第六周　常见随机变量的期望与方差和应用实例

6.2 几何分布的期望与方差

几何分布　$X \sim Ge(p)$，$0<p<1$，　$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$，　$k=1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)+1\right]\cdot p(1-p)^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot p(1-p)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p(1-p)^{k-2}+1$$

$$=(1-p)\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot p(1-p)^{j-1}+1=(1-p)E(X)+1$$

$$E(X)=(1-p)E(X)+1 \quad\Rightarrow\quad E(X)=\frac{1}{p}。$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)^2+2(k-1)+1\right]\cdot p(1-p)^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)^2+2k-1\right]\cdot p(1-p)^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2\cdot p(1-p)^{k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}$$

$$=(1-p)\sum_{j=1}^{\infty}j^2\cdot p(1-p)^{j-1}+2E(X)-1=(1-p)E\left(X^2\right)+2E(X)-1$$

$$E\left(X^2\right)=(1-p)E\left(X^2\right)+2E(X)-1 \quad\Rightarrow\quad E\left(X^2\right)=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{1-p}{p^2}$$

备注：

计算泊松分布和几何分布随机变量的期望过程中，做了诸如将k拆分为$(k-1)+1$，以及k^2拆分为$k(k-1)+k$或$(k-1)^2+2(k-1)+1$等等的等价变形处理，这一类的拆分是概率统计计算中常用的处理方法，目的是为了凑出随机变量的分布列求和或期望等的求和式，利用求和式的概率意义和已知的概率结果往往可以简化计算。

****