第六周　常见随机变量的期望与方差和应用实例

6.1 二项分布与泊松分布的期望与方差

二项分布　$X \sim b(n,p)$，　$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} x_k P(X=x_k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k} =\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k} =np\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}p^{j}q^{n-1-j}$$

$$=np\cdot(p+q)^{n-1}=np$$

****

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} x_k{}^2 p(x_k)=\sum_{k=0}^{n} k^2\cdot C_n^k p^k q^{n-k} =\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k]\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} +\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k q^{n-k}+np$$

$$=n(n-1)p^2\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2\cdot\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{j!(n-2-j)!}p^{j}q^{n-2-j}+np$$

$$=n(n-1)p^2\cdot(p+q)^{n-2}+np=n(n-1)p^2+np=n^2p^2+np(1-p)$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=n^2p^2+np(1-p)-(np)^2=np(1-p)$$

****

二项分布随机变量 $X\sim b(n,p)$ 期望和方差的另一种理解

考虑 n 个独立的 $0-1$ 随机变量 $X_k\sim b(1,p)$， $k=1,\cdots,n$，

满足 $P(X_k=1)=p$， $P(X_k=0)=1-p$， 则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim b(n,p)$；

对所有 $k=1,\cdots,n$， $E(X_k)=1\times p+0\times(1-p)=p$， $E(X_k^2)=1\times p+0\times(1-p)=p$

$Var(X_k)=E(X_k{}^2)-E(X_k)^2=p-p^2=p(1-p)$，

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

$$Var(X)=Var(X_1+X_2+\cdots+X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n)=np(1-p)$$

****

泊松分布　$X\sim P(\lambda)$，$\lambda>0$，　$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$，　$k=0,1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\overset{j=k-1}{=}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda。$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)+k]e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+E(X)$$

****

用二项分布极限的观点理解泊松分布的期望和方差

泊松分布　$X \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$，　$P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$，　$k = 0,1,2,\cdots$。

$Y_n \sim b(n,p)$，$np \to \lambda$，则 $Y_n \to X$

则 $E(Y_n) = np$，　$Var(Y_n) = np(1-p)$，　$n \to \infty$，$p \to 0$，$1-p \to 1$。

$E(X) = \lambda$，　$Var(X) = \lambda$。

****