第二周　　条件概率和独立性

2.2 条件概率有关条件概率的三个重要计算公式

上一讲中我们引入了条件概率，有了这一概念，我们对事件的表达就有了更丰富的工具。下面我们就希望能够有效地计算条件概率，得到我们想要的概率结果。对于条件概率而言呢，主要有三个计算公式，分别是乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。这三个计算公式的应用贯穿概率论的始终，是非常基本和重要的计算工具。下面我们看第一个乘法公式。

****

乘法公式

（1）设 A,B 是两个事件，$P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$

证明：$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B)P(A\mid B)$

（2）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})。$$

证明：　数学归纳法，　设 $P(A_1\cdots A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot\cdots P(A_k\mid A_1\cdots A_{k-1})$，

$$P(A_1\cdots A_{k+1})=P(A_1A_2\cdots A_k)\cdot P(A_{k+1}\mid A_1A_2\cdots A_k)$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot\cdots P(A_{k+1}\mid A_1A_2\cdots A_k).$$

直接验证：

$$P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$$

$$=P(A_1A_2\cdots A_n).$$

****

例 2.2.1　设箱子内有 a 个白球，b 个黑球，在其中不放回地连取 3 次，问前 2 次取到白球而第 3 次取到黑球的概率。

解：　设事件 A_i 表示第 i 次抽到白球，

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\mid A_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_3\mid A_1A_2\right)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b-2}$$

思考：3 个均为白球，或抽到 2 黑 1 白，发生的概率分别是多少？

****

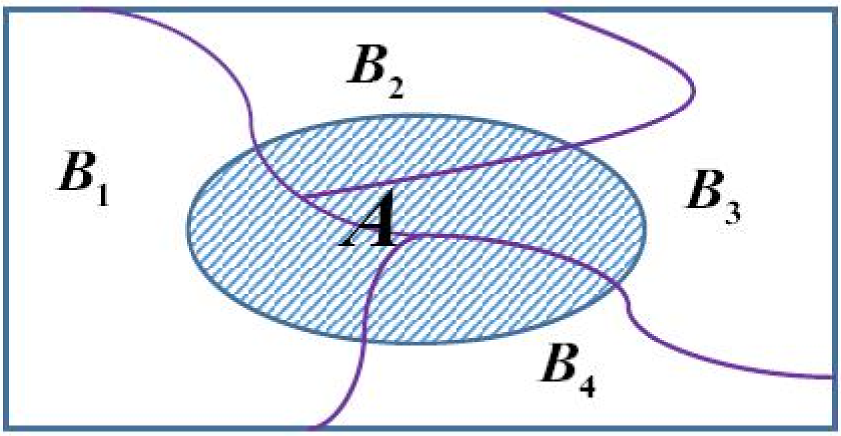
2. 全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割，即 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容，

且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$。如果 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

则对任一事件 A，有 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$。

我们先用图示进一步明确对样本空间进行“分割”的含义。



$$P\left(A\right)=P\left(AB_1\right)+P\left(AB_2\right)+P\left(AB_3\right)+P\left(AB_4\right)$$

$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$

****

2. 全概率公式

设$B_1,B_2,\cdots,B_n$是样本空间Ω的一个分割，即$B_1,B_2,\cdots,B_n$互不相容，

且$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$。如果$P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

则对任一事件A，有$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$。

证明：$$P(A)=P(A\Omega)=P(A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n))$$

$$=P(AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n)$$

$$=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)(A|B_n)$$

****

例 2.2.2 设甲箱中有a个白球，b个黑球，$a>0,b>0$；乙箱中有c个白球，d个黑球。自甲箱中任取一球放入乙箱，然后再从乙箱中任取一球。求最后由乙箱取出的是白球的概率。

解： 设事件A表示最后由乙箱取出的是白球，事件W表示从甲箱取出白球，

$$P(A)=P(W)P(A|W)+P(\overline{W})P(A|\overline{W})$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}$$

$$=\frac{ac+bc+1}{(a+b)(c+d+1)}.$$

****

例 2.2.3 买彩票，设n张彩票中有 1 张奖券，人们排成一队购买彩票，求第k个

人购到奖券的概率。

对这一问题，通过一个直观的分析，即可得到结果。我们假想一种买彩票的过程，假设每个人买完彩票后都不离开，也不查看结果，而是 n 张彩票都卖完后，n 个人同时打开。这一假想过程，并不影响每个人的中奖可能。而 n 个人一起同时打开彩票时，奖券落在每个位置的机会均等，所以每个人的中奖概率都是相同的，均为 1/n。这样我们就得到了答案。但是现在我们不仅仅满足于得到得数，而是希望通过事件表达，运用标准的概率计算工具得到对这一问题的分析和理解，而这种分析和理解往往是更深刻的，其方法是更有可能推广而适用于更多问题的。

解 1：首部分析法 设 $A_k(n)$ 为事件“n个人买彩票，第k个人中奖”，则

$$P\left(A_k(n)\right)=P\left(A_1(n)\right)P\left(A_k(n)\mid A_1(n)\right)+P\left(\overline{A_1(n)}\right)P\left(A_k(n)\mid\overline{A_1(n)}\right)$$

$$=0+\frac{n-1}{n}P\left(A_{k-1}(n-1)\right)$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}P\left(A_{k-2}(n-2)\right)$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}P\left(A_1\left(n-(k-1)\right)\right)$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\cdot\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}.$$

****

例 2.2.3 买彩票，设n张彩票中有 1 张奖券，人们排成一队购买彩票，求第k个人购到奖券的概率。

解 2：设事件A_i表示“第i个人买到彩票”，则

$$P\left(A_k\right)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k\right)$$

$$=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\mid\overline{A_1}\right)\cdots P\left(\overline{A_{k-1}}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-2}}\right)P\left(A_k\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}\right)$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}.$$

思考：n张彩票中有m张奖券，第k个人买到奖券的概率是多少？

****

3. 贝叶斯（Bayes）公式

设$B_1,B_2,\cdots,B_n$是样本空间Ω的一个分割，即$B_1,B_2,\cdots,B_n$互不相容，且$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$。

如果$P(A)>0$，$P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

则$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}.$$

证明：$$P(B_i\mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)(A\mid B_n)}$$

****

例 2.2.4 某考生回答一道有 4 个选项的选择题，设会答该题的概率是p，并且会答时一定能答对，若不会答时则在 4 个答案中任选 1 个。求该考生回答正确时他确实会答的概率。

解：设事件A表示“答对”，B表示“会答”，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

$$=\frac{p\cdot 1}{p\cdot 1+(1-p)\cdot\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4p}{1+3p}.$$

****

例 2.2.5 一地区某疾病的发病率是 0.0004。现有一种化验方法，对真正患病的人，其化验结果 99%呈阳性，对未患病者，化验结果 99.9%呈阴性。求下列两事件的发生概率：

1. 检查结果呈阳性，是否真的患病？

2. 检查结果呈阴性，是否就可以放心地认为自己没有病？

解：设事件 A 表示“化验呈阳性”，B 表示“患病”，则

检查结果呈阳性，但实际上没有患病（虚惊一场的概率）

$$P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}=\frac{0.9996\times0.001}{0.0004\times0.99+0.9996\times0.001}=0.716$$

检查结果呈阴性，但事实上是患了病的概率（患病但没有查出来的概率）

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B)P(\overline{A}\mid B)}{P(B)P(\overline{A}\mid B)+P(\overline{B})P(\overline{A}\mid\overline{B})}=\frac{0.0004\times0.01}{0.0004\times0.01+0.9996\times0.999}=4\times10^{-6}.$$

****

正确地使用三个公式，要把握好乘法公式和贝叶斯公式中包含的时间因素。乘法公式按照时间的顺序过程展开，A1 首先发生，然后依次是 A2，A3 到 An。贝叶斯公式是逆概率公式，它将结果为条件的概率转化为以原因为条件的概率计算。而全概率公式是分情况讨论，而且必须考虑到所有可能，不能有遗漏，所以要求对样本空间进行分割。

****