機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 7-1: 期望值 II
- 7-2: 隨機變數之函數
- 7-3: 條件機率分佈與失憶性

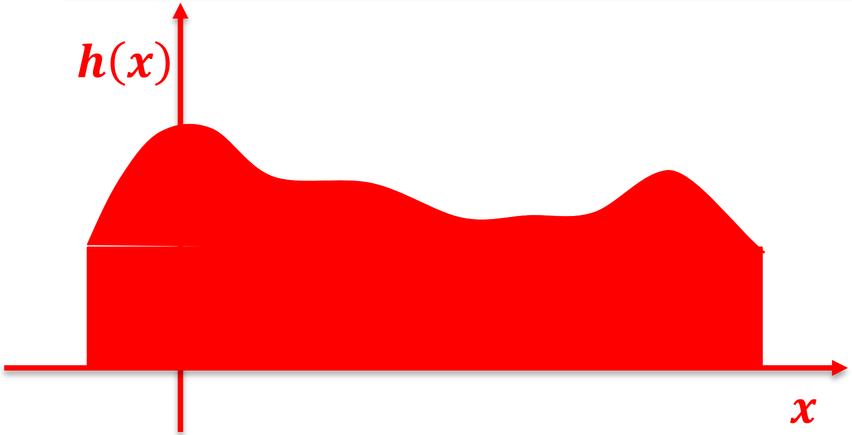
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-1: 期望值 II (EXPECTATION)

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

積分的近似概念



$$\text{面積} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

$$\text{面積} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$$

$$\Rightarrow \text{面積} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)

- 對連續的隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 而言，想求期望值，
  我們用類似離散隨機變數的方式出發
- 將 $\boldsymbol{X}$ 的值以 Δ 為單位無條件捨去來近似
  結果：離散隨機變數 $\boldsymbol{Y}$ （當 $\Delta \to \mathbf{0}$ 時，$\boldsymbol{X \approx Y}$）
- 根據第五週：
  - $p_Y(n\Delta) = P(n\Delta \leq X < n\Delta + \Delta) \approx f_X(n\Delta) \cdot \Delta$

$$X \in [0, \Delta) \to Y = 0\Delta$$
$$X \in [1\Delta, 2\Delta) \to Y = 1\Delta$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boxed{X \in [n\Delta, (n+1)\Delta)} \to Y = n\Delta$$

- $E[X] = \lim\limits_{\Delta \to 0} E[Y] = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot P_Y(n\Delta)$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot f_X(n\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數之期望值

- 對於任一連續隨機變數 X 而言，其任意函數 $g(X)$ 亦是一隨機變數，亦有期望值
- $g(X)$ 期望值定義為

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

※ 離散隨機變數：$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質

- $E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]$

  $= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha\, g(x) + \beta\, h(x)] \cdot f_X(x)\, dx$

- $= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx + \beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\, dx$

  $= \alpha \cdot E[g(X)] + \beta \cdot E[h(X)]$

- Ex: $E\left[6\, X + 8\, X^2\right] = 6\, E[X] + 8\, E[X^2]$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質

- $E[\alpha]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot f_X(x)\, dx = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \alpha$$

Ex: $E[6] = 6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見的隨機變數函數期望值

- $\boldsymbol{X}$的 n^{th} moment：

$$\boldsymbol{E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, f_X(x)\, dx}$$

  – Ex: $\boldsymbol{E[X^2]}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{2^{nd}\ moment}$

  – Ex: $\boldsymbol{E[X^5]}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{5^{th} moment}$

- $\boldsymbol{X}$的變異數 (variance)：

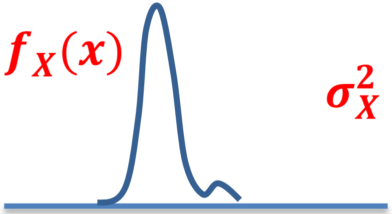
$$\boldsymbol{E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\, f_X(x)\, dx}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

變異數 (Variance)

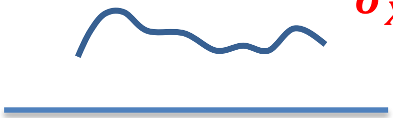
- Variance 通常符號表示為 $\boldsymbol{\sigma_X^2} = \boldsymbol{E[(X-\mu_X)^2]}$
- 變異數隱含關於隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 多「亂」的資訊

$f_X(x)$



σ_X^2 小 ($\because x \approx \mu_X$)

$f_X(x)$



σ_X^2 大 ($\because X$ 不見得接近 μ_X)

- 變異數的開根號便是標準差 (standard deviation)： $\boldsymbol{\sigma_X}$

$$\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{\boldsymbol{Variance}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法

- $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$

$$= E\left[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E\left[X^2\right] - \underbrace{2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2}_{-2\mu_X^2+\mu_X^2} = \boxed{E\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

$$\Rightarrow E\left[X^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數

- $X \sim Exponential(\lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim Erlang\,(n, \lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{n}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{n}{\lambda^2}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數

- $X \sim Gaussian\ (\mu, \sigma)$：
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- $X \sim UNIF\ (a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值推導範例

分部積分：

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

- $X \sim Exponential(\lambda)$： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -\int_0^{\infty} -x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\int_0^{\infty} \underbrace{x}_{U}\, d\, \underbrace{e^{-\lambda x}}_{V}$$

$$= -\left[x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$= -\left[0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 連續隨機變數的期望值定義？
- 連續隨機變數的函數的期望值？
- 「湊」字訣！
- 常見連續機率分佈之期望值、變異數？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-2: 隨機變數之函數

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數

- 隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 的任意函數 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ 也是一個隨機變數
- 通常被稱為 Derived Random Variable

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如何求 $g(X)$ 機率分佈？

- 若 X 為離散：
  - 直接推 $g(X)$ 的PMF
- 若 X 為連續：
  - 先推 $g(X)$ 的 CDF，再微分得到PDF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- Ex：某宅宅超愛戰LOL。每次一戰就連續戰 X 場不可收拾，已知 $X\sim GEO(0.2)$。某宅宅內心仍有一點清明，其良心亦會因戰過度而內疚，依戰的次數多寡，內疚程度 Y 分別為**1, 2, 3** 不同等級:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$$

問 $Y = g(X)$ 的機率分佈？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- $$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$$
- $X \sim GEO(0.2) \Rightarrow p_X(x) = (1-0.2)^{x-1} \cdot 0.2$
- $p_Y(1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)$
  $= 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.2$
- $p_Y(2) = p_X(4) + p_X(5) + P_X(6)$
  $= (0.8)^3 \cdot 0.2 + (0.8)^4 \cdot 0.2 + (0.8)^5 \cdot 0.2$
- $p_Y(3) = P(Y=3) = 1 - p_Y(1) - p_Y(2)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- 當 X 為離散隨機變數時，
  $Y=g(X)$ 亦為離散隨機變數
- $Y=g(X)$ 之 PMF 為

$$p_{g(X)}(y)=\sum_{\substack{\text{會讓}\\ g(x)=y\\ \text{的所有 } x}} p_X(x)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數

- $Y = g(X)$ 且 X 為連續隨機變數時先算 $g(X)$ 的CDF：

$$F_{g(X)}(y) = P[g(X) \le y]$$

- 若 $g(X)$ 可微分，再對 y 微分得到PDF：

$$f_{g(X)}(y) = \frac{d}{dy} F_{g(X)}(y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $Y = 3X + 2$ ，請問 Y 的 PDF 跟 $f_X(x)$ 之關係為何？

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(3X + 2 \le y) \\
&= P\left(X \le \frac{y-2}{3}\right) \\
&= F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \\
&= \frac{dF_X\left(\frac{y-2}{3}\right)}{d\left(\frac{y-2}{3}\right)} \cdot \frac{d\,\frac{y-2}{3}}{dy} \\
&= f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- 若 $Y = aX + b$ 且 $a > 0$，則

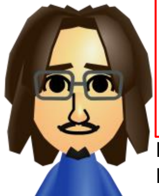
$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

what if $a < 0$?

$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(\frac{aX + b - b}{a} \ge \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = -\frac{dF_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{d\left(\frac{y-b}{a}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{y-b}{a}\right)}{dy} = -f_X\left(\frac{y-a}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $X \sim Exponential(\lambda)$，且 $Y = 2X$，請問 Y 之機率分佈為何？

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x), Y = 2X\ (a = 2, b = 0)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda \frac{y}{2}} \cdot u\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} y} \cdot u(y)$$

$$\Rightarrow Y \sim Exponential\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

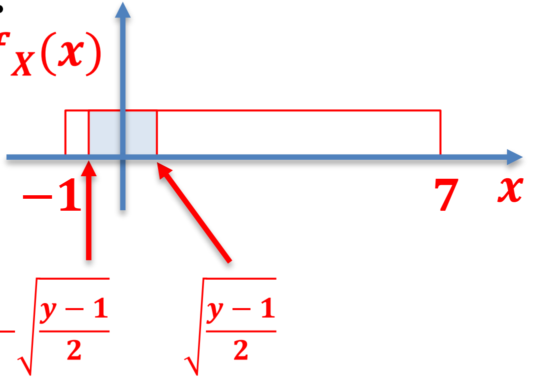
連續 X 之函數 $(g(X) = aX^2 + b)$

- Ex：若 $Y = 2X^2 + 1$ ，且已知 $X \sim UNIF(\text{-}1, 7)$。 請問 Y 的 PDF 為何？

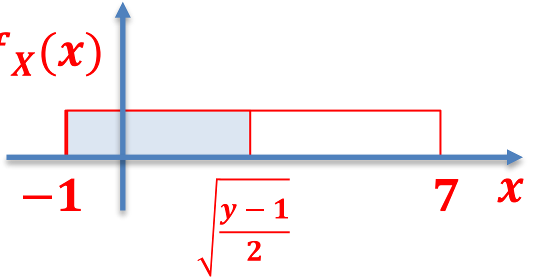
$$F_Y(y) = P(Y = 2X^2 + 1 \le y)$$
$$= P\left(X^2 \le \frac{y-1}{2}\right)$$
$$= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$
$$= \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} f_X(x)\, dx$$

$$\boxed{-1 = -\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow y = 3}$$

$y \le 3$: $f_X(x)$



$y > 3$: $f_X(x)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX^2 + b)$

$$y \le 3: F_Y(y) = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$$y > 3: F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow y \le 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$

$$y > 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 隨機變數的函數又稱？
- 若隨機變數為離散，可直接推 $g(X)$ 之 PMF
- 若隨機變數為連續，先推 $g(X)$ 之 CDF 再微分得到 PDF 比較好算

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-3: 條件機率分佈與失憶性

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

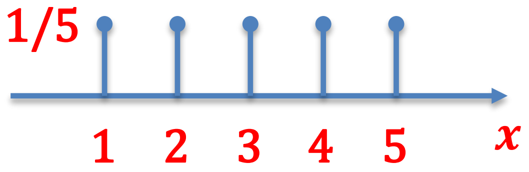
把條件機率用在機率分佈上

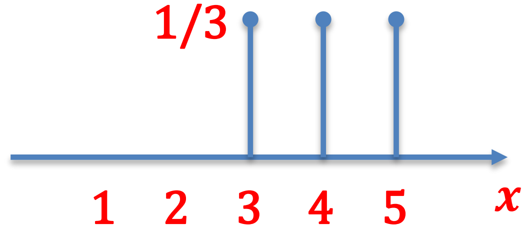
- Ex：為了更了解宅宅的心，店員妹亦開始戰 LOL。已知店員妹戰LOL場數 $X \sim UNIF\ (1,5)$。若已知店員妹戰了兩場仍戰意甚濃、繼續戰。請問在此情況下，店員妹今日戰LOL場數 X 之機率分佈為何？

B：已戰兩場仍想戰

$$p_{X|B}(x) = P(X = x|B) = \frac{P(X = x, B)}{P(B)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X = x)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}, & x \in B: x = 3, 4, 5 \\ 0, & x \notin B, x = otherwise \end{cases}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一離散隨機變數，其 PMF 為 $\boldsymbol{p_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PMF: $\boldsymbol{p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: & \frac{p_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: & 0. \end{cases}}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x) = \boxed{\sum_{u \le x} p_{X|B}(u)} = \sum_{u \le x, u \in B} \frac{p_X(u)}{P(B)}}$

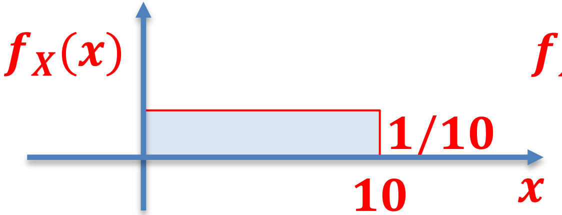
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

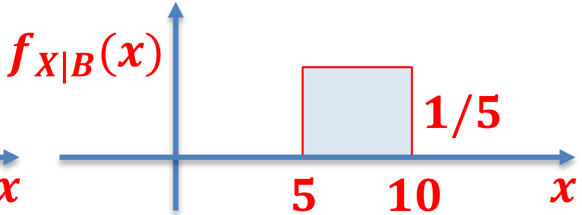
把條件機率用在機率分佈上

- Ex：店員妹等公車上班。通常等公車的時間 $\boldsymbol{X}$，從零到十分鐘間可能性均等。若店員妹已等了五分鐘車還沒來。請問在此情況下，等車時間 $\boldsymbol{X}$ 之機率分佈為何？

$X \sim UNIF(0, 10)$

$\boxed{B: X > 5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$





$$f_{X|B}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta] | B)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(X \in [x, x+\Delta], X \in B)}{P(X \in B)}$$

$$= \begin{cases} x \in B: \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta \cdot P(B)} = \boxed{\dfrac{f_X(x)}{P(B)}}, \\ x \notin B: \quad 0. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一連續隨機變數，其 PDF 為 $\boldsymbol{f_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PDF: $$\boldsymbol{f_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: & \dfrac{f_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: & 0. \end{cases}}$$
  - CDF: $$\boldsymbol{F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(u)du = \int_{-\infty \le u \le x, u \in B} \frac{f_X(u)}{P(B)} du}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知$\boldsymbol{B}$已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[X\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X|B}(x) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,dx & (\text{連續}) \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[g(X)\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p_{X|B}(x) & \text{(離散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_{X|B}(x)dx & \text{(連續)} \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$Var(X|B) = E\left[\left(X_{|B} - \mu_{X|B}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu_{X|B}\right)^2 \middle| B\right]$$

$$= E\left[X^2 \middle| B\right] - \left(\mu_{X|B}\right)^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

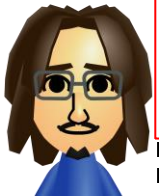
失憶性 (Memoryless)

- 宅宅與店員妹相約出門。宅宅出門前在戰LOL，場數 $X \sim GEO\,(0.2)$ 。店員妹等了兩場後，宅宅還在玩。店員妹甚怒，怒催宅宅。宅宅曰「快好了、快好了」。問宅宅剩餘場數 X' 之機率分佈為何？ $B: X > 2,\ X' = X_{|B} - 2$

$$p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B\,(x > 2): & \dfrac{P_X(x)}{P(B)} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{\sum_{x=3}^{\infty} 0.8^{x-1} \cdot 0.2} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{0.8^2 \cdot 0.2 \cdot \dfrac{1}{1-0.8}} = 0.8^{x-3} \cdot 0.2 \\ x \le 2: & 0 \end{cases}$$

$$p_{X'}(x) = P(X' = x) = P\left(X_{|B} - 2 = x\right) = P\left(X_{|B} = x + 2\right)$$

$$P_{X|B}(x+2) = 0.8^{x+2-3} \cdot 0.2 = 0.8^{x-1} \cdot 0.2 \Rightarrow X' \sim GEO(0.2)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

- 店員妹與宅宅相約出門。店員妹出門前化妝時間為 $\boldsymbol{X}$（小時），$\boldsymbol{X \sim Exponential(1)}$。經過一小時後，仍未完成。宅宅甚怒，怒催店員妹。店員妹曰「快好了、快好了」。問店員妹剩餘化妝時間 $\boldsymbol{X'}$ 機率分佈為何？ $\boldsymbol{B: X > 1, X' = X_{|B} - 1}$

$$\boldsymbol{F_{X'}(x) = P(X' \leq x) = P\left(X_{|B} - 1 \leq x\right) = P(X_{|B} \leq x + 1)}$$

$$\boldsymbol{F_{X|B}(x+1) = \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = ?\quad F_{X'}(x) = ?\quad f_{X'}(x) = ?}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

$B: X > 1$

$$f_{X|B}(u) = \begin{cases} u \in B: \; (u>1) & \dfrac{f_X(u)}{P(B)} = \dfrac{1 \cdot e^{-1u}}{P(X>1)} = \dfrac{e^{-u}}{1-F_X(1)} \\ & = \dfrac{e^{-u}}{1-(1-e^{-1})} = \dfrac{e^{-u}}{e^{-1}} = e^{-(u-1)} \\ u \notin B: & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'_X(x) = P(X' \le x) = P\left(X_{|B} - 1 \le x\right) = P\left(X_{|B} \le x+1\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = \int_{1}^{x+1} e^{-(u-1)}du = \left[-e^{-(u-1)}\right]_1^{x+1}$$

$$= -e^{-x+1-1} - \left(-e^{-(1-1)}\right) = 1 - e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_{X'}(x) = 1 \cdot e^{-1 \cdot x}, x \ge 0; 0\ otherwise. \Rightarrow X' \sim Exponential(1)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

- Geometric 跟 Exponential 機率分佈皆有失憶性的性質
- 不管事情已經進行多久，對於事情之後的進行一點影響都沒有！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 某個事件發生後，隨機變數的行為跟其機率分佈也會改變：條件機率分佈
- 條件隨機變數也是一個健全、可愛的隨機變數！
- 身為一個健全、可愛的隨機變數，人家一般隨機變數該有的條件隨機變數也應該都有！PMF (PDF)、CDF、期望值、Mean、Variance 等
- 隨機變數中會失憶的是？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University