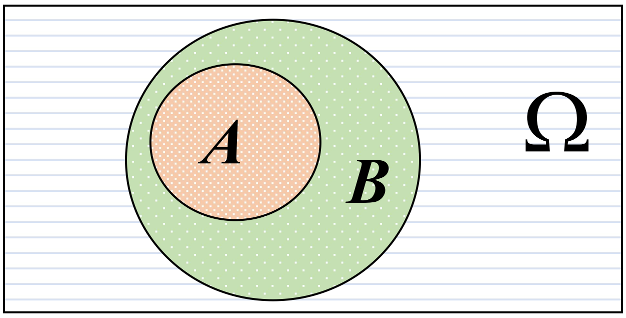
# 第一周　　随机事件及其概率运算

## 1.3　事件间的关系与事件的运算

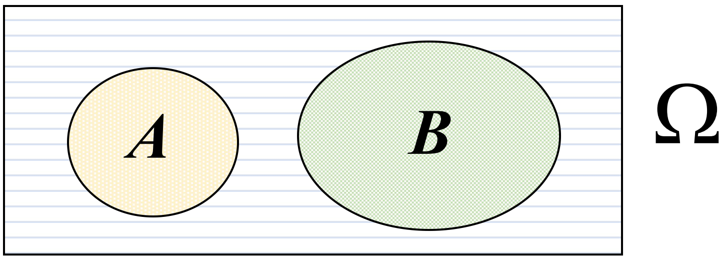
事件关系（包含，相等，互不相容，对立）

（1）　包含关系：若事件 $A,B$ 满足 $A\subset B$，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，用示性函数表示为 $I_A(\omega)\le I_B(\omega)$.



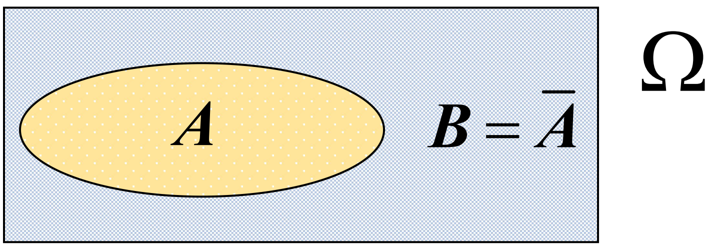

（2）　相等关系：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等（或等价），为同一事件。用示性函数表示为 $I_A(\omega)=I_B(\omega)$.

（3）互不相容关系，也称互斥关系：对于事件 $A$、$B$，如果不可能同时发生，则 $A$、$B$ 称为互不相容事件，此时 $\boldsymbol{AB=\Phi}$。用示性函数表示为 $\boldsymbol{I_A(\omega)I_B(\omega)=0}$.




（4）　对立关系：如果两个事件 $A$、$B$ 中，$B=$“$A$ 不发生”，则 $A$、$B$ 称为具有对立关系（或互逆关系），又称 $B$ 为 $A$ 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$。

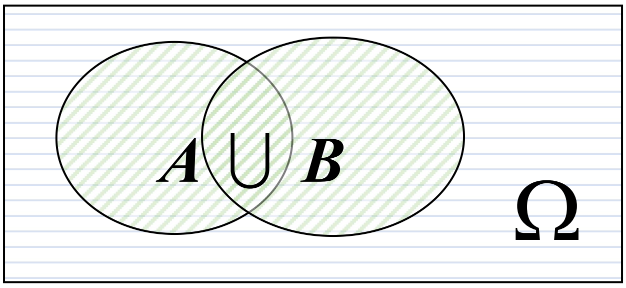
用示性函数表示为 $I_A(\omega)+I_B(\omega)=1$.



**********************************************************

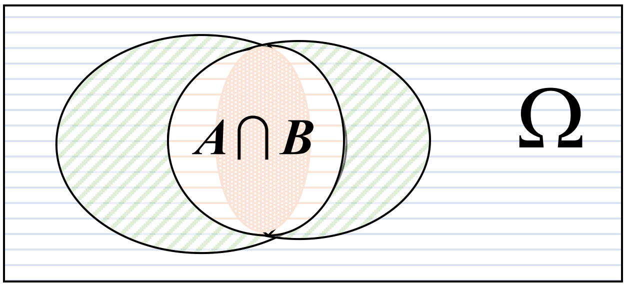
事件运算（和，积，差，交换律，结合律，分配律，结合律，对偶律）

（1） 事件的和：事件 $A$ 与事件 $B$ 的并集构成的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和事件，记为 $\boldsymbol{A \cup B}$ 或 $\boldsymbol{A+B}$，即 $\boldsymbol{A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}}$，如图所示的阴影部分. 显然，当且仅当事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生时，事件 $\boldsymbol{A \cup B}$ 才发生。



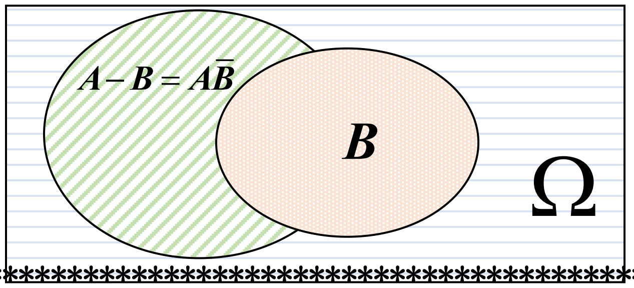

$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，即为 $n$ 个集合的并集 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 。

（2）事件的积（或交）：事件 $A$ 与事件 $B$ 的交集构成的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积（或交）事件，事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生。 记为 $\boldsymbol{A \cap B}$ 或 $AB$ 。




$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，即为 $n$ 个集合的交集 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 。

（3）事件的差：事件 $A$ 与事件 $B$ 的差集所构成的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差事件，记为 $A-B$ 。$\boldsymbol{A-B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\} = A\overline{B}}$。当且仅当事件 $A$ 发生但事件 $B$ 不发生时，事件 $A-B$ 才发生.




****************************************************************

例 1.3.1 某同学在篮球场上进行了连续 3 次投篮练习，记 $A_i=\{$第 $i$ 次投中篮筐$\}$，试用 $A_i\ (i=1,2,3)$表示事件：

（1）$B_j=\{$连续 3 次投篮中恰好有 $j$ 次投中篮筐$\}\ (j=0,1,2,3)$；

（2）$C_k=\{$连续 3 次投篮中至少有 $k$ 次投中篮筐$\}\ (k=0,1,2,3)$.

解：（1） $B_0=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$； $B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

$B_2=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ ； $B_3=A_1A_2A_3$.

（2）$C_0=\Omega=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3$； $C_1=A_1\cup A_2\cup A_3=B_1\cup B_2\cup B_3$；

$C_2=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1=B_2\cup B_3$； $C_3=A_1A_2A_3=B_3$

****************************************************************

事件的运算律

交换律： $A\cup B=B\cup A$， $AB=BA$ （即 $A\cap B=B\cap A$）

分配律： $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$， $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$， $(AB)C=A(BC)$

对偶律： $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$， $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

****************************************************************

事件概率的几条基本性质：

$\mathrm{P}(\Phi)=0$， $\mathrm{P}(\Omega)=1$， $P(\overline{A})=1-P(A)$，

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$， $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

**********************************************************

例 1.3.2 袋中有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地任取 $m$ 次，求取出的 $m$ 个号码中最大编号恰好是 $k$ 的概率。

分析：最大编号不超过 $k$ 的基本事件数为 $\dfrac{k^m}{n^m}$

解：设事件 $A_k$ 为最大号码恰为 $k$， $B_k$ 表示最大号码不超过 $k$，

则 $A_k=B_k-B_{k-1}$，且 $B_{k-1}\subset B_k$， 所以 $P(A_k)=P(B_k)-P(B_{k-1})$

又知 $P(B_k)=\dfrac{k^m}{n^m}\quad(k=1,2,\cdots,n)$，

得 $P(A_k)=\dfrac{k^m-(k-1)^m}{n^m}\quad(k=1,2,\cdots,n)$。

**********************************************************

例 1.3.3 （匹配问题）$n$ 封写给不同人的信随机放入 $n$ 个写好收信人姓名的信封，求所有信件都装错了信封的概率。

解：将 $n$ 封不同的信分别编号 $1,2,\cdots,n$， $n$ 个对应的信封同样编号 $1,2,\cdots,n$，

设事件 $A_i$ 表示编号为 $i$ 的信恰好装入了编号为 $i$ 的信封，则所求概率

$p_0=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$

**概率的加法公式：**

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)$$

$$p_0 = 1 - P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right)$$

$$= 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cdots A_n\right)\right]$$

$$P\left(A_{i_1}\right) = \frac{1}{n}, \quad P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \quad \left(\forall 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\right)$$

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

注意到 $1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$

可得 $p_0 \approx e^{-1} \approx 0.37$，当 $n \ge 4$ 时，这一估计值的误差不超过小于 1%。

************************************************************