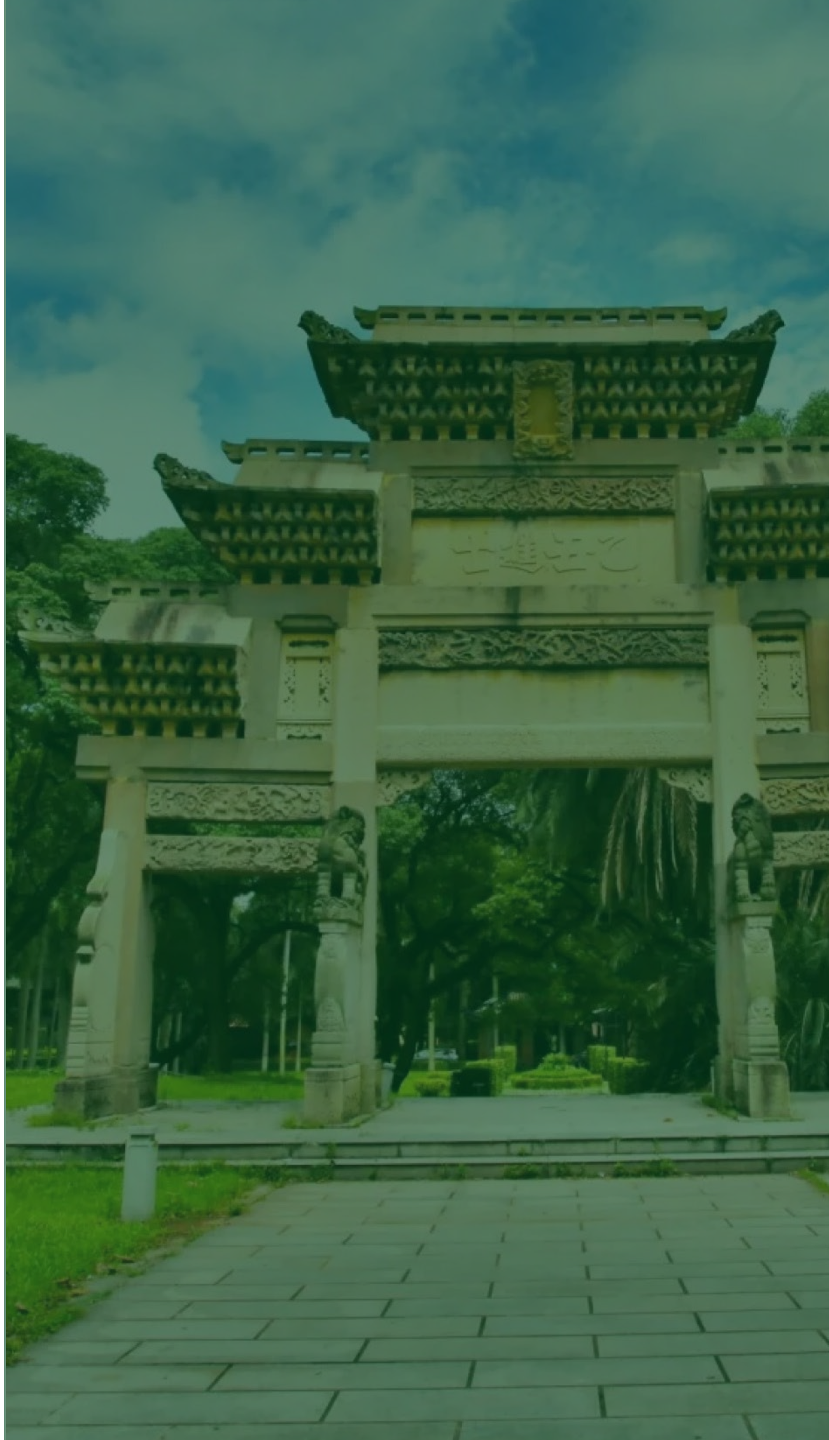
第二十九讲
数学期望的性质



数学期望的性质：

1.设c是常数，则有$E(c)=c$；

2.设X是一个随机变量，c是常数，则有$E(cX)=cE(X)$；

3.设X，Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

将上面三点合起来，则有$\boldsymbol{E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c}$；

可推广到任意有限个随机变量线性组合的情况：

$\boldsymbol{E(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_i X_i)=c_0+\sum_{i=1}^{n}c_i E(X_i)}$.

4.设X，Y是**相互独立**的两个随机变量，则有

$$\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)};$$

可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况：

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right),$$

其中$X_i, i=1,2,\ldots,n$，相互独立.

证明：

1.c是常数，$P(X=c)=1, E(c)=E(X)=c\times 1=c.$

下面仅对连续型随机变量给予证明（设$X\sim f_X(x),(X,Y)\sim f(x,y)$）

（利用随机变量函数的数学期望的两个定理来证）

2.$E(cX)=\int_{-\infty}^{+\infty} c\,x\cdot f_X(x)dx=c\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)dx=cE(X).$

3.$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)dxdy$$

$=\ E(X)+E(Y).$

$$4.E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,yf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y).$$

数学期望的性质：

1.设c是常数，则有$E(c) = c$；

2.设X是一个随机变量，c是常数，则有$E(cX) = cE(X)$；

3.设X，Y是两个随机变量，则有$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$；

将上面三点合起来，则有$E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c$；

4.设X，Y是相互独立的两个随机变量，则有

$E(XY) = E(X)E(Y).$

◆例1:

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，证明：$E(X)=\mu.$

证明：令$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$，则Z服从标准正态分布，且$E(Z)=0.$

此时$X=\mu+\sigma Z$，

故$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=E(\mu)+E(\sigma Z)$

$=\mu+\sigma E(Z)=\mu+\sigma\cdot 0=\mu.$

即服从$N(\mu,\sigma^2)$的随机变量的期望为$\mu.$

◆ **例2** 将4个不同色的球随机放入4个盒子中，每盒容纳球数无限，求空盒子数的数学期望.

解一 **设X为空盒子数，则X的概率分布为：**

X	0	1	2	3
P	$\frac{4!}{4^4}$	$\frac{C_4^1 C_3^1 P_4^2}{4^4}$	$\frac{C_4^2(C_4^2 + C_2^1 C_4^3)}{4^4}$	$\frac{C_4^1}{4^4}$

$$E(X) = \frac{81}{64}$$

解二 再引入 $X_i, i = 1,2,3,4$

$$X_i = \begin{cases} 1, 第i盒空 \\ 0，其他 \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

X_i	1	0
P	$(\frac{3}{4})^4$	$1 - (\frac{3}{4})^4$

$$E(X_i) = (\frac{3}{4})^4$$

$$E(X) = 4 \times E(X_i) = \frac{81}{64}$$

◆**例3：** 设$X \sim B(n,p)$，$0 < p < 1, n \geq 1$，求$E(X)$.

解：由题意知随机变量X可看成是n重伯努里试验中事件A发生的次数此时$P(A) = p$.引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1 & A\text{在第}k\text{次试验发生;} \\ 0 & A\text{在第}k\text{次试验不发生,} \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots,n$$

注：以n，p为参数的二项分布的随机变量，可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的（0-1）分布的随机变量之和

◆**例3：** 设$X\sim B(n,p)$，$0<p<1, n\geq 1$，求$E(X)$.

于是$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立服从同一$(0-1)$分布（参数为p），$E(X_k)=p, \forall k$,

且$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

即$E(X) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = np$,

即服从$B(n,p)$的随机变量的期望为np.

注： 以n，p为参数的二项分布的随机变量，可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的（0-1）分布的随机变量之和.

◆ **例4：**（配对问题）一个小班有n个同学，编号为1，2，…，n号，中秋节前每人准备一件礼物，相应编号为1，2，…，n.将所有礼物集中放在一起、然后每个同学随机取一件，若取到自己的礼物，就认为配对成功.以X表示n个同学配对成功的个数求$E(X)$.

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{号同学配对成功；}\\ 0 & \text{第}i\text{号同学未配对成功，}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{号同学配对成功；}\\ 0 & \text{第}i\text{号同学未配对成功，}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

易知：$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，且X_i服从**0-1分布**，

参数为$\frac{1}{n}$

故$E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}=1.$

注：X不服从二项分布！（不相互独立）

本题是将X分解成数个随机变量之和然后**利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望**这种处理方法具有一定的普遍意义

注　性质 4 的逆命题不成立，即

若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y 不一定独立

反例

P_{ij} Y \ X	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
$p_{i\cdot}$	3/8	2/8	3/8	

XY	-1	0	1
P	2/8	4/8	2/8

$$E(X) = E(Y) = 0; \quad E(XY) = 0;$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

但

$$P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8}$$

$$\neq P(X = -1)P(Y = -1) = (\frac{3}{8})^2$$

独立性不成立！

例5： 计算机程序随机产生0~9中的数字，独立进行100次，记X_i为第i次产生的数字，$i=1,2,\ldots,100$.将这100个数进行乘积运算，得到一数，记为Y，求$E(Y)$.

解：由题意知$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$，独立同分布，其分布律均为

$$P\{X_i=k\}=1/10, k=0,1,\ldots,9.$$

例4： 计算机程序随机产生0~9中的数字，独立进行100次，记X_i为第i次产生的数字，$i=1,2,\dots,100$.将这100个数进行乘积运算，得到一数，记为Y，求$E(Y)$.

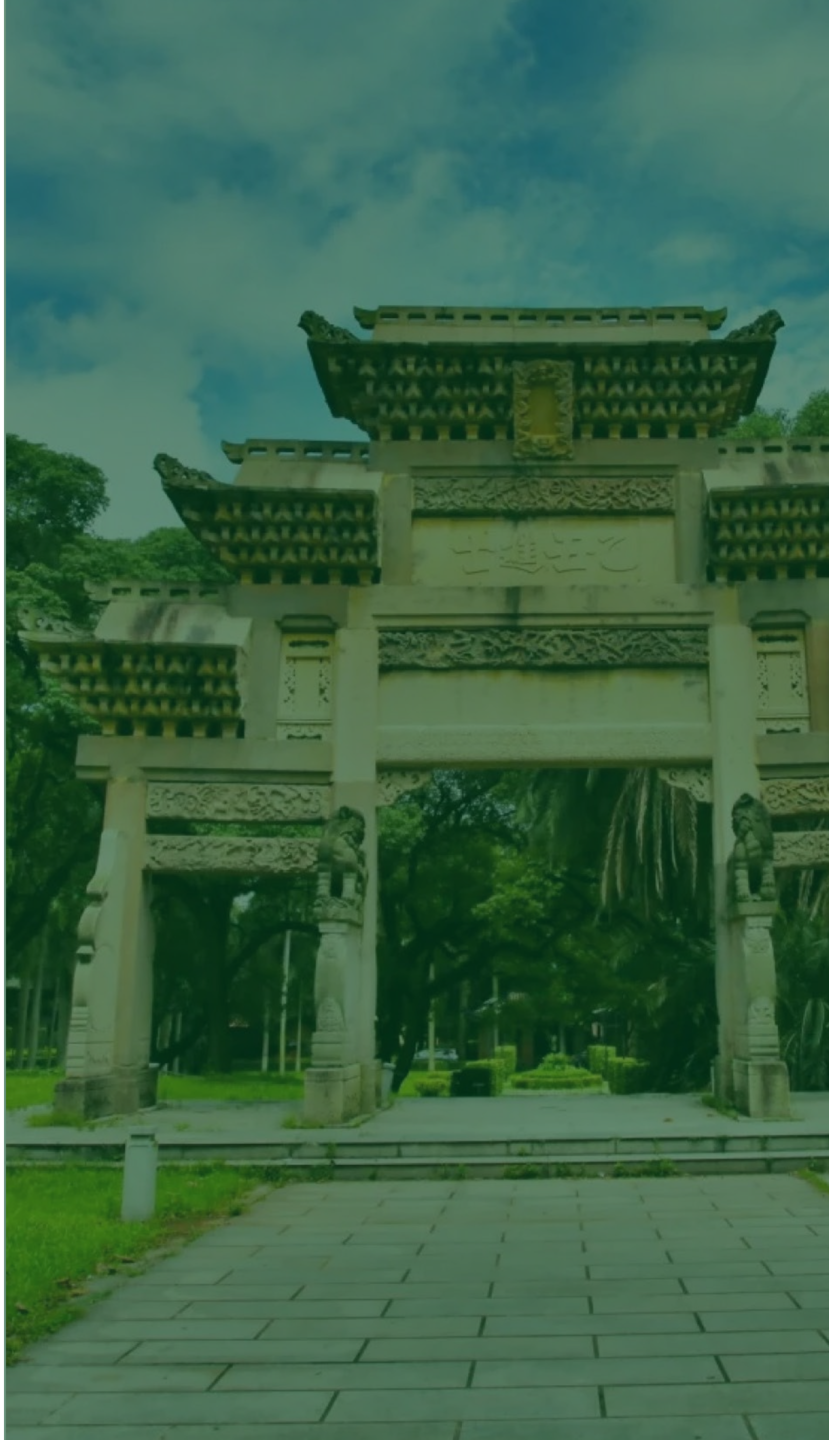
解：由题意知$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$，独立同分布，其分布律均为$P\{X_i=k\}=1/10,k=0,1,\dots,9$.

故$E(X_i)=\sum_{k=0}^{9}k\cdot\frac{1}{10}=4.5$，又$Y=X_1X_2\cdots\cdots X_{100}=\prod_{i=1}^{100}X_i$

从而 $E(Y)=E(\prod_{i=1}^{100}X_i)=\prod_{i=1}^{100}E(X_i)=4.5^{100}$.

THE END

第三十讲
方差定义和计算公式



引例 甲、乙两射手各打了6 发子弹，每发子弹击中的环数分别为:

甲	10	7	9	8	10	6
乙	8	7	10	9	8	8

问哪一个射手的技术较好?

解 首先比较平均环数

$\overline{甲} = 8.3,\qquad \overline{乙} = 8.3$

再比较稳定程度

甲： $2\times(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+(8-8.3)^2]$

$+(7-8.3)^2+(6-8.3)^2]=13.34$

乙： $(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+3\times(8-8.3)^2$

$+(7-8.3)^2=5.34$

乙比甲技术稳定，故乙技术较好.

进一步比较平均偏离平均值的程度

甲 $\frac{1}{6}[2 \times (10-8.3)^2+(9-8.3)^2+(8-8.3)^2+(7-8.3)^2+(6-8.3)^2$

$= 13.34/6 = 2.22$

乙 $\frac{1}{6}[(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+3\times(8-8.3)^2+(7-8.3)^2]$

$= 5.34/6 = 0.89$

$E[X-E(X)]^2$

方差

随机变量X的**均值**：$E(X)$

X对于均值的**离差**：$X-E(X)$

X对于均值的**平均离差**：$E(X-E(X))$

反映**随机变量波动性**可以用：$E[X-E(X)]^2$

方差

定义：

设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称其为X的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

$$\boxed{D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}}$$

将$\sqrt{D(X)}$记为$\sigma(X)$，称为X的**标准差**或**均方差**.

$D(X)$和$\sigma(X)$刻画了X取值的波动性，是衡量X取值分散程度的数字特征.若$D(X)$较小，则X取值比较集中；反之，若$D(X)$较大；则说明X取值比较分散。

注意到，当取$g(x)=[x-E(X)]^2$，则$D(X)=E(g(X))$

- 对于**离散型随机变量**X，其分布律为

$$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\ldots,$$

则 $\boxed{D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2\,p_i\,;}$

- 对于**连续型随机变量**X，其概率密度函数为$f(x)$，

则$\boxed{D(X)=\int_{\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\,f(x)dx.}$

利用数学期望的性质，可得方差的计算公式:

$$\boxed{\boldsymbol{D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}}$$

可用于离散和连续型随机变量

事实上，$D(X) = E[X - E(X)]^2$

$$= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

例1： 设随机变量X具有0-1分布，其分布律为：

$P(X=0)=1-p, P(X=1)=p$，求$D(X)$.

解：已知$E(X)=p$，且

$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p.$

所以

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$

即0-1分布的期望为p，方差为$p(1-p)$.

◆**例2：** 设$X\sim\pi(\lambda)$，$\lambda>0$，求$D(X)$.

解：X的分布律为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,\cdots\lambda>0;$$

之前，已算得$E(X)=\lambda$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

所以$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda,$

即泊松分布的均值与方差相等，都等于参数λ.

◆**例3：** 设$X\sim U(a,b), a<b$，求$D(X)$.

解：X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$

已知$E(X)=\frac{a+b}{2}$,

$$E(X^2)=\int_{\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+b^2+ab}{3}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{a^2+b^2+ab}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

◆例4： 设$X\sim E(\lambda),\lambda>0$，求$D(X)$.

解：X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$

已知$E(X)=1/\lambda$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=2/\lambda^2,$$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2$，

即对指数分布而言，方差是期望的平方.

◆**例5：** 某人有一笔资金，可投入两个项目A和B.根据以往的经验，两项目的收益率X与Y的分布律如下：

X	50%	-40%
P	0.6	0.4

Y	30%	10%	-20%
P	0.3	0.6	0.1

问：该人应投资哪个项目？

解：先来分析一下两个项目的平均收益率

$$E(X)=50\%\times 0.6+(-40\%)\times 0.4=14\%;$$

$$E(Y)=30\%\times 0.3+10\%\times 0.6+(-20\%)\times 0.1=13\%<E(X).$$

再来计算两个项目的收益率的方差及标准差

$D(X) = (50\%)^2 \times 0.6 + (-40\%)^2 \times 0.4 - (14\%)^2 = 0.1944$;

$D(Y) = (30\%)^2 \times 0.3 + (10\%)^2 \times 0.6 + (-20\%)^2 \times 0.1 - (13\%)^2 = 0.0201$;

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0.441$, $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} \approx 0.142$.

$\sigma(X)$约为$\sigma(Y)$的3倍.

由此可见，项目A的平均收益率虽然比项目B高了1%但是它的投资风险是项目B的3倍，因此权衡收益与风险，该投资者应宜选择项目B.

THE END