第二十八讲
随机变量函数的数学期望

◆ 例1:

设随机变量X的概率分布律为 $Y=X^2$，求Y的数学期望E(Y).

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.4	0.2	0.3

解：由题意可知Y的概率分布律为：

Y	0	1	4
P	0.4	0.3	0.3

那么Y的期望E(Y)=0×0.4+1×0.3+4×0.3=1.5.

事实上E(Y)=(-1)^2×0.1+0^2×0.4+1^2×0.2+2^2×0.3=1.5.

也就是说，对于随机变量X的函数有时可以根据X的分布以及函数表达式来直接得到其期望.

定理1：

设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$，X是离散型随机变量，它的分布律为：

$P(X = x_k) = p_k$， k=1,2,⋯,

若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，

则$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$；

定理1（续:连续型）：

设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$，

X是**连续型随机变量**，它的概率密度函数为$f(x)$，

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

注：以后无特殊说明时，均假设涉及的期望是存在的.

例2. 设风速V为连续型随机变量，且在区间[0,a](a>0)上服从均匀分布。又设飞机机翼受到的压力W是风速V的函数：w=kv^2(k>0),求E(W).

解:

$$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty} k\mathrm{v}^2 f_v(v)\,dv=\int_0^a k\mathrm{v}^2\frac{1}{a}\,dv=\frac{1}{3}ka^2$$

◆ **例3：** 一银行服务需要等待，设等待时间X（以分钟计）服从期望为10的指数分布.某人进了银行，且打算过会儿去办另一件事，于是先等待，如果超过15分钟还没有等到服务就离开，设他实际的等待时间为Y，求此人实际等待的平均时间$E(Y)$.

解：由题意知，$Y = min\{X, 15\}$，故取$g(x) = min\{x, 15\}$，
则$Y = g(X)$.利用随机变量函数的期望的定理1，得

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, 15\} f_X(x) dx$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-x/10}, x>0\\ 0, x\le 0.\end{cases}$$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x,15\} f_X(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} \min\{x,15\}\frac{1}{10}e^{-x/10}dx$$

$$=\int_{0}^{15} x\cdot\frac{1}{10}e^{-x/10}dx+\int_{15}^{+\infty} 15\cdot\frac{1}{10}e^{-x/10}dx$$

$=10-10e^{-3/2}\approx 7.768$（分钟）.

定理的重要意义在于我们求$E(Y)$时，不必算出未知Y的分布律或概率密度函数，而只要利用已知X的分布律或概率密度函数以及Y与X之间的关系就可以了.

(the Rule of the Lazy Statistician / 懒人定理)

该定理也可以推广到两个或两个以上随机变量的函数的情况.

定理2：

设Z是随机变量X，Y的函数：$Z=h(X,Y)$，

若**二维离散型随机变量**(X,Y)的分布律为：

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，　$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$\boxed{E(Z)=E[h(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}h\,(x_i,y_j)p_{ij}\,;}$$

定理2（续）：

设Z是随机变量X，Y的函数：$Z=h(X,Y)$，

若**二维连续型随机变量**(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则有

$$\boxed{E(Z)=E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy.}$$

特别地，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x,y)dxdy$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f(x,y)dxdy$$

例4： 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量$Z=sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$的数学期望.

解：$E(Z)=E\left[sin\frac{\pi(X+Y)}{2}\right]$

$$=sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15+sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25$$

$$+sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2+sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15+sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15$$

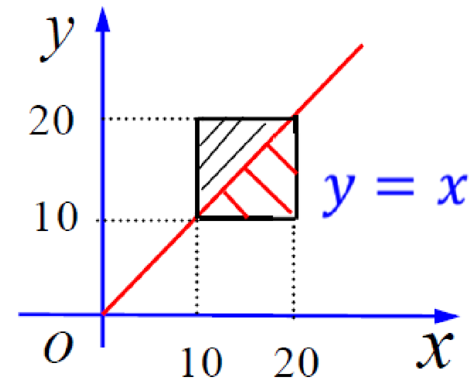
$$=0.25$$

例5：某商店经销某种商品，每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量，且都服从区间[10,20]上的均匀分布.商店每售出一单位商品可获利1000元；若需求量超过进货量，商店可从他处调剂供应，这时每单位商品可获利500元.试计算此商店经销该种商品每周所获的平均利润.

解：设Z表示此商店经销该种商品每周所获的利润，则

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, & 若 Y \le X; \\ 1000X + 500(Y - X) = 500(X + Y), & 若 Y > X. \end{cases}$$

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, & 若Y \le X; \\ 500(X+Y), & 若Y > X. \end{cases}$$



$$而 f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 20 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$故 E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{y \le x} 1000y \cdot f(x,y)dxdy + \iint_{y>x} 500(x+y) \cdot f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^{x} 1000y \times 1/100dy + \int_{10}^{20} dx \int_{x}^{20} 500(x+y) \times 1/100dy$$

≈ 14166.7（元）.

THE END