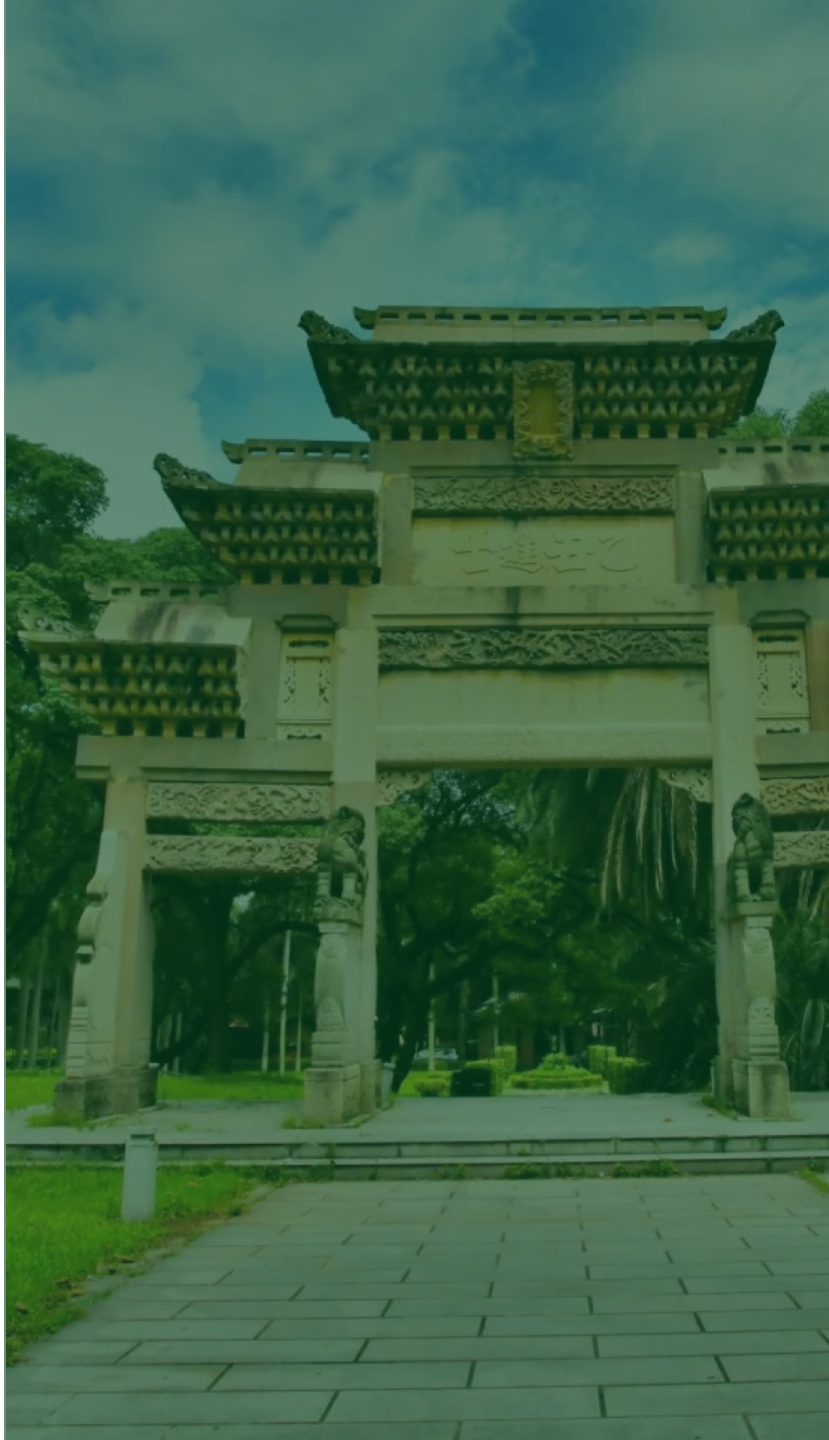
第三十四讲
矩、协方差矩阵、多元正态分布的性质



主题概述：

1、矩及其概念

2、多元随机变量的数字特征

（数学期望与协方差矩阵）

3、多元正态分布的概率密度

4、多元正态分布的四条性质

定义1:

X为一个随机变量,

若$E(X^k)$，$k=1,2,\ldots$存在，则称之为X的***k*阶（原点）矩**

若$E\{[X-E(X)]^k\}$,k=1,2,⋯存在，则称之为X的***k*阶中心矩**.

之前所提到的随机变量的期望和方差就是其1阶原点矩和2阶中心矩.

定义2：

X与Y为两个随机变量，

若$E\{X^kY^l\}, k,l=1,2,\cdots$存在，则称之为$X$与$Y$的**$k+l$阶混合（原点）矩**；

若$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}, k,l=1,2,\cdots$存在，

则称之为X与Y的**$k+l$阶混合中心矩**.

之前所提到的随机变量的**协方差就是其1+1阶混合中心矩.**

定义3：

设n维随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geq 1$，若其每一分量的数学期望都存在，则称

$$E(\tilde{X})=(E(X_1),E(X_2),\cdots E(X_n))^T,n\geq 1,$$

为**n元随机变量$\tilde{X}$的数学期望（向量）**.

每个元素就是其相应的数学期望。

定义4: 设n维随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T, n\geq 1$，若

$Cov(X_i,X_j), i,j=1,2,\dots n$ 都存在，则称

$$C=Cov(\tilde{X})=\begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & D(X_2) & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & D(X_n) \end{bmatrix}$$

为**n维随机变量$\tilde{X}$的协方差矩阵**.（是对称非负定矩阵）

即：$C=(c_{ij})_{n\times n}, c_{ij}=Cov(X_i,X_j), i,j=1,2,\cdots,n$

n维正态随机变量的联合概率密度的矩阵表示

引入列向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\tilde{\mu}=(E(X_1),E(X_2),\cdots,E(X_n))^T$，

协方差矩阵为$C=(c_{ij})_{n\times n},c_{ij}=Cov(X_i,X_j),i,j=1,2,\cdots n.$

则n元正态随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geq 1$，其联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\tilde{\mu})^T C^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})\right\}.$$

n维正态随机变量的四条重要性质

1.n维正态随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geq 1$，其任意子向量$(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})^T(1\leq k\leq n)$均服从$k$维正态分布.

特别地，其中的每一个分量$X_i,i=1,2,\cdots n$，都是一维正态变量.

反之，若$X_i,i=1,2,\ldots n$，均为一维正态变量，且相互独立，则$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geq 1$，是$n$维正态随机变量.

如：$\tilde{X}=(X_1,X_2,X_3)^T$为三维正态随机变量，则

$(X_1,X_2)^T,(X_1,X_3)^T,(X_2,X_3)^T$均为二维正态变量.

n维正态随机变量的四条重要性质

2.n维随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geq 1$，服从$n$维正态分布

$\Leftrightarrow X_1,X_2,\cdots,X_n$的任意线性组合$l_0+l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$

均服从一维正态分布，其$l_1,l_2,\cdots,l_n$不全为0.(充要条件)

如：$\tilde{X}=(X_1,X_2,X_3)^T$为三维正态随机变量，则

$$3X_1-X_2,2X_1+4X_3+1,X_2-3X_1-X_3-2$$

均为一维正态变量.

n维正态随机变量的四条重要性质

3.n维正态随机变量$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,n\geqslant 1$，若$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k,k\geq 1$，均为$X_i,i=1,2,\cdots n$，的线性函数，则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)^T$也服从$k$元正态分布.

这一性质称为**正态变量的线性变换不变性.**

如：$\tilde{X}=(X_1,X_2,X_3)^T$为三维正态随机变量，则

$$(3X_1-X_2,2X_1+4X_3+1,X_2-3X_1-X_3-2,X_2)^T$$

服从四维正态分布.

n维正态随机变量的四条重要性质

4.设$\tilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$，$n\geq 1$，服从$n$维正态分布，则

$X_1,X_2\cdots,X_n$相互独立

$\Leftrightarrow X_1,X_2\cdots,X_n$两两不相关

$\Leftrightarrow \tilde{X}$的协方差矩阵为对角矩阵

$$C=\begin{pmatrix} D(X_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(X_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D(X_n) \end{pmatrix}$$

例1： 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(0,1;1,4;-\frac{1}{2})$，求：（1）$D(2X-Y)$；（2）$P(2X>Y)$；（3）(Z_1,Z_2)的分布，$Z_1=X+Y, Z_2=X-Y$.

解：由题意知$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-\frac{1}{2}\times 1\times 2=-1$$

故$D(2X-Y)=D(2X)+D(-Y)+2Cov(2X,-Y)$

$$=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)$$

$$=4\times 1+4-4\times(-1)=12.$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

（2）$(X,Y) \sim N(0,1;1,4;\frac{-1}{2})$，求：$P(2X>Y)$

想到$P(2X>Y)=\iint_{2x>y} f(x,y)dxdy$，——不可行！！

由于$P(2X>Y)=P(2X-Y>0)$，

根据多维正态的性质2，由于(X,Y)服从二维正态分布，故其分量的任意线性组合服从一维正态，即可得$2X-Y \sim N(-1,12)$.

$E(2X\text{-}Y)=2E(X)\text{-}E(Y)$

故$P(2X>Y)=P(2X-Y>0)$

$$=P(\frac{2X-Y-(-1)}{\sqrt{12}}>\frac{0-(-1)}{\sqrt{12}})=1-\Phi(\frac{1}{2\sqrt{3}}).$$

$$E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)$$

（3）$(X,Y)\sim N(0,1;1,4;\frac{-1}{2})$，求：$(Z_1,Z_2)$的分布$Z_1=X+Y$，$Z_2=X-Y$

根据多维正态的性质3，即正态变量的线性变换不变性，可知

(Z_1,Z_2) 也服从二元正态分布 $\sim N\left(E(Z_1),E(Z_2);D(Z_1),D(Z_2);\rho_{Z_1Z_2}\right)$

$E(Z_1)=E(X)+E(Y)=1;E(Z_2)=E(X)-E(Y)=-1;$

$D(Z_1)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=1+4+2\times(-1)=3,$

$D(Z_2)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=1+4-2\times(-1)=7;$

$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)}{\sqrt{3\times7}},$

$=\frac{1-4}{\sqrt{3\times7}}=-\sqrt{\frac{3}{7}};$ 则$(Z_1,Z_2)\sim N(1,-1;3,7;-\sqrt{\frac{3}{7}})$

例2： 设随机变量(X,Y)服从二元正态分布 $X\sim N(1,1), Y\sim N(2,4)$，且两分量独立，求：$(X,Y)$的分布及$Cov(2X-Y, X-2Y), E(XY)$.

解：根据多元正态的性质4，知两分量是不相关的，故

$(X,Y)\sim N(1,2;1,4;0)$.

从而$Cov(2X-Y, X-2Y)$

$= Cov(2X,X)+Cov(2X,-2Y)+Cov(-Y,X)+Cov(-Y,-2Y)$

$= 2D(X)+0+0+2D(Y)=2\times 1+2\times 4=10.$

再次利用分量的不相关性可知

$E(XY)=E(X)E(Y)=1\times 2=2.$

THE END