



概率论与数理统计

教师：杜亚星





第二十七讲 随机变量的数学期望





分布函数能完整地描述随机变量的统计特性，
但实际应用中并不都需要知道分布函数，而只需知道
随机变量的某些特征。

例如：

判断棉花质量时，既看纤维的**平均长度**，
又要看**纤维长度与平均长度的偏离程度**，
平均长度越长，偏离程度越小，质量就越好；

■ 随机变量的数字特征：

- ◆ 数学期望
- ◆ 方差
- ◆ 协方差与相关系数
- ◆ 其它数字特征
- ◆ 多元正态分布的性质





例 1: 甲、乙两射手，他们的某次射击成绩分别为： 试比较：

哪位射手
的技术比
较好？

甲射手

击中环数	8	9	10
次数	10	80	10

乙射手

击中环数	8	9	10
次数	20	65	15

解： 甲的平均成绩为

$$\frac{8 \times 10 + 9 \times 80 + 10 \times 10}{100} = 8 \times \frac{10}{100} + 9 \times \frac{80}{100} + 10 \times \frac{10}{100} = 9;$$

乙的平均成绩为

$$\frac{8 \times 20 + 9 \times 65 + 10 \times 15}{100} = 8 \times \frac{20}{100} + 9 \times \frac{65}{100} + 10 \times \frac{15}{100} = 8.95.$$

记平均击中的环数为 \bar{x} , 则

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_k x_k n_k = \sum_k x_k \frac{n_k}{n} = \sum_k x_k f_k$$

Diagram annotations (in red):

- 环数 (Ring Score) points to x_k
- 总次数 (Total Number of Shots) points to n
- 击中次数 (Number of Hits) points to n_k
- 频率 (Frequency) points to f_k

若记射手击中的环数为 X , 在第4讲中, 曾提到过,
当 n 充分大时, 频率 f_k 的稳定值为概率 $p_k = P(X = x_k)$.

因此 \bar{x} 的稳定值为 $\sum_k x_k p_k$, 它反映了射手的平均水平.

定义: 设离散型随机变量 X 的分布律为: $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$

若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 的值为随机变量 X 的

数学期望, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

注: p_k 可以理解成为“加权平均”中 x_k 的权重.

数学期望简称期望, 又称均值 (*mean*).

定义: 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛 (即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望,
即

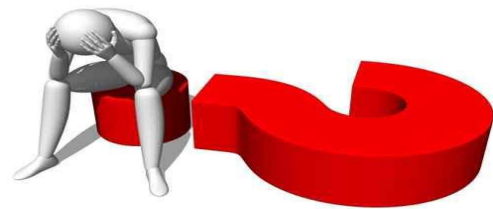
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

数学期望的本质 —— 加权平均
它是一个数不再是随机变量

“期望”名称的起源——分赌本问题

例2: 17世纪中叶, 有甲乙两赌徒, 赌技相同, 各出赌注50法郎. 约定无平局, 谁先赢3局, 则获全部赌注. 当甲赢2局、乙赢1局时, 中止了赌博. 问如何分赌本才算公平?

均分, 对甲不公平,
全部归甲, 对乙不公平!



按已赌局数和再赌下去的“期望”分：

因为最多再赌两局必分胜负，共三种情况：

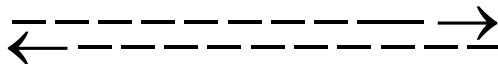
- ① 第三局甲赢； ($P=1/2$)
- ② 第三局乙赢，第四局甲赢； ($P=1/4$)
- ③ 第三局乙赢，第四局乙赢； ($P=1/4$)

由于赌技相同，所以甲获得 100 法郎的可能性为 $3/4$ ，乙获得 100 法郎的可能性为 $1/4$ 。



帕斯卡

balabalabalabala



费马

则根据以上分析：乙的所得 X 是一个可能取值为0或100的随机变量，其分布律为：

X	0	100
P	$3/4$	$1/4$



乙的“期望”所得是：

$$0 \times 3/4 + 100 \times 1/4 = 25.$$

所以甲分总赌本的 $3/4$ 、乙分总赌本的 $1/4$ 。

这种分法既考虑了已赌局数，又包含了再赌下去的“期望”，因此更为合理一些。

由上例可知,若随机变量 X 具有0-1分布,其分布律为:

$$P(X=0)=1-p, P(X=1)=p,$$

则 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$

即 0-1分布的期望即为它的参数 p .

例3: 设 $X \sim \pi(\lambda)$, $\lambda > 0$, 求 $E(X)$.

解: X 的分布律为:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots, \lambda > 0.$$

则 X 的数学期望为:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \lambda \end{aligned}$$

必然事件, 概率为1

即 泊松分布的期望即为它的参数 λ .

例4: 设 $Z \sim N(0,1)$, 求 $E(Z)$.

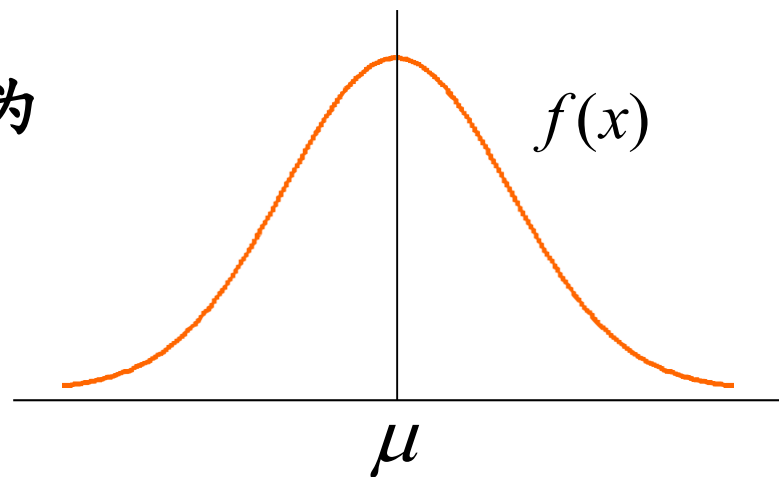
解: Z 的概率密度为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 是一个偶函数.

故 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = 0$ 是一个奇函数

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

则 $E(X) = \mu$.



另外，也可以得到：

- 二项分布 $B(n, p)$ 的期望为 np ;
- 参数为 p 的几何分布为 $1/p$;
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的期望为 $(a + b) / 2$.

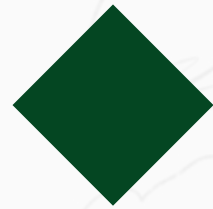
注意：不是所有的随机变量都有数学期望

例如：柯西 (Cauchy) 分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx$ 发散

它的数学期望不存在.



THE END