概率论与数理统计

教师：杜亚星

第二十讲
二维连续型随机变量 边缘概率密度

（二） 边缘概率密度

二维随机变量(X,Y)分布函数$F(x, y)$, 它们的边缘分布函数分别为：

$$F_X(x,+\infty) = F(x,+\infty)$$

$$F_Y(+\infty,y) = F(+\infty,y)$$

对于连续型随机变量(X,Y)概率密度为$f(x,y)$, X,Y的边缘概率密度为：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

事实上,

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = P(X \le x, Y < +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right]du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

同理:

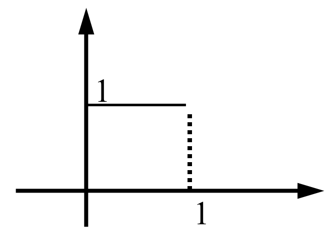
$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = P(X < +\infty, Y \le y)$$

$$= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx\right]dv = \int_{-\infty}^{x} f_Y(v)dv$$

例1： 设(X,Y)的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

分别求X与Y的边际概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.

解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$



当$x\le 0$或$x\ge 1$， $f(x,y)=0, f_X(x)=0$

当$0<x<1, f_X(x)=\int_0^1 4xydy=2x$

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

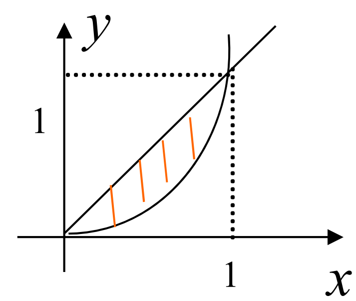
同理得，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^1 4xydx=2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例2: 设(X,Y)在区域$x^2 \le y \le x$内密度函数为常数，

其余地方为零，求边际概率密度$f_X(x), f_Y(y)$,



解：画出图形，并设 $f(x) = \begin{cases} k, x^2 < y < x \\ 0, 其他 \end{cases}$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} kdy \Rightarrow k = 6$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_{x^2}^{x} 6dy = 6(x - x^2), 0 \le y \le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y} - y), 0 \le y \le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

THE END