Linear Algebra homework2.3

---

1. 分别写出有这些消元步骤的 3 乘 3 矩阵:
   (a)E_{21}: 从第 2 行减去第 1 行的 5 倍.
   (b)E_{32}: 从第 3 行减去第 2 行的-7 倍.
   (c)P: 交换第 1 行和第 2 行，然后交换第 2 行和第 3 行

2. 将问题 1 中得到的 E_{21} 及 E_{32} 应用到 $\boldsymbol{b} = (1,0,0)$, 得到 $E_{32}E_{21}\boldsymbol{b} = \_$. 对 $\boldsymbol{b}$ 先左乘 E_{32}, 再左乘 E_{21}，得到 $E_{21}E_{32}\boldsymbol{b} = \_$. 当 E_{32} 先左乘时，第 _ 行对第 _ 行没有影响.

5. 假设 $a_{33} = 7$ 以及第三个轴元为 5. 如果改变 a_{33} 为 11，第三个轴元为 _. 如果改变 $a_{33} = 7$ 为 _，则没有第三个轴元.

7. 假设从第 3 行减去第 1 行的 7 倍得到矩阵 E.
   (a) 要反向该步骤，得到原矩阵，你应该将矩阵 E 的 _ 的 7 倍 _ 行.
   (b) 能使步骤相反的可逆矩阵 E^{-1} 是什么?$(E^{-1}E = I)$
   (c) 如果首先使用 E^{-1}(然后是 E)，证明 $EE^{-1} = I$.

8. $M = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ 的行列式是 $detM = ad\text{-}bc$. 用第 2 行减去第 1 行的 ℓ 倍，得到一个新的 M*. 证明对于任意 ℓ,detM*=detM. 当 $\ell = c/a$ 时，轴元的乘积等于行列式：$(a)(d - \ell b) = ad - bc$

9. (a) E_{21} 表示的是用第二行减去第一行，P_{23} 表示的将第二行与第三行交换, 先执行 E_{21} 再执行 P_{23}. 同时执行这两个步骤的矩阵 $M = P_{23}E_{21}$ 是什么?, 求出矩阵 M.
   (b) P_{23} 表示的是将第二行与第三行交换，E_{31} 表示的是用第三行减去第一行. 先执行 P_{23} 再执行 E_{31}. 同时执行这两个步骤的矩阵 $M = E_{31}P_{23}$ 是什么？为啥 (a) 与 (b) 中的 M 是相同的然而一个是 E_{21}，另一个是 E_{31}？

12. 求这些矩阵相乘的结果.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

13. 解释以下事实. 如果矩阵 B 的第三列全为 0,EB 的第三列全为 0(对于任何 E). 如果 B 的第三行全为 0，EB 的第三行可能不全为 0.

15. 写出一个满足 $a_{ij} = 2i - 3j$ 的 3 乘 3 矩阵. 此矩阵满足 $a_{32} = 0$, 使用 E_{32} 乘以该矩阵使得第二行的第一列和第三行的第一列变为 0，原来的 a_{32} 现在变成了多少？写出 E_{32}？

17. 抛物线 $y = a+bx+cx^2$ 经过点 (x,y)=(1,4),(2,8),(3,14). 找到关于未知量 (a，b，c) 的矩阵方程并求解.

18. 求出 EF，FE

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

   同时计算 $E^2 = EE$ 和 $F^3 = FFF$. 可以猜测 F^{100} 为多少?

20. (a) 假设 B 的每列元素都相同。那么 EB 的每列元素也是相同的，因为每个列都是 E 乘以 _.
(b) 假设 B 的每行都是 [1 2 4]. 举例说明 EB 的每行不一定都是 [1 2 4]. 正确的这些行是 _

21. 如果 E 表示将第 1 行加到第 2 行，F 表示将第 2 行加到第 1 行，EF 是否等于 FE?

22. A 和 $\boldsymbol{x}$ 的元素分别是 a_{ij},x_j. 所以 A$\boldsymbol{x}$ 的第一个分量为 $\sum a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$. 如果 E_{21} 表示的是用第二行减去第一行得到的矩阵，写出下列式子的表达式：
(a) A$\boldsymbol{x}$ 的第三个分量.
(b) $E_{21}A$ 的第二行第一列.
(c) $E_{21}(E_{21}A)$ 的第二行第一列.
(d) $E_{21}A\boldsymbol{x}$ 的第一个分量.

25. 对 3×4 的增广矩阵 $[A \quad \boldsymbol{b}]$ 消元。你怎么知道这个方程没有解？更改最后一个数字 6，使得可以找到解.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

26. 方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 和 $Ax^* = \boldsymbol{b}^*$ 具有相同的矩阵 A。在消元时，您应该使用什么增广矩阵来同时求解这两个方程？通过使用 2×4 矩阵求解这两个方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

27. 通过对这个增广矩阵中的数字 a，b，c 取不同的值，使得：(a) 没有解 (b) 有无穷多解.

$$[A \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix}$$

a、b、c 或 d 中的哪几个对方程的解没有影响?

28. 如果 AB=I 和 BC=I，则使用结合律证明 A=C.