Linear Algebra homework2.5

---

1. 求 A,B,C 的逆矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. 通过下式来证明 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 是不可逆的.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. 求 $U^2 = I$ 的 U,U 具有上三角形式 (不是对角线)，其中 $U = U^{-1}$.

6. (a) 如果 A 是可逆的且 AB=AC, 证明 B=C.

   (b) 如果 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 找出两个不同的矩阵使得 AB=AC.

7. 如果 A 的第一行加第二行等于第三行, 表明 A 不可逆.
   (a) 解释为什么 $A\boldsymbol{x} = (0, 0, 1)$ 没有解.
   (b) (b_1, b_2, b_3) 取哪些值可使得 $A\boldsymbol{x} = b$ 有解?
   (c) 在消元的过程中，第 3 行会发生什么变化?

8. 如果 A 的第一列加第二列等于第三列, 则表明 A 不可逆.
   (a) 求出一个非零解 $\boldsymbol{x}$, 使得 $A\boldsymbol{x} = 0$. 矩阵 A 为 3 乘 3 阶矩阵.
   (b) 消元时满足第 1 列 + 第 2 列 = 第 3 列。解释为什么没有第三个轴元.

10. 求出下列矩阵的逆矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

11. (a) 求出使得 A+B 不可逆的可逆矩阵 A,B.
    (b) 求奇异矩阵 A 和 B，使 A+B 是可逆的.

12. 如果 C=AB 是可逆的，(A,B 都是方阵) 且 A 是可逆的. 找到 A^{-1}，它可由 C^{-1} 和 B 得到.

13. 如果三个方阵的乘积 M = ABC 是可逆的，那么 B 也是可逆的.(A,C 也一样). 找到 B^{-1}, 它由 M^{-1},A,C 得到.

14. 如果将 A 的第一行加到第二行得到 B，怎样由 A^{-1} 得到 B^{-1}?
    请注意顺序. 即 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 __.

15. 证明有一列为 0 的矩阵不可逆.

17. (a) 哪个 3 乘 3 阶的矩阵 E 有以下三步的效果? 用第二行减去第一行，再用第三行减去第一行，然后用第三行减去第二行.
    (b) 哪个矩阵 L 有以下效果? 用第二行加到第三行，再将第一行加到第三行，然后第一行加到第

二行.

18. 如果 B 是 A^2 的逆矩阵, 证明 AB 是 A 的逆矩阵.

22-28 题是运用高斯-约当方法计算 A^{-1}

22. 当把 A 变为 I 的时候，I 就变成了 A^{-1}.(通过行变换):

$$[A \quad I]=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{bmatrix},\qquad [A \quad I]=\begin{bmatrix}1&4&1&0\\3&9&0&1\end{bmatrix}$$

23. A 与 I 为 3 乘 3 的矩阵, 将 [A I] 化成 $[I \quad A^{-1}]$.

$$[A \quad I]=\begin{bmatrix}2&1&0&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{bmatrix}$$

24. 对 [U I] 运用高斯-约当消去法找到上三角矩阵 U^{-1}.

$$\mathbf{UU^{-1}=I},\quad \begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_2&\boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

26. 通过 E_{21},E_{12},D^{-1}, 将 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}$ 化为单位阵,

E_{21},E_{12},D^{-1} 是哪些矩阵? 并求出 A^{-1}. 其中 $D^{-1}E_{12}E_{21}=A^{-1}$

28. 使用高斯-约当和行变换求出 A^{-1}.

$$[A \quad I]=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\2&2&0&1\end{bmatrix}$$

29. 判断对错 (如果错误举出反例，如果正确给出原因).
(a) 有一行全为 0 的 4 乘 4 阶矩阵不可逆.
(b) 主对角线上都是 1 的矩阵是可逆的
(c) 如果 A 是可逆的，那么 A^{-1},A^2 也是可逆的.

30. 当 $a\neq 0$,$a\neq b$ 时, 证明 A 是可逆的 (找出轴元或者 A^{-1}). 给出 c 的三个不同取值使得 C 不可逆:

$$A=\begin{bmatrix}a&b&b\\a&a&b\\a&a&a\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2&c&c\\c&c&c\\8&7&c\end{bmatrix}$$

32. 假设矩阵 P,Q,I 有相同的行，但是行的顺序不同. 他们叫作置换矩阵. 通过求解 $(P-Q)\boldsymbol{x}=0$ 来证明 P-Q 是奇异的.

33. 找出并检查这些矩阵的逆 (假设它们存在):

$$\begin{bmatrix}I&0\\C&I\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}A&0\\C&D\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&I\\I&D\end{bmatrix}$$