智能机器人技术
第12章-控制算法-轨迹生成

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io

中山大学智能工程学院
2024-Spring

本章内容

□ 定义

- **轨迹（Trajectory）**：
  以时间函数的形式对机器人位置进行的描述。
- 轨迹具体可视为**路径（Path）**和**时间标度（Time Scaling）**的组合$\theta(s(t))$，简写为$\theta(t)$。
- 路径：
  路径$\theta(s)$是将标量路径参数s(处于起始处为0，处于末端处为1)映射到机器人位形空间Θ中的一点，$\theta:[0,1]\to\Theta$。随着s从0变到1，机器人沿该路径移动。
- 时间标度：
  将几何路将参数s与时间参数t分开，当t从0变到T时， s从0变到1，即
  $s:[0,T]\to[0,1]$
- 对轨迹$\theta(t)$求导，沿轨迹的**速度**和**加速度**分别为：

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{ds}\dot{s},\qquad \ddot{\theta}=\frac{d\theta}{ds}\ddot{s}+\frac{d^2\theta}{ds^2}\dot{s}^2$$

为确保机器人的动力学有很好定义（可实现），$\theta(s)$和$s(t)$必须两阶可微。

直线路径

- 可以在关节空间或任务空间中定义从起始位形θ_{start}到终止位形θ_{end}的一条“直线”。

关节空间

- 从θ_{start}到θ_{end}的直线路径，简洁明了：对于每个关节i，由于通常采用$\theta_{i,min} \le \theta_i \le \theta_{i,max}$来描述关节的运动限制范围，可行关节位形在关节空间构成一个凸集Θ_{free}，其中任意两点之间的直线也位于其中。
- 直线路径可写为：

$$\theta(s) = \theta_{\text{start}} + s(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}), \qquad s \in [0, 1]$$

- 求导数：

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}, \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} = 0.$$

！！注意：显而易见，关节空间中的直线路径通常不会使末端执行器在任务空间中产生直线运动。

关节空间

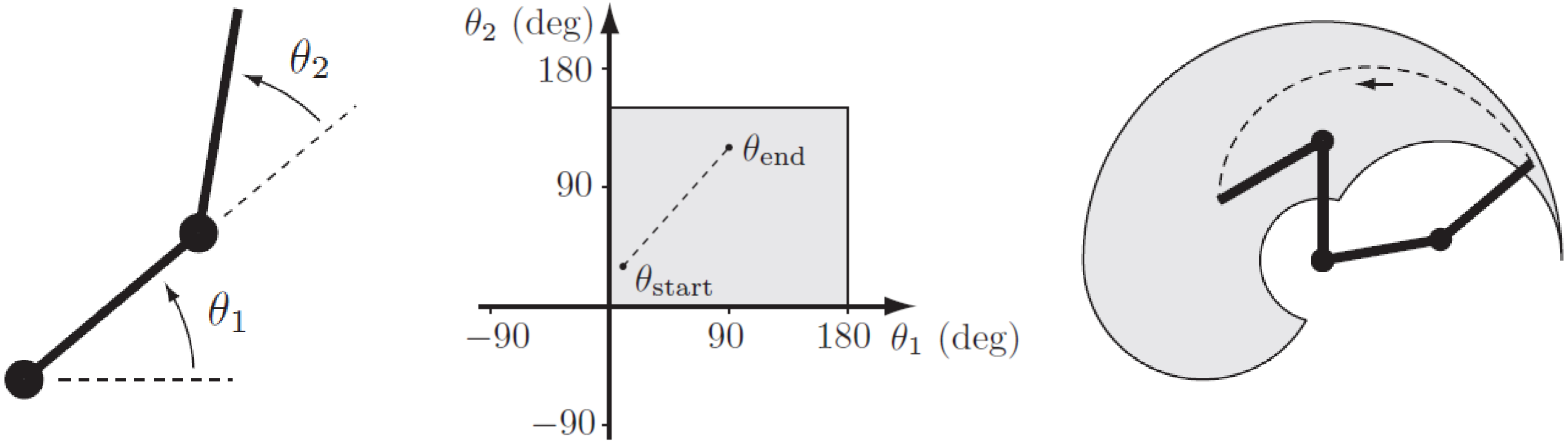
➢ 直线路径可写为：

$$\theta(s) = \theta_{\mathrm{start}} + s(\theta_{\mathrm{end}} - \theta_{\mathrm{start}}), \qquad s \in [0,1]$$

➢ 求导数：

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta_{\mathrm{end}} - \theta_{\mathrm{start}}, \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} = 0.$$

！！注意：显而易见，关节空间中的直线路径通常不会使末端执行器在任务空间中产生直线运动。



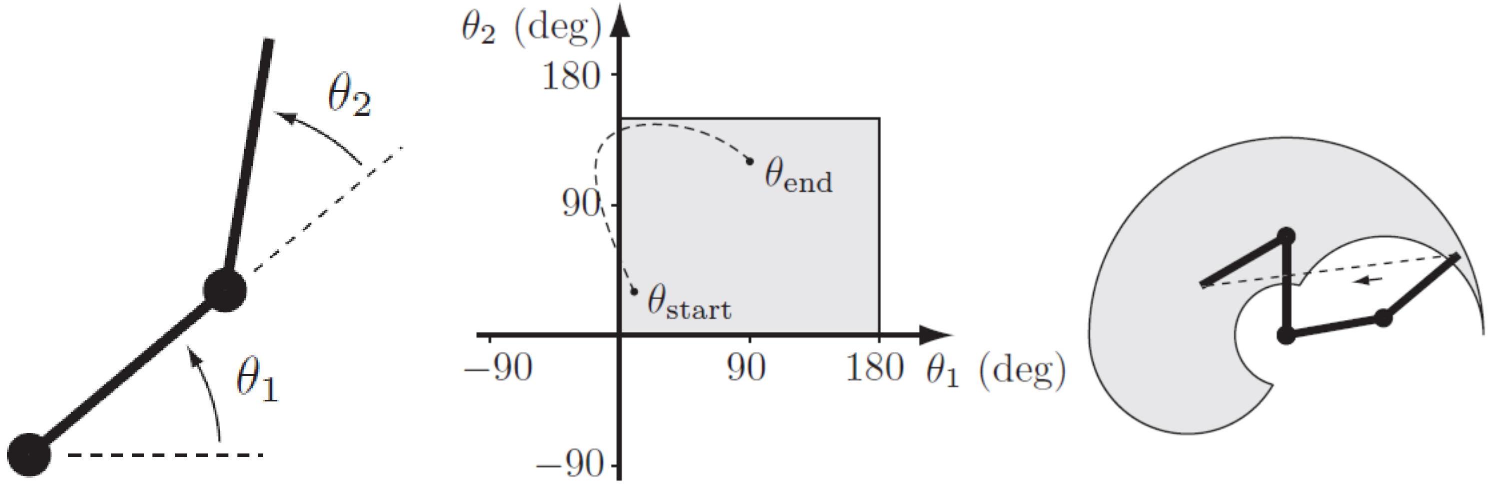
任务空间

- 若需要末端执行器在任务空间中作直线路径，可以通过位形X_{start}和X_{end}定义直线。
- 若X_{start}和X_{end} 为最小坐标集（例如xyz表示位置、$\phi\varphi\theta$表示姿态），则直线为：

$$X(s) = X_{\text{start}} + s(X_{\text{end}} - X_{\text{start}}), s \in [0,1]$$

存在的问题：

- 路径经过机器人奇异点，速度可能大的不合理。
- 机器人的可达任务空间在X坐标中可能非凸，因此连接2可达点的直线之上某些点可能无法达到。



□ 任务空间

存在的问题：

- 路径经过机器人奇异点，速度可能大的不合理。
- 机器人的可达任务空间在X坐标中可能非凸，因此连接2可达点的直线之上某些点可能无法达到。
- 若使用$X \in SE(3)$表示位形，如何定义“直线”？具有$X_{start} + s(X_{end} - X_{start})$形式的位形通常不在$SE(3)$中。

解决方法：

- 使用旋量运动（同时沿固定螺旋轴旋转并且平移），使机器人从$X_{start} = X(0)$运动到$X_{end} = X(1)$。
- 为了导出$X(s), s \in [0,1]$，在$\{s\}$系中明确起始和结束位形$X_{s,start}$和$X_{s,end}$。

任务空间

解决方法：

- 使用旋量运动（同时沿固定螺旋轴旋转并且平移），使机器人从$X_{start}=X(0)$运动到$X_{end}=X(1)$。
- 为了导出$X(s), s\in[0,1]$，在$\{s\}$系中明确起始和结束位形$X_{s,start}$和$X_{s,end}$。
- 用下标消去法，表示在起始坐标系$\{start\}$中的结束位形：

$$X_{\text{start,end}} = X_{\text{start},s}X_{s,\text{end}} = X_{s,\text{start}}^{-1}X_{s,\text{end}}$$

- 因此 $\log(X_{s,\text{start}}^{-1}X_{s,\text{end}})$ 是运动旋量在$\{start\}$系中的矩阵表示。

$\boxed{T=e^{[\mathcal{S}]\theta}}$ 第9章P87

X_{start}右乘了矩阵，表示运动旋量在 $\{start\}$ 系中表示，而非在固定$\{s\}$系中。

- 该旋量在单位时间内，从$X_{s,start}$运动到$X_{s,end}$。
- 因此，路径可以写为：

$$X(s) = X_{\text{start}}\exp(\log(X_{\text{start}}^{-1}X_{\text{end}})s)$$

第9章P56

回顾：

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$ 绕R转动= RR_{sb}

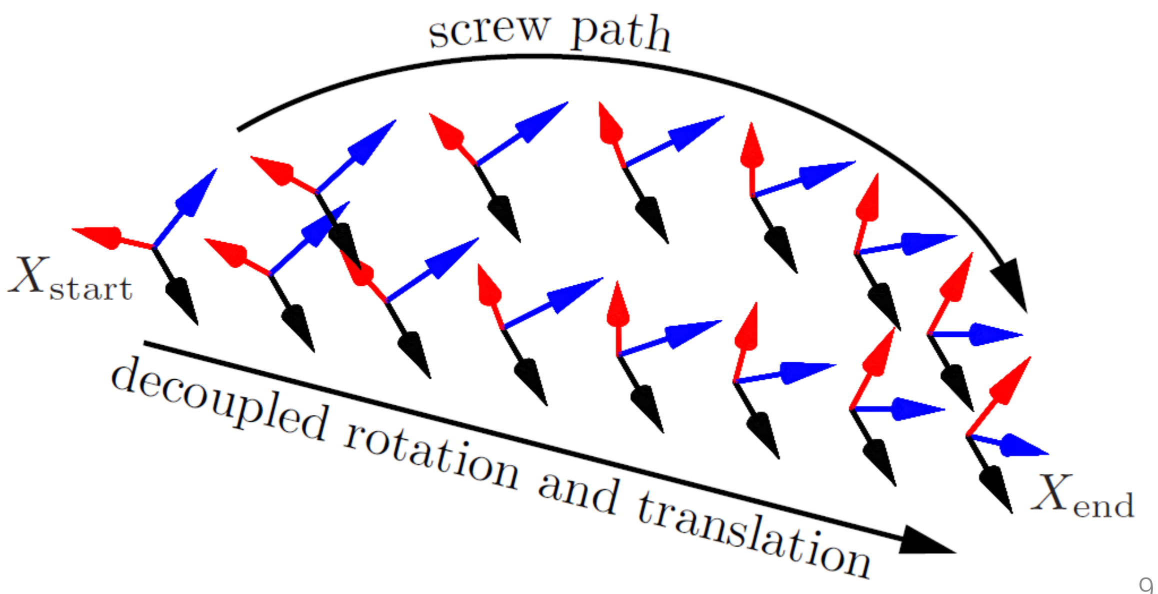
$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$ 绕R转动= $R_{sb}R$

□ 任务空间

- 在螺旋轴保持不变的角度看，上述方法提供了一种“直线”运动，但末端执行器（的原点）其实并不沿直线运动。
- 可以将旋转与平移运动解耦，$X = (R, p)$，定义路径：

$$p(s) = p_{\text{start}} + s(p_{\text{end}} - p_{\text{start}}),$$
$$R(s) = R_{\text{start}} \exp(\log(R_{\text{start}}^{\mathrm{T}} R_{\text{end}})s)$$

- 其中，末端执行器原点将沿直线运动；而旋转轴在物体坐标系中保持不变。
- 右图展示了耦合和解耦方法的运动轨迹。



- 前一节定义了直线路径$\theta(s)$。
- 本节介绍时间标度$s(t)$。
- 时间标度$s(t)$应确保运动的平滑，并满足机器人对速度和加速度的约束。
- 对于关节空间中如下的直线路径

$$\theta(s) = \theta_{\text{start}} + s(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}),\ s \in [0, 1]$$

带有时间标度的关节速度和加速度为：

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \dot{s}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}) \\ \ddot{\theta} &= \ddot{s}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})\end{aligned}$$

- 对于任务空间中由最小坐标集（例如xyz表示位置、$\phi\varphi\theta$表示姿态）构成的直线，只需将$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$替换为$X, \dot{X}, \ddot{X}$。

多项式时间标度–3次多项式

- 3次多项式时间标度：

$$s(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

- 求导：

$$\dot{s}(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2$$

- 约束：
  - 起始处：$s(0)=\dot{s}(0)=0$
  - 终止处：$s(T)=1,\dot{s}(T)=0$
- 因此，有4个约束，4个未知数。求解得到：

$$a_0=0,\quad a_1=0,\quad a_2=\frac{3}{T^2},\quad a_3=-\frac{2}{T^3}.$$

带入

$$\theta(s)=\theta_{\text{start}}+s(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}}),\ s\in[0,1]$$

$$\theta(t)=\theta_{\text{start}}+\left(\frac{3t^2}{T^2}-\frac{2t^3}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}}),$$

$$\dot{\theta}(t)=\left(\frac{6t}{T^2}-\frac{6t^2}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}}),$$

$$\ddot{\theta}(t)=\left(\frac{6}{T^2}-\frac{12t}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}}).$$

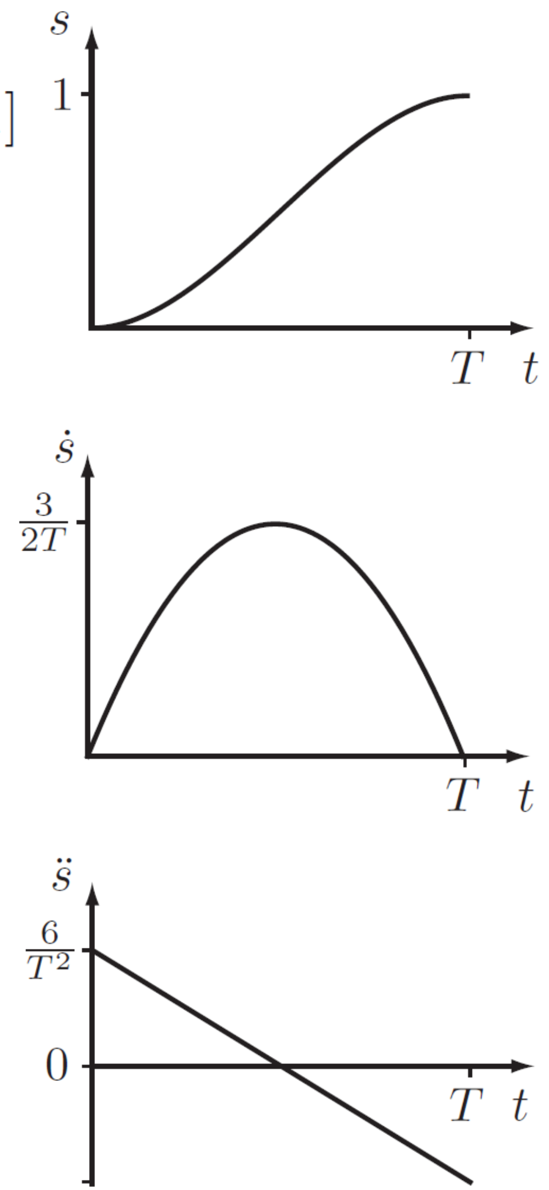
- 最大速度$t=T/2$时：

$$\dot{\theta}_{\max}=\frac{3}{2T}(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}})$$

- 最大加速度$t=0\ or\ T$时：

$$\ddot{\theta}_{\max}=\left|\frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}})\right|,$$

$$\ddot{\theta}_{\min}=-\left|\frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}}-\theta_{\text{start}})\right|$$



多项式时间标度-3次多项式

- 3次多项式时间标度：

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

- 求导：

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

- 约束：
  - 起始处：$s(0) = \dot{s}(0) = 0$
  - 终止处：$s(1) = \dot{s}(1) = 0$
- 因此，有4个约束，4个未知数。求解得到：

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{T^2}, \quad a_3 = -\frac{2}{T^3}.$$

带入

$$\theta(s) = \theta_{\text{start}} + s(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}),\ s \in [0,1]$$

$$\theta(t) = \theta_{\text{start}} + \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}),$$

$$\dot{\theta}(t) = \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}),$$

$$\ddot{\theta}(t) = \left(\frac{6}{T^2} - \frac{12t}{T^3}\right)(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}).$$

- 最大速度$t = T/2$时：

$$\dot{\theta}_{\max} = \frac{3}{2T}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})$$

- 最大加速度$t = 0\ or\ T$时：

$$\ddot{\theta}_{\max} = \left|\frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})\right|,$$

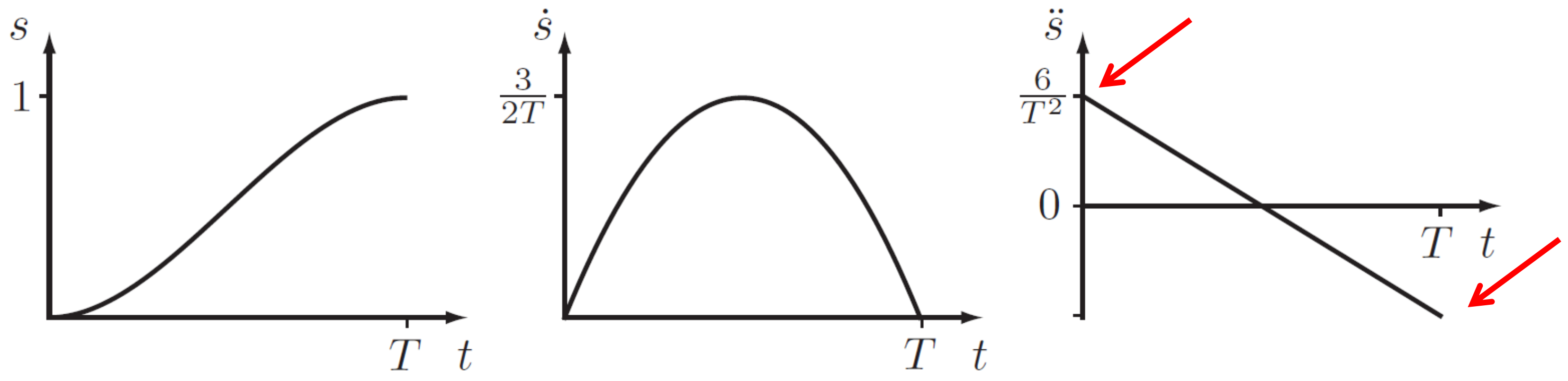
$$\ddot{\theta}_{\min} = -\left|\frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})\right|$$

- 最后，通过关节的速度限制和加速度限制，检查请求的运动时间T是否合适：

$$|\dot{\theta}| \le \dot{\theta}_{\text{limit}}$$

$$|\ddot{\theta}| \le \ddot{\theta}_{\text{limit}}$$

- 由于3次多项式时间标度未对端点路径施加约束，使得$\ddot{s}(0)$和$\ddot{s}(T)$为0，机器人在初始和终止位置会产生不连续的加速度跳跃。



- 加速度不起始于0，即有无限大的加加速度（Jerk，加速度的导数），使得机器人会发生抖动。
- 解决方案：在端点处施加加速度约束$\ddot{s}(0) = \ddot{s}(T) = 0$。增加的2个约束需要额外2个方程来求解。
- 所以，有了5次多项式时间标度：

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

多项式时间标度–5次多项式

- 5次多项式时间标度：

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

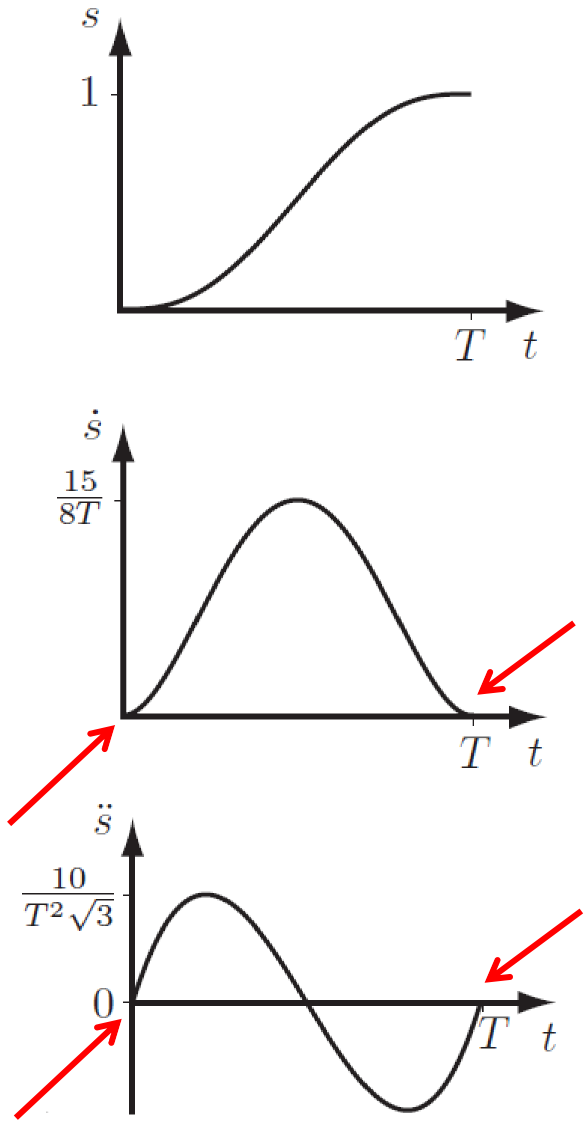
- 求导：

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$
$$\ddot{s}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

- 约束：
  - 起始处：$s(0) = \dot{s}(0) = \ddot{s}(0) = 0$
  - 终止处：$s(T) = 1, \dot{s}(T) = \ddot{s}(T) = 0$

- 因此，有6个约束，6个未知数。
  求解得到：

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$$
$$a_3 = {}^{10}/_{T^3}, a_4 = {}^{-15}/_{T^4}, a_5 = {}^{6}/_{T^5}$$



梯形运动曲线

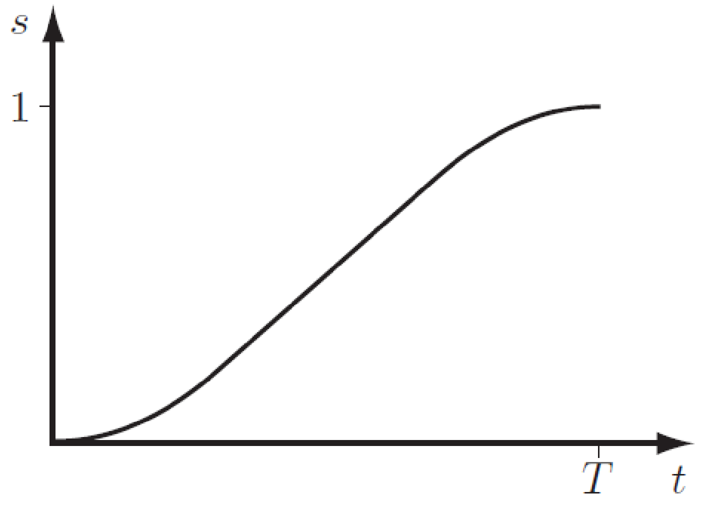
- 由匀加速、匀速、匀加速阶段组成。
- 虽不如多项式时间标度平滑，但优点是：利用关节最大速度和最大加速度最快执行运动。

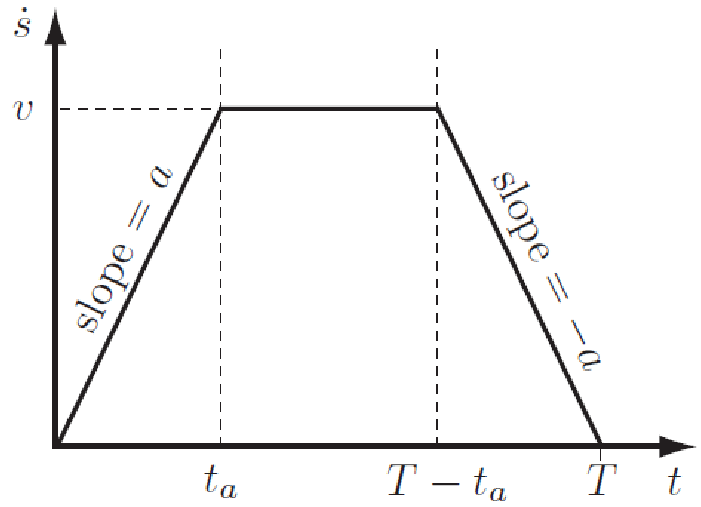
$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})v| \le \dot{\theta}_{\text{limit}},$$

$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})a| \le \ddot{\theta}_{\text{limit}}$$

- 若$v^2/a > 1$，则机器人在运动期间永远不会达到速度v，梯形曲线变为三角形曲线。
- 若$v^2/a \le 1$，则梯形运动完全由v、a、t_a和T决定。
- 但只有2个可以任意指定，因为它们必须满足（由右图可知，不太可能指定t_a）：

$$s(T) = 1 \qquad v = at_a$$



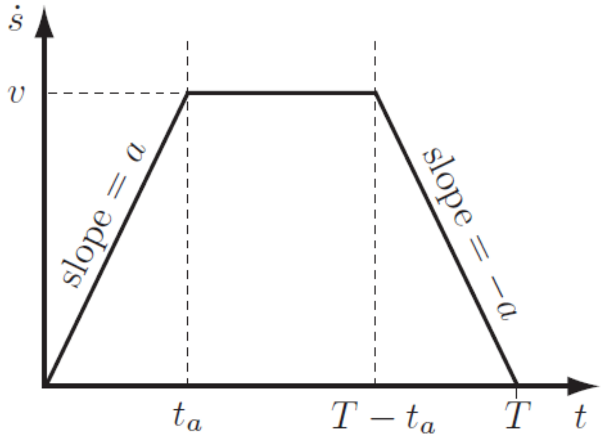


□ 梯形运动曲线

$$\text{for } 0 \le t \le \frac{v}{a}, \qquad \ddot{s}(t) = a, \quad \dot{s}(t) = at, \quad s(t) = \frac{1}{2}at^2;$$

$$\text{for } \frac{v}{a} < t \le T - \frac{v}{a}, \qquad \ddot{s}(t) = 0, \quad \dot{s}(t) = v, \quad s(t) = vt - \frac{v^2}{2a};$$

$$\text{for } T - \frac{v}{a} < t \le T, \qquad \ddot{s}(t) = -a, \quad \dot{s}(t) = a(T-t), \quad s(t) = \frac{2avT - 2v^2 - a^2(t-T)^2}{2a}.$$



可以指定v、a、T中的2个

➢ 三种结果：

（1）选择v和a 使得$v^2/a \le 1$：

$$T = \frac{a + v^2}{va}.$$

（2）选择v和T使得$2 \ge vT > 1$：

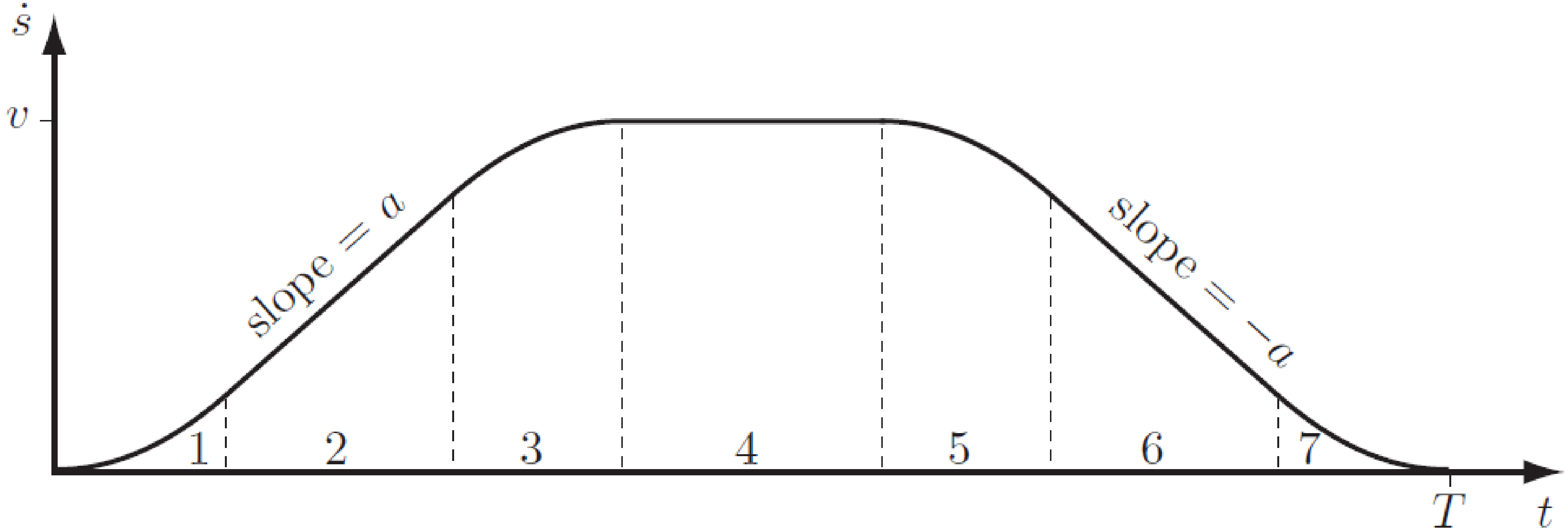
$$a = \frac{v^2}{vT - 1}$$

（3）选择a和T使得$aT^2 \ge 4$：

$$v = \frac{1}{2}\left(aT - \sqrt{a}\sqrt{aT^2 - 4}\right)$$

S型运动曲线

- 3次多项式和梯形曲线的加速度不起始于0，即有无限大的加加速度，使得机器人会发生抖动。
- 除了5次多项式外，另一种方法是S-curve，电机控制中流行的运动曲线。



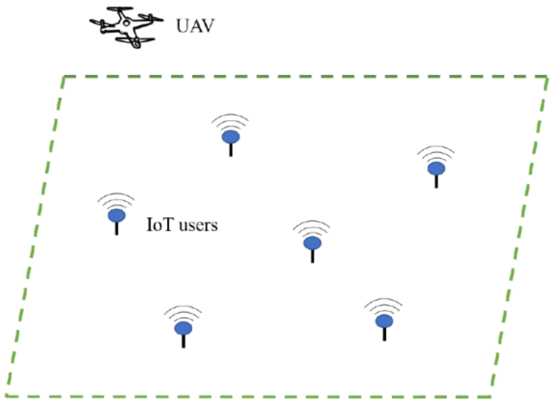
（1）恒定正加加速度；（2）恒定正加速度；（3）恒定负加加速度；

（4）恒定速度；

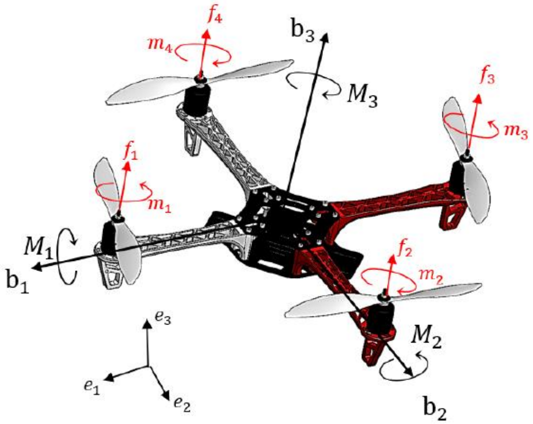
（5）恒定负加加速度；（6）恒定负加速度；（7）恒定正加加速度。

3 实例

1. QUAV单对单通信轨迹规划

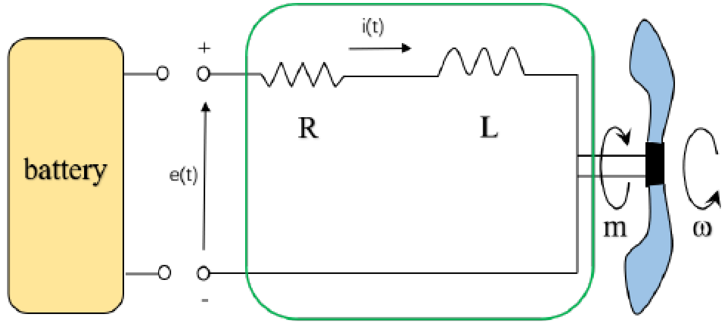


使用QUAV，进行单对单信号采集

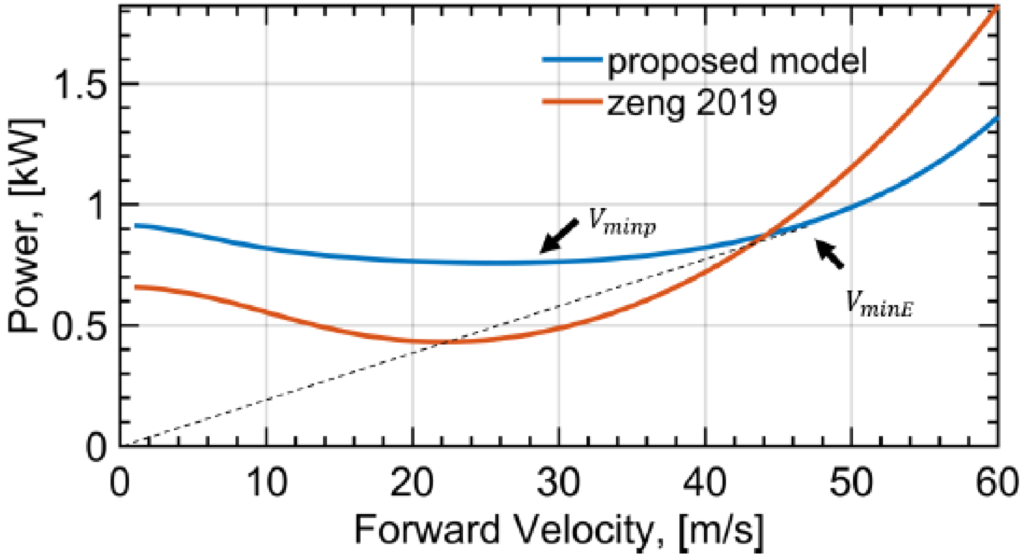


无人机动力学模型

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ 0 & -lk_f & 0 & lk_f \\ -lk_f & 0 & lk_f & 0 \\ -k_\tau & k_\tau & -k_\tau & k_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

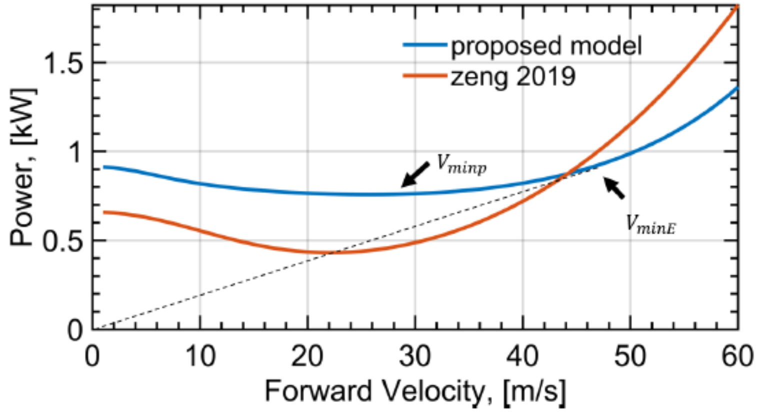


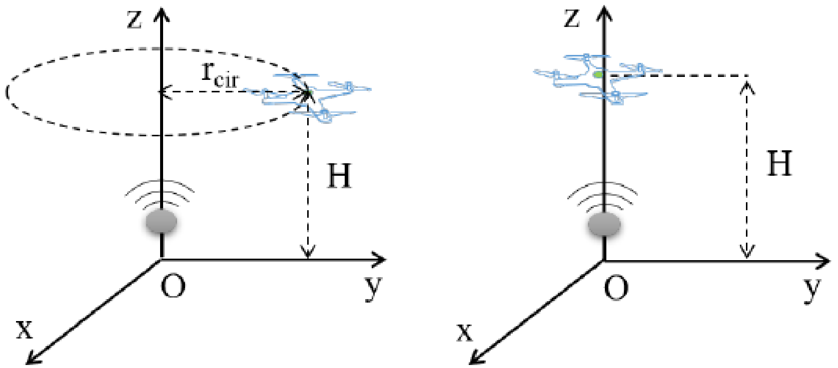
最终获得以轨迹为输入，以QUAV的4个电机电压与电流为输出的能量模型



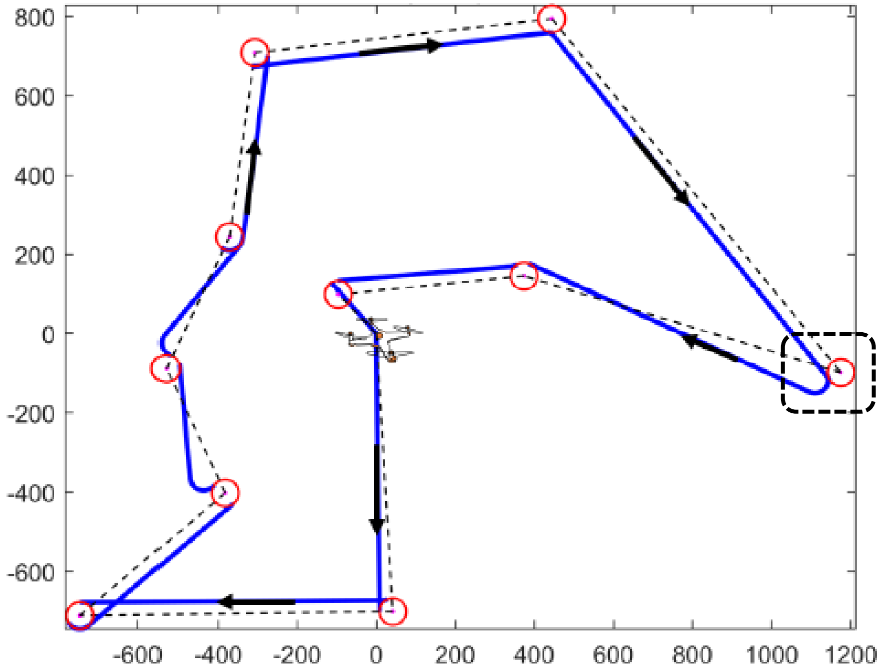
发现重要规律！

1. QUAV单对单通信轨迹规划

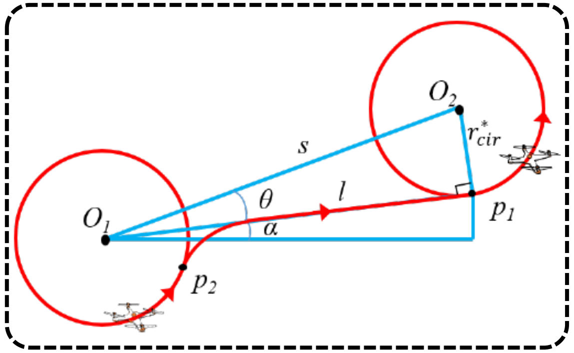




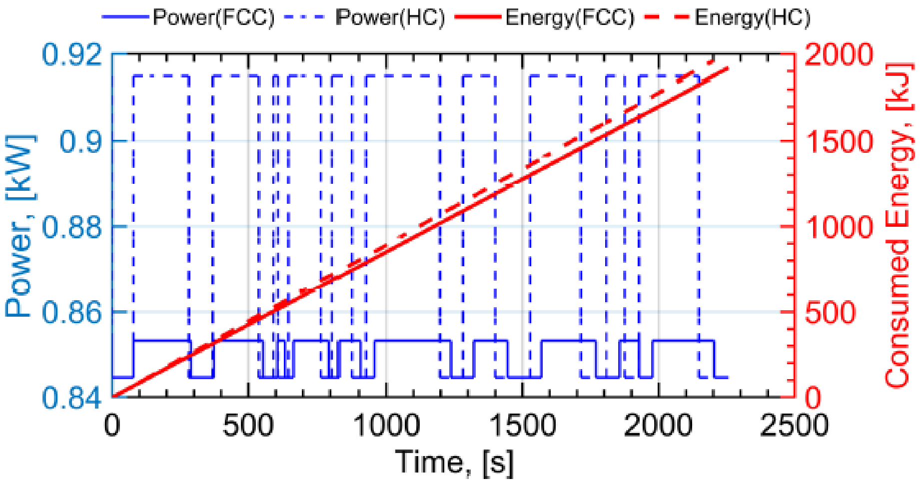
定点飞行 vs 盘旋飞行



测试场景1

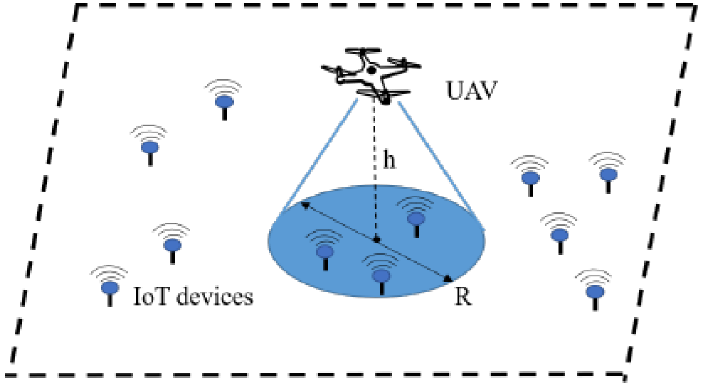


2D Dubins曲线

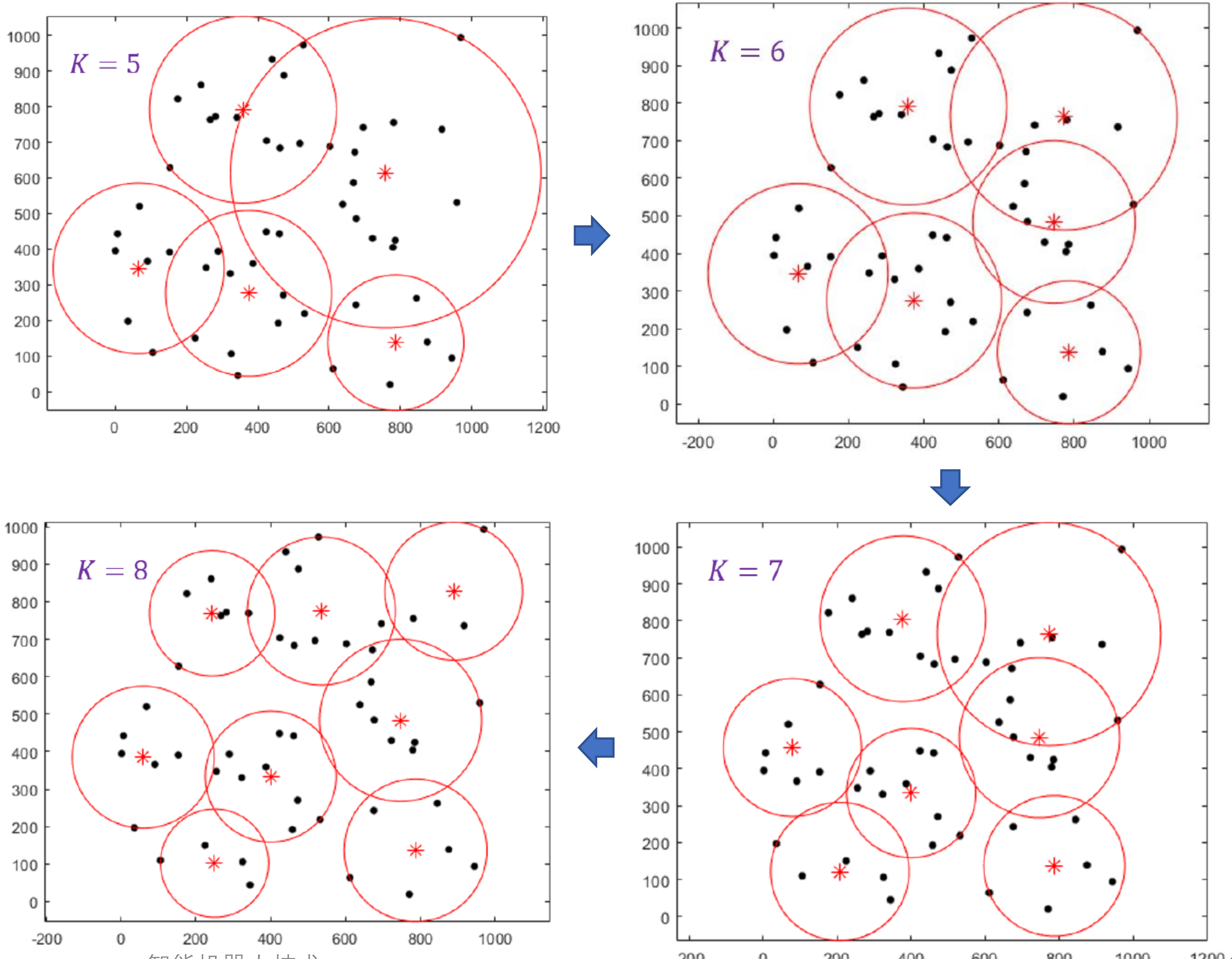


能量消耗对比

2. QUAV单对多通信轨迹规划



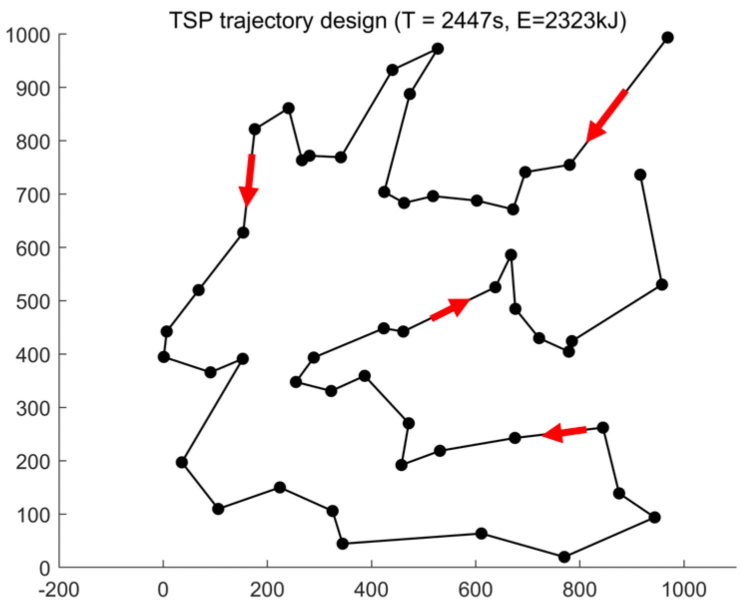
使用QUAV，进行单对多信号采集



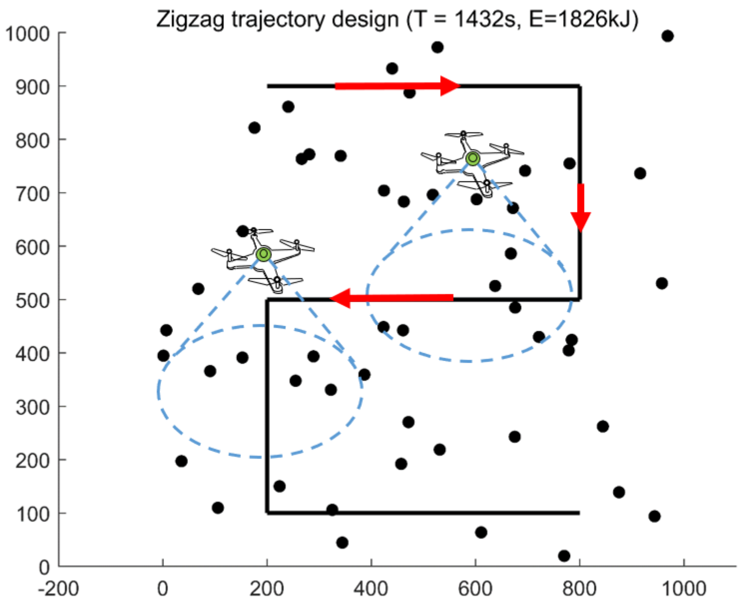
Algorithm 2 Disc Cover Problem based on GA-Kmeans Algorithm.

1: **Input**: limited coverage radius R_{lim}, population size, mutation probability, crossover probability, Maximum iteration number N_{max}, center number $K = 1$, maximum coverage radius $R_{max} = +\infty$
2: **while** $R_{max} > R_{lim}$
3: $k = k + 1$.
4: **for** $i = 1 : N_{max}$.
5: Generate the initial populations and calculate the fitness of chromosomes.
6: $f_{selec}()$, $f_{cross}()$, $f_{mute}()$ and k-means operations. Screen out new populations.
7: **end for**
8: Calculate R_{max} of the chromosomes with highest fitness value.
9: **end while**
10: **Output**: K, and the chromosomes with highest fitness value.

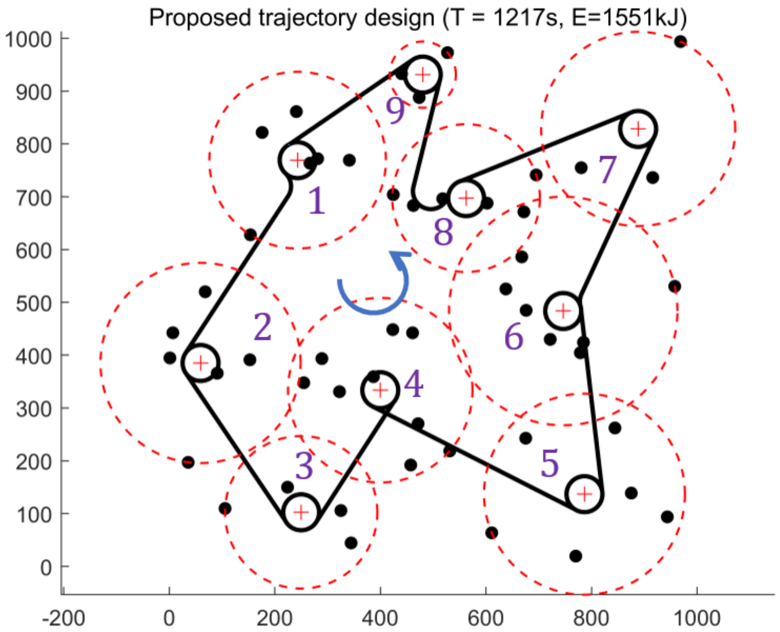
2.QUAV单对多通信轨迹规划



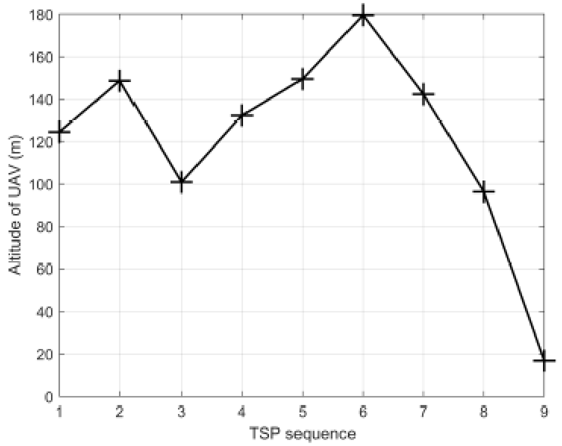
单对单以此采集的路线



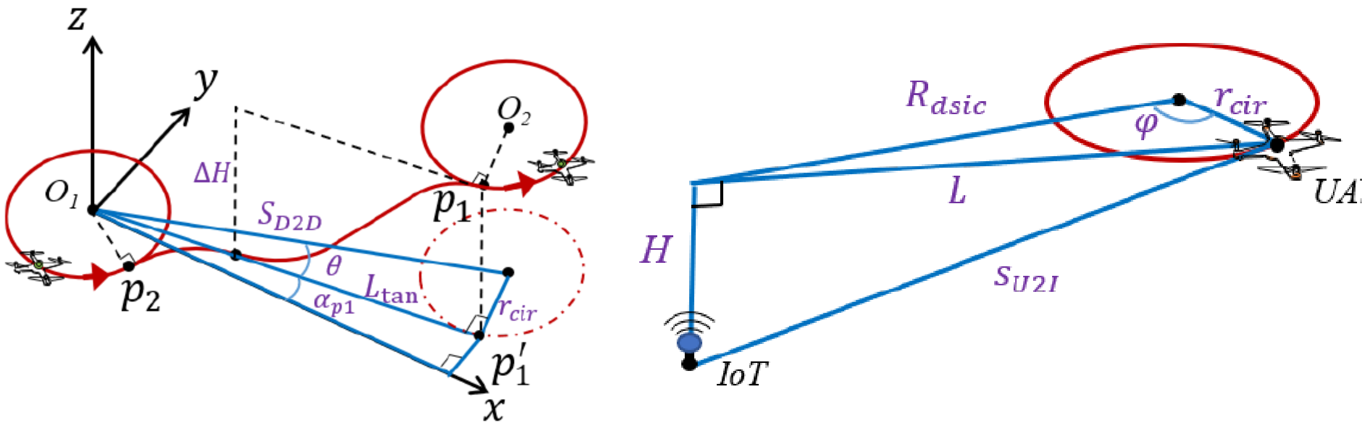
扫地机器人方式的zigzag路线



所提出的算法生成的路线

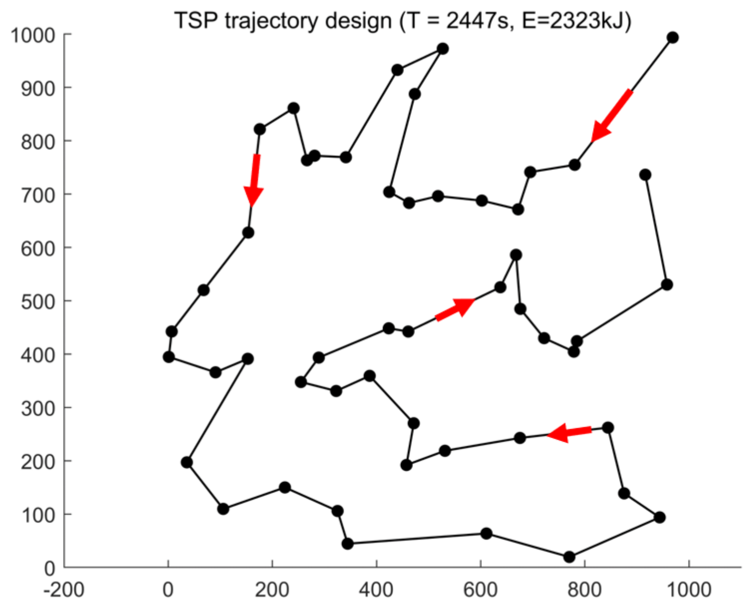


通过改变高度，改变覆盖圆盘大小

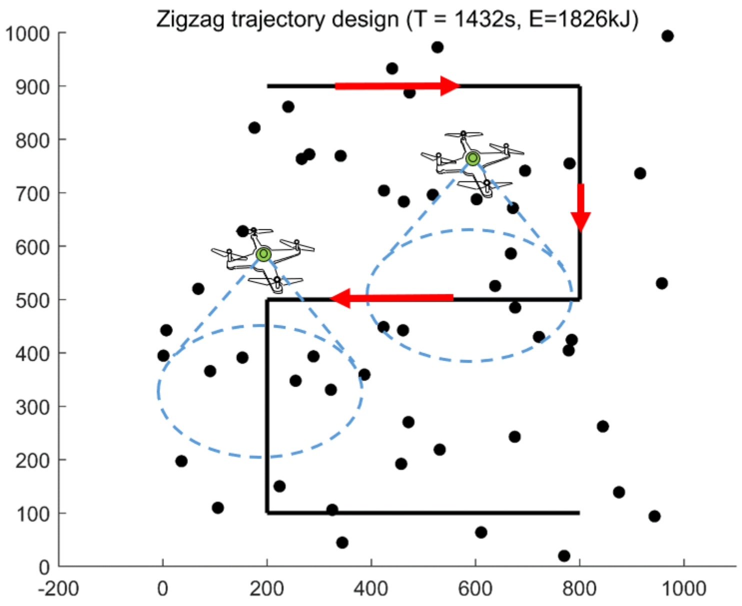


3D Dubins曲线

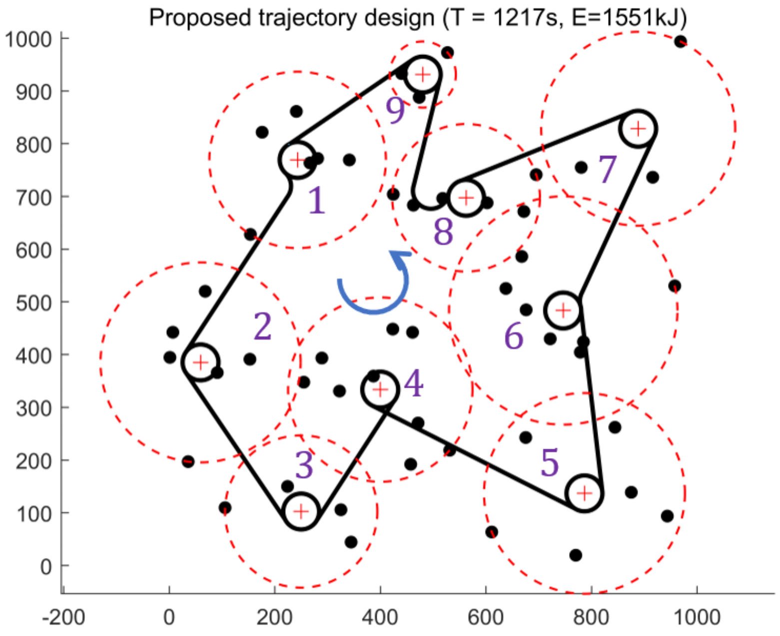
2. QUAV单对多通信轨迹规划



单对单以此采集的路线



扫地机器人方式的zigzag路线



所提出的算法生成的路线

COMPARISON BETWEEN FCC AND OTHER SCHEMES

IoT numbers		20 (2Mb per IoT)			35 (1Mb per IoT)			50 (0.5Mb per IoT)		
area[m×m]		500×500	1000×1000	1500×1500	500×500	1000×1000	1500×1500	500×500	1000×1000	1500×1500
Direct TSP	time[s]	4415	4477	4553	7681	7778	7873	2815	2447	3058
	energy[kJ]	4067	4146	4243	7060	7183	7304	2613	2323	2992
Zigzag	time[s]	2591	8951	13191	1295	4475	8482	648	1423	4241
	energy[kJ]	3303	11412	16819	1651	5706	10812	826	1826	5408
Proposed	time[s]	875	2020	3048	479	1128	2258	441	1217	1398
	energy[kJ]	1116	2576	3887	611	1439	2880	562	1551	1782

THANKS

谢谢大家

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io