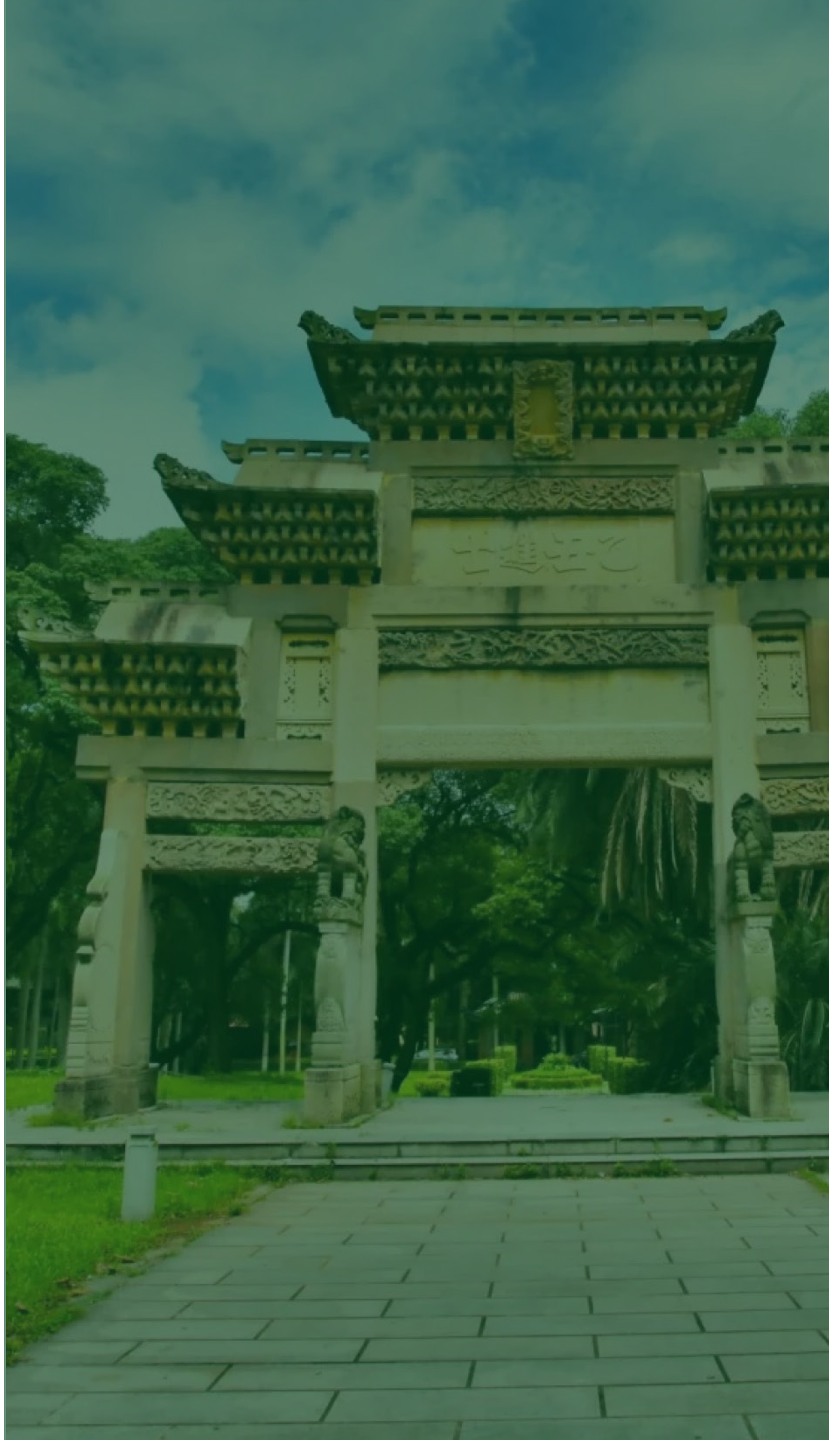
概率论与数理统计

教师：杜亚星

第三十二讲
协方差与相关系数



上一讲中方差性质**3:**

设X, Y是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

特别地,若X与Y相互独立时, 则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

即，若X与Y相互独立时,则$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$

那么 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\neq 0$

$\Downarrow$

X与Y不相互独立

协方差

定义：数值 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

为随机变量X与Y的协方差，记为$Cov(X,Y)$，即

$$\boxed{Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.}$$

此时 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

协方差$Cov(X,Y)$反映了随机变量X与Y的**线性相关性**：

- 当$Cov(X,Y)>0$时，称X与Y**正相关**；
- 当$Cov(X,Y)<0$时，称X与Y**负相关**；
- 当 $Cov(X,Y)=0$时，称X与Y**不相关**.

由于 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

协方差的计算公式:

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

例1：设X, Y相互独立, 且均服从参数为1/2的0−1分布，记 $U=X-Y$, $V=X+Y$,求U与V的协方差.

解：由于 $X\sim B(1,1/2), Y\sim B(1,1/2)$, 且两者独立,则

V \ U	0	1	2
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

$\{U=-1\}=\{X-Y=-1\}=\{X=0,Y=1\}\Rightarrow\{X+Y=1\}=\{V=1\}$

故而$P(U=-1,V=1)=P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=1/4;$

故而$P(U=-1,V=0)=P(U=-1,V=2)=0;$

从而

V \ U	**0**	**1**	**2**	**P(U=i)**
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
P(V=j)	1/4	1/2	1/4	

故 $E(UV)=(-1)\times 1\times 1/4+0\times 0\times 1/4+0\times 2\times 1/4+1\times 1\times 1/4=0;$

$$E(U)=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

因此 $Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=0$

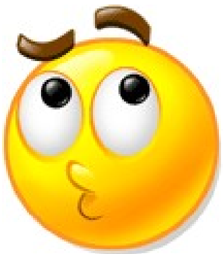
U,V不相关

注意到 $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

协方差的性质：

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$;
2. $Cov(X,X)=D(X)$;
3. $Cov(aX,bY)=ab\cdot Cov(X,Y)$,其中$a,b$为两个实数;
4. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.



思考：

$$(1)\ Cov(3X+2Y,X)=?$$

$$=Cov(3X,X)+Cov(2Y,X)$$

$$=3Cov(X,X)+2Cov(Y,X)=3D(X)+2Cov(X,Y)$$

$$(2)\ D(3X-2Y)=D(3X+(-2Y))$$

$$=D(3X)+D(2Y)+2Cov(3X,-2Y)$$

$$=9D(X)+4D(Y)-12Cov(X,Y)$$

或者利用$Cov(3X-2Y,3X-2Y)$

例2：对于例1：设X, Y相互独立, 且均服从参数为$1/2$的$0-1$分布,记 $U=X-Y$, $V=X+Y$, 利用协方差性质求U与V的协方差.

解：由于 $Cov(U,V)=Cov(X-Y,X+Y)$

$$=Cov(X,X)+Cov(X,Y)+Cov(-Y,X)+Cov(-Y,Y)$$

$$=D(X)+Cov(X,Y)-Cov(Y,X)-D(Y)$$

$$=D(X)-D(Y),$$

而X与Y同分布,因此它们的方差相等, 故

$$Cov(U,V)=0.$$

相关系数

协方差是有量纲的数字特征，为了消除其量纲的影响，引入一个新概念：

定义： 数值

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}}$$

称为随机变量X与Y的**相关系数**，是没有量纲的.

若记标准化变量 $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, Y^* = \dfrac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$

则 $\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*)$

相关系数的性质：

1. $|\rho_{XY}| \le 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$

说明**在概率意义上存在着严格的线性关系**.

特别的，$\rho_{XY} = 1$时, $\mathrm{b} > 0$, $\rho_{XY} = -1$时, $\mathrm{b} < 0$

说明：上面的性质也可写为：

当$D(X)D(Y) \neq 0$时，有$(Cov(X,Y))^2 \le D(X)D(Y)$

其中等号当且仅当X与Y之间有严格的线性关系，

即存在常数a,b, 使$P(Y = a + bX) = 1$.

相关系数是一个用来表征两个随机变量之间线性关系密切程度的特征数，有时也称为“线性相关系数”。

当$|\rho_{XY}|$较大时，表明X与Y的线性关系程度较好；
当$|\rho_{XY}|$较小时，表明X与Y的线性关系程度较差.

特别地，
当$|\rho_{XY}|=1$时，表明X与Y之间以概率1存在线性关系
当$|\rho_{XY}|=0$时，表明X与Y之间没有线性关系，称两个变量不相关.

例3：抛一枚均匀的硬币十次，若令X，Y分别表示出现正面和反面的次数，求X和Y的相关系数ρ_{XY}.

解：由题意知$Y=10-X$,

那么X和Y与相关系数ρ_{XY}为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{Cov(X,10-X)}{\sqrt{D(X)D(10-X)}}=\frac{-D(X)}{\sqrt{D(X)D(X)}}=-1$$

$\because Cov(X,10-X)=Cov(X,10)+Cov(X,-X)=E(X\cdot 10)-E(X)\cdot 10-D(X)$
$=-D(X)$

$D(10-X)=D(X)$

THE END