# 第3章 刚体速度描述与微分运动学

彭键清 助理教授、硕导

中山大学 智能工程学院

邮箱：pengjq7@mail.sysu.edu.cn

办公室：工学园1栋505

2024年03月18日

# 第3章 刚体速度描述与微分运动学

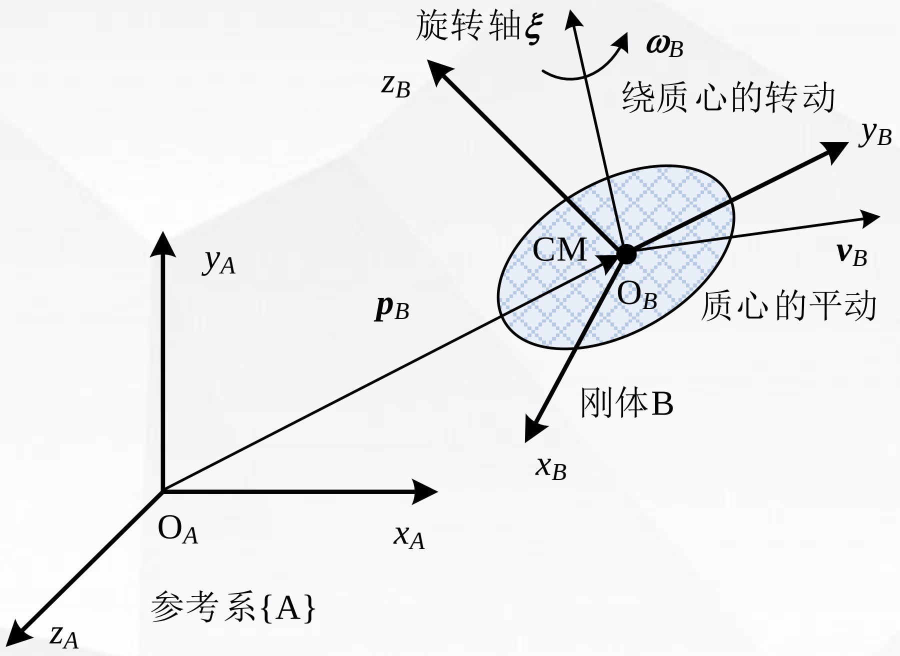
# 3.1 刚体的一般运动

## ◆ 刚体一般运动的分解

➢ 质心的平动，线速度

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}} = \left[v_x, v_y, v_z\right]^{\mathrm{T}}$$

线速度即为位置矢量的导数。




➢ 绕质心的转动，角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\omega_x, \omega_y, \omega_z\right]^{\mathrm{T}}$$

**问题：** 刚体的角速度与姿态参数的关系如何？直接求导吗？

欧拉角(12种）的微分、姿态四元数的微分……，*都不是！！*

# 3.1 刚体的一般运动

## ◆ 平移和旋转运动的比较

| 运动类型 | 位移描述 | 速度描述 | 特点 |
| --- | --- | --- | --- |
| 平移运动 | 位置矢量$\boldsymbol{p}$ | 线速度<br>$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{p}}$ | 三轴解耦<br>位置的改变与平动顺序无关，速度为位移导数 |
| 旋转运动 | 姿态矩阵 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$<br>姿态角 $\boldsymbol{\Psi}$<br>轴-角 $(\boldsymbol{k}, \phi)$<br>单位四元数 $\boldsymbol{Q}$ | 角速度<br>$\boldsymbol{\omega}=?$ | 三轴耦合<br>姿态的改变与旋转顺序相关，速度与姿态参数之间不是简单的导数关系 |

# 第3章 刚体速度描述与微分运动学

1 刚体的一般运动

2 刚体的姿态运动学

3 小角度下的简化姿态运动学

4 齐次矩阵表示下的微分运动

5 位姿误差表示与控制律设计

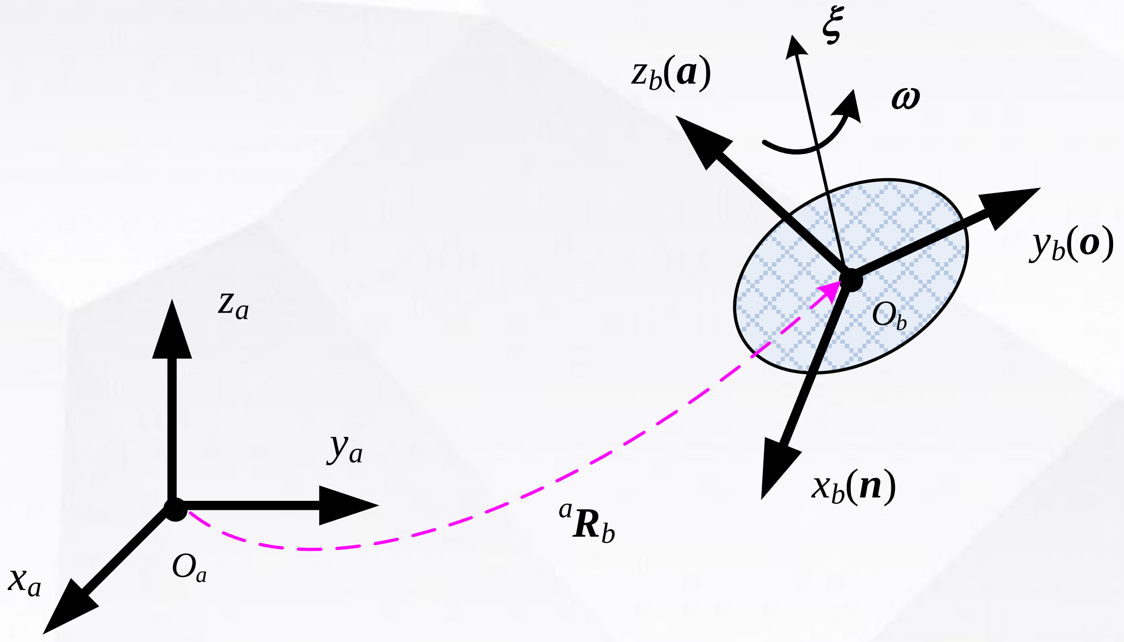
# 3.2.1 旋转变换矩阵表示下的姿态运动

## ◆ 对旋转变换矩阵求导

$$\dot{\boldsymbol{R}} = [\dot{\boldsymbol{n}}, \quad \dot{\boldsymbol{o}}, \quad \dot{\boldsymbol{a}}]$$

**相应的单位矢量的微分：**

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{n} \\ \dot{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{o} = \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{o} \\ \dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{a} \end{cases}$$




**其中 $\boldsymbol{\omega}^{\times}$ 为叉乘操作数，即**

$$\boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

**因此：**

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}} &= [\dot{\boldsymbol{n}}, \quad \dot{\boldsymbol{o}}, \quad \dot{\boldsymbol{a}}] \\ &= [\boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{a}] \\ &= \boldsymbol{\omega}^{\times} [\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{a}] \\ &= \boldsymbol{\omega}^{\times} \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

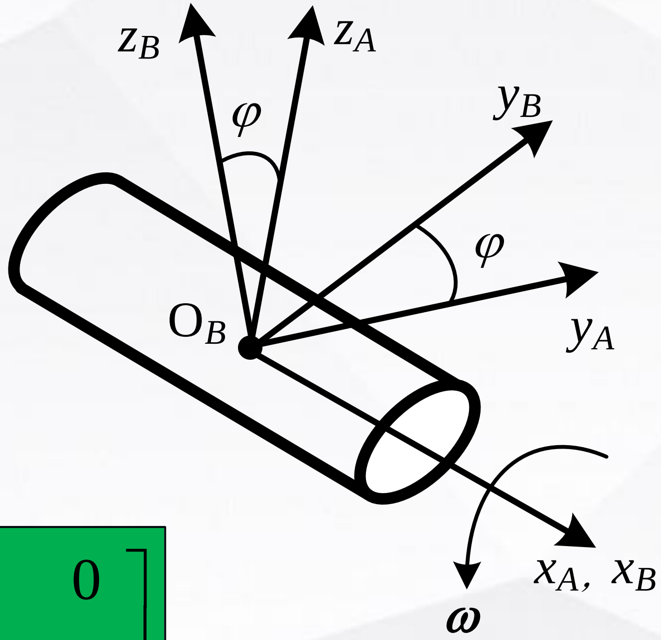
# 3.2.1 旋转变换矩阵表示下的姿态运动

◆ 另一方面，计算角速度

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{R} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\omega}^{\times}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

◆ 举例，对X轴的基本旋转

$$\boldsymbol{R}_{X,\varphi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi\\ 0 & s_\varphi & c_\varphi\end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{R}}_{X,\varphi}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -s_\varphi\dot{\varphi} & -c_\varphi\dot{\varphi}\\ 0 & c_\varphi\dot{\varphi} & -s_\varphi\dot{\varphi}\end{bmatrix}$$

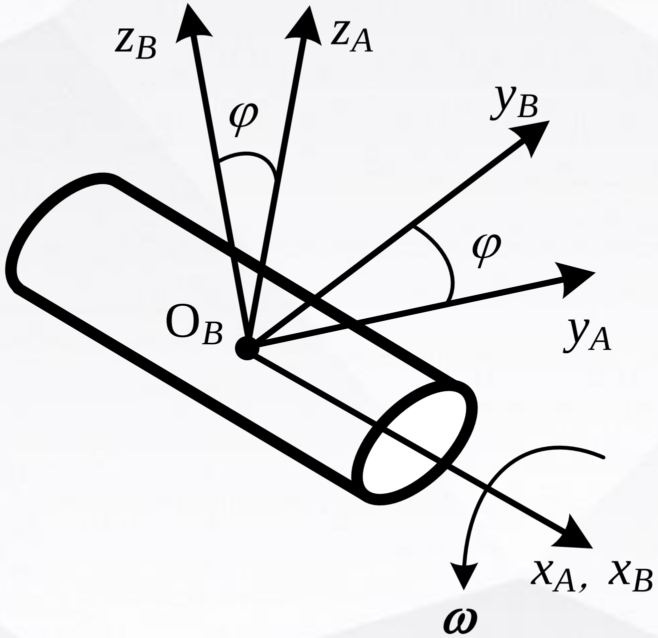



$$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -s_\varphi\dot{\varphi} & -c_\varphi\dot{\varphi}\\ 0 & c_\varphi\dot{\varphi} & -s_\varphi\dot{\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_\varphi & s_\varphi\\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}\\ 0 & \dot{\varphi} & 0\end{bmatrix}$$

# 3.2.1 旋转变换矩阵表示下的姿态运动

◆ **比较**

$$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}\\ 0 & \dot{\varphi} & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$$



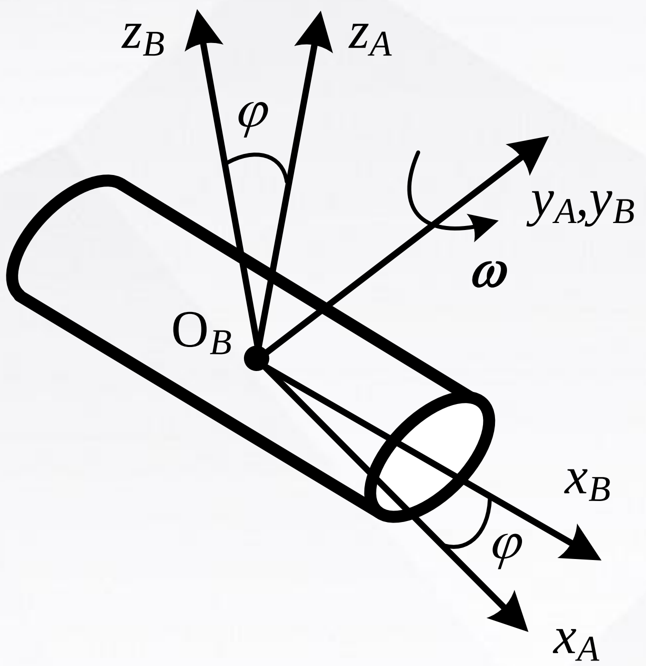

◆ **可得**

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}$$

# 3.2.1 旋转变换矩阵表示下的姿态运动

◆ 类似地，对Y轴旋转

$$\boldsymbol{R}_{Y,\varphi}=\begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{R}}_{Y,\varphi}=\begin{bmatrix} -s_\varphi\dot{\varphi} & 0 & c_\varphi\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_\varphi\dot{\varphi} & 0 & -s_\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$




◆ 可得

$$\boldsymbol{\omega}^\times=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} -s_\varphi\dot{\varphi} & 0 & c_\varphi\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_\varphi\dot{\varphi} & 0 & -s_\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & -s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

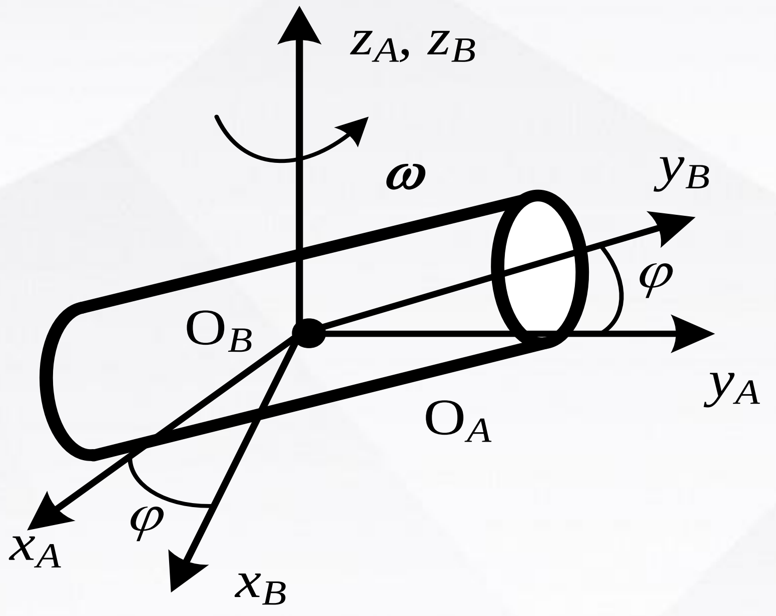
◆ 因此

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

# 3.2.1 旋转变换矩阵表示下的姿态运动

◆ 类似地，对Z轴旋转

$$\boldsymbol{R}_{Z,\varphi}=\begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{R}}_{Z,\varphi}=\begin{bmatrix} -s_\varphi\dot{\varphi} & -c_\varphi\dot{\varphi} & 0 \\ c_\varphi\dot{\varphi} & -s_\varphi\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$




◆ 可得

$$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} -s_\varphi\dot{\varphi} & -c_\varphi\dot{\varphi} & 0 \\ c_\varphi\dot{\varphi} & -s_\varphi\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ 因此

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}$$

# 3.2.2 欧拉角表示下的姿态运动

- **三次旋转** $\Sigma_a \to \Sigma_b$ ：
  - **第1次，旋转矩阵** $R_1(\alpha)$**，旋转角速率** $\dot{\alpha}$ **，得坐标系** $\Sigma_2$**，** ${}^a\omega_1 = f_1(\dot{\alpha})$
  - **第2次，旋转矩阵** $R_2(\beta)$**，旋转角速率** $\dot{\beta}$ **，得坐标系** $\Sigma_3$ **，** ${}^2\omega_2 = f_2(\dot{\beta})$
  - **第3次，旋转矩阵** $R_3(\gamma)$**，旋转角速率** $\dot{\gamma}$ **，得坐标系** $\Sigma_b$ **，** ${}^3\omega_3 = f_3(\dot{\gamma})$
- **上述过程表示为：**

$$\Sigma_a \xrightarrow[\omega_1=f_1(\dot{\alpha})]{R_1(\alpha)} \Sigma_2 \xrightarrow[\omega_2=f_2(\dot{\beta})]{R_2(\beta)} \Sigma_3 \xrightarrow[\omega_3=f_3(\dot{\gamma})]{R_3(\gamma)} \Sigma_b$$

- **三次等效的角速度，在{a}系中的表示**

$$\begin{aligned}{}^a\omega &= {}^a\omega_1 + {}^aR_2 \bullet {}^2\omega_2 + {}^aR_3 \bullet {}^3\omega_3 \\ &= {}^a\omega_1 + R_1(\alpha) \bullet {}^2\omega_2 + R_1(\alpha) R_2(\beta) \bullet {}^3\omega_3\end{aligned}$$

**其中：** $\begin{cases} {}^aR_2 = R_1(\alpha) \\ {}^aR_3 = R_1(\alpha) R_2(\beta) \end{cases}$

## ◆ 举例1：X-Y-Z欧拉角

➢ 第1次旋转，绕{a}系的x轴旋转， 因此：

$$ {}^{a}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{a}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_1(\alpha) = \boldsymbol{R}_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} $$

➢ 第2次旋转，绕{2}系的y轴旋转，因此：

$$ {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{a}\boldsymbol{\omega}_2 = {}^{a}\boldsymbol{R}_2 \bullet {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{R}_1(\alpha) \bullet {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_\alpha \\ s_\alpha \end{bmatrix} \dot{\beta} $$

➢ 第3次旋转，绕{3}系的z轴旋转，因此：

$$ {}^{3}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \qquad {}^{a}\boldsymbol{\omega}_3 = {}^{a}\boldsymbol{R}_3 \bullet {}^{3}\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\beta \\ -s_\alpha c_\beta \\ c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \dot{\gamma} $$

## ◆ 举例1：X-Y-Z欧拉角

因此，三次旋转后的等效角速度：

$$^{a}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\dot{\alpha}+\begin{bmatrix}0\\c_{\alpha}\\s_{\alpha}\end{bmatrix}\dot{\beta}+\begin{bmatrix}s_{\beta}\\-s_{\alpha}c_{\beta}\\c_{\alpha}c_{\beta}\end{bmatrix}\dot{\gamma}=\begin{bmatrix}1&0&s_{\beta}\\0&c_{\alpha}&-s_{\alpha}c_{\beta}\\0&s_{\alpha}&c_{\alpha}c_{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\\dot{\beta}\\\dot{\gamma}\end{bmatrix}$$

令：

$$\boldsymbol{J}_{Euler\_XYZ}=\begin{bmatrix}1&0&s_{\beta}\\0&c_{\alpha}&-s_{\alpha}c_{\beta}\\0&s_{\alpha}&c_{\alpha}c_{\beta}\end{bmatrix}=f(\alpha,\beta)$$

得从欧拉角速度计算刚体角速度的表达式为： $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{J}_{Euler\_XYZ}\dot{\boldsymbol{\Psi}}_{XYZ}$

**可知：根据欧拉角速度，总能计算相应的刚体角速度**

## ◆ 举例1：X-Y-Z欧拉角

另一方面，根据刚体角速度计算欧拉角速度的表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}_{XYZ} = \boldsymbol{J}_{Euler\_XYZ}^{-1}\boldsymbol{\omega}$$

由于 $\boldsymbol{J}_{Euler\_XYZ}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\beta \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{c_\beta}\begin{bmatrix} c_\beta & s_\alpha s_\beta & -c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha c_\beta & s_\alpha c_\beta \\ 0 & -s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}$

代入上式后有：

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega_x + \dfrac{s_\alpha s_\beta}{c_\beta}\omega_y - \dfrac{c_\alpha s_\beta}{c_\beta}\omega_z \\ \dot{\beta} = c_\alpha \omega_y + s_\alpha \omega_z \\ \dot{\gamma} = -\dfrac{s_\alpha}{c_\beta}\omega_y + \dfrac{c_\alpha}{c_\beta}\omega_z \end{cases}$$

当 $\beta = \pm\dfrac{\pi}{2}$， $c_\beta = 0$

则 $\boldsymbol{J}_{Euler\_XYZ}^{-1}$ 不存在.

**此时，$\dot{\alpha}, \dot{\gamma}$ 将为无穷大。姿态表示奇异！！**

# 3.2.2 欧拉角表示下的姿态运动

## ◆ 举例2：Z-X-Z欧拉角

➢ 第1、2、3次旋转的角速度分别表示为：

$$
{}^{a}\boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}\end{bmatrix},\qquad {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\0\\0\end{bmatrix},\qquad {}^{3}\boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\gamma}\end{bmatrix}
$$

➢ 三次旋转的等效角速度为：

$$
{}^{a}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}\end{bmatrix}+\boldsymbol{R}_{Z,\alpha}\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\0\\0\end{bmatrix}+\boldsymbol{R}_{Z,\alpha}\boldsymbol{R}_{X,\beta}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\gamma}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\dot{\alpha}+\begin{bmatrix}c_\alpha\\s_\alpha\\0\end{bmatrix}\dot{\beta}+\begin{bmatrix}s_\alpha s_\beta\\-c_\alpha s_\beta\\c_\beta\end{bmatrix}\dot{\gamma}=\begin{bmatrix}0&c_\alpha&s_\alpha s_\beta\\0&s_\alpha&-c_\alpha s_\beta\\1&0&c_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\\dot{\beta}\\\dot{\gamma}\end{bmatrix}
$$

## ◆ 举例2：Z-X-Z欧拉角

➢ **其中：**

$$J_{Euler\_ZXZ}=\begin{bmatrix}0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 0 & s_\alpha & -c_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta\end{bmatrix},\quad J^{-1}_{Euler\_ZXZ}=\frac{1}{s_\beta}\begin{bmatrix}-s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta & s_\beta \\ c_\alpha s_\beta & s_\alpha s_\beta & 0 \\ s_\alpha & -c_\alpha & 0\end{bmatrix}$$

➢ **因此：**

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}_{XYZ}=\boldsymbol{J}^{-1}_{Euler\_ZXZ}\boldsymbol{\omega}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dot{\alpha}=-\dfrac{s_\alpha c_\beta}{s_\beta}\omega_x+\dfrac{c_\alpha c_\beta}{s_\beta}\omega_y+\omega_z \\ \dot{\beta}=c_\alpha\omega_x+s_\alpha\omega_y \\ \dot{\gamma}=\dfrac{s_\alpha}{s_\beta}\omega_x-\dfrac{c_\alpha}{s_\beta}\omega_y\end{cases}$$

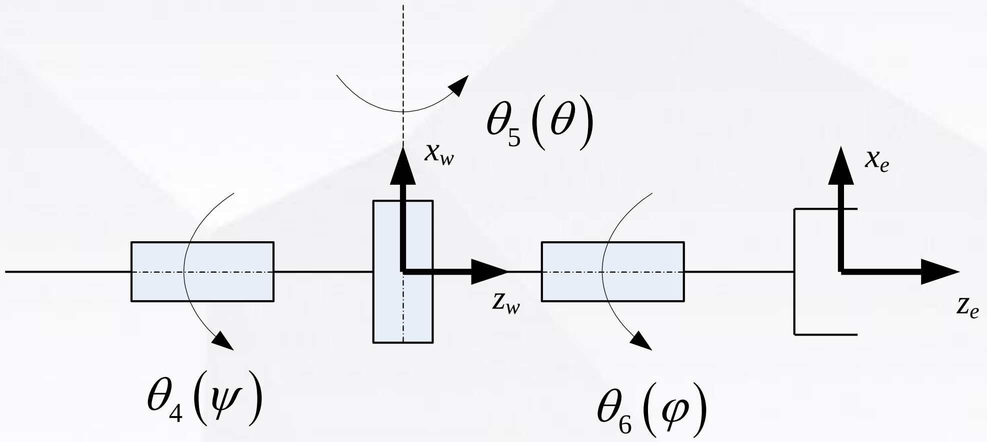
➢ **可见，当 $\beta=0$ or $\pi$ 时，$s_\beta=0$**

**此时，$\dot{\alpha},\dot{\gamma}$ 将为无穷大。 姿态表示奇异！！**

# 欧拉角表示的姿态奇异

- 对 于 第 I 类 (a-b-a 旋 转 )， 如 PUMA机械臂末端

xyx，xzx，yxy，yzy，zxz，zyz

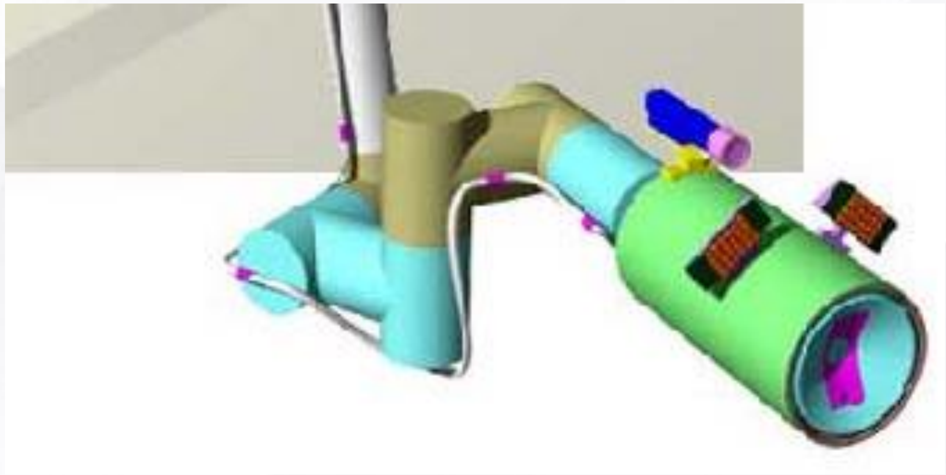



奇异条件?

a-b-a型欧拉角的奇异条件:

$$\beta = 0,\ \pi$$

- 对于第II类欧拉角 (a-b-c旋转)，如轨道快车机械臂、加拿大臂末端



xyz，xzy，yxz，yzx，zxy，zyx

a-b-c型欧拉角的奇异条件:

$$\beta = \pm\frac{\pi}{2}$$

# 3.2.3 轴-角表示下的姿态运动

◆ 姿态角速度可按下式进行计算（利用轴-角和R的关系）

$$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\frac{d\left[c_{\phi}\boldsymbol{E}_3+\left(1-c_{\phi}\right)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{T}+s_{\phi}\boldsymbol{k}^{\times}\right]}{dt}\bullet\left[c_{\phi}\boldsymbol{E}_3+\left(1-c_{\phi}\right)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{T}+s_{\phi}\boldsymbol{k}^{\times}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$=\dot{\phi}\boldsymbol{k}^{\times}-\left(1-c_{\phi}\right)\left(\boldsymbol{k}^{\times}\dot{\boldsymbol{k}}\right)^{\times}-s_{\phi}\dot{\boldsymbol{k}}^{\times}$$

➢ 因此，从轴-角微分到刚体角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\phi}\boldsymbol{k}-\left(1-c_{\phi}\right)\boldsymbol{k}^{\times}\dot{\boldsymbol{k}}-s_{\phi}\dot{\boldsymbol{k}}$$

➢ 逆变换(从刚体角速度到轴角微分）为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{k}}=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{k}^{\times}-cot\dfrac{\phi}{2}\boldsymbol{k}^{\times}\boldsymbol{k}^{\times}\right)\boldsymbol{\omega}\\ \dot{\phi}=\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\end{cases}$$

注：绕固定轴旋转时： $\dot{\boldsymbol{k}}=0,\quad \begin{cases}\boldsymbol{\omega}=\dot{\phi}\boldsymbol{k}\\ \dot{\phi}=\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\end{cases}$

# 3.2.4 单位四元数表示下的姿态运动

## ◆正变换：刚体角速度→四元数微分

对四元数姿态表示求导可得：

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\dfrac{\dot{\phi}}{2}\sin\dfrac{\phi}{2} = -\dfrac{\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}}{2}\sin\dfrac{\phi}{2} = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{k}}\sin\dfrac{\phi}{2} + \boldsymbol{k}\dfrac{\dot{\phi}}{2}\cos\dfrac{\phi}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\eta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\times}\right)\boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

写成矩阵的形式有

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \\ \eta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\times} \end{bmatrix}\boldsymbol{\omega}$$

## ◆逆变换：四元数微分→刚体角速度

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \eta & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ -\varepsilon_x & \eta & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_z & \eta & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_z & -\varepsilon_y & \varepsilon_x & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$$

不存在姿态表示的奇异！

## ◆ 小角度条件

➢ **当欧拉角足够小，满足：**

$$\varphi_i \to 0, \quad \varphi_i \approx 0$$

➢ **则可得近似条件：**

$$\begin{cases} \cos(\varphi) \approx 1 \\ \sin(\varphi) \approx \varphi \\ \sin(\varphi)\sin(\varphi) \approx 0 \end{cases}$$

## ◆ 小角度条件下的姿态变换矩阵

$$\boldsymbol{R}_{xyz}=\begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{zxz}=\begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\beta c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\gamma + c_\alpha c_\beta s_\gamma & -s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\beta c_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\gamma-\alpha & 0 \\ \gamma+\alpha & 1 & -\beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

# 3.3.3 小角度下的姿态运动分析

## ◆ x-y-z欧拉角表示下的姿态运动学

➢ **“姿态角速度”与“欧拉角速度”的近似关系：**

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & s_\beta\\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta\\ 0 & s_\alpha & c_\alpha c_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 0 & \beta\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & \alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}$$

**即（三轴的欧拉角速度近似为姿态角速度）：**

$$\begin{cases}\omega_x\approx\dot\alpha & \left(\text{第1次旋转，对应}x\text{轴}\right)\\ \omega_y\approx\dot\beta & \left(\text{第2次旋转，对应}y\text{轴}\right)\\ \omega_z\approx\dot\gamma & \left(\text{第3次旋转，对应}z\text{轴}\right)\end{cases}$$

# 3.3.3 小角度下的姿态运动分析

## ◆ z-x-z欧拉角表示下的姿态运动学

➢ **“姿态角速度” 与 “欧拉角速度”的近似关系：**

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta\\ 0 & s_\alpha & -c_\alpha s_\beta\\ 1 & 0 & c_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & \alpha & -\beta\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix}$$

**即（三轴的欧拉角速度近似为姿态角速度）：**

$$\begin{cases}\omega_x\approx\dot\beta & \left(\text{第2次旋转，对应 } x \text{ 轴}\right)\\ \omega_y\approx 0 & \left(\text{无法产生 } y \text{ 轴的角速度，奇异条件}\right)\\ \omega_z\approx\dot\alpha+\dot\gamma & \left(\text{第 1、3 次旋转，共同对应 } z \text{ 轴}\right)\end{cases}$$

# 3.3.4 小角度下的姿态运动小结

- **对于a-b-c型欧拉角，小角度下的欧拉角速度可以映射到对应轴的姿态角速度，如对另一种欧拉角yzx：**

$$\text{yzx：}\begin{cases}\omega_x \approx \dot{\gamma} & \left(\text{第3次对应 } x \text{ 轴}\right)\\ \omega_y \approx \dot{\alpha} & \left(\text{第1次对应 } y \text{ 轴}\right)\\ \omega_z \approx \dot{\beta} & \left(\text{第2次对应 } z \text{ 轴}\right)\end{cases}$$

- **对于a-b-a型欧拉角，小角度下即为奇异条件，无法产生其中一轴的角速度；而另一轴角速度为第1、3次角速度之和。如对yzy欧拉角**

$$\text{yzy：}\begin{cases}\omega_x \approx 0 & \left(\text{无法产生 } x \text{ 轴的角速度，奇异条件}\right)\\ \omega_y \approx \dot{\alpha}+\dot{\gamma} & \left(\text{第1、3次旋转，共同对应 } y \text{ 轴}\right)\\ \omega_z \approx \dot{\beta} & \left(\text{第2次旋转，对应 } z \text{ 轴}\right)\end{cases}$$

# 第3章 刚体速度描述与微分运动学

1 刚体的一般运动

2 刚体的姿态运动学

3 小角度下的简化姿态运动学

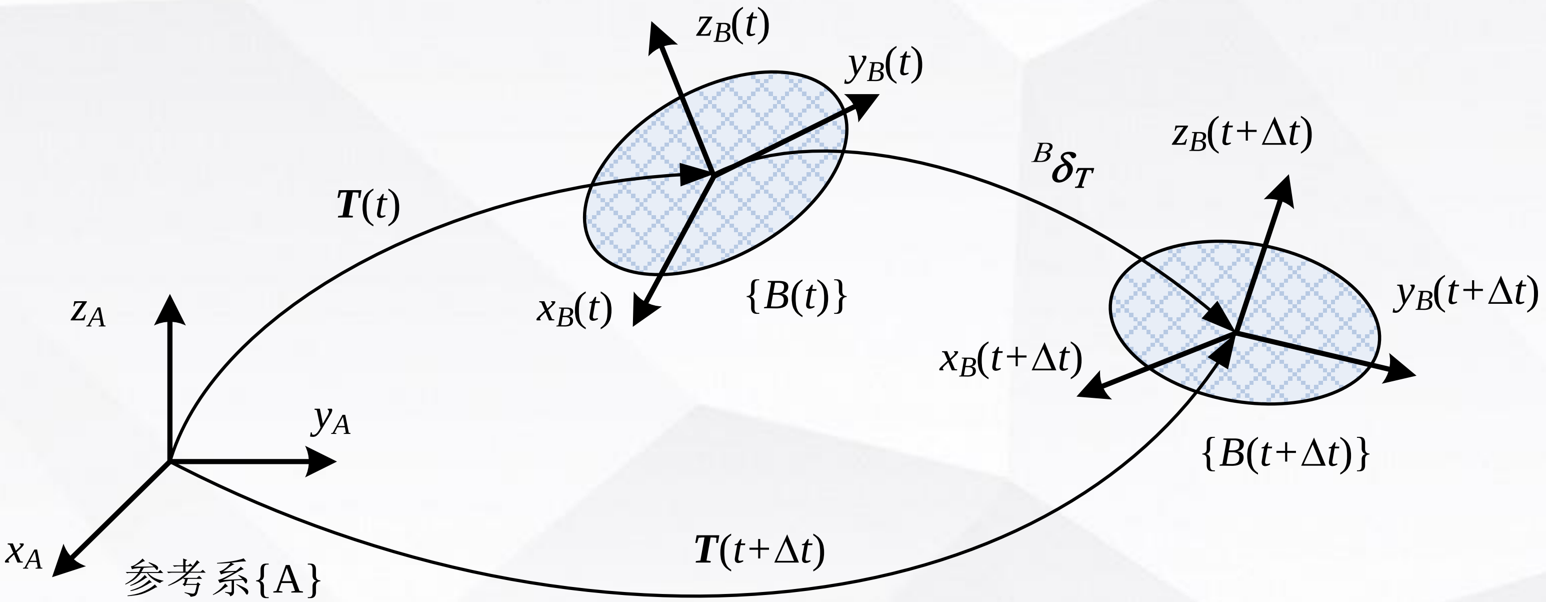
4 齐次矩阵表示下的微分运动

5 位姿误差表示与控制律设计

# 3.4.1 微分运动的定义

## ◆ 经过$\Delta t$后的位姿变化

- $t$时刻的位姿表示为齐次变换矩阵$T(t)$，经过$\Delta t$后的位姿变为$T(t+\Delta t)$




- 微分运动为6自由度运动，包括了位置和姿态的变化
- 可以在**{A}系（定轴）**，也可在**{B}系（动轴）**中描述

# 3.4.2 相对于固定坐标系的微分运动

## ◆ 相对于固定坐标系，先旋转、后平移

- 微分转动，绕轴 $\boldsymbol{k}$ 转微量角 $d_\phi$，则三轴转动微位移为 $\boldsymbol{\delta}_\phi=\boldsymbol{k}d_\phi$

$$\overline{\mathrm{Rot}}\left(\boldsymbol{k},d_\phi\right)=\begin{bmatrix}1 & -k_z d_\phi & k_y d_\phi & 0\\ k_z d_\phi & 1 & -k_x d_\phi & 0\\ -k_y d_\phi & k_x d_\phi & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\delta_z & \delta_y & 0\\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0\\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 微分平动，三轴微平动微位移为$\boldsymbol{d_p}=[d_x, d_y, d_z]^T$

$$\overline{\mathrm{Trans}}\left(d_x,d_y,d_z\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & d_x\\ 0 & 1 & 0 & d_y\\ 0 & 0 & 1 & d_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢ 合成运动后的齐次变换矩阵

$$\boldsymbol{T}\left(t+\Delta t\right)=\overline{\mathrm{Trans}}\left(d_x,d_y,d_z\right)\overline{\mathrm{Rot}}\left(\boldsymbol{k},d_\phi\right)\boldsymbol{T}\left(t\right)=\boldsymbol{\delta_T T}\left(t\right)$$

# 3.4.2 相对于固定坐标系的微分运动

## ◆ 相对于固定坐标系，先旋转、后平移

- 合成的齐次变换

$$\boldsymbol{\delta_T} = \overline{\mathrm{Trans}}\left(d_x, d_y, d_z\right)\overline{\mathrm{Rot}}\left(\boldsymbol{k}, d_\phi\right) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 齐次变换矩阵的微分为

$$d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\left(t+\Delta t\right) - \boldsymbol{T}\left(t\right) = \boldsymbol{\delta_T}\boldsymbol{T}\left(t\right) - \boldsymbol{T}\left(t\right) = \left(\boldsymbol{\delta_T} - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{T}\left(t\right) = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{T}\left(t\right)$$

➢ 微分算子

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\delta_T} - \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ◆ 相对于运动坐标系，先平移、后旋转

- 微分平动，移动微位移 $d^B\boldsymbol{p}=[^B dx,\ ^B dy,\ ^B dz]^T$

$$\overline{\text{Trans}}\left({}^B d_x, {}^B d_y, {}^B d_z\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^B d_x \\ 0 & 1 & 0 & {}^B d_y \\ 0 & 0 & 1 & {}^B d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 微分转动，绕轴 $^B\boldsymbol{k}$ 转微量角 $d\phi$

$$\overline{\text{Rot}}\left({}^B\boldsymbol{k}, d_\phi\right)=\begin{bmatrix} 1 & -{}^B k_z d_\phi & {}^B k_y d_\phi & 0 \\ {}^B k_z d_\phi & 1 & -{}^B k_x d_\phi & 0 \\ -{}^B k_y d_\phi & {}^B k_x d_\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -{}^B\delta_z & {}^B\delta_y & 0 \\ {}^B\delta_z & 1 & -{}^B\delta_x & 0 \\ -{}^B\delta_y & {}^B\delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 合成运动后的齐次变换矩阵

$$\boldsymbol{T}(t+\Delta t)=\boldsymbol{T}(t)\,\overline{\text{Trans}}\left({}^B d_x, {}^B d_y, {}^B d_z\right)\overline{\text{Rot}}\left({}^B\boldsymbol{k}, d_\phi\right)={}^B\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}(t)$$

# 3.4.3 相对于运动坐标系的微分运动

## ◆ 相对于运动坐标系，先平移、后旋转

- 合成的齐次变换

$$^{B}\boldsymbol{\delta}_{T} = \overline{\mathrm{Trans}}\left({}^{B}d_x, {}^{B}d_y, {}^{B}d_z\right)\overline{\mathrm{Rot}}\left({}^{B}\boldsymbol{k}, {}^{B}d_{\phi}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -{}^{B}\delta_z & {}^{B}\delta_y & {}^{B}d_x \\ {}^{B}\delta_z & 1 & -{}^{B}\delta_x & {}^{B}d_y \\ -{}^{B}\delta_y & {}^{B}\delta_x & 1 & {}^{B}d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 齐次变换矩阵的微分为

$$d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(t+\Delta t) - \boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{T}(t)\,{}^{B}\boldsymbol{\delta}_{T} - \boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{T}(t)\left({}^{B}\boldsymbol{\delta}_{T} - \boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{T}(t)\,{}^{B}\boldsymbol{\varDelta}$$

➢ 微分算子

$${}^{B}\boldsymbol{\varDelta} = {}^{B}\boldsymbol{\delta}_{T} - \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{B}\delta_z & {}^{B}\delta_y & {}^{B}d_x \\ {}^{B}\delta_z & 0 & -{}^{B}\delta_x & {}^{B}d_y \\ -{}^{B}\delta_y & {}^{B}\delta_x & 0 & {}^{B}d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ◆ 六维微分运动位移

● 相对于固定坐标系、运动坐标系的六维微分运动分别为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_p\\ \boldsymbol{\delta}_\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\\ \delta_x\\ \delta_y\\ \delta_z\end{bmatrix},\quad {}^B\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}{}^B\boldsymbol{d}_p\\ {}^B\boldsymbol{\delta}_\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^Bd_x\\ {}^Bd_y\\ {}^Bd_z\\ {}^B\delta_x\\ {}^B\delta_y\\ {}^B\delta_z\end{bmatrix}$$

平动微位移

$$\boldsymbol{d}_p=\begin{bmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\end{bmatrix}$$

转动微位移

$$\boldsymbol{\delta}_\phi=\begin{bmatrix}k_x\\ k_y\\ k_z\end{bmatrix}d_\phi$$

三轴矢量

● 微分运动与速度的关系

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}dt,\quad {}^B\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}{}^B\boldsymbol{v}\\ {}^B\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}dt$$

# 第3章 刚体速度描述与微分运动学

1 刚体的一般运动

2 刚体的姿态运动学

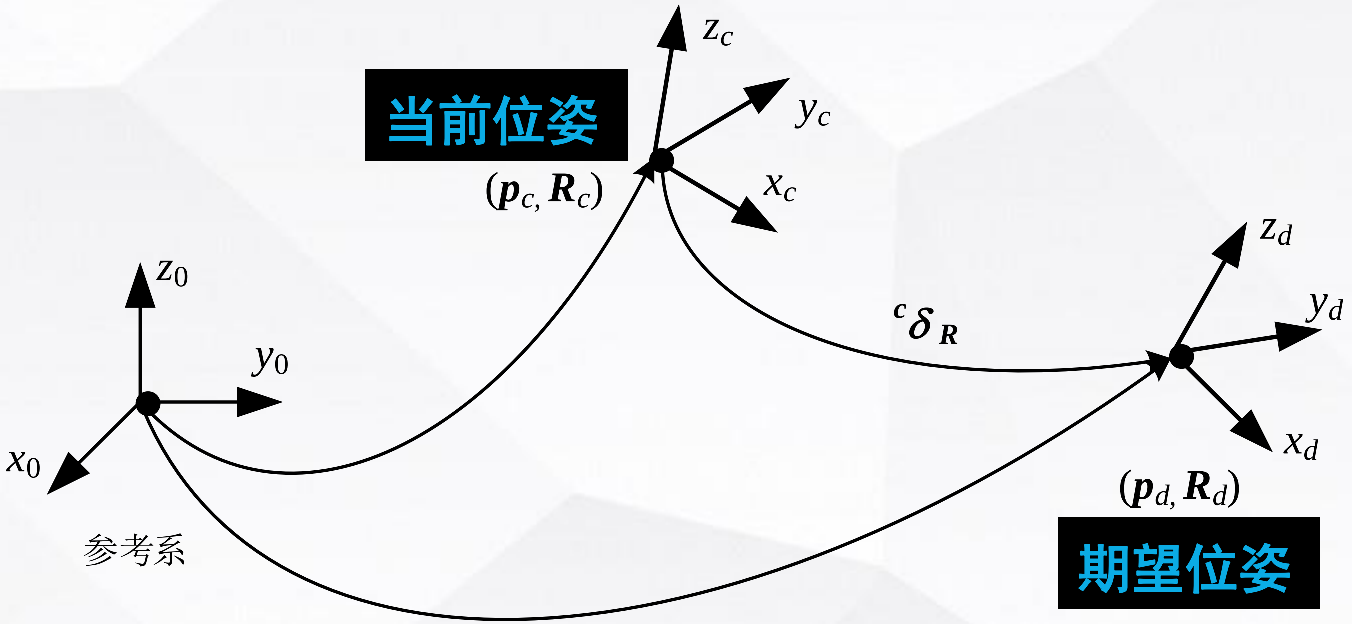
3 小角度下的简化姿态运动学

4 齐次矩阵表示下的微分运动

5 位姿误差表示与控制律设计

# 3.5.1 刚体位姿误差需求

◆ **问题：何改变刚体在空间的位姿（已知当前位姿和期望位姿）？**




- ➢ 描述期望位姿与当前位姿之间的差异（位姿误差）
- ➢ 根据位置误差矢量，施加三轴力矢量，改变位置
- ➢ 根据姿态误差矢量，施加三轴力矩矢量，改变姿态

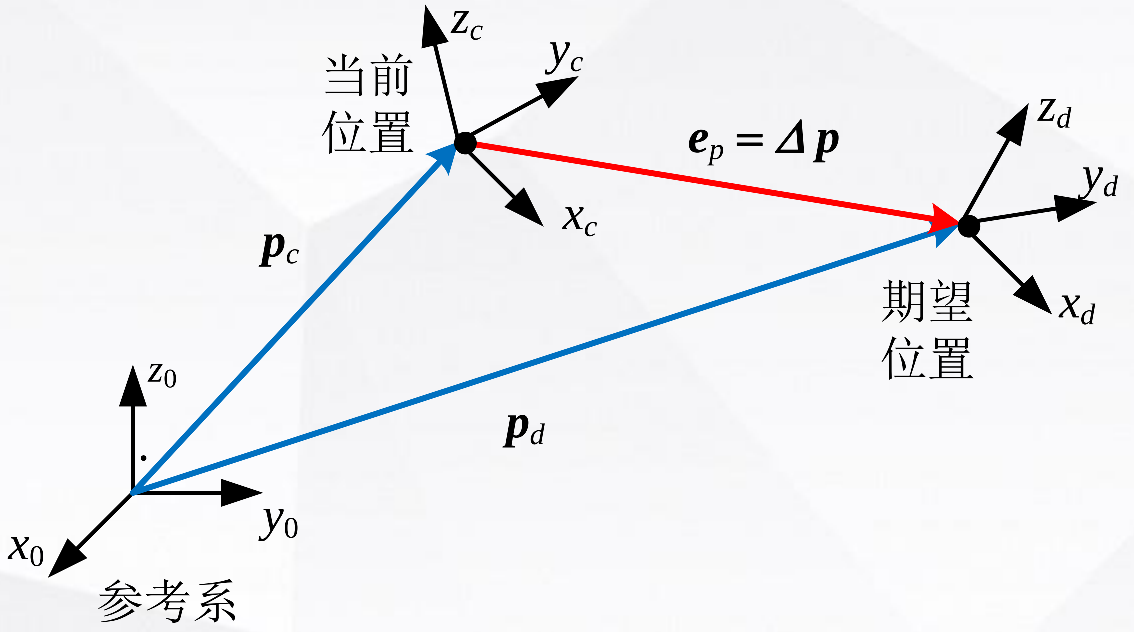
**注意：位置误差、姿态误差都需要矢量形式；相应地确定力矢量、力矩矢量**

# 3.5.2 位置误差矢量

## ◆ 位置误差矢量的计算

- ➢ 当前位置矢量 $\boldsymbol{p}_c$
- ➢ 期望位置矢量 $\boldsymbol{p}_d$
- ➢ 位置误差矢量

$$\boldsymbol{e}_p = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}_c$$



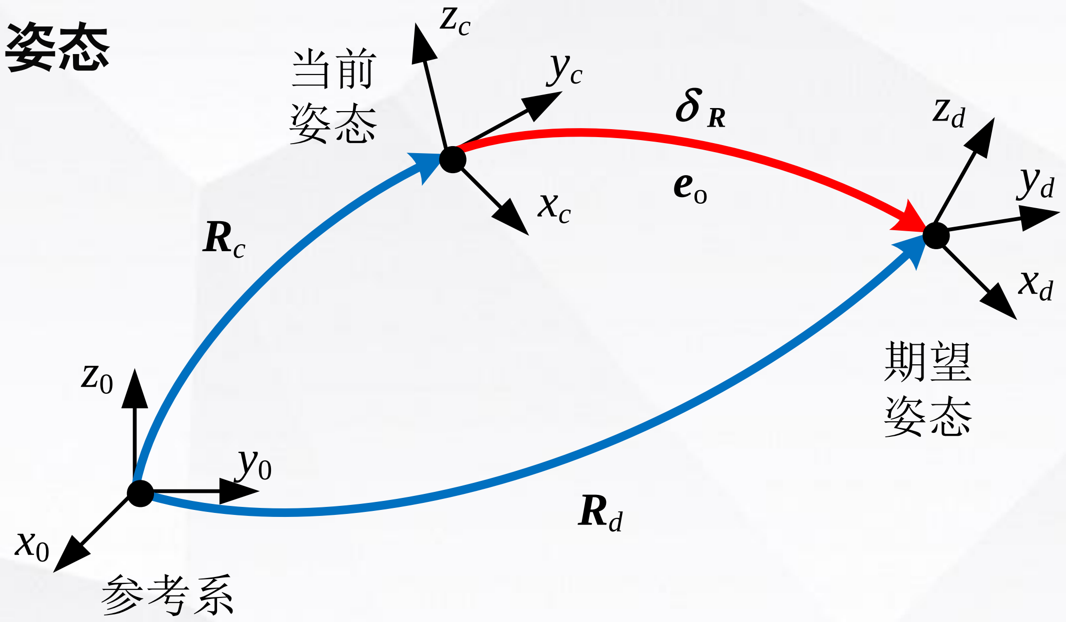

- ➢ 相应地，三轴控制力可设计为（以PID为例）

$$\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{K}_{pp}\boldsymbol{e}_p + \boldsymbol{K}_{pi}\int \boldsymbol{e}_p dt + \boldsymbol{K}_{pd}\dot{\boldsymbol{e}}_p$$

**说明：位置矢量可在{0}中描述，也可在{c}系中描述，相应地，控制力为{0}系或{c}系的矢量**

## ①采用旋转变换矩阵表示时

当前、期望姿态矩阵分别为 $R_c$和$R_d$，姿态误差矩阵表示为$\delta_R$




- 若相对于{0}系转动到达$R_d$，满足

$$R_d = \delta_R R_c$$

则误差矩阵为

$$\delta_R = R_d R_c^{-1} = R_d R_c^{\mathrm{T}}$$

- 若相对于{c}系转动到达$R_d$，满足

$$R_d = R_c \, {}^{c}\delta_R$$

则误差矩阵为

$${}^{c}\delta_R = R_c^{-1} R_d = R_c^{\mathrm{T}} R_d$$

问题：如何将姿态误差矩阵映射到三轴力矩矢量？关键在于通过误差矩阵得到具有矢量含义的误差项，即姿态误差矢量

## ①采用旋转变换矩阵表示时

**思路：为了获得姿态误差矢量，可以姿态误差矩阵转换为轴-角形式**

- **将误差矩阵表示为如下表达式**

$$\boldsymbol{\delta}_R=\begin{bmatrix} a_{E11} & a_{E12} & a_{E13} \\ a_{E21} & a_{E22} & a_{E23} \\ a_{E31} & a_{E32} & a_{E33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{轴-角关系}} \boldsymbol{k}=\frac{1}{2\sin d_\phi}\begin{bmatrix} a_{E32}-a_{E23} \\ a_{E13}-a_{E31} \\ a_{E21}-a_{E12} \end{bmatrix}$$

**考虑小角度条件，得误差矢量为：**

$$\boldsymbol{\delta}_\phi=\boldsymbol{k}d_\phi\approx\boldsymbol{k}\sin d_\phi=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{E32}-a_{E23} \\ a_{E13}-a_{E31} \\ a_{E21}-a_{E12} \end{bmatrix}$$

# 3.5.3 姿态误差矢量

## ①采用旋转变换矩阵表示时

**进一步地，将$R_c$、$R_d$中的各项代入，可得**

$$\boldsymbol{e}_o = \boldsymbol{\delta}_\phi \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{E32} - a_{E23} \\ a_{E13} - a_{E31} \\ a_{E21} - a_{E12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{n}_c \times \boldsymbol{n}_d + \boldsymbol{o}_c \times \boldsymbol{o}_d + \boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{a}_d\right)$$

- **相应地，三轴控制力矩可设计为（以PID为例）**

$$\boldsymbol{\tau}_c = \boldsymbol{K}_{op}\boldsymbol{e}_o + \boldsymbol{K}_{oi}\int \boldsymbol{e}_o dt + \boldsymbol{K}_{od}\dot{\boldsymbol{e}}_o$$

## ②采用欧拉角表示姿态时

当前、期望欧拉角分别为$\Psi_c$和$\Psi_d$，欧拉角误差为

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\alpha_d-\alpha_c\\ \beta_d-\beta_c\\ \gamma_d-\gamma_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\\ \Delta\gamma\end{bmatrix}$$

问题：

1. 欧拉角误差是否可直接作为姿态误差矢量？

2. 能否直接根据欧拉角误差向量直接设计三轴控制力矩？

## ②采用欧拉角表示姿态时

根据欧拉角表示下的姿态运动学

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{J}_{Euler}(\boldsymbol{\Psi})\dot{\boldsymbol{\Psi}}$$

可得微分运动方程为

$$\boldsymbol{\delta}_{\phi}=\boldsymbol{\omega}\Delta t=\boldsymbol{J}_{Euler}(\boldsymbol{\Psi})\dot{\boldsymbol{\Psi}}\Delta t=\boldsymbol{J}_{Euler}(\boldsymbol{\Psi})\Delta\boldsymbol{\Psi}$$

式中，$\delta_{\phi}$具有三轴矢量的含义，可作为姿态误差矢量。以xyz欧拉角为例，有：

$$\boldsymbol{e}_{o}=\boldsymbol{\delta}_{\phi}=\boldsymbol{J}_{Euler}\Delta\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & s_{\beta_c}\\ 0 & c_{\alpha_c} & -s_{\alpha_c}c_{\beta_c}\\ 0 & s_{\alpha_c} & c_{\alpha_c}c_{\beta_c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\\ \Delta\gamma\end{bmatrix}$$

# 刚体状态及运动描述-知识小结

<table>
<tr><th></th><th>状态变量（位移）</th><th colspan="2">速度变量</th><th colspan="2">误差矢量</th><th>控制变量</th><th>三轴特点</th></tr>
<tr><td>平移</td><td>位置矢量$\boldsymbol{p}$</td><td>线速度 $\boldsymbol{v}$</td><td>$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{p}}$</td><td>$\boldsymbol{e}_p$</td><td>$\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{p}_d-\boldsymbol{p}_c$</td><td>三轴力$\boldsymbol{f}_c$<br>$\boldsymbol{f}_c=\boldsymbol{K}_{pp}\boldsymbol{e}_p+\boldsymbol{K}_{pi}\int\boldsymbol{e}_p dt+\boldsymbol{K}_{pd}\dot{\boldsymbol{e}}_p$</td><td>三轴解耦<br>单轴可以单独考虑</td></tr>
<tr><td rowspan="4">旋转</td><td>姿态矩阵$\boldsymbol{R}$</td><td rowspan="4">角速度 $\boldsymbol{\omega}$</td><td>$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$</td><td rowspan="4">$\boldsymbol{e}_o$</td><td>$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{R}_c^{\mathrm{T}}$<br>$\boldsymbol{e}_o=\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{R}}\right)_E$</td><td rowspan="4">三轴力矩$\boldsymbol{\tau}_c$<br>$\boldsymbol{\tau}_c=\boldsymbol{K}_{op}\boldsymbol{e}_o+\boldsymbol{K}_{oi}\int\boldsymbol{e}_o dt+\boldsymbol{K}_{od}\dot{\boldsymbol{e}}_o$</td><td rowspan="4">三轴耦合<br>三轴需要同时考虑</td></tr>
<tr><td>姿态角</td><td>$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{J}_{Euler}\dot{\boldsymbol{\Psi}}$</td><td>$\boldsymbol{e}_o=\boldsymbol{J}_{Euler}\Delta\boldsymbol{\Psi}$</td></tr>
<tr><td>轴-角($\boldsymbol{k}$, $\phi$)</td><td>$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{k}\dot{\phi}$</td><td>$\boldsymbol{e}_o=\boldsymbol{k}d_{\phi}$</td></tr>
<tr><td>单位四元数$\boldsymbol{Q}$</td><td>$\boldsymbol{\omega}=2M\left(\mathrm{Q}^{*}\right)^{+}\dot{\mathrm{Q}}$</td><td>$\boldsymbol{e}_o=2\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$</td></tr>
</table>

THANKS

# 谢 谢!