智能机器人技术
第11章-速度级运动学建模方法

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io

中山大学智能工程学院
2024-Spring

本章内容

1. 引言
2. 操作度/力椭球
3. 机器人雅克比
4. 开链机器人静力学

- 回顾上一章：已知关节位置θ_i求解末端位形。
- 本章内容：已知关节位置θ_i及速度$\dot{\theta}_i$求解末端速度（运动旋量$\mathcal{V}$）。
- 考虑一种简化的特殊情况：末端位形用最小数量的坐标$x \in \mathbb{R}^m$表示，速度为$\dot{x} = dx/dt \in \mathbb{R}^m$。
- 此时机器人正向运动学为（其中$\theta \in \mathbb{R}^n$）：

$$x(t) = f(\theta(t))$$

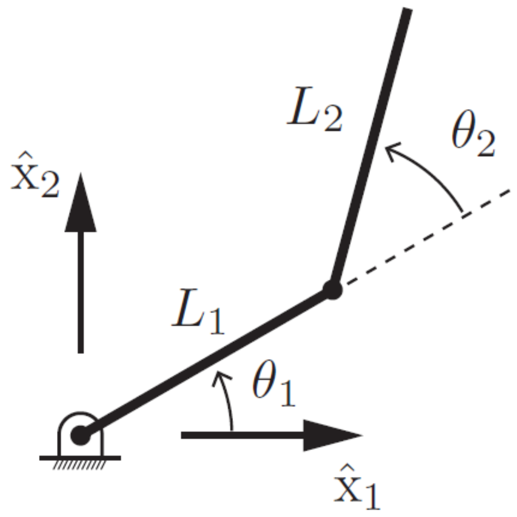
- 根据链式法则，上式关于时间的导数为：

$$\dot{x} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\dot{\theta} = \boxed{J(\theta)}\dot{\theta}$$

雅可比（Jacobian）$J(\theta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- 表示末端执行器速度相对于关节速度的线性敏感度。

$J(\theta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ n个关节 末端坐标m维

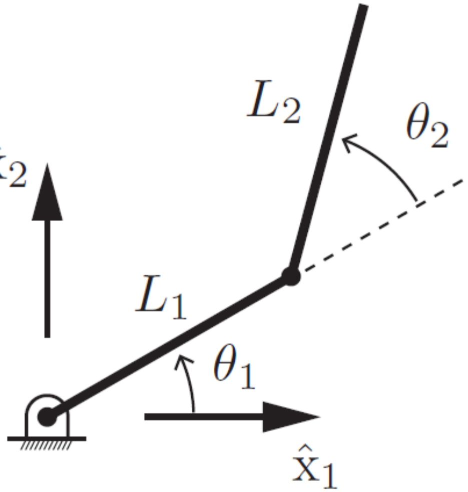


图：平面内2R开链机械臂

例1

- 正向运动学（直接求解）：

$$x_1 = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$x_2 = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2).$$



- 对上式左右两边关于时间求导：

$$\dot{x}_1 = -L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$\dot{x}_2 = L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2),$$

- 整理上式为$\dot{x} = J(\theta)\dot{\theta}$形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-L_1\sin\theta_1 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

- 将$J(\theta)$的两列记为$J_1(\theta), J_2(\theta)$，末端速度$\dot{x}$记为$v_{tip}\in\mathbb{R}^2$：

$$v_{\mathrm{tip}} = J_1(\theta)\dot{\theta}_1 + J_2(\theta)\dot{\theta}_2$$

- 表明：只要$J_1(\theta), J_2(\theta)$线性无关，只要选取合适的关节速度$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$就可以生成$x_1-x_2$平面内任何方向的末端速度$v_{tip}$。

奇异（Singularity）位形

对于本例，若$\theta_2 = 0\ or\ \pi$，θ_1任意$J_1(\theta), J_2(\theta)$都会线性相关

$$J_1(\theta) = \begin{bmatrix}-(L_1+L_2)\sin\theta_1\\ (L_1+L_2)\cos\theta_1\end{bmatrix}$$

$$J_2(\theta) = \begin{bmatrix}-L_2\sin\theta_1\\ L_2\cos\theta_1\end{bmatrix}$$

- 结果：此时某些方向上的速度无法实现。

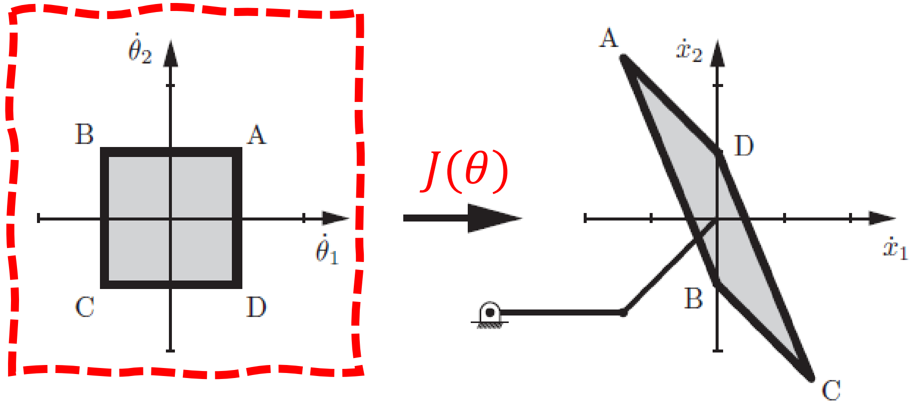
- **需要强调**：上面的例子采用了最少广义坐标集合来表示速度，即广义坐标的导数$\dot{q}$。

- 这时与速度运动学$\dot{q} = J_a(\theta)\dot{\theta}$对应的雅克比$J_a$叫做“**解析雅克比**”（analytic Jacobian）。

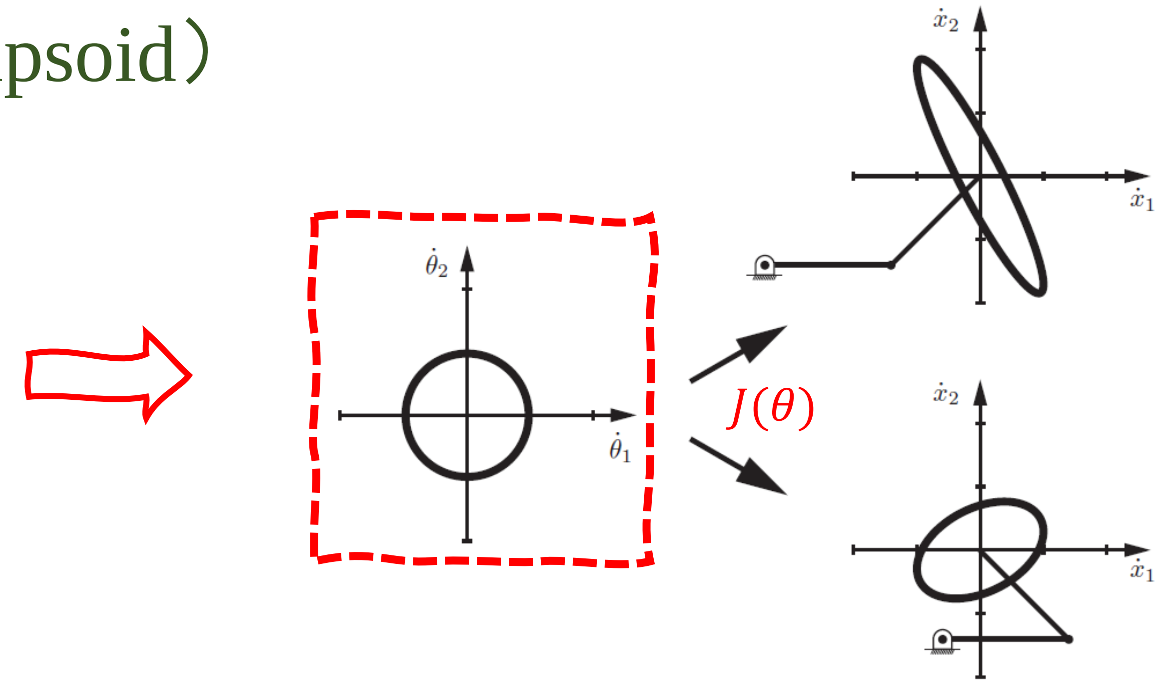
- 教材采用了运动旋量$\mathcal{V}$（非最少坐标），求解出的空间或物体雅克比，叫做“**几何雅克比**”（geometric Jacobian）。

- 只需要记住：无法采用“引言”部分的方法，来求解我们的雅克比。

□ 操作度椭球（Manipulability Ellipsoid）



图：关节速度$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$的范围，映射为末端的速度$v_{tip} \in \mathbb{R}^2$的范围。



图：平面内2R开链机械臂，两种不同位形下的可操作度椭球

- 通过雅克比矩阵$J(\theta)$，可以将关节转速$\dot{\theta}$的边界范围，映射为不同位形末端速度 v_{tip} 的边界范围。
- 但一般，我们将关节转速$\dot{\theta}$的边界范围用单位圆（多维）表示，即所有关节的共同作用相等。
- 奇异位形时：操作度椭球将退化成一条线段，即末端沿某方向的运动将无法实现。

力椭球（Force Ellipsoid）

虚位移原理

- 假设一个外力作用于机器人的末端，为了抵抗外力，各关节需要多大的力矩？
- 假设机器人处于静力平衡状态（因此没有运动，功耗为0）：机器人末端施加的外力的功 = 关节产生的功。
- 末端外力$f_{tip} \in \mathbb{R}^3$，末端速度$v_{tip} \in \mathbb{R}^3$，关节力矩$\tau \in \mathbb{R}^n$，关节速度$\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$：

$$\underbrace{f_{\mathrm{tip}}^{\mathrm{T}}}_{1\times 3}\underbrace{v_{\mathrm{tip}}}_{3\times 1}=\underbrace{\tau^{\mathrm{T}}}_{1\times n}\underbrace{\dot{\theta}}_{n\times 1}$$

$J(\theta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ n个关节 末端坐标m维

- 因为$v_{tip} = J(\theta)\dot{\theta}$，所以：

$$f_{\mathrm{tip}}^{\mathrm{T}}J(\theta)\dot{\theta}=\tau^{\mathrm{T}}\dot{\theta}$$

- 上式对于任意关节速度$\dot{\theta}$成立，所以：

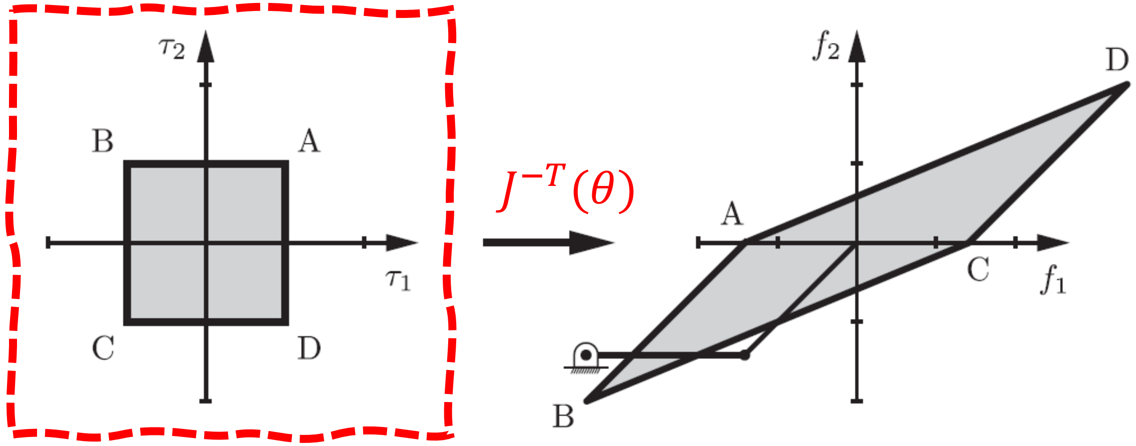
$$\tau=J^{\mathrm{T}}(\theta)f_{\mathrm{tip}}.$$

- 需要各关节产生的力矩，由上式计算。

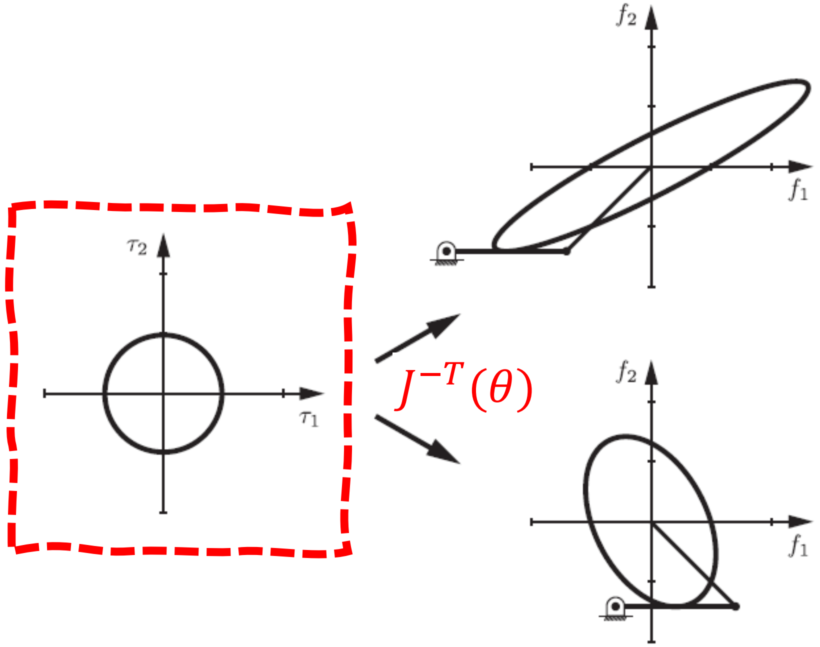
- 假设$J(\theta)$是方正，且机器人处在非奇异位形，则静力平衡时，末端外力为：

$$f_{\mathrm{tip}}=((J(\theta))^{\mathrm{T}})^{-1}\tau=J^{-\mathrm{T}}(\theta)\tau$$

◻ 力椭球（Force Ellipsoid）



图：关节力矩τ_1, τ_2的范围，映射为末端的力$f_{tip} \in \mathbb{R}^2$的范围。

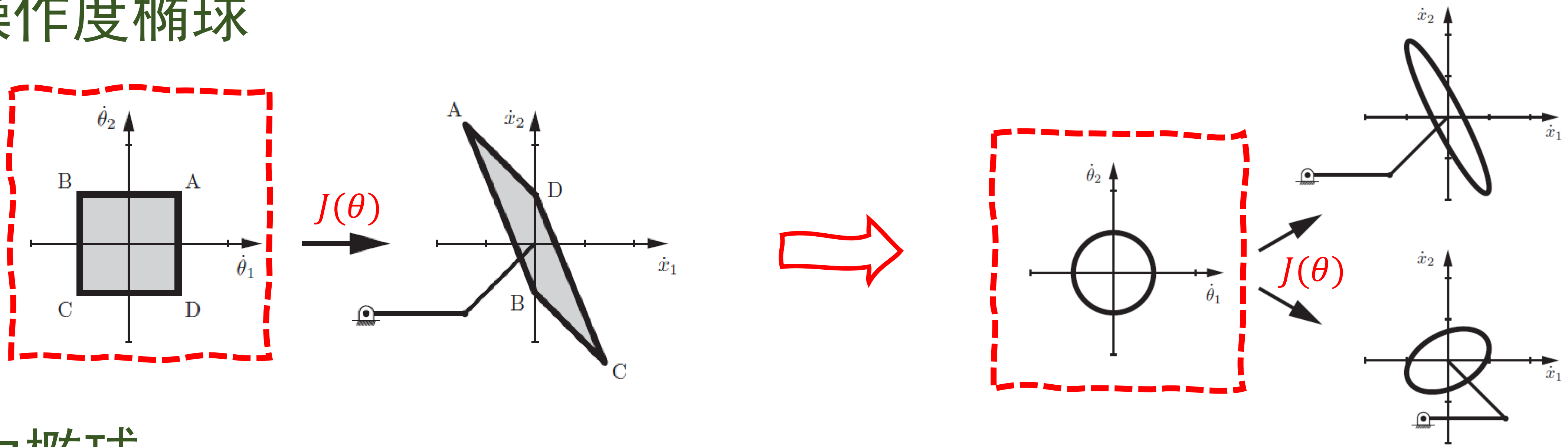


图：平面内2R开链机械臂，两种不同位形下的力椭球

- 类似速度范围，可以利用$J^{-T}(\theta)$将关节力矩τ的边界范围，映射为不同位形末端外力f_{tip}的边界范围。
- 但一般，我们将关节力矩τ的边界范围用单位圆（多维）表示，即所有关节的共同作用相等。

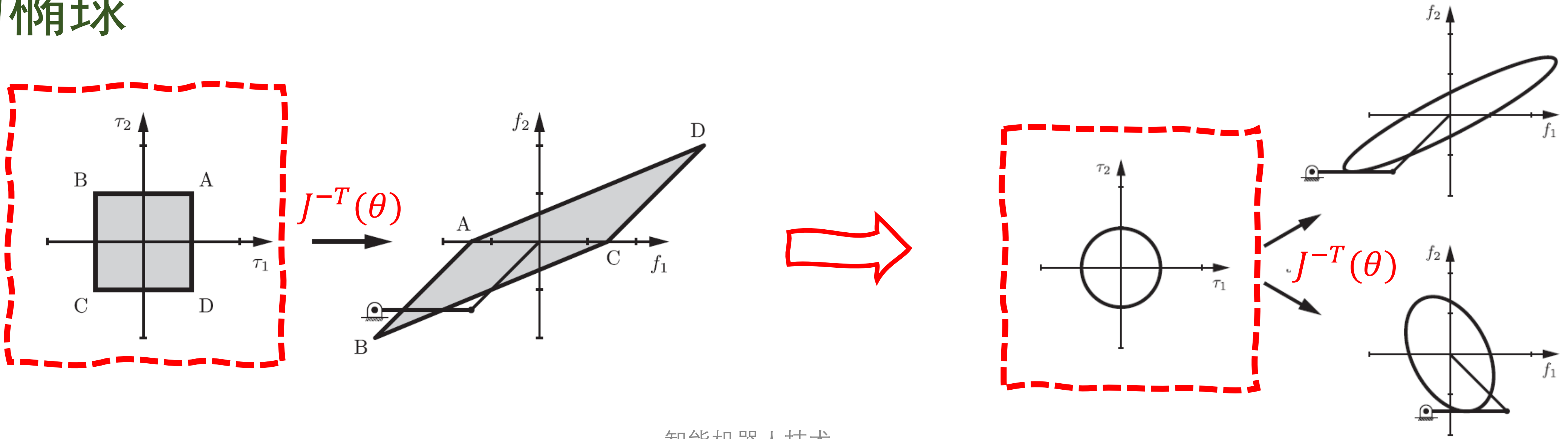
- 奇异位形时：操作度椭球将退化成一条线段，力椭球变成在该线段垂直方向上的一条无限长直线。

操作度椭球

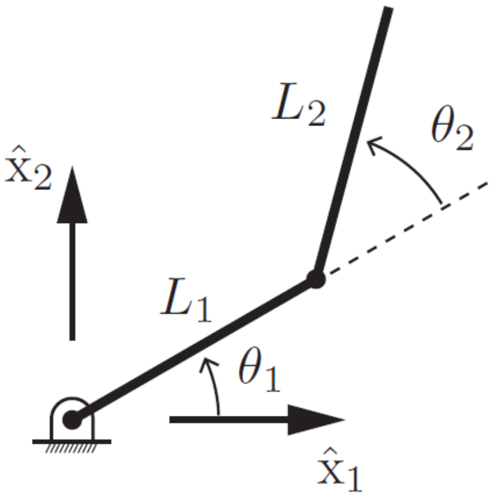


$\dot{\theta}_2$
B
A
C
D
$\dot{\theta}_1$
$J(\theta)$
A
$\dot{x}_2$
D
B
C
$\dot{x}_1$
$\dot{\theta}_2$
$\dot{\theta}_1$
$J(\theta)$
$\dot{x}_2$
$\dot{x}_1$
$\dot{x}_2$
$\dot{x}_1$

力椭球



τ_2
B
A
C
D
τ_1
$J^{-T}(\theta)$
f_2
D
A
C
f_1
B
τ_2
τ_1
$J^{-T}(\theta)$
f_2
f_1
f_2
f_1



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & L_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- 对于任意位形，末端速度v_{tip}与关节速度$\dot{\theta}$间可以通过雅克比矩阵$J(\theta)$。

$$v_{tip} = J(\theta)\dot{\theta}$$

- 雅克比$J(\theta)$的**第i列**表示：当$\theta_i = 1$而其他$\theta = 0$时，末端的运动速度（运动旋量）。

- 这个思路与上一章中计算**螺旋轴**完全一致。

- **唯一区别**是：
  - PoE公式所有关节$\theta = 0$
  - Jacobian矩阵含关节θ具体数值

- 扩展并联系上一章内容：

$$\mathcal{V}_s = J_s(\theta)\dot{\theta}$$

空间旋量

空间雅克比：每列对应$\{s\}$下各关节螺旋轴

$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$$

物体旋量

物体雅克比：每列对应$\{b\}$下各关节螺旋轴

回顾：线性代数与线性微分方程知识：

（1）若$A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$均可逆，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

（2）若$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$为常数，$\theta(t)$为$t$的标量函数，则$d(e^{A\theta})/dt=Ae^{A\theta}\dot{\theta}$

（3）$\left(e^{A\theta}\right)^{-1}=e^{-A\theta}$

- 考虑n杆开链机械臂的正向运动学PoE：第10章P12

$$T(\theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}\cdots e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}}e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n}M.$$

- 对$T(\theta)$求逆：

$$T^{-1}=M^{-1}e^{-[\mathcal{S}_n]\theta_n}\cdots e^{-[\mathcal{S}_1]\theta_1}$$

- 对$T(\theta)$求时间导数：

$$\begin{aligned}\dot{T}&=\left(\frac{d}{dt}e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}\right)\cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n}M+e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}\left(\frac{d}{dt}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}\right)\cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n}M+\cdots\\&=[\mathcal{S}_1]\dot{\theta}_1e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}\cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n}M+e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}[\mathcal{S}_2]\dot{\theta}_2e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}\cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n}M+\cdots\end{aligned}$$

- 空间速度（旋量）$\mathcal{V}_s$可写成：第9章P79

$$\dot{T}T^{-1}=[\mathcal{V}_s]=\begin{bmatrix}[\omega_s] & v_s\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in se(3)$$

$$\dot{T} = [\mathcal{S}_1]\dot{\theta}_1 e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M + e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} [\mathcal{S}_2]\dot{\theta}_2 e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M + \cdots$$

$$T^{-1} = M^{-1} e^{-[\mathcal{S}_n]\theta_n} \cdots e^{-[\mathcal{S}_1]\theta_1}$$

➢ 空间速度（旋量）$\mathcal{V}_s$可写成：第9章P79

$$\dot{T}T^{-1} = [\mathcal{V}_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{V}' &= [\mathrm{Ad}_T]\mathcal{V} \\ [\mathcal{V}'] &= T[\mathcal{V}]T^{-1} \end{aligned}}$$

➢ 计算可得：

$$[\mathcal{V}_s] = \underline{[\mathcal{S}_1]\dot{\theta}_1} + \underline{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}[\mathcal{S}_2]e^{-[\mathcal{S}_1]\theta_1}\dot{\theta}_2} + \underline{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}[\mathcal{S}_3]e^{-[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{-[\mathcal{S}_1]\theta_1}\dot{\theta}_3} + \cdots .$$

➢ 利用伴随映射改写上式：第9章P79

$$\mathcal{V}_s = \underbrace{\mathcal{S}_1}_{J_{s1}} \dot{\theta}_1 + \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}}(\mathcal{S}_2)}_{J_{s2}} \dot{\theta}_2 + \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}}(\mathcal{S}_3)}_{J_{s3}} \dot{\theta}_3 + \cdots$$

$$J_s(\theta)\dot{\theta}$$

➢ 最终：

$$\mathcal{V}_s = J_{s1} + J_{s2}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + J_{sn}(\theta)\dot{\theta}_n \Rightarrow \mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} J_{s1} & J_{s2}(\theta) & \cdots & J_{sn}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

定义

- n 杆机械臂正向运动学的PoE公式：

$$T = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 空间雅克比$J_s(\theta) \in \mathbb{R}^{6\times n}$通过

$$\mathcal{V}_s = J_s(\theta)\dot{\theta}.$$

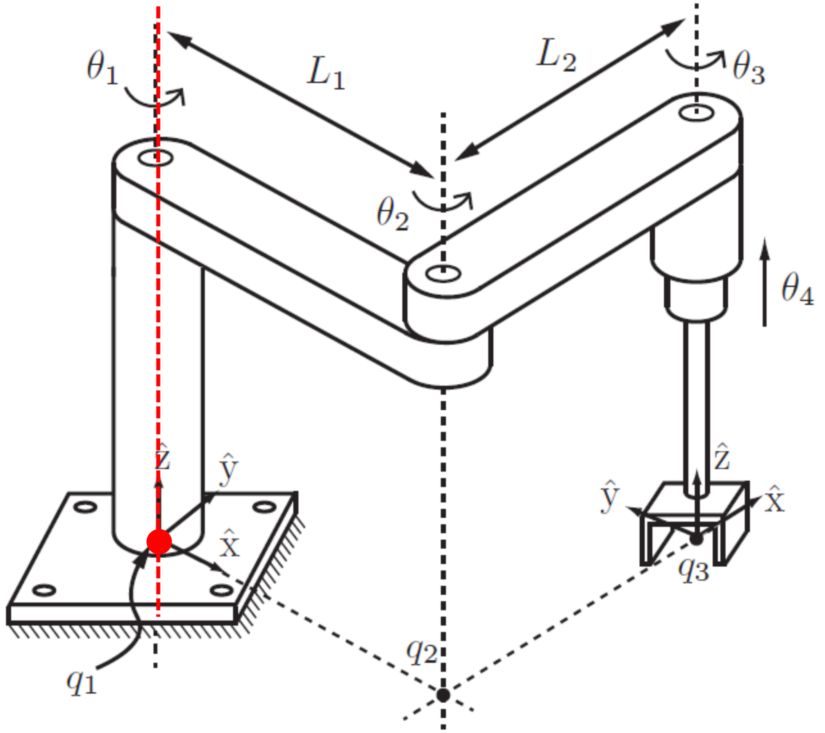
将关节速度$\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$与空间旋量$\mathcal{V}_s$联系在一起。$J_s(\theta)$的第$i$列为：

$$\begin{cases} J_{s1} = \mathcal{S}_1 & , i = 1 \\ J_{si}(\theta) = \mathrm{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}}(\mathcal{S}_i) & , i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

- 确定$J_s(\theta)$第i列$J_{si}(\theta)$的过程类似于推导指数积公式PoE的关节旋量过程：
  - 各列$J_{si}(\theta)$为描述第i个关节轴相对$\{s\}$的旋量，有具体θ。
  - PoE的θ都取0。

例1

- $J_s(\theta)$的第i列记作$J_{si}(\theta) = (\omega_{si}, v_{si})$。
- 伴随矩阵$Ad_{T_{i-1}}$在我们计算关节螺旋轴时不是显式的，需要具体计算得到。
- 关节1：
  - $\omega_{s1} = (0,0,1)$
  - 选择一个关节1轴线上的点
    $$q_1 = (0,0,0)$$
  - 因此$v_{s1} = -\omega_{s1} \times q_1 = (0,0,0)$

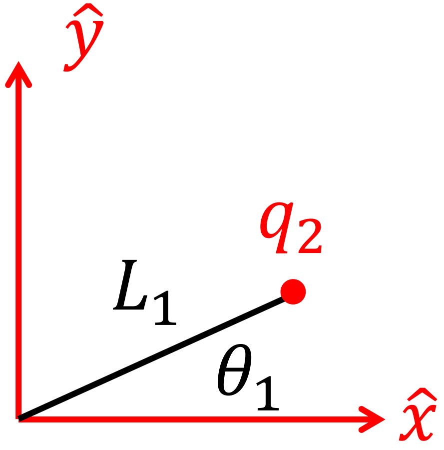


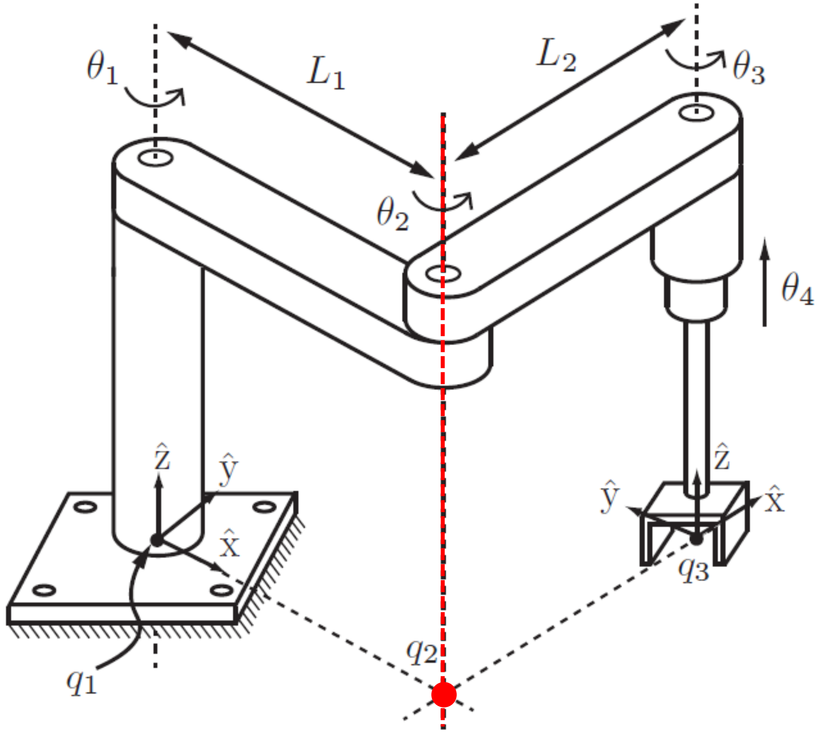
图：空间RRRP开链机械臂

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

例1

- $J_s(\theta)$的第i列记作$J_{si}(\theta)=(\omega_{si},v_{si})$。
- 伴随矩阵$Ad_{T_{i-1}}$在我们计算关节螺旋轴时不是显式的，需要具体计算得到。
- 关节2：
  - $\omega_{s2}=(0,0,1)$
  - 选择一个关节2轴线上的点
    $q_2=(L_1\cos\theta_1, L_1\sin\theta_1, 0)$
  - 因此$v_{s2}=-\omega_{s2}\times q_2=(L_1s_1,-L_1c_1,0)$





图：空间RRRP开链机械臂

$$J_s(\theta)=\begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & L_1 s_1 & & \\ 0 & -L_1 c_1 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

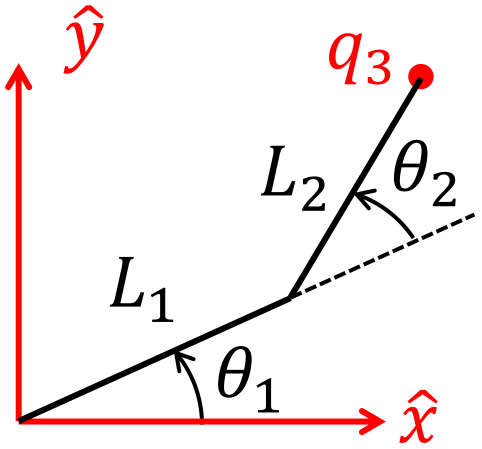
例1

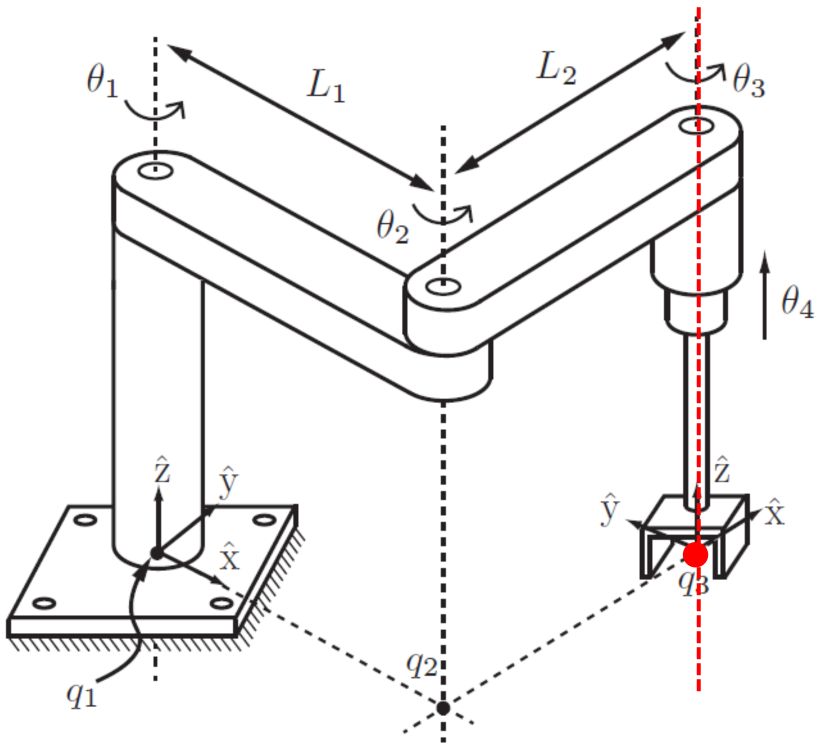
- $J_s(\theta)$的第i列记作$J_{si}(\theta)=(\omega_{si},v_{si})$。
- 伴随矩阵$Ad_{T_{i-1}}$在我们计算关节螺旋轴时不是显式的，需要具体计算得到。
- 关节3：
  - $\omega_{s3}=(0,0,1)$
  - 选择一个关节3轴线上的点

$$q_3=(L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2),\ L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2),0)$$

  - 因此

$$v_{s3}=-\omega_{s3}\times q_3$$
$$=(L_1s_1+L_2s_{12},-L_1c_1-L_2c_{12},0)$$





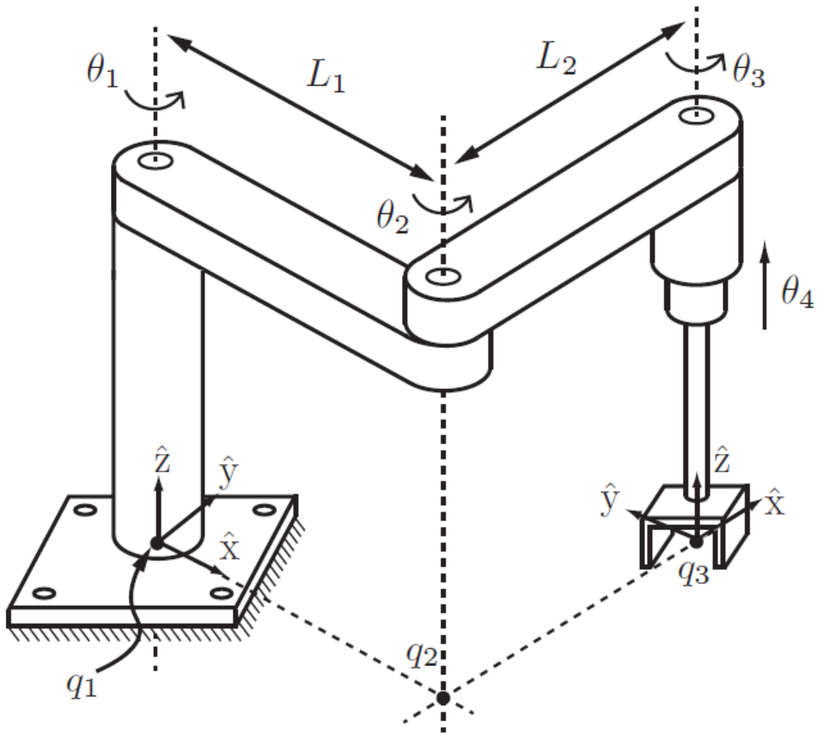
图：空间RRRP开链机械臂

$$J_s(\theta)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 0 & L_1s_1 & L_1s_1+L_2s_{12} & \\ 0 & -L_1c_1 & -L_1c_1-L_2c_{12} & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

例1

- $J_s(\theta)$的第i列记作$J_{si}(\theta)=(\omega_{si},v_{si})$。
- 伴随矩阵$Ad_{T_{i-1}}$在我们计算关节螺旋轴时不是显式的，需要具体计算得到。
- 关节4： 移动副
  - $\omega_{s4}=(0,0,0)$
  - 关节方向：

    $v_{s4}=(0,0,1)$
- 空间雅克比矩阵 $J_s(\theta)$ 即求得。



图：空间RRRP开链机械臂

$$J_s(\theta)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_1 s_1 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} & 0 \\ 0 & -L_1 c_1 & -L_1 c_1 - L_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例2

➢ 关节1：

- 选择一个关节1轴线上的点

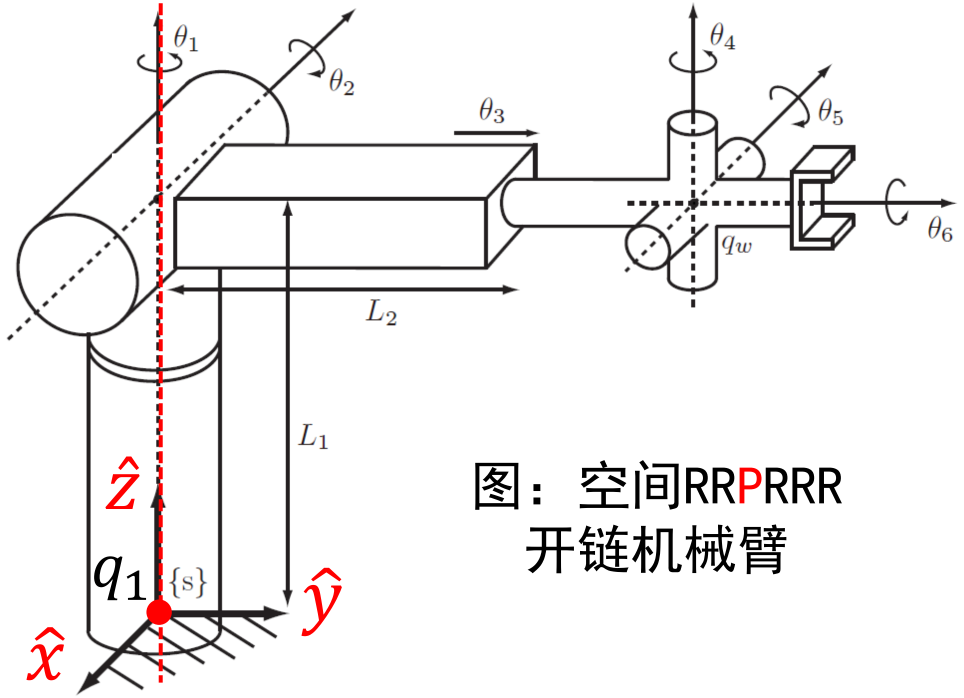
$$q_1 = (0,0,0)$$

- 关节1的轴向

$$\omega_{s1} = (0,0,1)$$

- 因此

$$v_{s1} = -\omega_{s1} \times q_1 = (0,0,0)$$



图：空间RRPRRR开链机械臂

例2

- 关节2：
  - 选择一个关节2轴线上的点

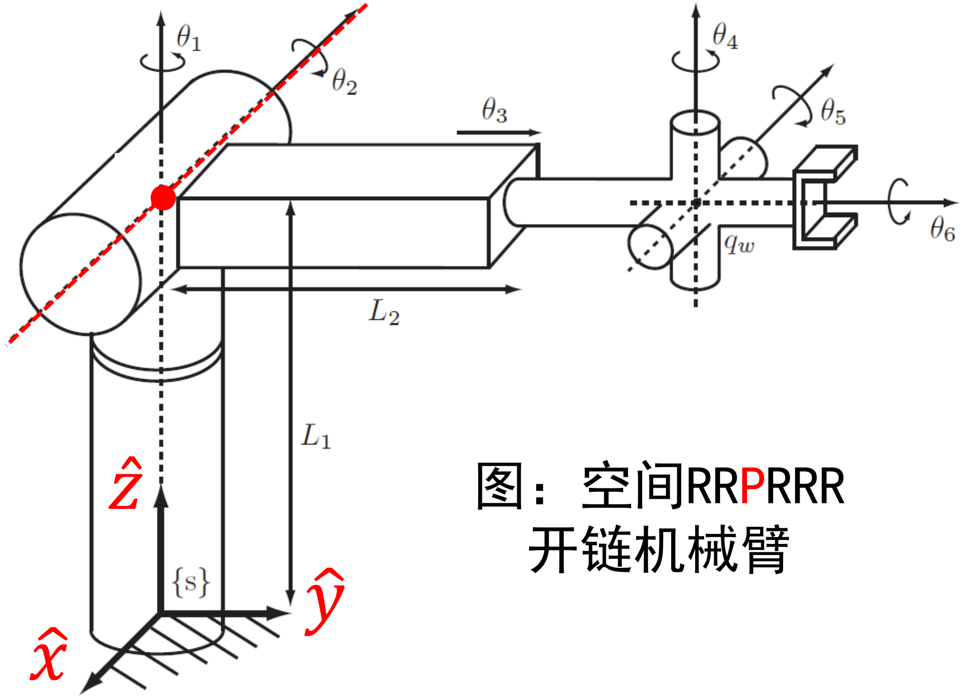
$$q_2 = (0,0,L_1)$$

  - 关节2的轴向会因为关节1的转动而改变

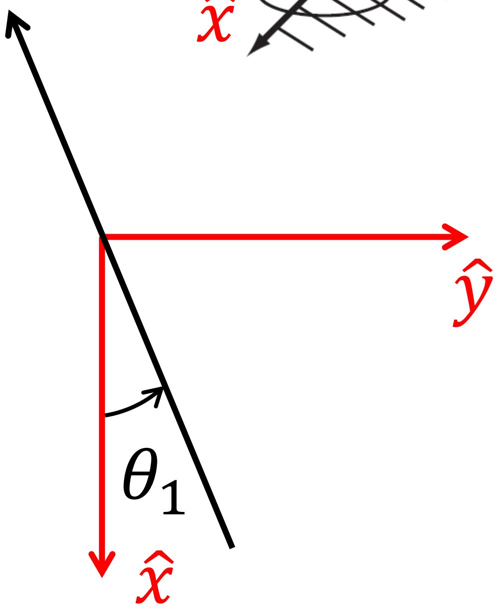
$$\omega_{s2} = (-\cos\theta_1, -\sin\theta_1, 0)$$

  - 因此

$$v_{s2} = -\omega_{s2} \times q_2 = (L_1 s_1, -L_1 c_1, 0)$$



图：空间RRPRRR开链机械臂



例2

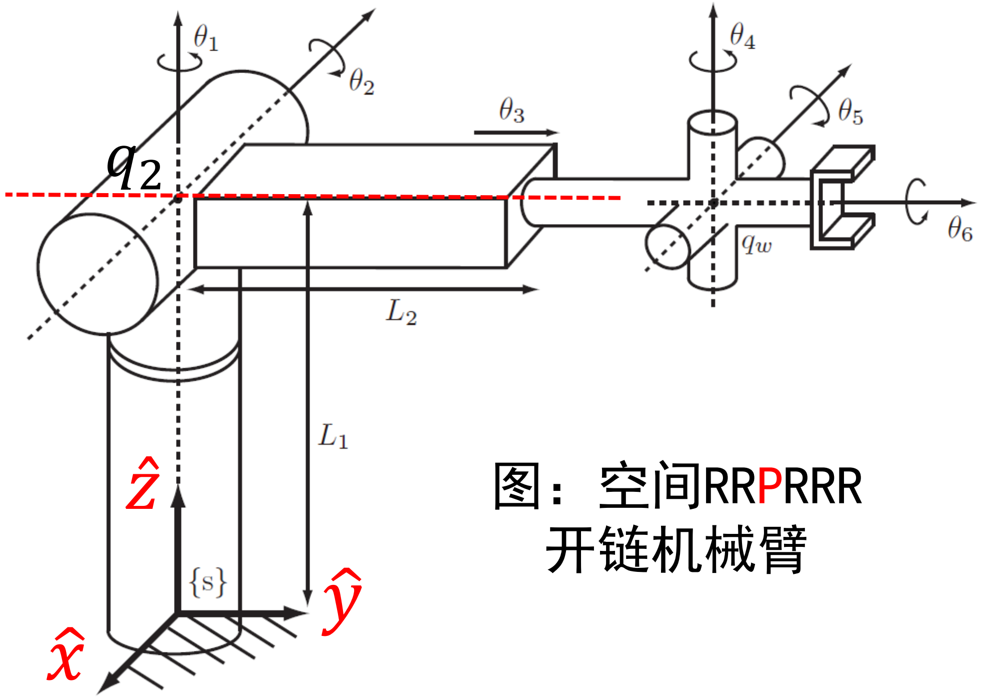
➢ 关节3：

- 移动副

$$\omega_{s3} = (0,0,0)$$

- 关节3的轴向会因为关节1、2的转动而改变

$$v_{s3} = \underline{\mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_1)}\,\underline{\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 c_2 \\ c_1 c_2 \\ -s_2 \end{bmatrix}$$



图：空间RRPRRR开链机械臂

回顾：第9章P38

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$绕R转动$= RR_{sb}$

左乘R，绕固定坐标系的轴转

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$绕R转动$= R_{sb}R$

右乘R，绕物体坐标系的轴转

例2

- 关节4-6：
  - 腕部中心点坐标

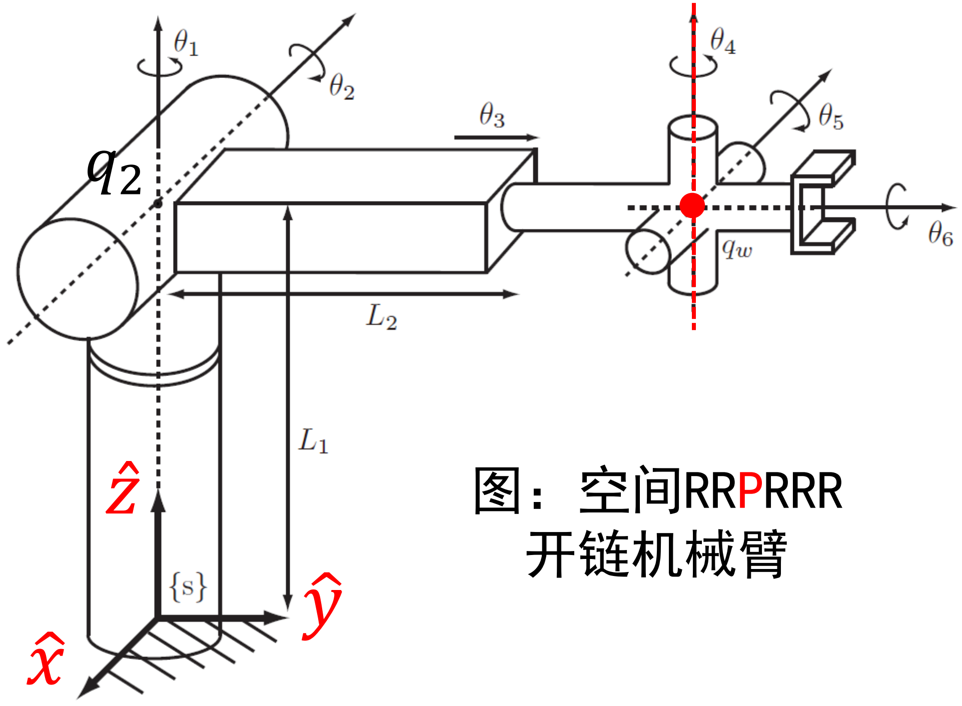
$$q_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \underline{\mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_1)}\underline{\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2+\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(L_2+\theta_3)s_1c_2 \\ (L_2+\theta_3)c_1c_2 \\ L_1-(L_2+\theta_3)s_2 \end{bmatrix}$$

  - 关节4角速度：

$$\omega_{s4} = \underline{\mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_1)}\underline{\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1s_2 \\ c_1s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

  - 因此

$$v_{s4} = -\omega_{s4} \times q_\omega = (\dots, \dots, \dots)$$



图：空间RRPRRR开链机械臂

回顾：第9章P38

$$R_{sb'} = RR_{sb}$$

左乘R，绕固定坐标系的轴转

例2

- 关节4-6：
  - 腕部中心点坐标

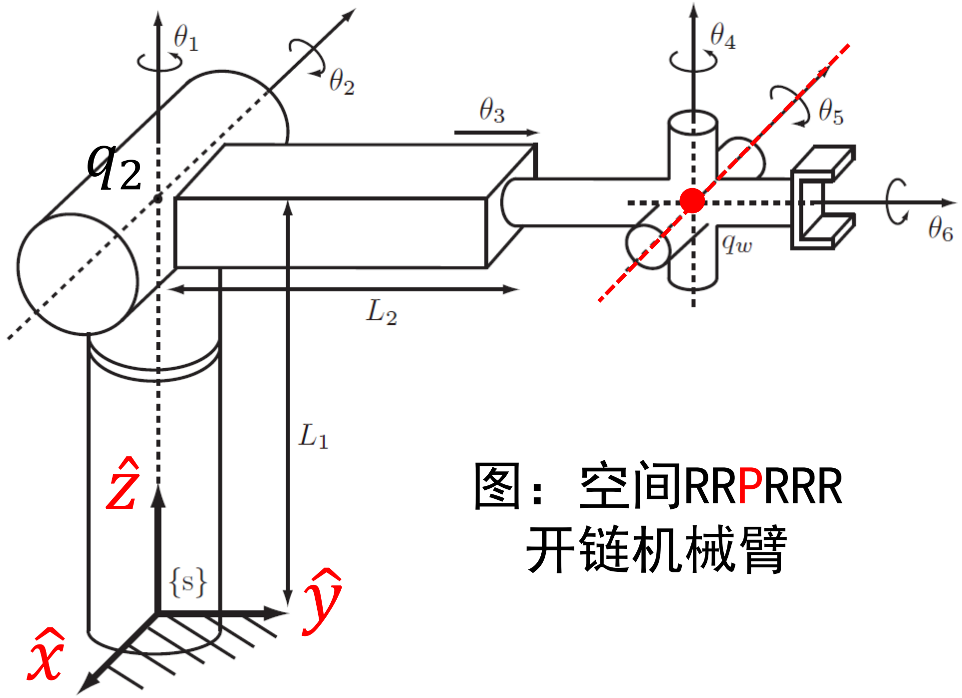
$$q_w=\begin{bmatrix}0\\0\\L_1\end{bmatrix}+\underline{\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta_1)}\underline{\mathrm{Rot}(\hat{x},-\theta_2)}\begin{bmatrix}0\\L_2+\theta_3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(L_2+\theta_3)s_1c_2\\(L_2+\theta_3)c_1c_2\\L_1-(L_2+\theta_3)s_2\end{bmatrix}$$

  - 关节5角速度：

$$\omega_{s5}=\underline{\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta_1)}\underline{\mathrm{Rot}(\hat{x},-\theta_2)}\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta_4)\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1c_4+s_1c_2s_4\\-s_1c_4-c_1c_2s_4\\s_2s_4\end{bmatrix}$$

  - 因此

$$v_{s5}=-\omega_{s5}\times q_\omega=(\dots,\dots,\dots)$$



图：空间RRPRRR开链机械臂

回顾：第9章P38

$$R_{sb'}=RR_{sb}$$

左乘R，绕固定坐标系的轴转

例2

- 关节4–6：

  - 腕部中心点坐标

$$q_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_1)\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 + \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(L_2+\theta_3)s_1c_2 \\ (L_2+\theta_3)c_1c_2 \\ L_1 - (L_2+\theta_3)s_2 \end{bmatrix}$$

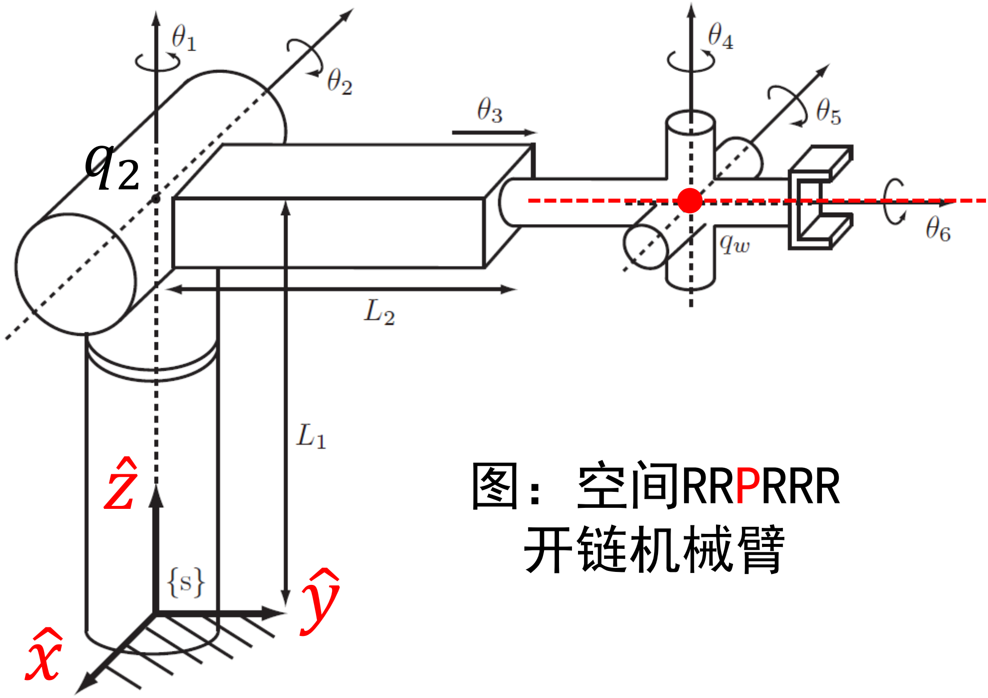
  - 关节6角速度：

$$\omega_{s6} = \mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_1)\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_2)\mathrm{Rot}(\hat{z}, \theta_4)\mathrm{Rot}(\hat{x}, -\theta_5) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_5(s_1c_2c_4 + c_1s_4) + s_1s_2s_5 \\ c_5(c_1c_2c_4 - s_1s_4) - c_1s_2s_5 \\ -s_2c_4c_5 - c_2s_5 \end{bmatrix}.$$

  - 因此

$$v_{s6} = -\omega_{s6} \times q_\omega = (\dots, \dots, \dots)$$



图：空间RRPRRR开链机械臂

  - 最终

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} \omega_{s1} & \omega_{s2} & 0 & \omega_{s4} & \omega_{s5} & \omega_{s6} \\ 0 & -\omega_{s2} \times q_2 & v_{s3} & -\omega_{s4} \times q_w & -\omega_{s5} \times q_w & -\omega_{s6} \times q_w \end{bmatrix}$$

回顾：线性代数与线性微分方程知识：

推导过程类似[空间雅克比]

（1）若$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$均可逆，则$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

（2）若$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为常数，$\theta(t)$为$t$的标量函数，则$d(e^{A\theta})/dt = Ae^{A\theta}\dot{\theta}$

（3）$\left(e^{A\theta}\right)^{-1} = e^{-A\theta}$

- 考虑n杆开链机械臂的正向运动学PoE：第10章P37

$$T(\theta) = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}\ldots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$$

- 对$T(\theta)$求逆：

$$T^{-1} = e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}\ldots e^{-[\mathcal{B}_1]\theta_1}M^{-1}$$

- 对$T(\theta)$求时间导数：

$$\dot{T} = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\ldots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}}\left(\frac{d}{dt}e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}\right) + Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\ldots\left(\frac{d}{dt}e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}}\right)e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} + \cdots$$

$$= Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\ldots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}[\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n + Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\ldots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}}[\mathcal{B}_{n-1}]e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}\dot{\theta}_{n-1} + \cdots$$

- 空间速度（旋量）$\mathcal{V}_b$可写成：第9章P79

$$T^{-1}\dot{T} = [\mathcal{V}_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\dot{T} = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}[\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n + Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}\cdots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}}[\mathcal{B}_{n-1}]e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}\dot{\theta}_{n-1} + \cdots$$

$$T^{-1} = e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}\cdots e^{-[\mathcal{B}_1]\theta_1}M^{-1}$$

- 空间速度（旋量）$\mathcal{V}_b$ 可写成：第9章P79

$$T^{-1}\dot{T} = [\mathcal{V}_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\mathcal{V}' = [\mathrm{Ad}_T]\mathcal{V}$$

$$[\mathcal{V}'] = T[\mathcal{V}]T^{-1}$$

- 计算可得：

$$[\mathcal{V}_b] = [\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n + e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}[\mathcal{B}_{n-1}]e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}\cdots e^{-[\mathcal{B}_2]\theta_2}[\mathcal{B}_1]e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}\cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}\dot{\theta}_1$$

- 利用伴随映射改写上式：第9章P79

$$\mathcal{V}_b = \underbrace{\mathcal{B}_n}_{J_{bn}}\dot{\theta}_n + \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}}(\mathcal{B}_{n-1})}_{J_{b,n-1}}\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}\cdots e^{-[\mathcal{B}_2]\theta_2}}(\mathcal{B}_1)}_{J_{b1}}\dot{\theta}_1$$

$$J_b(\theta)\dot{\theta}$$

- 最终：

$$\mathcal{V}_b = J_{b1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + J_{bn-1}(\theta)\dot{\theta}_{n-1} + J_{bn}\dot{\theta}_n \Rightarrow \mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} J_{b1}(\theta) & \cdots & J_{bn-1}(\theta) & J_{bn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

定义

类似[空间雅克比]

- n 杆机械臂正向运动学的PoE公式：

$$T = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$$

对比

$$T = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 物体雅克比$J_b(\theta) \in \mathbb{R}^{6\times n}$通过

$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$$

对比

$$\mathcal{V}_s = J_s(\theta)\dot{\theta}.$$

将关节速度$\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$与末端速度$\mathcal{V}_b$联系在一起。$J_b(\theta)$的第$i$列为：

$$\begin{cases} J_{s1} = \mathcal{S}_1 & ,i = 1 \\ J_{si}(\theta) = \mathrm{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}}(\mathcal{S}_i) & ,i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

对比

$$\begin{cases} J_{bn} = \mathcal{B}_n & ,i = n \\ J_{bi}(\theta) = \mathrm{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \cdots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}}(\mathcal{B}_i) & ,i = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

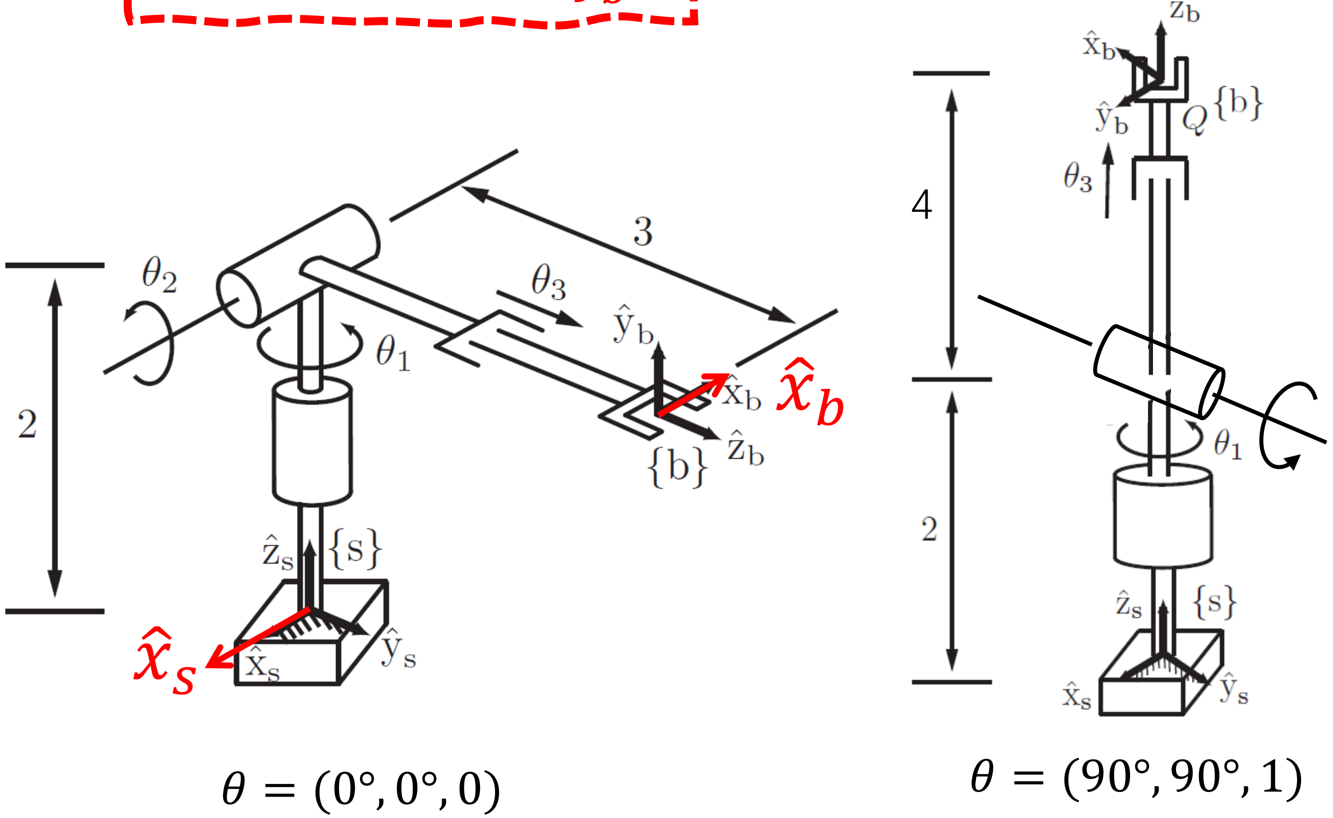
这里做了简化：计算特定角度θ的J_b

➢ 前向运动学PoE：

$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{B}_3]\theta_3}$$

- 观察初始位形M：

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



□ 例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

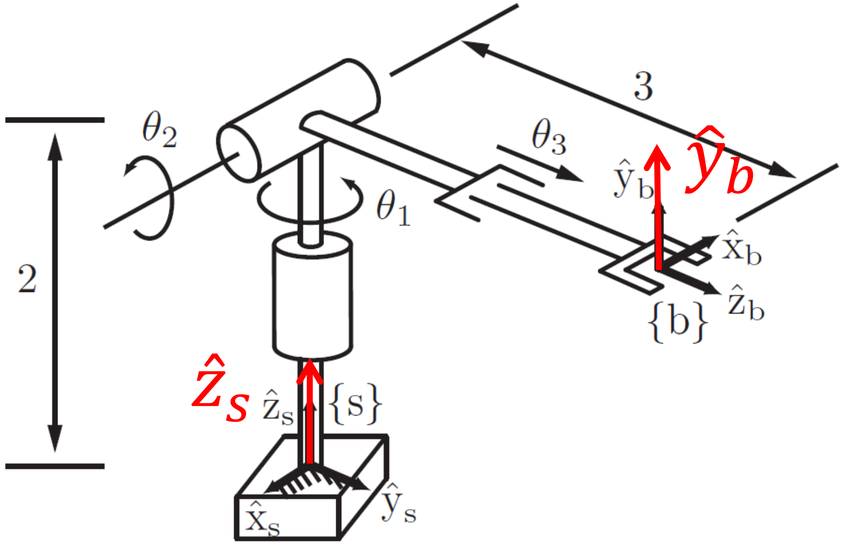
这里做了简化：计算特定角度θ的J_b

➢ 前向运动学PoE：

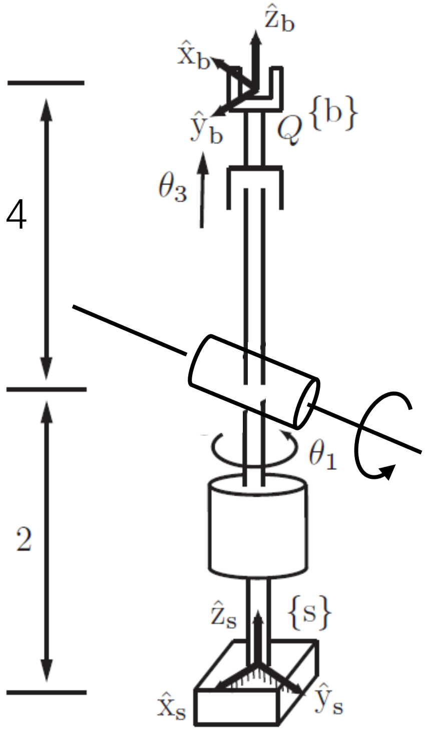
$$T(\theta) = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{B}_3]\theta_3}$$

- 观察初始位形M：

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\theta = (0°, 0°, 0)$



$\theta = (90°, 90°, 1)$

例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta=(90°,90°,1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

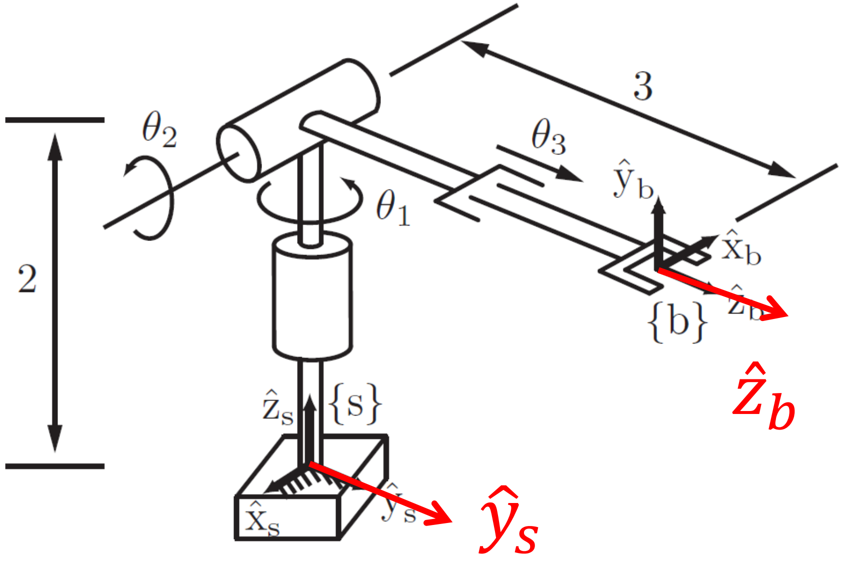
这里做了简化：计算特定角度θ的J_b

➢ 前向运动学PoE：

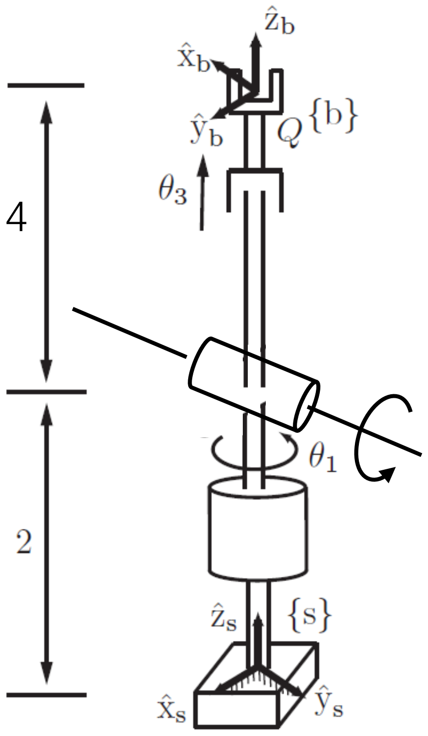
$$T(\theta)=Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{B}_3]\theta_3}$$

- 观察初始位形M：

$$M=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\theta=(0°,0°,0)$



$\theta=(90°,90°,1)$

例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

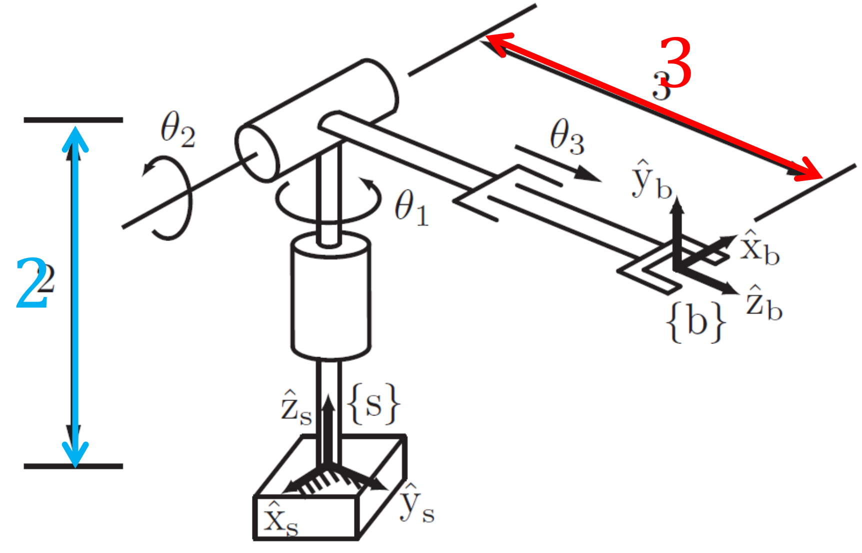
这里做了简化：计算特定角度θ的J_b

➢ 前向运动学PoE：

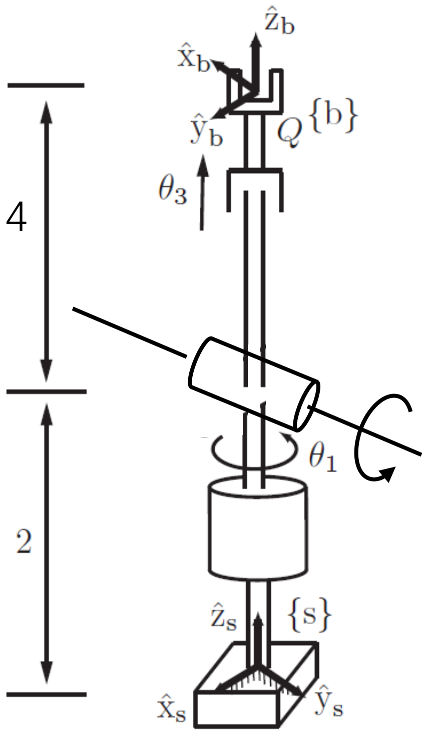
$$T(\theta) = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{B}_3]\theta_3}$$

- 观察初始位形M：

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\theta = (0°, 0°, 0)$



$\theta = (90°, 90°, 1)$

例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求
$\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

➢ 关节1：

- 关节1的轴向

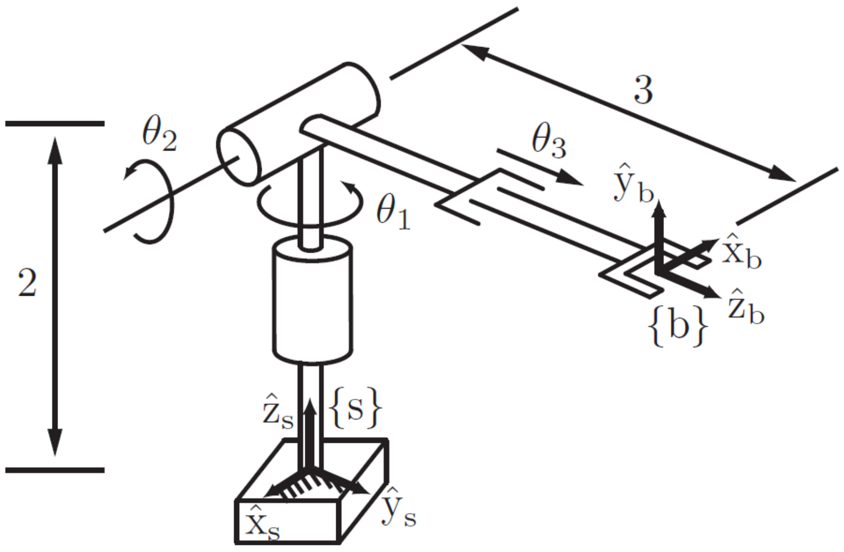
$$\omega_{b1} = (0,0,1)$$

- 选择一个关节1轴线上的点

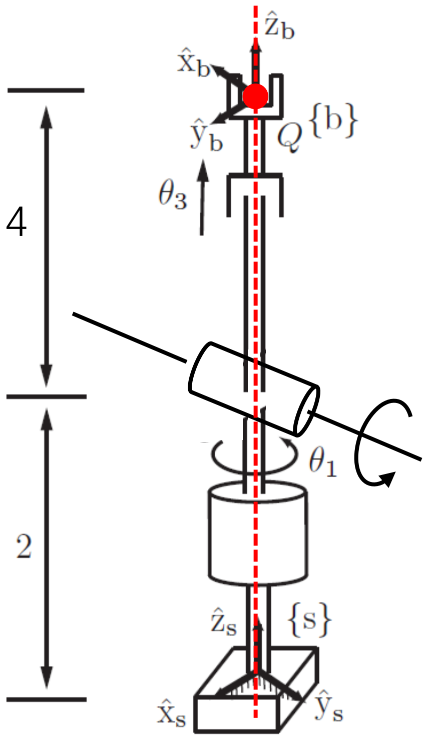
$$q_1 = (0,0,0)$$

- 因此

$$v_{b1} = -\omega_{b1} \times q_1 = (0,0,0)$$



$\theta = (0°, 0°, 0)$



$\theta = (90°, 90°, 1)$

例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

➢ 关节2：

- 关节2的轴向

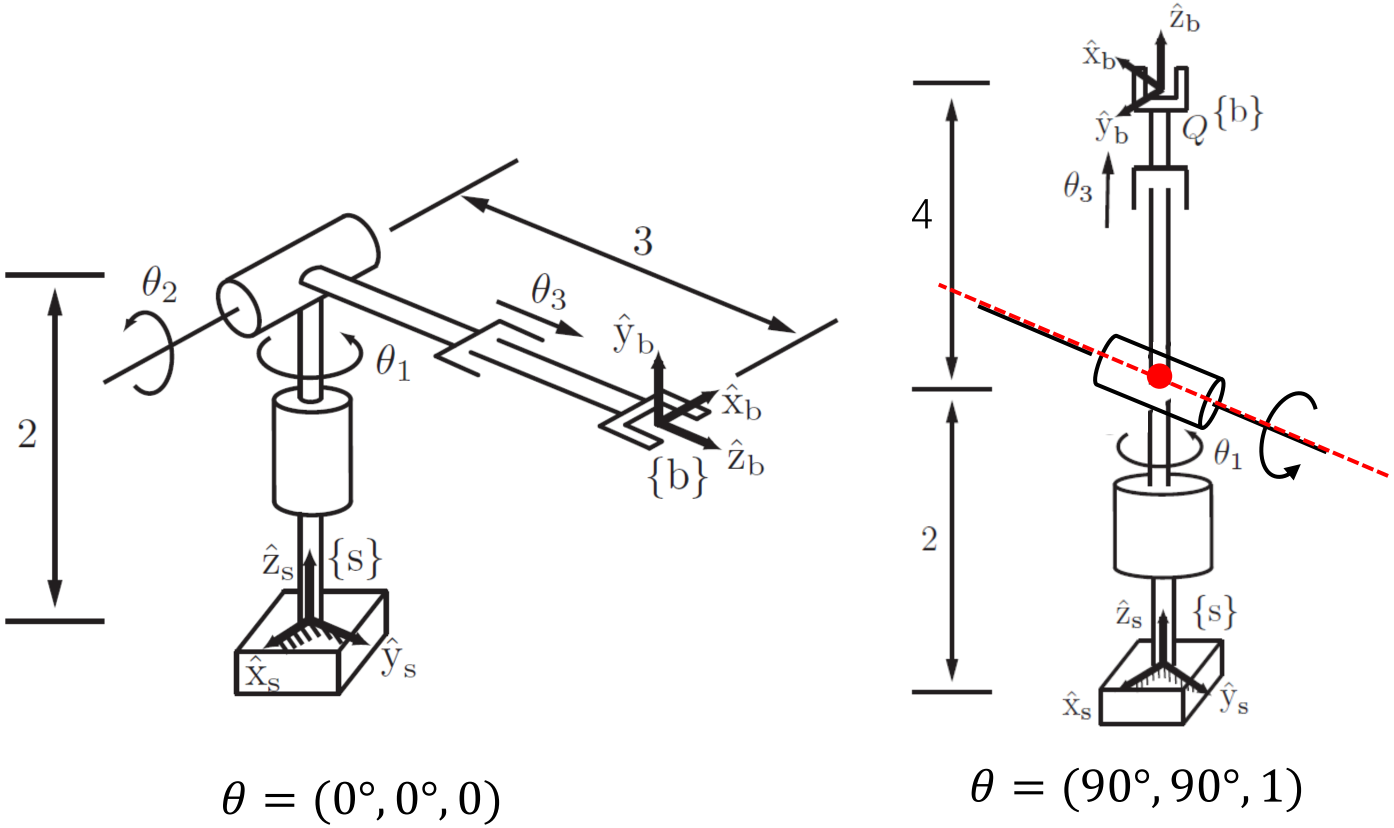
$$\omega_{b2} = (-1,0,0)$$

- 选择一个关节2轴线上的点

$$q_2 = (0,0,-4)$$

- 因此

$$v_{b2} = -\omega_{b2} \times q_2 = (0,4,0)$$



例3

如图所示的RRP机器人处于0位，求 $\theta = (90°, 90°, 1)$ 时的物体雅克比 J_b 。

➢ 关节3：

- 移动副

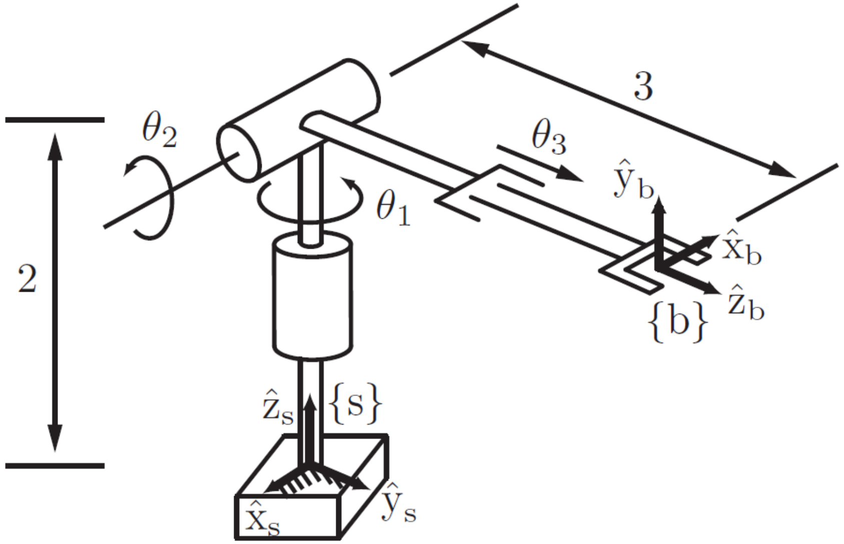
$$\omega_{b3} = (0,0,0)$$

- 因此

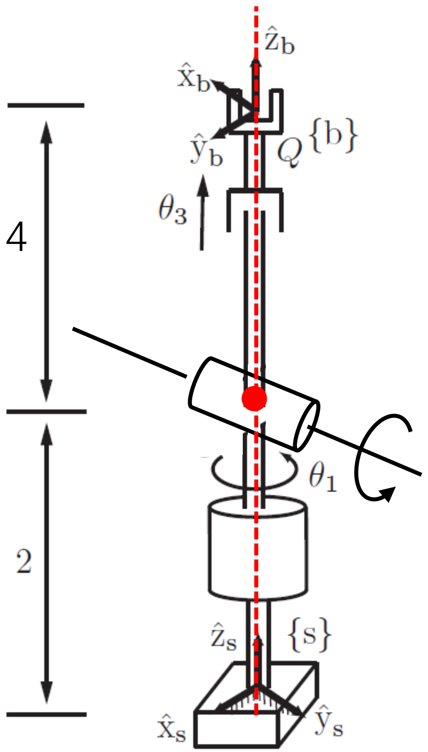
$$v_{b3} = (0,0,1)$$

- 最终

$$J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\theta = (0°, 0°, 0)$



$\theta = (90°, 90°, 1)$

- 基坐标系$\{s\}$，末端坐标系$\{b\}$，正向运动学$T_{sb}(\theta)$。
- 末端坐标系中的速度可以分别在$\{s\}$和$\{b\}$中表示：

$$[\mathcal{V}_s] = \dot{T}_{sb}T_{sb}^{-1} \quad (1)$$
$$[\mathcal{V}_b] = T_{sb}^{-1}\dot{T}_{sb} \quad (2)$$

第9章P79

- 旋量$\mathcal{V}_s$与$\mathcal{V}_b$之间可以写成：

$$\mathcal{V}_s = \mathrm{Ad}_{T_{sb}}(\mathcal{V}_b) \quad (3)$$
$$\mathcal{V}_b = \mathrm{Ad}_{T_{bs}}(\mathcal{V}_s) \quad (4)$$

第9章P81

- 旋量$\mathcal{V}_s$与$\mathcal{V}_b$可以由雅克比矩阵建立与输入θ的关系：

$$\mathcal{V}_s = J_s(\theta)\dot{\theta}, \quad (5)$$
$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta}. \quad (6)$$

第11章P10

- 式（3）可以写为：

$$\mathrm{Ad}_{T_{sb}}(\mathcal{V}_b) = J_s(\theta)\dot{\theta}. \quad (7)$$

第9章P80

- 对式（7）两端都作$[Ad_{T_{bs}}]$，并利用伴随映射性质$[Ad_X][Ad_Y] = [Ad_{XY}]$：

$$\mathrm{Ad}_{T_{bs}}(\mathrm{Ad}_{T_{sb}}(\mathcal{V}_b)) = \mathrm{Ad}_{T_{bs}T_{sb}}(\mathcal{V}_b) = \mathcal{V}_b = \mathrm{Ad}_{T_{bs}}(J_s(q)\dot{\theta}).$$

- 因此：

$$J_b(\theta)\dot{\theta} = \mathrm{Ad}_{T_{bs}}(J_s(q)\dot{\theta}).$$

- 由于对所有$\dot{\theta}$都有$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$，因此：

$$\boxed{J_b(\theta) = \mathrm{Ad}_{T_{bs}}(J_s(\theta)) = [\mathrm{Ad}_{T_{bs}}]J_s(\theta)}$$

- 类似的：

$$\boxed{J_s(\theta) = \mathrm{Ad}_{T_{sb}}(J_b(\theta)) = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]J_b(\theta)}$$

例3（续）

Matlab计算

如图所示的RRP机器人处于0位，$\theta = (90°, 90°, 1)$ 。

- 前面已知：

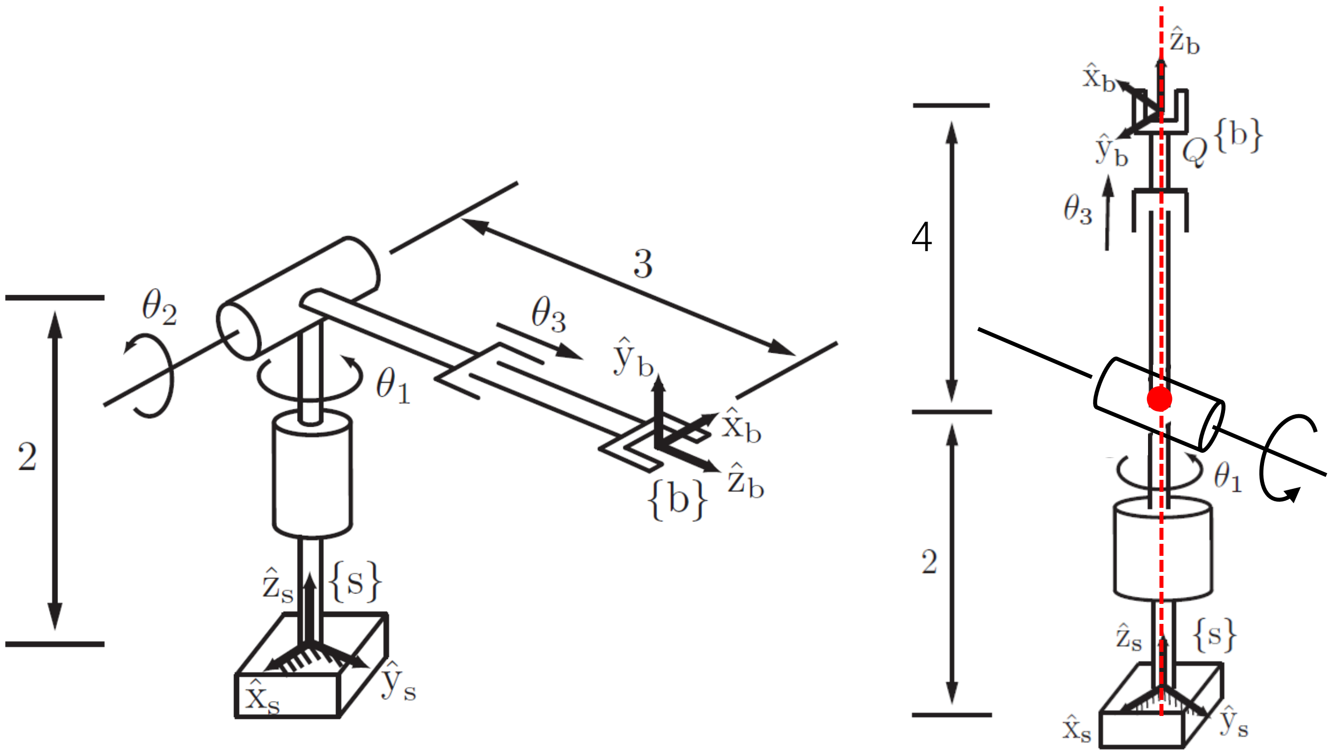
$$J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 容易得出：

$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 可以验算有：

$$J_s = Ad_{T_{sb}} J_b\,!!$$



$\theta = (0°, 0°, 0)$　　$\theta = (90°, 90°, 1)$

例3（续）

如图所示的RRP机器人处于0位，$\theta = (90°, 90°, 1)$ 。

➢ 前面已知：

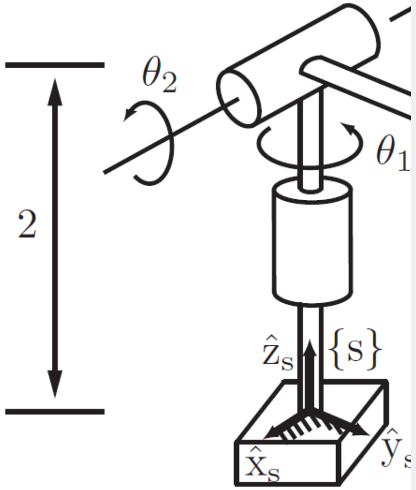
$$J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 容易得出：

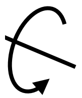
$$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 可以验算有：

$$J_s = Ad_{T_{sb}} J_b \,!\,!$$



$\theta = (0°, 0$



```
Command Window
>> Jb = [0 -1 0; 0 0 0; 1 0 0; 0 0 0; 0 4 0; 0 0 1]

Jb =

     0    -1     0
     0     0     0
     1     0     0
     0     0     0
     0     4     0
     0     0     1

>> Js = [0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 0 -2 0; 0 0 0; 0 0 1]

Js =

     0     0     0
     0     1     0
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     0
     0     0     1

>> Tsb = [0 1 0 0; -1 0 0 0; 0 0 1 6; 0 0 0 1]

Tsb =

     0     1     0     0
    -1     0     0     0
     0     0     1     6
     0     0     0     1

>> Adjoint(Tsb)*Jb

ans =

     0     0     0
     0     1     0
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     0
     0     0     1
```

b计算

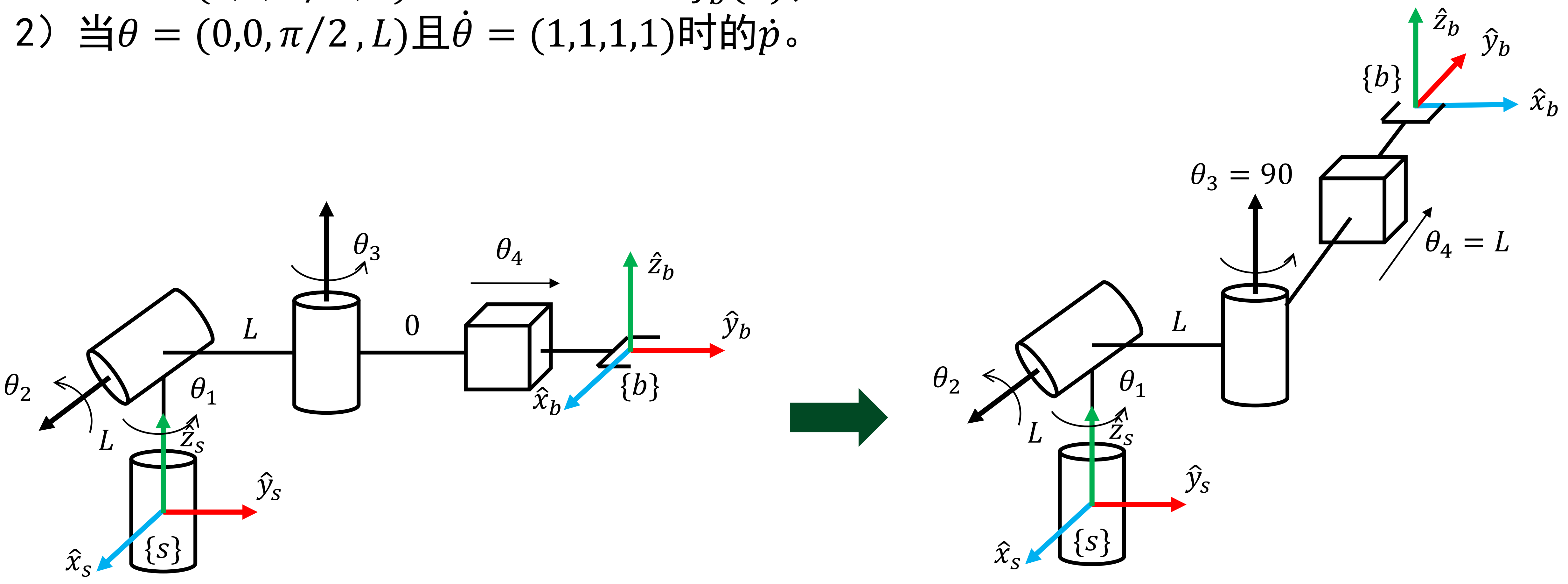
1)

例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$且$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。



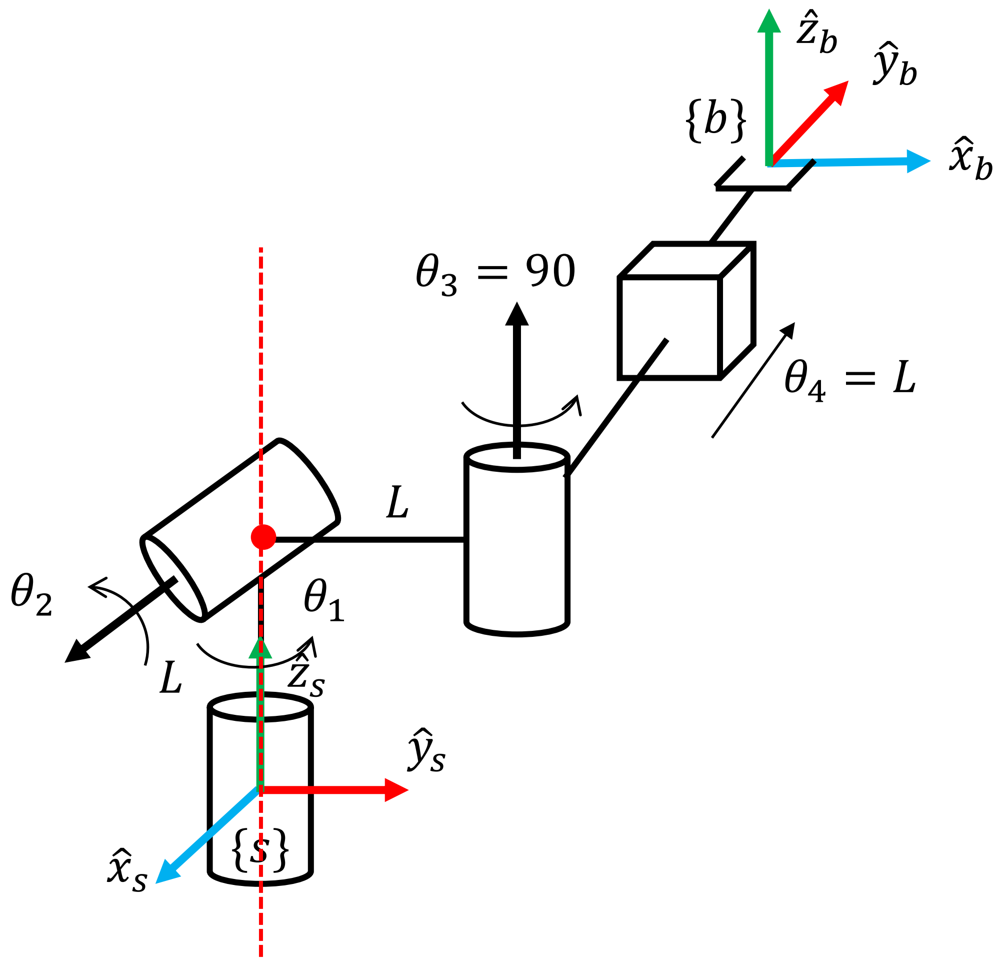
例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta = (0,0,\pi/2,L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta = (0,0,\pi/2,L)$且$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。

- 关节1：
  - 关节1的轴向
  $$\omega_{b1} = (0,0,1)$$
  - 选择一个关节1轴线上的点
  $$q_1 = (-L,-L,0)$$
  - 因此
  $$v_{b1} = -\omega_{b1} \times q_1 = (-L,L,0)$$



例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta=(0,0,\pi/2,L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta=(0,0,\pi/2,L)$且$\dot{\theta}=(1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。

➢ 关节2：

- 关节2的轴向

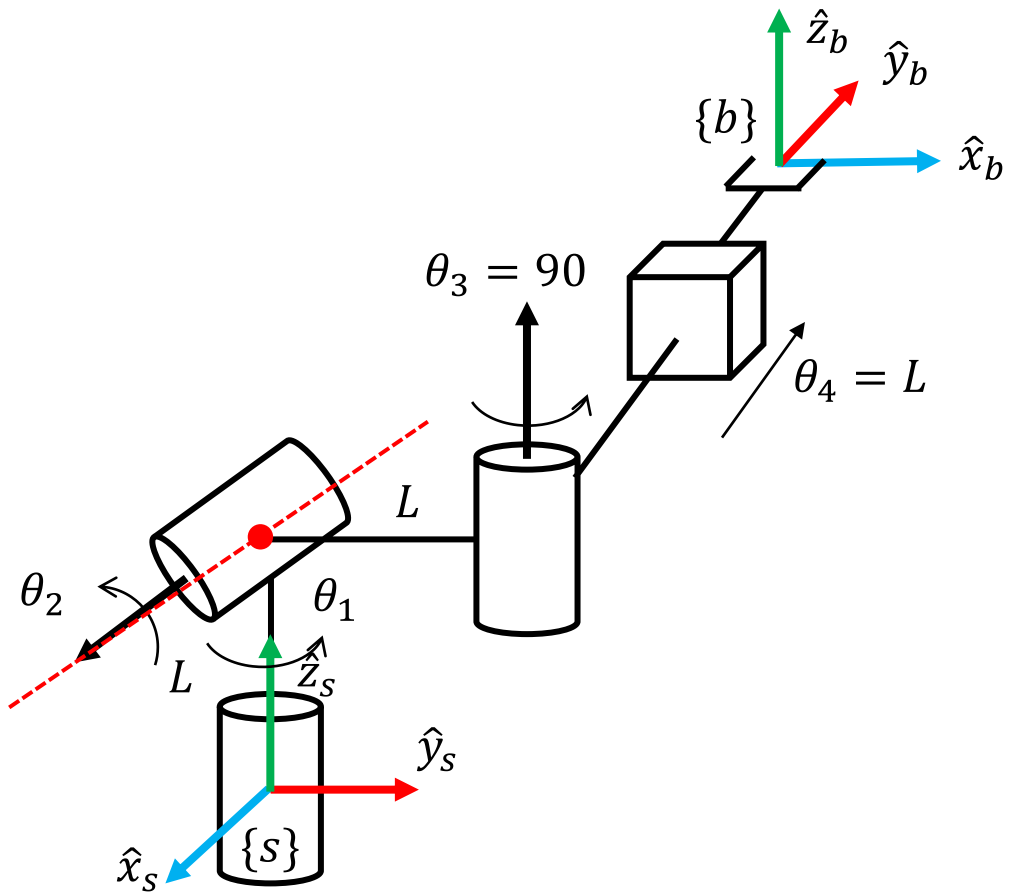
$$\omega_{b2}=(0,-1,0)$$

- 选择一个关节2轴线上的点

$$q_2=(-L,-L,0)$$

- 因此

$$v_{b2}=-\omega_{b2}\times q_2=(0,0,L)$$



例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$且$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。

- 关节3：
  - 关节3的轴向

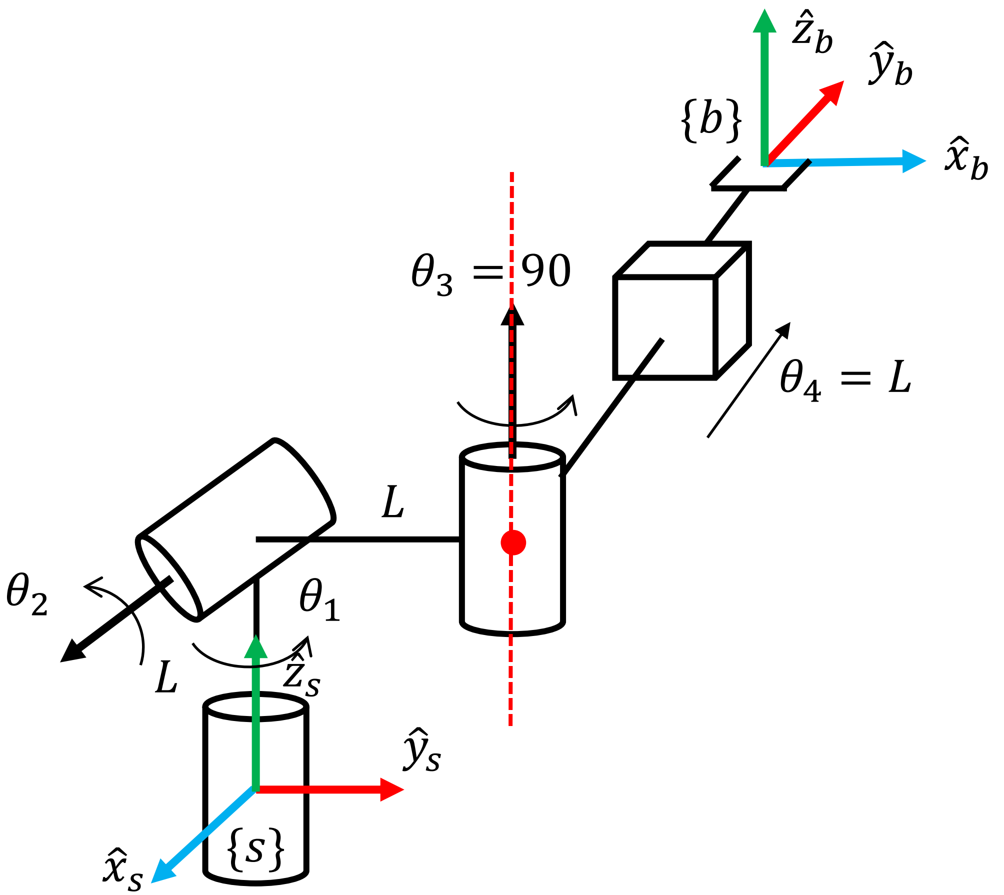
$$\omega_{b3} = (0,0,1)$$

  - 选择一个关节3轴线上的点

$$q_3 = (0, -L, 0)$$

  - 因此

$$v_{b3} = -\omega_{b3} \times q_3 = (-L, 0,0)$$

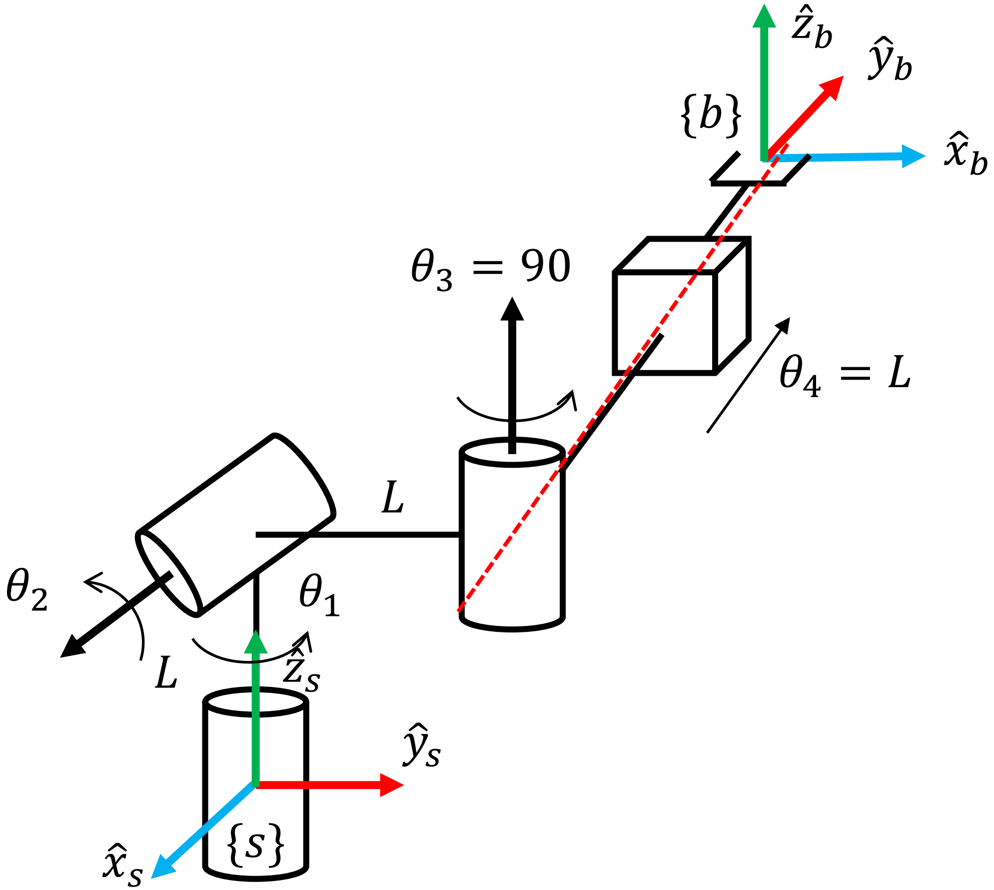


例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta = (0,0,\pi/2,L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta = (0,0,\pi/2,L)$且$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。



- 关节4：
  - 关节4的轴向（移动副）

$$\omega_{b4} = (0,0,0)$$

  - 因此

$$v_{b4} = (0,1,0)$$

- 所以：

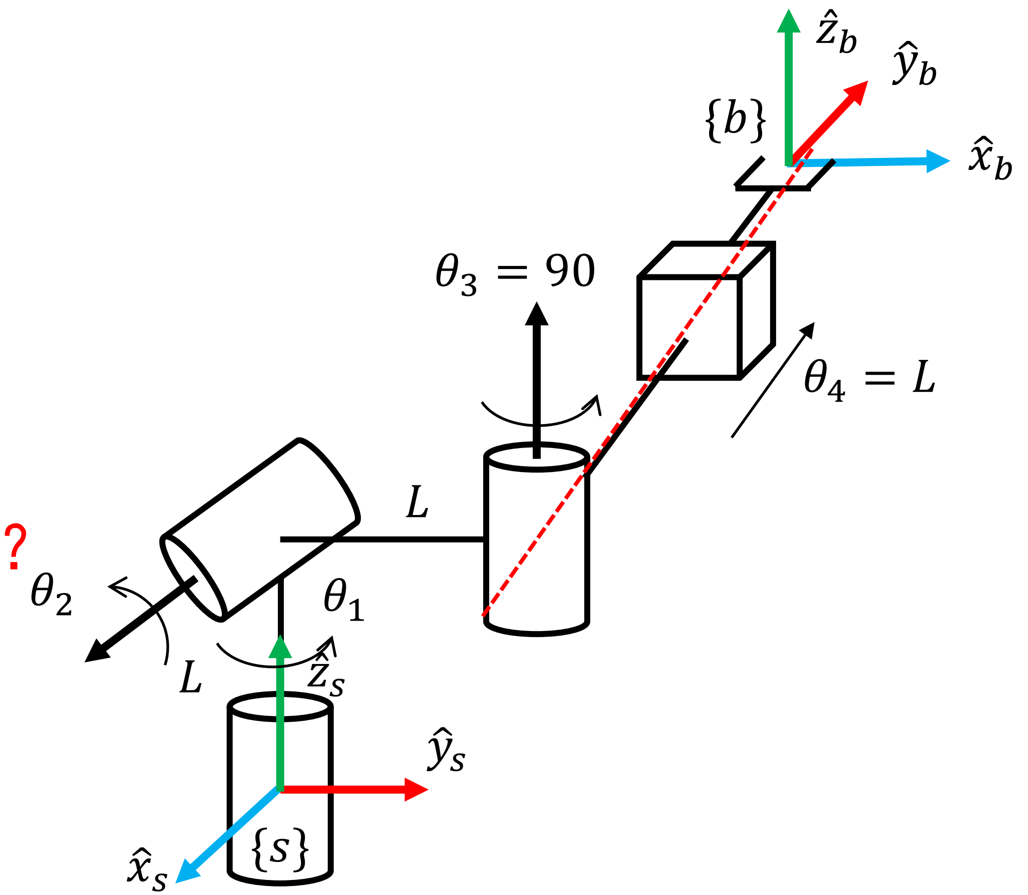
$$J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -L & 0 & -L & 0 \\ L & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例4

有处于初始位形的RRRP空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求：

1）当$\theta=(0,0,\pi/2,L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

2）当$\theta=(0,0,\pi/2,L)$且$\dot{\theta}=(1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。



- $\dot{p}$指$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系原点的速度，一定要区分开，不是v_s！
- 物体旋量：

$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2L \\ L+1 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_b \\ \boxed{v_b} \end{bmatrix}$$

回顾思考：
这个量的意义？

- 变换到$\{s\}$系表述：

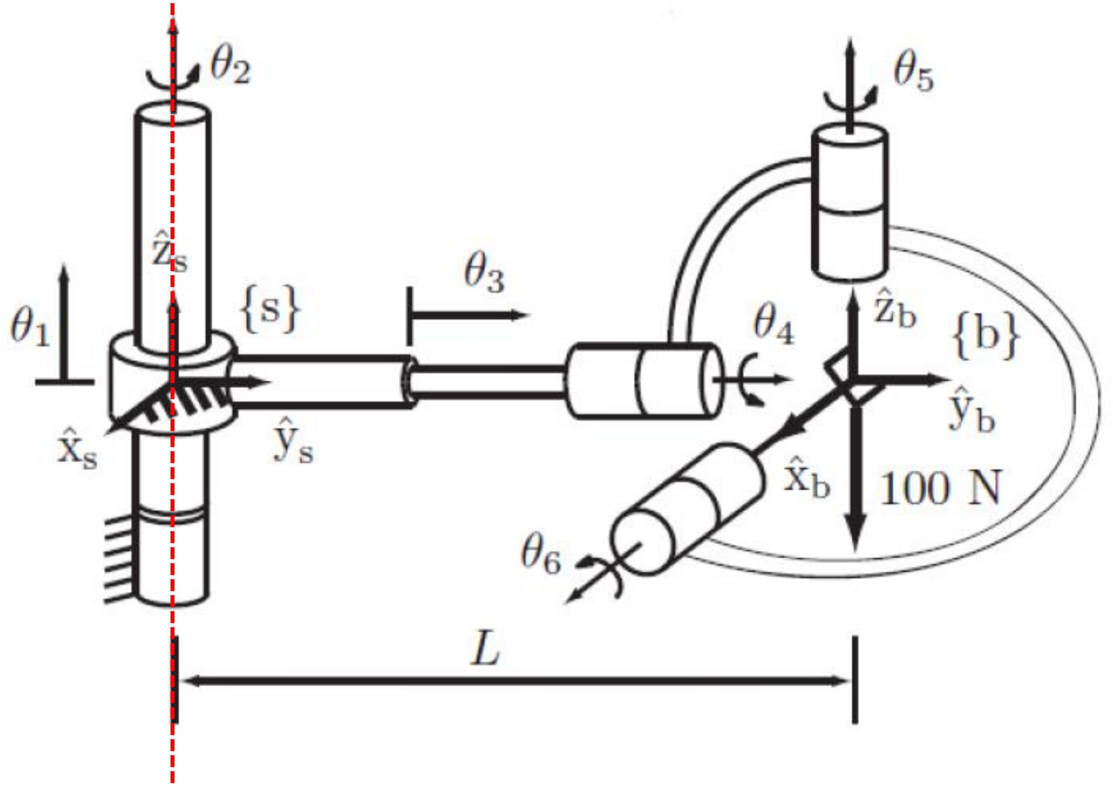
$$R_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p} = R_{sb} v_b = \begin{bmatrix} -L-1 \\ -2L \\ L \end{bmatrix}$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a）空间雅克比J_s的前三列；

b）物体雅克比J_b的后两列；



- 关节1：
  - 关节1的轴向（移动副）

    $\omega_{s1} = (0,0,0)$　　$\omega_{b1} = (0,0,0)$

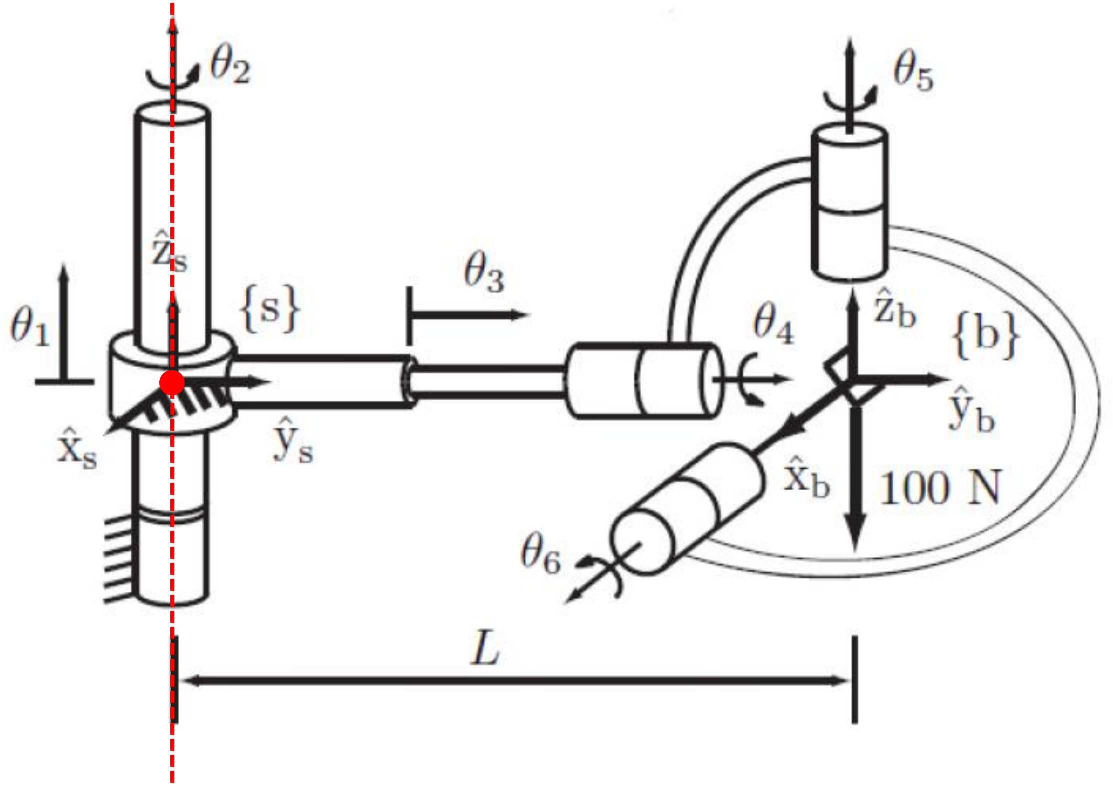
  - 因此

    $$v_{s1} = (0,0,1)$$
    $$v_{b1} = (0,0,1)$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；
b） 物体雅克比J_b的后两列；



➢ 关节2：

- 关节2的轴向

$$\omega_{s2} = (0,0,1) \qquad \omega_{b2} = (0,0,1)$$

- 选择一个关节2轴线上的点

$$q_{s2} = (0,0,0) \qquad q_{b2} = (0,-L,0)$$

- 因此

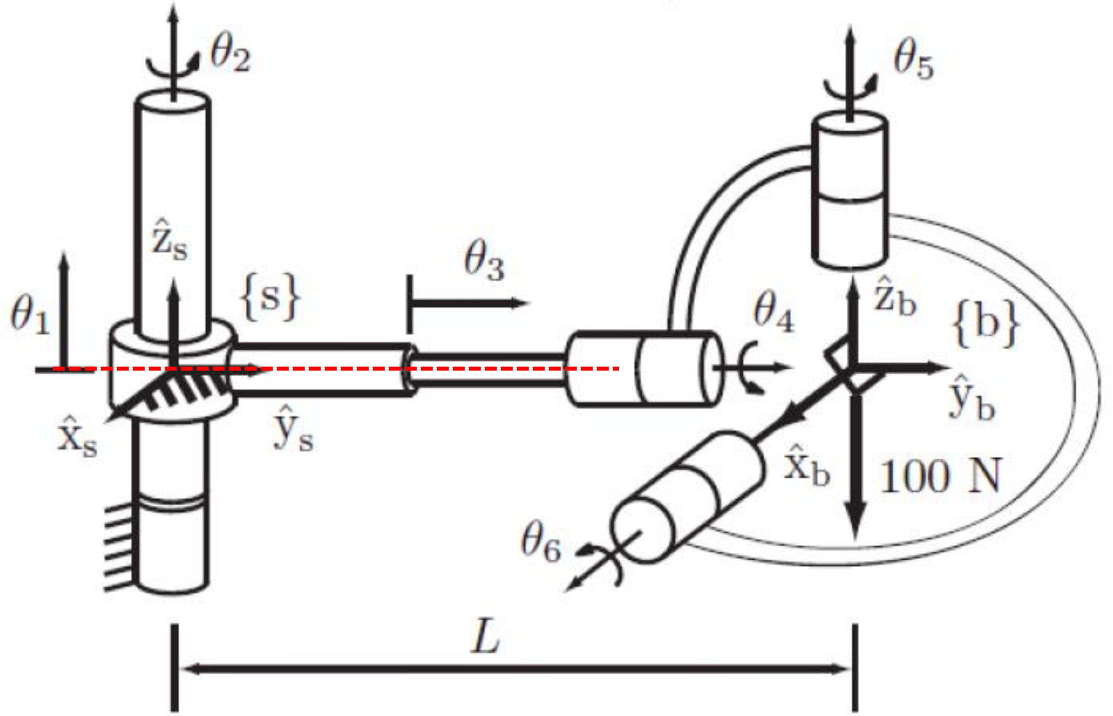
$$v_{s2} = -\omega_{s2} \times q_{s2} = (0,0,0)$$
$$v_{b2} = -\omega_{b2} \times q_{b2} = (-L,0,0)$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；

b） 物体雅克比J_b的后两列；



- 关节3：
  - 关节3的轴向（移动副）

    $\omega_{s3}=(0,0,0)$ $\omega_{b3}=(0,0,0)$

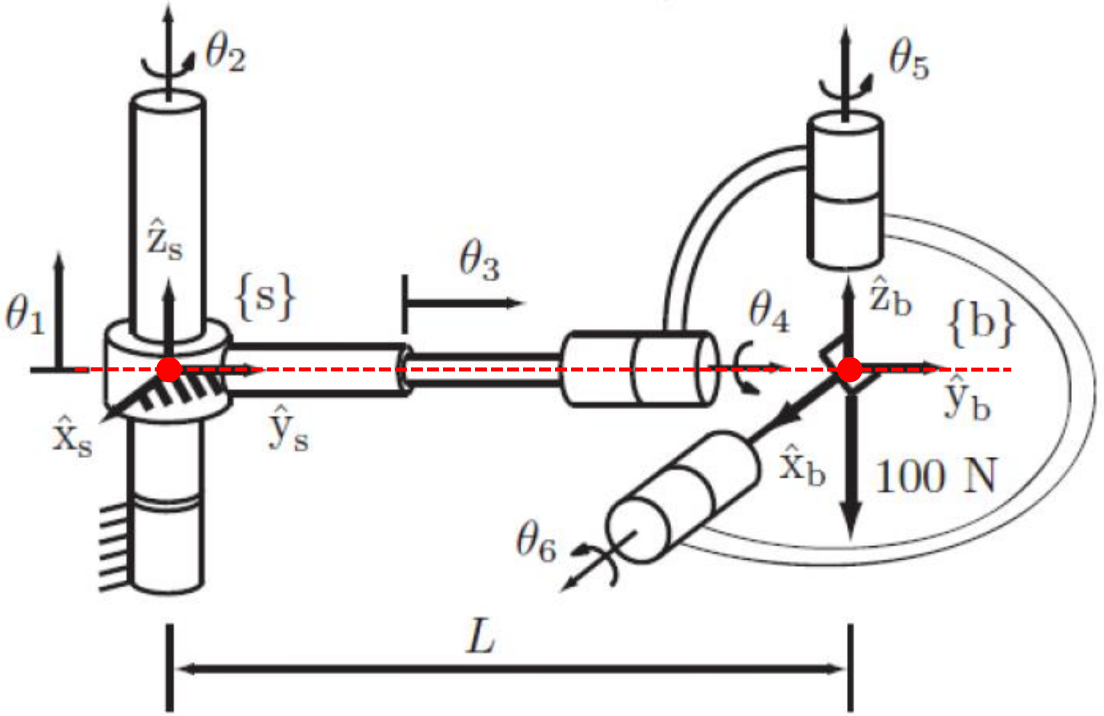
  - 因此

$$v_{s3}=(0,1,0)$$
$$v_{b3}=(0,1,0)$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；
b） 物体雅克比J_b的后两列；



➢ 关节4：

- 关节4的轴向

$$\omega_{s4} = (0,1,0) \qquad \omega_{b4} = (0,1,0)$$

- 选择一个关节4轴线上的点

$$q_{s4} = (0,0,0) \qquad q_{b4} = (0,0,0)$$

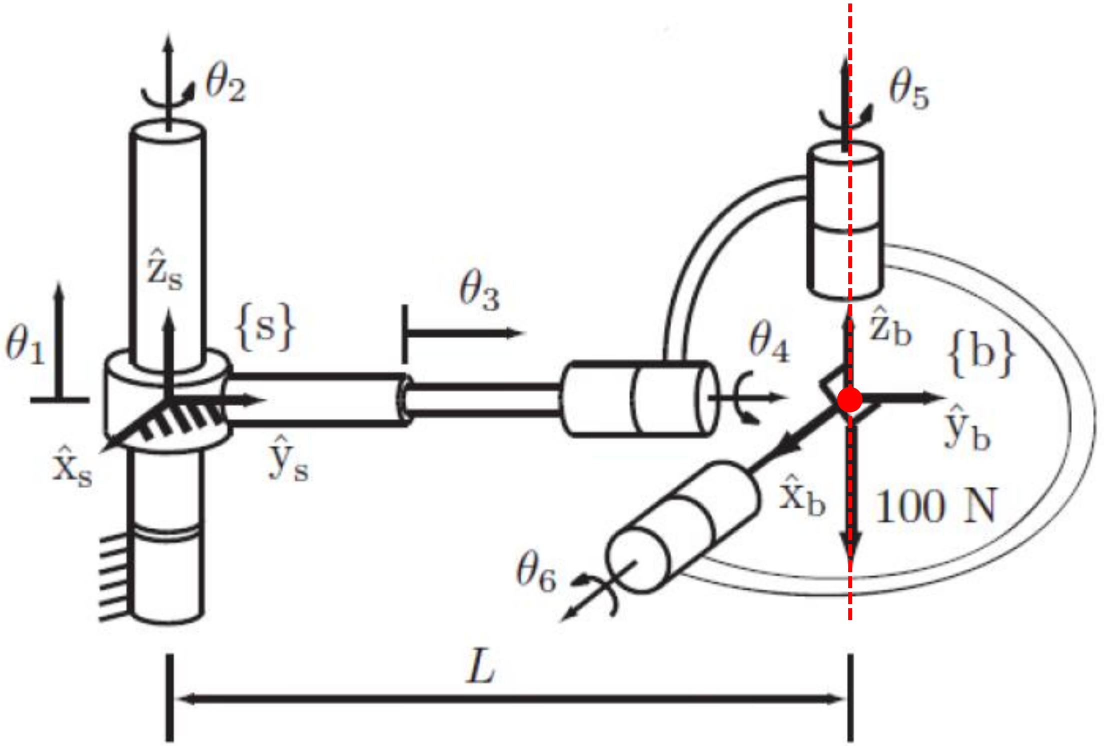
- 因此

$$v_{s4} = -\omega_{s4} \times q_{s4} = (0,0,0)$$
$$v_{b4} = -\omega_{b4} \times q_{b4} = (0,0,0)$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；
b） 物体雅克比J_b的后两列；



- 关节5：
  - 关节5的轴向

$$\omega_{s5} = (0,0,1) \qquad \omega_{b5} = (0,0,1)$$

  - 选择一个关节5轴线上的点

$$q_{s5} = (0, L, 0) \qquad q_{b5} = (0,0,0)$$

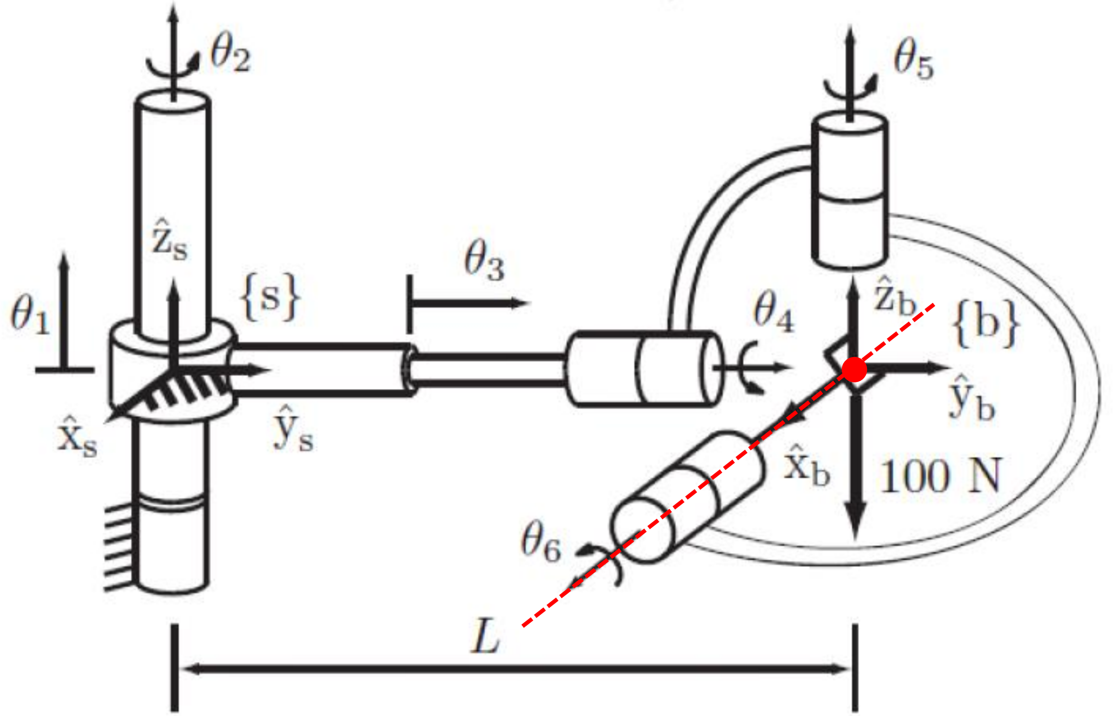
  - 因此

$$v_{s5} = -\omega_{s5} \times q_{s5} = (L, 0,0)$$
$$v_{b5} = -\omega_{b5} \times q_{b5} = (0,0,0)$$

例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；
b） 物体雅克比J_b的后两列；



➢ 关节6：

- 关节6的轴向

$$\omega_{s6} = (1,0,0) \qquad \omega_{b6} = (1,0,0)$$

- 选择一个关节6轴线上的点

$$q_{s6} = (0,L,0) \qquad q_{b6} = (0,0,0)$$

- 因此

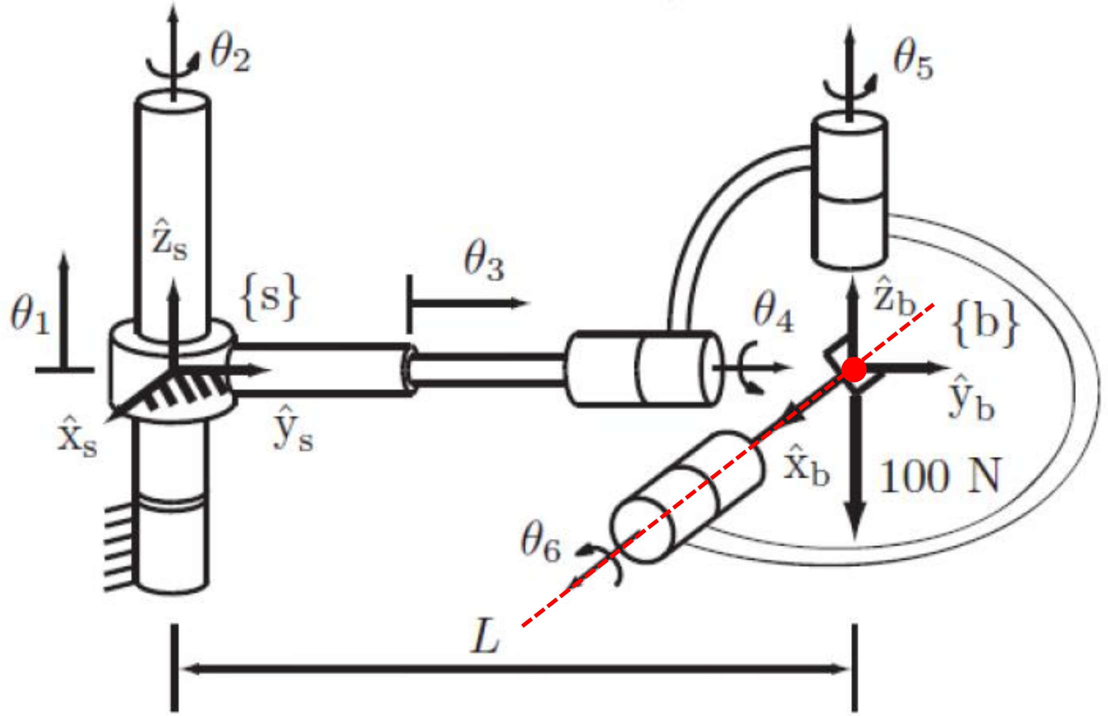
$$v_{s6} = -\omega_{s6} \times q_{s6} = (0,0,-L)$$
$$v_{b6} = -\omega_{b6} \times q_{b6} = (0,0,0)$$

□ 例5

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

a） 空间雅克比J_s的前三列；

b） 物体雅克比J_b的后两列；



- 总结起来：

$$J_s=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&L&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&-L\end{bmatrix}\qquad J_b=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-L&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 并且有：

$$T_{sb}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&L\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 可以验证有：

$$J_s=Ad_{T_{sb}}J_b\,!\,!$$

- 总结起来：

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{bmatrix}$$

$$J_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 并且有：

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Command Window

```
>> Js = [0 0 0 0 0 1; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 1 0 0 0 0; 0 0 1 5 0 0; 1 0 0 0 0 -5]'

Js =

     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0     0     0     0     5     0
     0     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0    -5

>> Jb = [0 0 0 0 0 1; 0 0 1 -5 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 1 0 0 0 0 0]'

Jb =

     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0    -5     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0     0

>> Tsb = [1 0 0 0; 0 1 0 5; 0 0 1 0; 0 0 0 1]

Tsb =

     1     0     0     0
     0     1     0     5
     0     0     1     0
     0     0     0     1

>> Adjoint(Tsb)*Jb

ans =

     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0     0     0     0     5     0
     0     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0    -5
```

- 由虚功原理可得：

关节处的功率消耗 = （用于机器人运动的功率消耗）+（末端执行器的功率消耗）

- 机器人处于静止平衡状态时：没有运动，因此：

$$\tau^{\mathrm{T}}\dot{\theta} = \mathcal{F}_b^{\mathrm{T}}\mathcal{V}_b$$

- 其中τ为关节力矩的列向量形式。利用等式$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta}$，有：

$$\tau = J_b^{\mathrm{T}}(\theta)\mathcal{F}_b$$

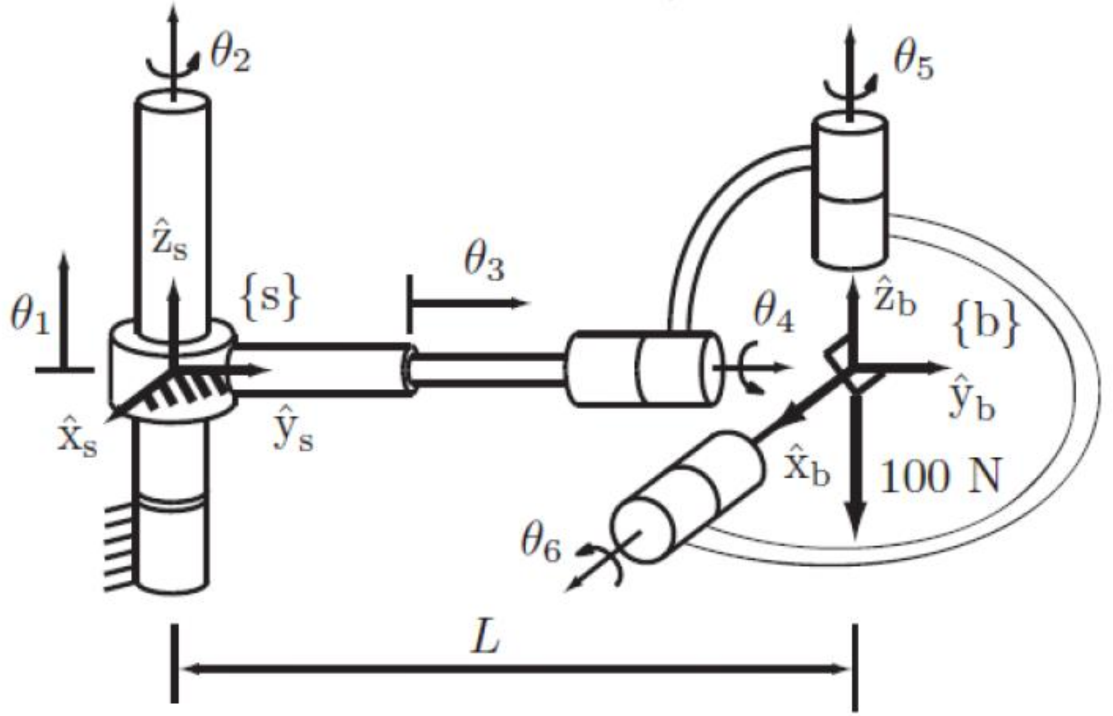
- 上式表达了关节力矩与末端坐标系下描述力旋量之间的关系。类似有：

$$\tau = J_s^{\mathrm{T}}(\theta)\mathcal{F}_s$$

例5（续）

如下图所示有一处于初始位形的PRPRRR空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求：

c）初始位形时，若在末端坐标系的$-\hat{z}_b$方向产生$100N$的力，需要关节提供多少力或力矩？



- 此位形我们有：

$$p_{sb} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}, f_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

- 计算力旋量：

$$\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} m_s \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{sb} \times f_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

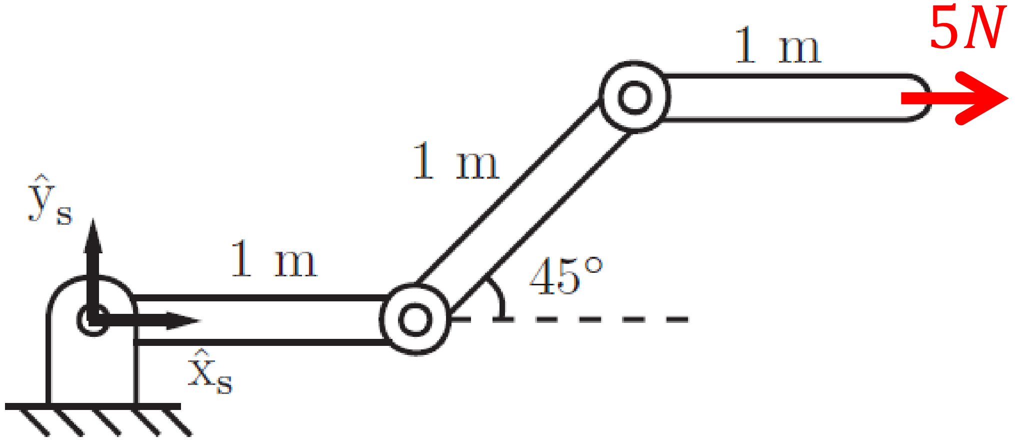
- 因此力矩为：

$$\begin{aligned} \tau &= J_s^T(0)\mathcal{F}_s \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

思考意义

例6

如图所示处于初始位形的3R平面开链机械臂。
a）假设末端施加的载荷只有沿$\hat{x}_s$轴方向的5N纯力，没有其他轴向分量，求各个关节处施加的力矩。（提示：平面内空间雅克比$J_s \in \mathbb{R}^{3\times n}$，平面内力旋量为$\mathcal{F}_s = [m_s\ f_s] \in \mathbb{R}^{3\times 1}$）



- 此刻位形：$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1-1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

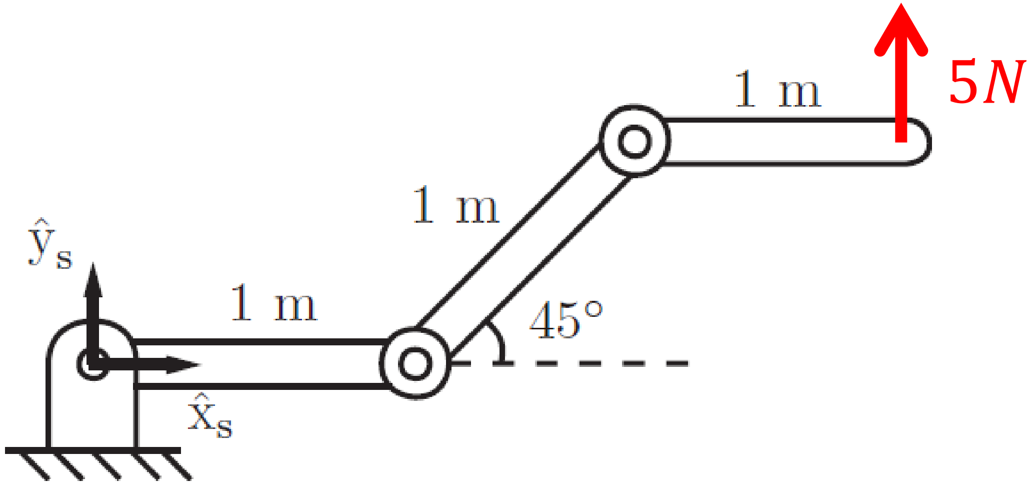
- 力旋量：$\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} m_s \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- 因此力矩为：$\tau = J_s^T(\theta)\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1-1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

例6

如图所示处于初始位形的3R平面开链机械臂。

b）假设末端施加的载荷只有沿$\hat{y}_s$轴方向的5N纯力，没有其他轴向分量，求各个关节处施加的力矩。（提示：平面内空间雅克比$J_s \in \mathbb{R}^{3\times n}$，平面内力旋量为$\mathcal{F}_s = [m_s\ f_s] \in \mathbb{R}^{3\times 1}$）



- 此刻位形：$J_s(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1-1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

- 力旋量：$\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} m_s \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- 因此力矩为：$\tau = J_s^T(\theta)\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1-1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+5/\sqrt{2} \\ 5+5/\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

- Js = JacobianSpace(Slist,thetalist)
  给定空间螺旋轴和关节角度，计算空间雅可比。

```
function Js = JacobianSpace(Slist, thetalist)
Js = Slist;
T = eye(4);
for i = 2: length(thetalist)
    T = T * MatrixExp6(VecTose3(Slist(:, i - 1) * thetalist(i - 1)));
    Js(:, i) = Adjoint(T) * Slist(:, i);
end
end
```

- Jb = JacobianBody(Blist,thetalist)
  给定物体螺旋轴和关节角度，计算物体雅可比。

```
function Jb = JacobianBody(Blist, thetalist)
Jb = Blist;
T = eye(4);
for i = length(thetalist) - 1: -1: 1
    T = T * MatrixExp6(VecTose3(-1 * Blist(:, i + 1) * thetalist(i + 1)));
    Jb(:, i) = Adjoint(T) * Blist(:, i);
end
end
```

THANKS

谢谢大家

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io