的機率分佈稱之為聯合機率分佈 (joint probability distribution)
- 聯合機率分佈亦有離散與連續的分別

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)

- 若 X, Y 皆為離散隨機變數，我們可以定義他們的聯合PMF

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ 且 } Y = y)$$

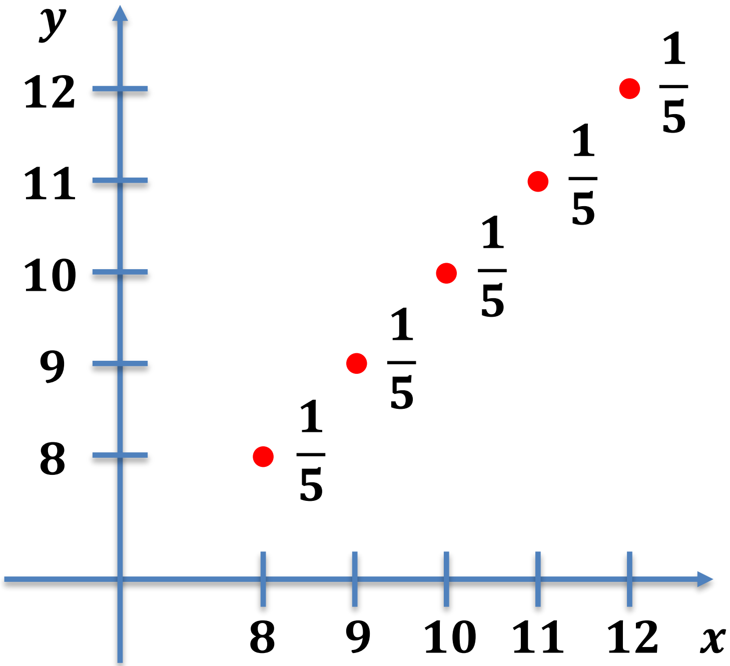
- 聯合PMF 決定了X, Y 的聯合機率分佈

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)

Ex: 小美離線時間 $\boldsymbol{X}$ 與小華離線時間 $\boldsymbol{Y}$ 的聯合 PMF：

$$\boldsymbol{P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)}$$ ：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

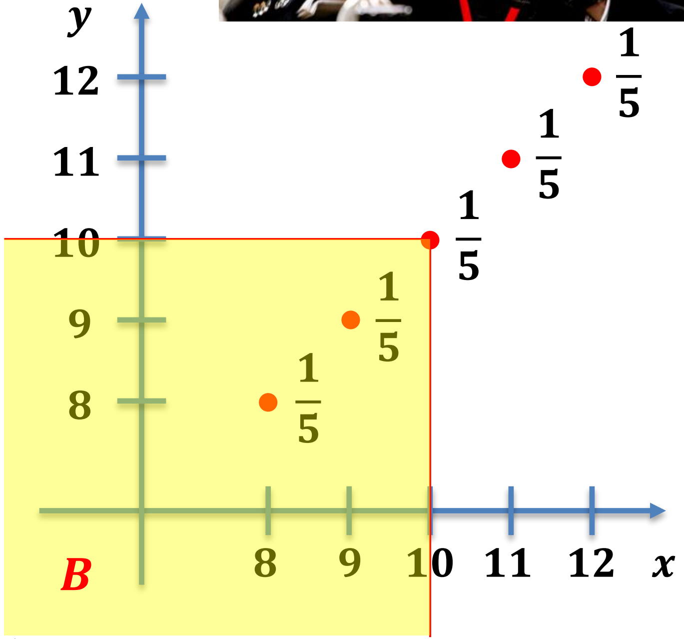
聯合 PMF 的性質

- $0 \leq p_{X,Y}(x,y) \leq 1$
- $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = 1$
- X, Y 獨立

$$
\begin{aligned}
P_{X,Y}(x,y) &= P(X = x, Y = y) \\
&= P(X = x) \cdot P(Y = y) \\
&= P_X(x) P_Y(y)
\end{aligned}
$$

- 對任何事件 B： $P(B) = \sum_{(x,y)\in B} P_{X,Y}(x,y)$

Ex: B：美、華下線時間不晚於十點



$$P(B) = P_{X,Y}(8,8) + P_{X,Y}(9,9) + P_{X,Y}(10,10)$$

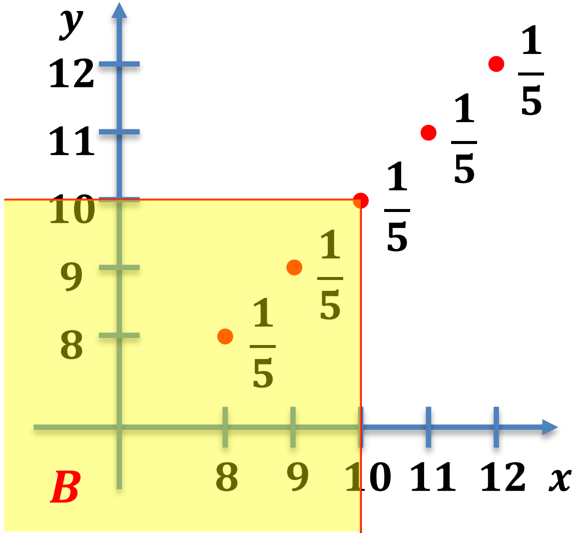
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- 若考慮兩個隨機變數 X,Y 的聯合機率分佈，
  我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x \text{ 且 } Y\le y)=P(X\le x, Y\le y)$$

$F_{X,Y}(10,10)=$



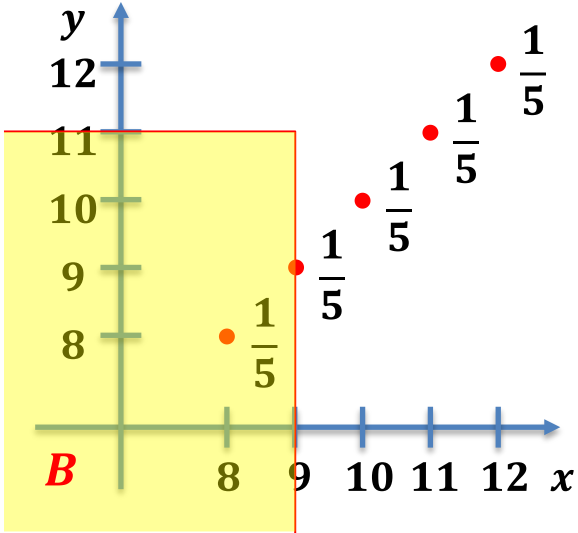
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- 若考慮兩個隨機變數 X, Y 的聯合機率分佈，
  我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \text{ 且 } Y \le y) = P(X \le x, Y \le y)$$

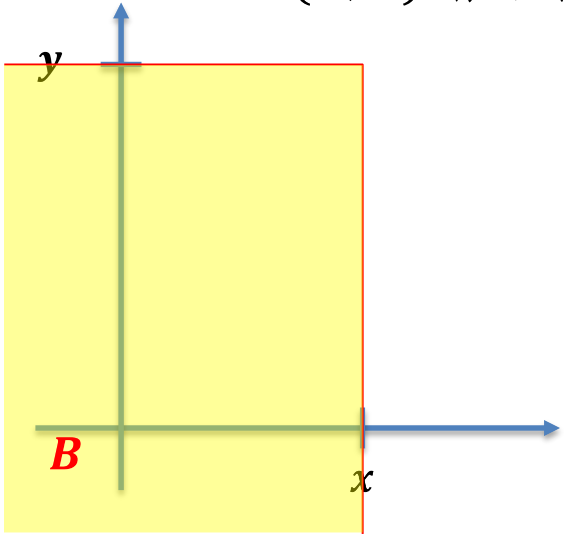
$$F_{X,Y}(9,11) =$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \text{ 且 } Y \le y) = P(X \le x, Y \le y)$
  $= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率



1D: $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \le x)$
$= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF 的性質

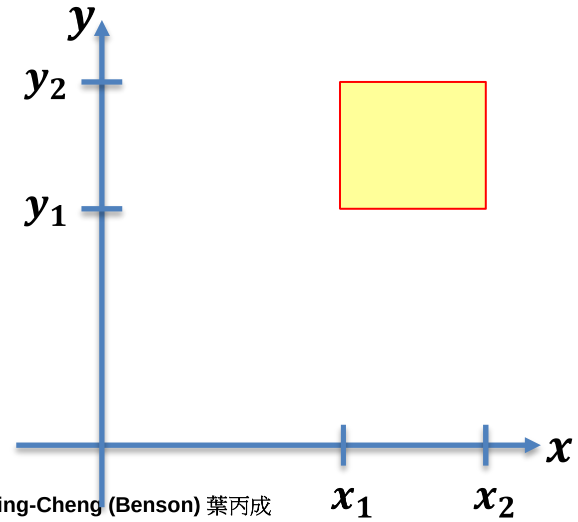
- $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$
- 若 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$, 則$F_{X,Y}(x_1,y_1) \leq F_{X,Y}(x_2,y_2)$
- $F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$
- $F_{X,Y}(\infty,y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$
- $F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \leq \infty, Y \leq \infty) = 1$
- $F_{X,Y}(x,-\infty) = P(X \leq x, Y \leq -\infty) \leq P(Y \leq -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(-\infty,y) = P(X \leq -\infty, Y \leq y) \leq P(X \leq -\infty) = 0$

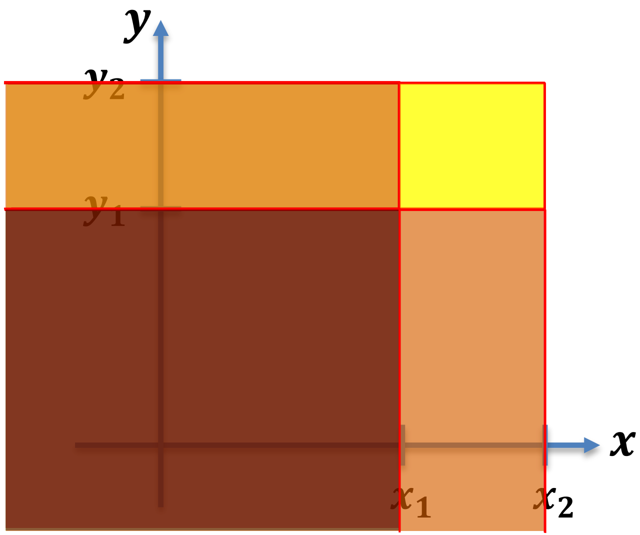
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF 的性質

- 四方格性質：

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$$



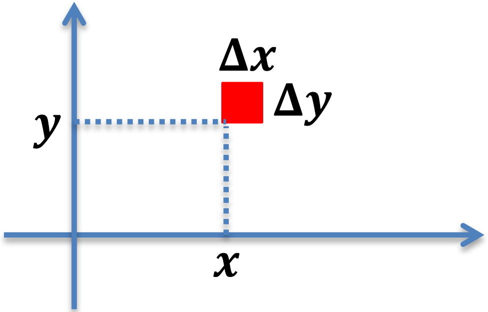


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若X, Y 皆為連續隨機變數怎辦？

- 回想之前一個變數時PDF怎麼定義？
- 如何延伸到兩個變數的情況？

- $f_X(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x}$
- $f_{X,Y}(x, y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{P((X,Y) \in ■)}{\Delta x \Delta y}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

- 若 X, Y 皆為連續隨機變數，我們可以定義聯合 PDF：

$$f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\big((X,Y) \in \blacksquare\big)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x \text{ 且 } y < Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y) + F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x}\right]$$

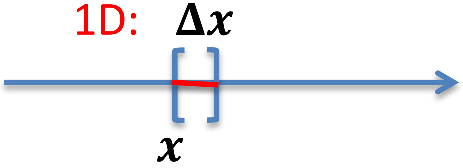
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

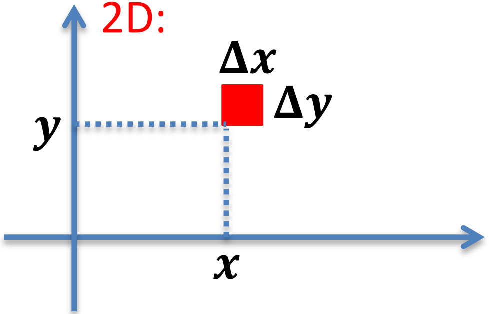
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial F_{X,Y}(x,y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right]$

  $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

  $\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$



- 1D: Δx 極小時 $\Rightarrow P(X \in [x, x+\Delta x]) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$
- 2D: $\Delta x, \Delta y$ 極小時 $\Rightarrow P((X,Y) \in \blacksquare) \approx f_{X,Y}(x,y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$



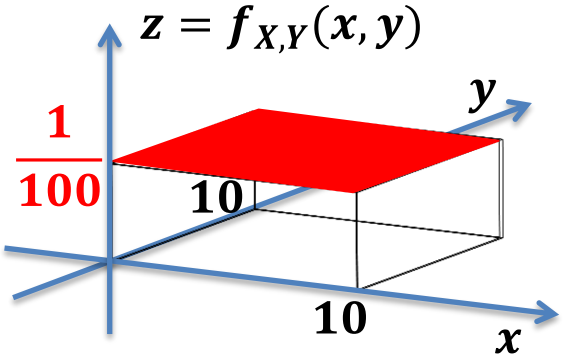
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF

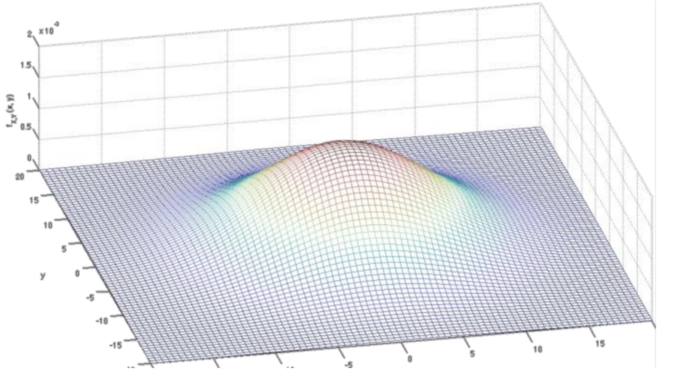
Ex：小美等公車時間為 X, 小園等公車時間為 Y

X, Y 兩者獨立且皆為連續之機率分佈 $UNIF(0,10)$。則

X, Y 之聯合 PDF 為



其他聯合 PDF 的例子：
Bivariate Gaussian



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

- 聯合 PDF 亦決定了 X, Y 的聯合機率分佈
- 聯合 PDF 跟聯合 CDF 之間的關係：

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

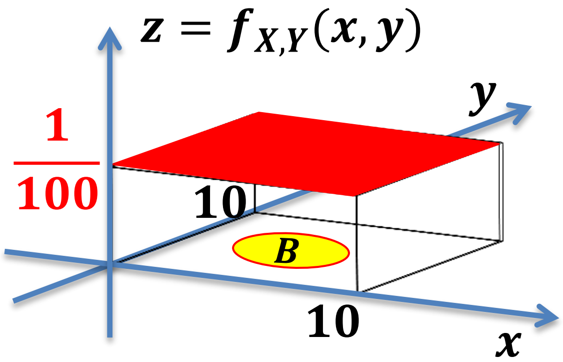
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 的性質

- $f_{x,y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$
- 若 X, Y 獨立 $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- 對任何事件 B,

$$P(B) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 何謂聯合機率分佈？
- 為何要看聯合機率分佈？
- 聯合 PMF 的定義？
- 聯合 CDF 的定義？
- 聯合 PDF 的定義？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-2: 邊際機率分佈 (MARGINAL PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

已知聯合 PMF，欲得個別 PMF

- Ex：$\boldsymbol{X,Y}$ 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下：

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{p_X(x)=?\ p_Y(y)=?}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PMF (Marginal PMF)

- 已知聯合 PMF $p_{X,Y}(x,y)$，則可求得 $p_X(x)$、$p_Y(y)$，稱之為邊際 PMF
- 邊際 PMF 算法：
  - $p_X(x) = P(X=x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$
  - $p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$

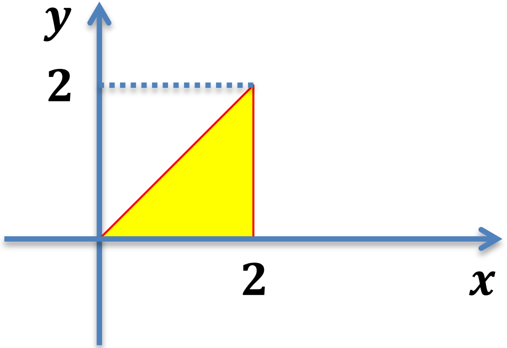
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)

- 已知聯合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，則可求得 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，稱之為邊際 PDF
- 邊際 PDF 算法：
  - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
  - $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)



- Ex：已知

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & if\ 0 \le y \le x \le 2, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$$= \begin{cases} \int_0^x 0.5\,dy = 0.5\,x & if\ 0 \le x \le 2, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^2 0.5\,dx = 1 - 0.5y & if\ 0 \le y \le 2, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 邊際 PMF 的定義？怎麼算？
- 邊際 PDF 的定義？怎麼算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-3: 雙變數期望值

第八週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值

- 回想只考慮一個離散隨機變數 X 時其任意函數 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, p_X(x)$$

- 若同時考慮兩個離散隨機變數 X, Y 時，他們的任意函數 $h(X,Y)$ 的期望值是

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值

- Ex：$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{E[|X-Y|]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty}|x-y|\cdot p_{X,Y}(x,y)$

$= 1\cdot 0.05 + 2\cdot 0.05 + 1\cdot 0.1 + 1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.05 + 1\cdot 0.1$

$= 0.55$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 下的期望值

- 回想只考慮一個連續隨機變數 X 時其任意函數 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

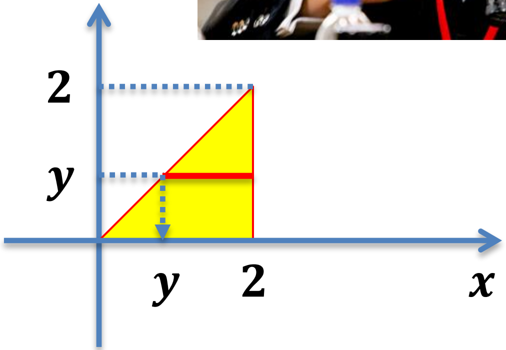
- 若同時考慮兩個連續隨機變數 X, Y 時，他們的任意函數 $h(X, Y)$ 的期望值是

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 下的期望值

- Ex：已知 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & if\ 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$



$$E[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\int_y^2(x+y)\cdot 0.5dxdy$$

$$=\int_0^2\left[\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{2}\right]_y^2 dy=\int_0^2\left(1+y-\frac{3}{4}y^2\right)dy=\left[y+\frac{y^2}{2}-\frac{3}{12}y^3\right]_0^2=2+2-2=2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- $\boldsymbol{E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]}$

證明 (離散)：

$$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)]\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \underbrace{\alpha \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_1(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_2(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

證明 (連續)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)] \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \underbrace{\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- 若X, Y獨立，則

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

證明(離散)：

$$E[g(X)h(Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \left[\sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p_X(x)\right] \cdot \left[\sum_{y=-\infty}^{\infty} h(y) \cdot p_Y(y)\right] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質

- 若X, Y獨立，則

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

證明(連續)：

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f_Y(y)\,dy = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 相關的性質

- $Var(X+Y) = E[(X+Y-\underbrace{E[X+Y]}_{\mu_X+\mu_Y})^2]$

$$= E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2]$$
$$= E[(\underbrace{X-\mu_X}_{A}+\underbrace{Y-\mu_Y}_{B})^2]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2]+E[(Y-\mu_Y)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= Var(x)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

※ X,Y獨立 $\Rightarrow 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
$= 2E[(X-\mu_X)]E[(Y-\mu_Y)] = 0$
$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
$\Rightarrow Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 期望值的定義？
- 期望值的性質？
- 兩隨機變數獨立的話，期望值的計算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University