第五周　随机变量函数的分布及随机变量的数字特征

5.4 原点矩与中心矩

随机变量的原点矩与中心矩

定义　$E(X^n)$称为随机变量X的n阶（原点）矩；$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^n\right]$称为随机变量$X$的$n$阶中心矩。

期望$E(X)$即为随机变量X的 1 阶原点矩；

方差$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]$即为随机变量$X$的 2 阶中心矩。

期望和方差都是特殊的矩。

期望为随机变量 X 的 1 阶原点矩，方差为随机变量 X 的 2 阶中心矩。

****

例 5.4.1 若连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

试求随机变量X的 3 阶矩$E\left(X^3\right)$和 3 阶中心矩$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^3\right]$。

解　X的n阶原点矩　$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n\cdot 3x^2dx=3\int_0^1 x^{n+2}dx=\dfrac{3}{n+3}$

故$E(X^3)=\dfrac{1}{2}$，$E\left(X\right)=\dfrac{3}{4}$。　X的 3 阶中心矩为

$$E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^3\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E\left(X\right)\right]^3\cdot f(x)dx=3\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^3x^2dx$$

$$=3\int_0^1\left(x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{27}{16}x-\frac{27}{64}\right)x^2dx=-\frac{1}{160}\text{。}$$

****