概率论与数理统计

教师：杜亚星

第三十一讲
方差的性质

方差的性质：

1. 设c是**常数**，则 $D(c)=0.$

2. 设X是随机变量，c是常数，则有 $D(cX)=c^2D(X).$

   特例：$D(-X)=D(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，则有

   $$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\cdot tail,$$

   其中，$tail=\ E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$

   特别，若X,Y**相互独立**，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

则 $$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

(特例：$D(X+c)=D(X)$.)

推广到任意有限个独立随机变量线性组合的情况

$$D(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2D(X_i)$$

其中 $X_i, i=1,2,\cdots,n,$ 相互独立.

4. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$ 且 $c=E(X)$.

证明：

$$1.\ D(c)=E\{[c-E(c)]^2\}=E\{[c-c]^2\}=0.$$

$$2.\ D(cX)=E[(cX)^2]-[E(cX)]^2$$

$$=E(c^2X^2)-[cE(X)]^2$$

$$=c^2E(X^2)-c^2[E(X)]^2$$

$$=c^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$$

$$=c^2D(X).$$

$$3.\ D(X+Y)=E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\}$$
$$=E\{[(X+Y)-(E(X)+E(Y))]^2\}=E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\}=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

当X,Y相互独立时,$X-E(X)$与$Y-E(Y)$相互独立

故 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0$

所以 $D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

例1： 设 $X \sim B(n, p)$, 求 $D(X)$.

解： 类似二项分布期望的求法,引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验发生;} \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

于是$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,服从同一$(0-1)$分布,参数均为p,

且 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 故 $D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$

即 $E(X) = np,\ D(X) = np(1-p).$

例2：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $D(X)$.

解：令$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则Z服从标准正态分布，$E(Z)=0$,

且Z的概率密度为：$\varphi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

那么 $D(Z)=E(Z^2)-0=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1$$

此时 $X=\mu+\sigma Z$, 故 $D(X)=D(\mu+\sigma Z)=D(\sigma Z)=\sigma^2 D(Z)=\sigma^2$.

即正态分布的两个参数μ, σ^2分别是该分布的数学期望和方差.

性质：n个独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布.

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i=1,2,\cdots n,$ 且相互独立, 则它们的线性组合：

$$\boxed{\begin{aligned}&c_0+c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n \\ &\qquad \sim N(\underbrace{c_0+c_1\mu_1+\cdots+c_n\mu_n}_{\text{期望}},\ \underbrace{c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\cdots+c_n^2\sigma_n^2}_{\text{方差}}),\end{aligned}}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是不全为0的常数.

如: $X \sim N(1,3),\ Y \sim N(2,4),$ 且X, Y相互独立,

$Z_1 = 2X - 3Y \ \sim ?$ $\qquad Z_1 \sim N(-4, 48)$

$Z_2 = 2X - 3Y + 4 \ \sim ?$ $\qquad Z_2 \sim N(0, 48)$

$$E(2X-3Y)=E(2X)+E(-3Y)=2E(X)-3E(Y)=2\times1-3\times2=-4$$

$$D(2X-3Y)=D(2X)+D(-3Y)=2^2D(X)+(-3)^2D(Y)=2^2\times3+(-3)^2\times4=48$$

例3: 设活塞的直径(以厘米计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 汽缸的直径, $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y相互独立. 现任取一只活塞和一只汽缸, 求活塞能装入汽缸的概率.

解: 按题意需求 $P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$

故有 $P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$

$$= \phi\left(\frac{0-(-0.10)}{0.05}\right) = \Phi(2) = 0.9772.$$

例4: 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$,

记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 称$X^*$为$X$的**标准化变量**.

证明：$E(X^*)=0,\ D(X^*)=1.$

证明:

$$E(X^*)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$$

$$D(X^*)=E\left({X^*}^2\right)-\left[E\left(X^*\right)\right]^2=E\left({X^*}^2\right)-0$$

$$=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=E\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]$$

$$=\frac{D(X)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

THE END