第二周　　条件概率和独立性

2.4 应用实例

应用实例一. 研究生招生是否有性别歧视?

1973 年,共有 8442 男生，4321 女生申请加州大学 Berkeley 分校的研究生院。最终男生录取比例大约 44%，女生录取比例大约 35%。

Science， Vol.187，398-404，7 February 1975，
Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkeley
P. J. Bickel, E. A. Hammel, J. W. O'Connell

加州大学 Berkeley 分校 6 个最大专业的研究生入学资料

	男（1198/2691）		女（557/1835）	
专业	申请人数	录取百分比	申请人数	录取百分比
A	825	62	108	82
B	560	63	25	68
C	325	37	593	34
D	417	33	375	35
E	191	28	393	24
F	373	6	341	7

观察数据

1. A、B 两个专业容易考取。51.5%的男生申请，女生申请率只有 7.25%，
2. 其他四个专业较难考取，90%以上的女生申请这四个专业。

简单的看入学率是不合理的，简单的看各系的录取率同样不全面。更合理的考察应该是加权入学率，即综合考虑到各系的规模和录取率。

专业	A	B	C	D	E	F
申请人数	933	585	918	792	584	714
申请比例	0.21	0.13	0.20	0.18	0.13	0.16
男生录取率	62%	63%	37%	33%	28%	6%
女生录取率	82%	68%	34%	35%	24%	7%

男生的加权平均入学率:

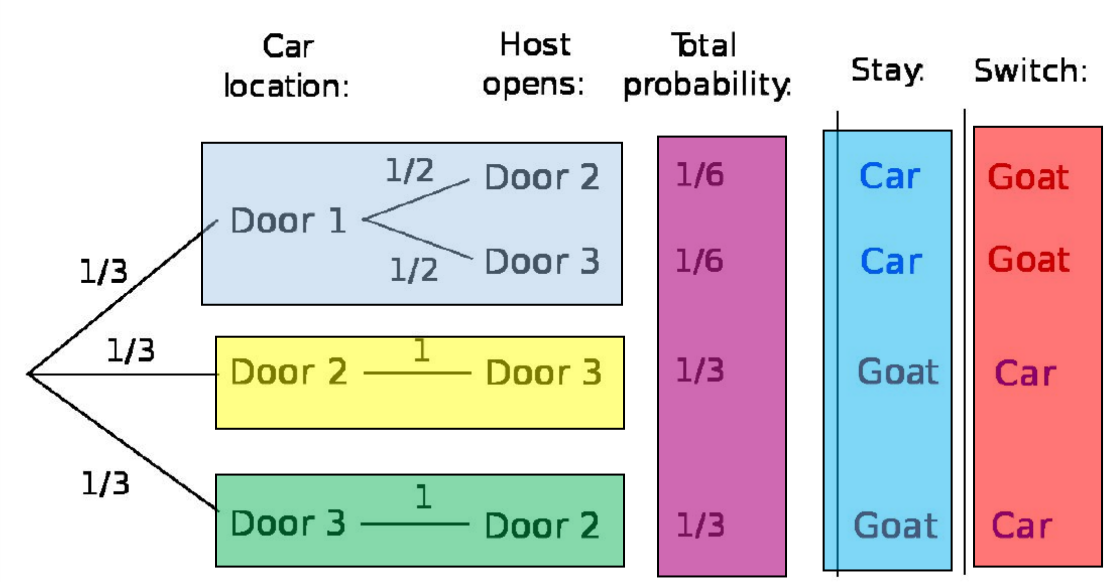
$$0.62\times0.21+0.63\times0.13+0.37\times0.20+0.33\times0.18+0.28\times0.13+0.06\times0.16\approx0.39$$

女生的加权平均入学率:

$$0.82\times0.21+0.68\times0.13+0.34\times0.20+0.35\times0.18+0.24\times0.13+0.07\times0.16\approx0.43$$

****

树形分叉图



Tree showing the probability of every possible outcome if the player initially picks door 1

应用实例二. Monty Hall 问题，要不要换门儿？

一个电视游戏节目，主持人在现场准备三扇门，分别编号为 1，2，3，并且事先随机地在两扇门后各放一只羊，另一扇门后放汽车。节目开始后，主持人让参与互动的 1 名观众任选一门，然后在剩下的两扇门中打开一个有羊的，问此时尚未打开的两扇门中有汽车的概率分别是多少？

利用贝叶斯公式求解：

令 A_1, A_2, A_3 分别表示事件“汽车在 1，2，3 号门后”。

假设第一次选择了 1 号门，B 表示打开的是 2 号门。

要计算 $P(A_1 \mid B)$，$P(A_3 \mid B)$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(B \mid A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B \mid A_2) = 0, \quad P(B \mid A_3) = 1,$$

根据全概率公式可得

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) = \frac{1}{2},$$

所以 $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$，$P(A_3 \mid B) = \dfrac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)} = \dfrac{2}{3}$。