

第11讲 工业机器人的动力学建模方法

彭键清 百人计划副教授

中山大学

Email: pengjq7@mail.sysu.edu.cn

工学园1-505

2024年05月06日



第11讲 工业机器人的动力学建模方法

1

机器人受力与运动分析

2

机器人静力学方程

3

拉格朗日动力学建模

4

牛顿-欧拉动力学建模

5

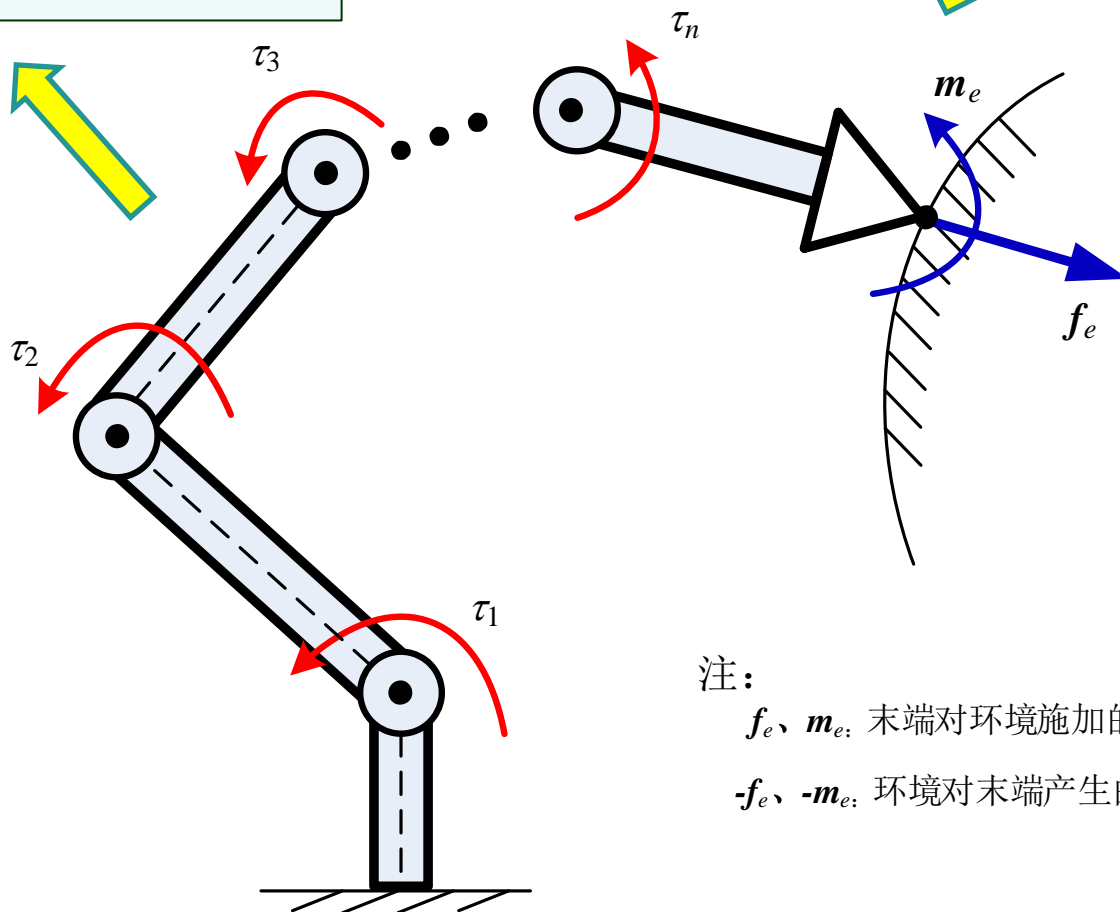
动力学模型的应用

11.1.1 机器人受力情况分析

◆ 机器人系统受力情况

关节驱动力矩

$$\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$$



末端对环境的操作
力/力矩 $f_e, m_e \in \mathbb{R}^3$

作用力与
反作用力

环境对末端的作用
力/力矩 $(-f_e, -m_e)$

注:

f_e, m_e : 末端对环境施加的作用力

$-f_e, -m_e$: 环境对末端产生的反作用力

11.1.1 机器人受力情况分析

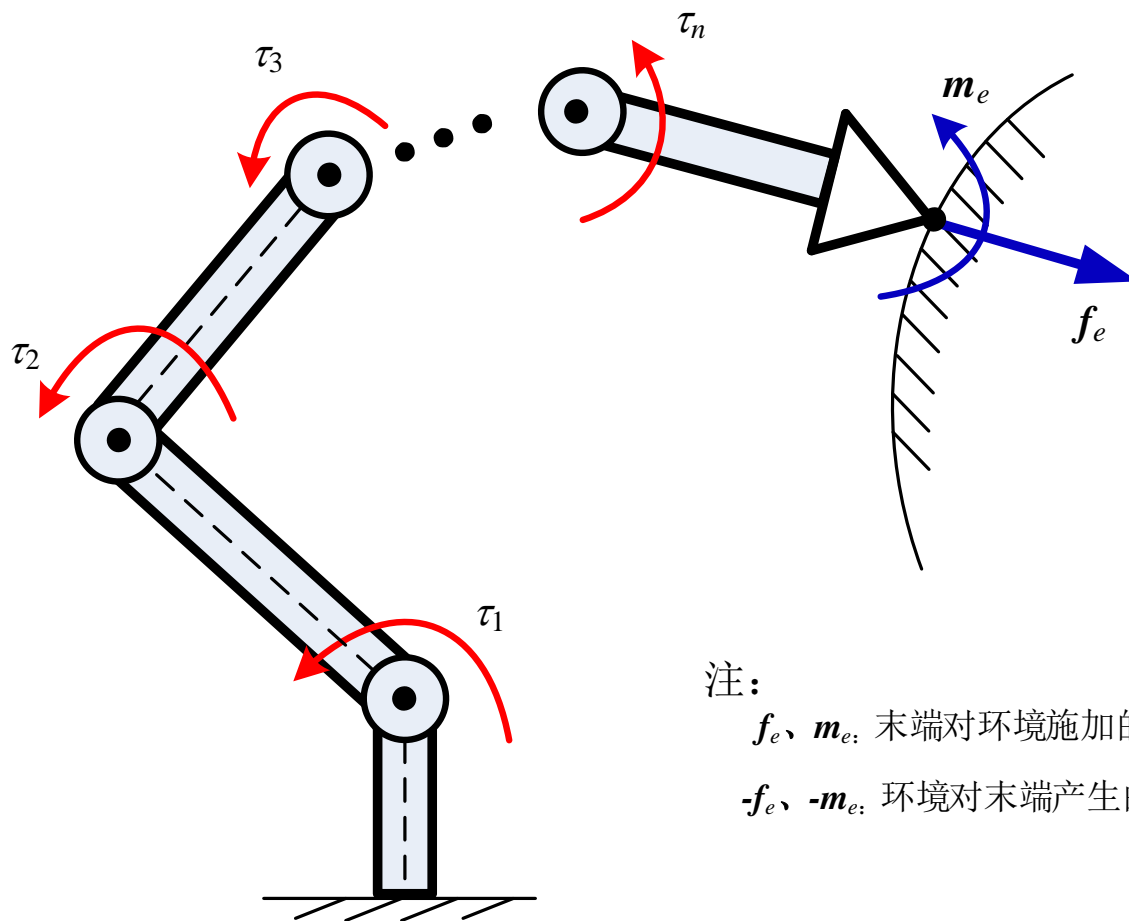
◆ 机器人系统状态变量

➤ 关节状态变量

- ✓ 关节位置 q
- ✓ 关节速度 \dot{q}
- ✓ 关节加速度 \ddot{q}

➤ 末端状态变量

- ✓ 末端位姿 X_e
- ✓ 末端速度 \dot{x}_e
- ✓ 末端加速度 \ddot{x}_e



注:

f_e 、 m_e : 末端对环境施加的作用力

$-f_e$ 、 $-m_e$: 环境对末端产生的反作用力

11.1.2 机器人状态变量及驱动变量



■ 不同空间的状态及驱动变量描述

➤ 关节空间

- ✓ 状态变量：机器人关节位置 q 、速度 \dot{q} 、加速度 \ddot{q}
- ✓ 驱动变量：关节驱动力矩 $\tau=[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$

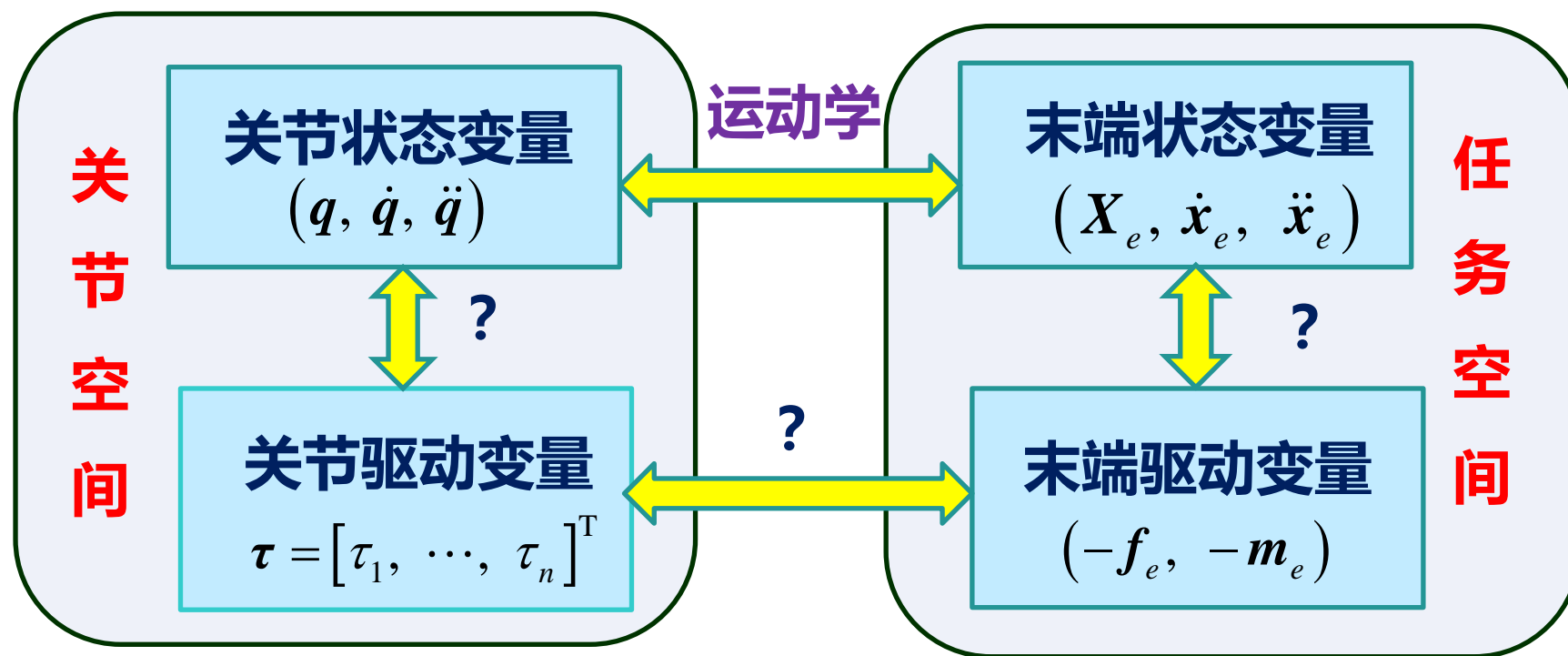
➤ 任务空间（笛卡尔空间）

- ✓ 状态变量：机器人末端位姿 X_e 、速度 \dot{x}_e 、加速度 \ddot{x}_e
- ✓ 驱动变量：机器人末端作用力/力矩 $f_e \in \mathbb{R}^3, m_e \in \mathbb{R}^3$

不同空间	关节空间	任务空间（笛卡尔空间）
状态变量	关节位置 q 、速度 \dot{q} 、加速度 \ddot{q}	末端位姿 X_e 、速度 \dot{x}_e 、加速度 \ddot{x}_e
驱动变量	关节驱动力矩 $\tau=[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$	末端操作力/力矩 $f_e \in \mathbb{R}^3, m_e \in \mathbb{R}^3$

11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

■ 状态变量、驱动变量的映射关系

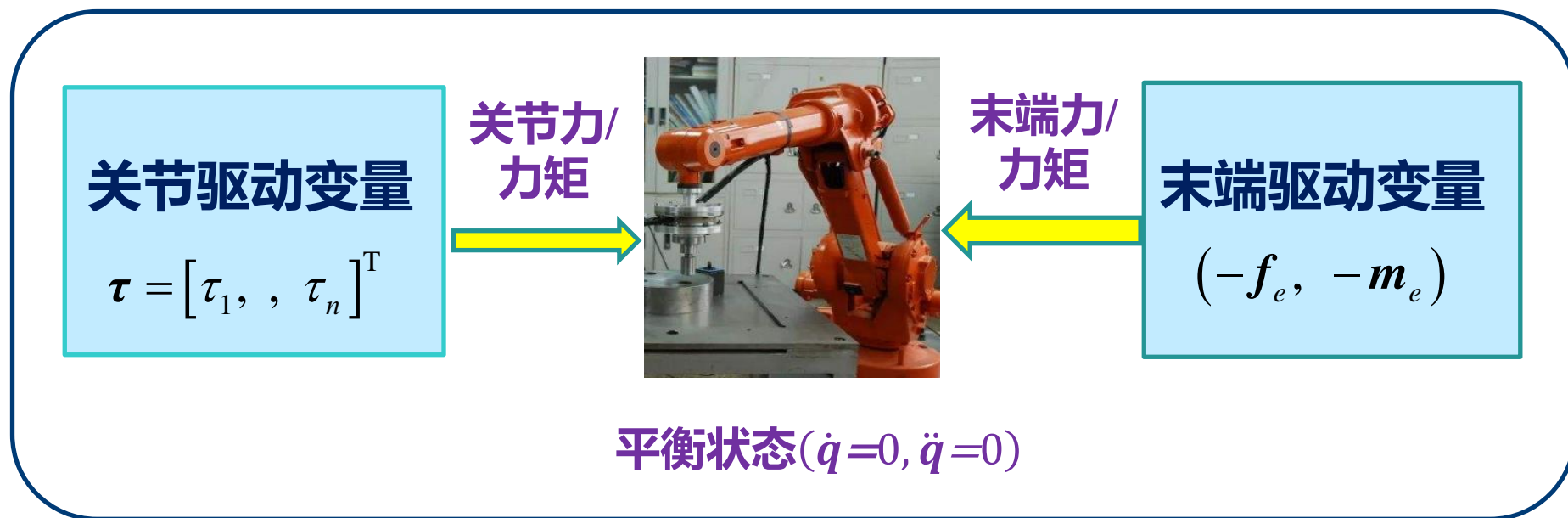


问题： 机器人同时在 τ 和 $(-f_e, -m_e)$ 的作用下，状态如何变化？

11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

■ 受力下静止——机器人静力学

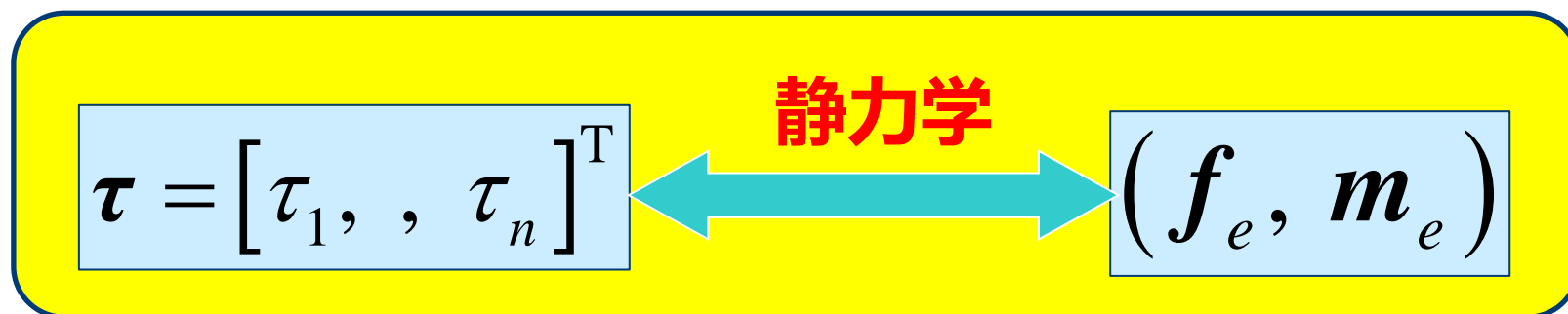
机器人在**关节力/力矩**及**末端力/力矩**同时作用下处于**平衡状态**（状态变量不发生变化，如机器人静止）时，**关节力/力矩**与**末端力/力矩**之间的映射关系，称为机器人的静力学。



11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

■ 受力下静止——机器人静力学

机器人在**关节力/力矩**及**末端力/力矩**同时作用下处于**平衡状态**（状态变量不发生变化，如机器人静止）时，**关节力/力矩**与**末端力/力矩**之间的映射关系，称为机器人的静力学。

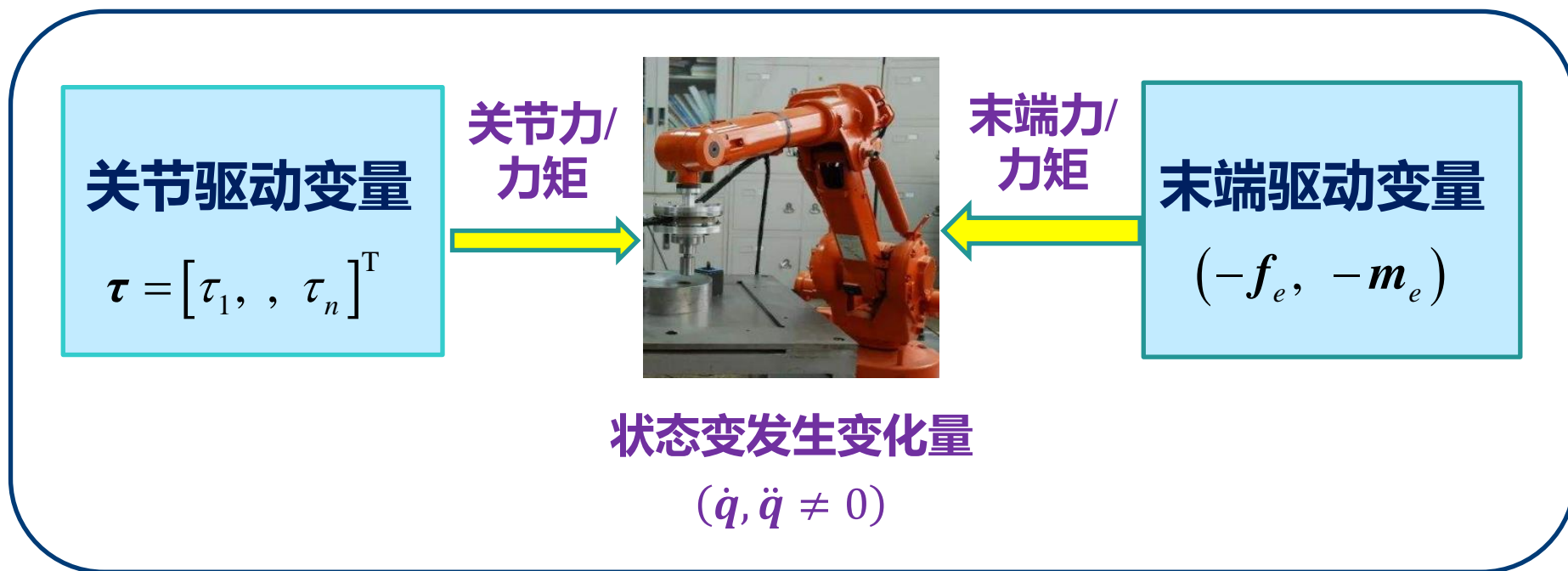


平衡状态($\dot{q}=0, \ddot{q}=0$)下不同空间驱动变量的映射关系

11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

■ 受力下状态改变——机器人动力学

机器人在**关节力/力矩**及**末端力/力矩**同时作用下，**状态变量**发生了改变，此时**关节及末端力/力矩**与**状态变量**之间的映射关系，称为机器人的动力学。



11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

■ 受力下状态改变——机器人动力学

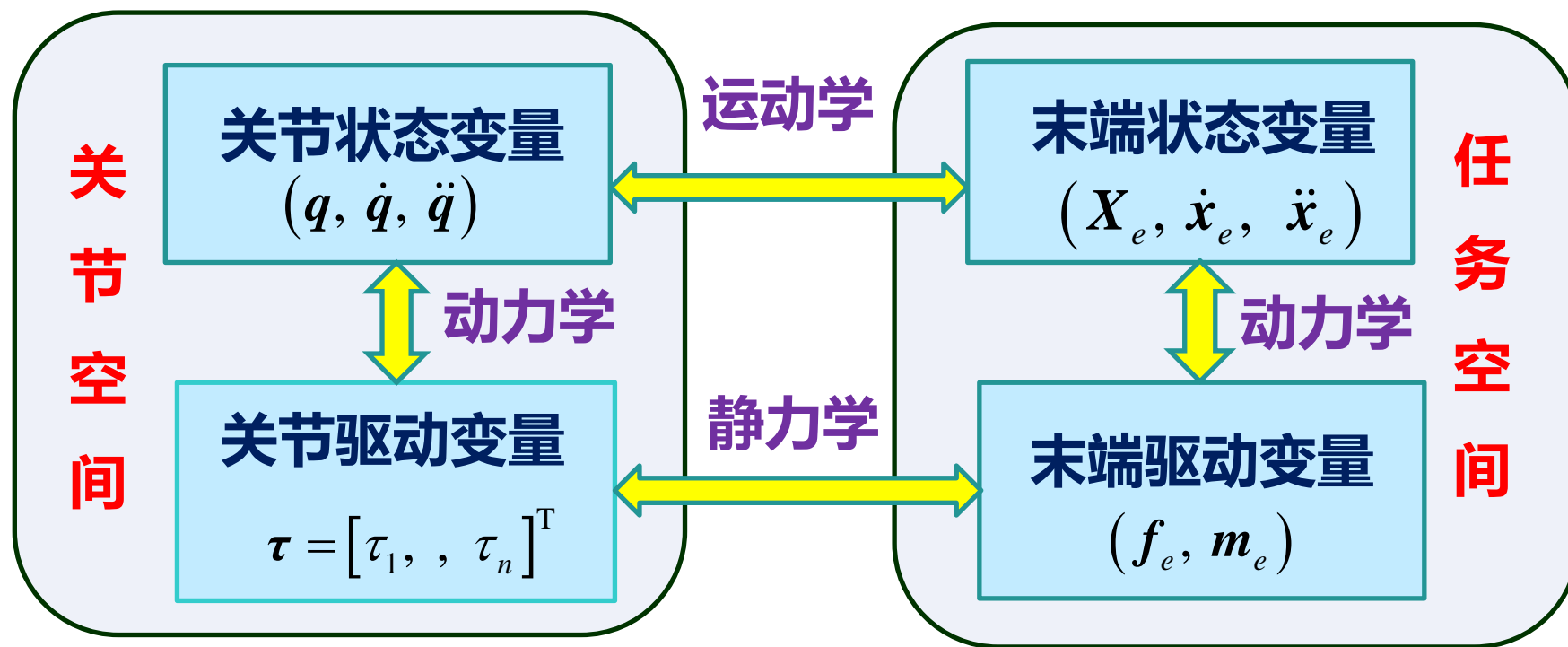
机器人在**关节力/力矩**及**末端力/力矩**同时作用下，**状态变量**发生了改变，此时**关节及末端力/力矩**与**状态变量**之间的映射关系，称为机器人的动力学。



关节力/力矩 τ 、末端力/力矩 (f_e, m_e) 与状态变量之间的映射关系

11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

◆ 各种映射关系对应的建模理论



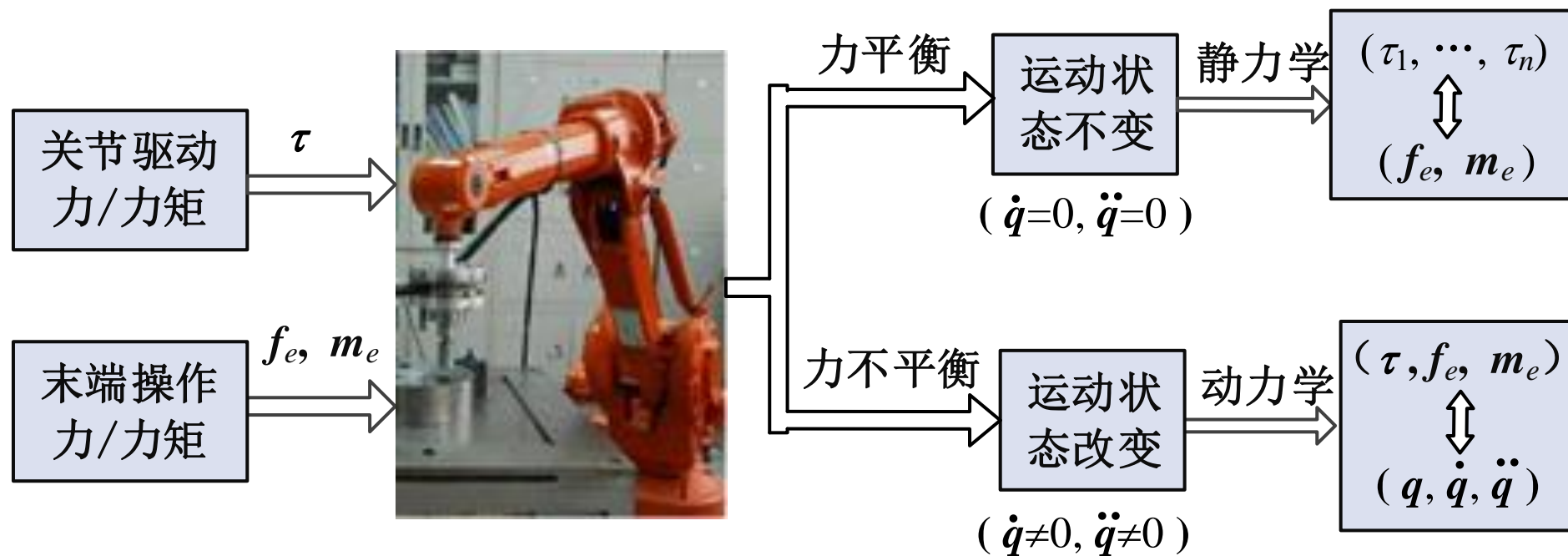
静力学与动力学的作用

静力学和动力学，是机器人操作机设计和动态性能分析的基础。特别是动力学分析，它还是机器人控制器设计、动态仿真的基础。

11.1.3 机器人静力学与动力学的定义

◆ 静力学与动力学小结

在**关节力/力矩**及**末端力/力矩**共同作用下，机器人系统处于平衡或不平衡状态，对应的映射关系分别为**静力学**和**动力学**。



第11讲 工业机器人的动力学建模方法

1

机器人受力与运动分析

2

机器人静力学方程

3

拉格朗日动力学建模

4

牛顿-欧拉动力学建模

5

动力学模型的应用

11.2.1 引例：平面2R机器人

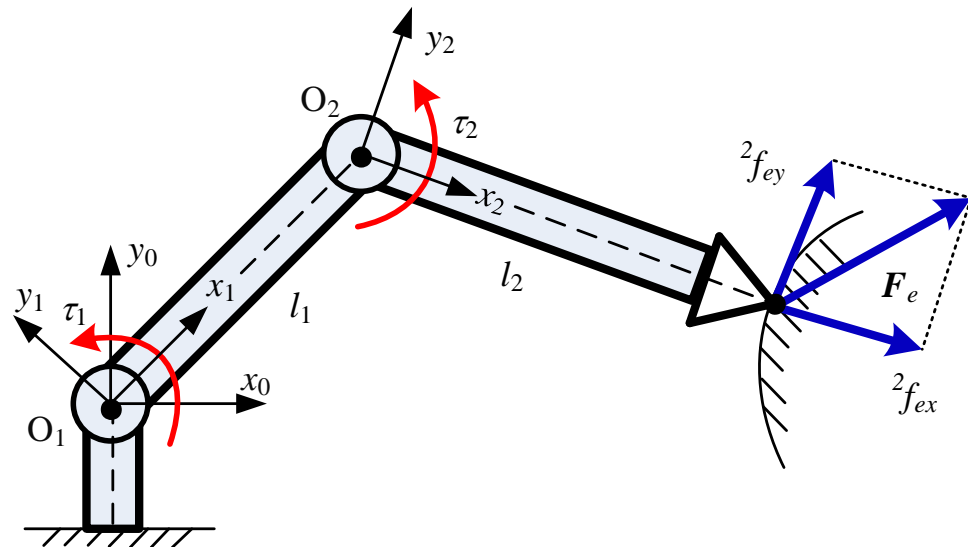
◆ 系统状态变量及驱动变量

➤ 机器人系统状态变量

- ✓ 机器人关节角(θ_1, θ_2)、角速度、角加速度
- ✓ 机器人末端位置(x_e, y_e)、速度、加速度

➤ 机器人系统驱动变量

- ✓ 机器人关节驱动力矩 $\tau=[\tau_1, \tau_2]^T$
- ✓ 机器人末端作用力 $F_e=[f_{ex}, f_{ey}]^T$



根据力平衡原理，推导平面2R机器人的静力学方程
(忽略摩擦力和重力)

11.2.1 引例：平面2R机器人

◆ 问题求解

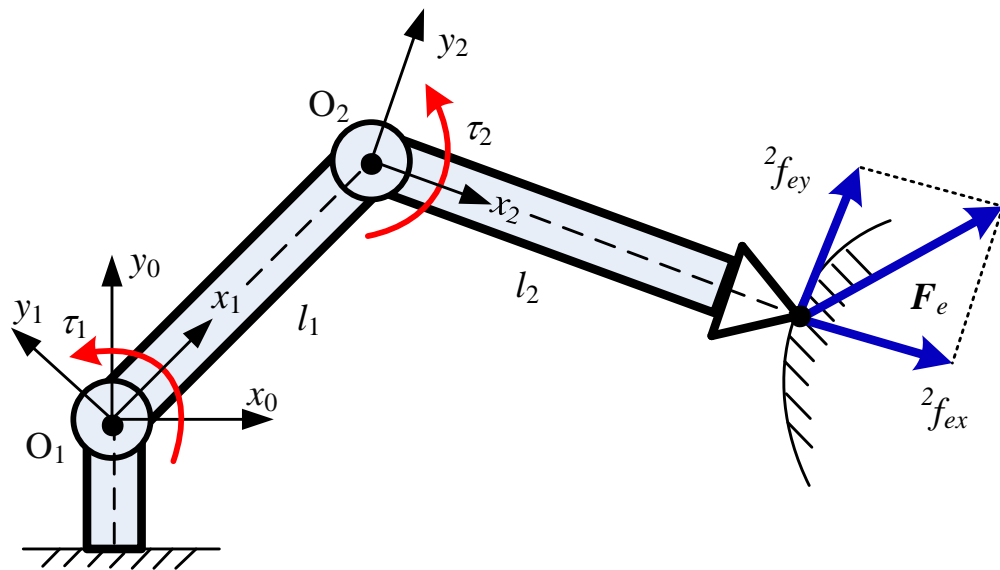
问题：已知末端操作力 $F_e = [f_{ex}, f_{ey}]^T$ ，**不考虑摩擦和重力作用**，求**平衡状态下的关节驱动力矩** $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$

➤ 在{0}中表示的末端操作力

$${}^0F_e = \begin{bmatrix} {}^0f_{ex} & {}^0f_{ey} \end{bmatrix}^T$$

➤ 在{2}中表示的末端操作力

$${}^2F_e = \begin{bmatrix} {}^2f_{ex} & {}^2f_{ey} \end{bmatrix}^T$$



求解思路： 对各杆件进行受力分析，建立力平衡方程。

11.2.1 引例：平面2R机器人

◆ 各杆件的力平衡方程

➤ 对杆件2进行受力分析

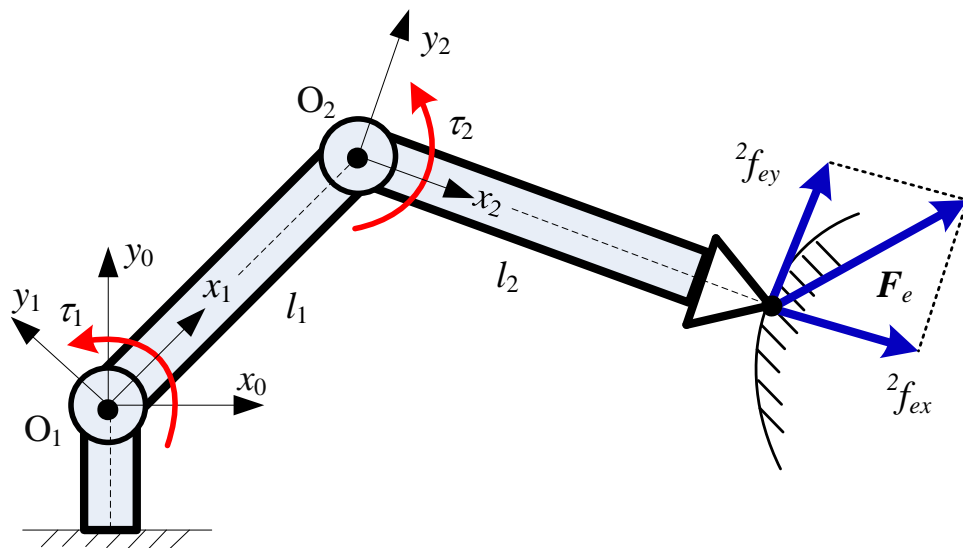
- 末端对杆件2的作用力矩为

$${}^2\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -{}^2f_{ex} \\ -{}^2f_{ey} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 {}^2f_{ey} \end{bmatrix}$$

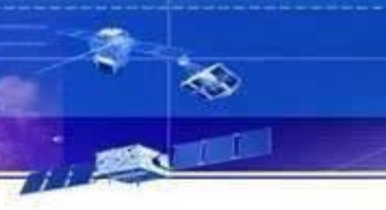
- 关节2力矩与 ${}^2\mathbf{M}_2$ 的 z 分量平衡

$$\tau_2 + {}^2\mathbf{M}_2^T {}^2\mathbf{z}_2 = 0$$

- 进一步得到 $\tau_2 = l_2 {}^2f_{ey}$



11.2.1 引例：平面2R机器人



◆ 各杆件的力平衡方程

➤ 对杆件1进行受力分析

- 将杆1和2等效为一整体，以 O_1 为回转中心，环境力 $-F_e$ 产生力矩

$${}^1\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 \\ l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\text{Rot}(z, \theta_2) \begin{bmatrix} -{}^2f_{ex} \\ -{}^2f_{ey} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 s_2 {}^2f_{ex} - (l_1 c_2 + l_2)({}^2f_{ey}) \end{bmatrix}$$

- 关节1力矩与 ${}^1\mathbf{M}_1$ 的 z 分量平衡

$$\tau_1 = -{}^1\mathbf{M}_1^T {}^1\mathbf{z}_1 = l_1 s_2 {}^2f_{ex} + (l_1 c_2 + l_2)({}^2f_{ey})$$

11.2.1 引例：平面2R机器人

◆ 写成矩阵的形式可得

- 将求得的关节1和关节2表达式组成**矩阵**，有

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2 f_{ex} \\ {}^2 f_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} {}^2 \mathbf{F}_e$$

- 由{0}系到{2}系的姿态矩阵（平面情况）为

$${}^0 \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} \\ s_{12} & c_{12} \end{bmatrix}$$

- 因此，{0}、{2}系下表示的力矢量满足

$$\begin{cases} {}^0 \mathbf{F}_e = {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{F}_e \\ {}^2 \mathbf{F}_e = ({}^0 \mathbf{R}_2)^T ({}^0 \mathbf{F}_e) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} {}^2 f_{ex} \\ {}^2 f_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0 f_{ex} \\ {}^0 f_{ey} \end{bmatrix}$$

11.2.1 引例：平面2R机器人

◆ 写成矩阵的形式可得

➤ 进一步可得 τ 与 0F_e 的关系

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0f_{ex} \\ {}^0f_{ey} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\tau = J^T F_e}$$

➤ 观察并比较微分运动学方程

$$\begin{bmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boxed{\dot{x}_e = J \dot{\theta}}$$

其中 $J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$ 为速度雅可比矩阵

上述两个方程中的映射矩阵有什么关系？

11.2.1 引例：平面2R机器人

◆ 速度雅可比与力雅可比

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

速度雅可比矩阵

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \mathbf{F}_e$$

雅可比矩阵的转置 \mathbf{J}^T

➤ 定义： \mathbf{J}^T 为力雅可比矩阵

力雅可比矩阵是速度雅可比矩阵的转置！

11.2.2 一般情况推导

◆ 依据：虚功原理

虚功原理：刚体系平衡的充要条件是所有主动力在任何虚位移上所做的虚功之和等于零。 又称虚位移原理。

➤ 主动力所做虚功

① 关节驱动力在关节位移上所做虚功

$$\delta W_J = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 + \cdots + \tau_n \delta q_n = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q}$$

② 环境对末端作用力 $(-f_e, -m_e)$ 在末端位移上所做虚功

$$\delta W_e = -\mathbf{f}_e^T \mathbf{d}_{pe} - \mathbf{m}_e^T \boldsymbol{\delta}_{\phi_e} = -\mathbf{F}_e^T \mathbf{D}_e$$

➤ 虚功之和为0

$$\delta W_J + \delta W_e = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{F}_e^T \mathbf{D}_e = 0$$

11.2.2 一般情况推导

◆ 正向静力学

- 结合末端虚位移与关节虚位移的关系，得正向静力学方程

$$\left. \begin{aligned} D_e &= J \delta q \\ \tau^T \delta q - F_e^T D_e &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau^T = F_e^T J \Rightarrow \tau = J^T F_e$$

正向静力学
方程

正向静力学：建立了平衡状态下，末端操作力到关节驱动力的映射关系！

11.2.2 一般情况推导

◆ 逆向静力学

已知关节驱动力，求解末端操作力。

➤ 对于 n 维关节状态、 m 维末端状态 J 为 $m \times n$ 、 J^T 为 $n \times m$ 矩阵

- ① J 为 $m \times n$ 的速度雅可比阵，代表 n 维关节速度到 m 维末端速度的映射
- ② J^T 为 $n \times m$ 的力雅可比矩阵，代表 m 维末端力到 n 维关节力的映射

逆静力学：建立了平衡状态下，关节驱动力到末端操作力的映射关系（不考虑摩擦力、重力）！

11.2.2 一般情况推导

◆ 逆向静力学

➤ 根据 n 和 m 维的不同关系进行求解

① 若 $n=m$ ，即全自由度机器人，当 J^T 满秩时

$$F_e = \left(J^T \right)^{-1} \tau$$

J^T 不满秩静力学奇异
(也为运动学奇异)

② 若 $n < m$ ，即欠自由度机器人，静力学为欠定方程（此时运动学为超定方程），通过伪逆求最小范数解

$$F_e = J \left(J^T J \right)^{-1} \tau$$

③ 若 $n > m$ ，即冗余机器人，静力学为超定方程（此时运动学为欠定方程），通过伪逆求最小二乘解

$$F_e = \left(J J^T \right)^{-1} J \tau$$

11.2.2 一般情况推导

◆ 静力学的应用

➤ 对于平衡状态（计算平衡力）

用于计算抵消环境作用力 $-F_e$ 所需要的关节驱动力/力矩 τ ；
或者说计算关节力矩 τ 在末端产生的对环境的操作力 F_e

$$\tau = J^T F_e, \quad F_e = \left(J^T \right)^{-1} \tau$$

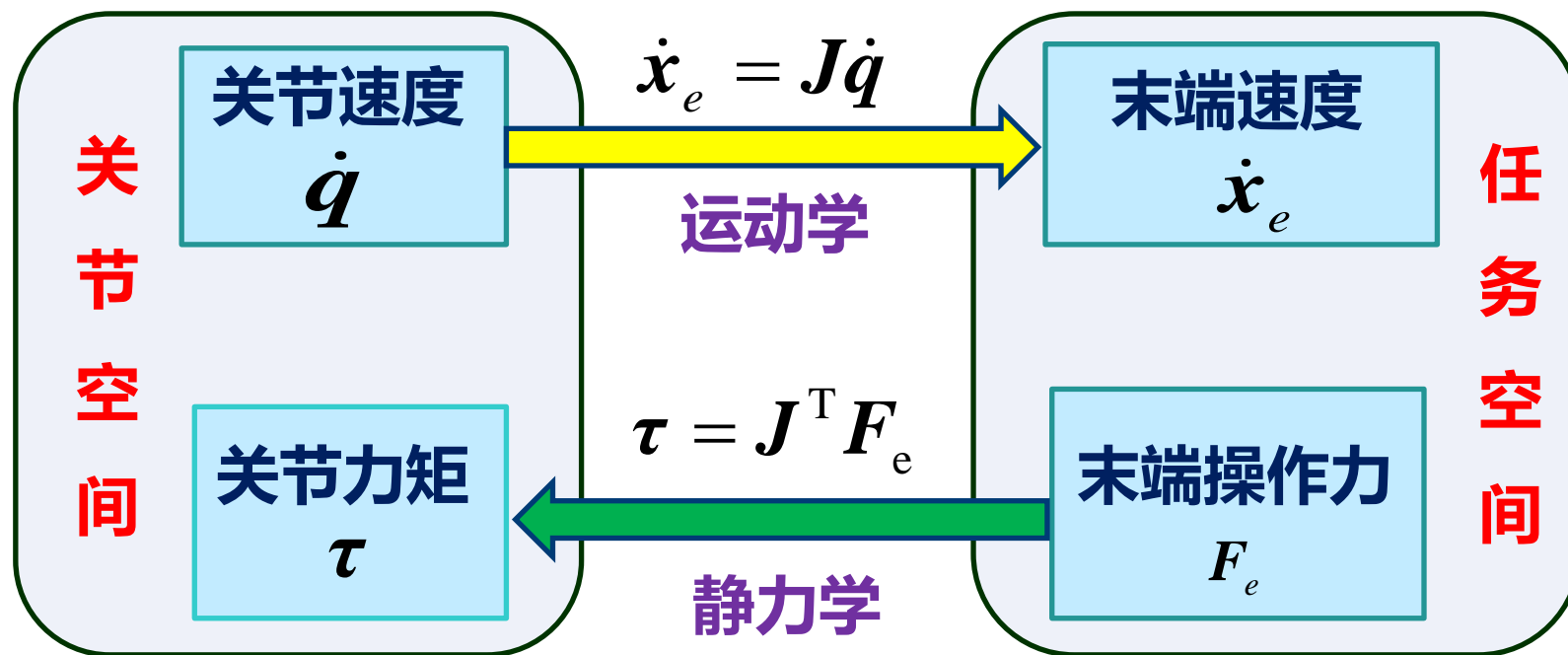
➤ 对于非平衡状态（拓展应用，控制末端运动）

作用于关节的驱动力/力矩 τ 等效到作用于末端的力/力矩 F_e ，即对关节施加 τ 等效于对末端施加 F_e 从而使其运动。

$$\tau = J^T F_e = \begin{bmatrix} K_{pp} & \\ & K_{po} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dp} & \\ & K_{do} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}$$

11.2.3 运动-静力对偶性及其应用

◆ 运动学与静力学的对偶关系



- 正运动学：关节空间到任务空间的速度映射
- 正静力学：任务空间到关节空间的静力映射

运动学与静力学之间存在对偶关系，称为**运动-静力对偶性或二元性**

11.2.3 运动-静力对偶性及其应用



◆ 对偶关系的应用

近似考虑：平衡点附近的运动分析，近似看成“广义弹簧单元”

- 关节作用力与关节位移变化量之间有如下关系

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_J \Delta \mathbf{q}$$

- 末端操作力与末端位移变化量之间有如下关系

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{x}_e$$

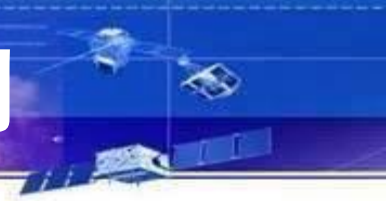
- 结合上面两式及运动学方程

$$\Delta \mathbf{x}_e = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_e$$

- 可得末端位移与关节位移的近似关系

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K}_J^{-1} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{F}_e = \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{x}_e$$

11.2.3 运动-静力对偶性及其应用



◆ 对偶关系的应用

➤ 两种近似关系

① 关节广义刚度为1

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{x}_e \approx \mathbf{J}^T \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{x}_e$$

② 末端广义刚度为1

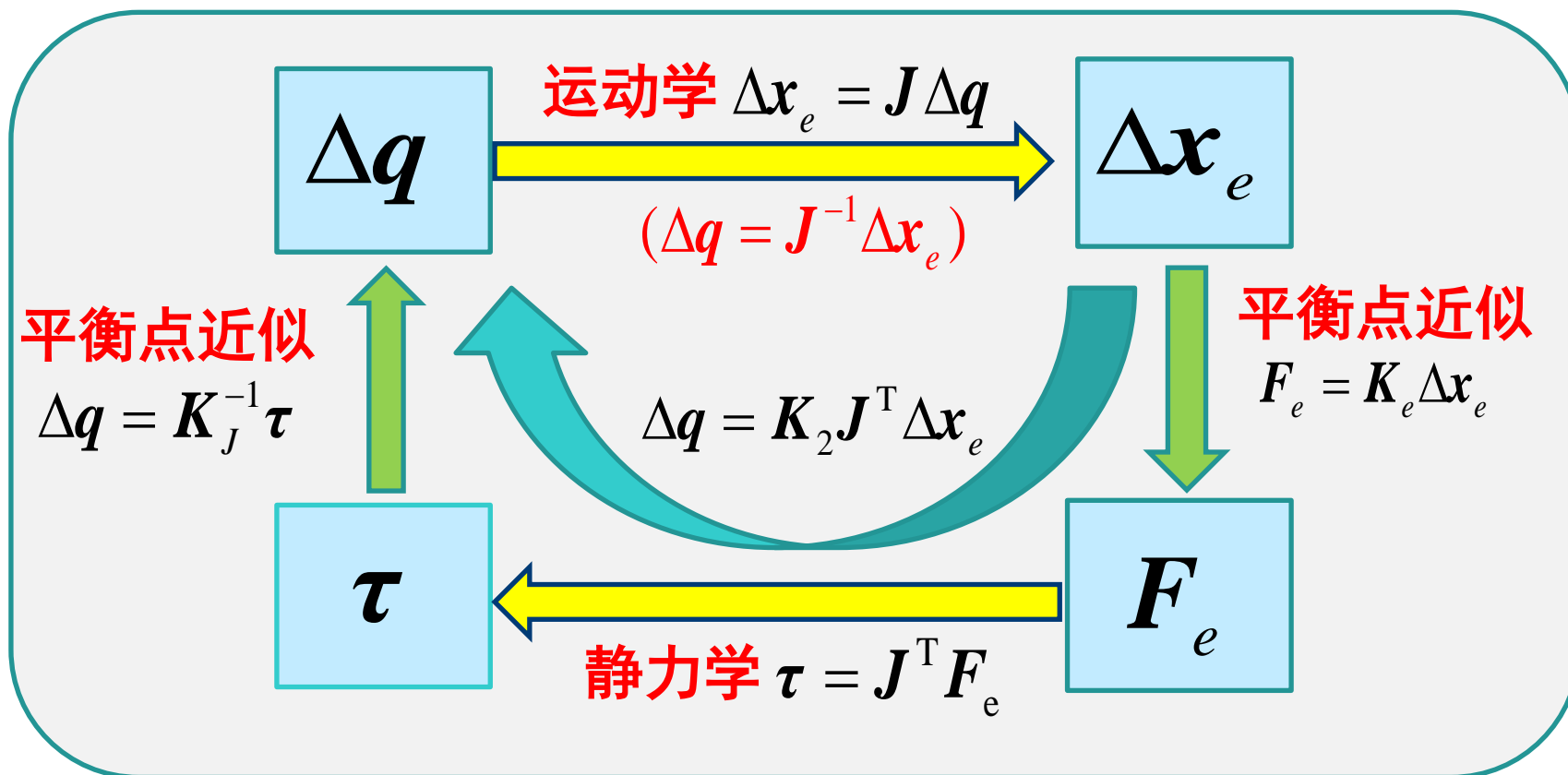
$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{x}_e \approx \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{x}_e \approx \mathbf{K}_2 \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{x}_e$$

➤ 相应的近似运动学方程

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{q} \approx \mathbf{J}^T \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{x}_e \\ \Delta \mathbf{q} \approx \mathbf{K}_2 \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{x}_e \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} \approx \mathbf{J}^T \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{x}}_e \\ \dot{\mathbf{q}} \approx \mathbf{K}_2 \mathbf{J}^T \dot{\mathbf{x}}_e \end{cases}$$

11.2.3 运动-静力对偶性及其应用

◆ 对偶关系的应用



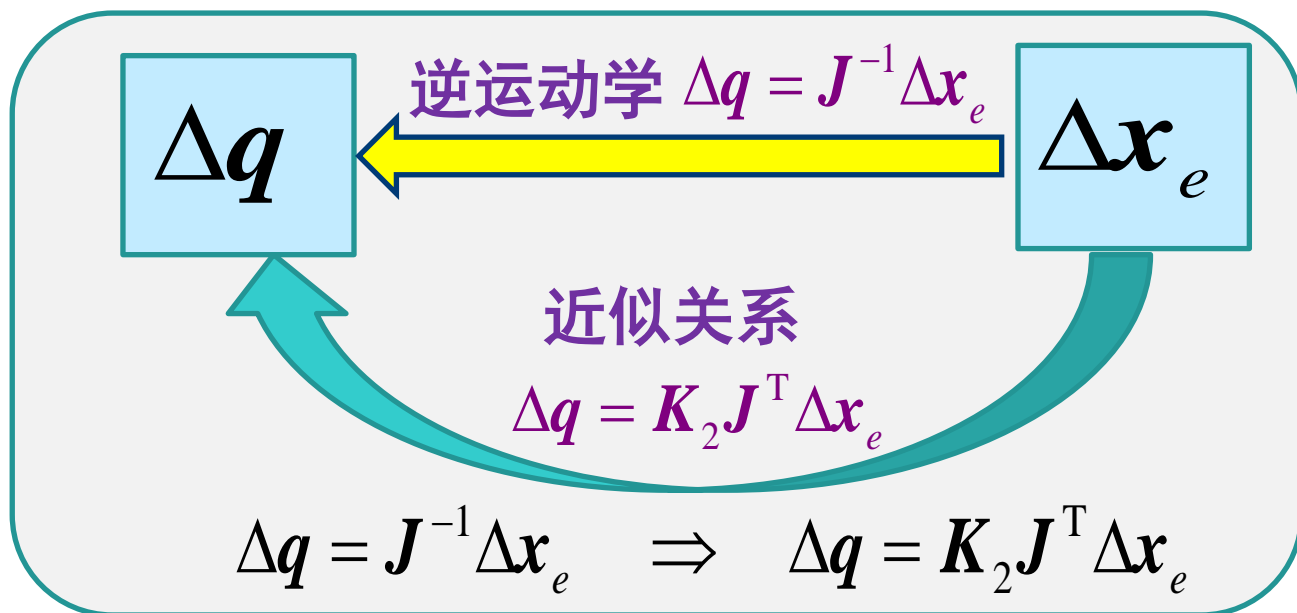
在平衡点附近，速度及驱动力的状态传输构成了闭环，因而

$$\Delta q = J^{-1} \Delta x_e \Rightarrow \Delta q = K_2 J^T \Delta x_e$$

11.2.3 运动-静力对偶性及其应用

◆ 对偶关系的应用

➤ 基于对偶关系，可构建基于雅可比转置的近似运动学。



➤ 应用：在数值迭代法求逆、笛卡尔轨迹控制方面具有重要应用。

好处：避免雅可比矩阵求逆引起的奇异问题。

坏处：收敛情况与K有关，可能导致不收敛或收敛慢。

11.2.4 静力学方程的分析

◆ 末端六自由度情况

➤ 微分运动学方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

➤ 静力学方程:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{m}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v^T & \mathbf{J}_\omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{m}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}_v^T \mathbf{f}_e + \mathbf{J}_\omega^T \mathbf{m}_e$$

说明一般情况下，末端作用力、作用力矩都会对关节产生作用

11.2.4 静力学方程的分析

◆ 平面2R机械臂静力学分析

➤ 微分运动学方程

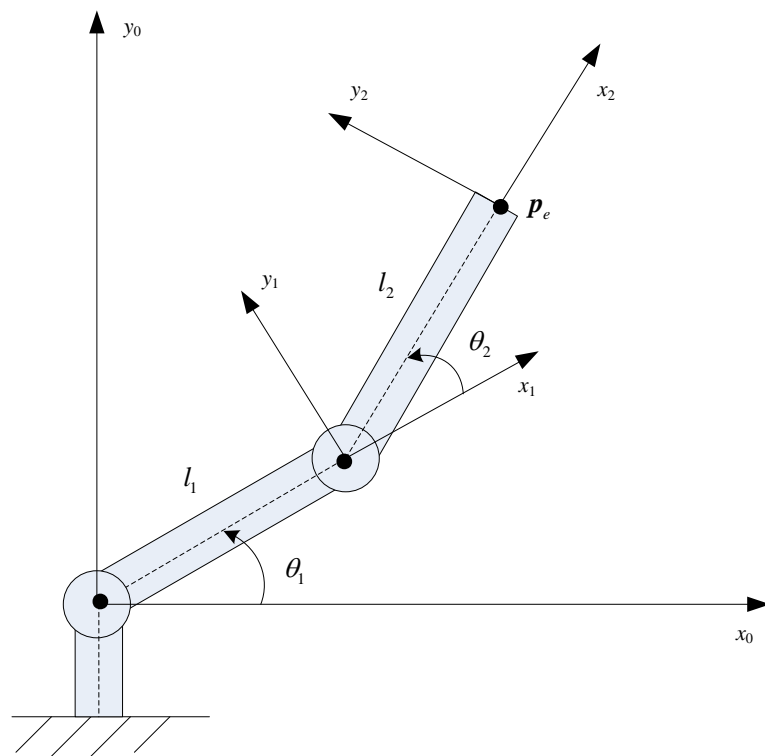
$$\begin{bmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

➤ 静力学方程

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{ex} \\ f_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ex} \\ f_{ey} \end{bmatrix}$$

➤ 在{2}中描述力矢量，则有

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2 f_{ex} \\ {}^2 f_{ey} \end{bmatrix}$$



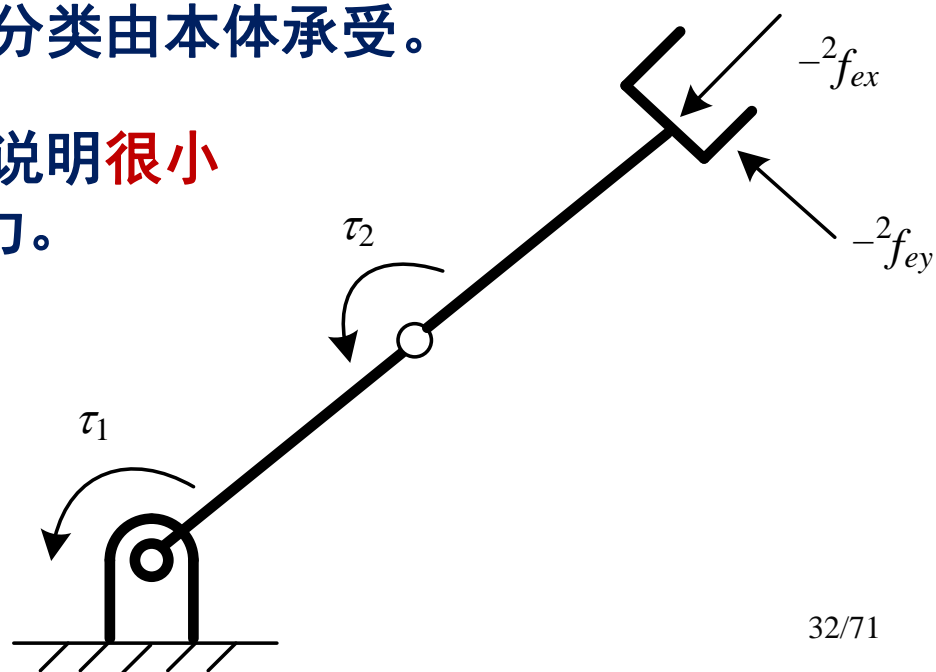
11.2.4 静力学方程的分析

◆ 平面2R机械臂

➤ 运动学奇异时， $\theta_2=0$ 或 π 时，静力学方程为

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm l_1 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2f_{ex} \\ {}^2f_{ey} \end{bmatrix}$$

- 末端 ${}^2f_{ex}$ 不在关节处产生力矩，该分类由本体承受。
- 若对上式求逆， ${}^2f_{ex}$ 将为无穷大。说明很小的关节力就能平衡非常大的末端力。



11.2.4 静力学方程的分析

◆ 空间3R肘机器人

- 微分运动学方程

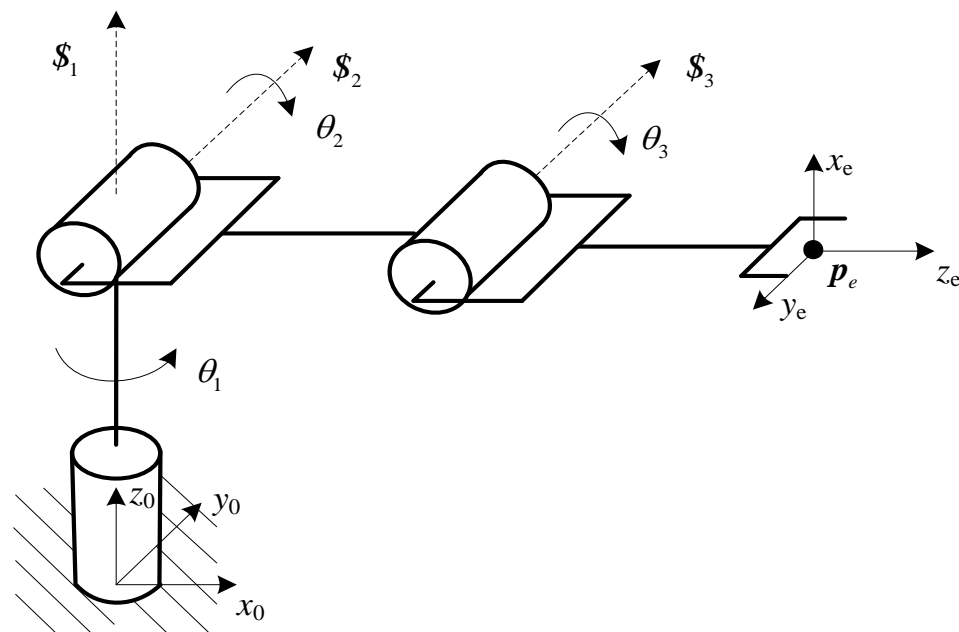
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

- 静力学方程

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v^T & \mathbf{J}_\omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{m}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}_v^T \mathbf{f}_e + \mathbf{J}_\omega^T \mathbf{m}_e$$

- 若不考虑转动问题，可假设 $\mathbf{m}_e=0$ ，则

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{J}_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_v^T \mathbf{f}_e$$



11.2.4 静力学方程的分析

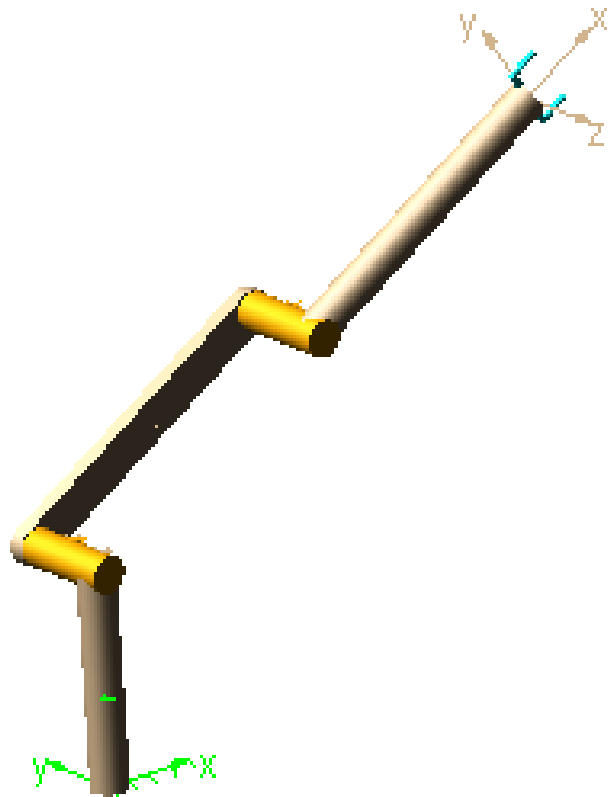
◆ 空间3R肘机器人

➤ 奇异臂型下的受力分析

● 处于肘部奇异时:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm(a_2 + a_3 c_2) \\ 0 & a_3 \pm a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3f_{ex} \\ {}^3f_{ey} \\ {}^3f_{ez} \end{bmatrix}$$

结果： ${}^3f_{ex}$ 无关不在关节处产生作用，
该分量由本体承受。



11.2.4 静力学方程的分析

◆ 空间3R肘机器人

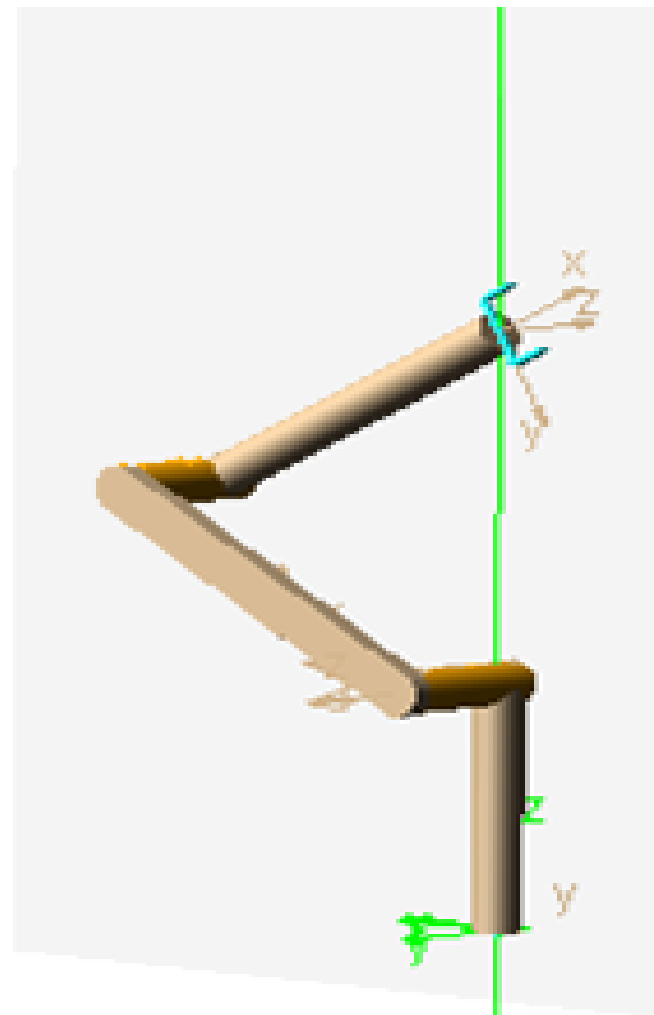
➤ 奇异臂型下的受力分析

● 处于肩部奇异时:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 s_3 & a_3 + a_2 c_3 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3 f_{ex} \\ {}^3 f_{ey} \\ {}^3 f_{ez} \end{bmatrix}$$

结果：末端 ${}^3 f_{ez}$ 不在关节处产生作用，该分量由本体承受。

此外，关节1所需平衡力矩总为0，这在某些需要大力矩操作且保护关节的时候会有应用价值。



第11讲 工业机器人的动力学建模方法

1

机器人受力与运动分析

2

机器人静力学方程

3

拉格朗日动力学建模

4

牛顿-欧拉动力学建模

5

动力学模型的应用

11.3.1 动力学建模基本原理

◆ 拉格朗日方程

- 综合利用达朗贝尔原理和虚功原理推导得出
- 假设系统的总动能为 T ，总势能为 V ，定义拉格朗日函数 L ：

$$L = T - V$$

则拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

其中 Q_j 为广义力矩。

11.3.2 拉格朗日建模流程



◆ 拉格朗日法建模流程

- (1) 确定系统的**状态变量** (x_1, x_2, \dots, x_n) 和驱动变量 (τ_1, \dots, τ_n)
- (2) 推导系统的**动能和势能** : $T=f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V=f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (3) 确定**拉格朗日函数**: $L=T-V=f_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (4) 拉格朗日函数对各状态变量**求偏导数**, 即得到动力学方程

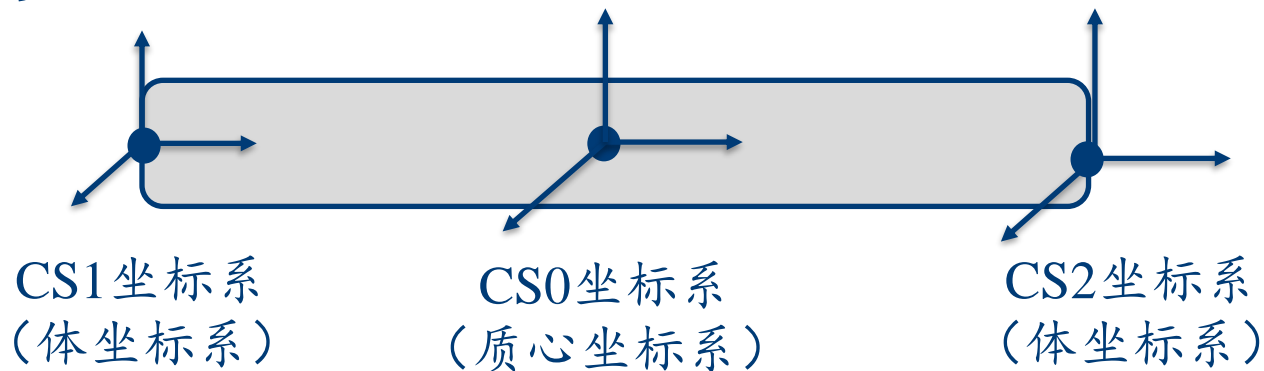
$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

与地面固定基座机器人相比, 基座运动的情况下, **基座的姿态、质心位置**也作为广义坐标, 其动能要包含进去

11.3.3 刚体质量特性描述

◆动力学参数（又称质量特性参数、惯性参数）

- 质量 m （平面、3D空间均为1维）
- 相对于质心的惯量（平面为单变量 I ，3D空间为 3×3 矩阵，6个变量）
- 质心位置（平面为二维 (r_x, r_y) ，3D空间为3维 (r_x, r_y, r_z) ，相对于体坐标系

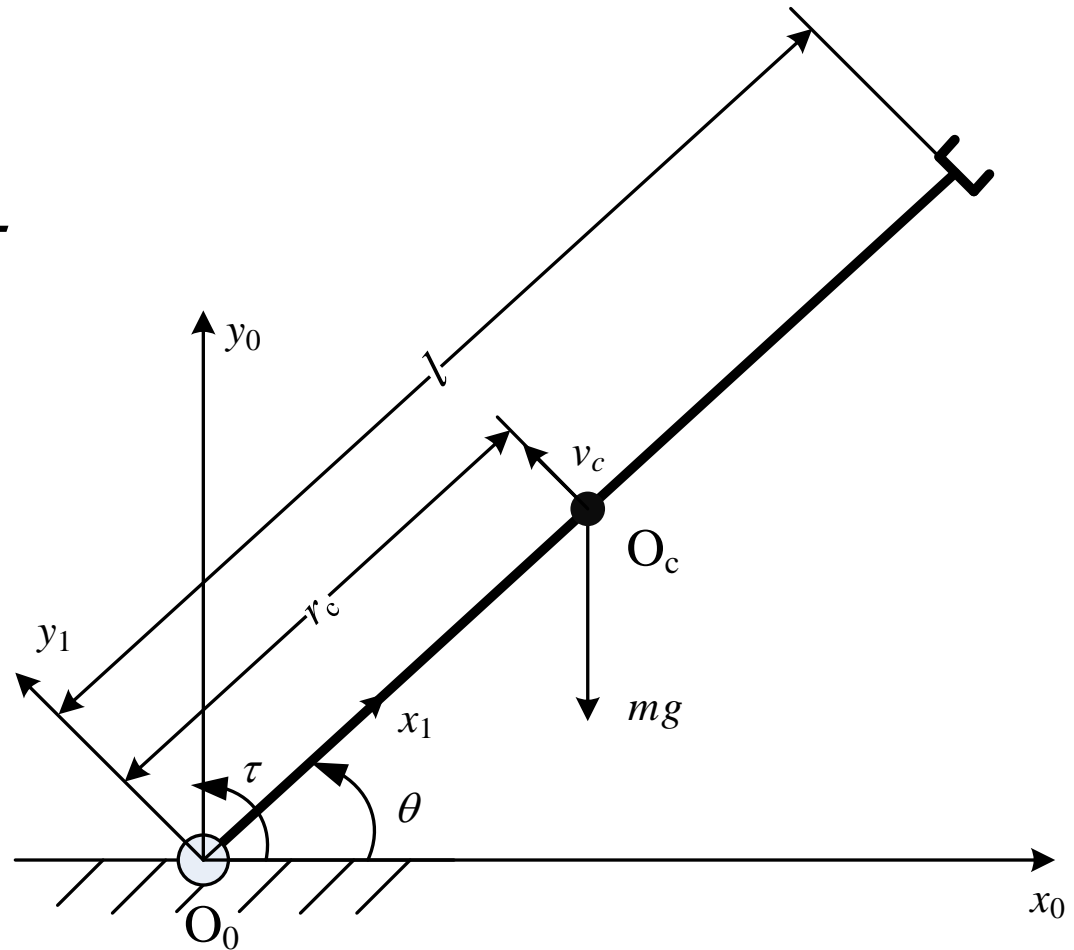


- 对于**空间3D**，刚体有**10个**质量特性参数
- 对于**平面2D**，仅需**4个**质量特性参数

11.3.4 单自由度机械臂

◆ 状态变量及驱动变量

- 状态变量：转动角 θ
- 驱动变量：关节力矩 τ



11.3.4 单自由度机械臂

◆ 拉格朗日动力学建模

➤ 动能:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2$$

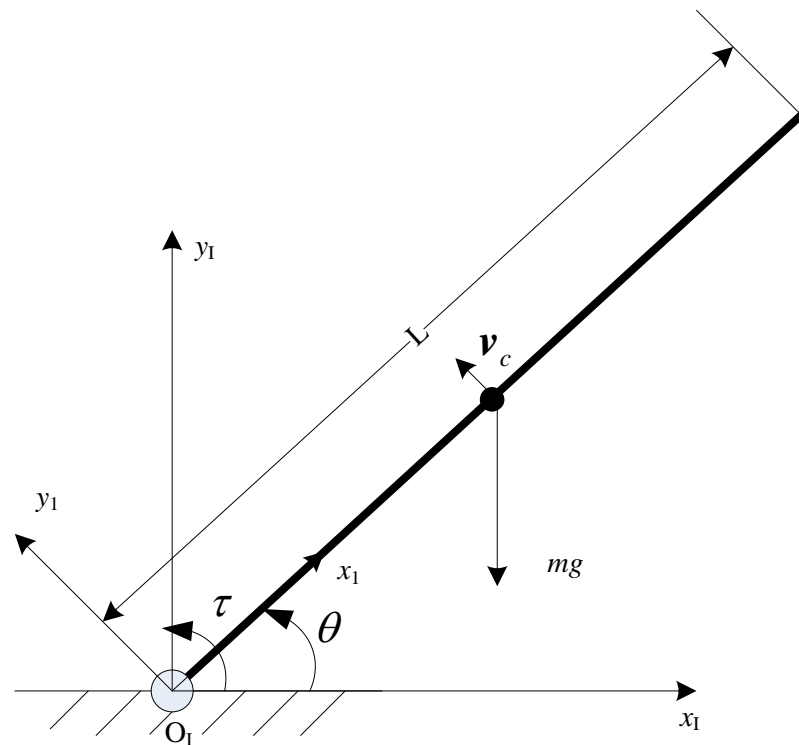
其中: $v_c = \frac{l}{2}\dot{\theta}$, $I_c = \frac{1}{12}ml^2$

因此动能表达式为:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

➤ 势能计算:

$$V = mgh = \frac{1}{2}mgl \sin \theta$$



11.3.4 单自由度机械臂

◆ 拉格朗日动力学建模

➤ 拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl \sin \theta$$

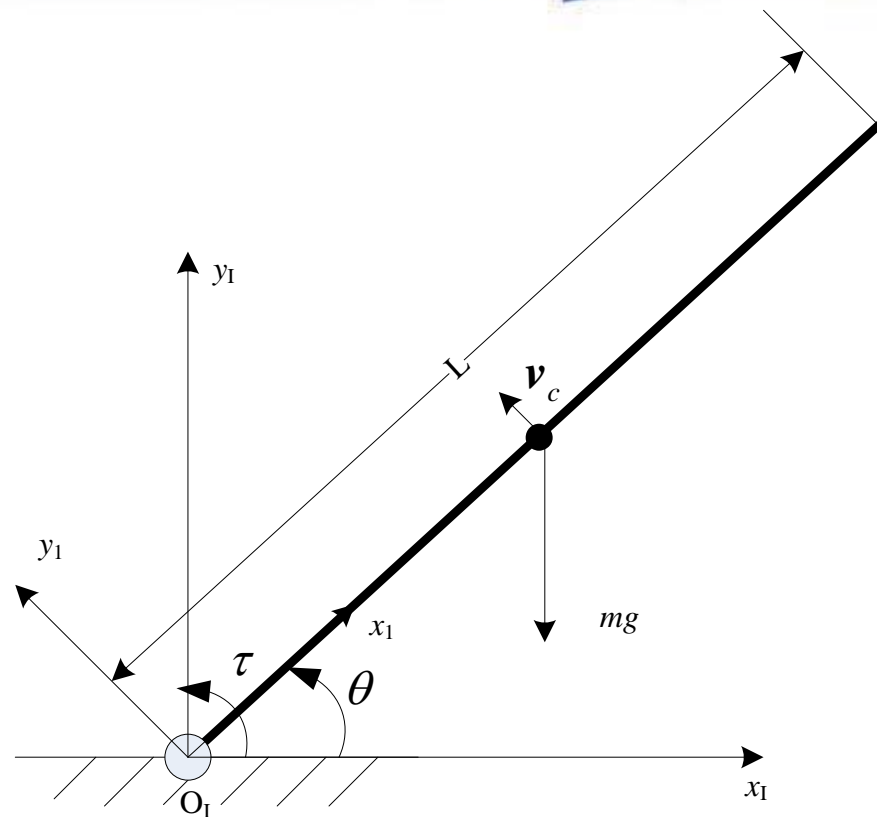
➤ 计算关于 $\dot{\theta}$, θ 的偏导数

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}mgl \cos \theta \end{cases}$$

➤ 拉格朗日定理计算动力学

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad \longrightarrow$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl \cos \theta = \tau$$



11.3.4 单自由度机械臂

◆对比：基于经典力学建立动力学模型

➤ 经典力学

合力矩等于转动惯量与加速度的积，即：

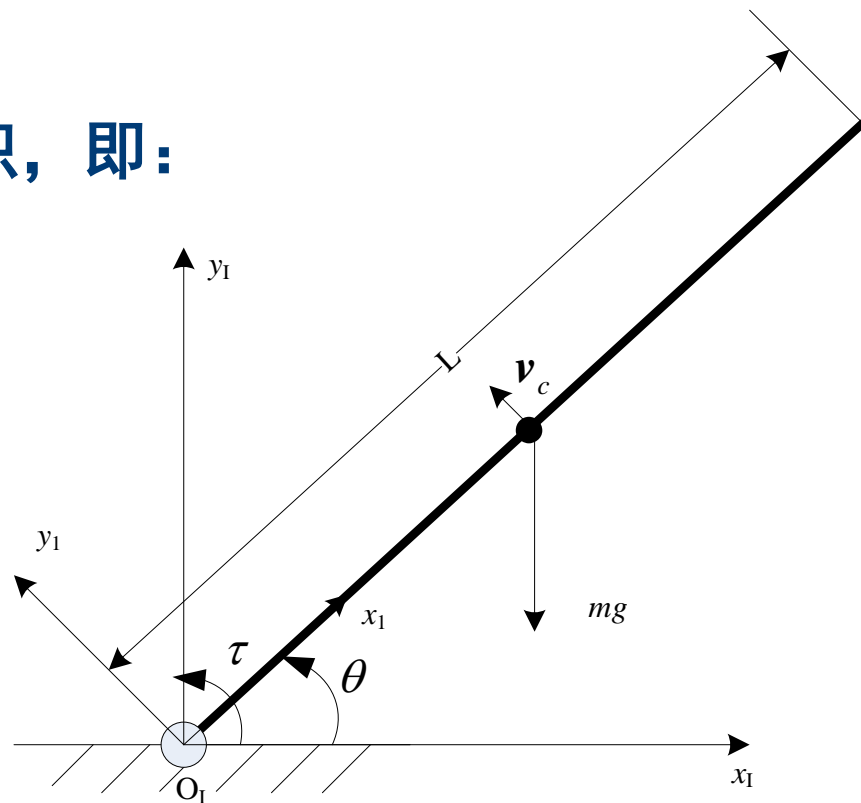
$$\tau_{\Sigma} = J\ddot{\theta}$$

• 对于单自由度机械臂

$$\begin{cases} \tau_{\Sigma} = \tau - \frac{1}{2}mgl \cos \theta \\ J = \frac{1}{3}ml^2 \end{cases}$$

➤ 因此，动力学方程为

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl \cos \theta = \tau$$



结果与采用拉格朗日方法的一样！

11.3.5 平面2R机械臂动力学

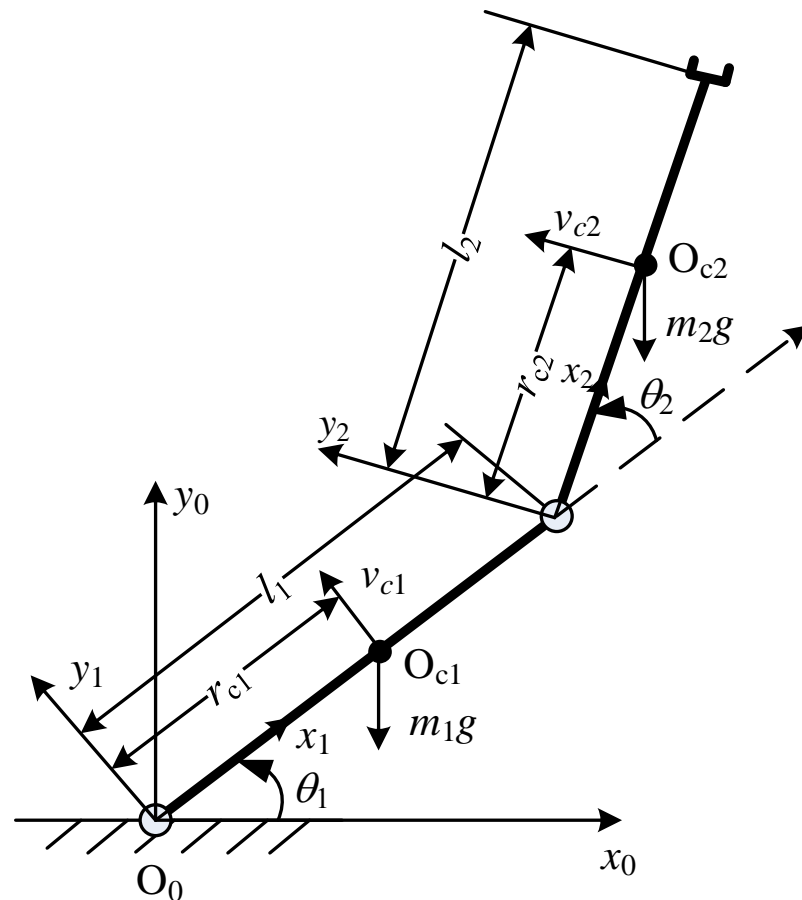
◆动能计算

➤ 杆件1、2的质心位置：

$$\mathbf{r}_{c1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \\ \frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c2} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

➤ 杆件1、2的质心线速度：

$$\mathbf{v}_{c1} = \dot{\mathbf{r}}_{c1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \\ \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1$$
$$\mathbf{v}_{c2} = \dot{\mathbf{r}}_{c2} = \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \frac{1}{2} L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$



11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆动能计算

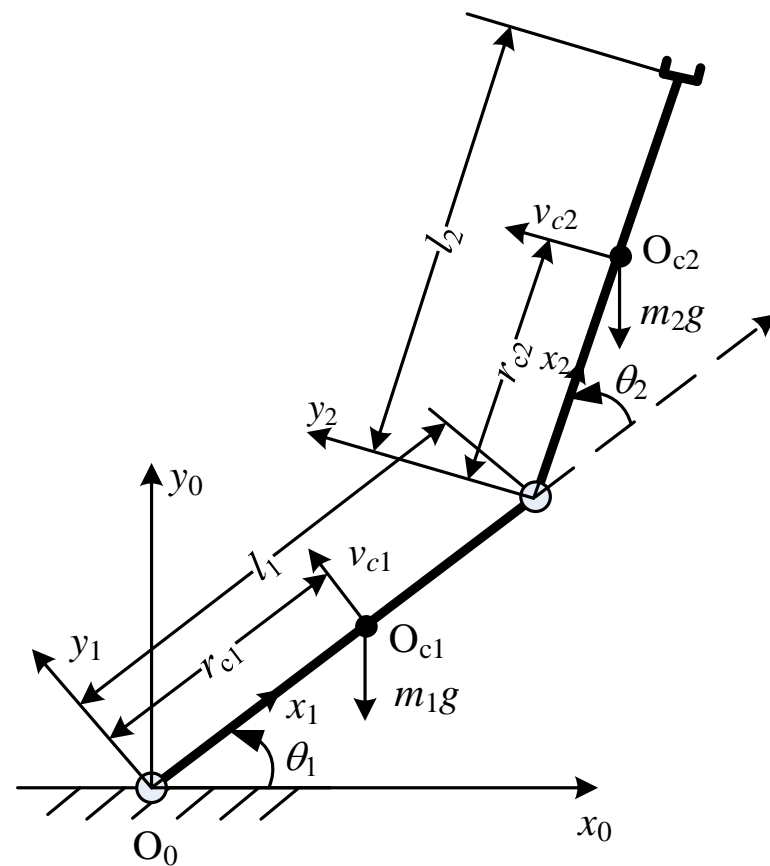
➤ 杆件1、2的动能:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{c1}^T \mathbf{v}_{c1} + \frac{1}{2} I_{c1} \omega_1^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{c2}^T \mathbf{v}_{c2} + \frac{1}{2} I_{c2} \omega_2^2 \end{cases}$$

其中: $\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}_1 \\ \omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases}$,

因此:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{cases}$$



系统的总动能:

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{6} m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

11.3.5 平面2R机械臂动力学

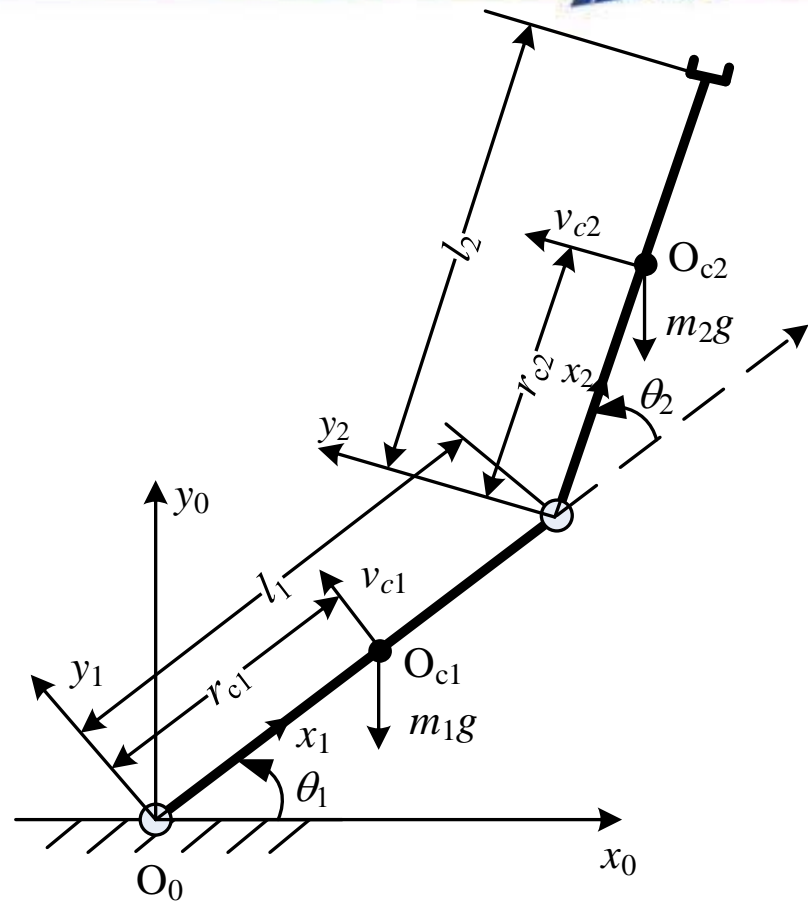
◆ 势能计算

➤ 杆件1、2的势能

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} m_1 g l_1 s_1 \\ V_2 = m_2 g \left(l_1 s_1 + \frac{l_2}{2} s_{12} \right) \end{cases}$$

➤ 系统的总势能

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} m_1 g l_1 s_1 + m_2 g \left(l_1 s_1 + \frac{l_2}{2} s_{12} \right)$$



11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆ 拉格朗日动力学

➤ 拉格朗日函数

$$L = T - V = \left(\frac{1}{6} m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \frac{1}{2} m_1 g l_1 s_1 - m_2 g \left(l_1 s_1 + \frac{l_2}{2} s_{12} \right)$$

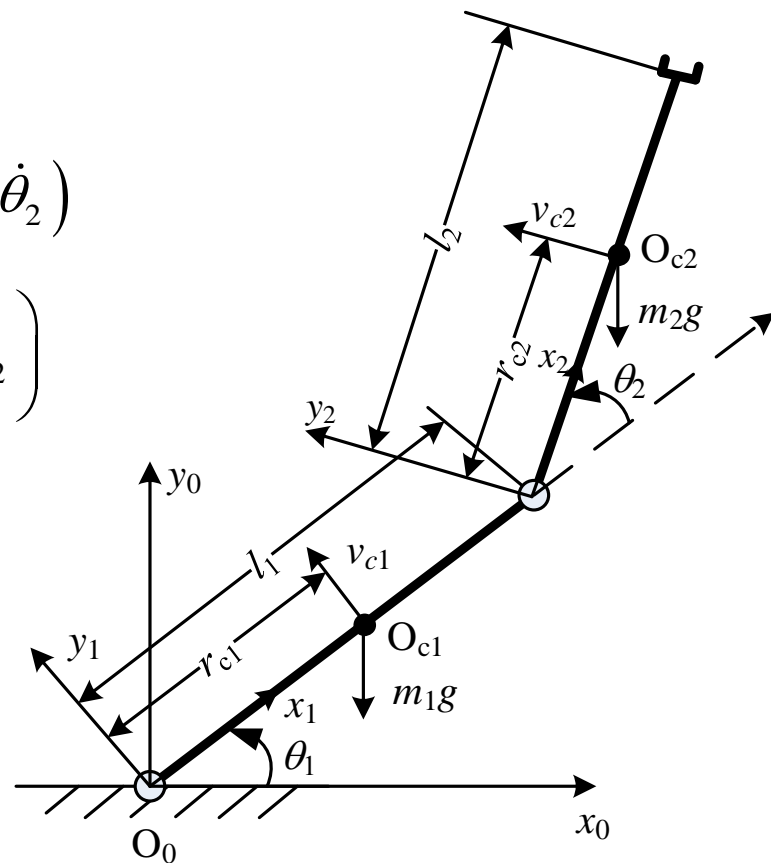
➤ 动力学方程推导:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2$$

➤ 最后得到:

$$D(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + h(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + G(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau}$$



11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆ 拉格朗日动力学

动力学方程:

$$D(\Theta)\ddot{\Theta} + h(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) = \tau$$

其中:

$$D(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2c_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c_2 \\ \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$h(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_2^2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1gl_1c_1 + m_2g\left(l_1c_1 + \frac{l_2}{2}c_{12}\right) \\ \frac{1}{2}m_2gl_2c_{12} \end{bmatrix}$$

11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆ 拉格朗日动力学

动力学方程: $D(\Theta)\ddot{\Theta} + h(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) = \tau$

➤ 对于非线性项，还可进一步分成两项:

$$\begin{aligned} h(\Theta, \dot{\Theta}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆ 拉格朗日动力学分析

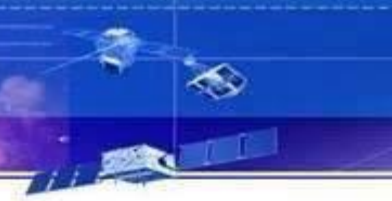
将前面结果重新写成简单的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{D_{11}} & D_{12} \\ D_{21} & \boxed{D_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} \\ h_{211} & h_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{112} & h_{121} \\ h_{212} & h_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

D_{11} 、 D_{22} 分别为绕关节1和关节2转动的等效转动惯量（Effective Inertia）

$D_{11}\ddot{\theta}_1$, $D_{22}\ddot{\theta}_2$ 关节*i*的加速度在关节*i*上产生的惯性力

11.3.5 平面2R机械臂动力学



◆ 拉格朗日动力学分析

将前面结果重新写成简单的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} \\ h_{211} & h_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{112} & h_{121} \\ h_{212} & h_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

D_{12} 、 D_{21} 分别为杆1对杆2、杆2对杆1的耦合惯量（Coupled Inertia）

$D_{21}\ddot{\theta}_1$ 、 $D_{12}\ddot{\theta}_2$ 为关节1、2的加速度在关节2、1上产生的惯性力

11.3.5 平面2R机械臂动力学

◆ 拉格朗日动力学分析

将前面结果重新写成简单的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} \\ h_{211} & h_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{112} & h_{121} \\ h_{212} & h_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

h_{111} 、 h_{122} 、 h_{211} 、 h_{222} 为向心加速度（Centripetal Acceleration）系数。
 h_{ijj} 对应关节 j 的速度在关节 i 上产生的向心力； h_{jii} 对应关节 i 的速度在关节 j 上产生的向心力。

11.3.5 平面2R机械臂动力学



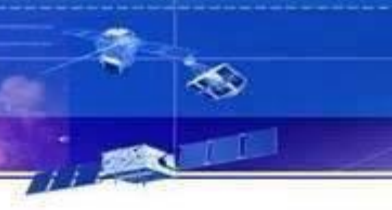
◆ 拉格朗日动力学分析

将前面结果重新写成简单的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} \\ h_{211} & h_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{112} & h_{121} \\ h_{212} & h_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

h_{112} 、 h_{121} 、 h_{212} 、 h_{221} 为向心加速度（Centripetal Acceleration）系数。
 h_{ijk} 对应关节 j 、 k 的速度在关节 i 上产生的科氏力(Coriolis force)。

11.3.5 平面2R机械臂动力学



◆ 拉格朗日动力学分析

将前面结果重新写成简单的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{111} & h_{122} \\ h_{211} & h_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{112} & h_{121} \\ h_{212} & h_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

G_1 和 G_2 分别为连杆1和连杆2的重力在关节1处产生的重力矩，以及连杆2的重力在关节2处产生的重力矩。

11.3.6 拉格朗动力学方程一般形式

◆ 根据末端与环境是否接触进行建模

- 末端与环境接触时，末端操作力为 F_e ，环境反作用力 $-F_e$

$$D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) = \tau - J^T F_e$$

- 末端不与环境接触， $F_e = 0$

$$D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

注：动力学方程中各项的含义

- ① $D(q)$ 为系统等效惯性矩阵，为正定对称阵，与臂型有关。 $D(q)\ddot{q}$ 为惯性力。
- ② $h(q, \dot{q})$ 为速度耦合项，即非线性力，包括科氏力和向心力。
- ③ $G(q)$ 为系统所受重力矩，仅与臂型相关。

11.3.6 拉格朗动力学方程一般形式

◆ 动力学方程的特点

➤ 对称性

$D(q)$ 是正定对称阵, D_{ii} 为相对于关节 i 的等效转动惯量; D_{ij} ($i \neq j$) 为关节 j 对关节 i 耦合作用对应的等效惯量、 D_{ji} 为关节 i 对关节 j 的耦合惯量, 因此 $D_{ij}=D_{ji}$

➤ 反对称性

将非线性力项中的关节速度变量分离出来

$$h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q}$$

则下面矩阵为反对称阵

$$N(q, \dot{q}) = \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$$

即矩阵 N 的元素满足 $n_{ij} = -n_{ji}$

第11讲 工业机器人的动力学建模方法

1

机器人受力与运动分析

2

机器人静力学方程

3

拉格朗日动力学建模

4

牛顿-欧拉动力学建模

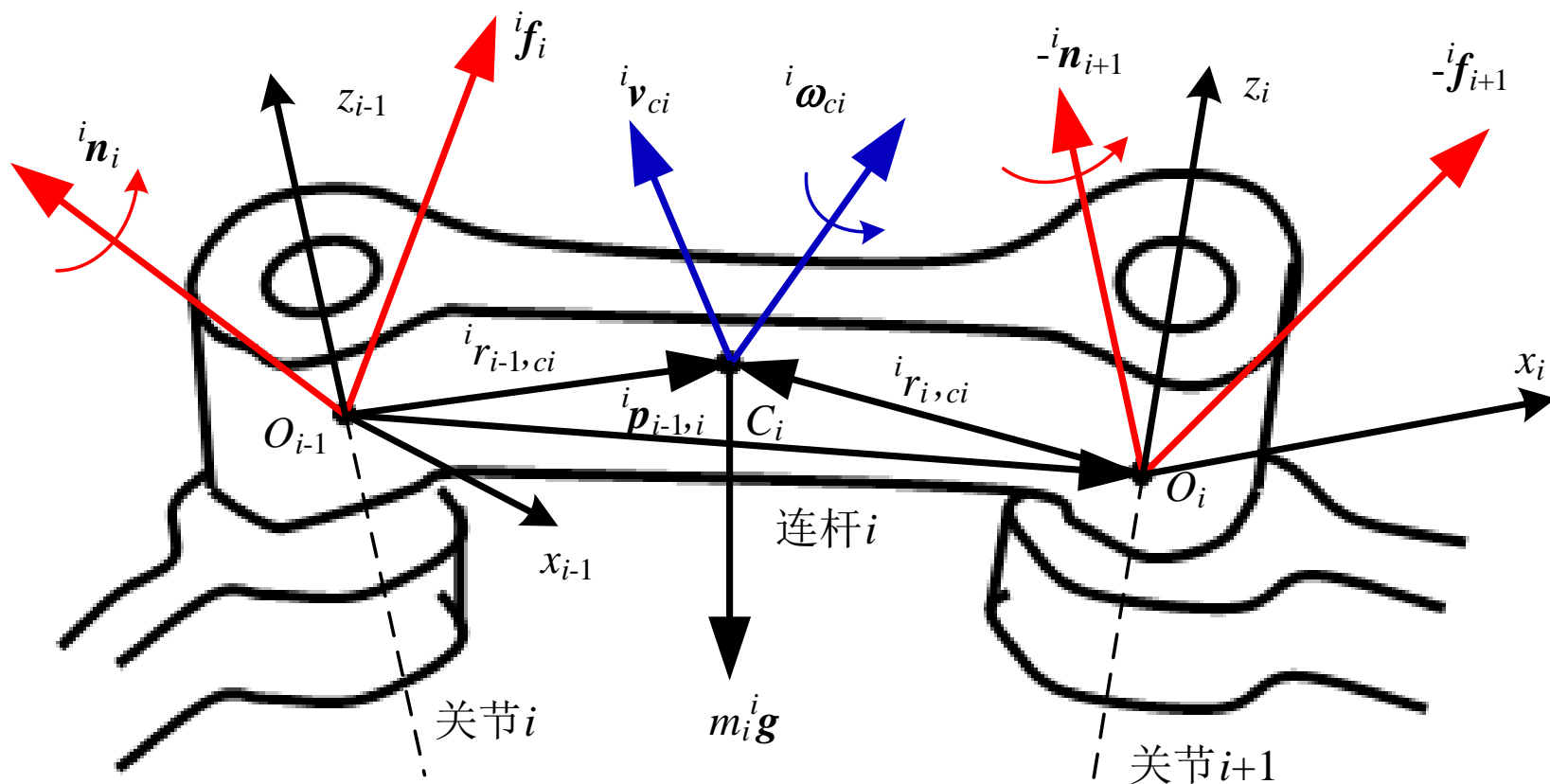
5

动力学模型的应用

11.4.1 连杆运动及受力

◆ 单个杆件受力

➤ 杆件 i 的受力情况



11.4.1 连杆运动及受力

◆ 单个杆件受力

➤ 杆件 i 受力状态描述

${}^i f_i$: 杆件 $(i-1)$ 对杆件 i 施加的力;

${}^i f_{i+1}$: 杆件 i 对杆件 $(i+1)$ 施加的力;

${}^i n_i$: 杆件 $(i-1)$ 对杆件 i 施加的力矩;

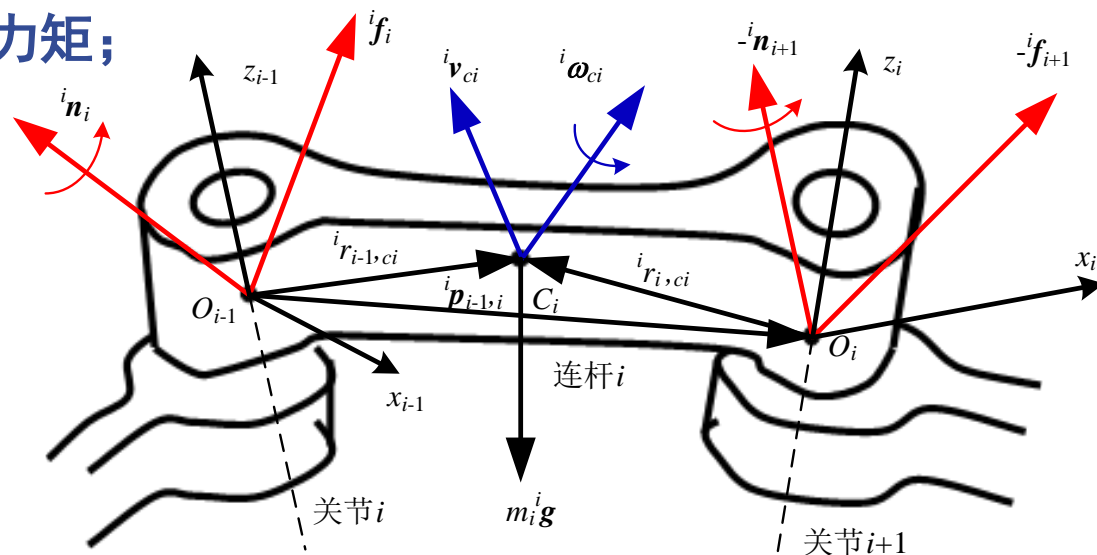
${}^i n_{i+1}$: 杆件 i 对杆件 $(i+1)$ 施加力矩;

$m_i {}^i g$: 杆件 i 所受重力。

➤ 杆件运动状态描述

${}^i v_{ci}$: 杆件 i 质心的线速度矢量;

${}^i \omega_{ci}$: 杆件 i 角速度矢量。



11.4.2 连杆的受力平衡

◆ 力平衡和力矩平衡

➤ 力平衡方程

力平衡方程如下，可得杆件 i 合外力：

$${}^i f_{ci} = {}^i f_i - {}^i f_{i+1} + m_i {}^i g$$

➤ 力矩平衡方程

力矩平衡方程如下，可得杆件 i 合外力矩：

$${}^i n_{ci} = {}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i r_{ci} \times {}^i f_{ci} - {}^i p_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$

注： f_{ci} 、 n_{ci} 为以杆件 i 质心为作用点建立等效力系后得到的合外力、力矩。

11.4.2 连杆的受力平衡

◆ 力平衡和力矩平衡

- 根据经典力学得到等效合力/合力矩与运动状态的关系

$${}^i \mathbf{f}_{ci} = m_i {}^i \dot{\mathbf{v}}_{ci}$$

$${}^i \mathbf{n}_{ci} = {}^i \mathbf{I}_{ci} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times {}^i \mathbf{I}_{ci} {}^i \boldsymbol{\omega}_i$$

$\dot{\mathbf{v}}_{ci}$: 杆件 i 质心的线加速度矢量;

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$: 杆件 i 角加速度矢量;

\mathbf{I}_{ci} : 杆件 i 对质心的转动惯量。

11.4.3 连杆速度的递推关系

◆ 速度及加速度递推方程

➤ 角速度递推关系 ($i=1, \dots, n$)

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i \right) & \text{旋转关节} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{移动关节} \end{cases}$$

➤ 线速度递推关系 ($i=1, \dots, n$)

$${}^i\mathbf{v}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} & \text{旋转关节} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left({}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i \right) + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} & \text{移动关节} \end{cases}$$

11.4.3 连杆速度的递推关系

◆ 速度及加速度递推方程

➤ 角加速度递推关系 ($i=1, \dots, n$)

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\ddot{q}_i + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}z_{i-1}\dot{q}_i \right) & \text{旋转关节} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{移动关节} \end{cases}$$

➤ 线加速度递推关系 ($i=1, \dots, n$)

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i}), & \text{旋转关节} \\ {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\ddot{q}_i \right) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_{i-1,i}) \\ \quad + 2{}^i\omega_i \times ({}^iR_{i-1} {}^{i-1}z_{i-1}\dot{q}_i), & \text{移动关节} \end{cases}$$

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{ci} = \begin{cases} {}^i\dot{\mathbf{v}}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_{i,ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_{i,ci}) & \text{旋转关节} \\ {}^i\dot{\mathbf{v}}_i & \text{移动关节} \end{cases}$$

11.4.4 连杆作用力的递推关系



◆ 连杆作用力和力矩递推方程

- 关节 $(i-1)$ 对杆件 i 的作用力 ($i=n, \dots, 1$)

$${}^i f_i = {}^i f_{i+1} + {}^i f_{ci} = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i f_{ci}$$

- 关节 $(i-1)$ 对杆件 i 的作用力矩 ($i=n, \dots, 1$)

$$\begin{aligned} {}^i n_i &= {}^i n_{i+1} + {}^i n_{ci} + {}^i f_i \times {}^i r_{i-1,ci} - {}^i f_{i+1} \times {}^i r_{i,ci} \\ &= {}^i R_{i+1} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i n_{ci} + {}^i f_i \times {}^i r_{i-1,ci} - \left({}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \right) \times {}^i r_{i,ci} \end{aligned}$$

11.4.4 连杆作用力的递推关系



◆ 关节驱动力/力矩计算

关节驱动力/力矩为**连杆(i-1)对连杆i的作用力/力矩沿轴向的分量**。

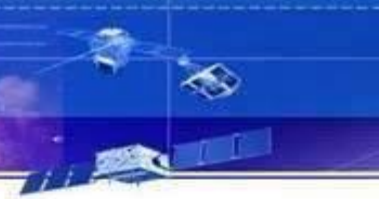
● 对于旋转关节

$$\tau_i = {}^i \mathbf{n}_i^T {}^i \mathbf{z}_{i-1} = {}^i \mathbf{n}_i^T \left({}^i \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{z}_{i-1} \right) = {}^i \mathbf{n}_i^T \left({}^{i-1} \mathbf{R}_i^T \mathbf{z}_0 \right)$$

● 对于移动关节

$$\tau_i = {}^i \mathbf{f}_i^T {}^i \mathbf{z}_{i-1} = {}^i \mathbf{f}_i^T \left({}^i \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{z}_{i-1} \right) = {}^i \mathbf{f}_i^T \left({}^{i-1} \mathbf{R}_i^T \mathbf{z}_0 \right)$$

11.4.5 递归动力学算法



◆ 向外递推($i: 1 \rightarrow n$)速度/加速度, 得到惯性力和力矩

$${}^i\omega_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\dot{q}_i \right) & \text{旋转关节} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{移动关节} \end{cases}$$

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\ddot{q}_i + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}z_{i-1}\dot{q}_i \right) & \text{旋转关节} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{移动关节} \end{cases}$$

$${}^i\dot{v}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_{i-1,i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_{i-1,i}), & \text{旋转关节} \\ {}^iR_{i-1} \left({}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\ddot{q}_i \right) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_{i-1,i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_{i-1,i}) \\ \quad + 2{}^i\omega_i \times ({}^iR_{i-1} {}^{i-1}z_{i-1}\dot{q}_i), & \text{移动关节} \end{cases}$$

$${}^i\dot{v}_{ci} = \begin{cases} {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ir_{i,ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ir_{i,ci}) & \text{旋转关节} \\ {}^i\dot{v}_i & \text{移动关节} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^if_{ci} = m_i {}^i\dot{v}_{ci} \\ {}^in_{ci} = {}^iI_i {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^iI_i {}^i\omega_i \end{cases}$$

11.4.5 递归动力学算法

◆ 向内递推($i: n \rightarrow 1$)连杆作用力/力矩, 得关节驱动力/力矩

$${}^i \mathbf{f}_i = {}^i \mathbf{f}_{i+1} + {}^i \mathbf{f}_{ci} = {}^i \mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} + {}^i \mathbf{f}_{ci}$$

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{n}_i &= {}^i \mathbf{n}_{i+1} + {}^i \mathbf{n}_{ci} + {}^i \mathbf{f}_i \times {}^i \mathbf{r}_{i-1,ci} - {}^i \mathbf{f}_{i+1} \times {}^i \mathbf{r}_{i,ci} \\ &= {}^i \mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{n}_{i+1} + {}^i \mathbf{n}_{ci} + {}^i \mathbf{f}_i \times {}^i \mathbf{r}_{i-1,ci} - \left({}^i \mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} \right) \times {}^i \mathbf{r}_{i,ci} \end{aligned}$$

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i \mathbf{n}_i^T \left({}^{i-1} \mathbf{R}_i^T \mathbf{z}_0 \right), & \text{旋转关节} \\ {}^i \mathbf{f}_i^T \left({}^{i-1} \mathbf{R}_i^T \mathbf{z}_0 \right), & \text{移动关节} \end{cases}$$

第11讲 工业机器人的动力学建模方法

1

机器人受力与运动分析

2

机器人静力学方程

3

拉格朗日动力学建模

4

牛顿-欧拉动力学建模

5

动力学模型的应用

11.5.1 常用动力学建模方法的比较

◆各种建模方法优缺点

建模方法	计算量	优点	缺点
拉格朗日法	$O(n^4)$	直观，能得到紧凑的解析形式，物理概念清晰，便于理解	计算量大，对于需要实时计算的场合一般需要简化
递归牛顿-欧拉法	$O(n)$	计算效率高，特别适用于计算机编程	不直观，得不到解析方程
高斯法	$O(n^3)$	利用力学中的高斯最小约束原理，把机器人动力学问题转换为求极值函数的变分问题	物理含义不清晰，计算量也较大
凯恩法	$O(n!)$	引入偏速度概念，避免函数求导的烦琐过程，兼有矢量力学和分析力学的特点，尤其适合于非完整系统，计算量也较小	非传统的推导方法，不宜掌握；也没有适合任意情况的统一形式，必须根据特定系统进行具体处理

11.5.2 动力学模型的应用场景



◆动力学正问题（正向动力学）

- 根据受力情况，计算关节运动状态，即

$$(\tau, F_e) \Rightarrow (q, \dot{q}, \ddot{q})$$

- 应用：作为虚拟对象（数学模型）代替实际对象，用于仿真。

◆动力学逆问题（逆向动力学）

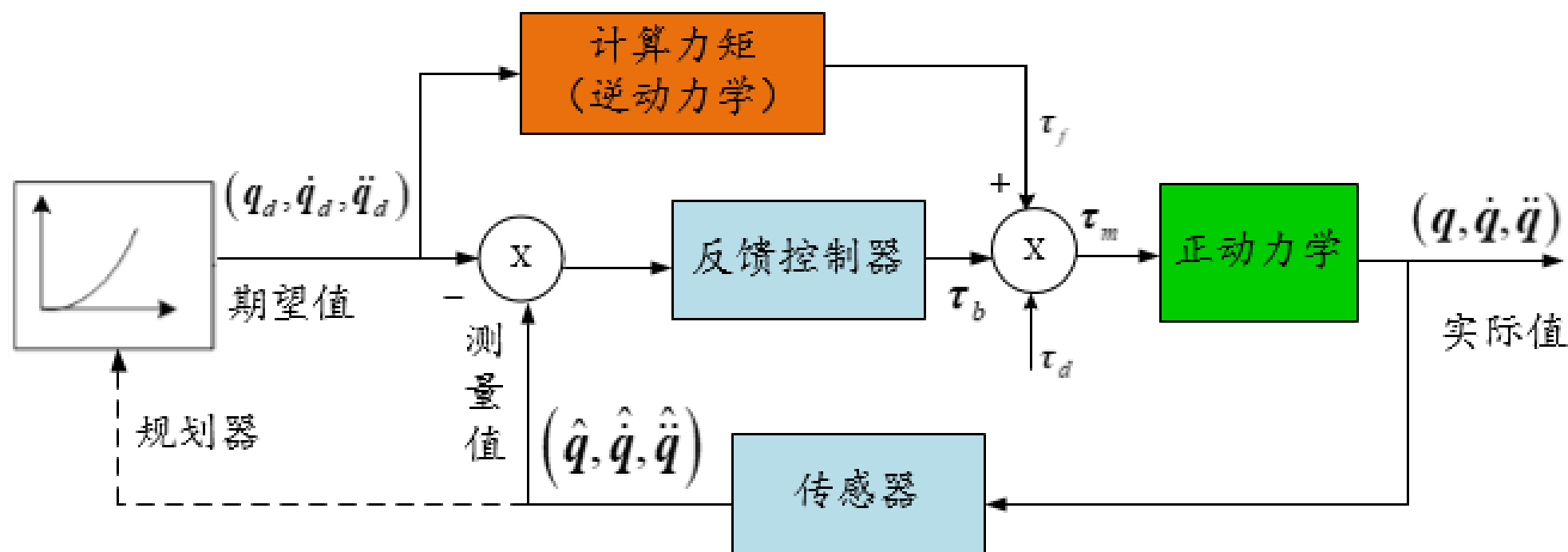
- 根据关节运动状态情况，计算受力情况，即

$$(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_e) \Rightarrow \tau$$

- 应用：根据期望运动，预测关节驱动力矩，用于控制。

11.5.2 动力学模型的应用场景

◆ 典型应用框图



谢谢！