第二周　　条件概率和独立性

2.1 条件概率

学们好！本周我们学习条件概率、条件概率的计算方法以及独立性概念。

在实际问题中，对于随机事件 A，除了关心它本身的概率，有时还需要知道在某些附加条件下该事件发生的概率，这些附加条件通常以“某个事件已经发生”的形式给出。这就是已知某事件发生后，事件 A 的条件概率。

****

例 2.1.1　考虑恰有两个小孩的全部家庭，并且假定生男、生女是等可能的。若随机地选一个家庭，发现该家庭有一个女孩，问这一家另一个小孩是男孩的概率是多少？

解：　样本空间：{（男，男），（男，女），（女，男），（女，女）}，

设事件 A 为“其中一个是女孩”，事件 B 为“其中一个是男孩”

$A=\{(\text{男，女}),(\text{女，男}),(\text{女，女})\}$

$B=\{(\text{男，男}),(\text{男，女}),(\text{女，男})\}$

$AB=\{(\text{男，女}),(\text{女，男})\}$

某家庭有一个女孩条件下，另一个小孩是男孩的概率为 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2/4}{3/4}=\dfrac{2}{3}$

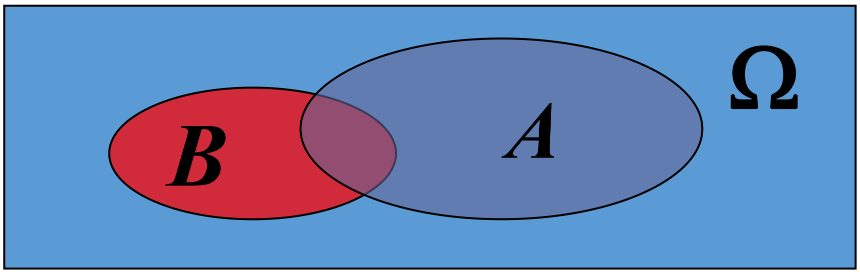
****

条件概率的定义

设 A、B 是两个事件，且 $P(B)>0$，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为“在事件 B 发生条件下，事件 A 发生的条件概率”，简称为条件概率.



****

例 2.1.2　某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 60%，30%和 10%。各车间的次品率分别是 2%，5%，6%。试用事件的语言表达如下概率

（1）各车间的次品率？

（2）若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率？

解：　设产品是甲、乙、丙车间所生产分别为事件 A_1, A_2, A_3 ，产品是次品为事件 B，

（1）　$P(B \mid A_1) = 0.02$ ，$P(B \mid A_2) = 0.05$，$P(B \mid A_3) = 0.06$

（2）　$P(A_1 \mid B)$

若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率，可表示为以 B 为条件，A1 的条件概率表达式。这一概率的值就不是显然的了，要计算这一概率，需要进一步的计算工具。在学习条件概率计算方法之前，对例 2.1.1 我们还想做些引申。

****

对于例 2.1.1，有些同学直觉中的解答可能是 1/2,因为生男生女等可能，所以无论一个孩子是男是女，另一个孩子是男孩的概率都应该是 1/2。实际上 1/2 是另一个不同问题的正确解答。

****

例 2.1.3 考虑恰有两个小孩的全部家庭，并且假定生男、生女是等可能的。如果从这些家庭中随机地选择一个孩子，并发现她为女孩，问在她家里另一个孩子是男孩的概率是多少？

解：　样本空间：{ 男 g，男 b，女 g，女 b}，

设事件 A 为“这个孩子是女孩”，事件 B 为“这个孩子有一个兄弟”

A={ 女 g，女 b }， B={男 b，女 b }，

$AB=${ 女 b }.

所求概率为 $P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{1/4}{2/4}=\frac{1}{2}$

这绝不是一个矫揉造作的例子，而是一个非常值得体会的例子，它说明正确理解概率统计学中“我们的抽样对象到底是什么”的重要性。这个例子也被著名概率学者钟开莱先生在他的《初等概率论》一书所采用。我们的分析也是沿着他书中的思路给出的。下一讲我们学习条件概率有关的几个重要计算公式。

****