概率论与数理统计

教师：杜亚星

第二十六讲 $\max(X,Y)$和$\min(X,Y)$的分布

$M=max(X,Y)$和$N=min(X,Y)$的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为

$F_X(x)$和$F_Y(y)$，求M,N的分布函数$F_{max}(z)$和$F_{min}(z)$。

$M = max(X,Y)$的分布函数为：

$$F_{max}(z) = P(M \le z)$$
$$= P(X \le z, Y \le z)$$
$$\overset{独立}{=} P(X \le z)P(Y \le z)$$

$$\boxed{F_{max}(z) = F_X(z)F_Y(z)}$$

$N = min(X,Y)$的分布函数为：

$$F_{min}(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$
$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$
$$\overset{独立}{=} 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

$$\boxed{F_{min}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))}$$

n个相互独立的随机变量的情况

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为：$F_X(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$

$M = max(X_1, \ldots, X_n)$及$N = min(X_1, \ldots, X_n)$的分布函数为：

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\ldots F_{X_n}(z)$$
$$F_{max}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\ldots[1 - F_{X_n}(z)]$$

$$\xrightarrow[\text{独立同分布}]{X_1, \ldots, X_n}$$

共同的分布函数$F(z)$

$$F_{max}(z) = (F(z))^n$$
$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

$X_1, \ldots, X_n$是连续的独立同分布变量

$$f_{max}(z) = n[F(z)]^{n-1}f(z)$$
$$f_{min}(z) = n[1 - F(z)]^{n-1}f(z)$$

共同的密度函数 f(z)

例1: 已知X、Y的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-x}, x\ge 0\end{cases}, F_Y(y)=\begin{cases}0.5e^{y}, y<0\\ 1-0.5e^{-y}, y\ge 0\end{cases}$$

并设X与Y独立，求$Z=max(X,Y)$的分布函数。

解： $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)$

$$\overset{\text{独立}}{=}P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

当$z<0$时，$F_X(z)=0$，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=0$

当$z\ge 0$时，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=(1-e^{-z})(1-0.5e^{-z})$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ (1-e^{-z})(1-0.5e^{-z}), z\ge 0\end{cases}$$