第一周　随机事件及其概率运算

1.1　随机试验与随机事件

同学们好！欢迎大家参加中国大学先修课程《概率论与数理统计》的学习。我是清华大学数学科学系的教师梁恒，很高兴在今后一段时间里与大家分享一些概率论与统计学中最基本、最重要也是最常用的经典成果。概率论与统计学集中对不确定性进行定量研究，建立了描述不确定性的有效数学模型和理论方法。随着现代科学技术的发展，深刻地理解不确定性有着越来广泛和紧要的需求，概率论与统计学已经成为科学研究、工程技术、经济管理，乃至人文社科等领域不可或缺的工具。这门课程的基本内容和方法不仅是提供了一些有效工具，更反映出独特的思维模式，很好地体现了数学理论和实际应用的联系。本课程面向已经有一些微积分基础的优秀中学生，强调抽象原理与现实应用的紧密结合，希望通过深入浅出的内容，引导同学们从传统的确定性思维模式逐步熟悉和掌握随机性思维模式，当然也希望能够激发同学们的学习兴趣，提升大家的科学素养，为同学们在大学后继课的学习奠定良好的数学基础并帮助同学们适应从初等数学到高等数学，学习观念上的转变，更好地适应即将到来的大学学习和生活。第一周我们主要学习随机事件及事件的概率运算。

****

偶然性与不确定性的概念几乎与人类文明本身一样的古老。人们不得不应付天气变化、传染病的侵袭、战争胜负，以及一次捕猎是否成功等等的不确定现象。很久以前，人们就对理解和运用不确定性的机理和特征产生了兴趣。早在公元前 **3500** 年左右，古埃及等地就已经出现了利用动物骨头制作的具有随机性质的游戏。

　　通常人们都认为近代的概率论，也就是概率的数学理论是由十七世纪法国数学家帕斯卡和费马共同开创的，他们成功地推导出一些赌博规则对应的实际概率，获得了一些有效的计算公式。从那时起，概率论得到了稳步的发展，被越来越多地应用到工程、科学、管理、医药等领域，成为与微积分、线性代数同等重要的最基础的数学工具之一。

****

随机试验与样本空间

如果一个试验事先能够明确地知道试验所有可能的基本结果，在每一次观察中，不能

事先准确地预言其中哪一个基本结果会发生，并且在相同条件下可以重复进行，则称此试验为随机试验。

随机试验的每种基本结果称为一个样本点 ω，全体基本结果构成的集合称为样本空间，通常记为 Ω。

****

例 1.1.1　考察下面几个随机试验的样本空间

试验 1：将一枚均匀硬币抛 3 次，观察出现正面的次数；　$\Omega_1 = \{0,1,2,3\}$；

试验 2：同时掷两颗六面的色子，观察所得的点数和；　$\Omega_2 = \{2,3,4,\cdots,12\}$

试验 3：某网站在某一段时间内被点击的次数；$\Omega_3 = \{0,1,2,3,\cdots\}$

试验 4：在一批电子器件中任意取一只，测试其寿命。$\Omega_4 = \{t \mid t \ge 0\}$

****

样本空间中具备某种属性的样本点的集合叫做一个随机事件，简称为事件，通常用大写字母 A、B、C 等表示。由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

对于 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{A}$ $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生；　$\boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{A} \Leftrightarrow$ 事件 A 未发生。

例如：掷两颗色子的随机试验中，随机事件“点数和为 3 的倍数”对应集合 $\boldsymbol{A} = \{3,6,9,12\}$。

****

例 1.1.2　考虑例 1.1.1 中的随机试验 3，即某网站在某一段时间内被点击的次数，试写出下列事件包含的样本点：

$A=\{$一小时内被点击次数在 10 到 20 次之间$\}$；　$A = \{10,11,12,\cdots,20\}$

$B=\{$一小时内被点击次数不多于 7 次$\}$；　$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{$一小时内被点击次数为偶数次$\}$；　$C = \{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

$D=\{$一小时内被点击次数至少为 0 次$\}$；　$\boldsymbol{D} = \Omega = \{\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\cdots\}$

$E=\{$一小时内被点击次数少于 0 次$\}$.　$\boldsymbol{E} = \Phi$

****

字幕(出镜)： 样本空间Ω包含所有的样本点，若事件集合等于Ω本身，则在每次试验中它总是发生的，故称为必然事件；而空集Φ中不包含任何样本点，它在每次试验中都不可能发生，故称为不可能事件。为讨论方便，以及概念的完整性，虽然必然事件与不可能事件并不具有不确定性，我们仍然常常将它们作为随机事件的特例，纳入到随机事件的范畴来统一考虑。

（备注 3： 话音结束后，再在此画面多停留 3-5 秒，然后切入下一页）

****

事件的示性函数

函数 $I_A(w)=\begin{cases}1, & w\in A\\ 0, & otherwise\end{cases}$，称为事件 A 的示性函数或标志函数（indicator）

****