機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 9-1: 隨機變數之和
- 9-2: MGF
- 9-3: 多個隨機變數和
- 9-4: 中央極限定理 (萬佛朝宗)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-1: 隨機變數之和

第九週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$Z = X + Y$ 的機率分佈？

- Ex: 老張麵店只賣牛肉麵跟豆腐腦已知每天的麵銷量
  X 碗與豆腐腦銷量 Y 碗的聯合機率分佈 $p_{X,Y}(x,y)$
  兄弟們約老張收攤後喝酒小聚。老婆規定老張洗完碗後才能赴約。
  請問老張洗碗數量的機率分佈是？

$$p_Z(3) = p(X+Y=3) = \begin{array}{l} p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) \\ p_{X,Y}(0,3) + p_{X,Y}(3,0) \\ \quad\vdots \end{array}$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, 3-x)$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(3-y, y)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_Z(z)} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(z-y, y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$\boxed{Z = X + Y}$ 的機率分佈？

- Ex: 小明寫國文作業的時間 X 與算術作業 Y 的聯合機率分佈 $f_{X,Y}(x,y)$。兄弟們約小明喝酒小聚老媽規定小明寫完作業後才能赴約。請問小明兄弟要等多久時間的機率分佈是？

$$\boxed{f_Z(z) = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X, Y 獨立？

$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

- 離散：$Z = X + Y$

摺積

$$p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \underbrace{\sum_{x=-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)}^{\text{discrete convolution}} = \underbrace{\sum_{y=-\infty}^{\infty} p_X(z-y) \cdot p_Y(y)}_{\text{discrete convolution}}$$

$$= \boxed{p_X(z) * p_Y(z)}$$

- 連續：$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx}^{\text{continuous convolution}} = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy}^{\text{continuous convolution}}$$

$$= \boxed{f_X(z) * f_Y(z)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如果有不只兩個隨機變數?

- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，

若 $X_1, \ldots, X_n$ 獨立

$p_{X_1+X_2}(x)$ $p_{X_1+X_2+X_3}(x)$

(離散): $p_X(x) = p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x) * p_{X_3}(x) * \cdots * p_{X_n}(x)$

(連續): $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * f_{X_3}(x) * \cdots * f_{X_n}(x)$

- 很複雜，怎麼辦？ MGF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-2: MGF (MOMENT GENERATING FUNCTION)

第九週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？

- 先看個例子吧！辛苦的紅娘業

小園超宅、小麗超夯
任務：撮合他們
（超難！）

轉換：分別送去亞馬遜荒野
換新的洋名、造型、身分

撮合：一男一女、荒郊野嶺
周圍鬼哭神號，只有營火，
和你我的相互依偎！
（超簡單！）

逆轉換：送他們回文明世界
從此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？

- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}]$, $\phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}]$

$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_{X_1}(x)$

給定：$p_{X_1}(x)$、$p_{X_2}(x)$

任務：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x)$

（超麻煩！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？

- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

給定：$p_{X_1}(x), p_{X_2}(x), \cdots, p_{X_n}(x)$

任務：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x) * \cdots * p_{X_n}(x)$

（超麻煩！）

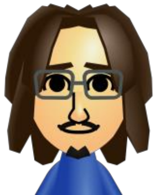
撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？

- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_{X_1}(x)\,dx$

給定：$f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \cdots, f_{X_n}(x)$

任務：$f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \cdots * f_{X_2}(x)$

（超麻煩！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF (Moment Generation Function)

- MGF $\phi_X(s)$ 定義：

$$\boxed{\phi_X(s) = E[e^{sX}]} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x) & \text{(離散)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx & \text{(連續)} \end{cases}$$

- 逆轉換怎麼做？

通常靠查表

$p_X(x)$	$\phi_X(s)$

$f_X(x)$	$\phi_X(s)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我說 MGF 為什麼叫 MGF 呢？

- 還記得什麼叫 moment 嗎？ $E[X^n]$ n th moment
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有關係嗎？離散 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx}\cdot p_X(x)$$

$$\phi'_X(s) = \frac{d}{ds}\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx}\cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{de^{sx}}{ds}}}_{x\cdot e^{sx}} p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\, e^{sx}\cdot p_X(x)$$

- $\phi'_X(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\cdot \overset{\phi_X(s)}{e^{0\cdot x}}\cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\cdot 1\cdot p_X(x) = E[X]$ 1st moment
- $\phi_X^{(n)}(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n\cdot e^{sx}\cdot p_X(x)\big|_{s=0} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n\cdot p_X(x) = E[X^n]$ n th moment

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

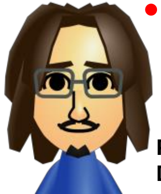
我說 MGF 為什麼叫 MGF 呢？

- 還記得什麼叫 moment 嗎？ $E[X^n]$
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有關係嗎？連續 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\phi'_X(s) = \boxed{\frac{d}{ds}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{de^{sx}}{ds}}}_{x e^{sx}} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

- $\phi'_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot 1 \cdot f_X(x)\, dx = E[X]$
- $\phi_X^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx \Big|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx = E[X^n]$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF 的重要性質

- $Y = aX + b$

$$\phi_Y(s) = E[e^{sY}] = E\left[e^{s(aX+b)}\right]$$

$$= E[e^{saX} \cdot e^{sb}]$$

$$= \boxed{e^{sb}}\ E[e^{\boxed{s}aX}]$$

$$= \boxed{e^{sb}} \cdot \phi_X(as) \quad " \ \phi_X(as)$$

$$\phi_X(s) = E[e^{\boxed{s}X}]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF

$\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$

- $X \sim Bernoulli(p)$: $p_X(0) = 1 - p, p(1) = p$

$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = e^{s\cdot 0} \cdot p_X(0) + e^{s\cdot 1} \cdot p_X(1)$

$= \boxed{1 \cdot (1-p) + e^s \cdot p} = 1 - p + pe^s$ 　 $\underbrace{p_X(0)}_{1-p}$ 　 $\underbrace{p_X(1)}_{p}$

- $X \sim BIN(n, p)$: 作 n 次實驗成功次數等於各實驗成功次數的總和

$\Rightarrow X = \boxed{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$, X_i 獨立, $X_i \sim Bernoulli(p)$,

$\phi_{X_i}(s) = 1 - p + pe^s$

$\Rightarrow \phi_X(s) = \boxed{\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)} = [1 - p + pe^s]^n$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF

- $X \sim Geometric(p)$:

$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$

- $X \sim Pascal(k, p)$: 看到第 k 次成功的花的總實驗次數等於第 1 號成功花多少次＋第 2 號成功花多少次＋…＋第 k 號成功花多少次

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, X_i 獨立, $X_i \sim Geometric(p)$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdots \phi_{X_k}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^k$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF

- $X \sim Poisson\,(\alpha)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim UNIF\,(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續機率分佈之 MGF

- $X \sim Exponential(\lambda)$:

$\underline{\phi_X(s) = E[e^{sX}] =}$

- $X \sim Erlang(n, \lambda)$:

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_i 獨立, $X_i \sim Exponential(\lambda)$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdot \cdots \phi_{X_n}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^n$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續機率分佈之 MGF

- $X \sim UNIF(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim Gaussian(\mu, \sigma)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-3: 多個隨機變數之和

第九週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

獨立隨機變數之和

- $X_1, X_2, \ldots$ 獨立，且各自都有一模一樣的機率分佈，表示為

$\{X_i\}$ $I.I.D.$

Independently and Identically Distributed

- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $\boxed{n \text{ 為常數}}$，請問 X 的機率分佈？

離散: $p_X(x) = p_{X_1}(x) * p_{X_1}(x) * \cdots * p_{X_1}(x)$

連續: $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_1}(x) * \cdots * f_{X_1}(x)$

$\phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^n$

$p_{X_1}(x) = p_{X_i}(x)$

$f_{X_i}(x) = f_{X_1}(x)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 將太的壽司

- 壽司飯糰的理想重量是 13 公克。將太初當學徒，每次抓飯量為常態分佈，期望值是 14 ，標準差是 3。師父要將太每天練習作 100 個壽司才能休息，做完的壽司都得自己吃掉。請問將太每天吃的飯量的機率分佈？

$N(\mu,\sigma^2)$

$\downarrow$ MGF

X_i: 第 i 個壽司的飯量, $\{X_i\}$ I.I.D

$X_i \sim N(14,9) \Rightarrow \phi_{X_i}(s) = \phi_{X_1}(s) = \boxed{e^{\mu s+\frac{\sigma^2}{2}s^2}} = \boxed{e^{14s+\frac{9}{2}s^2}}$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\Rightarrow \phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^{100} = [e^{14s+\frac{9}{2}s^2}]^{100} = \boxed{e^{1400s+\frac{900}{2}s^2}}$

$\Rightarrow X \sim N(1400, 900), \mu_X = 1400, \sigma_X^2 = 900$

$N(1400, 900)$

$\mu \quad \sigma^2$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機個數之獨立隨機變數和

- $X_1, X_2, \ldots$ I.I.D.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

若 N 本身也為隨機變數，其機率分佈已知，那 X 的機率分佈找的到嗎？

N: $p_N(n)$ 已知

$$\Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tilde{s}\,n} \cdot p_N(n)$$

$$\tilde{s} = \ln \phi_{X_1}(s)$$

$X = X_1 + \cdots + X_N$

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = E[e^{sX_1+sX_2+\cdots+sX_N}]$$
$$= E[e^{sX_1} \cdot e^{sX_2} \cdot \ldots \cdot e^{sX_N}]$$
$$= E_N\left[E[e^{sX_1}] \cdot E[e^{sX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{sX_N}]\right]$$
$$= E_N\left[[\phi_{X_1}(s)]^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_{X_1}(s))^n \cdot p_N(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\ln(\phi_X(s))\,n} \cdot p_N(n) = \phi_N\Big(\underbrace{\ln\big(\phi_{X_1}(s)\big)}_{\tilde{s}}\Big)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 如果不景氣呢？

- 因為不景氣，師父的生意有一搭沒一搭，沒那麼多錢讓將太揮霍。每天可以練習的壽司數量是由當天生意決定的。每天可以練習的壽司數量是一個 Poisson 分佈，期望值為 75；將太功夫依然沒有長進，每次抓的飯量為常態分佈，期望值是 14，標準差是 4。請問阿明每天吃的飯量的機率分佈？

$$N\sim POI(75) \Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = \boxed{e^{75(e^{\tilde{s}}-1)}}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,\ \boxed{X_1\sim N(14,16)}$$

$$\Rightarrow \phi_{X_1}(s) = e^{14s+8s^2}$$

$$\phi_X(s) = \phi_N\left(ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)\right) = e^{75\left(e^{ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)}-1\right)} = e^{75\left(\phi_{X_1}(s)-1\right)} = e^{75\left(e^{14s+8s^2}-1\right)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-4: 中央極限定理 (萬佛朝宗)

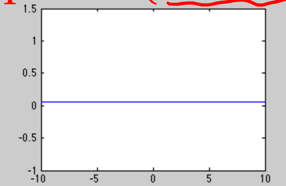
第九週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:

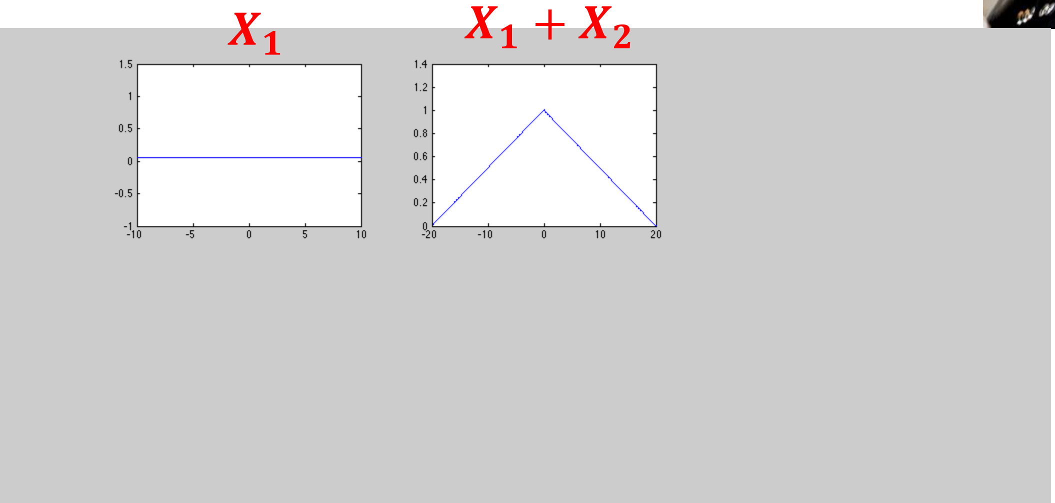
$X_1 \sim UNIF(-10,10)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:

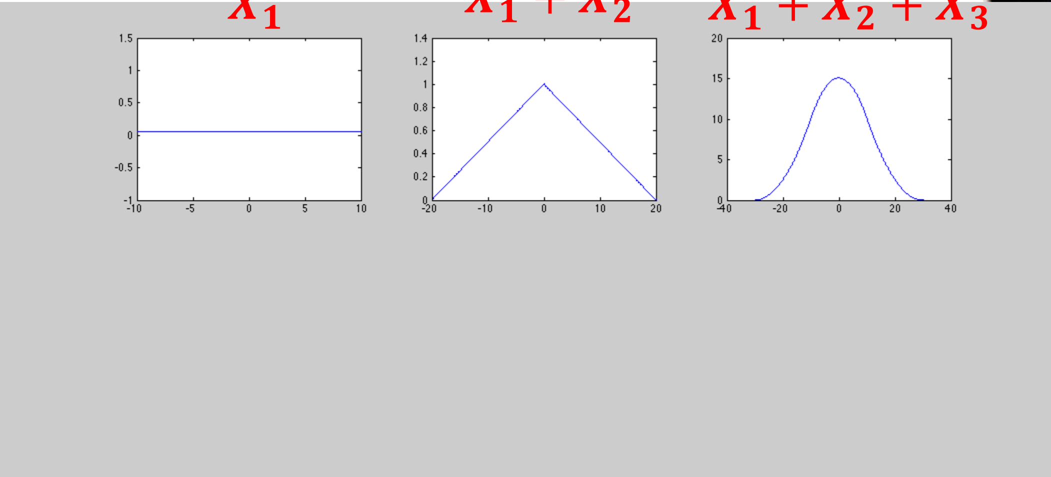


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:

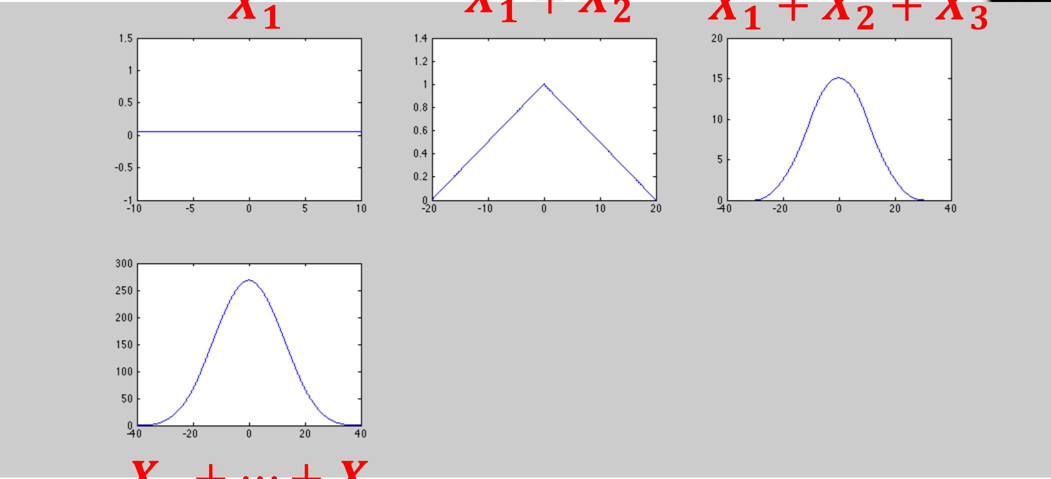
X_1 $\qquad$ $X_1 + X_2$ $\qquad$ $X_1 + X_2 + X_3$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:



X_1 X_1+X_2 $X_1+X_2+X_3$

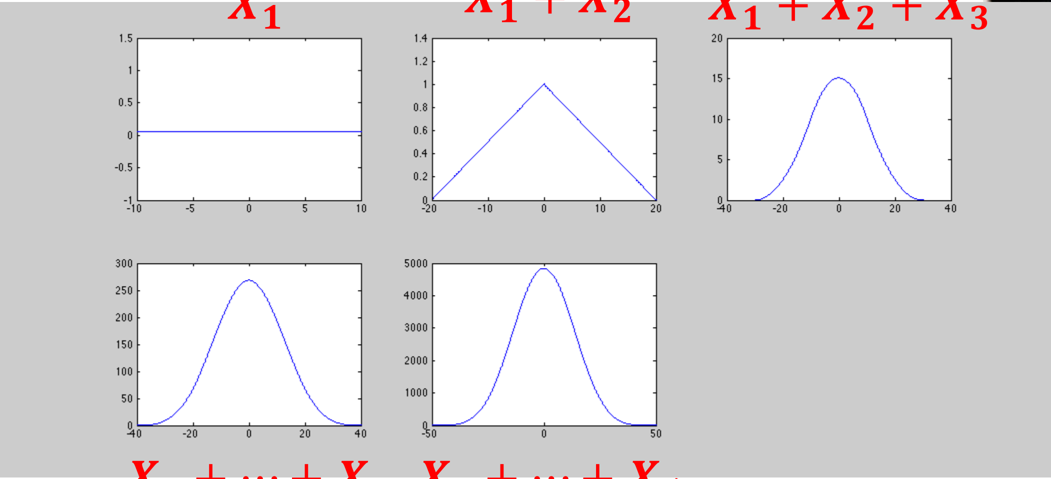
$X_1+\cdots+X_4$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:

X_1 $\quad X_1 + X_2$ $\quad X_1 + X_2 + X_3$



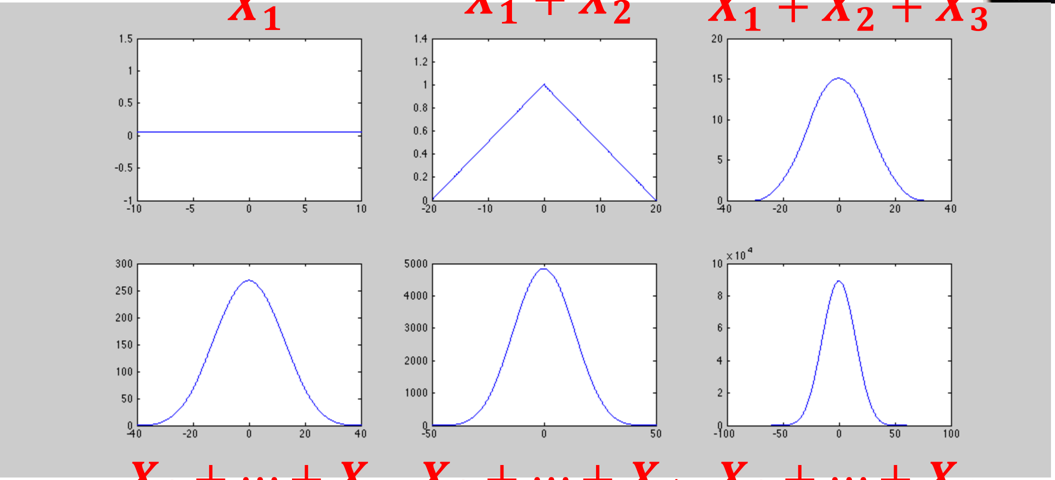
$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad X_1 + \cdots + X_5$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和

PDF:

X_1 $\quad$ $X_1 + X_2$ $\quad$ $X_1 + X_2 + X_3$



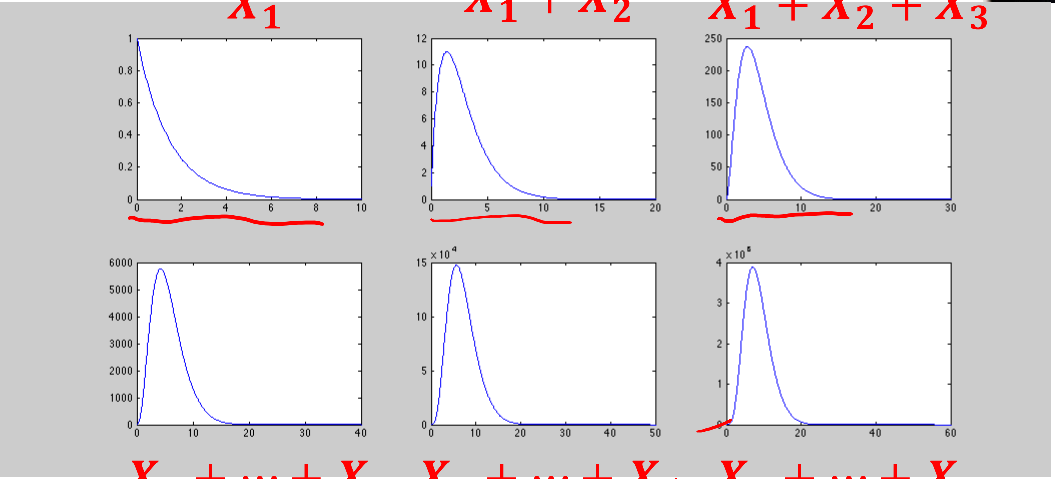
$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad$ $X_1 + \cdots + X_5$ $\quad$ $X_1 + \cdots + X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Exponential 隨機變數和

PDF:

X_1 $\quad X_1 + X_2$ $\quad X_1 + X_2 + X_3$

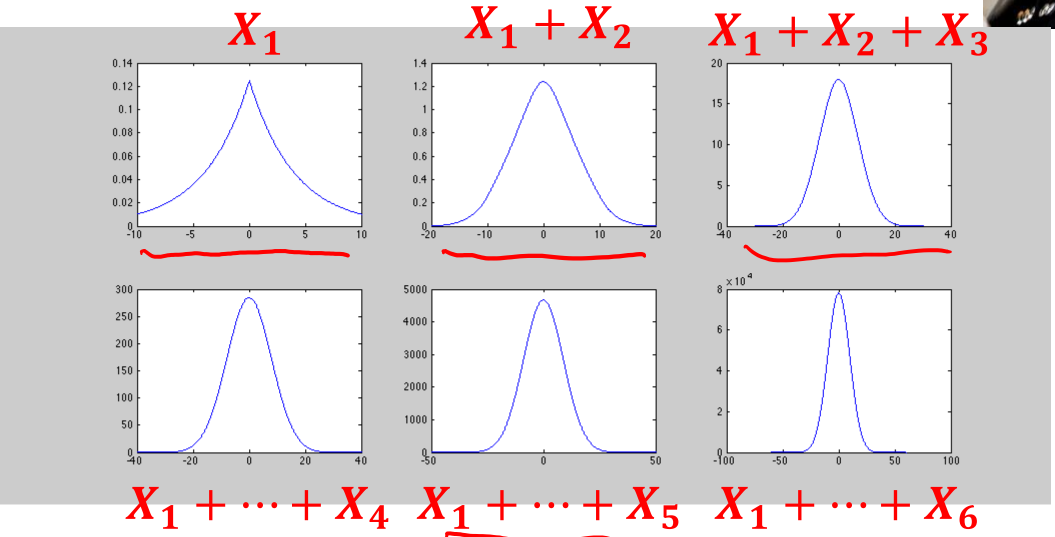


$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad X_1 + \cdots + X_5$ $\quad X_1 + \cdots + X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Laplace 隨機變數和

PDF:

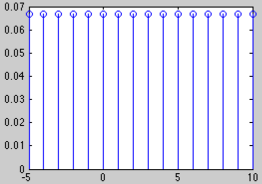


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

X_1

PMF:

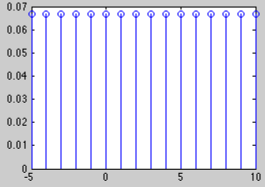


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

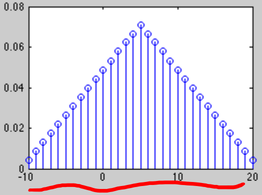
數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

PMF:

X_1



$X_1 + X_2$

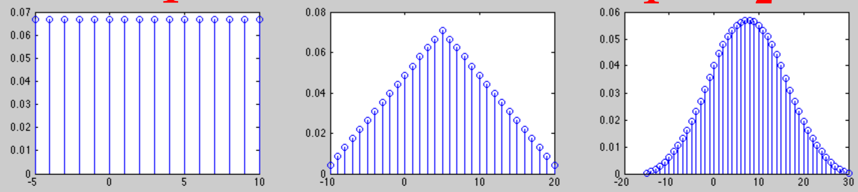


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

X_1 $\quad$ X_1+X_2 $\quad$ $X_1+X_2+X_3$

PMF:

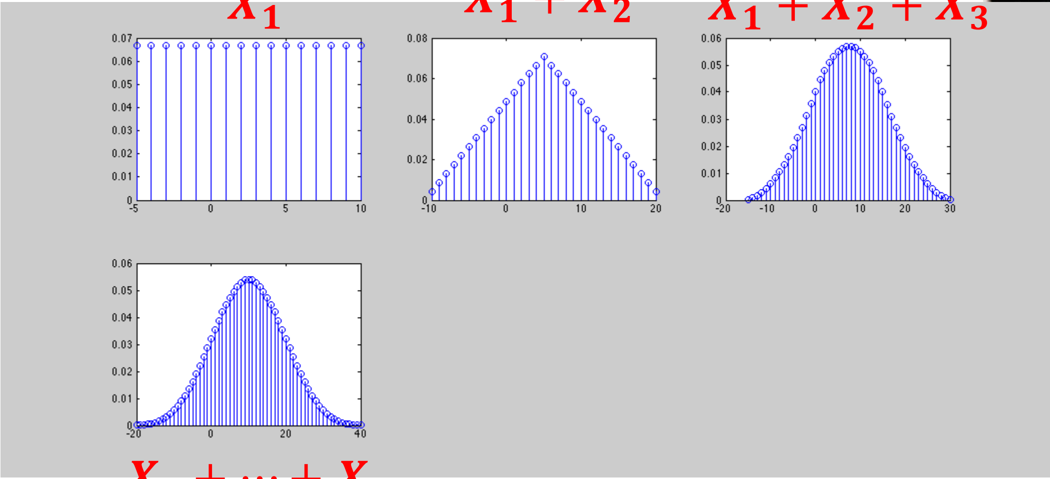


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

PMF:

X_1 $\qquad$ $X_1 + X_2$ $\qquad$ $X_1 + X_2 + X_3$



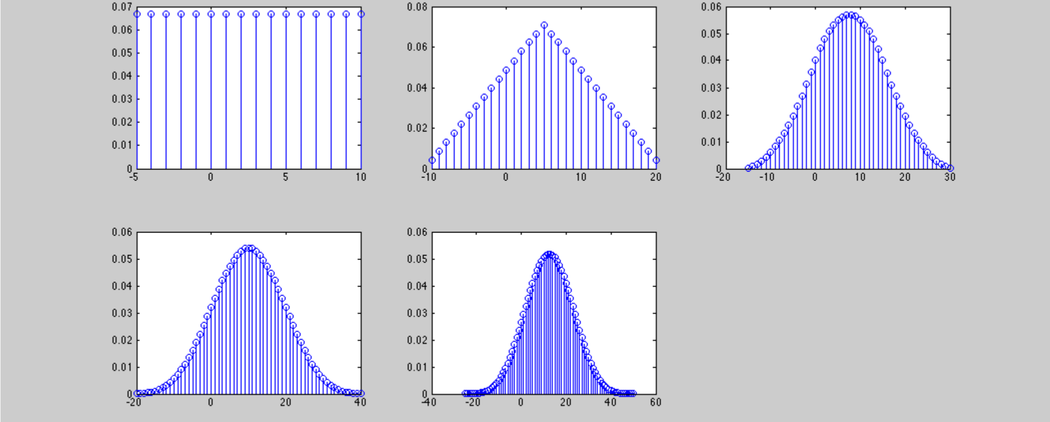
$\underline{X_1 + \cdots + X_4}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

PMF:

X_1 $\quad X_1 + X_2$ $\quad X_1 + X_2 + X_3$



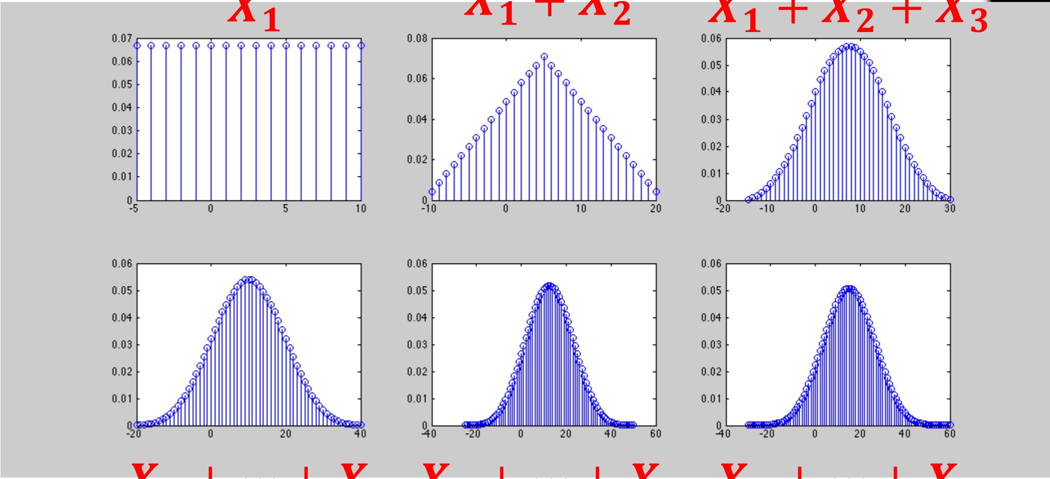
$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad X_1 + \cdots + X_5$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和

PMF:

X_1 $\quad$ $X_1 + X_2$ $\quad$ $X_1 + X_2 + X_3$



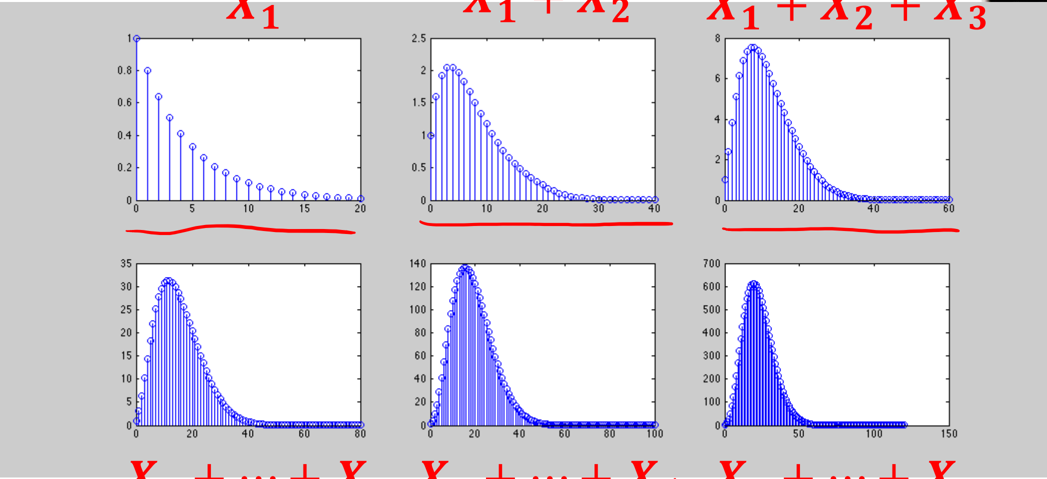
$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad$ $X_1 + \cdots + X_5$ $\quad$ $X_1 + \cdots + X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Geometric 隨機變數和

PMF:

X_1 $\qquad X_1 + X_2$ $\qquad X_1 + X_2 + X_3$



$X_1 + \cdots + X_4$ $\qquad X_1 + \cdots + X_5$ $\qquad X_1 + \cdots + X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央極限定理 (Central Limit Theorem)

- 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為 $I.I.D.$，

  則當 n 趨近於無窮大時：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n}, \sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n}\right)$$

$$\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \cdots. + \mu_{X_n} = n\mu_{X_1}$$

$$\sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \cdots + \sigma^2_{X_n} = n\sigma^2_{X_1}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央極限定理 (CLT) 的應用

- 當要處理多個獨立的隨機變數的和時，我們可以 CLT 將其機率分佈近似為常態分佈後計算機率
- 另若某機率分佈等同於多個獨立隨機變數的和，此機率分佈便可以用常態分佈近似之，再計算機率

例：$X \sim BIN(100, 0.3)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\{X_i\}\ I.I.D.,\ X_i \sim Berinoulli(0.3)$

中央極限定理 (CLT) 的應用

- Ex: 天團五五六六有百萬粉絲。每位粉絲各自獨立，但有 0.2 的機率會買天團發片的 CD。若是天團發精選輯，請問天團精選輯發售超過 200,800 張之機率為何？

$$X \sim BIN(1000000, 0.2) \Rightarrow P(X > 200800) = \sum_{x=200801}^{10^6} \binom{1000000}{x} 0.2^x 0.8^{10^6 - x}$$

$$\binom{1000000}{200801} = \frac{1000000!}{200801!\,799199!}$$

N(0,1)

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \sim N(0,1)$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000000},\ X_i \sim Bernoulli(0.2) \Rightarrow \mu_{X_1} = 0.2, \sigma_{X_1}^2 = 0.16$$

$$By\ CLT \Rightarrow X \sim N\left(\underbrace{1000000 \cdot \mu_{X_1}}_{\mu_X}, \underbrace{1000000 \cdot \sigma_{X_1}^2}_{\sigma_X^2}\right) \Rightarrow \mu_X = 200000, \sigma_X = 400$$

$$P(X > 200800) = P\left(\frac{X - 200000}{400} > \frac{200800 - 200000}{400}\right) = P(Z > 2) = Q(2) \cong 0.023$$

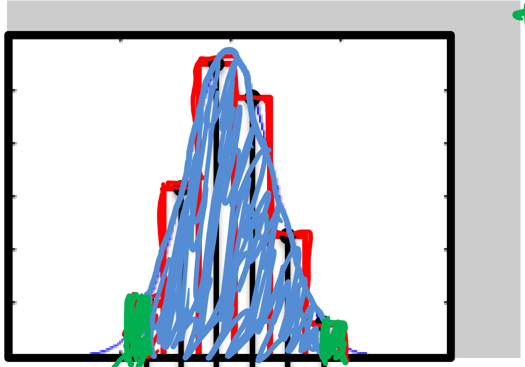
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 *X* 是離散的隨機變數和…

- 我們可以算的更精確！ $X = X_1 + \cdots + X_n$
- De Moivre – Laplace Formula:

$$\boxed{P(k_1 \le X \le k_2)} \approx P\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \le \frac{X - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \le \frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)$$



$$= \boxed{p_X(k_1) + p_X(k_1+1) + \cdots + p_X(k_2)}$$

$$= \boxed{1 \cdot p_X(k_1)} + 1 \cdot p_X(k_1+1) + \cdots + 1 \cdot p_X(k_2)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X 是離散的隨機變數和…

- Ex:萱萱為 5566 忠實粉絲，幫粉友去 20 家店買 CD。每家店限購一張，缺貨機率 0.5。請問萱萱買到 7 張之機率為？

$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow p_X(7) = \binom{20}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^{13} = \boxed{0.0739}$

用中央極限定理估算：

$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20},$

$\{X_i\}\ I.I.D., X_i \sim Bernoulli(0.5), \mu_{X_1} = 0.5, \sigma_{X_1}^2 = 0.25$

$\Rightarrow X \sim N(20 \cdot 0.5, 20 \cdot 0.25) = N(10, 5)$

$\Rightarrow P_X(7) = P(7 \le X \le 7) = \Phi\left(\frac{7.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{6.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) = \boxed{0.0732}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週回顧

- 隨機變數的和的機率分佈？
- 為何要學MGF？
- 多個隨機變數之和如何找機率分佈？
- 中央極限定理(萬佛朝宗)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University