第八周 条件分布与条件期望

8.2 条件期望

条件数学期望

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum_i x_i P(X=x_i|Y=y), & (X,Y)\text{为离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)dx, & (X,Y)\text{为连续随机变量}\end{cases}$$

例 8.2.1 假设我们独立地抛掷两枚均匀的六面色子，令 X 表示第一枚色子抛出的点数，Y 表示第二枚色子掷出的点数，Z 表示两枚色子的点数和。求 $X=2$ 条件下 Z 的期望，以及 $Z=5$ 条件下 X 的期望。

解：$E(Z|X=2)=\sum_{k=3}^{8} k\cdot P(Z=k|X=2)=\sum_{k=3}^{8} k\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{2}$

$$E(X|Z=5)=\sum_{k=1}^{4} kP(X=k|Z=5)=\sum_{k=1}^{4} k\frac{P(X=k,Z=5)}{P(Z=5)}$$

$$=\sum_{k=1}^{4} k\frac{P(X=k)P(Y=5-k)}{4/36}=\sum_{k=1}^{4} k\frac{1/36}{4/36}=\frac{5}{2}$$

****

例 8.2.2 随机变量 X 的密度函数为阶梯形函数，$f(x)=\begin{cases}2/3, & 0\le x<1\\ 1/3, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

设事件 $A=\{X\text{落入区间}[1,2)\}$，计算条件期望 $E(X|A)$。

解： 当 $x<1$ 或 $x\ge 2$ 时，事件 A 不发生，所以 $f(x|A)=0$；

当 $1\le x<2$ 时，事件 A 发生，$P(A)=P(1\le X<2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$

此时，$f(x|A)=\frac{f(x)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/3}=1$；

$$E\left(X|A\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f\left(x|A\right)dx=\int_{1}^{2}x\cdot 1d=\frac{3}{2}。$$

****

$E\left(X\,|\,Y\right)$是随机变量，

例如 Y 是离散型随机变量，则

$$E\left(X\,|\,Y\right)\sim\begin{pmatrix}E\left(X\,|\,Y=y_1\right) & E\left(X\,|\,Y=y_2\right) & \cdots & E\left(X\,|\,Y=y_n\right) & \cdots\\ P\left(Y=y_1\right) & P\left(Y=y_2\right) & \cdots & P\left(Y=y_n\right) & \cdots\end{pmatrix}$$

$$Y\sim\begin{pmatrix}Y=y_1 & Y=y_2 & \cdots & Y=y_n & \cdots\\ P\left(Y=y_1\right) & P\left(Y=y_2\right) & \cdots & P\left(Y=y_n\right) & \cdots\end{pmatrix}\overset{E\left(X|Y\right)=g\left(Y\right)}{\Rightarrow}$$

$$E\left(X|Y\right)\sim\begin{pmatrix}E\left(X\,|\,Y=y_1\right) & E\left(X\,|\,Y=y_2\right) & \cdots & E\left(X\,|\,Y=y_n\right) & \cdots\\ P\left(Y=y_1\right) & P\left(Y=y_2\right) & \cdots & P\left(Y=y_n\right) & \cdots\end{pmatrix}$$

X, Y 为两个随机变量，表达式$E\left(X\,|\,Y\right)$表示一个随机变量。

以 Y 为离散型随机变量的情形进行说明。这里强调的是$E\left(X\,|\,Y\right)$不是一个实数值，而是一个取值依赖于 Y 的随机变量。也可以这样理解，$E\left(X\,|\,Y\right)$是随机变量 Y 的一个函数，具体的映射关系就是$g\left(y_n\right)=E\left(X\,|\,Y=y_n\right)$。

****

例 8.2.3 假设我们独立地抛掷两枚均匀的六面色子，令X表示第一枚色子抛出的点数，Y表示第二枚色子掷出的点数，Z表示两枚色子的点数和。求$E\left(Z|X\right)$。

解： 对所有X可能的取值$k=1,2,\cdots,6$，计算$X=k$条件下Y的期望

$$E\left(Z|X=k\right)=E\left(X+Y|X=k\right)=E\left(k+Y\right)=k+E\left(Y\right)=k+\frac{7}{2}$$

$$E\left(Z|X\right)\sim\begin{pmatrix}1+7/2 & 2+7/2 & 3+7/2 & 4+7/2 & 5+7/2 & 6+7/2\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$$

也可以直接将$E\left(Z|X\right)$表示为X的函数的形式：

$$E\left(Z|X\right)=\sum_{z=X+1}^{z=X+6} z\cdot P\left(Z=z|X\right)=\sum_{k=1}^{6}\left(X+k\right)\cdot P\left(Z=X+k|X\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\left(X+k\right)\cdot\frac{1}{6}=X+\frac{7}{2}$$

****

例 8.2.4 设随机变量$X\sim Ge\left(p\right)$，$0<p<1$， $P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$， $k=1,2,\cdots$，

随机变量$Y=\begin{cases}1, & X=1\\ 0, & X>1\end{cases}$，求条件期望$E\left(X\,|\,Y\right)$

解： 分别计算随机变量$Y=1$和$Y=0$条件下期望X的期望

$$E\left(X\,|\,Y=1\right)=E\left(X\,|\,X=1\right)=1$$

$$E\left(X\,|\,Y=0\right)=E\left(X\,|\,X>1\right)=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot P\left(X=k\,|\,X>1\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot P\left(X=k-1\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(k-1\right)+1\right]\cdot P\left(X=k-1\right)$$

$$\overset{i=k-1}{=}\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P\left(X=i\right)+\sum_{i=1}^{\infty}P\left(X=i\right)=E\left(X\right)+1=1+\frac{1}{p}$$

所以 $E\left(X\,|\,Y\right)\sim\begin{pmatrix}1+\frac{1}{p} & 1\\ P\left(Y=0\right) & P\left(Y=1\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{p} & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$。

****