



## 第4章 机器人位置级正运动学

彭键清 助理教授、硕导

中山大学 智能工程学院

邮箱: pengjq7@mail.sysu.edu.cn

办公室: 工学园1栋505

2023年04月01日

# 刚体状态及运动描述-知识小结

	状态变量 (位移)	速度变量		加速度	误差矢量		控制变量	三轴特点
平移	位置矢量 $p$	线速度 $v$	$v = \dot{p}$	$\dot{v}$	$e_p$	$e_p = p_d - p_c$	三轴力 $f_c$ $f_c = K_{pp}e_p + K_{pi} \int e_p dt + K_{pd} \dot{e}_p$	三轴解耦 单轴可以单独考虑
旋转	姿态矩阵 $R$	角速度 $\omega$	$\omega^\times = \dot{R}R^T$	$\dot{\omega}$	$e_o$	$\delta_R = R_d R_c^T$ $e_o = (\delta_R)_E$	三轴力矩 $\tau_c$ $\tau_c = K_{op}e_o + K_{oi} \int e_o dt + K_{od} \dot{e}_o$	三轴耦合 三轴需要同时考虑
	姿态角		$\omega = J_{Euler} \dot{\Psi}$			$e_o = J_{Euler} \Delta \Psi$		
	轴-角 $(k, \phi)$		$\omega = k \dot{\phi}$			$e_o = k d_\phi$		
	单位四元数 $Q$		$\omega = 2M(q^*)^+ \dot{q}$			$e_o = 2\delta_\varepsilon$		

# 第4章 机器人位置级正运动学

1 机器人运动链及其状态描述

2 机器人运动学基本概念

3 机器人运动学建模的D-H法

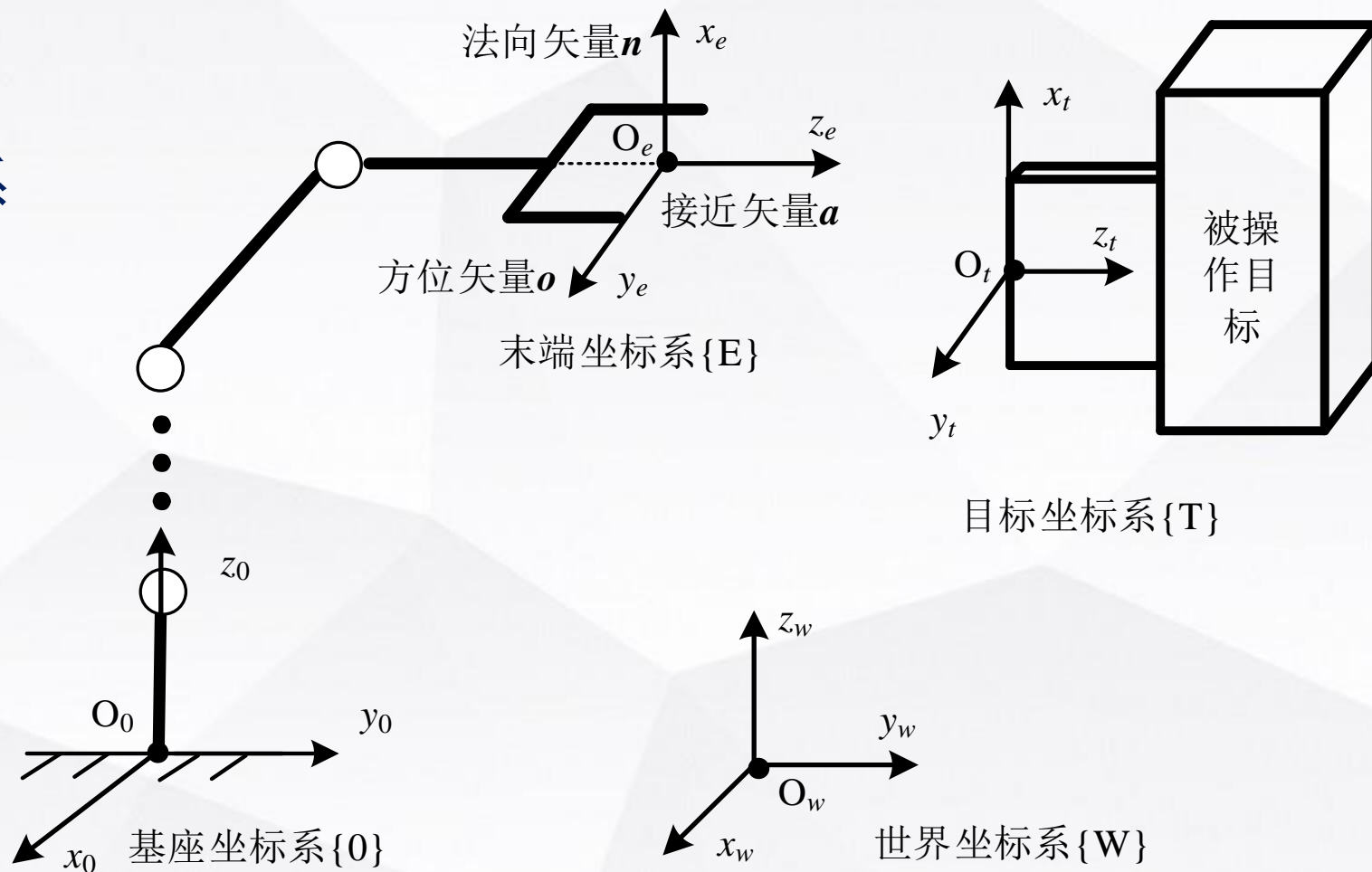
4 典型机器人正运动学方程

5 机器人工作空间的分析

# 4.1.1 作业系统主要坐标系

## ■ 主要坐标系

- (1) 世界坐标系
- (2) 基坐标系
- (3) 末端效应器坐标系
- (4) 目标坐标系



## 4.1.2 机器人运动链的组成

### ■ $n$ 自由度串联机器人运动链的组成

#### ➤ $n+1$ 个杆件

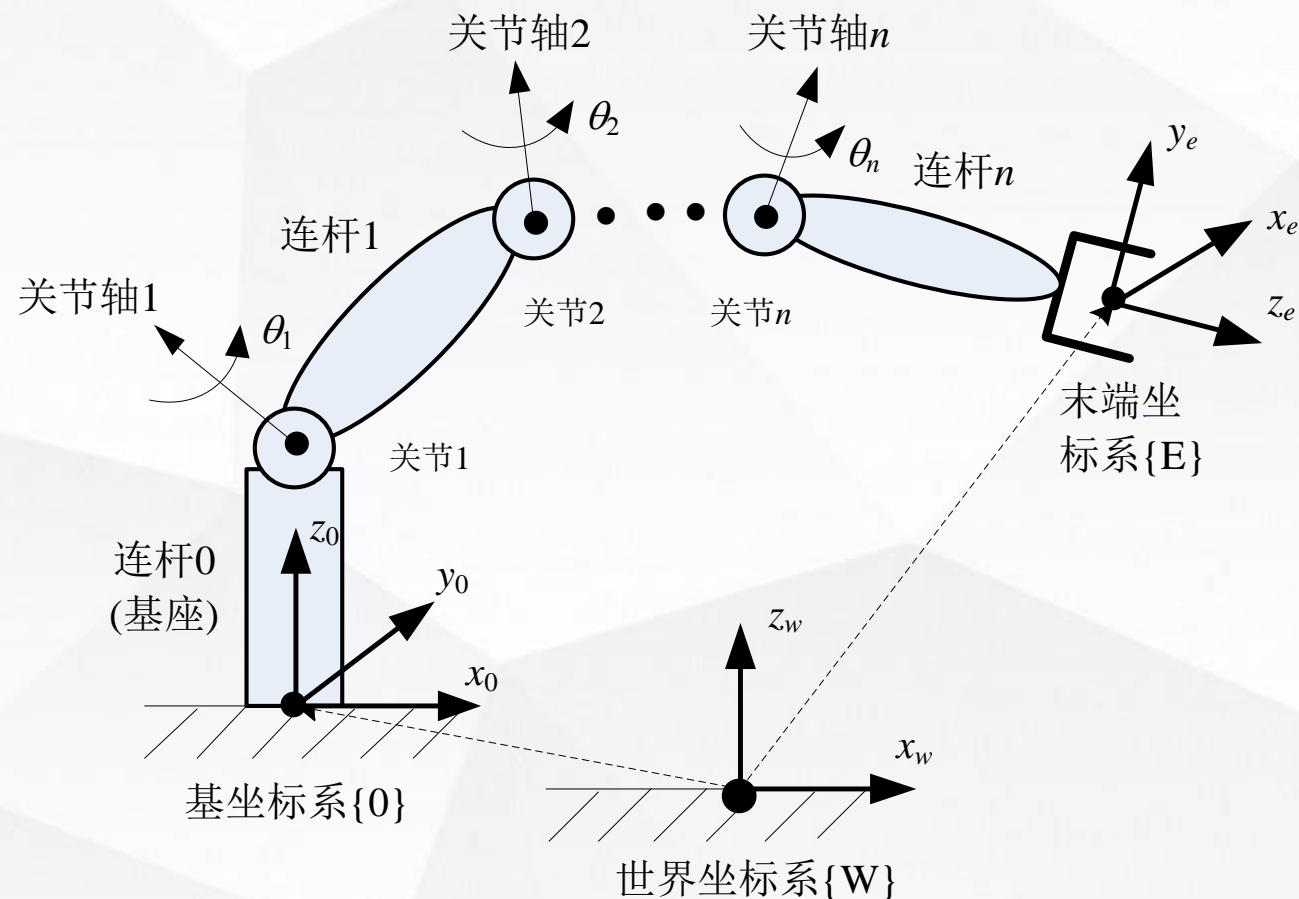
连杆0~连杆 $n$ ，其中连杆0为基座、连杆 $n$ 为末端

#### ➤ $n$ 个关节

编号为关节1-关节 $n$

#### ➤ 连接关系

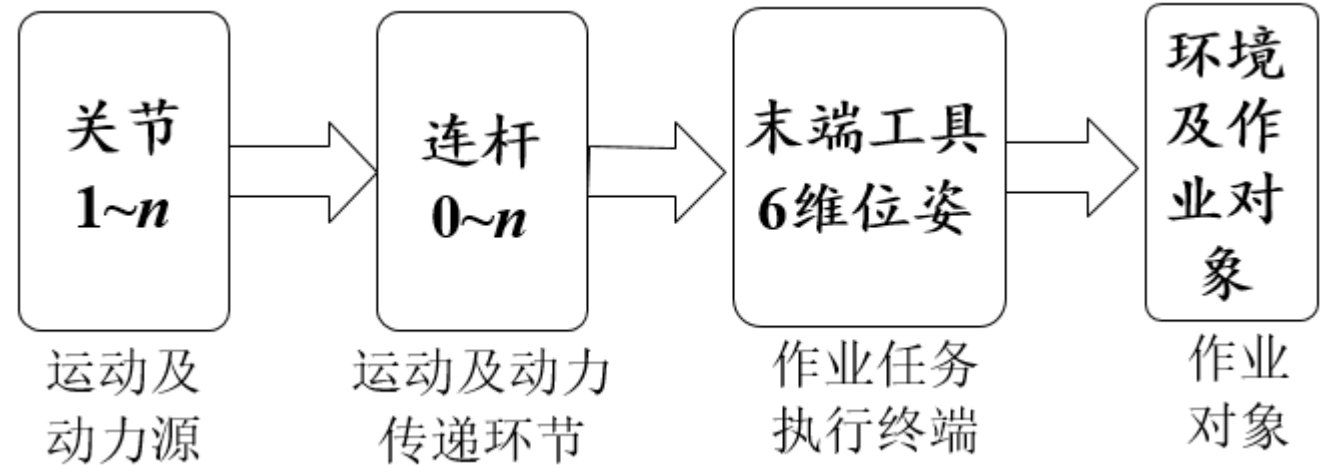
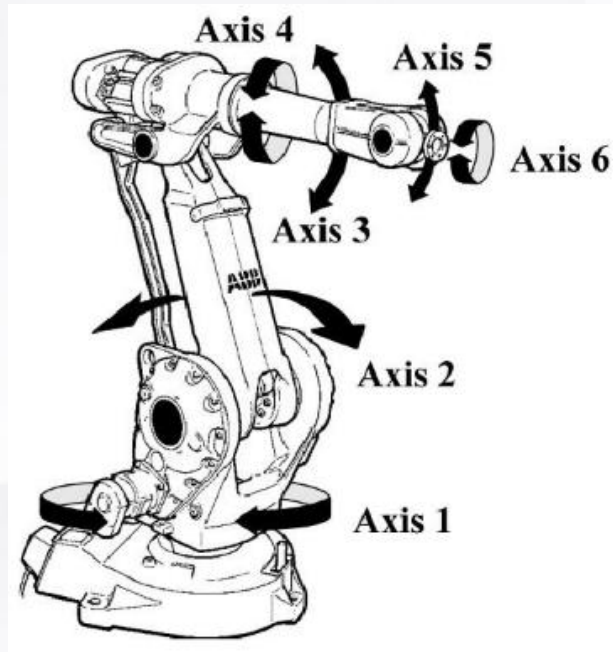
连杆 $(i-1)$ 通过关节 $i$ 与连杆 $i$ 相连



## 4.1.3 运动及力的传递过程

### ■ 机器人作业的实现过程

- **作业工具在末端：**执行期望的路径，考虑末端的位置和姿态
- **运动控制在关节：**电机安装在关节，通过控制关节运动，带动连杆进一步实现对末端位置和姿态的控制

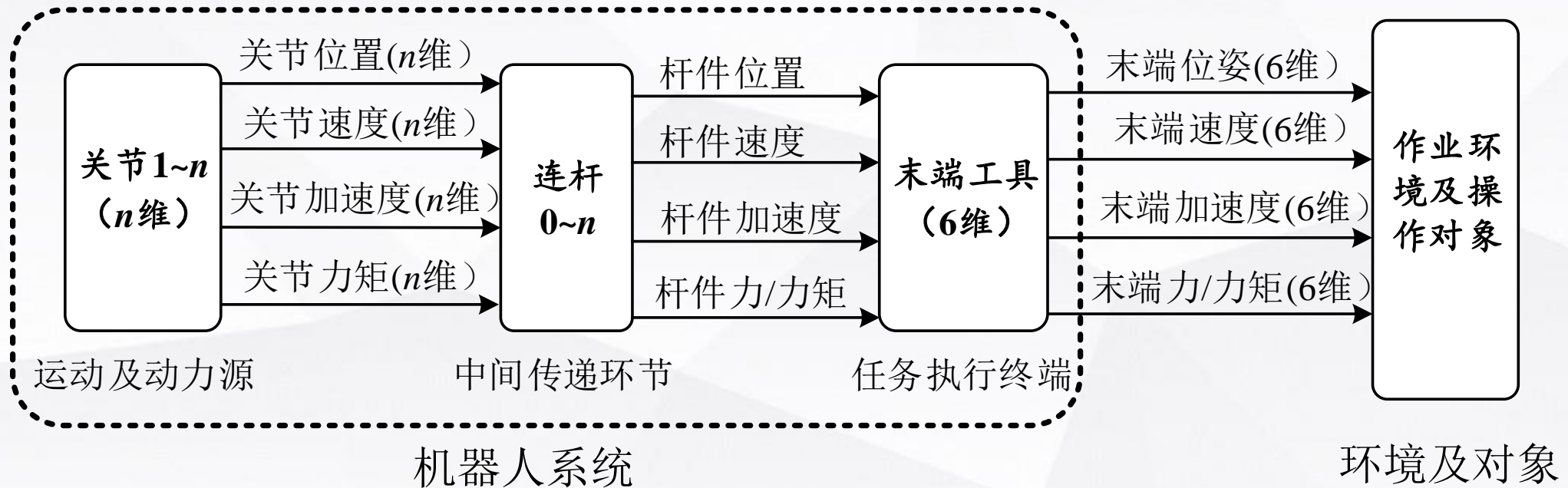




## 4.1.3 运动及力的传递过程

### ■ 运动及力的传递

- 不同物体之间的状态传递：关节-连杆-末端
- 不同维度状态变量的传递：关节 ( $n$ ) -连杆( $n+1$ )-末端(6)
- 四类状态变量的传递：位置、速度、加速度、力/力矩



## 4.1.4 关节状态的描述

### ◆ 关节状态变量（关节位置）

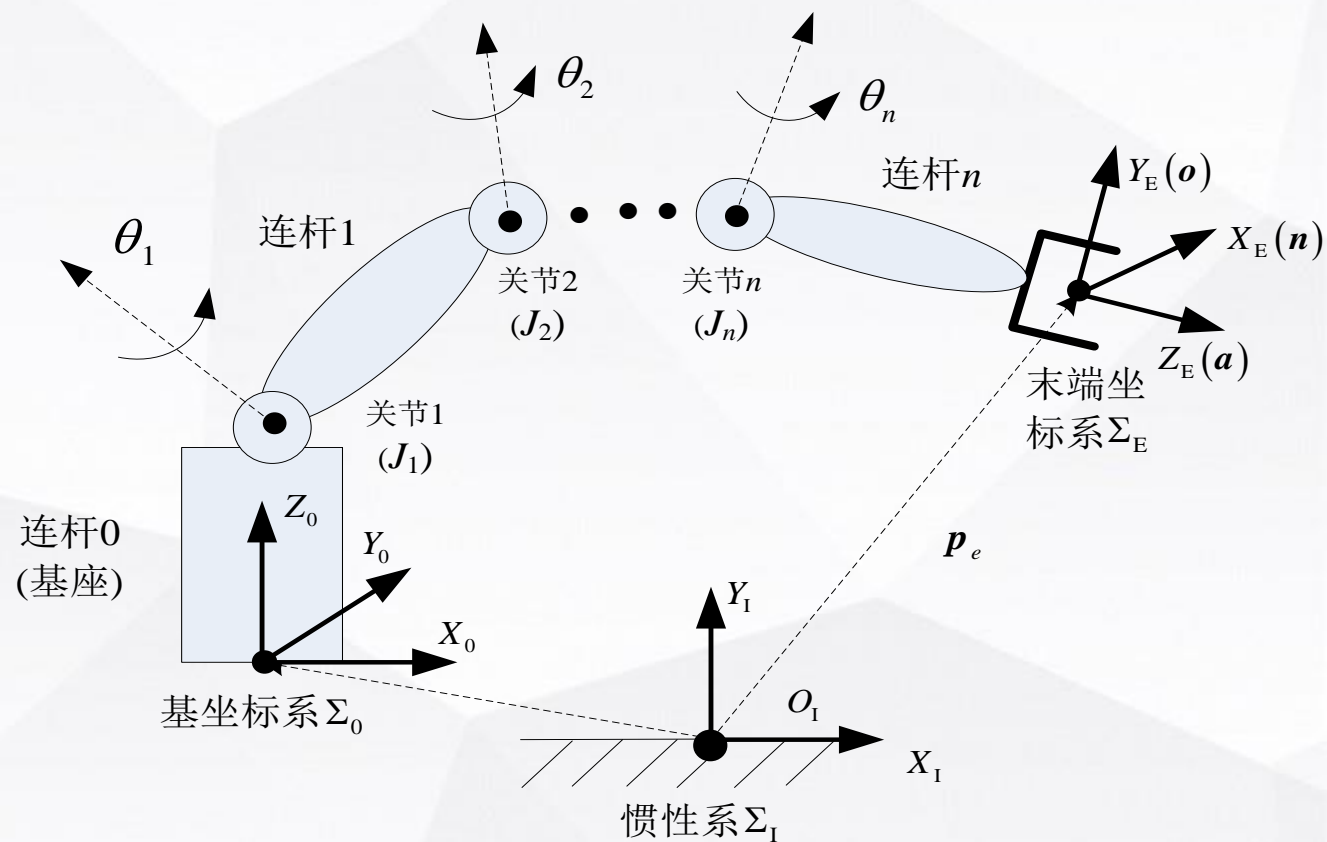
- 旋转关节：旋转角度  $\theta_i$
- 移动关节：平移位移  $d_i$

用变量  $q_i$  统一表示为：

$$q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{revolute joint} \\ d_i, & \text{translational joint} \end{cases}$$

则关节位置：

$$\mathbf{q} = [q_1, \quad q_2, \quad \cdots \quad q_n]^T$$





## 4.1.4 关节状态的描述

### ◆ 关节速度

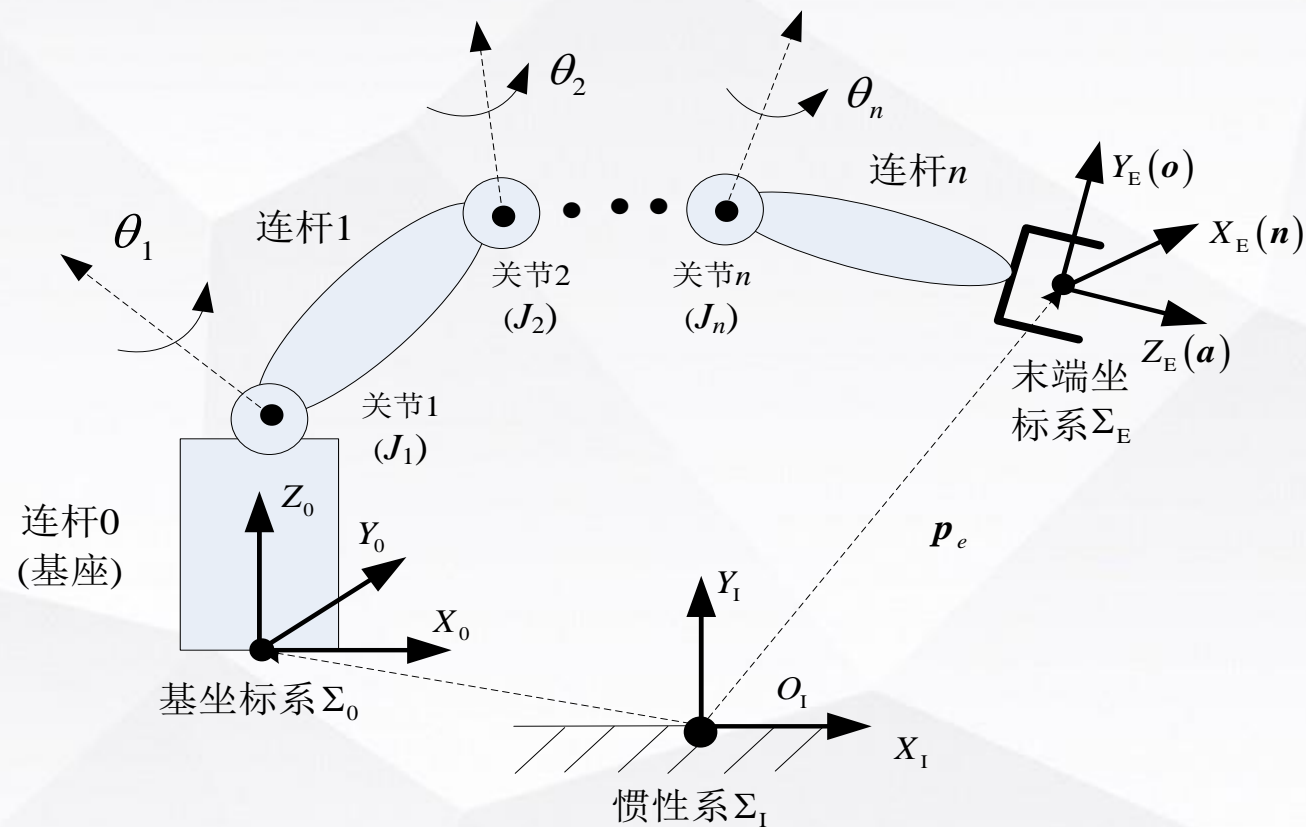
$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$$

### ◆ 关节加速度

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

### ◆ 关节驱动力/力矩

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$$



## 4.1.5 末端状态的描述

### ◆ 末端位姿

末端的位置、姿态分别表示为：

$$\mathbf{p}_e = [x_e, y_e, z_e]^T, \quad \boldsymbol{\Psi}_e = [\alpha_e, \beta_e, \gamma_e]^T$$

组合一起后，表示为：

$$\mathbf{X}_e = [x_e, y_e, z_e, \alpha_e, \beta_e, \gamma_e]^T$$

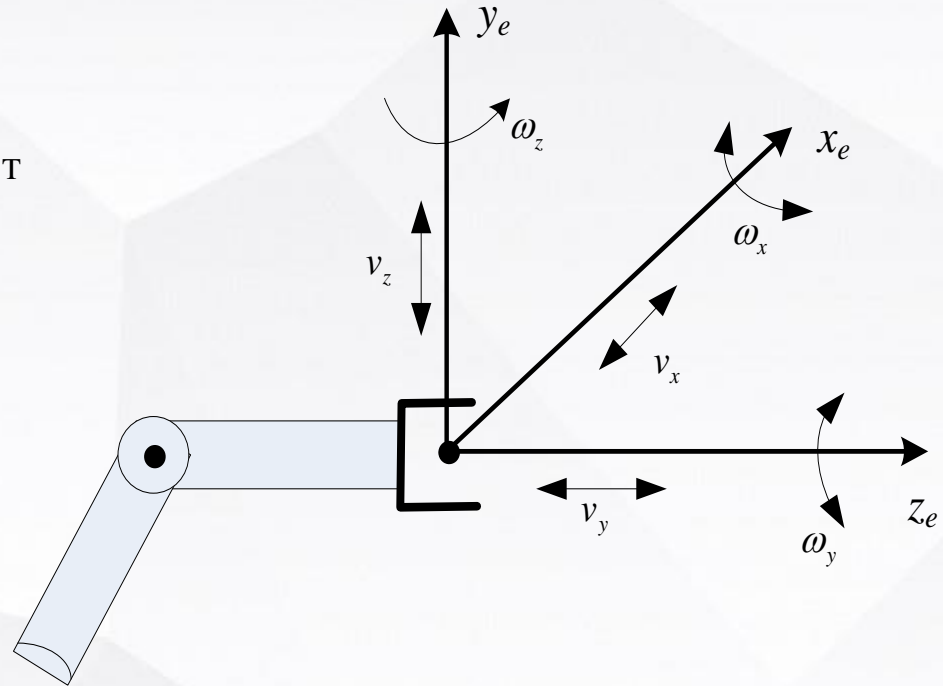
### ◆ 末端速度

$$\mathbf{v}_e = [v_{ex} \quad v_{ey} \quad v_{ez}]^T = \dot{\mathbf{p}}_e$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = [\omega_{ex} \quad \omega_{ey} \quad \omega_{ez}]^T = \mathbf{J}_{Euler} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_e$$

组合一起后，表示为：

$$\dot{\mathbf{x}}_e = [\mathbf{v}_e^T, \boldsymbol{\omega}_e^T]^T = [v_{ex}, v_{ey}, v_{ez}, \omega_{ex}, \omega_{ey}, \omega_{ez}]^T \in \mathbf{R}^6$$



注意区分  $\mathbf{X}_e, \dot{\mathbf{x}}_e$  的大小写，含义不同

## 4.1.5 末端状态的描述

### ◆ 末端加速度

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = [\dot{\mathbf{v}}_e^T, \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^T]^T = [\dot{v}_{ex}, \dot{v}_{ey}, \dot{v}_{ez}, \dot{\omega}_{ex}, \dot{\omega}_{ey}, \dot{\omega}_{ez}]^T \in \mathbb{R}^6$$

### ◆ 末端操作力/力矩

$$\mathbf{F}_e = [\mathbf{f}_e^T, \mathbf{m}_e^T]^T = [f_{ex}, f_{ey}, f_{ez}, m_{ex}, m_{ey}, m_{ez}]^T \in \mathbb{R}^6$$

# 第4章 机器人位置级正运动学

1 机器人运动链及其状态描述

2 机器人运动学基本概念

3 机器人运动学建模的D-H法

4 典型机器人正运动学方程

5 机器人工作空间的分析

## 4.2.1 机器人状态空间

### □ 关节空间（位形空间、臂型空间）

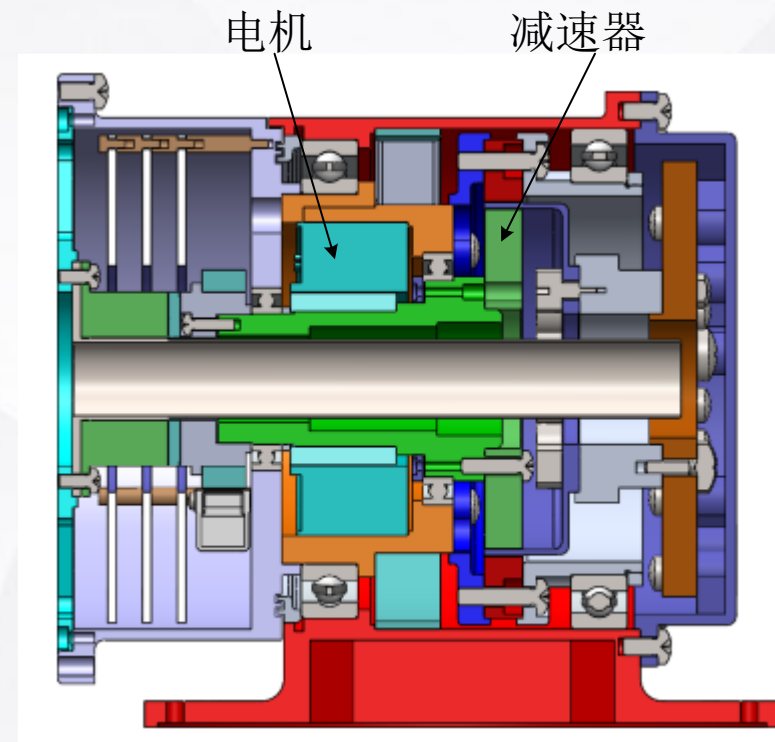
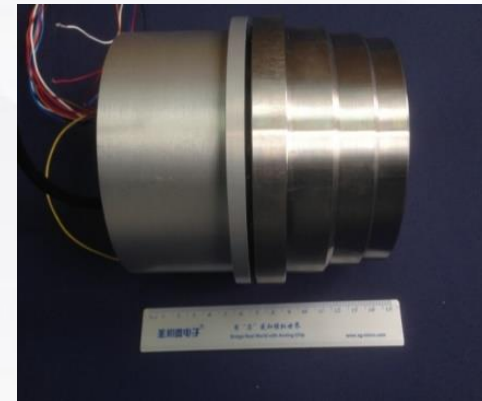
由机器人关节变量（电机位置通过减速机构后的变量）所有可能的值组成的集合称为关节空间，也可称为**位形空间**(Configuration Space)或**臂型空间**

$$S_J = \left\{ \mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T : q_i \in [q_{i\_min}, q_{i\_max}] \right\} \subset \mathbf{R}^n$$

### □ 驱动空间

由作为驱动源的电机位置变量组成的集合称为驱动空间（未通过减速机构）

对于直接驱动（无减速器环节）的情况，  
驱动空间=关节空间



## 4.2.1 机器人状态空间

### □ 操作空间

机器人所有臂型对应的末端执行器所有位姿（包括位置和姿态）组成的集合，称为操作空间(Operational Space)

$$S_T = \{ \mathbf{X}_e = f(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in S_J \} \subset \mathbf{R}^6$$

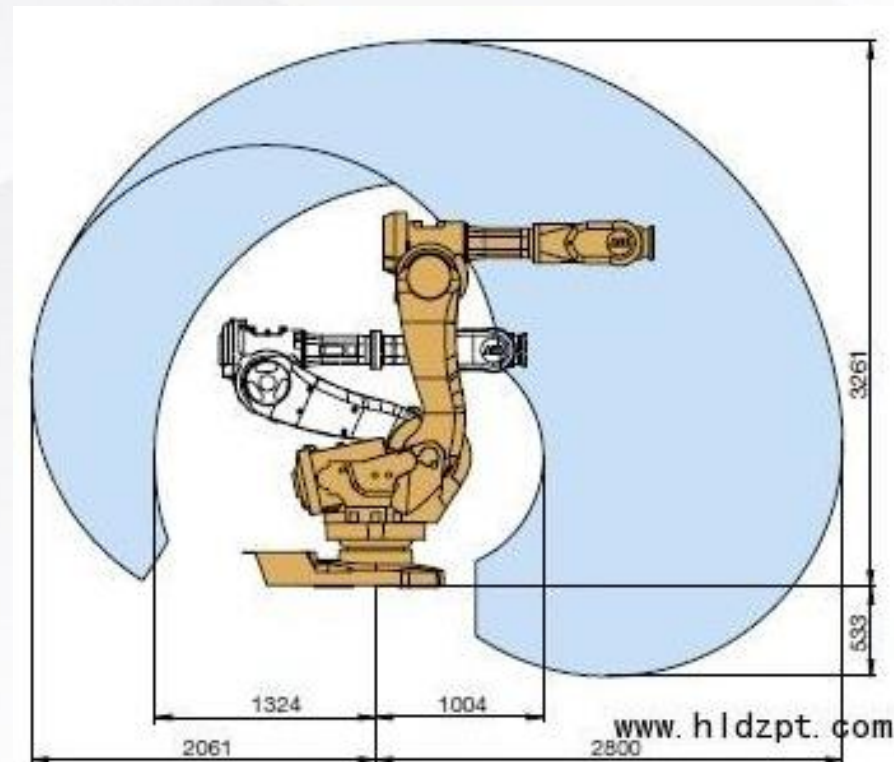
### □ 工作空间（任务空间）

机器人所有臂型对应的末端执行器所有位置（一般只强调位置）组成的集合，称为工作空间，或任务空间。一般又分为可达工作空间（Reachable Workspace）、灵巧工作空间（Dexterous Workspace）

$$S_W = \{ \mathbf{P}_e = f_p(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in S_J \} \subset \mathbf{R}^3$$

**可达工作空间：**最大工作空间范围，不考虑姿态是否满足条件

**灵巧工作空间：**以任何姿态均可达到的工作空间范围





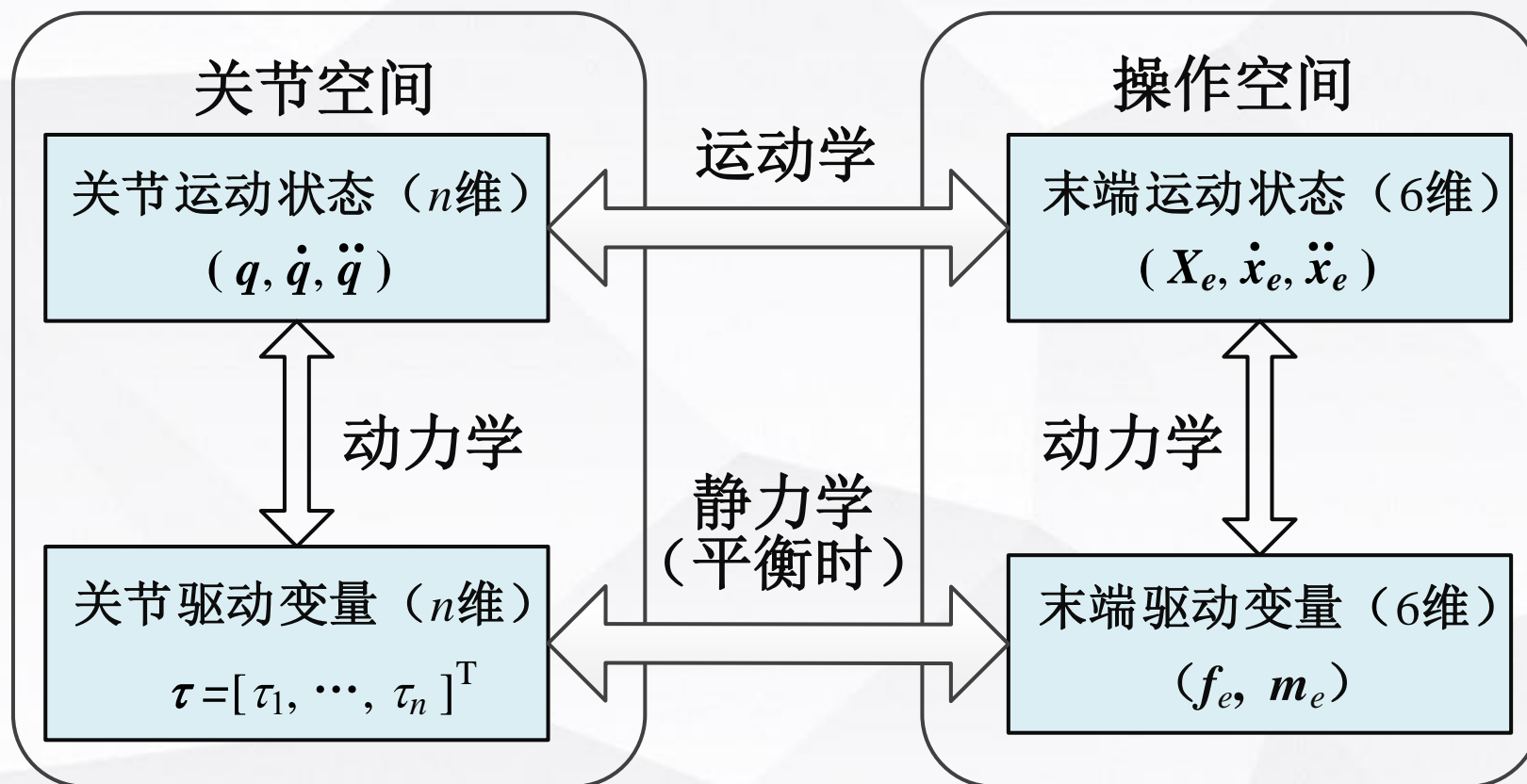
## 4.2.1 机器人状态空间

### □ 不同空间中的状态变量形式

状态类型	关节空间	操作空间
运动状态	关节位置 $q$ 、速度 $\dot{q}$ 、 加速度 $\ddot{q}$	末端位姿 $X_e$ 、速度 $\dot{x}_e$ 、 加速度 $\ddot{x}_e$
作用力	关节力/力矩 $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$	末端对环境的操作力/力矩 $(f_e, m_e)$

## 4.2.2 机器人学基本理论的内涵

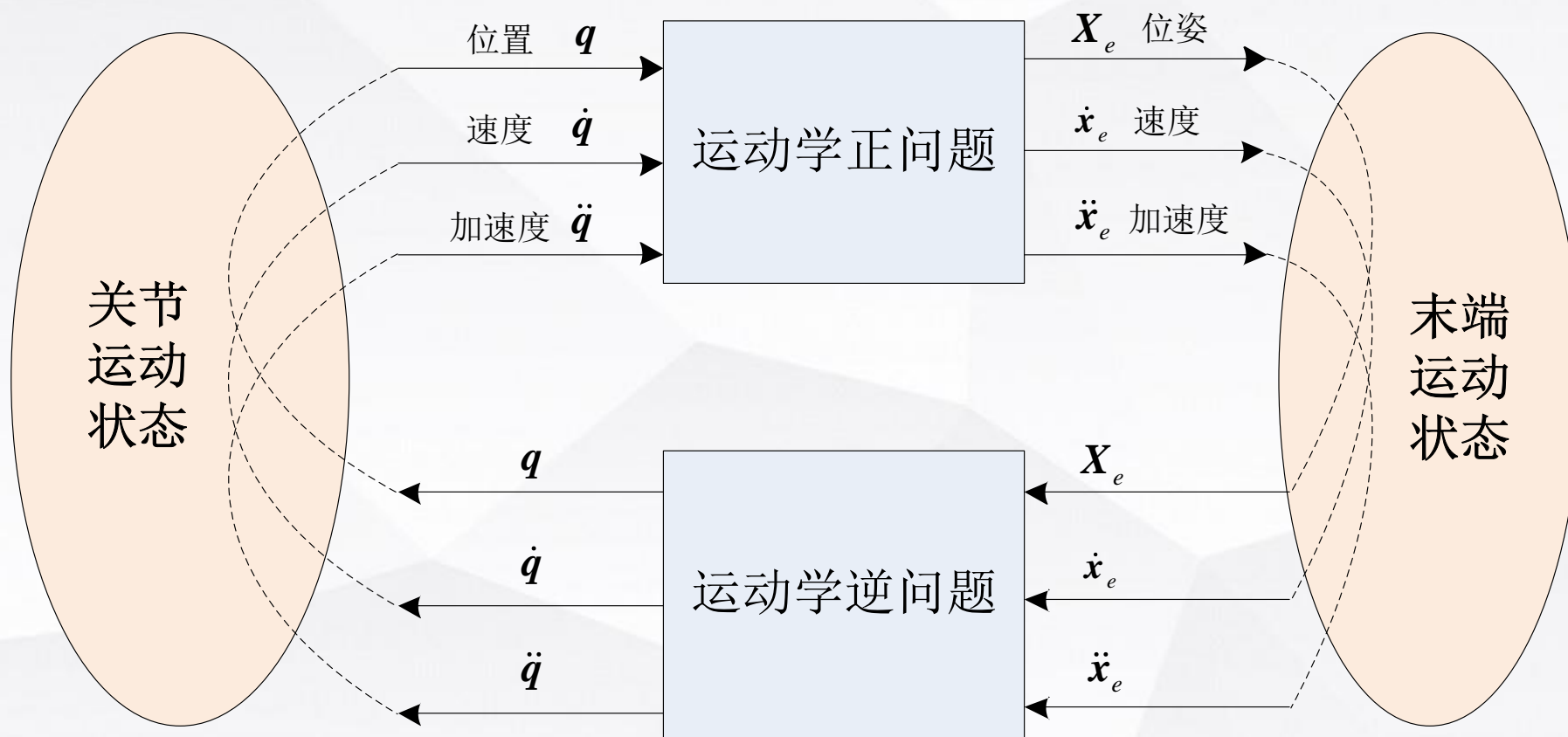
### □ 机器人运动学与动力学的内涵



机器人运动学、动力学、静力学对应的状态之间的关系

## 4.2.3 机器人运动学问题

- **运动学正问题：** 根据关节状态，确定机械臂末端状态
- **运动学逆问题：** 根据机械臂末端状态，确定关节状态



包括位置级、速度级和加速度级三个层次

## 4.2.3 机器人位置级运动学问题

### ■ 位置级正运动学

根据**关节位置**计算机械臂**末端位姿**

$$X_e = \text{fkine}(q)$$

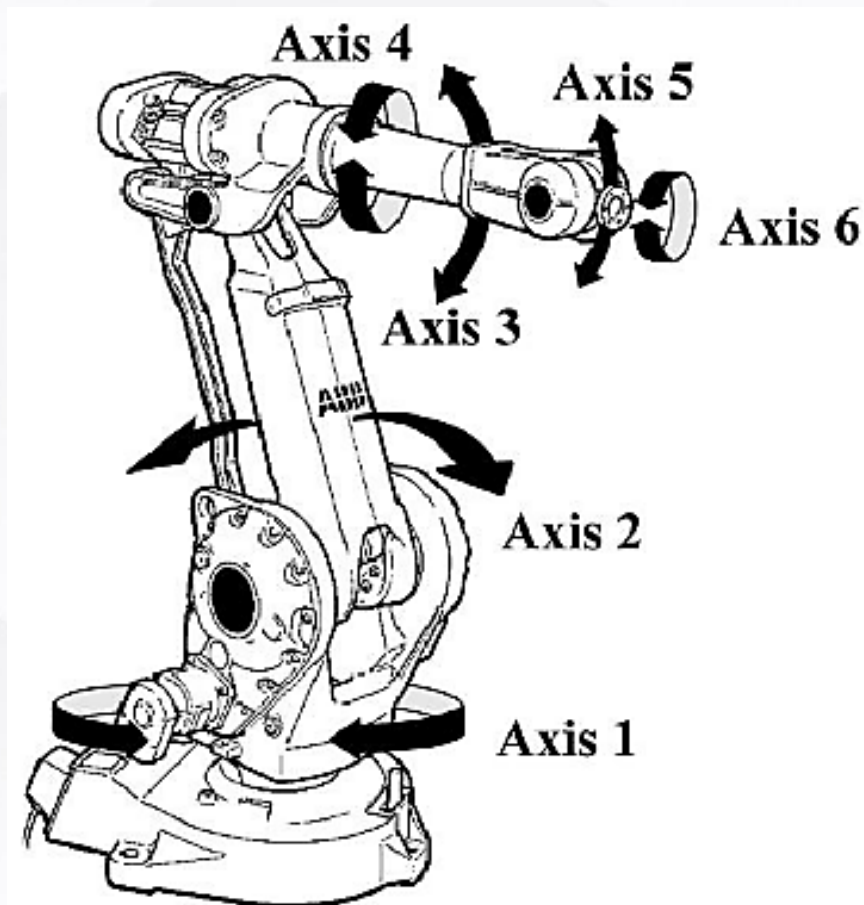
上式中，fkine是forwar Kinematics  
(正运动学)的简写

### ■ 位置级逆运动学

根据机械臂**末端位姿**计算**关节位置**

$$q = \text{ikine}(X_e)$$

上式中，ikine是inverse Kinematics  
(逆运动学)的简写



# 平面2R机械臂举例

## ■ 平面2R机械臂正运动学

### ➤ 状态描述

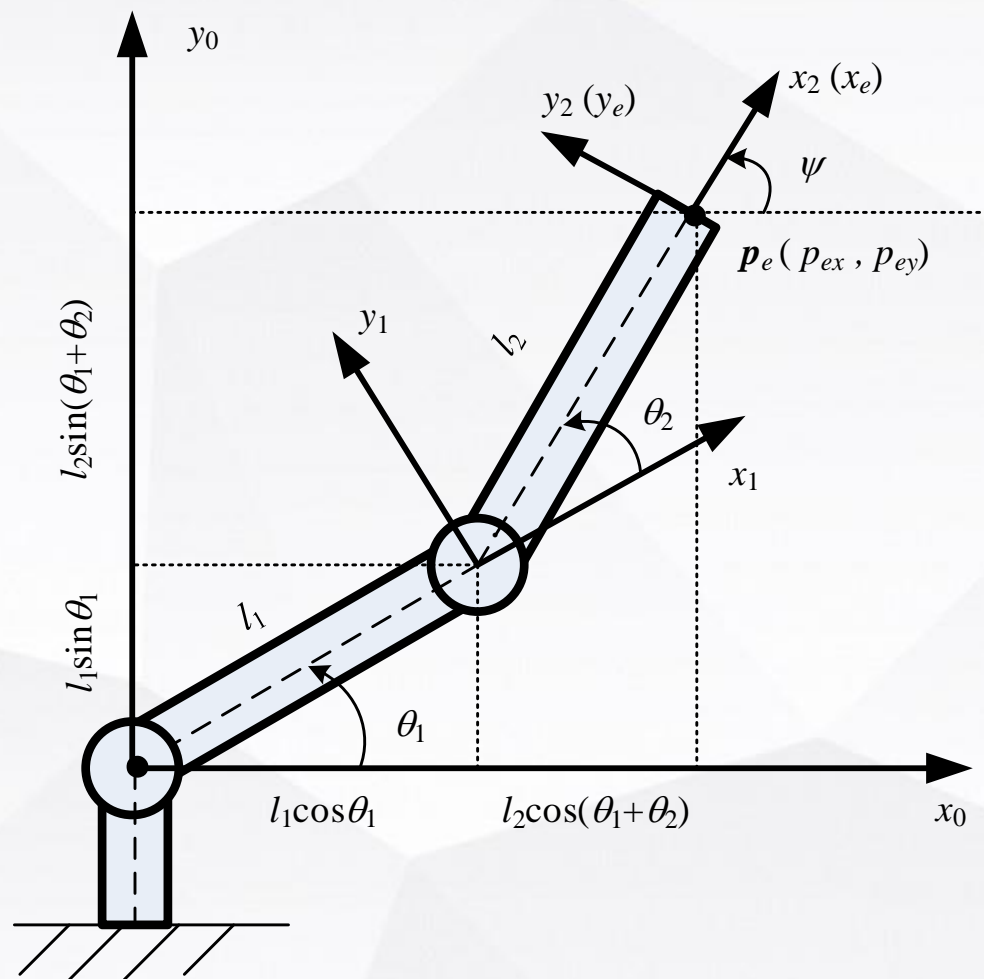
- 关节状态:  $[\theta_1, \theta_2]^T$

- 末端位置:  $[x_e, y_e]^T$

### ➤ 根据关节角计算末端位置

$$\begin{cases} x_e = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_e = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

上式即为平面2R机械臂的正运动学方程。



# 平面2R机械臂举例

## ◆ 正运动学方程的矩阵形式

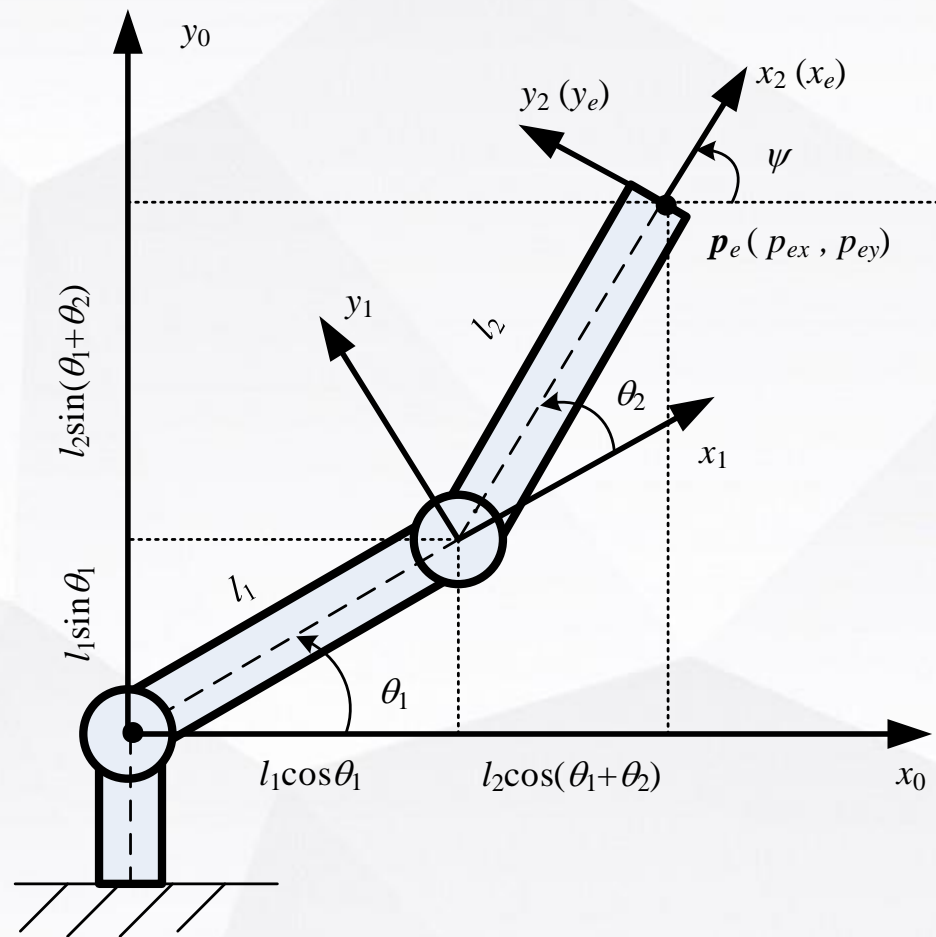
$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{cases} c_1 = \cos \theta_1, & c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ s_1 = \sin \theta_1, & s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

正运动学方程可简单表示为：

$$p_e = \text{fkine}(\theta_1, \theta_2)$$





# 平面2R机械臂举例

## ■ 平面2R机械臂逆运动学

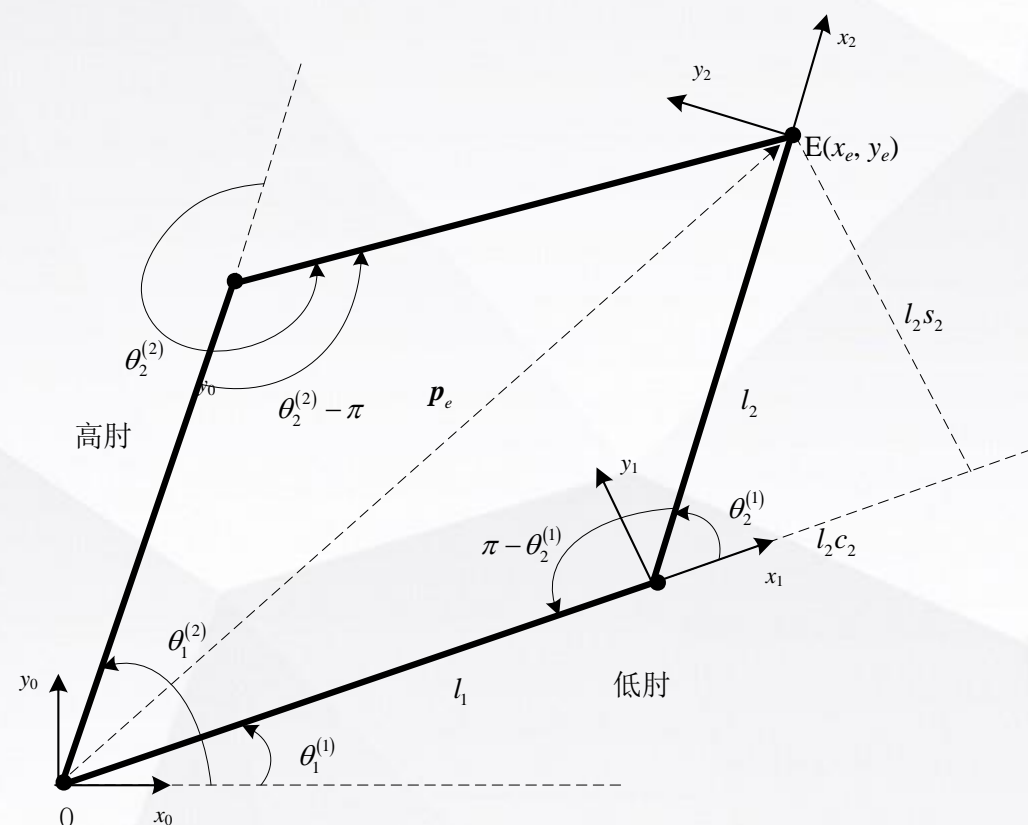
**问题：**已知末端位置 $[x_e, y_e]^T$ ，求关节角 $[\theta_1, \theta_2]^T$

- 将正运动学方程中两个式子的左右两边平方后相加（也可采用几何法，根据余弦定理）可得

$$x_e^2 + y_e^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c_2$$

- 若  $\left| \frac{x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right| \leq 1$ ，可解出

$$\theta_2 = \pm \arccos \left( \frac{x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$



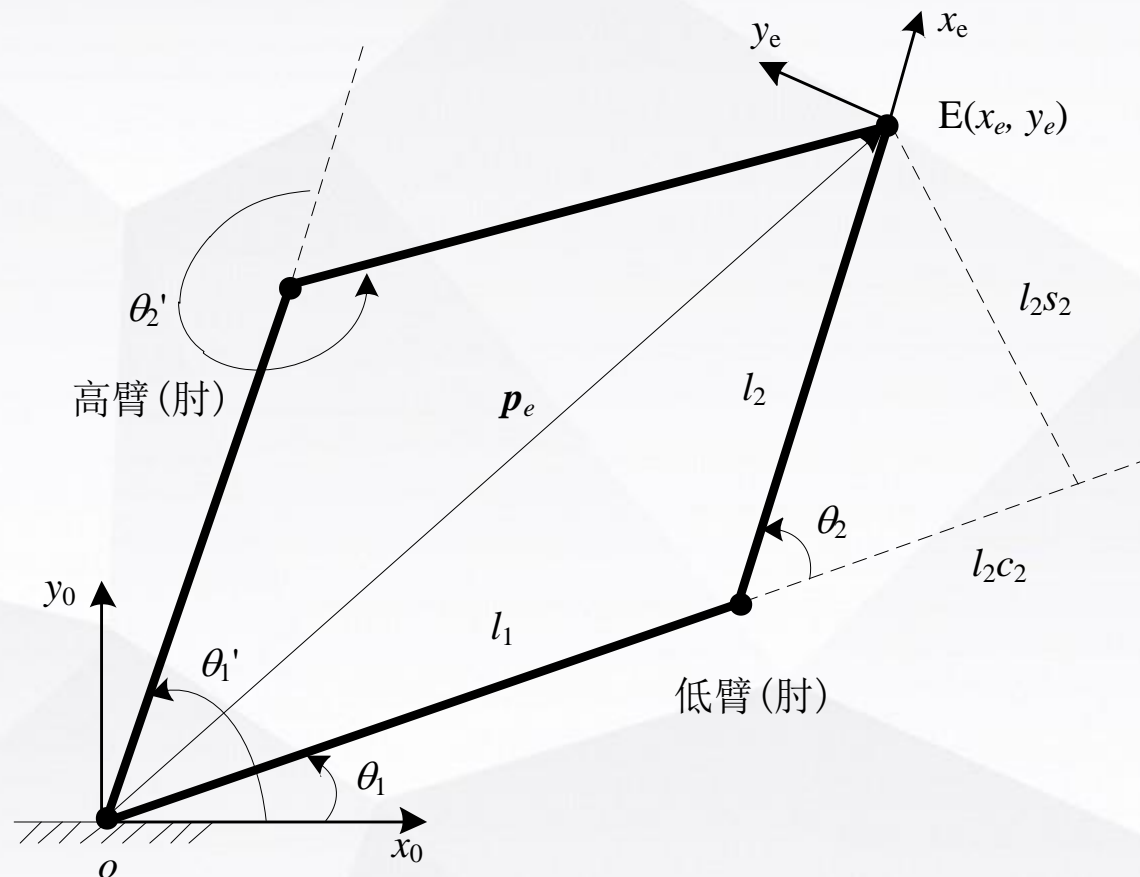
# 平面2R机械臂举例

## ■ 平面2R机械臂逆运动学

➤ 进一步可得:

$$\theta_1 = \text{atan2} \begin{bmatrix} -l_2 s_2 x_e + (l_1 + l_2 c_2) y_e, \\ (l_1 + l_2 c_2) x_e + l_2 s_2 y_e \end{bmatrix}$$

可见，对于2R的逆运动学，  
有两组解，即同一个末端位置  
对应2组关节角（臂型）



## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

### ◆ 机器人自由度

#### ➤ 结构方面：关节自由度数

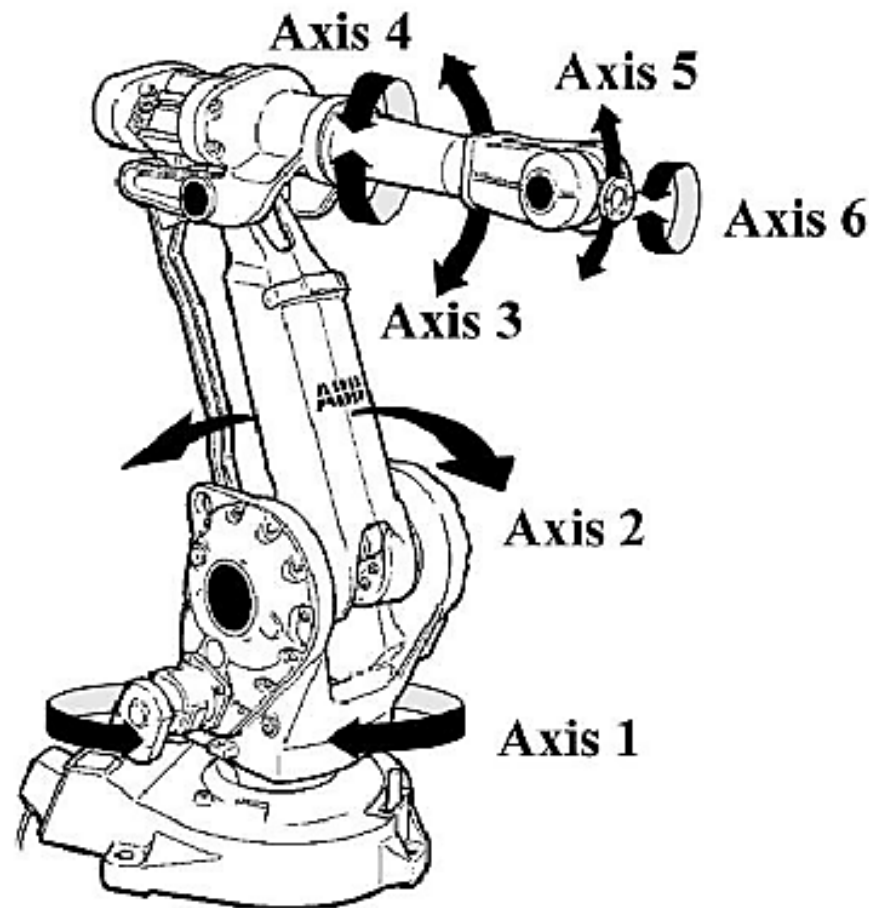
所有关节自由度的总和，称为机器人**关节自由度（或轴数）**，用 $n$ 表示，实际为关节空间的维数。

#### ➤ 末端运动能力：末端自由度

末端平动、转动自由度总和称为**末端自由度**数，实际为任务空间的维数，用 $m$ 表示。

#### ➤ 任务所需末端运动能力：任务自由度

完成具体任务要求末端具有的平动、转动自由度的总和，称为**任务自由度**数，用 $r$ 表示，可知 $r \leq m$ 。



## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

### ◆ 机器人冗余性问题

#### ➤ 少自由度机器人(或欠自由度)

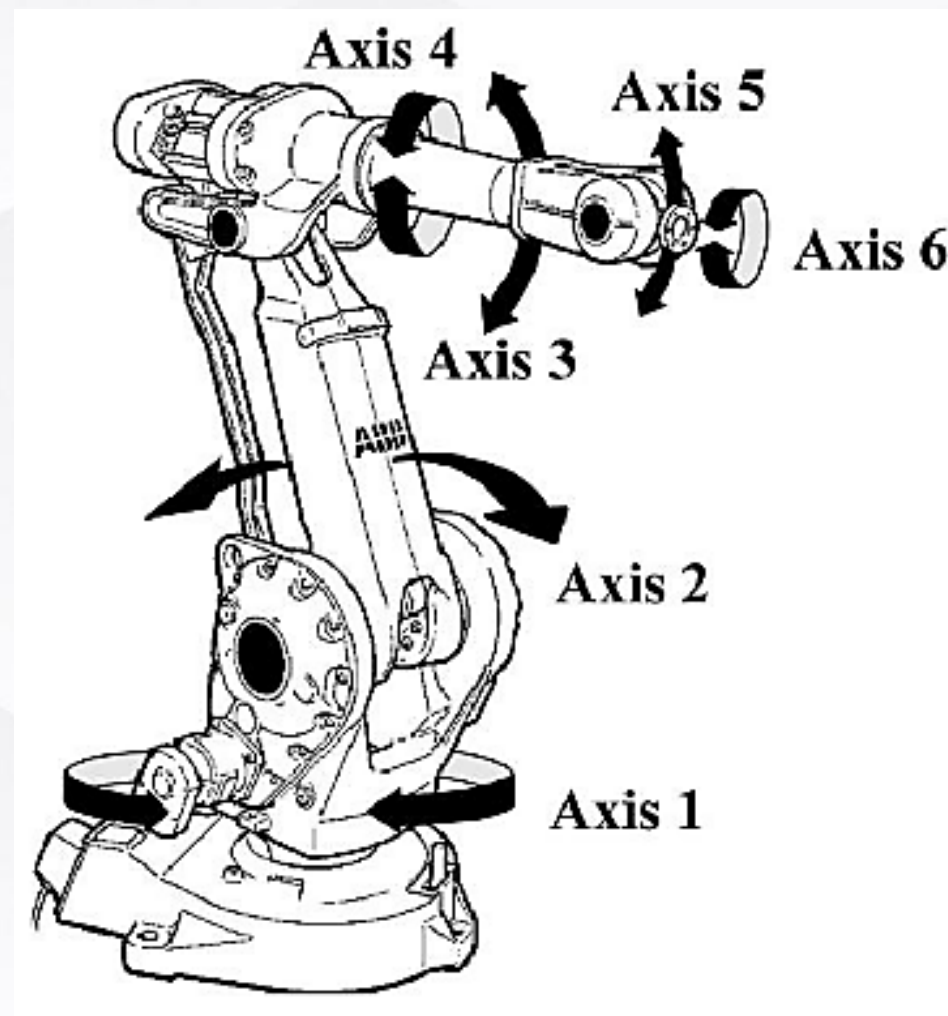
机器人关节自由度数**小于**任务自由度数，即 $n < r$ 。

#### ➤ 全自由度机器人

机器人关节自由度数**等于**任务自由度数，即 $n = r$ 。

#### ➤ 冗余自由度机器人(或冗余机器人)

机器人关节自由度数**大于**任务自由度数，即 $n > r$ 。



## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

### ◆ 平面冗余与非冗余

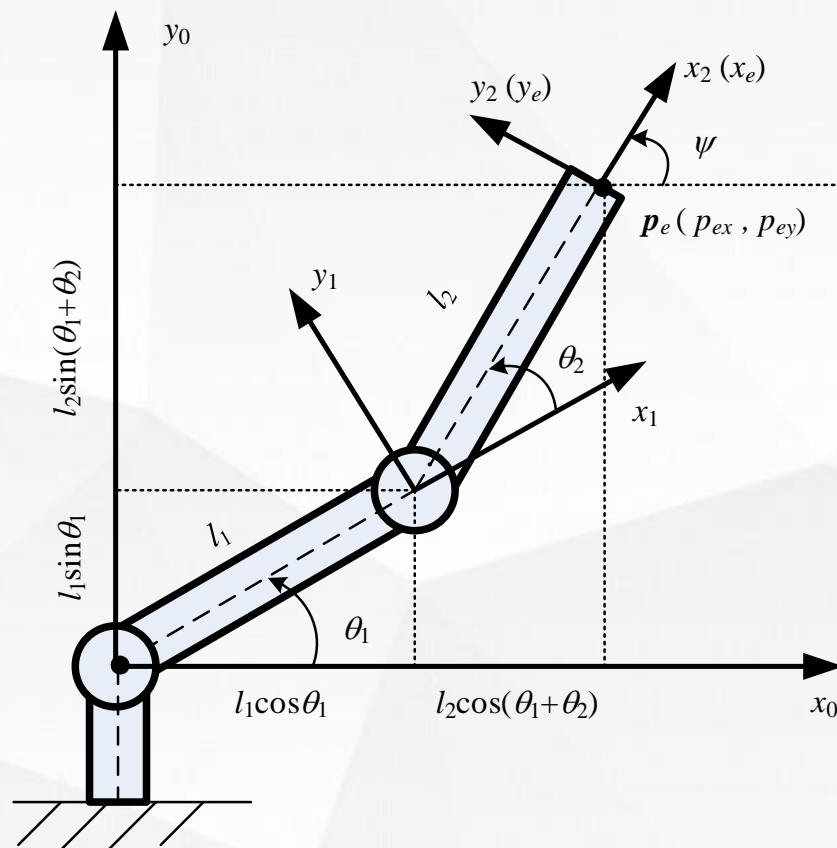
**问题：**平面2R、平面3R、平面4R，何时冗余？

#### ➤ 末端状态

- 末端位置 (2维) :  $[x_e, y_e]^T$
- 末端姿态 (1维) :  $\psi$

#### ➤ 关节状态

- 平面2R:  $[\theta_1, \theta_2]^T$
- 平面3R:  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$
- 平面4R:  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$



## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

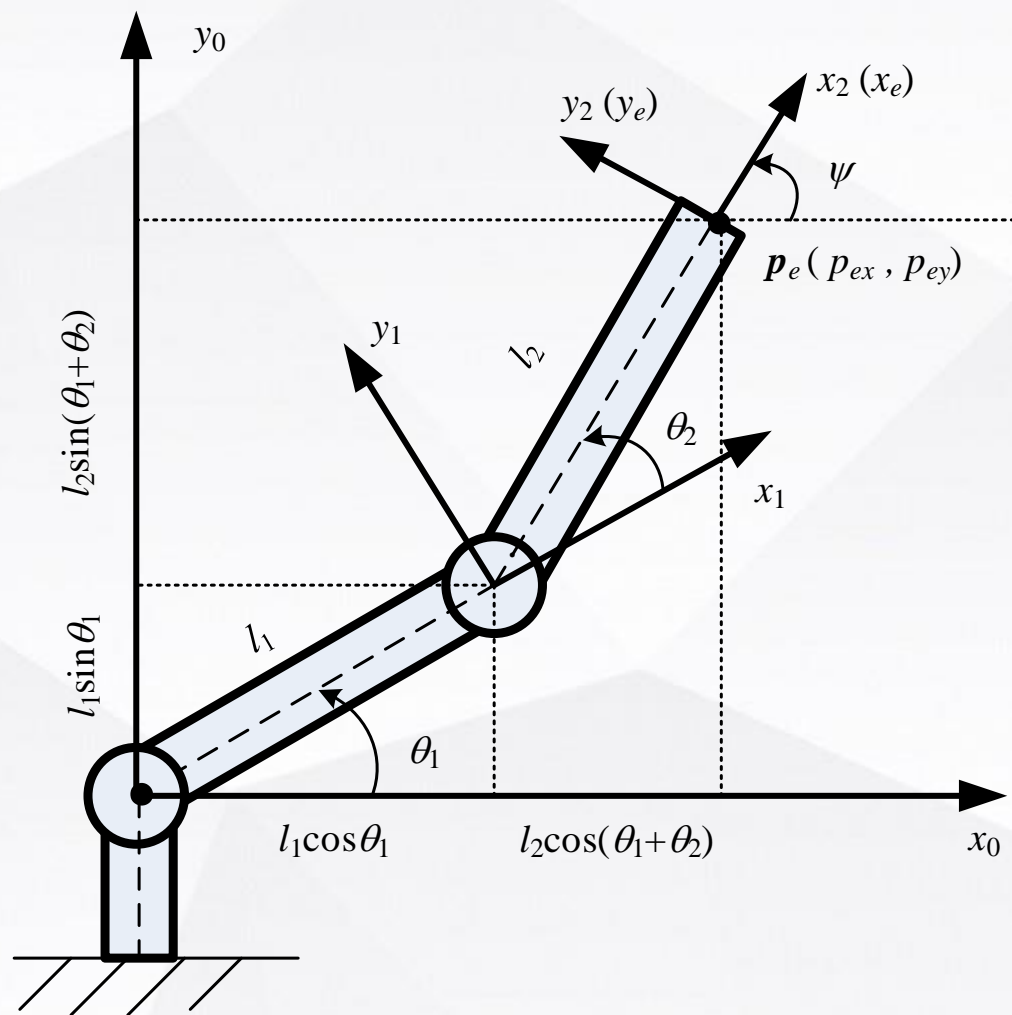
### ◆ 平面冗余与非冗余

➤ 若对末端同时进行定位、定姿 ( $r=3$ )

- 平面2R ( $n=2$ ): 欠自由度
- 平面3R ( $n=3$ ): 全自由度
- 平面4R ( $n=4$ ): 冗余自由度

➤ 若对末端仅进行定位 ( $r=2$ )

- 平面2R ( $n=2$ ): 全自由度
- 平面3R ( $n=3$ ): 冗余自由度
- 平面4R ( $n=4$ ): 冗余自由度





## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

### ◆ 空间冗余与非冗余

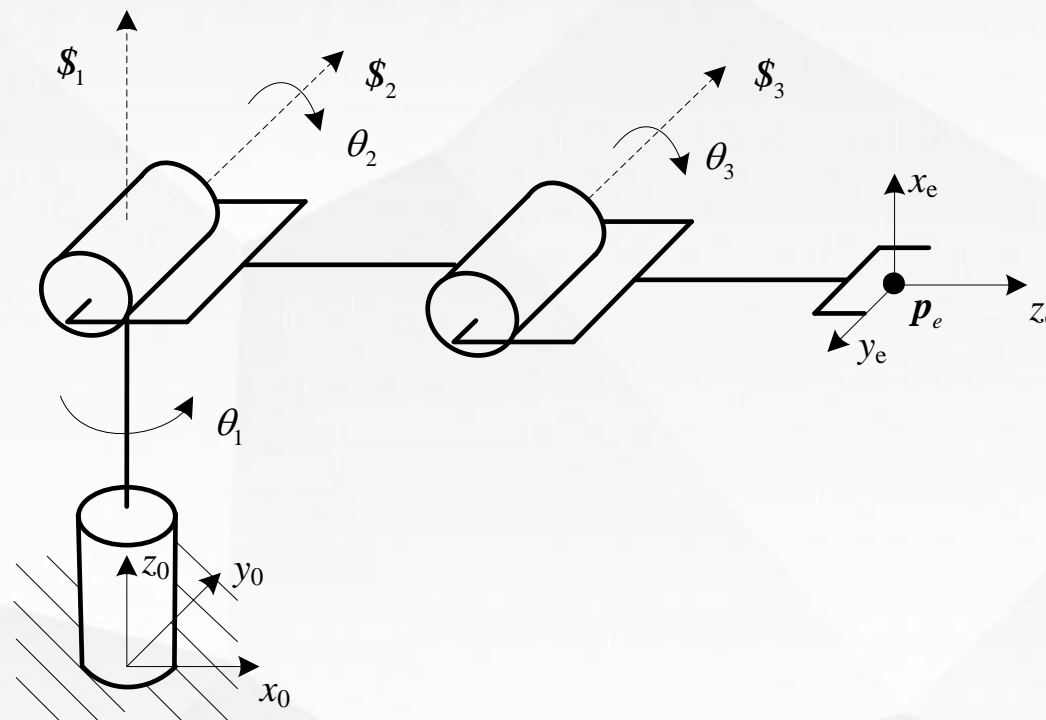
#### ➤ 末端状态

- 末端位置 (3维)
- 末端姿态 (3维)

#### ➤ 关节状态

- 空间 $n$ -R机械臂( $n$ 维):

$$[\theta_1, \dots, \theta_n]^T$$



## 4.2.4 机器人的自由度与冗余性

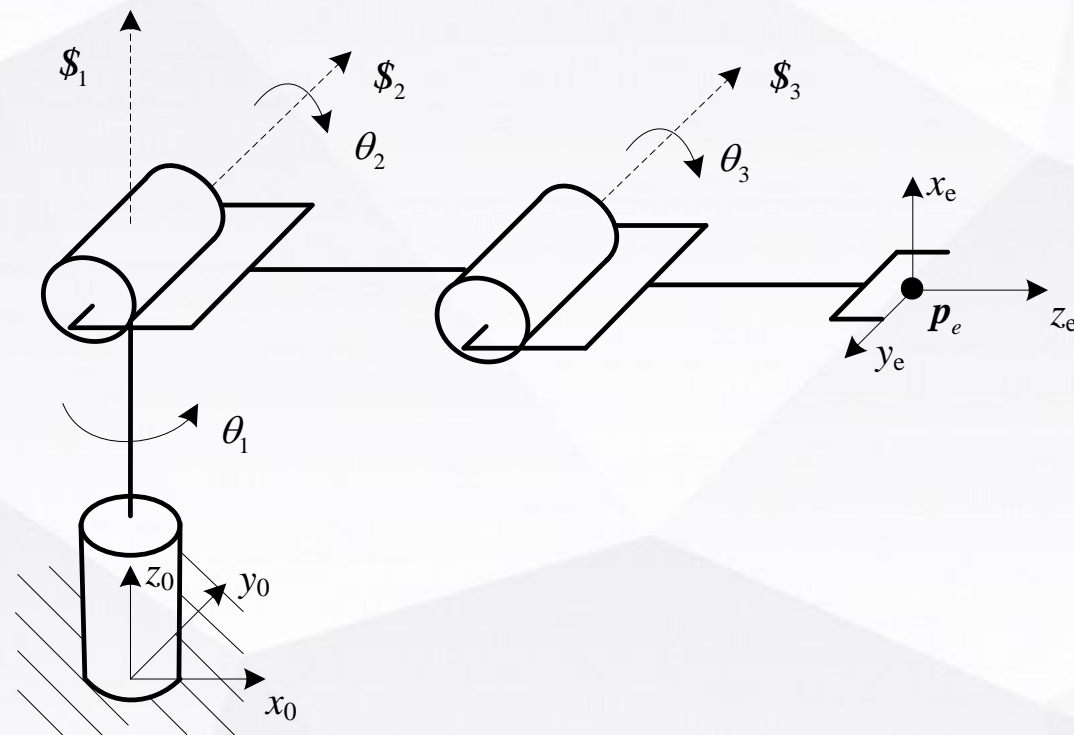
### ◆ 空间冗余与非冗余

#### ➤ 若对末端同时进行定位、定姿 ( $r=6$ )

- 空间3R ( $n=3$ ): 欠自由度
- 空间4R ( $n=4$ ): 欠自由度
- 空间6R ( $n=6$ ): 全自由度
- 空间7R ( $n=7$ ): 冗余自由度

#### ➤ 若对末端仅进行定位/定姿 ( $r=3$ )

- 空间3R ( $n=3$ ): 全自由度
- 空间4R ( $n=4$ ): 冗余自由度
- 空间6R ( $n=6$ ): 冗余自由度
- 空间7R ( $n=7$ ): 冗余自由度



# 第4章 机器人位置级正运动学

1 机器人运动链及其状态描述

2 机器人运动学基本概念

3 机器人运动学建模的D-H法

4 典型机器人正运动学方程

5 机器人工作空间的分析

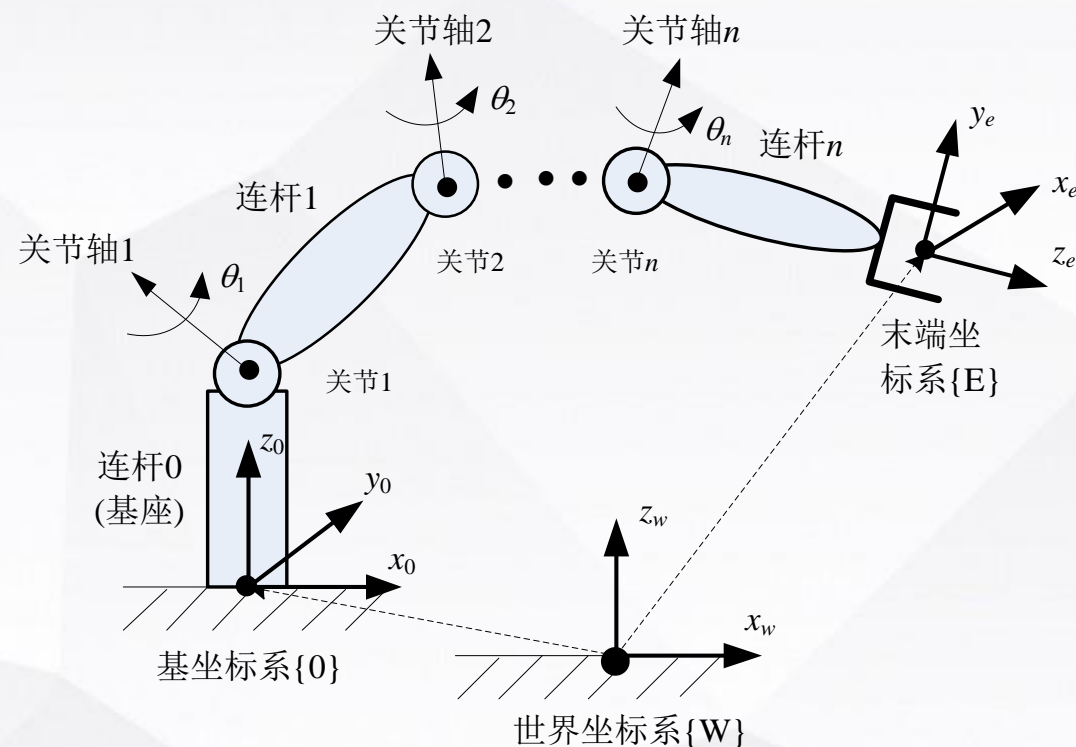
## 4.3.1 运动学建模的关键

### ◆ 末端位姿的确定问题

机器人由 $n+1$ 个杆件、 $n$ 个关节组成：

- 末端位姿由各杆件的位姿决定
- 各杆件的位姿由关节位置决定

**关键：**为每个杆件建立坐标系，得到其位姿与关节位置的关系，进而得到末端位姿与所有关节位置的关系。



**问题：**完整描述相邻坐标系间的位姿需要**6个变量**，对于 $n+1$ 个杆件而言，如何**简单、有效**描述坐标系间的关系？

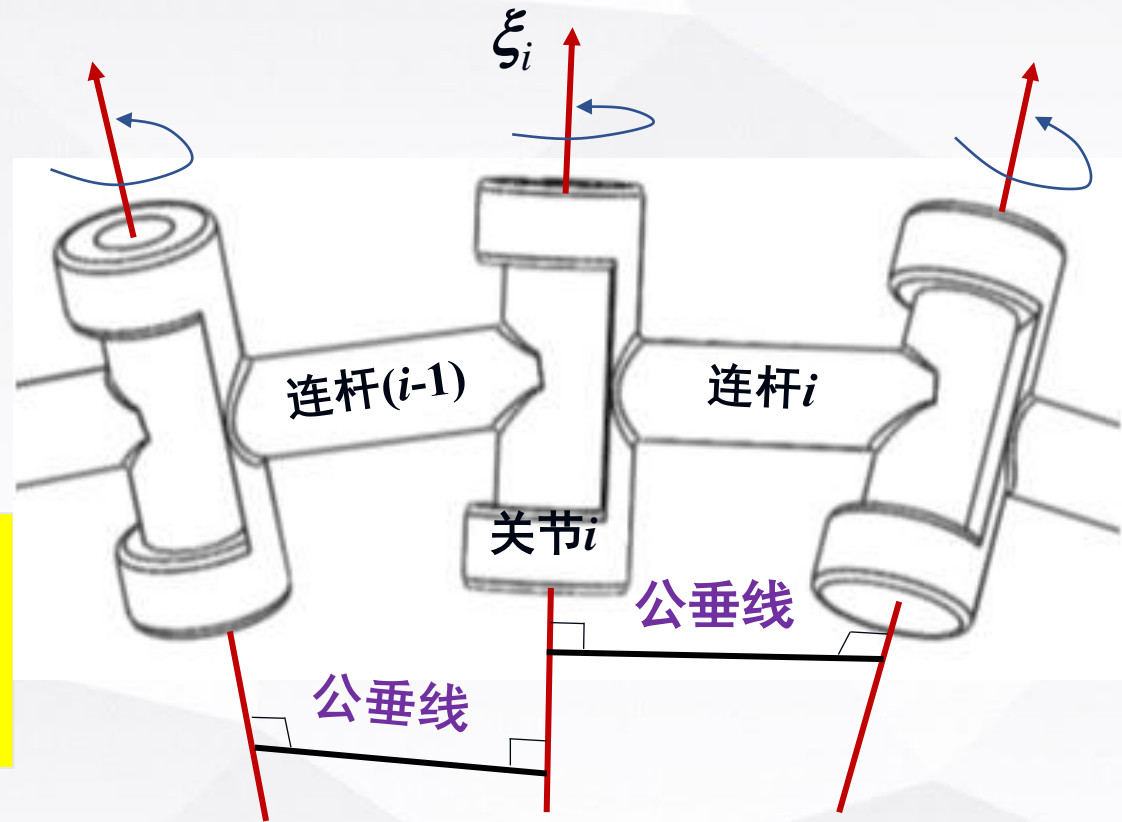
## 4.3.1 运动学建模的关键

### ◆ 关节运动的传递特性

关节运动传递的**两个重要因素**：

- **关节轴**——运动的方向
- **转动半径**——垂直于关节轴

**简单有效描述的思路**：充分利用上述两个条件来建立杆件坐标系，**不影响**传递特性却**可以减少**参数的数量。



**结果**：仅需4个参数可描述杆件间的坐标关系。需要指出的是，此时的坐标系是具有一定特点（满足2个约束条件）的坐标系

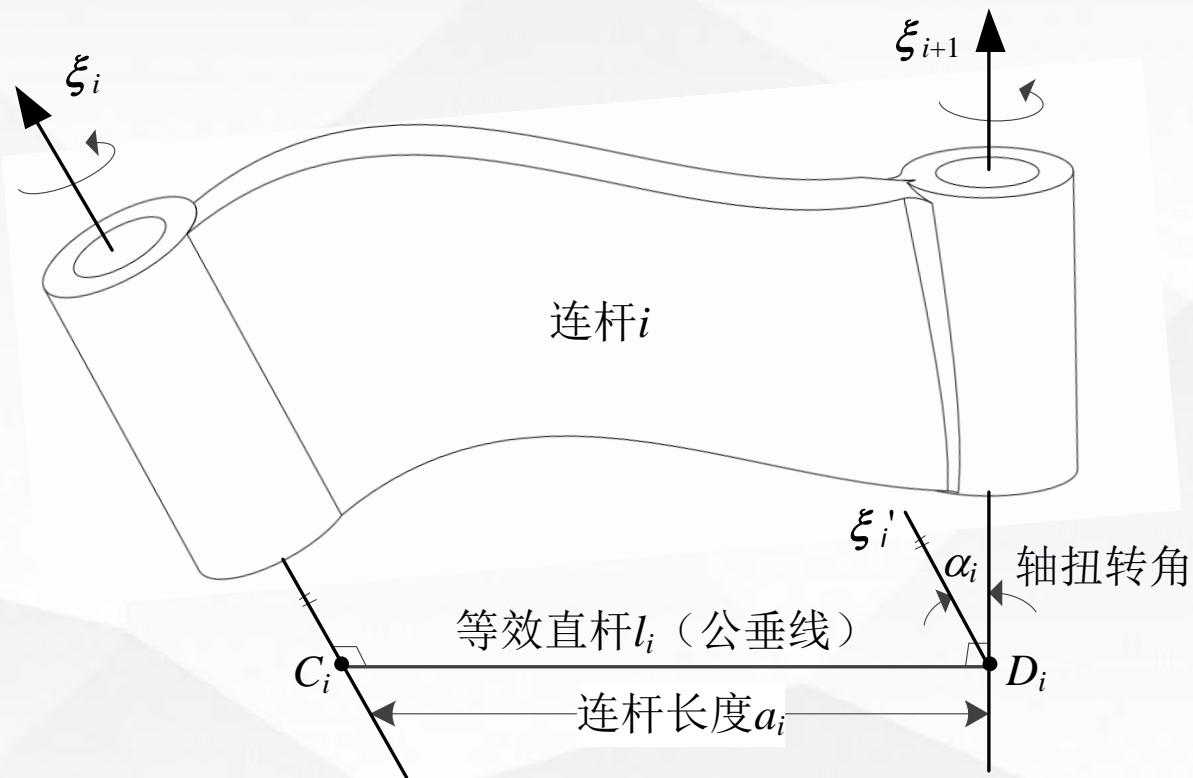
## 4.3.2 连杆的参数化表示

### ◆ 连杆自身的参数

**连杆的作用：** 关节 $i$ 和关节 $i+1$ 之间的连接，对应两个关节轴

连杆自身的参数包括2个：

- 连杆长度  $a_i$ ：相连两轴公垂线的长度
- 轴扭转角  $\alpha_i$ ：相连两轴的夹角



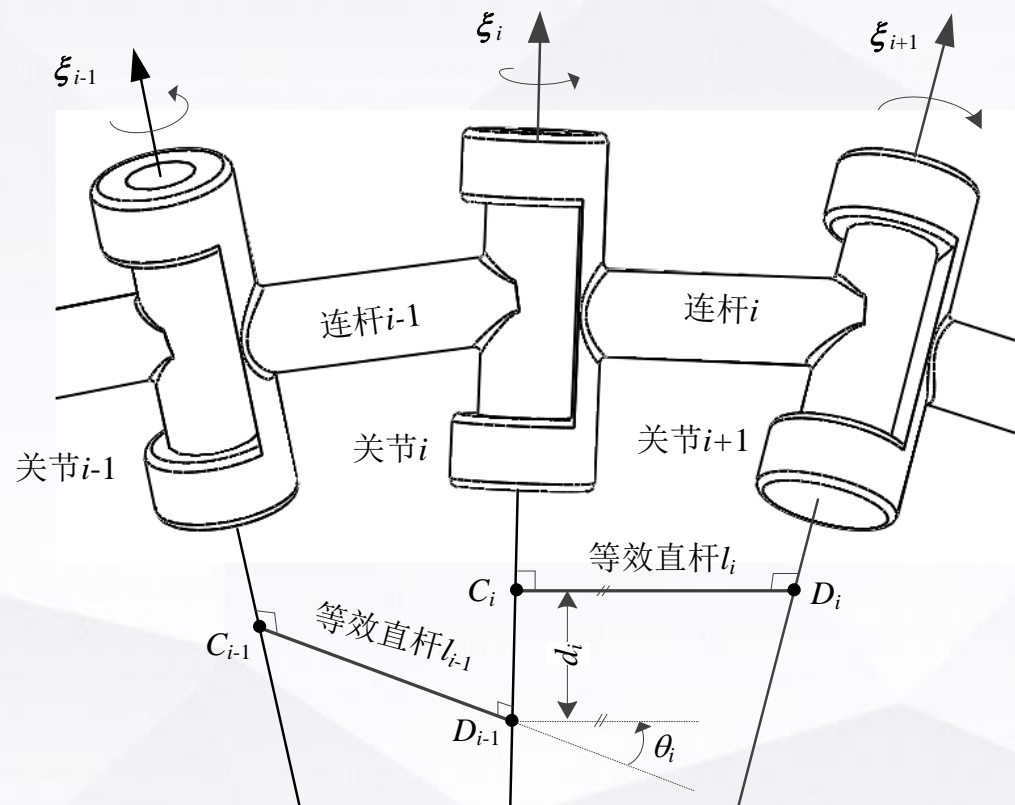


## 4.3.2 连杆的参数化表示

### ◆ 连杆之间的参数

连杆之间的参数包括2个：

- 连杆间距  $d_i$ ：关节轴上两个垂点间的距离
- 连杆夹角  $\theta_i$ ：相连等效直杆的夹角



## 4.3.2 连杆的参数化表示

### ◆ 连杆4参数小结

连杆自身的参数 (基于连杆 <i>i</i> 定义)	连杆长度	$a_i$	连杆 <i>i</i> 等效直杆的长度或连杆 <i>i</i> 相邻两个关节轴公垂线 $l_i$ 的长度
	轴扭转角	$\alpha_i$	连杆 <i>i</i> 相邻两个关节轴（即 $\xi_i$ 和 $\xi_{i+1}$ ）之间的夹角
相邻连杆的参数 (基于关节 <i>i</i> 定义)	连杆间距	$d_i$	与关节 <i>i</i> 相连的两相邻等效直杆（即 $l_{i-1}$ 和 $l_i$ ）之间的距离
	连杆夹角	$\theta_i$	与关节 <i>i</i> 相连的两相邻等效直杆（即 $l_{i-1}$ 和 $l_i$ ）之间的夹角

## 4.3.3 连杆坐标系定义

### ◆ 连杆坐标系三轴的确定

- **轴1**: 关节轴 ( $\xi_i$  或  $\xi_{i+1}$ )
- **轴2**: 轴间公垂线  $l_i$
- **轴3**: 右手定则确定
- **原点**: 轴上的垂点 ( $C_i$  或  $D_i$ )

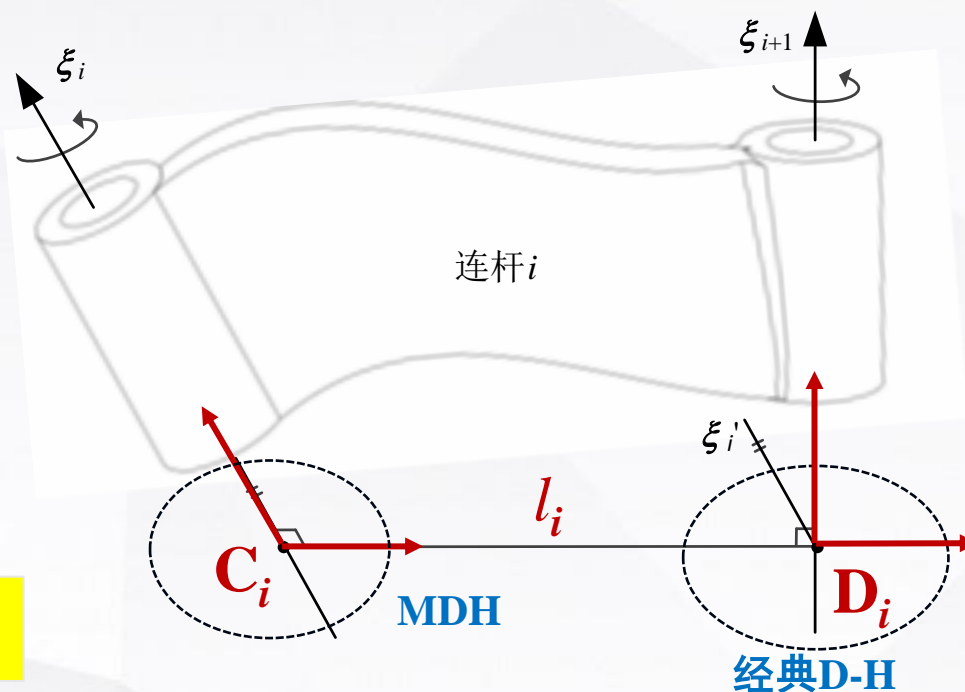
### ◆ 建立方法

**回顾**: 连杆  $i$  连接关节  $i$  和关节  $(i+1)$

① 将  $\{i\}$  系原点建在 **关节  $(i+1)$**  轴上 → **经典D-H法**

② 将  $\{i\}$  系原点建在 **关节  $i$**  轴上 → **改造的D-H法(MDH)**

**注意**: 不管D-H法还是MDH法, 坐标系  $\{i\}$  都与连杆  $i$  固连



## 4.3.3 连杆坐标系定义

### ◆ 经典D-H法

Jaques Denavit和Richard S. Hartenberg于1957提出，用于建立各连杆坐标系的规则，特点是 $z_i$ 轴即为关节 $(i+1)$ 轴。为经典D-H法。

### ◆ 改造的D-H法 (MDH)

由于D-H法定义的 $z$ 轴的编号与对应关节的编号不一致，后有学者对该规则进行了修改，规定 $z_i$ 轴即为关节 $i$ 轴，修改后的方法称为MDH法(Modified D-H)。

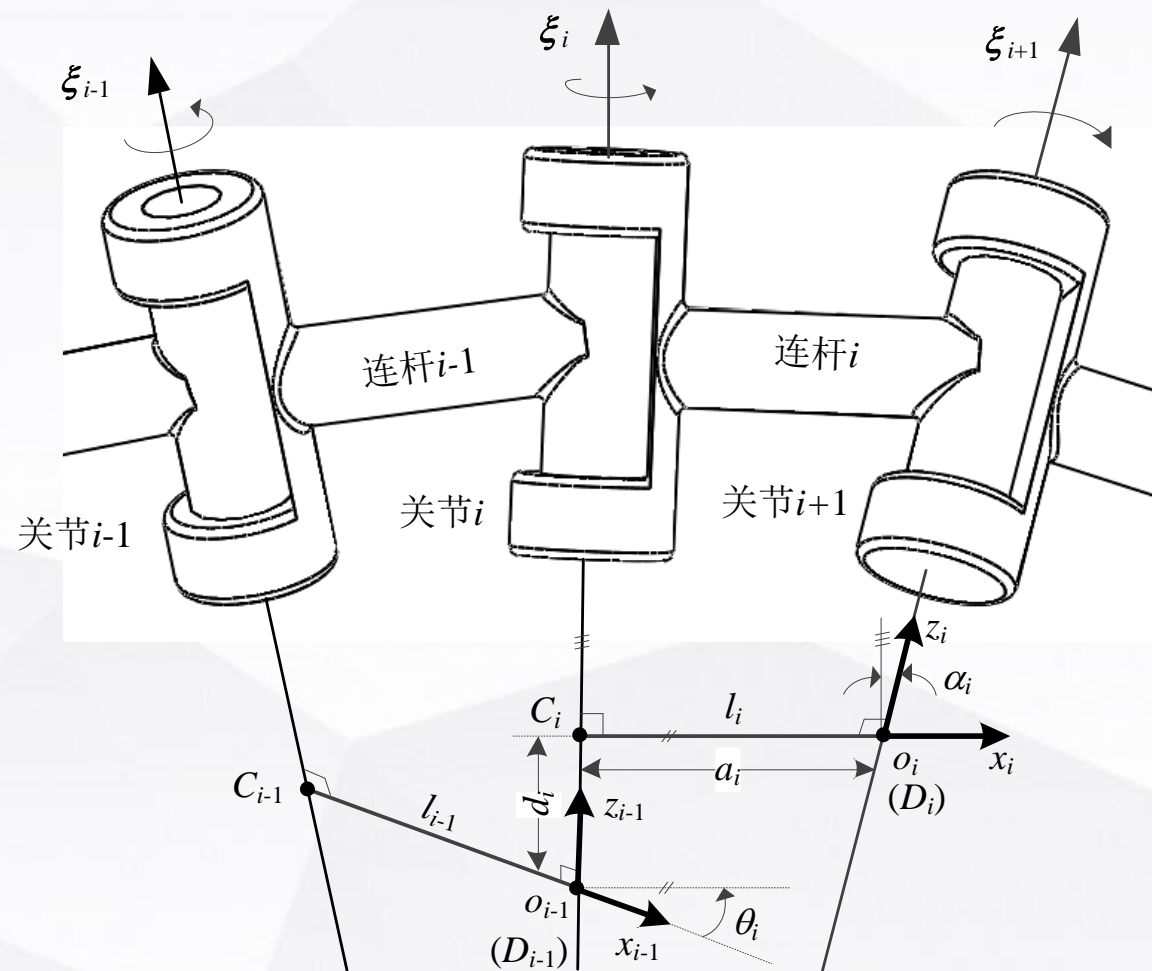
本课程中，在不作特别说明时，均采用经典D-H法

## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 中间杆件 $i$ ( $i=1\sim n-1$ )的D-H坐标系定义

#### ① 相邻轴异面的情况

- $z_i$ : 关节 $i+1$ 轴线
- $x_i$ : 公垂线 $l_i$ , 指向 $C_i \rightarrow D_i$
- $y_i$ : 根据右手定则建立
- $o_i$ : 公垂点 $D_i$

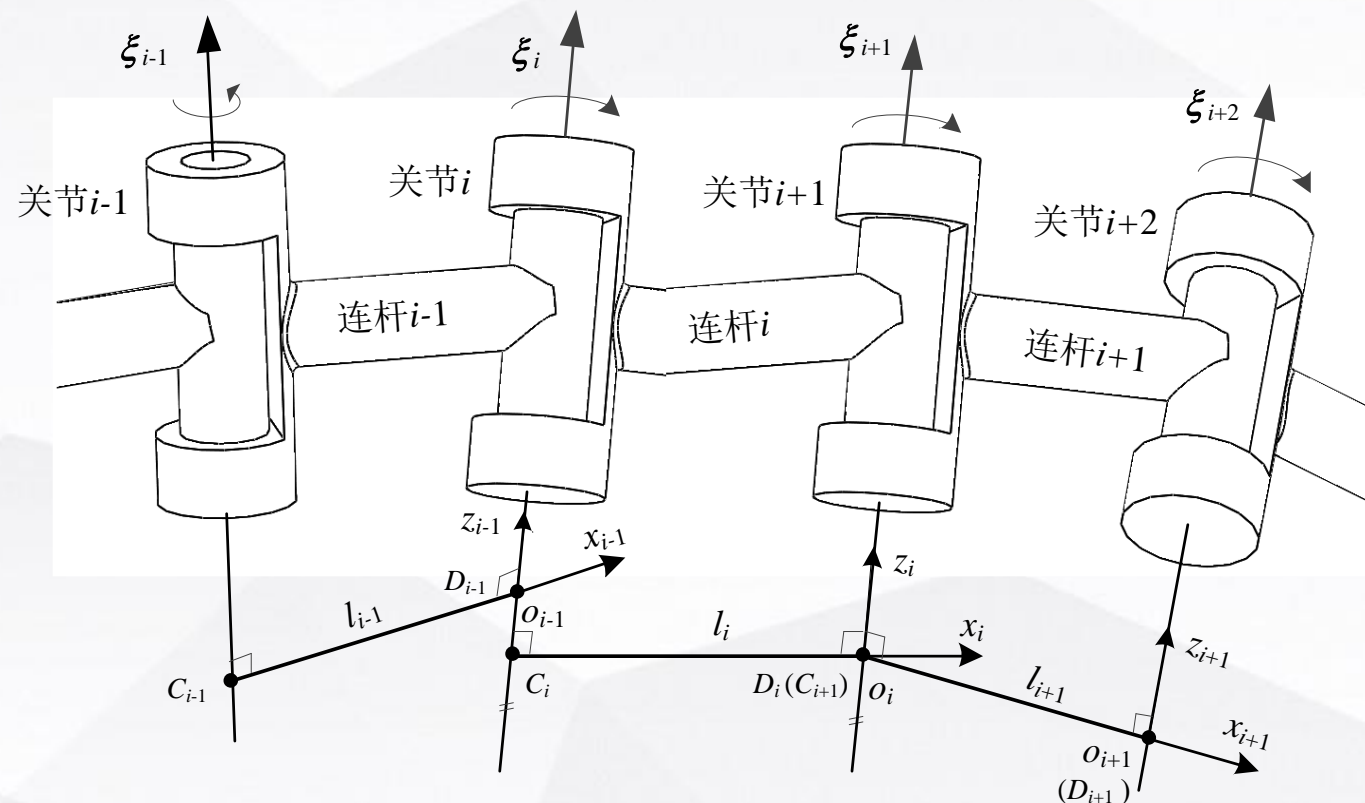


## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 中间杆件 $i$ ( $i=1\sim n-1$ )的D-H坐标系定义

#### ②相邻轴**平行**的情况

- $z_i$  : 关节 $i+1$ 轴
- $o_i$  : 公垂点 $C_{i+1}$
- $x_i$  : 过 $o_i$ 的公垂线 $l_i$ 共线
- $y_i$  : 根据右手定则建立

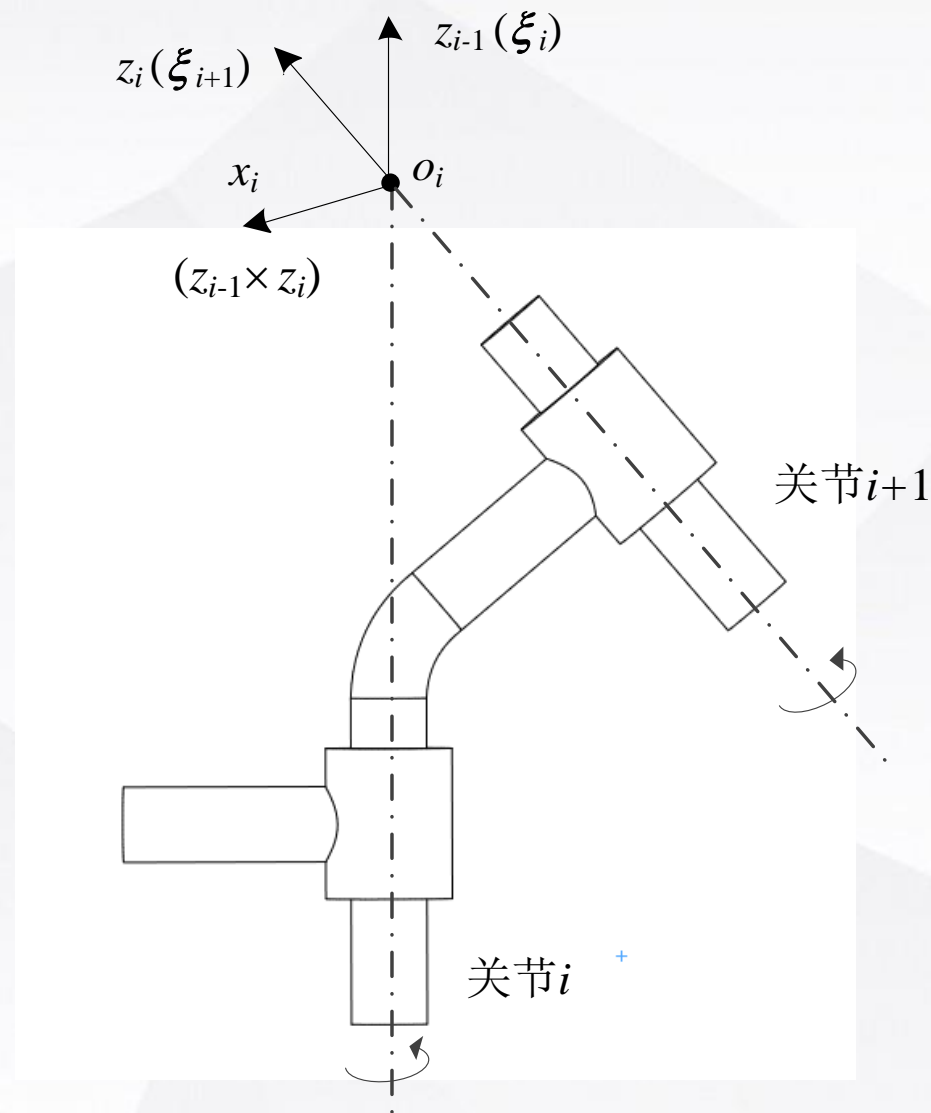


## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 中间杆件 $i$ ( $i=1\sim n-1$ ) 的D-H坐标系定义

#### ③ 相邻轴相交的情况

- $z_i$  : 关节 $i+1$ 轴, 运动正向
- $x_i$ : 两轴所在面的法向量, 即 $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i)$
- $y_i$ : 根据右手定则建立
- $o_i$ : 两轴的交点





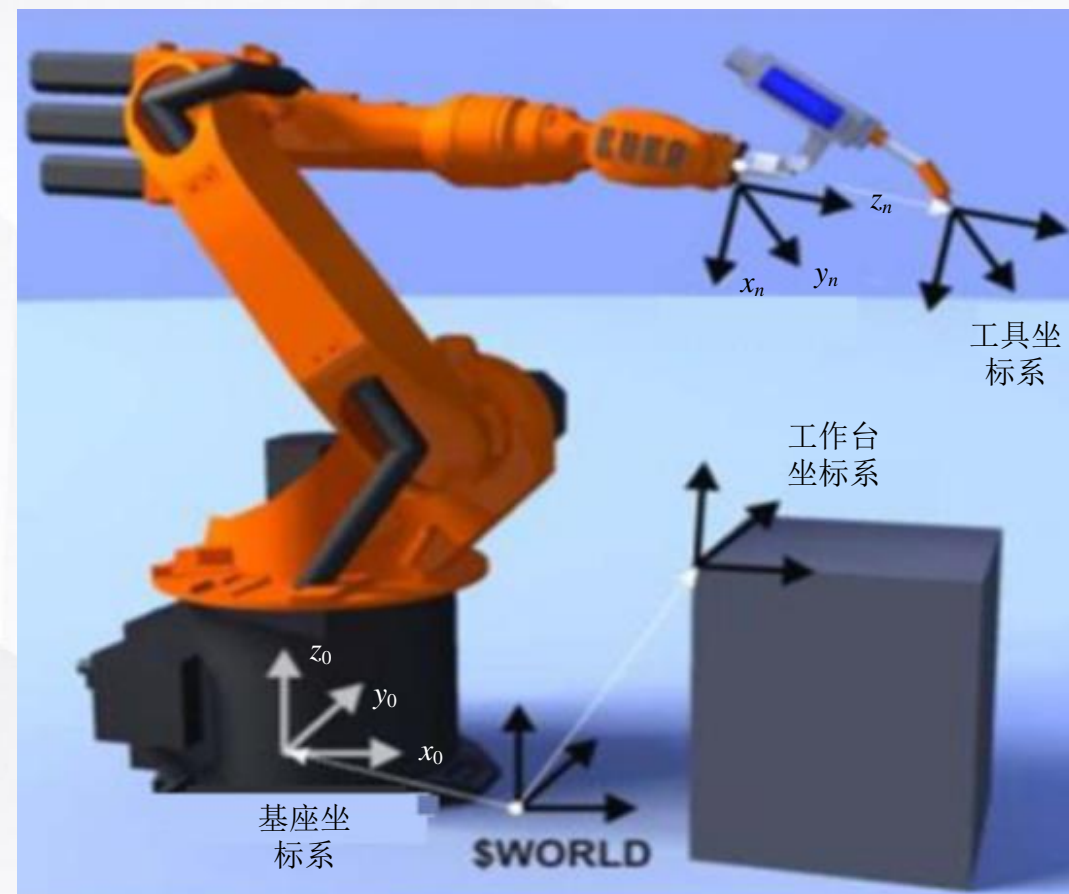
## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 基座坐标系 ( $i=0$ )的定义

基座仅与关节1相连，故只要求 $z_0$ 轴与关节1的轴线重合即可，而对 $x_0$ 、 $o_0$ 可任意

- $z_0$ ：关节1轴
- $x_0$ ：可任意
- $o_0$ ：可任意
- $y_0$ ：根据右手定则建立

实际中可结合工作场地描述的需要。



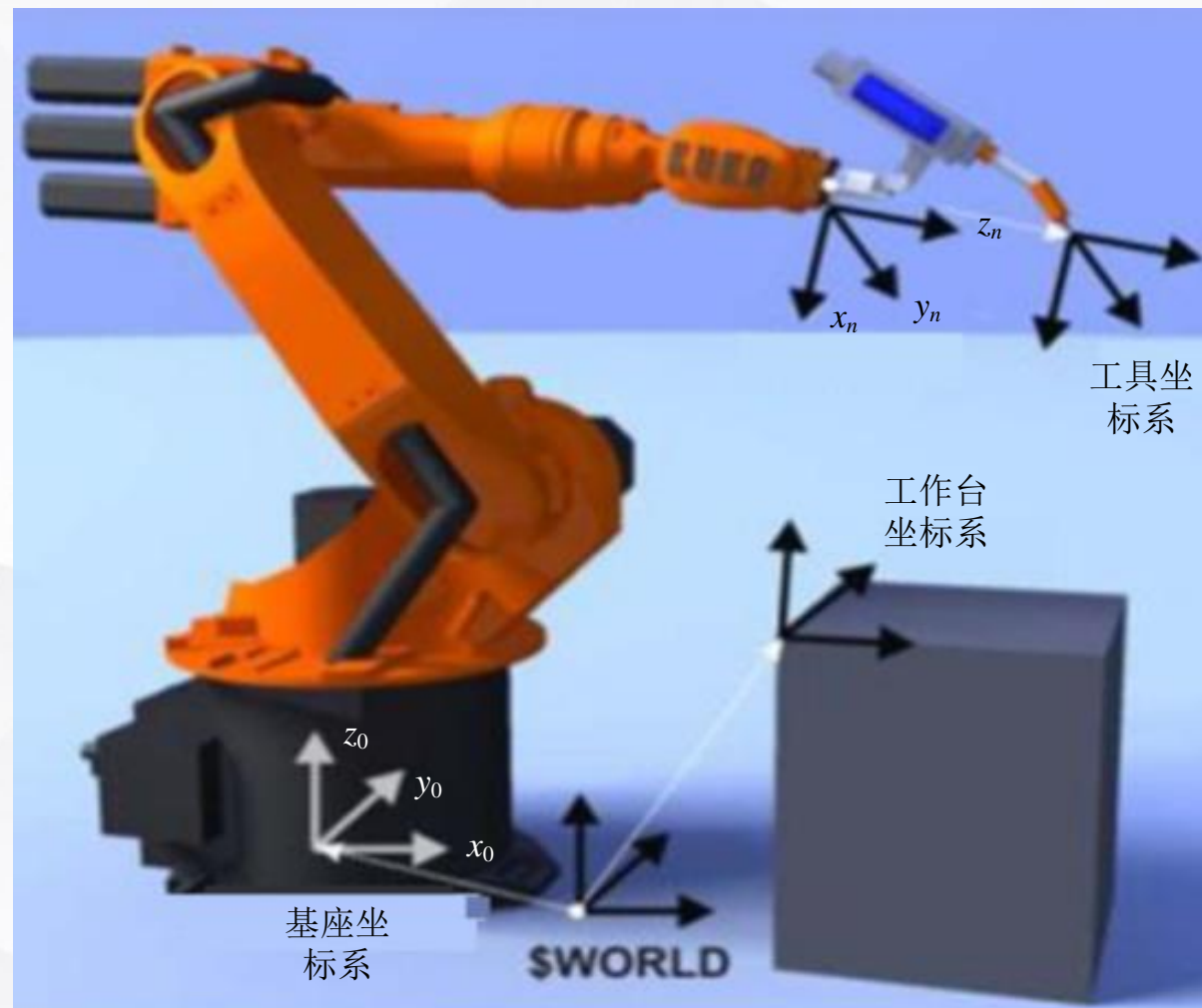
## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 末端坐标系 ( $i=n$ )的定义

末端仅与关节 $n$ 相连，不存在节 $n+1$ 关节轴，故 $z_n$ 、 $o_n$ 可以任意；

但 $x_n$ 必须与前一个关节轴垂直(为符合公垂线的规则)

- $x_n$ ：与 $z_{n-1}$ 垂直（多种可能）
- $z_n$ ：可任意（一般与 $z_{n-1}$ 指向相同）
- $o_n$ ：可任意
- $y_n$ ：根据右手定则建立



## 4.3.4 经典D-H法

### ◆ 末端坐标系 ( $i=n$ ) 的定义

为了体现末端杆件的长度，原点置于末端点、 $z_n$ 与 $z_{n-1}$ 指向相同。

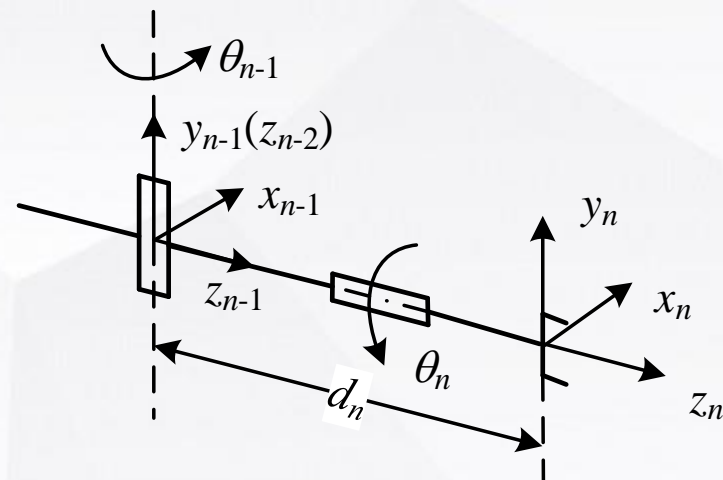
按下面两种情况确定 $x_n$ ：

①当 $z_{n-1}$ 轴沿臂展方向时

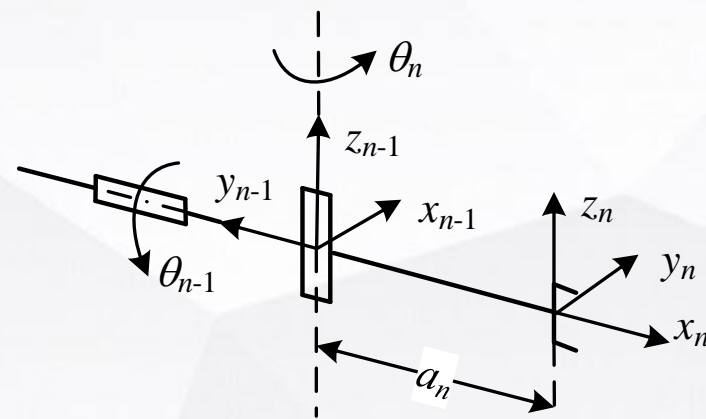
●  $x_n$ 轴垂直于臂展方向

②当 $z_{n-1}$ 轴垂直于臂展方向时

●  $x_n$ 轴沿臂展方向



当 $z_{n-1}$ 轴沿臂展方向时

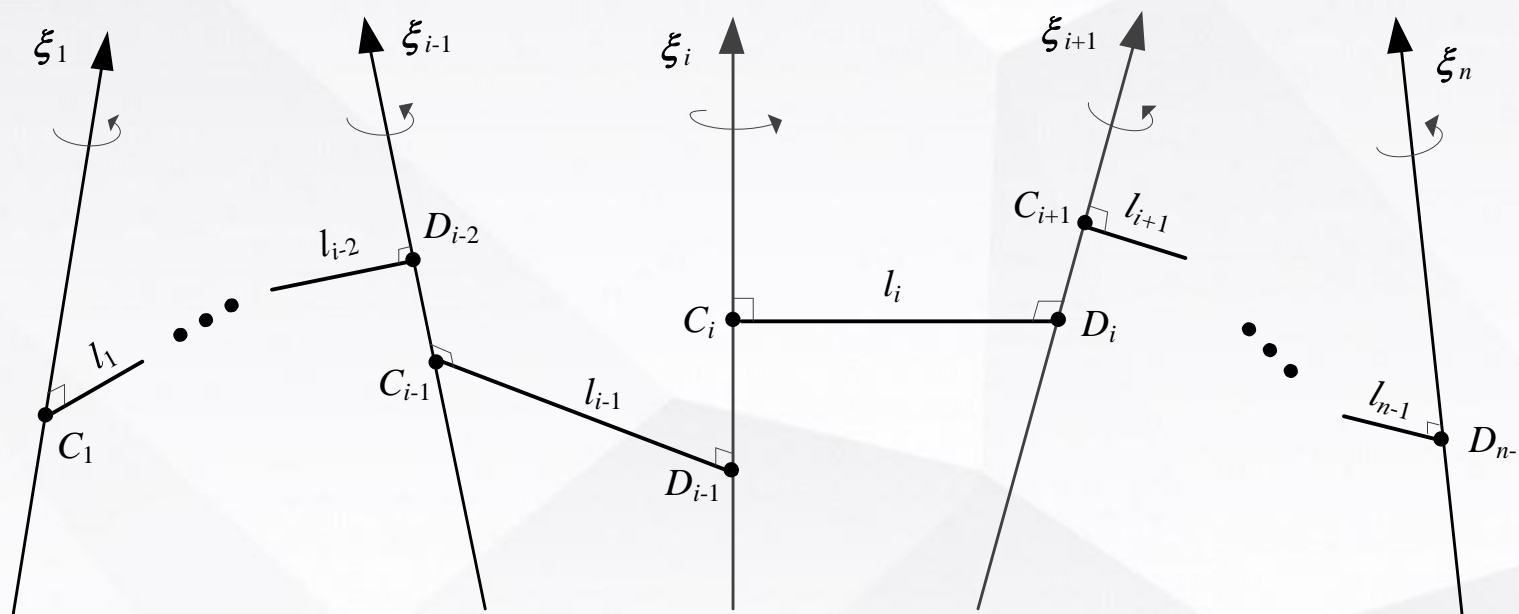


当 $z_{n-1}$ 轴垂直于臂展方向时

## 4.3.5 连杆D-H坐标系建立步骤

### ◆ 构建简化运动链

将所有关节轴及公垂线描述出来，得到**简化运动链**



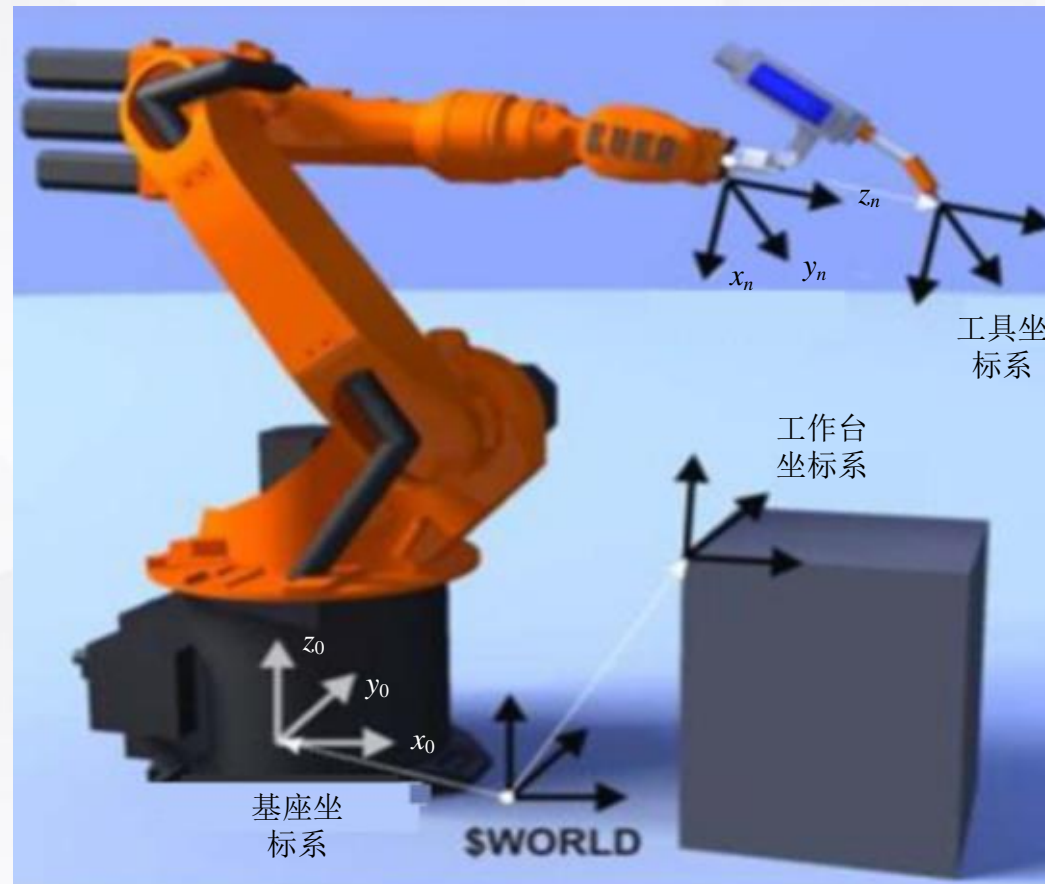
**确定：**

- 关节轴  $\xi_i$
- 公垂线（等效直杆）  $l_i$
- 公垂点为  $C_i$  和  $D_i$

## 4.3.5 连杆D-H坐标系建立步骤

### ◆ 建立基座坐标系 $\{x_0y_0z_0\}$

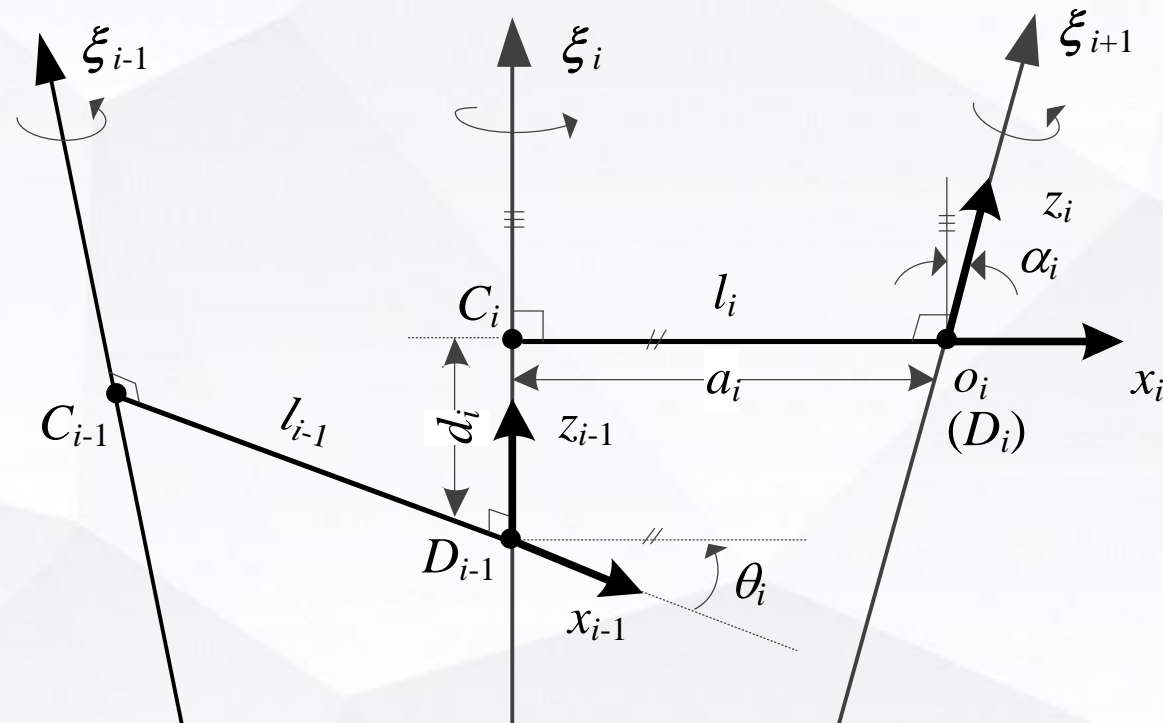
- 以基座上感兴趣的位置为 $o_0$ 、关节1轴为 $z_0$
- $x_0$ 轴和 $y_0$ 轴与 $z_0$ 轴垂直，方向任选。



## 4.3.5 连杆D-H坐标系建立步骤

### ◆ 建立中间杆件的坐标系 $\{x_i, y_i, z_i\}$ ( $i = 1 \sim (n-1)$ )

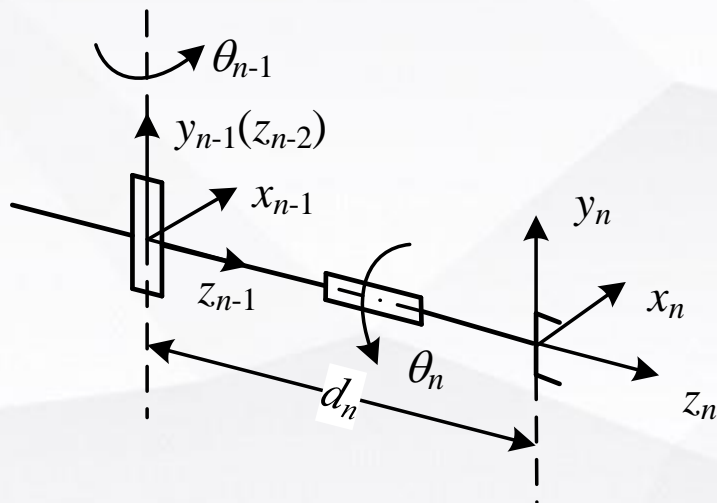
- $z_i$ : 关节 $i+1$ 轴线
- $o_i$ : 若 $z_i$ 和 $z_{i-1}$ 异面, 以 $D_i$ 为原点;  
若相交, 则交点为原点;  
若平行, 以 $C_{i+1}$ 为原点。
- $x_i$ : 若 $z_i$ 和 $z_{i-1}$ 异面或平行, 为公垂线 $l_i$   
若相交, 则以两轴所在面法向量为 $x_i$ , 即 $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i)$
- $y_i$ : 根据右手定则建立



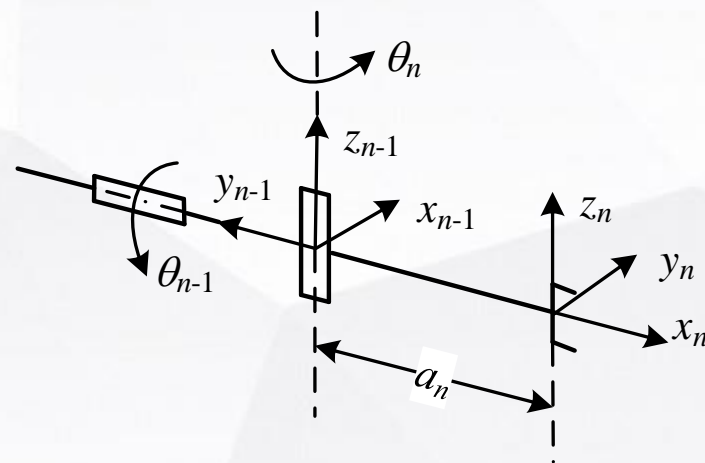
## 4.3.5 连杆D-H坐标系建立步骤

### ◆ 建立末端坐标系 $\{x_n y_n z_n\}$

- 以末端感兴趣的位置为 $o_n$ 、 $z_{n-1}$ 为 $z_n$
- 按下面两种情况确定 $x_n$ :
  - 当 $z_{n-1}$ 轴沿臂展方向时,  $x_n$ 轴垂直于臂展方向
  - 当 $z_{n-1}$ 轴垂直于臂展方向时,  $x_n$ 轴沿臂展方向



当 $z_{n-1}$ 轴沿臂展方向时



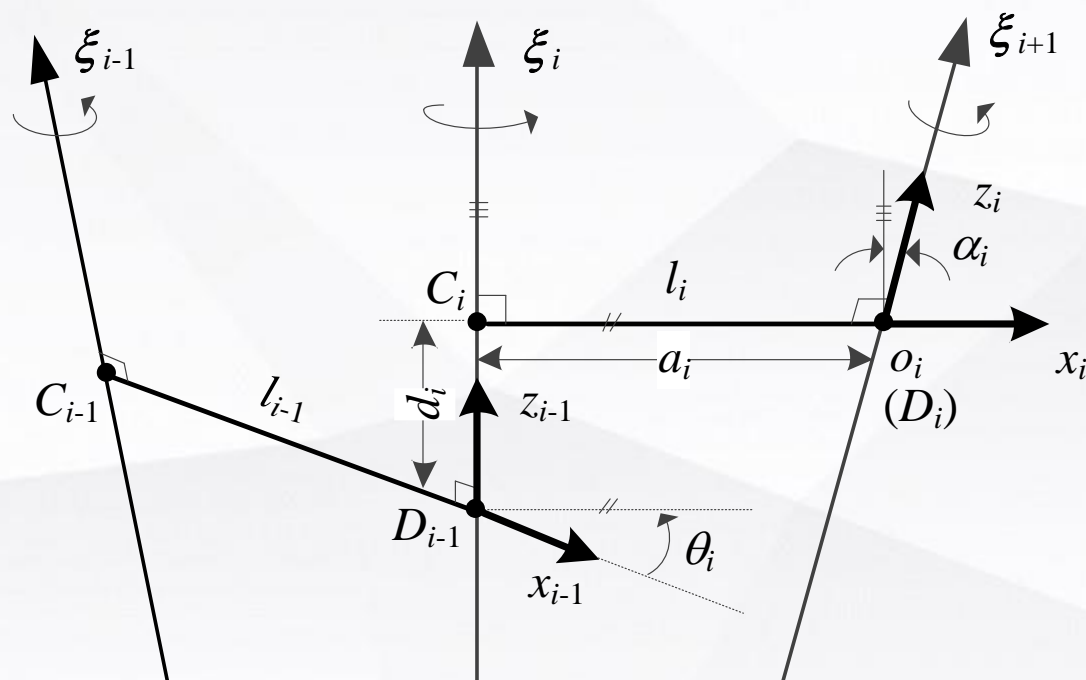
当 $z_{n-1}$ 轴垂直于臂展方向时



## 4.3.6 机器人正运动学

### ◆ D-H参数表示 (上述4个连杆参数)

- $a_i$ : 从 $z_{i-1}$ 轴和 $x_i$ 轴的交点到第 $i$ 坐标系原点沿 $x_i$ 轴的偏置距离
- $\alpha_i$ : 统 $x_i$ 轴由 $z_{i-1}$ 轴转向 $z_i$ 轴的偏角
- $d_i$ : 从第 $(i-1)$ 坐标系的原点到 $z_{i-1}$ 轴和 $x_i$ 轴的交点沿 $z_{i-1}$ 轴的距离
- $\theta_i$ : 统 $z_{i-1}$ 轴由 $x_{i-1}$ 转向 $x_i$ 轴关节角



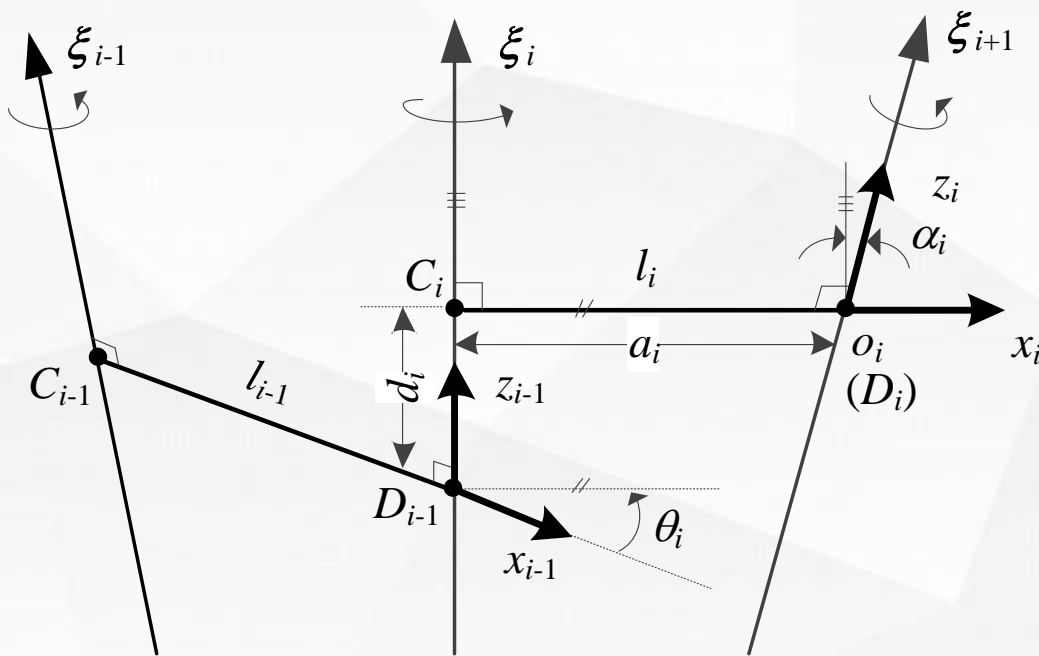
**旋转关节**,  $\theta_i$ 为变量, 其余常数  
**平移关节**,  $d_i$ 为变量, 其余常数

## 4.3.6 机器人正运动学

### ◆ 相邻连杆坐标系间的关系

由此，可知坐标系 $\{i-1\}$ 经过下述变换后与坐标系 $\{i\}$ 重合：

- ① 绕  $z_{i-1}$  旋转角  $\theta_i$ ，则  $x_{i-1}$  与  $x_i$  指向相同  $\Rightarrow T_1 = \text{Rot}(z, \theta_i)$
- ② 沿  $z_{i-1}$  平移距离  $d_i$   $\Rightarrow T_2 = \text{Trans}(0, 0, d_i)$
- ③ 沿  $x_i$  平移  $a_i$ ，则  $o_{i-1}$  与  $o_i$  重合  $\Rightarrow T_3 = \text{Trans}(a_i, 0, 0)$
- ④ 绕  $x_i$  旋转角  $\alpha_i$ ，则  $z_{i-1}$  与  $z_i$  重合  $\Rightarrow T_4 = \text{Rot}(x, \alpha_i)$



## 4.3.6 机器人正运动学

### ◆ 相邻连杆坐标系间的位姿关系——齐次矩阵表示

根据上面的旋转关系，有：

$$\begin{aligned} {}^{i-1}T_i &= T_1 T_2 T_3 T_4 = \overline{\text{Rot}}(z, \theta_i) \overline{\text{Trans}}(0, 0, d_i) \overline{\text{Trans}}(a_i, 0, 0) \overline{\text{Rot}}(x, \alpha_i) \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 4.3.6 机器人正运动学

### ◆ 相邻连杆坐标系间的位姿关系——齐次矩阵表示

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 则从 {0} 系到 {n} 系的位姿关系为（正运动学）

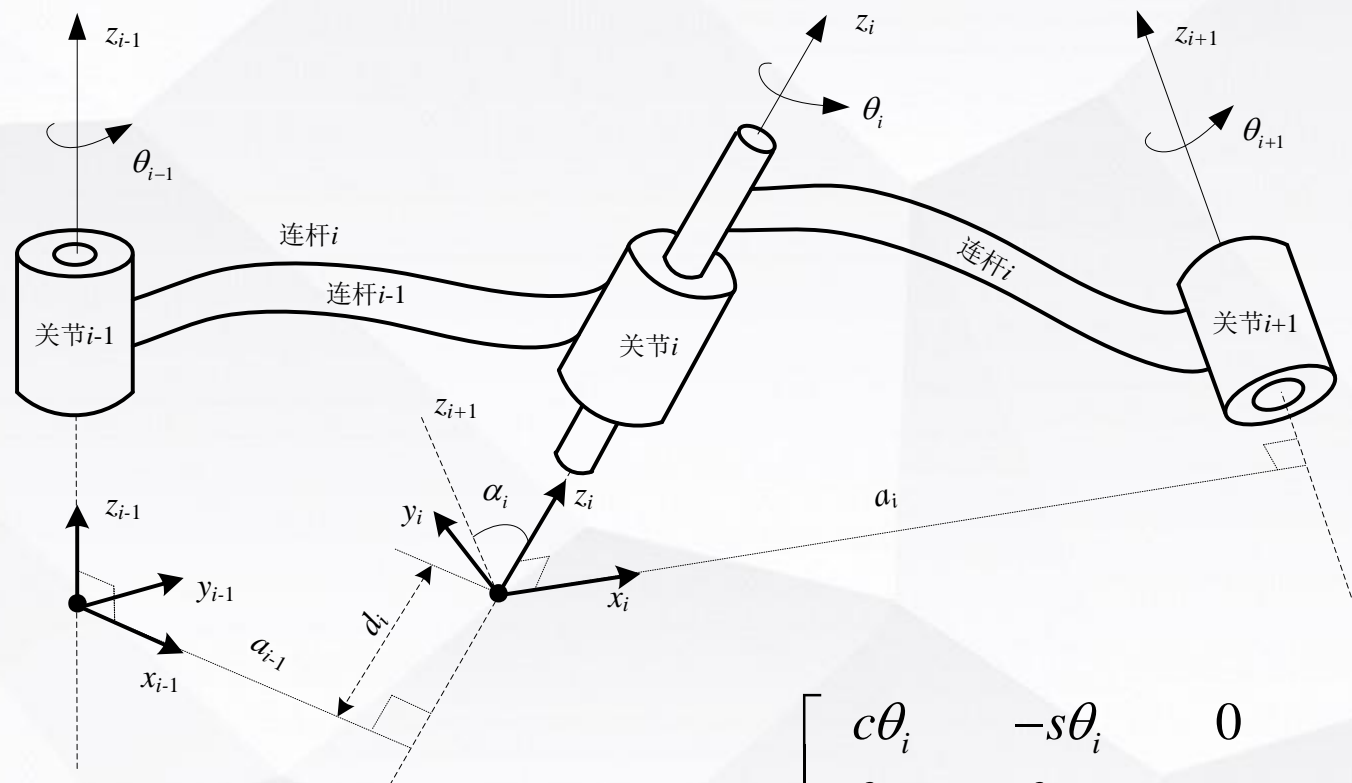
$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n = \text{Fkine}(\boldsymbol{\theta})$$

➤ 当给定  ${}^0T_n$  时，则可解关节角（逆运动学）

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\theta} = \text{Ikine}({}^0T_n)$$

# 补充知识：MDH法

◆ 改造后的D-H表示法(MDH):  $z_i$ 轴指向关节*i*的旋转轴



两两坐标系间的位姿关系为:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_i \\ s\theta_i c\alpha_i & c\theta_i c\alpha_i & -s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\theta_i s\alpha_i & c\theta_i s\alpha_i & c\alpha_i & d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在阅读文献时，需要清楚采用D-H还是MDH，简单的判断是观察 ${}^{i-1}T_i$ 的表达式

# D-H及M-D-H的比较

## ◆ 连杆坐标系z轴与关节旋转轴关系

- DH法:  $z_i$ 轴指向关节 $(i+1)$ 运动轴
- MDH法:  $z_i$ 轴指向关节 $i$ 的运动轴

## ◆ 相邻连杆坐标系之间的齐次变换矩阵不同

➤ DH法:

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ MDH法:

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_i \\ s\theta_i c\alpha_i & c\theta_i c\alpha_i & -s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\theta_i s\alpha_i & c\theta_i s\alpha_i & c\alpha_i & d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 第4章 机器人位置级正运动学

1 机器人运动链及其状态描述

2 机器人运动学基本概念

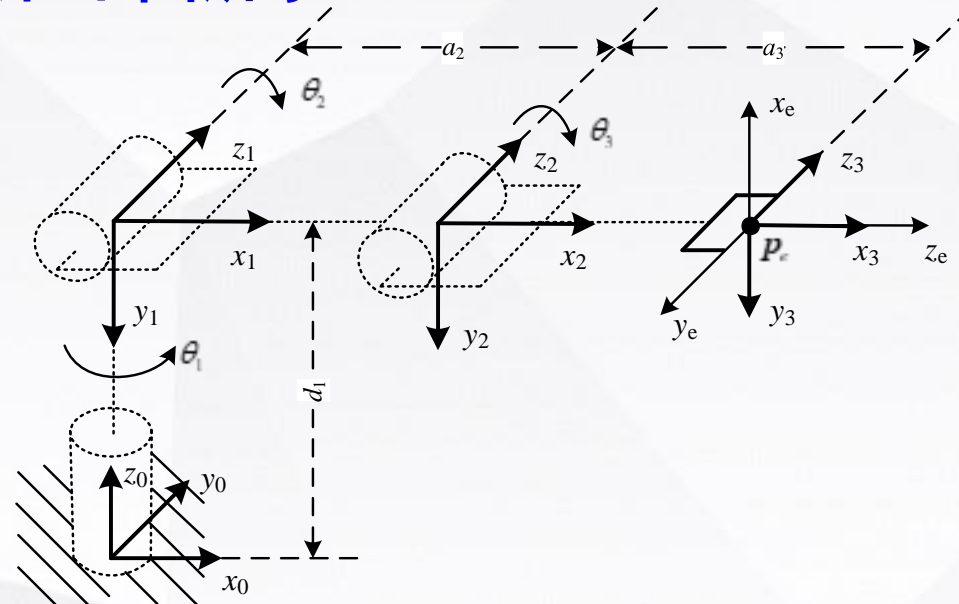
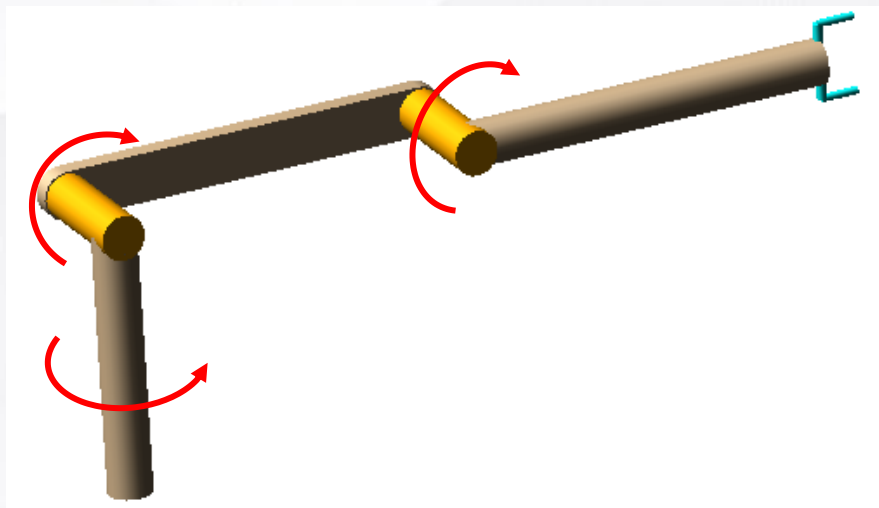
3 机器人运动学建模的D-H法

4 典型机器人正运动学方程

5 机器人工作空间的分析

## 4.4.1 空间3R肘机械臂

◆ D-H坐标系及D-H参数分别如下表和下图所示



D-H参数表

连杆 $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	0	-90	0	$d_1$
2	0	0	$a_2$	0
3	0	0	$a_3$	0



# 3R肘机械臂正运动学方程

➤ 将D-H参数代入后分别得到：

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，位置级正运动学方程为：

$${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

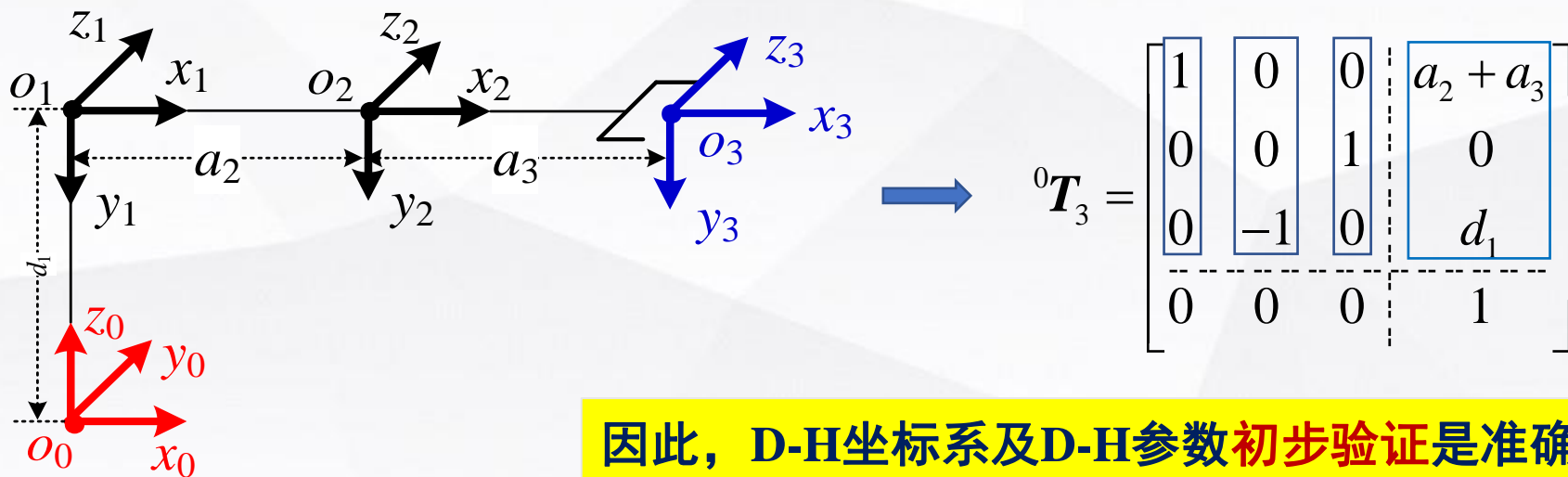
# 3R肘机械臂正运动学方程

## ◆ 直观验证：特例+观察

➤ 特例，将 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ 代入上式，得

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 观察，{3}系各轴及原点在{0}系中的表示，可得



因此，D-H坐标系及D-H参数初步验证是准确的

# 3R肘机械臂正运动学方程

## ◆ 运动特点分析

末端姿态和位置分别表示为：

$${}^0R_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0p_3 = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

### ①根据 $R_3$ 表达式可分析末端姿态的特点

观察 $R_3$ ，各轴指向仅与 $\theta_1$ 和 $(\theta_2 + \theta_3)$ 相关，**仅有两个自由变量**用于确定姿态，无法实现三轴任意指向，**不适合用于定姿**的作业任务。

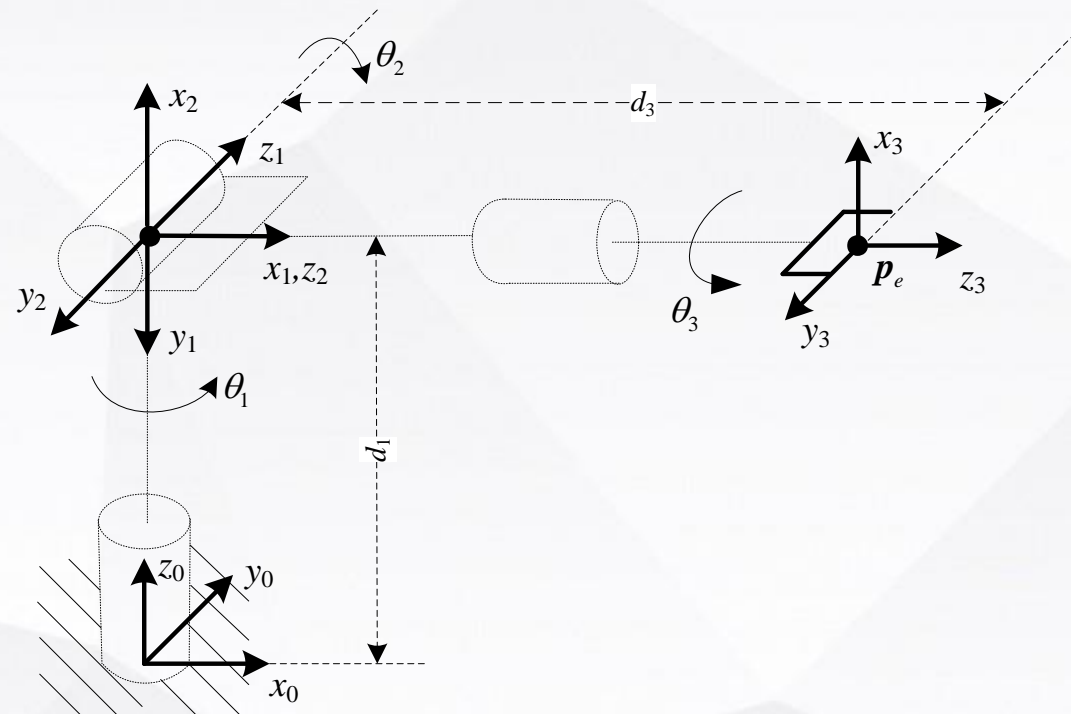
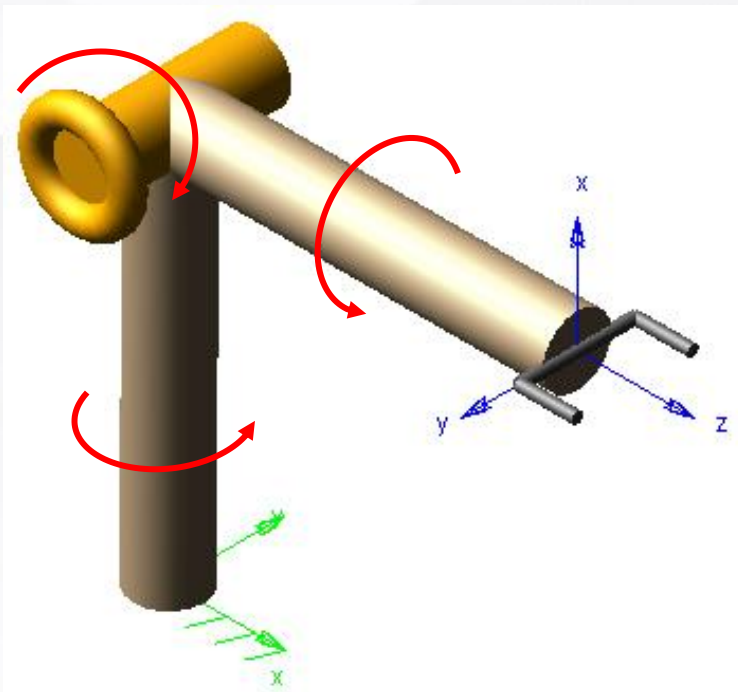
### ②根据 $P_3$ 表达式可分析末端位置的特点

$$p_{3x}^2 + p_{3y}^2 + (p_{3z} - d_1)^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3 \leq (a_2 + a_3)^2$$

可知，末端位于以点 $(0, 0, d_1)$ 为球心、 **$(a_2 + a_3)$ 为半径的球内**。三个角度对末端三轴分量都有独立贡献，**适合用于定位**的作业任务。

## 4.4.2 空间3R球腕机械臂

### ◆ D-H坐标及D-H参数



D-H参数表

连杆 $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	0	-90	0	$d_1$
2	-90	-90	0	0
3	0	0	$a_3$	$d_3$

## 4.4.2 空间3R球腕机械臂

### ➤ 各杆件之间的齐次变换矩阵

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ➤ 正运动学表达式

$${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} s_1s_3 + c_1c_2c_3 & s_1c_3 - c_1c_2s_3 & -c_1s_2 & -d_3c_1s_2 \\ -c_1s_3 + s_1c_2c_3 & -c_1c_3 - s_1c_2s_3 & -s_1s_2 & -d_3s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 & d_1 - d_3c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

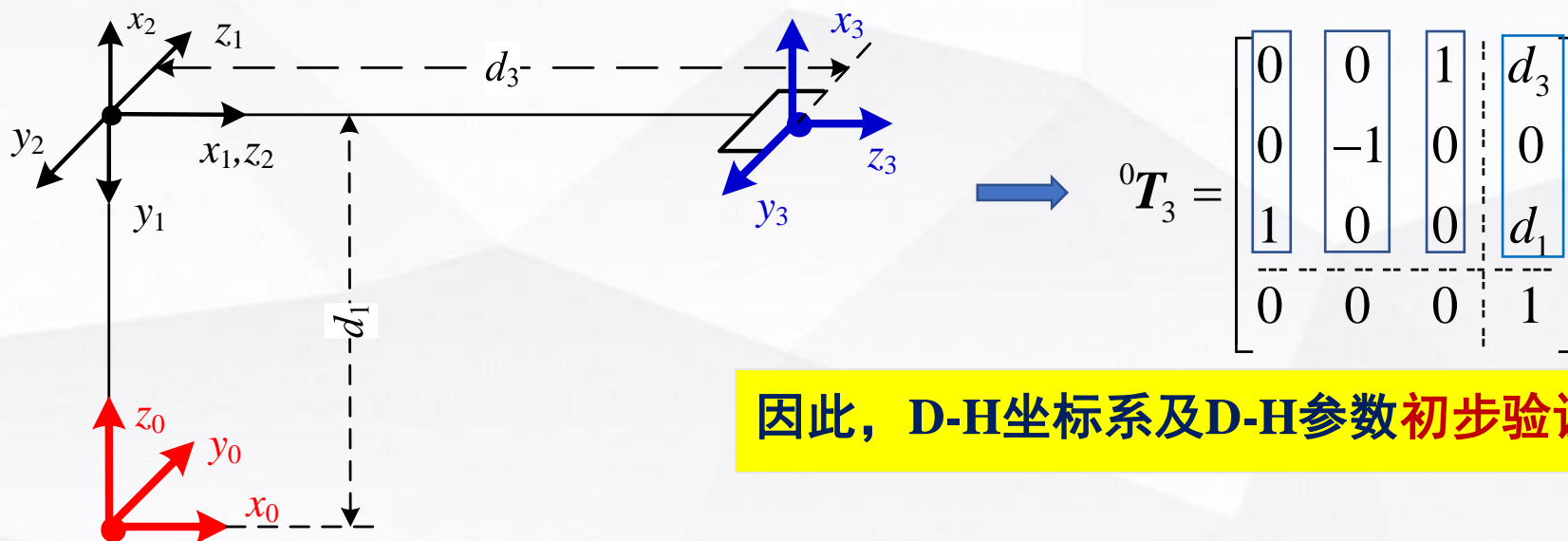
# 空间3R球腕机械臂

## ◆ 直观验证：特例+观察

➤ 特例，将 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=-90$ 、 $\theta_3=0$ 代入上式，得

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} s_1s_3 + c_1c_2c_3 & s_1c_3 - c_1c_2s_3 & -c_1s_2 & -d_3c_1s_2 \\ -c_1s_3 + s_1c_2c_3 & -c_1c_3 - s_1c_2s_3 & -s_1s_2 & -d_3s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 & d_1 - d_3c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 观察，{3}系各轴及原点在{0}系中的表示，可得



因此，D-H坐标系及D-H参数初步验证是准确的

# 空间3R球腕机械臂

## ◆ 运动特点分析

末端姿态和位置分别表示为：

$${}^0R_3 = \begin{bmatrix} s_1s_3 + c_1c_2c_3 & s_1c_3 - c_1c_2s_3 & -c_1s_2 \\ -c_1s_3 + s_1c_2c_3 & -c_1c_3 - s_1c_2s_3 & -s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0p_3 = \begin{bmatrix} -d_3c_1s_2 \\ -d_3s_1s_2 \\ d_1 - d_3c_2 \end{bmatrix}$$

### ①根据 $R_3$ 表达式可分析末端姿态的特点

观察 $R_3$ ，各轴指向与 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 相关，**三个自由变量都**用于确定姿态，可实现三轴任意指向，**适合用于定姿**的作业任务。

### ②根据 $P_3$ 表达式可分析末端位置的特点

$$p_{3x}^2 + p_{3y}^2 + (p_{3z} - d_1)^2 = (-d_3c_1s_2)^2 + (-d_3s_1s_2)^2 + (-d_3c_2)^2 = d_3^2$$

可知末端位于以点 $(0, 0, d_1)$ 为球心、 **$d_3$ 为半径的球面上**。再观察表达式，仅 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 两个角度对末端位置有贡献，**不适合用于定位**的作业任务。

# 第4章 机器人位置级正运动学

1 机器人运动链及其状态描述

2 机器人运动学基本概念

3 机器人运动学建模的D-H法

4 典型机器人正运动学方程

5 机器人工作空间的分析



## 4.5.1 机器人工作空间分析常用方法

### ◆ 机器人工作空间的通用计算方法

#### ➤ 几何法

根据几何关系直接绘出（每个关节运动一周扫出一个圆）

#### ➤ 数值法1——全局遍历

遍历关节空间所有数据组合，采用正运动学直接计算，多重循环

#### ➤ 数值法2——随机分布

基于蒙特卡洛原理，采用正运动学直接计算

## 4.5.2 几何法

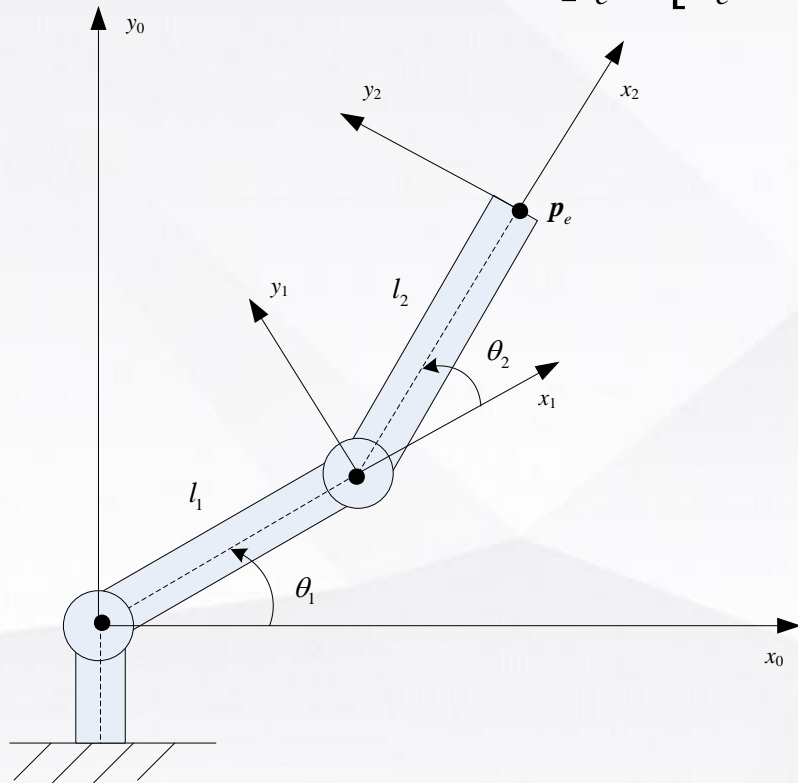
### ◆ 几何法——平面2R机械臂举例

关节状态:

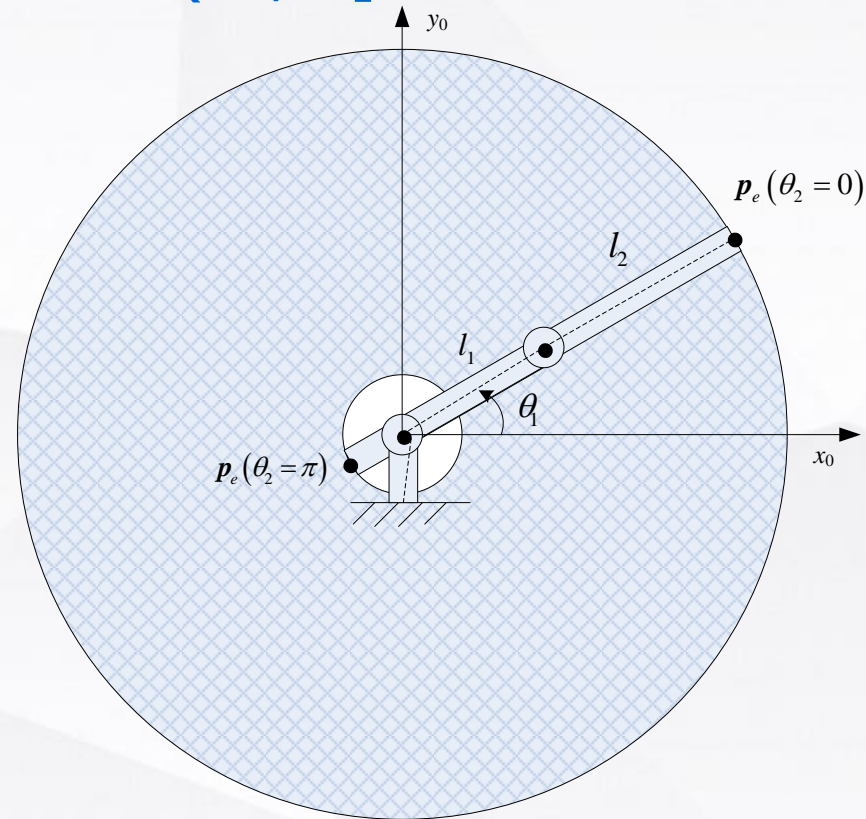
$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$$

机械臂末端状态:

$$\mathbf{p}_e = [x_e, y_e]^T$$



约束条件: 关节角范围均为  $(-\pi, \pi]$



## 4.5.2 几何法

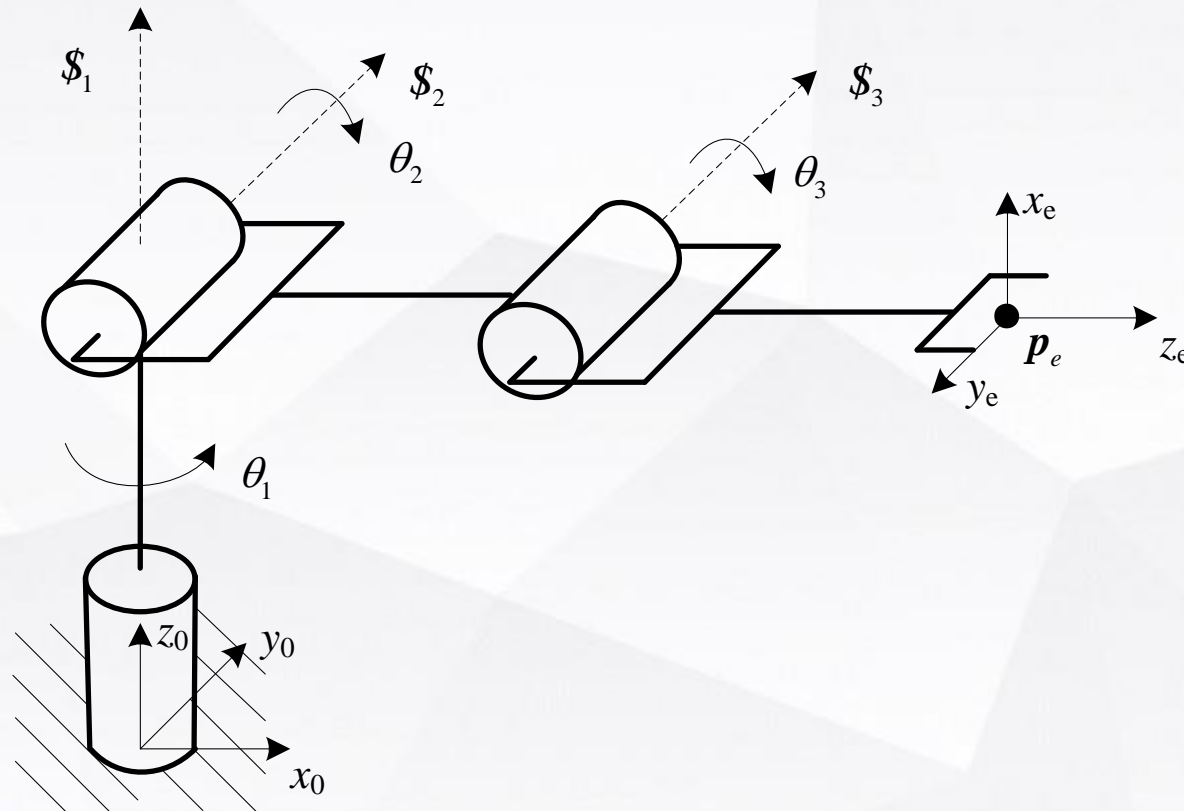
### ◆ 空间3R肘机械臂举例

关节状态:  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$

约束条件: 关节角范围均

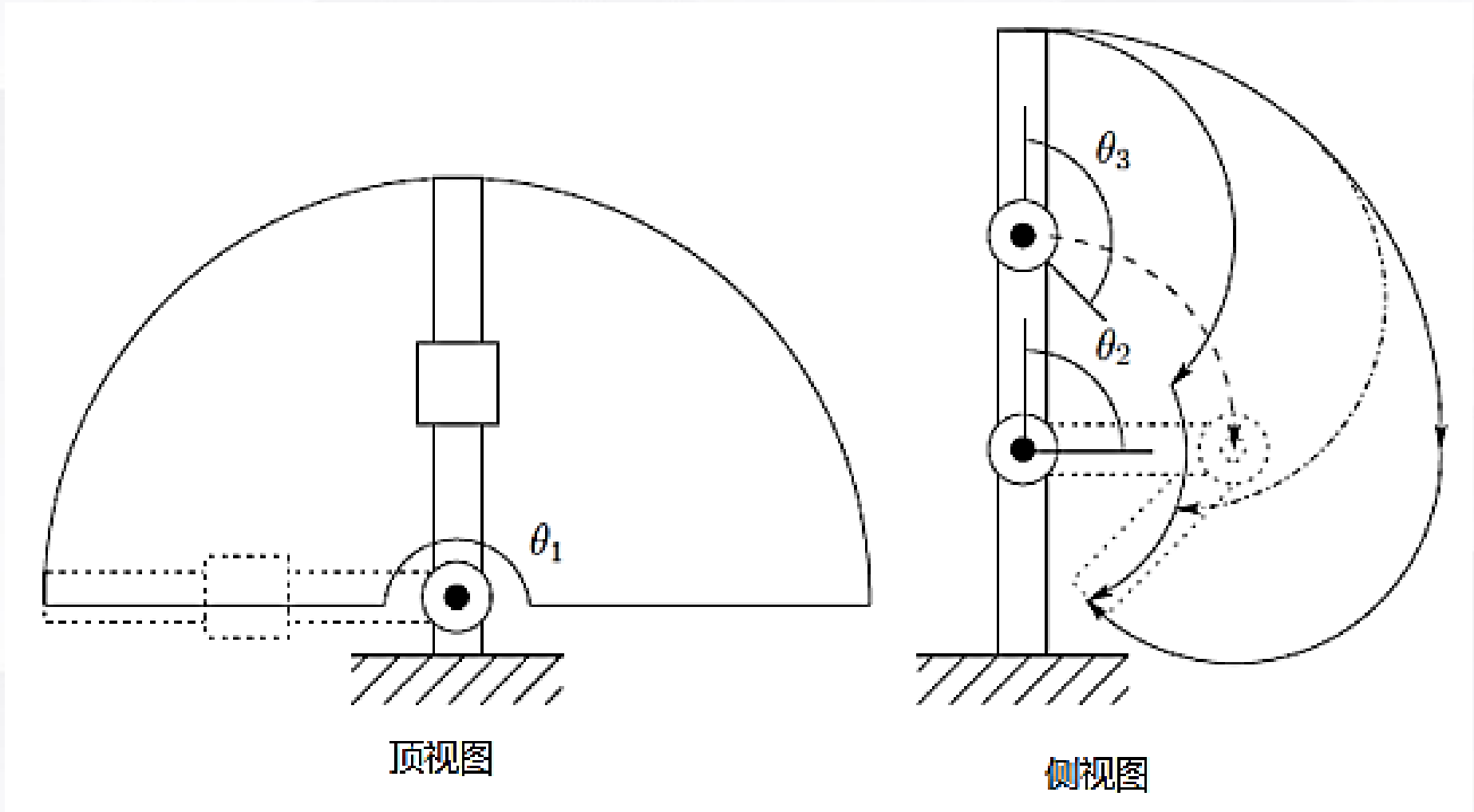
机械臂末端状态:  $p_e = [x_e, y_e, z_e]^T$

为 $(-\pi, \pi]$



## 4.5.2 几何法

### ◆ 空间3R肘机械臂 workspace 分析结果



## 4.5.3 数值法

### ◆ 数值法1——全空间遍历计算正运动

遍历关节空间所有数据组合，采用正运动学直接计算，多重循环

```
for q1=-pi: dq: pi
    for q2 = -pi: dq: pi
        .....
        for qn = -pi: dq: pi
            Pe = fkine(q1, q2, ..., qn)
        end
    end
    .....
end
```

## 4.5.3 数值法

### ◆ 数值法2——蒙特卡罗法

基于蒙特卡洛原理，采用正运动学直接计算

**蒙特卡罗（Monte Carlo）方法**，又称随机抽样或统计试验方法，以概率和统计理论方法为基础的一种计算方法，是使用随机数（或更常见的伪随机数）来解决很多计算问题的方法。

核心公式：

(1) 对每个关节变量，在其规定的范围内，随机抽取N个值

$$q_i = q_{\min} + (q_{\max} - q_{\min}) \times \text{RAND}(N, 1) \quad (i=1, \dots, n)$$

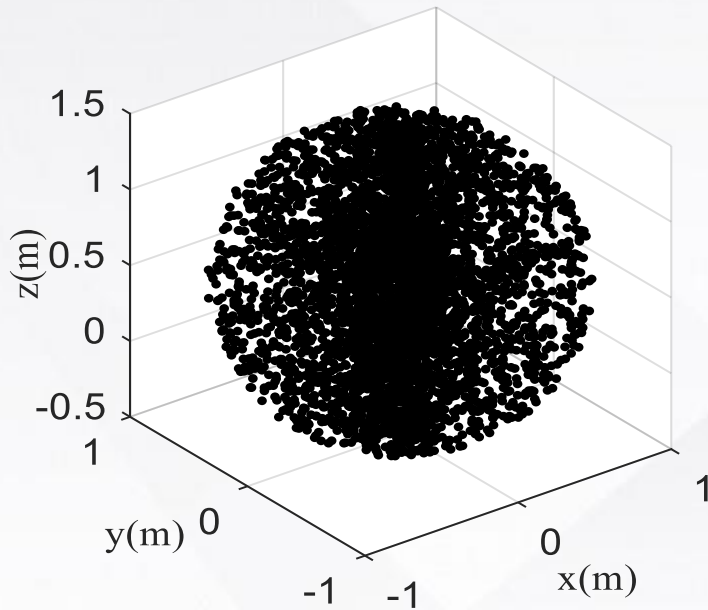
(2) 对所有角度组合，采用循环（多重循环）语句依次将各关节变量值组合代入运动学正解方程

$$P_e = \text{fkine}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

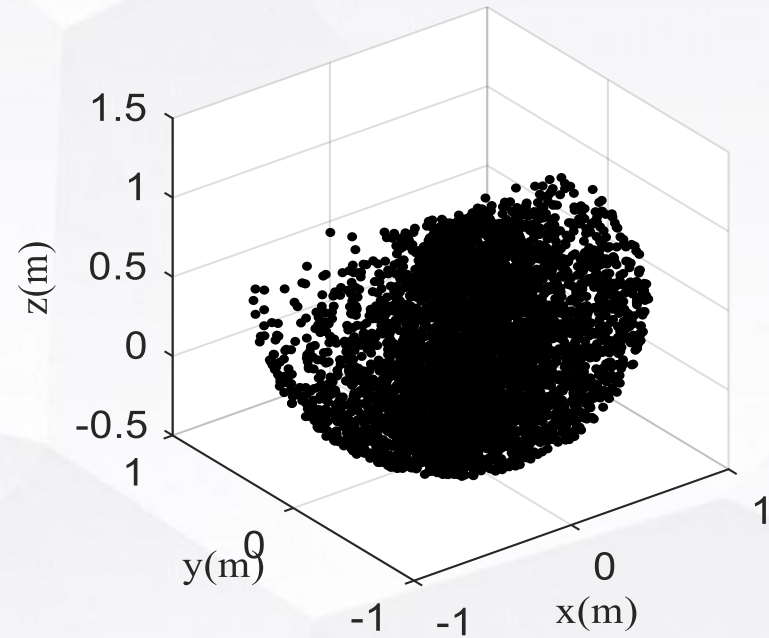
## 4.5.3 数值法

### ◆ 3R肘机械臂 workspace 分析结果

基于蒙特卡洛原理，采用正运动学直接计算



每个关节范围为 $[-180^\circ, 180^\circ]$

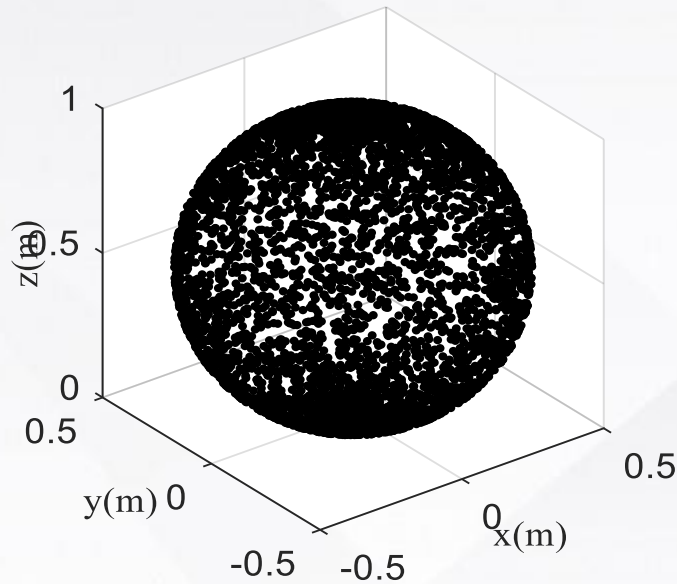


每个关节范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$

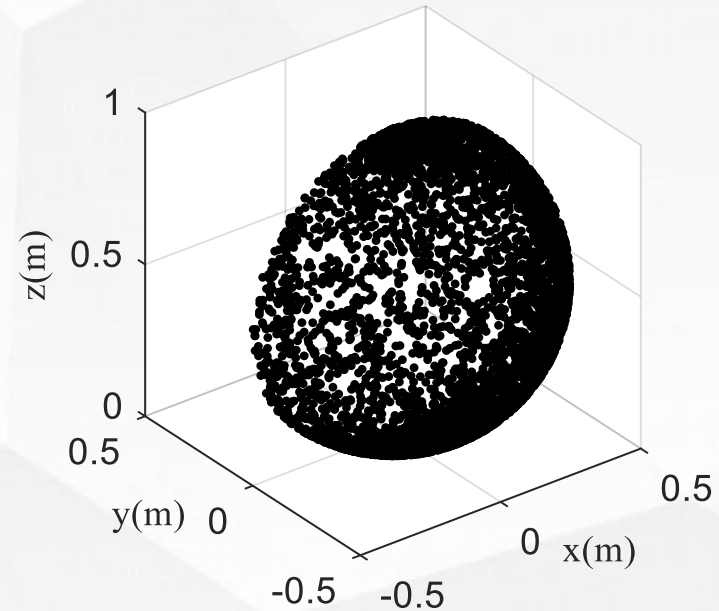
## 4.5.3 数值法

### ◆ 3R球腕机械臂 workspace 分析结果

基于蒙特卡洛原理，采用正运动学直接计算



每个关节范围为 $[-180^\circ, 180^\circ]$



每个关节范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$

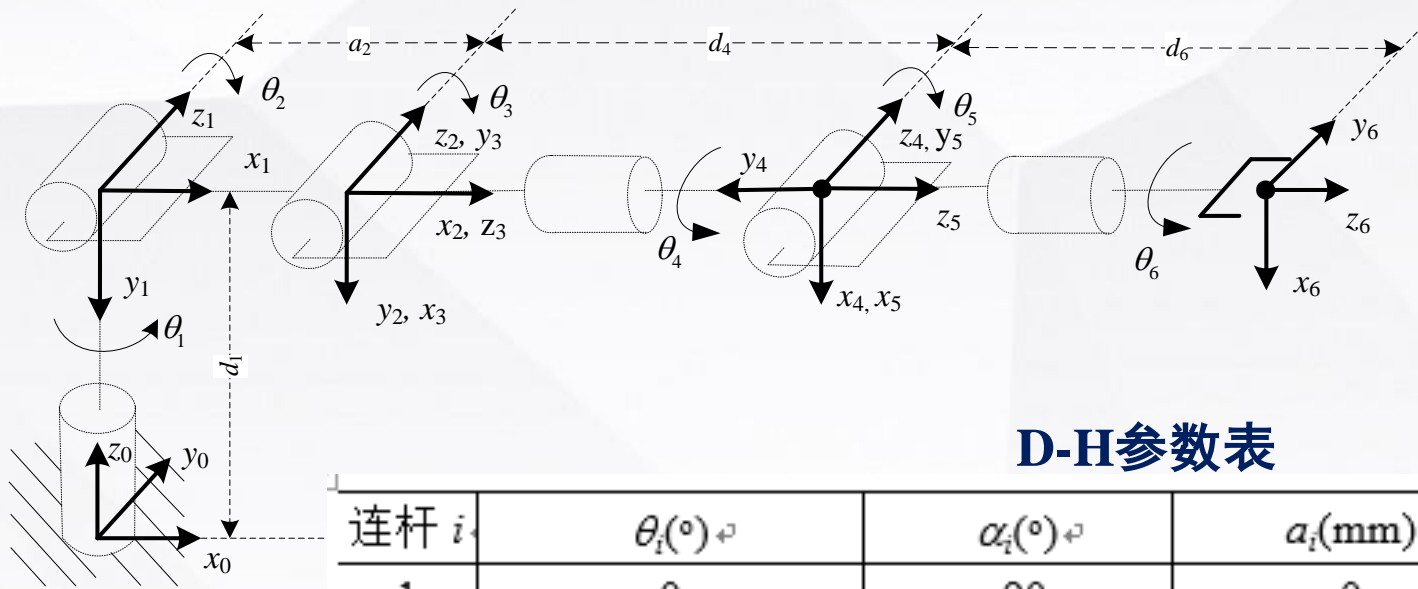




谢谢!

# 附录：空间6R腕部分离机械臂

## ➤ D-H坐标系及其参数表



D-H参数表

连杆 $i$	$\theta_i(^{\circ})$	$\alpha_i(^{\circ})$	$a_i(\text{mm})$	$d_i(\text{mm})$
1	0	-90	0	$d_1$
2	0	0	$a_2$	0
3	90	90	0	0
4	0	-90	0	$d_4$
5	0	90	0	0
6	0	0	0	$d_6$

# 附录： 空间6R腕部分离机械臂

## ➤ 正运动学方程

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^5T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n_x = -[c_1 s_{23} s_5 + (s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4) c_5] c_6 - (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) s_6$$

$$n_y = -[s_1 s_{23} s_5 - (c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4) c_5] c_6 + (c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4) s_6$$

$$n_z = -(c_{23} s_5 + s_{23} c_4 c_5) c_6 + s_{23} s_4 s_6$$

$$o_x = [c_1 s_{23} s_5 + (s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4) c_5] s_6 - (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) c_6$$

$$o_y = [s_1 s_{23} s_5 - (c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4) c_5] s_6 + (c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4) c_6$$

$$o_z = (c_{23} s_5 + s_{23} c_4 c_5) s_6 + s_{23} s_4 c_6$$

$$a_x = c_1 s_{23} c_5 - (s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4) s_5$$

$$a_y = s_1 s_{23} c_5 + (c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4) s_5$$

$$a_z = c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5$$

$$p_x = a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 [c_1 s_{23} c_5 - (s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4) s_5]$$

$$p_y = a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 [s_1 s_{23} c_5 + (c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4) s_5]$$

$$p_z = d_1 - a_2 s_2 + d_4 c_{23} + d_6 (c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5)$$