Linear Algebra homework2.4

本次作业参见第 77-82 页。

1 A is 3 by 5, B is 5 by 3, C is 5 by 1, and D is 3 by 1. All *entries* are 1. Which of these matrix operations are allowed, and what are the results?

$$BA \quad AB \quad ABD \quad DC \quad A(B+C).$$

2 What rows or columns or matrices do you multiply to find

(a) the second column of AB?

(b) the first row of AB?

(c) the entry in row 3, column 5 of AB?

(d) the entry in row 1, column 1 of CDE?

3 Add AB to AC and compare with $A(B+C)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 In problem 3, multiply A times BC. Then multiply AB times C.

5 Compute A^2 and A^3. Make a prediction for A^5 and A^n.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6 Show that $(A+B)^2$ is different from $A^2+2AB+B^2$, when

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Write down the correct rule for $(A+B)(A+B) = A^2 + \underline{\quad\quad} + B^2$.

9 Row 1 of A is added to row 2. This gives EA below. Then column 1 of EA is added to column 2 to produce $(EA)F$:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

and $(EA)F = (EA) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+c & a+c+b+d \end{bmatrix}.$

(a) Do those steps in the opposite order. First add column 1 of A to column 2 by AF, then add row 1 of AF to row 2 by $E(AF)$.

(b) Compare with $(EA)F$. What law is obeyed by matrix multiplication?

10 Row 1 of A is again added to row 2 to produce EA. Then F adds row 2 of EA to row 1. The result is $F(EA)$:

$$F(EA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}.$$

(a) Do those steps in the opposite order: first add row 2 to row 1 by FA, then add row 1 of FA to row 2.

(b) What law is or is not obeyed by matrix multiplication?

11 This fact still amazes me. If you do a row operation on A and then a column operation, the result is the same as if you did the column operation first. (Try it.) Why is this true?

13 Suppose $AB = BA$ and $AC = CA$ for these two

particular matrices B and C:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ commutes with}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove that $a = d$ and $b = c = 0$. Then A is a multiple of I. The only matrices that commute with B and C and all other 2 by 2 matrices are $A =$ multiple of I.

15 True or false:

(a) If A^2 is defined then A is necessarily square.

(b) If AB and BA are defined then A and B are square.

(c) If AB and BA are defined then AB and BA are square.

(d) If $AB = B$ then $A = I$.

17 For $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, compute these answers and nothing more:

(a) column 2 of AB

(b) row 2 of AB

(c) row 2 of $AA = A^2$

(d) row 2 of $AAA = A^3$.

18 Write down the 3 by 3 matrix A whose entries are

(a) $a_{ij} =$ minimum of i and j

(b) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

(c) $a_{ij} = i/j$.

19 What words would you use to describe each of these classes of matrices? Give a 3 by 3 example in each class. Which matrix belongs to all four classes?

(a) $a_{ij} = 0$ if $i \neq j$

(b) $a_{ij} = 0$ if $i < j$

(c) $a_{ij} = a_{ji}$

(d) $a_{ij} = a_{1j}$.

21 Compute A^2, A^3, A^4 and also $A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, A^4\mathbf{v}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

23 (a) Find a nonzero matrix A for which $A^2 = 0$.

(b) Find a matrix that has $A^2 \neq 0$ but $A^3 = 0$.

25 Multiply A times I using columns of A (3 by 3) times rows of I.

27 Show that the product of upper trangular matrices is always upper triangular:

$$Ab = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Proof using dot product (Row times column) (Row 2 of A)$\cdot$(column 1 of B)=0. Which other dot products give zeros?

Proof using full matrices (Column times row) Draw x's and 0's in (column 2 of A) times (row 2 of B). Also show (column 3 of A) times (row 3 of B).

29 Which matrices E_{21} and E_{31} produce zeros in the (2,1) and (3,1) positions of $E_{21}A$ and $E_{31}A$?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Find the single matrix $E = E_{31}E_{21}$ that produces both zeros at once. Multiply EA.

30 Block multiplication says that column 1 is eliminated by

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}/a & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{c} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & D - \mathbf{c}\boldsymbol{b}/a \end{bmatrix}.$$

In problem 29, what numbers go into $\mathbf{c}$ and D and what is $D - \mathbf{cb}/a$.

31 With $i^2 = -1$, the product of $(A + iB)$ and $(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y})$ is $A\boldsymbol{x} + iB\boldsymbol{x} + iA\boldsymbol{y} - B\boldsymbol{y}$. Use blocks to separate the real part without i from the imaginary part that multiplies i:

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{y} \\ ? \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{real part} \\ \text{imaginary part} \end{matrix}$$

32 (*Very important*) Suppose you solve $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ for three special right sides $\boldsymbol{b}$:

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } A\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

If the three solutions $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ are the columns of a matrix X, what is A times X?

33 If the solutions in Question 32 are $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1)$ and $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 1)$ and $\boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1)$, solve $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ when $\boldsymbol{b} = (3, 5, 8)$. Challenge problem: What is A?

中文翻译参考

1 A 是 3×5，B 是 5×3，C 是 5×1，D 是 3×1，所有的元素都是 1。下列矩阵运算哪些是允许的？结果是什么？

$$BA \quad AB \quad ABD \quad DC \quad A(B+C)$$

2 什么行或列或矩阵相乘，会得到：

(a) AB 的第 2 列?

(b) AB 的第 1 行?

(c) AB 的第 3 行第 5 列的元素?

(d) CDE 的第 1 行第 1 列的元素?

3 用 AB 加 AC，和 $A(B+C)$ 做比较。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ 和 } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 在第 3 题中，计算 A 乘 BC，然后计算 AB 乘 C。

5 计算 A^2 和 A^3。预测 A^5 和 A^n 等于多少？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6 证明当

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$(A+B)^2$ 不等于 $A^2 + 2AB + B^2$。写出正确的规则：$(A+B)(A+B) = A^2 + \_\_\_\_ + B^2$。

9 A 的第 1 行加到第 2 行，得到 EA 如下。然后 EA 的第 1 列加到第 2 列得到 $(EA)F$:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } (EA)F = (EA) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+c & a+c+b+d \end{bmatrix}.$$

(a) 以相反的顺序执行上述步骤：第一步通过 AF 将 A 的第 1 列加到第 2 列，然后通过 $E(AF)$ 把 AF 的第 1 行加到第 2 行。

(b) 比较 $(EA)F$ 和 $E(AF)$，矩阵乘法满足什么运算法则？

10 A 的第 1 行加到第 2 行得到 EA，然后 F 把 EA 的第 2 行加到第 1 行得到 $F(EA)$：

$$F(EA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}.$$

(a) 以相反的顺序执行上述步骤：第一步通过 FA 将 A 的第 2 行加到第 1 行，然后把 FA 的第 1 行加到第 2 行。

(b) 矩阵乘法遵守或不遵守哪个法则？

11 这个事实依然让我惊奇：如果你先对 A 执行一个行运算，然后再执行一个列运算，得到的结果与先做列运算是相同的。（试试看。）为什么这是对的？

13 假设 $AB = BA$ 且 $AC = CA$，其中两个特定的矩阵 B 和 C：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ commutes with}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

证明 $a = d$ 且 $b = c = 0$。然后 A 是 I 的倍数。唯一可以与 B 和 C 及其他 2×2 矩阵进行交换相乘的矩阵 A 是：$A = I$ 的倍数。

15 判断题：

(a) 如果 A^2 有定义，则 A 必须是方阵。

(b) 如果 AB 和 BA 有定义，则 A 和 B 是方阵。

(c) 如果 AB 和 BA 有定义，则 AB 和 BA 是方阵。

(d) 如果 $AB = B$，则 $A = I$.

17 对于 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，计算下列问题：

(a) AB 的第 2 列。

(b) AB 的第 2 行。

(c) $AA = A^2$ 的第 2 行。

(d) $AAA = A^3$ 的第 2 行。.

18 写出 3×3 矩阵 A，它的元素满足：

(a) $a_{ij} = i$ 和 j 当中的较小者。

(b) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

(c) $a_{ij} = i/j$.

19 你会如何描述下列矩阵的分类？对于下面每个类，给出一个 3×3 矩阵的例子。哪个矩阵属于全部四类？

(a) $a_{ij} = 0$ 若 $i \neq j$

(b) $a_{ij} = 0$ 若 $i < j$

(c) $a_{ij} = a_{ji}$

(d) $a_{ij} = a_{1j}$.

21 计算 A^2, A^3, A^4 和 $A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, A^4\mathbf{v}$。其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

23 (a) 求一个非零矩阵 A 使得 $A^2 = 0$。

(b) 求一个矩阵满足 $A^2 \neq 0$，但 $A^3 = 0$。

25 使用 $A(3 \times 3)$ 的列乘 I 的行，计算 A 乘 I。

27 证明上三角矩阵的乘积永远是上三角矩阵：

$$Ab = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

利用点积 (行乘列) 证明。如 (A 的第 2 行)$\cdot$(B 的第 1 列)$= 0$。还有哪些点积也等于零？

利用整个矩阵 (列乘行) 证明。画出 (A 的第 2 列) 乘 (B 的第 2 行) 的 x 和 0。然后 (A 的第 3 列) 乘 (B 的第 3 行) 的 x 和 0。

29 求矩阵 E_{21} 和 E_{31}，分别使 $E_{21}A$ 和 $E_{31}A$ 在 $(2,1)$ 和 $(3,1)$ 位置上等于零。其中：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

求一个矩阵 $E = E_{31}E_{21}$，同时使 $(2,1)$ 和 $(3,1)$ 位置上等于零，求 EA。

30 分块乘法说明：通过

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}/a & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{c} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & D - \mathbf{c}\boldsymbol{b}/a \end{bmatrix}.$$

消除第 1 列。在第 29 题中，$\mathbf{c}$，D，和 $D - \mathbf{c}\boldsymbol{b}/a$ 分别是什么？

31 令 $i^2=-1$，则 $(A+iB)$ 和 $(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})$ 的乘积是 $A\boldsymbol{x}+iB\boldsymbol{x}+iA\boldsymbol{y}-B\boldsymbol{y}$。使用分块把没有 i 的实部和有 i 的虚部分开：

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y} \\ ? \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{实部} \\ \text{虚部} \end{matrix}$$

32 (非常重要) 假设你针对右侧三个不同的 $\boldsymbol{b}$ 求解方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$：

$$A\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ 和 } A\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ 和 } A\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

如果三个解 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 是一个矩阵 X 的三个列，求 A 乘 X？

33 如果第 32 题的三个解分别是 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1),\boldsymbol{x}_2=(0,1,1)$ 和 $\boldsymbol{x}_3=(0,0,1)$。当 $\boldsymbol{b}=(3,5,8)$ 时，求解 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$。问：$A$ 是什么？