機 率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo 臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 7-1: 期望值 II
- 7-2: 隨機變數之函數
- 7-3: 條件機率分佈與失憶性

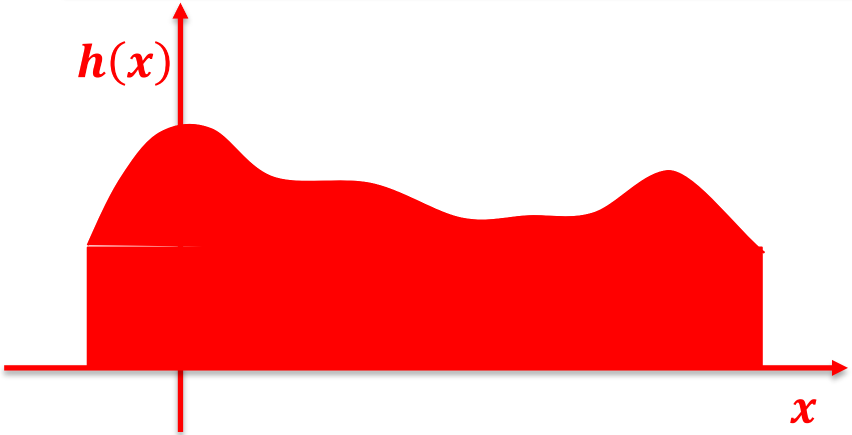
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-1: 期望值 II (EXPECTATION)

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

積分的近似概念



面積$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$

面積 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$

$\Rightarrow$ 面積 $= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)

- 對連續的隨機變數 X 而言，想求期望值，我們用類似離散隨機變數的方式出發
- 將 X 的值以 Δ 為單位無條件捨去來近似
  結果：離散隨機變數 Y （當$\Delta \to 0$ 時，$X \approx Y$)
- 根據第五週：
  - $p_Y(n\Delta) = P(n\Delta \leq X < n\Delta + \Delta) \approx f_X(n\Delta) \cdot \Delta$

$$X \in [0, \Delta) \to Y = 0\Delta$$
$$X \in [1\Delta, 2\Delta) \to Y = 1\Delta$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boxed{X \in [n\Delta, (n+1)\Delta)} \to Y = n\Delta$$

- $E[X] = \lim_{\Delta \to 0} E[Y] = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot P_Y(n\Delta)$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot f_X(n\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數之期望值

- 對於任一連續隨機變數 X 而言，其任意函數 $g(X)$ 亦是一隨機變數，亦有期望值
- $g(X)$ 期望值定義為

$$E[g(X)] =$$

※ 離散隨機變數：$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質

- $E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]$

  $=$

- Ex: $E\left[6\,X + 8\,X^2\right] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質

- $\boldsymbol{E}[\alpha]$

  $=$

- Ex: $\boldsymbol{E}[6] = \mathbf{6}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見的隨機變數函數期望值

- $\boldsymbol{X}$的 n^{th} moment：

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^{n}] =$$

  – Ex: $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^2]$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{2^{nd}}$ $\boldsymbol{moment}$

  – Ex: $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^5]$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{5^{th} moment}$

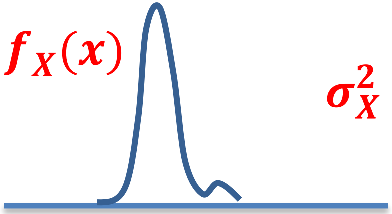
- $\boldsymbol{X}$的變異數 (variance)：

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu_X})^2] =$$

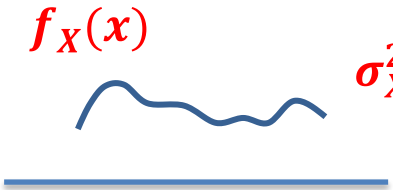
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

變異數 (Variance)

- Variance 通常符號表示為 $\boldsymbol{\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]}$
- 變異數隱含關於隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 多「亂」的資訊



σ_X^2 小 $(\because x \approx \mu_X)$



σ_X^2 大 $(\because X$ 不見得接近 $\mu_X)$

- 變異數的開根號便是標準差 (standard deviation)： $\boldsymbol{\sigma_X}$

$$\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{Variance}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法

- $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$

$$= E\left[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E\left[X^2\right] - \underbrace{2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2}_{-2\mu_X^2+\mu_X^2} = \boxed{E\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

$$\Rightarrow E\left[X^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數

- $X \sim Exponential(\lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim Erlang\,(n, \lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{n}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{n}{\lambda^2}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數

- $X \sim Gaussian\ (\mu, \sigma)$：
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- $X \sim UNIF\ (a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值推導範例

分部積分：

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

- $X \sim Exponential(\lambda)$： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 連續隨機變數的期望值定義？
- 連續隨機變數的函數的期望值？
- 「湊」字訣！
- 常見連續機率分佈之期望值、變異數？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-2: 隨機變數之函數

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數

- 隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 的任意函數 $\boldsymbol{g(X)}$ 也是一個隨機變數
- 通常被稱為 Derived Random Variable

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如何求 $g(X)$ 機率分佈？

- 若 X 為離散：
  - 直接推 $g(X)$ 的PMF
- 若 X 為連續：
  - 先推 $g(X)$ 的 CDF，再微分得到PDF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- Ex：某宅宅超愛戰LOL。每次一戰就連續戰 X 場不可收拾，已知 $X \sim GEO(0.2)$。某宅宅內心仍有一點清明，其良心亦會因戰過度而內疚，依戰的次數多寡，內疚程度 Y 分別為 $\mathbf{1, 2, 3}$ 不同等級:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$$

問 $Y = g(X)$ 的機率分佈？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- $Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$
- $X \sim GEO(0.2) \Rightarrow p_X(x) = (1-0.2)^{x-1} \cdot 0.2$
- $p_Y(1) =$
- $p_Y(2) =$
- $p_Y(3) = P(Y=3) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數

- 當 X 為離散隨機變數時，$Y=g(X)$ 亦為離散隨機變數
- $Y=g(X)$ 之 PMF 為

$$p_{g(X)}(y)=\sum_{\substack{\text{會讓}\\ g(x)=y\\ \text{的所有 } x}} p_X(x)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數

- $Y = g(X)$ 且 X 為連續隨機變數時先算 $g(X)$ 的CDF：

$$F_{g(X)}(y) = P[g(X) \leq y]$$

- 若 $g(X)$ 可微分，再對 y 微分得到PDF：

$$f_{g(X)}(y) = \frac{d}{dy} F_{g(X)}(y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $Y = 3X + 2$ ，請問 Y 的 PDF 跟 $f_X(x)$ 之關係為何？

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$=$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$
$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- 若 $Y = aX + b$ 且 $a > 0$，則

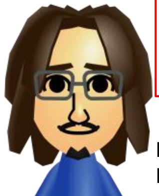
$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

what if $a < 0$?

$F_Y(y) = P(aX + b \le y) =$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) =$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $X \sim Exponential(\lambda)$，且 $Y = 2X$，

  請問 Y 之機率分佈為何？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX^2 + b)$

- Ex：若 $Y = 2X^2 + 1$，且已知 $X \sim UNIF(\text{-}1, 7)$。 請問 Y 的 PDF 為何？

$$F_Y(y) = P(Y = 2X^2 + 1 \le y)$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX^2 + b)$

$y \le 3: F_Y(y) =$

$y > 3: F_Y(y) =$

$\Rightarrow y \le 3: f_Y(y) =$

$y > 3: f_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 隨機變數的函數又稱？
- 若隨機變數為離散，可直接推 $\boldsymbol{g(X)}$ 之 PMF
- 若隨機變數為連續，先推 $\boldsymbol{g(X)}$ 之 CDF 再微分得到 PDF 比較好算

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-3: 條件機率分佈與失憶性

第七週

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

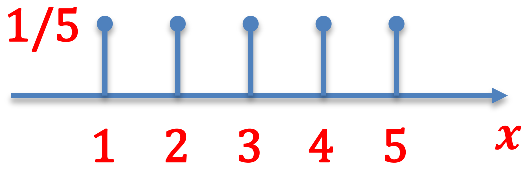
把條件機率用在機率分佈上

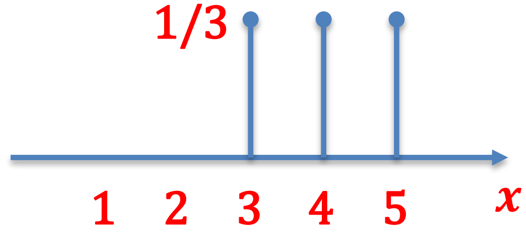
- Ex：為了更了解宅宅的心，店員妹亦開始戰 LOL。已知店員妹戰LOL場數 $X \sim UNIF\ (1, 5)$。若已知店員妹戰了兩場仍戰意甚濃、繼續戰。請問在此情況下，店員妹今日戰LOL場數 X 之機率分佈為何？

B：已戰兩場仍想戰

$$p_{X|B}(x) = P(X = x|B) = \frac{P(X = x, B)}{P(B)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X = x)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}, & x \in B: x = 3, 4, 5 \\ 0, & x \notin B, x = otherwise \end{cases}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一離散隨機變數，其 PMF 為 $\boldsymbol{p_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PMF: $\boldsymbol{p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: & \dfrac{p_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: & 0. \end{cases}}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x)} = \boxed{\boldsymbol{\sum_{u \leq x} p_{X|B}(u)}} = \boldsymbol{\sum_{u \leq x, u \in B} \frac{p_X(u)}{P(B)}}$

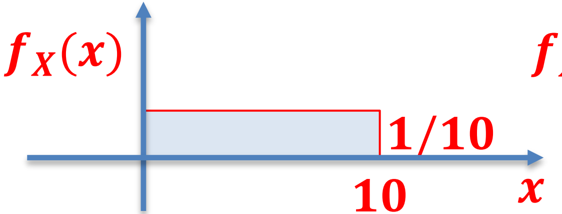
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

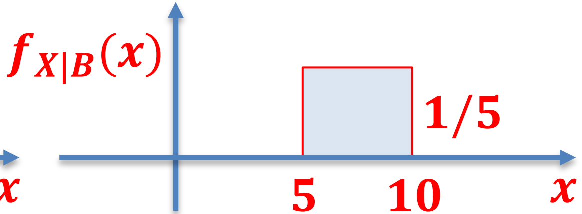
把條件機率用在機率分佈上

- Ex：店員妹等公車上班。通常等公車的時間 $\boldsymbol{X}$，從零到十分鐘間可能性均等。若店員妹已等了五分鐘車還沒來。請問在此情況下，等車時間 $\boldsymbol{X}$ 之機率分佈為何？

$X \sim UNIF(0, 10)$

$\boxed{B: X > 5} \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{2}$





$$f_{X|B}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta] | B)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(X \in [x, x+\Delta], X \in B)}{P(X \in B)}$$

$$= \begin{cases} x \in B: \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta \cdot P(B)} = \boxed{\dfrac{f_X(x)}{P(B)}}, \\ x \notin B: \quad 0. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一連續隨機變數，其 PDF 為 $\boldsymbol{f_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PDF: $\boldsymbol{f_{X|B}(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}: \\ \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}: \end{cases}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x)} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知 B 已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[X|B]=\begin{cases}\sum_{x=-\infty}^{\infty} x\cdot p_{X|B}(x) & (\text{離散})\\ \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{X|B}(x)dx & (\text{連續})\end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[g(X)\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p_{X|B}(x) & \text{(離散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_{X|B}(x)dx & \text{(連續)} \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

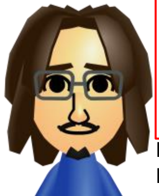
$$Var(X|B) = E\left[\left(X_{|B} - \mu_{X|B}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu_{X|B}\right)^2 \middle| B\right]$$

$$= E\left[X^2 \middle| B\right] - \left(\mu_{X|B}\right)^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

- 宅宅與店員妹相約出門。宅宅出門前在戰LOL，場數 ***X*～*GEO*** **(0.2)** 。店員妹等了兩場後，宅宅還在玩。店員妹甚怒，怒催宅宅。宅宅曰「快好了、快好了」。問宅宅剩餘場數 ***X'*** 之機率分佈為何？ $\boldsymbol{B: X > 2, X' = X_{|B} - 2}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

- 店員妹與宅宅相約出門。店員妹出門前化妝時間為 X（小時），$X\sim Exponential(1)$。經過一小時後，仍未完成。宅宅甚怒，怒催店員妹。店員妹曰「快好了、快好了」。問店員妹剩餘化妝時間 X' 機率分佈為何？ $B: X>1, X'=X_{|B}-1$

$$F_{X'}(x)=P(X'\le x)=P\left(X_{|B}-1\le x\right)=P(X_{|B}\le x+1)$$

$$F_{X|B}(x+1)=\int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du=? \quad F_{X'}(x)=? \quad f_{X'}(x)=?$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)

- Geometric 跟 Exponential 機率分佈皆有失憶性的性質
- 不管事情已經進行多久，對於事情之後的進行一點影響都沒有！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧

- 某個事件發生後，隨機變數的行為跟其機率分佈也會改變：條件機率分佈
- 條件隨機變數也是一個健全、可愛的隨機變數！
- 身為一個健全、可愛的隨機變數，人家一般隨機變數該有的條件隨機變數也應該都有！PMF (PDF)、CDF、期望值、Mean、Variance 等
- 隨機變數中會失憶的是？