第五周 随机变量函数的分布及随机变量的数字特征

5.1 随机变量函数的分布

同学们好！随机变量的函数仍然是随机变量，本周我们先学习随机变量函数的分布，然后我们学习期望、方差等随机变量的数字特征。

这一讲我们介绍一下随机变量函数的分布的基本计算方法，从而使我们能够掌控的随机变量范围有进一步的扩充。一般而言，随机变量经过初等函数的作用，仍然是一个随机变量。如果我们掌握了随机变量函数的概率分布有效的计算方法，那么我们就可以从初始分布出发，比较方便地得到新的随机变量的分布规律，而不用每个新的随机变量的分布都从重头计算，为概率计算带来便利。

$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$X \sim N(0,1)$，则 $X^2 \sim ?$

$X \sim Exp(2)$，则 $e^{-2X} \sim ?$

更一般地，已知随机变量 X 的分布，求 $Y=g(X)$ 的分布

****

离散随机变量函数的分布

$$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix} \overset{Y=g(X)}{\Rightarrow} Y\sim\begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_n) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

例 5.1.1 已知随机变量 $X\sim\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$，求 $Y=X^2+X$ 的分布。

解：$X\sim\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \overset{Y=g(X)}{\Rightarrow} Y\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$

$$Y\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

****

连续型随机变量函数的分布

$Y=g(X) \quad \Rightarrow \quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$

例 5.1.2. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布。

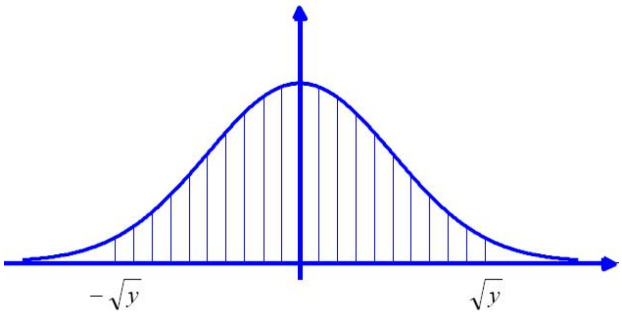
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le y\right)=P(X\le \sigma y+\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\sigma y+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

做变量代换 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$， $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$， 即 $Y\sim N(0,1)$。

****

例 5.1.3 设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的分布



解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$，

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=0$

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=2\left[\Phi(\sqrt{y})-\Phi(0)\right]=2\left[\Phi(\sqrt{y})-\frac{1}{2}\right]=2\Phi(\sqrt{y})-1$

当 $y\ge 0$ 时， $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=\dfrac{d\left(2\Phi(\sqrt{y})-1\right)}{dy}=2\varphi(\sqrt{y})\dfrac{d\sqrt{y}}{dy}=\varphi(\sqrt{y})\, y^{\frac{-1}{2}}$

所以 $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\varphi(\sqrt{y})\,y^{\frac{-1}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

注：当 $X\sim N(0,1)$ 时，X^2 称为一个自由度的 χ^2 分布，χ^2 分布是统计学中一类有重要应用的分布。

****

例 5.1.4 设 $X \sim Exp(2)$，求 $Y = e^{-2X}$ 的分布

解：$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(e^{-2X} \le y\right)$，

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；　当 $y \ge 1$ 时，$F_Y(y) = 1$，

当 $0 \le y < 1$ 时，

$$F_Y(y) = P\left(e^{-2X} \le y\right) = P(-2X \le \ln y) = P\left(X \ge -\frac{1}{2}\ln y\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\ln y\right)} = y$$

所以，随机变量 e^{-2X} 服从 $(0,1)$ 区间的均匀分布。

****