概率论与数理统计

教师：杜亚星

第二十一讲
二维连续型随机变量 条件概率密度

（三）条件概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,

(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$,

若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 且$f_Y(y)$连续,

则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

（三）条件概率密度

同理，若对于固定的x，$f_X(x)>0$，且$f_X(x)$连续，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例1： 设数X在区间$(0,1)$上随机取值，当观察到$X=x\left(0<x<1\right)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$。

解：X的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

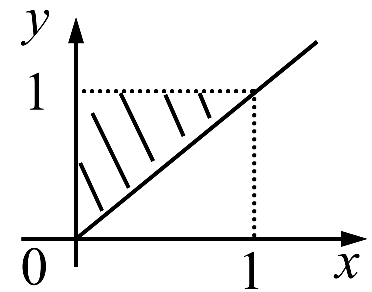
对任给$x(0<x<1)$，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

故$\left(X,Y\right)$的概率密度为：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

例1：设数X在区间(0,1)上随机取值，当观察到$X=x\left(0<x<1\right)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$。

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, 0<x<y<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

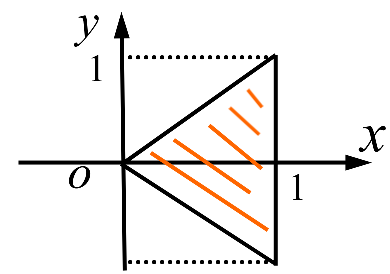


所以Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-ln(1-y), 0<y<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

例2: 设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x\mid y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

解：概率密度$f(x,y)$的非零区域如图所示。



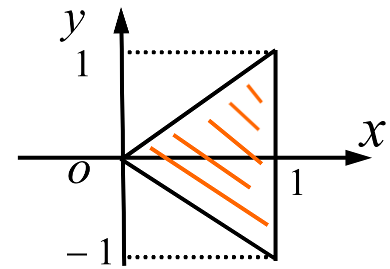
设 $$f(x,y)=\begin{cases}k, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}kdy=k\int_0^1 2xdx=k$$

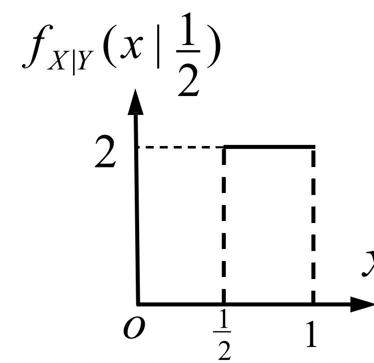
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例2： 设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x\mid y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

于是给定$y\ (-1<y<1)$，X的条件概率密度为：



$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

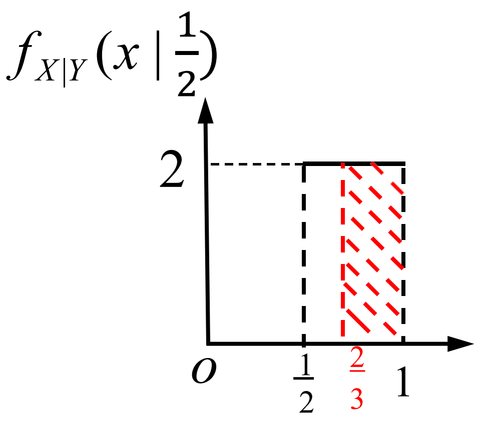


当$y=\dfrac{1}{2}$时，
$$f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{2})=\begin{cases}2, & \dfrac{1}{2}<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例2：设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x\mid y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

已得：

$$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}2, & \frac{1}{2}<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$P(X>\frac{2}{3}|Y=\frac{1}{2})=\int_{\frac{2}{3}}^{\infty}f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})dx$$

$$=\int_{\frac{2}{3}}^{1}2dx+\int_{1}^{\infty}0dx=\frac{2}{3}$$

例3： 设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了X分钟，再由乙完成，加起来共用Y分钟。若

$X \sim U(0,30)$，在$X=x$条件下，$Y \sim U(x,30)$。

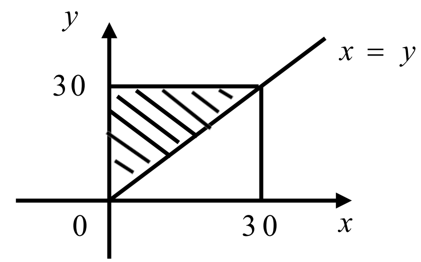
(1) 求(X, Y)的联合概率密度及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;

(2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

解: (1) 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & 其他\end{cases}$

当x为(0, 30)上一固定值时， $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30-x}, & x<y<30\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30(30-x)}, & 0<x<y<30\\ 0, & 其他\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y \frac{1}{30(30-x)}dx=\frac{1}{30}ln\frac{30}{(30-y)}, & 0<y<30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)ln\dfrac{30}{(30-y)}},0<x<y\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}\end{cases}$$

(2) 已得：当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)ln\dfrac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$P(X\le 10|Y=25)=\int_0^{10} f_{X|Y}(x|25)dx$$

$$=\int_0^{10}\frac{1}{(30-x)ln6}dx=\frac{ln30-ln20}{ln6}\approx 0.2263$$

二维离散型与连续型随机变量分布比较

二维离散型随机变量	二维连续型随机变量
(X,Y)联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$	(X,Y)联合概率密度 $f(x,y),\quad (x,y)\in D$
X的边缘分布律 $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},i=1,2,\ldots$	X的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$
$X=x_i$时Y的条件分布律 $P(Y=y\mid X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\ldots$	$X=x$时Y的条件概率密度 $f_{Y\mid X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad y\in D_x$

THE END