# 智能机器人技术
# 第9章-工业机器人的建模方法

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io

中山大学智能工程学院
2024-Spring

## 本章内容

1. 参考坐标系
2. 平面内刚体运动
3. 空间内刚体运动
4. 旋转与角速度
5. 刚体运动与运动旋量
6. 力旋量
7. 其他学科应用

## 固定坐标系（Fixed Frame）

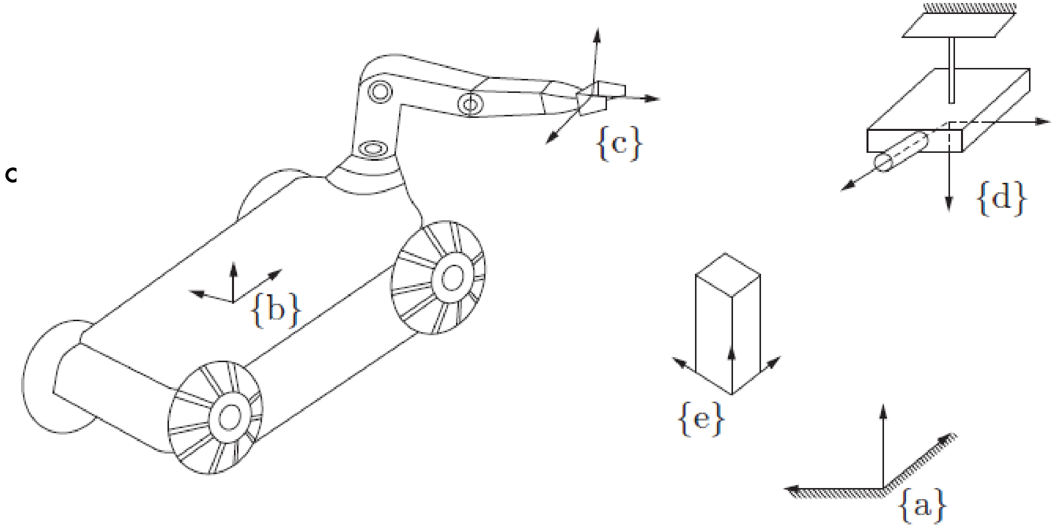
相对静止的坐标系，即空间坐标系（Space Frame），记作$\{s\}$。例如房间的角落。

## 物体坐标系（Body Frame）

附着在某一运动物体上的随动坐标系，记作$\{b\}$。
例如房间内飞行的四旋翼无人机体上。

！！注意：这里所有坐标系都是静止的惯性坐标系。随动指在任意时刻，物体坐标系是一个瞬时与刚体随动坐标系相重合的静止坐标系。

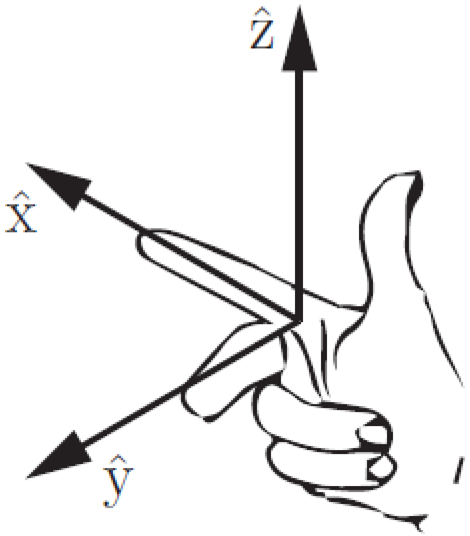
！！注意：本节课所有坐标系都是静止的！

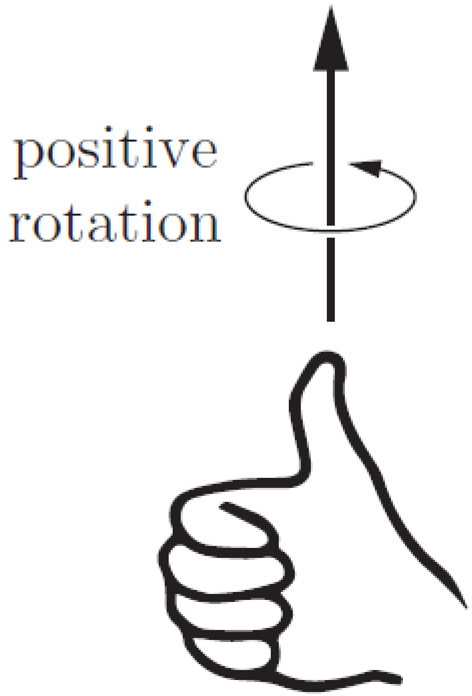



图：{a} 系为固定坐标系，放置于房间某处；{b} 系为智能车的物体坐标系，固定于车身某处；{c} 系…

## 右手定则

1. X、Y、Z轴的顺序，为如图所示的食指、中指、大拇指。
2. 正向转动的转轴方向：当拇指指向轴线时，右手卷曲的方向。




## 叉积（Cross Product）

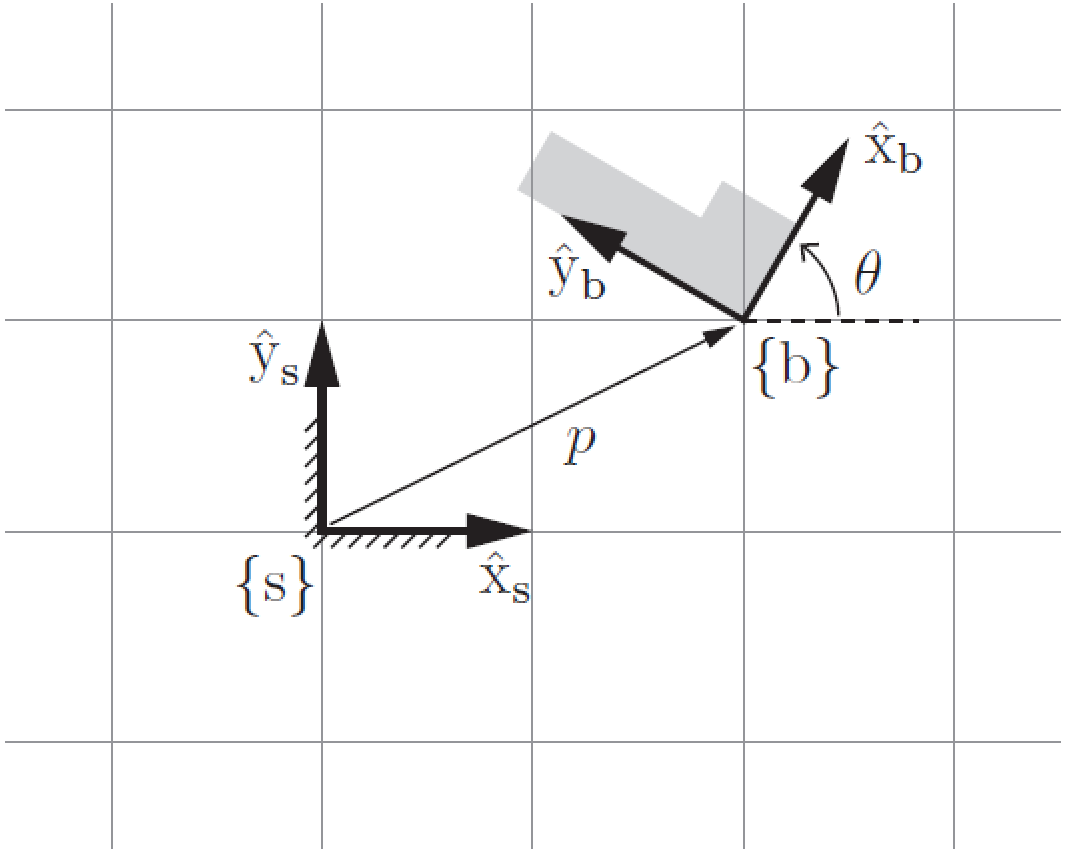
X、Y、Z方向的向量，也符合右手定则。

$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x},\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

$$\hat{x}\times\hat{z}=-\hat{y},\hat{z}\times\hat{y}=-\hat{x},\hat{y}\times\hat{x}=-\hat{z}$$

# 2 平面内刚体运动

➤ 物体坐标系$\{b\}$可用相对固定坐标系$\{s\}$原点的向量$p$和表示方向的单位坐标轴$\hat{x}_b$、 $\hat{y}_b$表示。图中，$p=(2,1)$，$\theta=60°$。




➤ 观察可知， $\{b\}$系的单位向量：

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}}=(\cos\theta,\sin\theta)=(0.5,1/\sqrt{2})$$

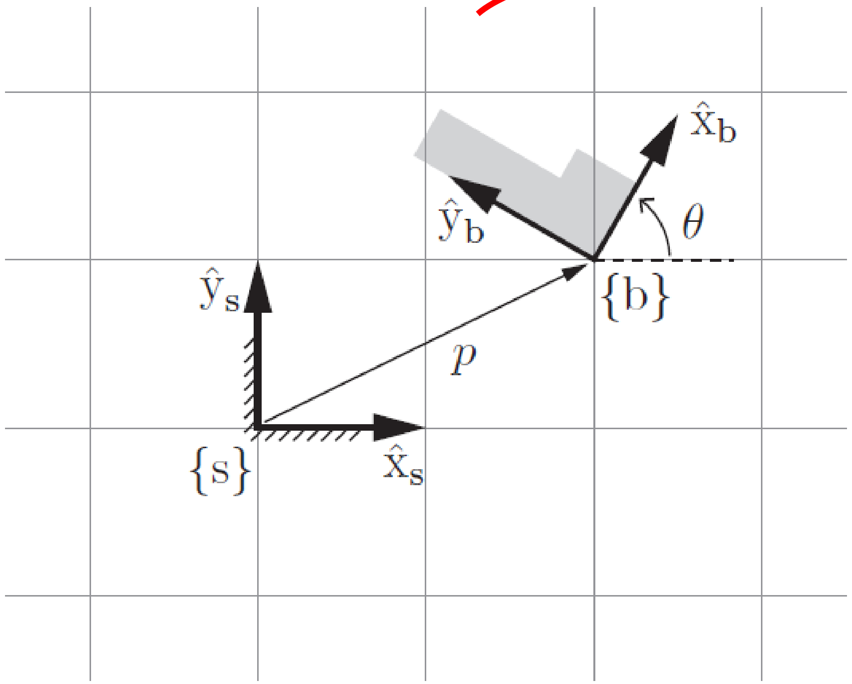
$$\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}}=(-\sin\theta,\cos\theta)=(-1/\sqrt{2},0.5)$$

➤ 为描述平面刚体的位形/位姿，只需要给出$\{b\}$系相对于$\{s\}$系的位置和姿态：

1. $\{b\}$系在$\{s\}$系中表示位置的向量：

$$p=p_x\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}}+p_y\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}}.$$

注意：上式清晰地反映了向量$p$所在的坐标系。




2. $\{b\}$系相对于$\{s\}$系的姿态：

- 最简单的方法是用转角$\theta$
- 或者，给出$\{b\}$单位坐标轴相对于$\{s\}$单位坐标轴的方法，即：

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_b &= \cos\theta\,\hat{x}_s + \sin\theta\,\hat{y}_s, \\
\hat{y}_b &= -\sin\theta\,\hat{x}_s + \cos\theta\,\hat{y}_s.
\end{aligned}
$$

1. $\{b\}$系在$\{s\}$系中表示位置的向量：

$$p = p_x \hat{x}_s + p_y \hat{y}_s.$$

- ➢ 看似没有用角度直观，但若在3维空间中，就需要3个角度来描述。
- ➢ 使用参考坐标系的方法则会更加通用与简单。

$$\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{b} = \cos\theta\,\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{s} + \sin\theta\,\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{s},$$
$$\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{b} = -\sin\theta\,\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{s} + \cos\theta\,\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{s}.$$

- 点$p$可以写作列向量$p \in \mathbb{R}^2$：

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

- 单位向量 $\hat{x}_b$和 $\hat{y}_b$ 也可以写作列向量，应组成$2 \times 2$的矩阵：

$$R = [\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{b} \;\; \hat{\mathrm{y}}_\mathrm{b}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

矩阵$R$表示的就是旋转矩阵。

- $\{b\}$系相对于$\{s\}$系的位姿，组合（1）与（2）形成$(R, p)$。

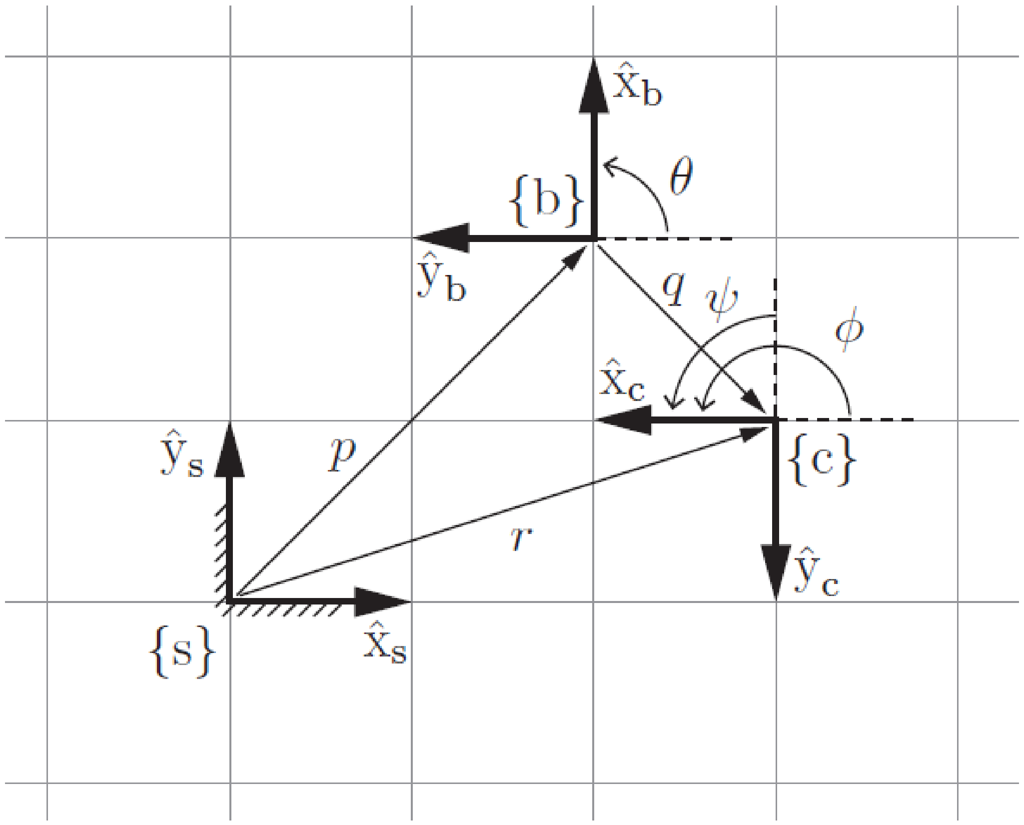
旋转矩阵
描述姿态

平移向量
描述位置

看似4个元素，实则存在3个约束方程：
1. 每列为单位向量；
2. 两个列向量相互正交；

因此，只剩下一个自由参数$\theta$。

## 例1




图： $\theta = 90, \psi = 90, \phi = 180$

\theta, \psi, \phi

$$R = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

- $\{b\}$相对于$\{s\}$的位形 $(P, p)$：

$$P = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix}p_x \\ p_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \\ 2\end{bmatrix}$$

- $\{c\}$相对于$\{b\}$的位形 $(Q, q)$：

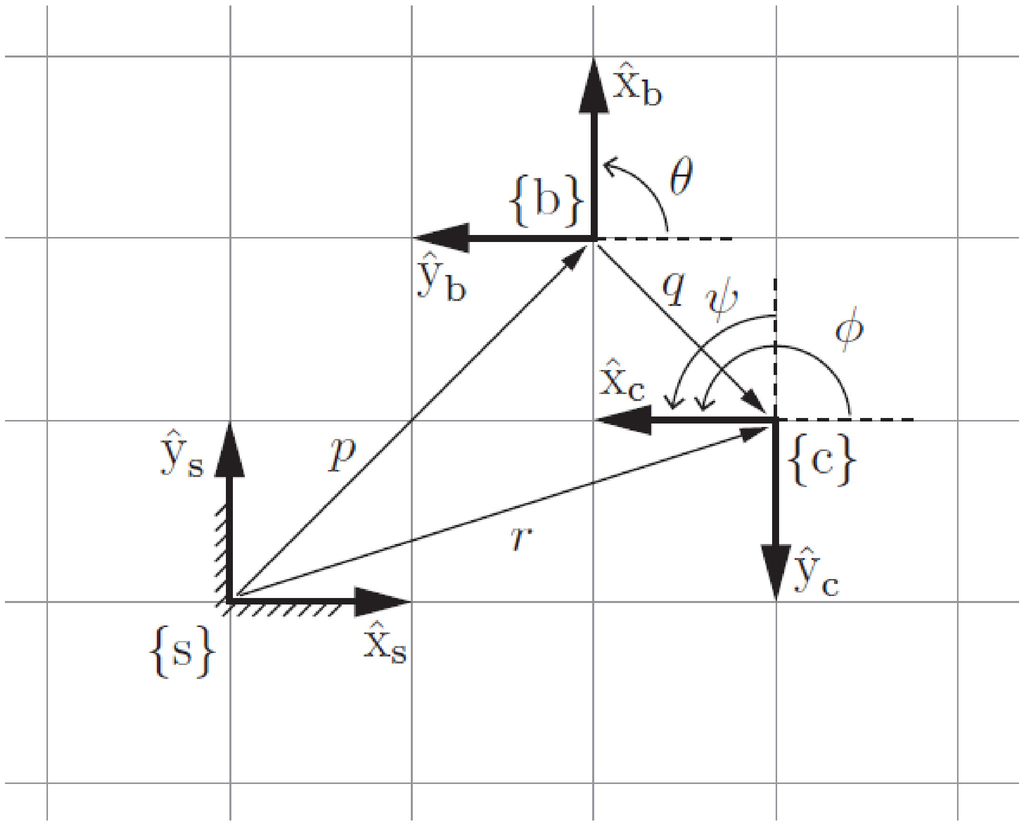
$$Q = \begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix}q_x \\ q_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 \\ -1\end{bmatrix}$$

- $\{c\}$相对于$\{s\}$的位形 $(R, r)$：

$$R = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix}r_x \\ r_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 \\ 1\end{bmatrix}$$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

## 例1




图：$\theta = 90, \psi = 90, \phi = 180$

\theta, \psi, \phi

- 若知道$\{b\}$相对于$\{s\}$的位形 $(P, p)$，$\{c\}$相对于$\{b\}$的位形 $(Q, q)$，就可以算出$\{c\}$相对于$\{s\}$的位形 $(R, r)$：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

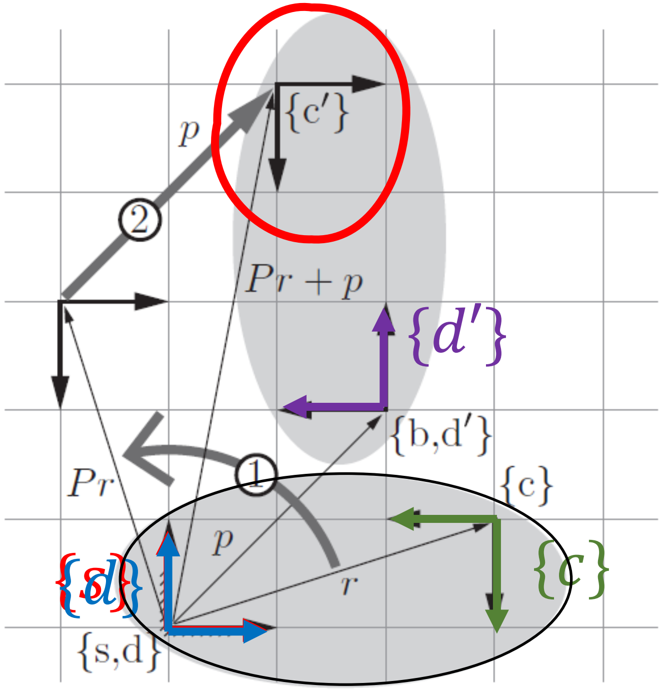
- 就可以算出$\{c\}$相对于$\{s\}$的位形 $(R, r)$：

$$R = PQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$ 将$Q$转换到$\{s\}$中

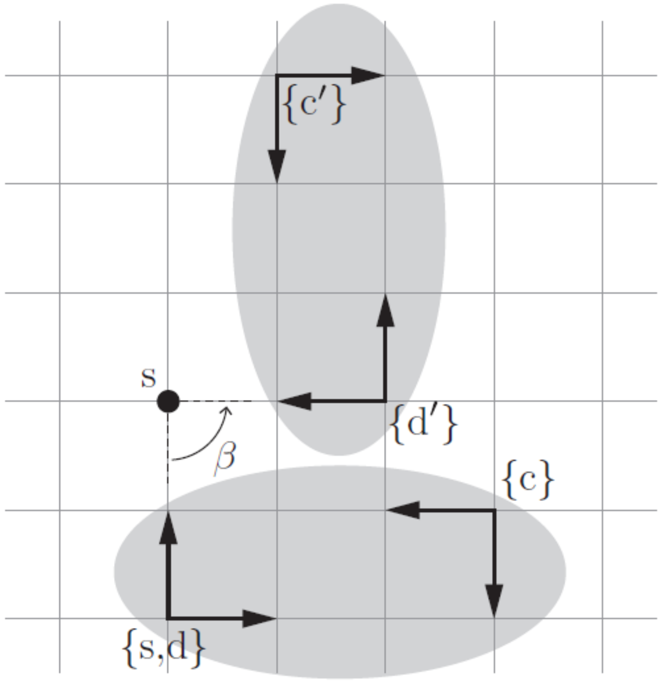
$$r = Pq + p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 将$q$转换到$\{s\}$中，再与$p$求和

✓ $(P, p)$不仅可以表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位形；
✓ 还可以将$\{b\}$中点的坐标转换到$\{s\}$中。

## 例2



(a)



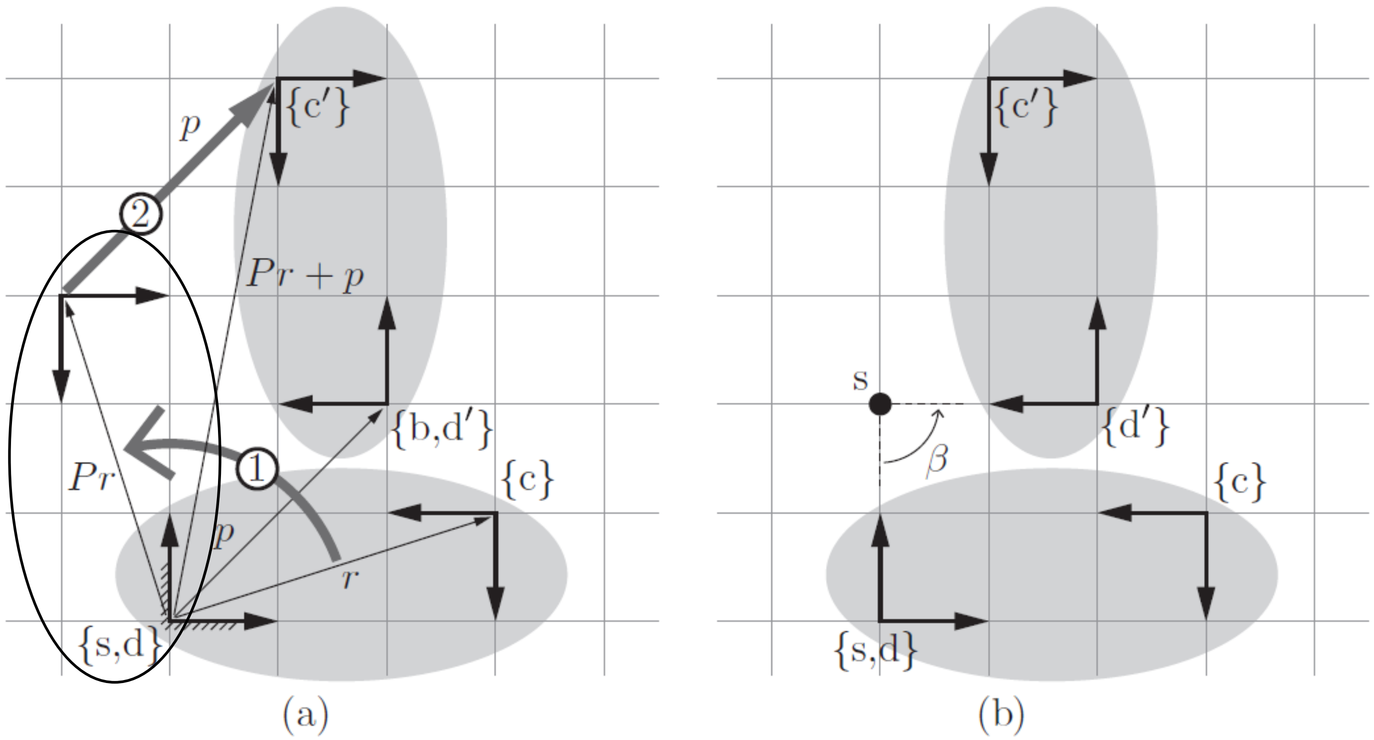
(b)

1. 首先$\{d\}$与$\{s\}$重合， $\{c\}$相对于$\{s\}$用$(R,r)$表示。

2. 然后$\{d\}$运动到$\{d'\}$与$\{b\}$重合，用$(P,p)$表示。

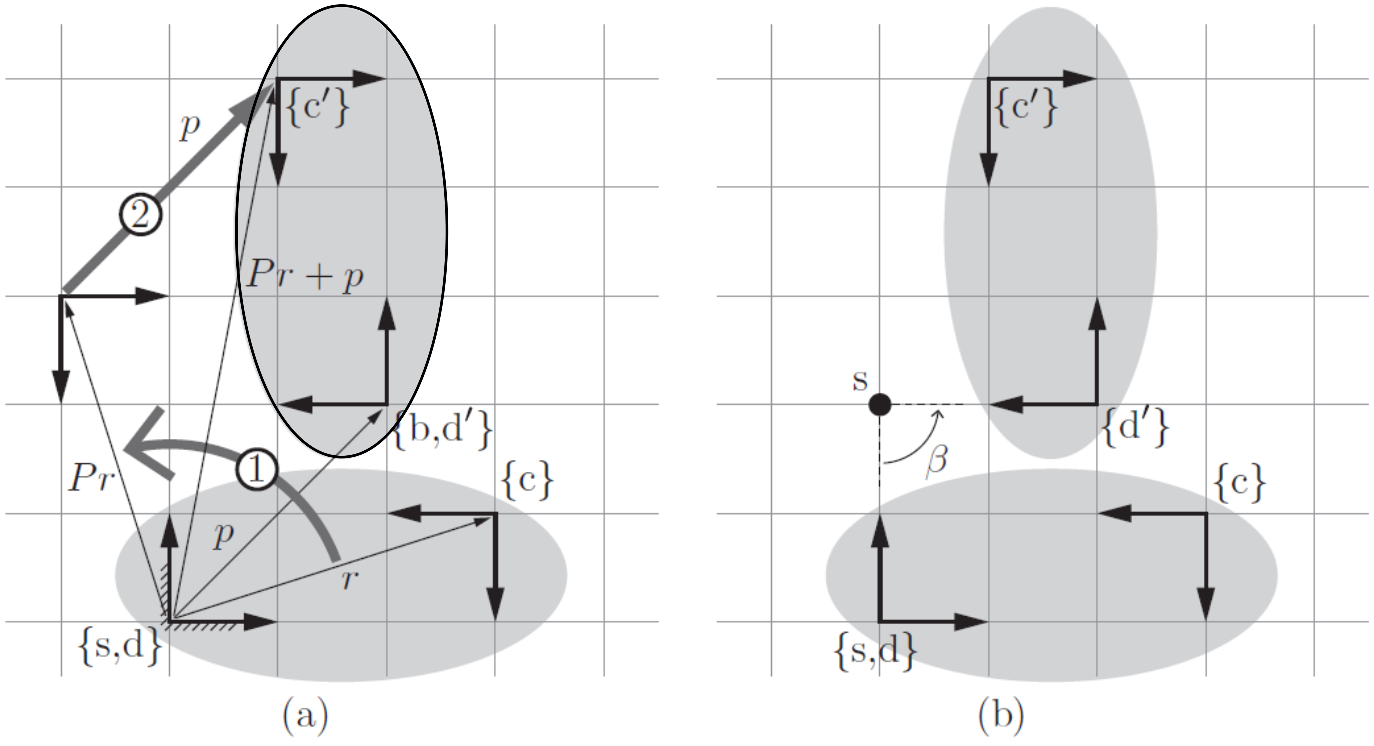
3. 此时$\{c\}$的位形？用$(R',r')$表示。

## 例2




1. 首先$\{d\}$与$\{s\}$重合， $\{c\}$相对于$\{s\}$用$(R, r)$表示。
2. 然后$\{d\}$运动到$\{d'\}$与$\{b\}$重合，用$(P, p)$表示。
3. 此时$\{c\}$的位形？用$(R', r')$表示。

## 例2




1. 首先$\{d\}$与$\{s\}$重合，$\{c\}$相对于$\{s\}$用$(R,r)$表示。

2. 然后$\{d\}$运动到$\{d'\}$与$\{b\}$重合，用$(P,p)$表示。

3. 此时$\{c\}$的位形？用$(R',r')$表示。

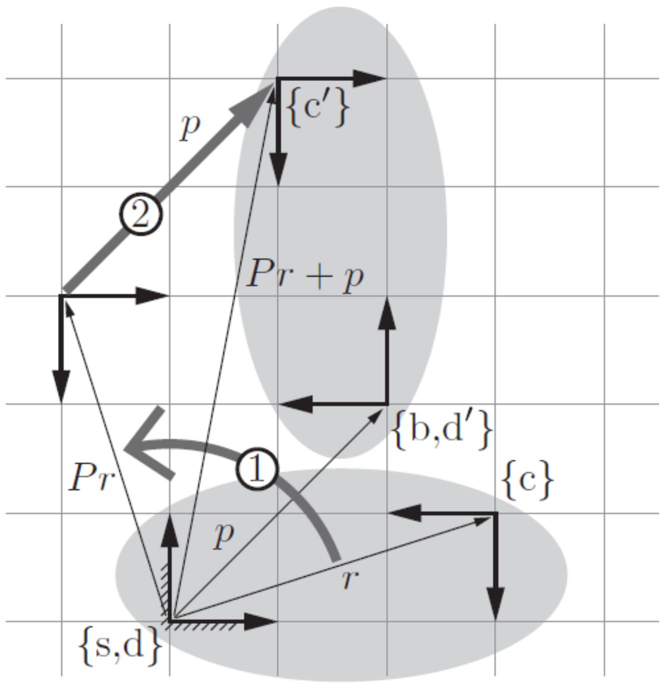
$$R' = PR$$
$$r' = Pr + p$$

刚体运动1：先转动后平移

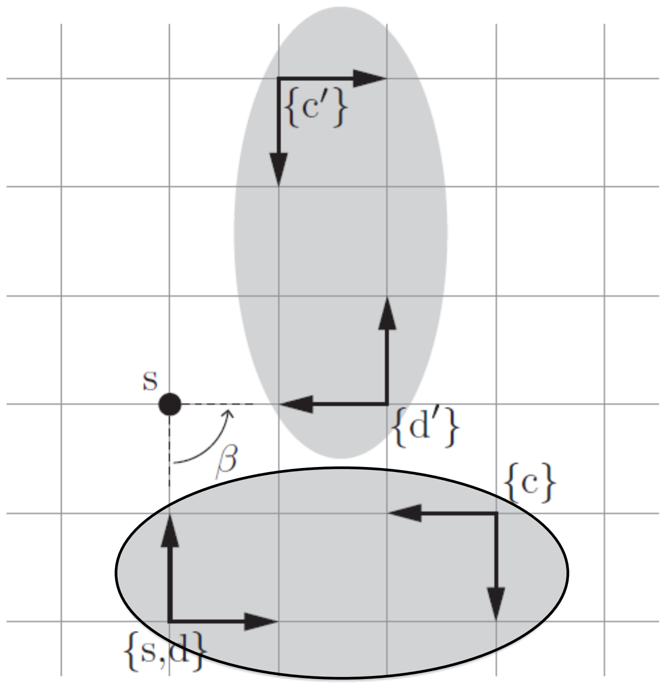
1. 绕$\{s\}$原点旋转系$\{c\}$；
2. 平移至$\{c'\}$；

✓ $(P,p)$不仅可以表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位形；
✓ 还可以将$\{b\}$中点的坐标转换到$\{s\}$中；
✓ 描述向量或坐标系的刚体运动。

## 例2



(a)



(b)

1. 首先$\{d\}$与$\{s\}$重合， $\{c\}$相对于$\{s\}$用$(R,r)$表示。

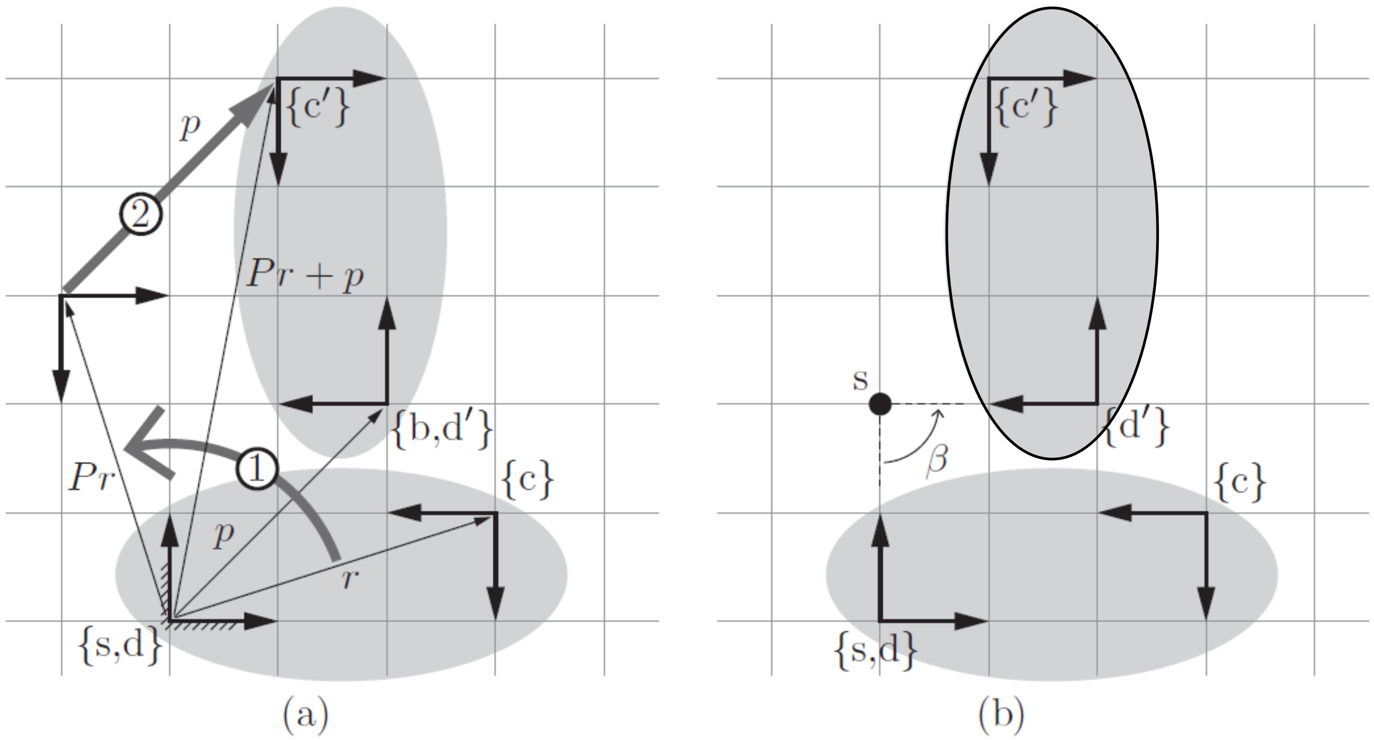
2. 然后$\{d\}$运动到$\{d'\}$与$\{b\}$重合，用$(P,p)$表示。

3. 此时$\{c\}$的位形？用$(R',r')$表示。

$$R' = PR$$

$$r' = Pr + p$$

## 例2




1. 首先$\{d\}$与$\{s\}$重合，$\{c\}$相对于$\{s\}$用$(R, r)$表示。

2. 然后$\{d\}$运动到$\{d'\}$与$\{b\}$重合，用$(P, p)$表示。

3. 此时$\{c\}$的位形？用$(R', r')$表示。

$$R' = PR$$
$$r' = Pr + p$$

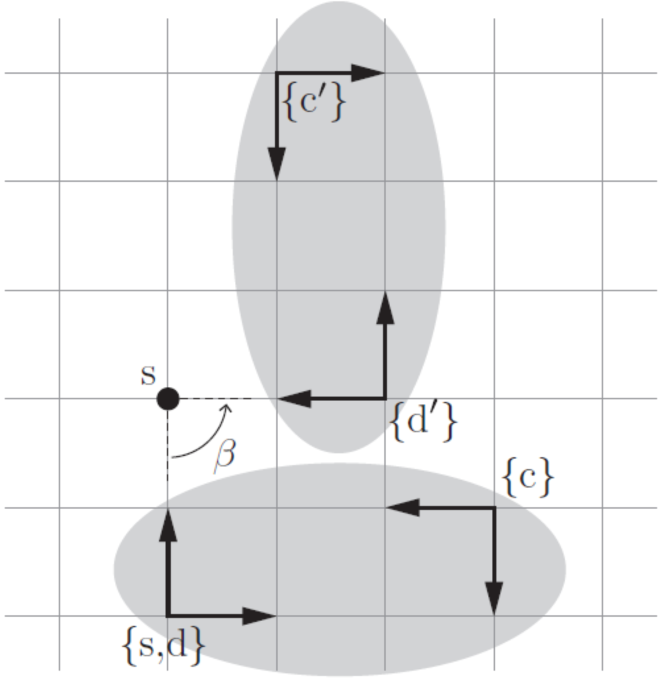
刚体运动2：转动only

绕某固定点$s$旋转系$\{c\}$90°至$\{c'\}$。

称为平面内的螺旋运动(Screw Motion)。

- ✓ $(P, p)$不仅可以表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位形；
- ✓ 还可以将$\{b\}$中点的坐标转换到$\{s\}$中；
- ✓ 描述向量或坐标系的刚体运动。

## 例2




(b)

## 螺旋运动(Screw Motion)

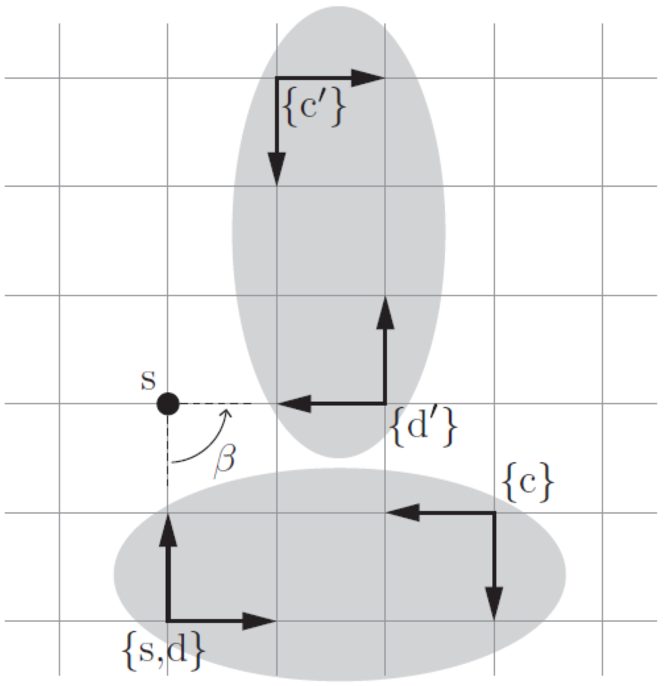
1. 绕某固定点s以单位角速度（$\omega = 1rad/s$）转动，位于$\{s\}$系原点上的点首先以每秒2个单元的速度沿x轴正向移动，即$v = (v_x, v_y) = (2,0)$；

2. 将其嵌入三维向量$\mathcal{S} = (\omega, v_x, v_y) = (1,2,0)$中即表示螺旋轴（Screw Axis）；

3. 沿此螺旋轴旋转$\theta = \pi/2$即可得到最终位移。

4. 用3个坐标$\mathcal{S}\theta = (\pi/2, \pi, 0)$来表示该刚体位移，该坐标称为指数坐标（Exponential Coordinate）。

## 例2



(b)

## 旋量(Twist)

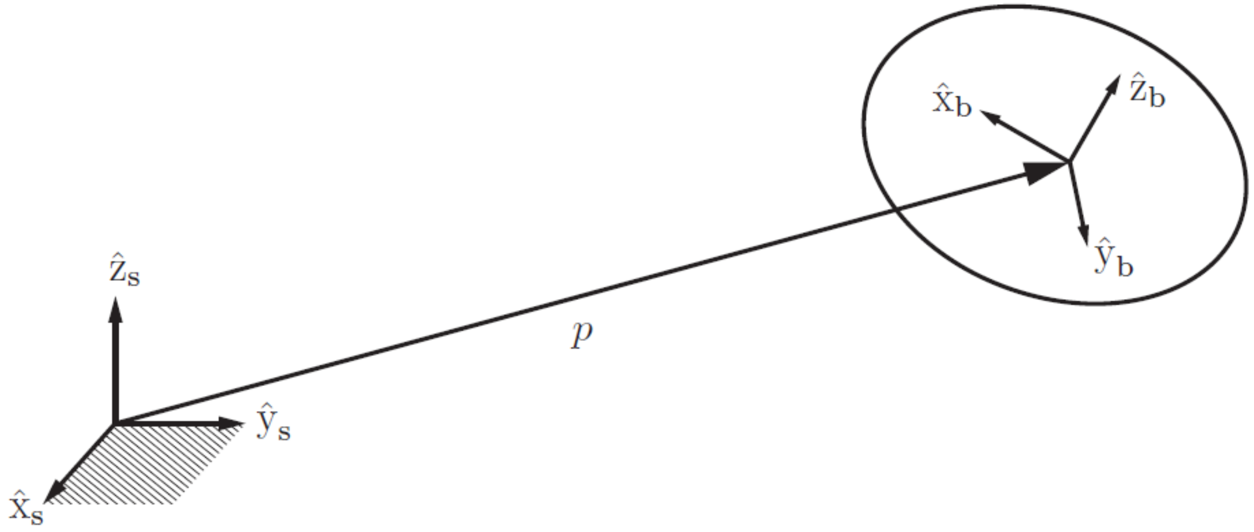
- 角速度与线速度的组合称为运动旋量（Twist）。
- 首先定义单位螺旋轴$\mathcal{S}=(\omega, v_x, v_y)$其中$\omega=1$。
- 然后再与旋转速度$\dot{\theta}$相乘，得到运动旋量$\mathcal{V}=\mathcal{S}\dot{\theta}$。

前页方法：绕螺旋轴$\mathcal{S}$转动$\theta$角度。

本页方法：以速度 $\dot{\theta}=\theta$绕 螺旋轴 $\mathcal{S}$ 转动单位时间。

结果一致，因此$\mathcal{V}=\mathcal{S}\dot{\theta}$也是指数坐标。

## 例3 扩展到三维空间




- $p \in \mathbb{R}^3$为$\{s\}$系原点到$\{b\}$系原点的向量，在$\{s\}$系描述：

$$p = p_1\hat{x}_s + p_2\hat{y}_s + p_3\hat{z}_s.$$

- 物体坐标系$\{b\}$的3个单位坐标轴可以表示为：

$$\begin{aligned}
\hat{x}_b &= r_{11}\hat{x}_s + r_{21}\hat{y}_s + r_{31}\hat{z}_s, \\
\hat{y}_b &= r_{12}\hat{x}_s + r_{22}\hat{y}_s + r_{32}\hat{z}_s, \\
\hat{z}_b &= r_{13}\hat{x}_s + r_{23}\hat{y}_s + r_{33}\hat{z}_s.
\end{aligned}$$

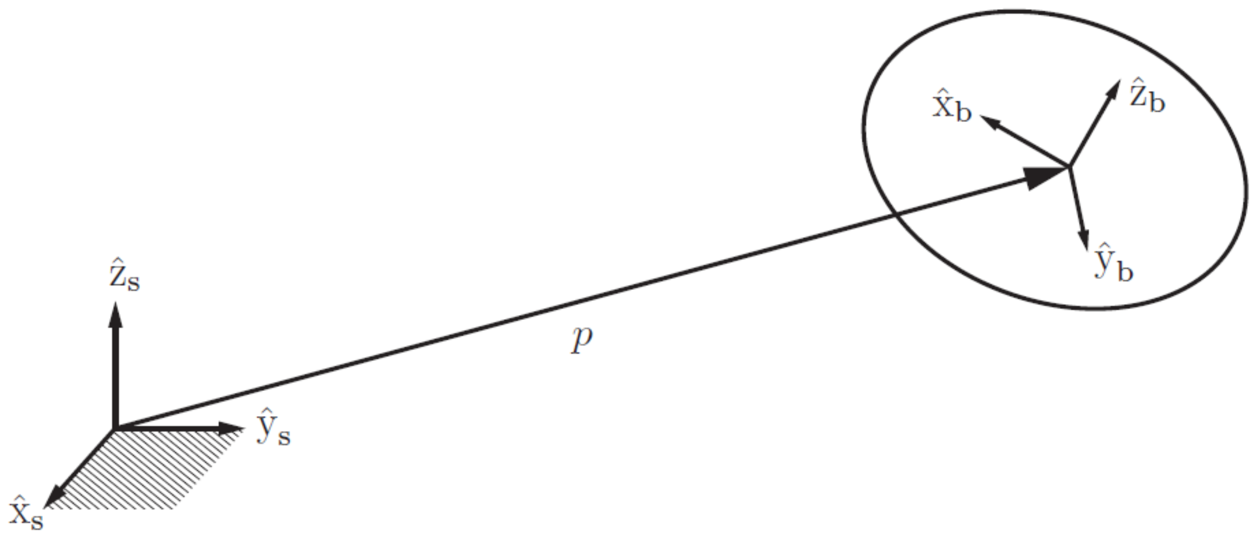
- 采用矩阵的形式：

$$R = [\hat{x}_b \ \hat{y}_b \ \hat{z}_b] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

## 例3 扩展到三维空间

$$R = [\hat{x}_b \ \ \hat{y}_b \ \ \hat{z}_b] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$




看似9个元素，实则存在6个约束方程：

1. 每列为单位向量；
2. 两个列向量相互正交；

因此，只剩下3个自由参数。

- 类似前述，$\{b\}$系相对于$\{s\}$系的位姿，组合形成$(R, p)$。

旋转矩阵
描述姿态

平移向量
描述位置

1. 指数坐标
2. 欧拉角
3. Roll-Pitch-Yaw角
4. 凯莱–罗德里格斯参数法
5. 四元数法

## 旋转矩阵

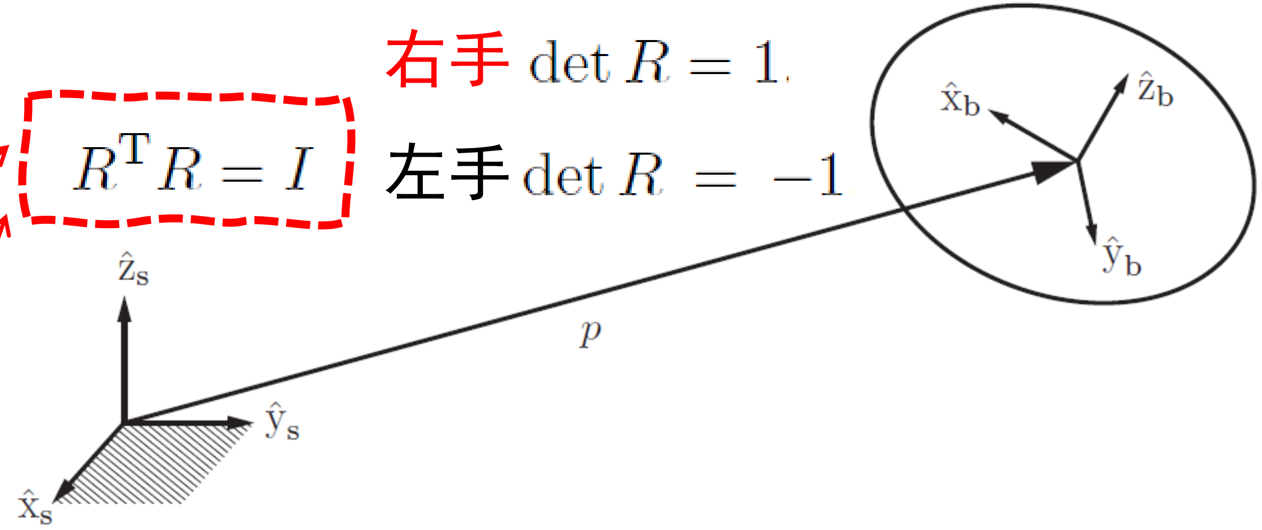
1. 正则条件：因为$\hat{x}_b$ $\hat{y}_b$ $\hat{z}_b$为单位向量

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1, \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1, \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1. \end{aligned}$$

$$R^{\mathrm{T}}R = I$$

右手 $\det R = 1$

左手 $\det R = -1$




2. 正交条件：因为$\hat{x}_b$ $\hat{y}_b$ $\hat{z}_b$两两垂直，即

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} = \hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}} = \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}} = 0$$

或者表示为

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0, \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0, \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} &= r_{11}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{21}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{31}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}}, \\ \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} &= r_{12}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{22}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{32}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}}, \\ \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}} &= r_{13}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{23}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{33}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

$$R = [\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} \ \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} \ \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

## □ 欧拉有限转动定理（Euler’s Finite Rotation Theorem）定理

任何刚体运动可以通过绕坐标轴(物体系或空间系均可)依次旋转(最多)三次来实现。

## □ 查理–莫兹（Chasles-Mozzi）定理

任何刚体运动都可以通过绕某一螺旋轴旋转一定的角度来实现。

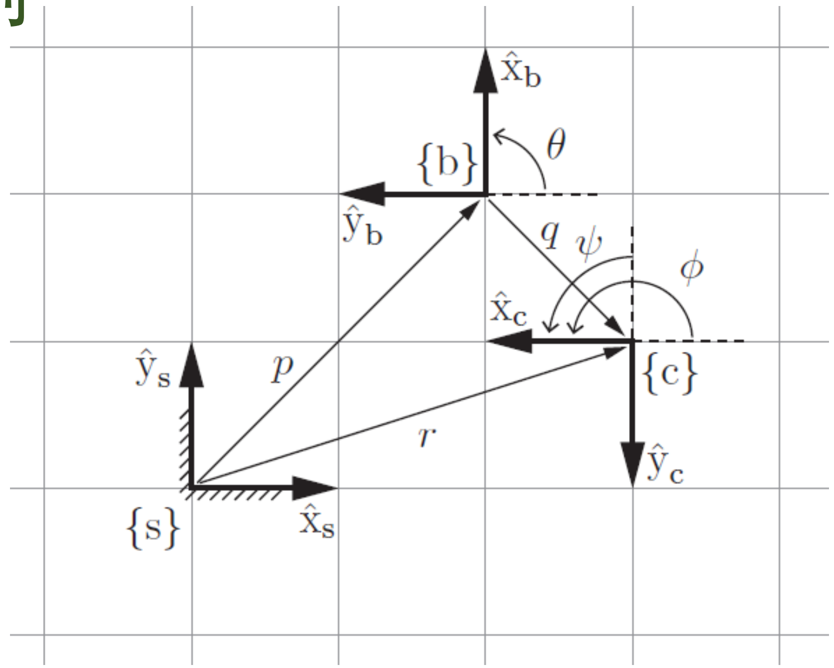
## 特殊正交群（Special Orthogonal Group, SO(3)）

即旋转矩阵，是所有$3 \times 3$的实数矩阵$R$的集合，满足：

（1） $R^{\mathrm{T}} R = I$ （2） $\det R = 1$

$2 \times 2$的旋转矩阵是SO（3）的子群，记作SO（2），即表示平面内的旋转。

## 例




- $\{b\}$相对于$\{s\}$的位形 $(P,p)$：

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\{c\}$相对于$\{b\}$的位形 $(Q,q)$：

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 特殊正交群SO(3)的特性

对于SO（3）中的两个元素$A$和$B$：

$$R = [\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} \ \ \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} \ \ \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R^{\mathrm{T}} R = I}$$

- 封闭性： $AB$也是该群的一个元素。
- 结合律： $(AB)C = A(BC)$。
- 幺元律： 存在单位元素$I$，满足$AI = IA = A$。
- 可逆性： 存在可逆元素$A^{-1}$，满足$AA^{-1} = A^{-1}A = I$。

## 命题1

旋转矩阵$R \in SO(3)$的逆也是旋转矩阵，且等于它的转置，即$R^{-1} = R^T$。

## 证明

因为 $R^T R = I$

所以 $R^T = R^{-1}$及 $RR^T = I$

并且 $\det R^T = \det R = 1$

所以 $R^T \in SO(3)$

定义：

若$R \in SO(3)$，则：

$$R^{\mathrm{T}} R = I$$
$$\det R = 1$$

## 命题2

两个旋转矩阵$R_1 \in SO(3)$、 $R_2 \in SO(3)$的乘积也是旋转矩阵。

## 证明

因为 $R_1 \in SO(3)$ 及 $R_2 \in SO(3)$

所以 $(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = I$

并且 $\det R_1 R_2 = \det R_1 \cdot \det R_2 = 1$

所以 $R_1 R_2 \in SO(3)$

定义：

若$R \in SO(3)$，则：

$$R^{\mathrm{T}} R = I$$
$$\det R = 1$$

## ◻ 命题3

旋转矩阵的乘积满足结合律，但一般不满足交换律及$R_1 R_2 \neq R_2 R_1$。不过对于SO(2)来说，满足。

## ◻ 证明

利用线性代数的知识，可以得知上面的结论成立。

定义：

若$R \in SO(3)$，则：

$$R^{\mathrm{T}} R = I$$
$$\det R = 1$$

## 命题4

旋转矩阵作用于某一向量，不会改变其长度。

即：对于任意向量$x \in \mathbb{R}^3$和旋转矩阵$R \in SO(3)$，向量$y = Rx$有与$x$一样的长度。

## 证明

$$||y||^2 = y^T y = (Rx)^T (Rx) = x^T R^T R x = x^T I x = x^T x = ||x||^2$$

# 旋转矩阵的应用

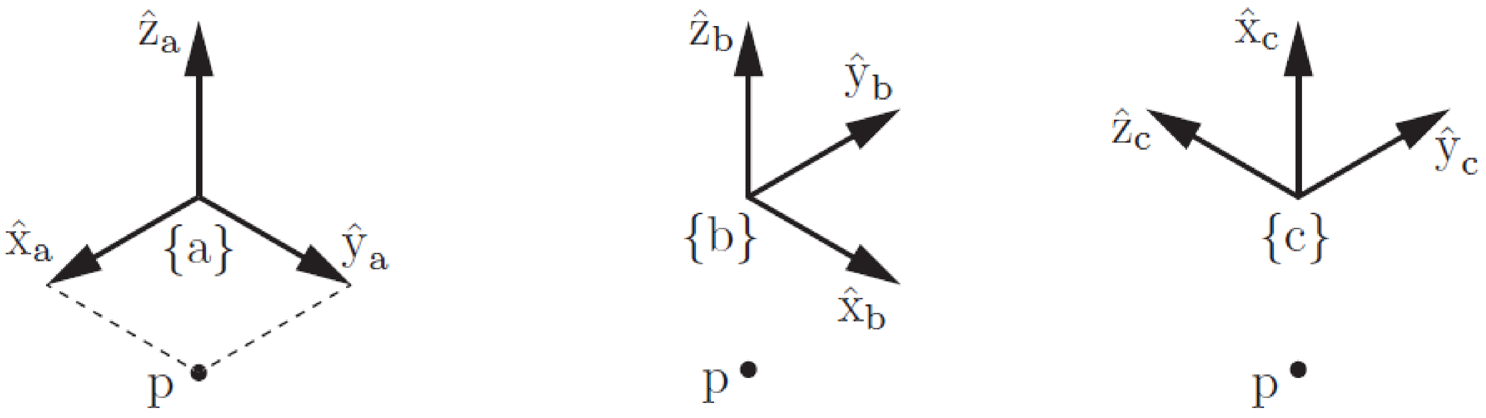
1. 表示姿态；
2. 进行坐标系转换，通过向量或坐标系来表示；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。

➢ 3个坐标系相对于$\{s\}$的姿态：

$$R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

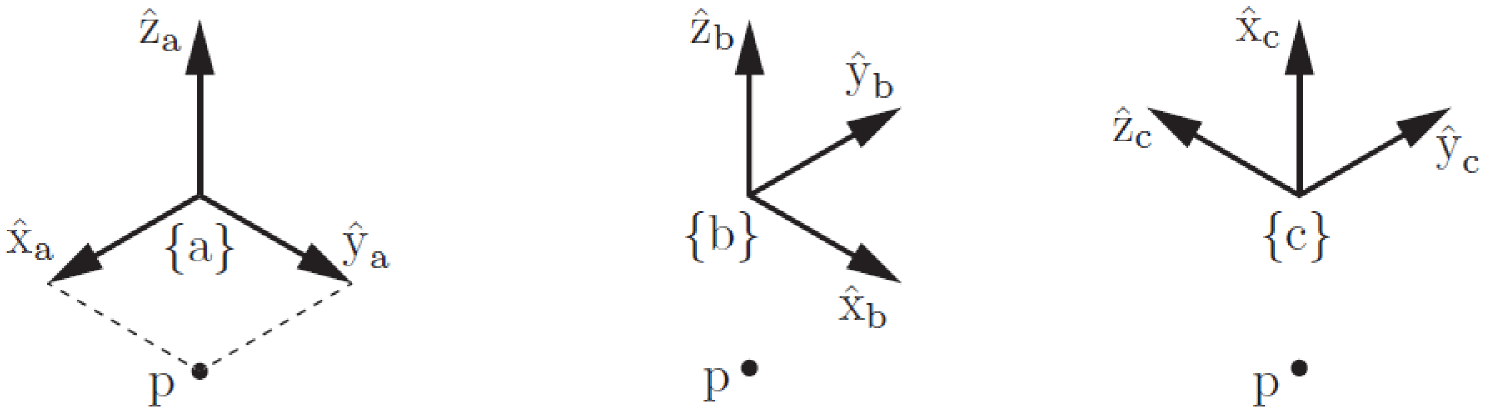
$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$




图：相同空间中，点p在不同坐标系的表示

假设固定坐标系{s}与{a}重合。

# 旋转矩阵的应用




图：相同空间中，点p在不同坐标系的表示

假设固定坐标系{s}与{a}重合。

- 3个坐标系相对于$\{s\}$的姿态：

$$R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

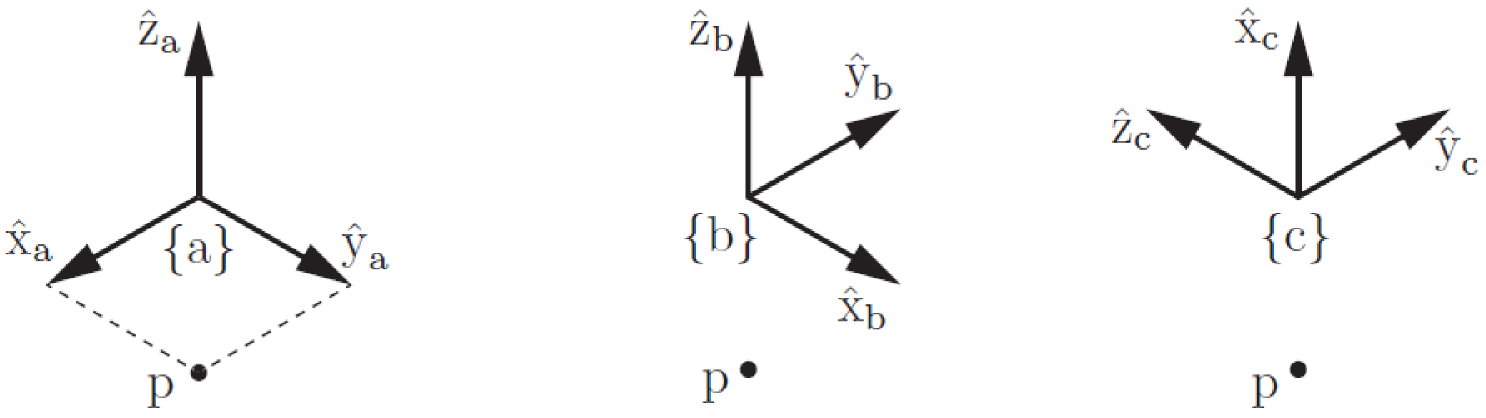
$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 点$p$在这3个坐标系中的位置：

$$p_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

## 旋转矩阵的应用

1. 表示姿态；
2. 进行坐标系转换；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。




图：相同空间中，点p在不同坐标系的表示
假设固定坐标系{s}与{a}重合。

- 通常用$R_{sa}$或者略去固定坐标系的角标来表示$\{a\}$相对于$\{s\}$的姿态。
- 类似的，用$R_{ac}$表示$\{c\}$相对于$\{a\}$的姿态：

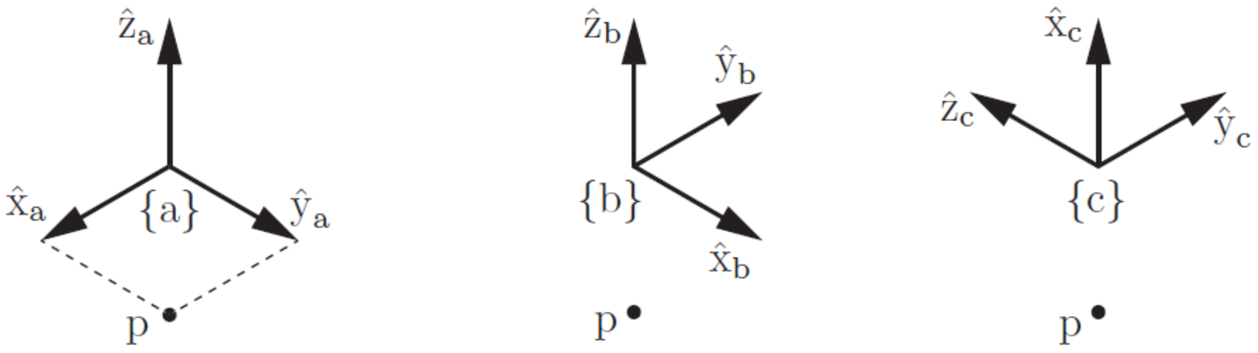
$$R_{ac}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 用$R_{ca}$表示$\{a\}$相对于$\{c\}$的姿态：

$$R_{ca}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

## ◻ 旋转矩阵的应用

1. 表示姿态；
2. 进行坐标系转换；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。




➢ $R_{ac}$表示$\{c\}$相对于$\{a\}$的姿态：

$$R_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ $R_{ca}$表示$\{a\}$相对于$\{c\}$的姿态：

$$R_{ca} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ 可以验证：

$$R_{ac}R_{ca} = I$$

$$R_{ac} = R_{ca}^{-1},$$

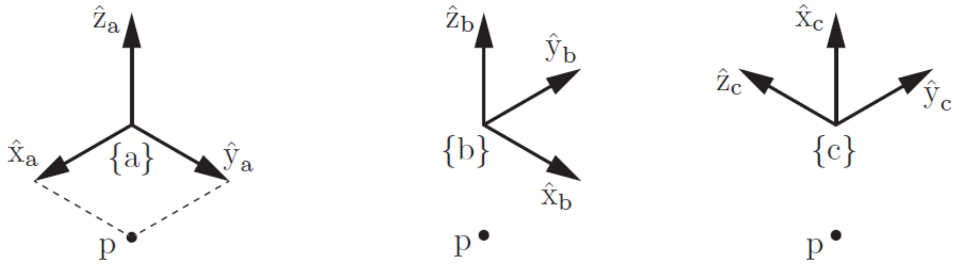
$$R_{ac} = R_{ca}^{\mathrm{T}}.$$

➢ 对于任意两坐标系$\{d\}$和$\{e\}$，都有：

$$R_{de} = R_{ed}^{-1} = R_{ed}^{\mathrm{T}}.$$

## □ 旋转矩阵的应用

1. 表示姿态；
2. 进行坐标系转换；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。




- 用$R_{ab}$表示$\{b\}$相对于$\{a\}$的姿态，用$R_{bc}$表示$\{c\}$相对于$\{b\}$的姿态。
- 则可以通过运算得到$\{c\}$相对于$\{a\}$的姿态：

$$R_{ac} = \boxed{R_{ab}}\boxed{R_{bc}}$$

$\{c\}$相对于$\{b\}$的姿态

将坐标系$\{b\}$变换到$\{a\}$的数学算子

- 利用下角标相减的原则记忆：

$$R_{ab}R_{bc} = R_{a\cancel{b}}R_{\cancel{b}c} = R_{ac}.$$

- 向量的参考系变换也可以通过上述原理实现和记忆：

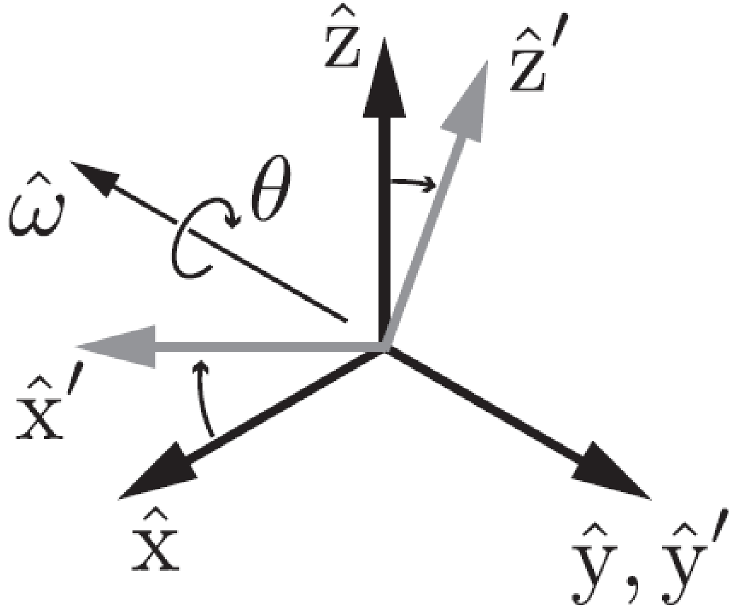
$$R_{ab}p_b = R_{a\cancel{b}}p_{\cancel{b}} = p_a.$$

## 旋转矩阵的应用

1. 表示姿态；
2. 进行坐标系转换；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。

- 旋转矩阵$R = R_{sc'}$表示$\{c'\}$相对于$\{s\}$的姿态。
- 旋转矩阵$R = R_{sc'}$也可以看作$\{s\}$到$\{c'\}$的操作算子，而不表示姿态，写成：

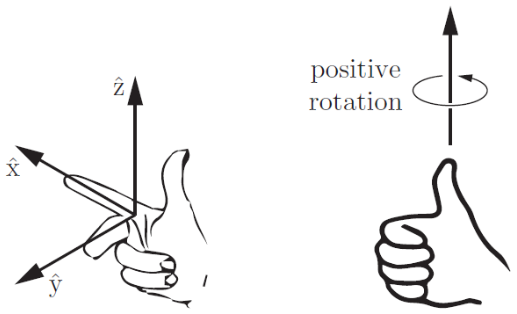
$$R = \mathrm{Rot}(\hat{\omega}, \theta)$$

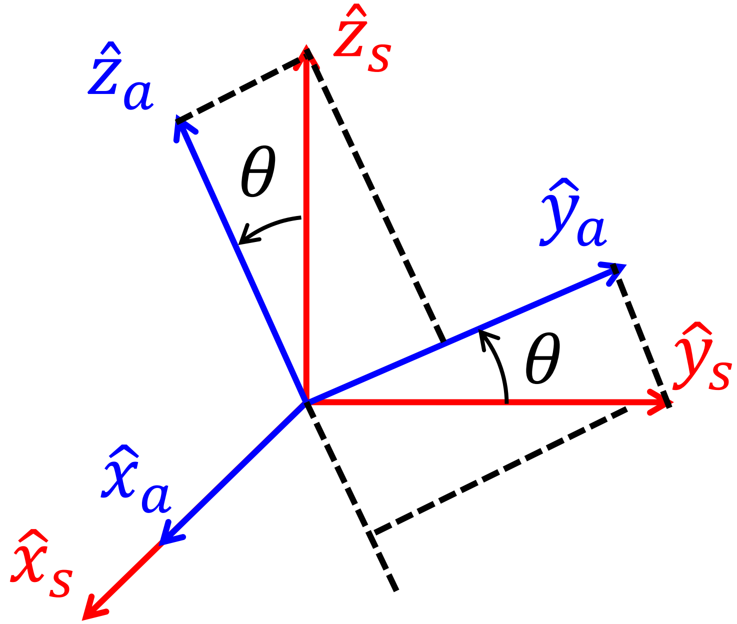



图：坐标系$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$绕单位轴$\hat{\omega}$（图中为$-\hat{y}$）旋转角度$\theta$，得到的新坐标系$(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ 的姿态可用旋转矩阵 $R$ 表示。

## 旋转矩阵的应用

➢ 绕坐标系x轴旋转：



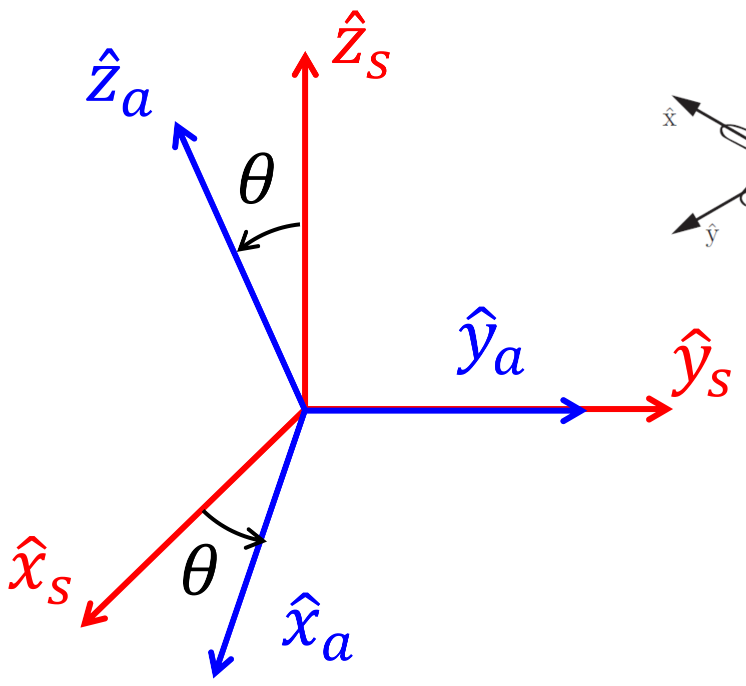

$$\mathrm{Rot}(\hat{\mathrm{x}}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

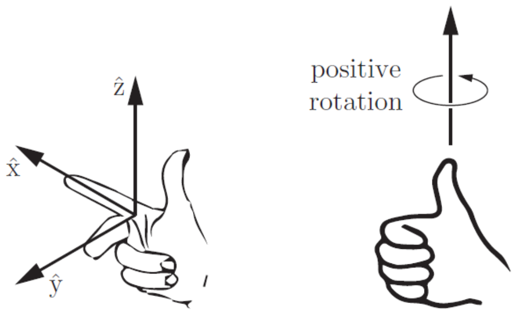
$$\hat{z}_a = -\sin\theta\,\hat{y}_s + \cos\theta\,\hat{z}_s$$

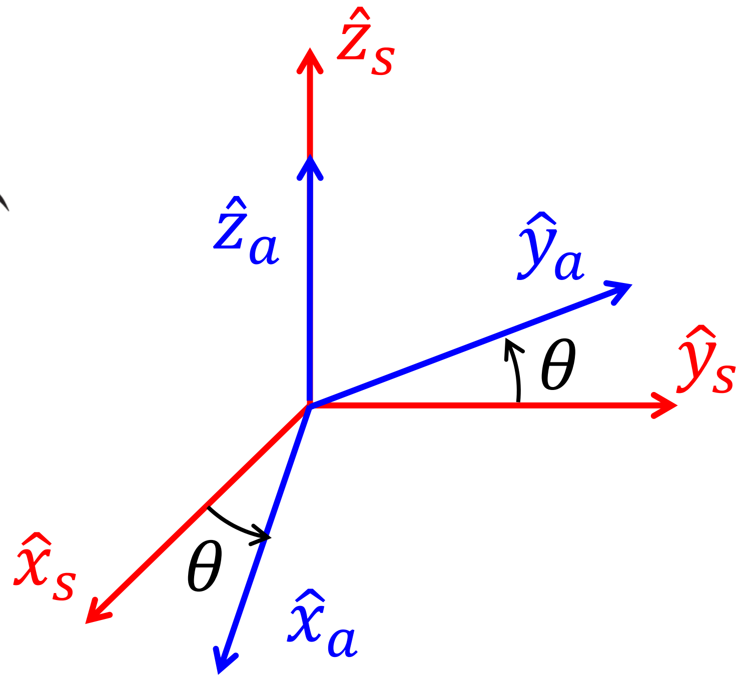
- $R = R_{sa}$也可以看作$\{s\}$变换到$\{a\}$的操作算子；
- 或$\{a\}$相对于$\{s\}$的姿态。

$$\hat{y}_a = \cos\theta\,\hat{y}_s + \sin\theta\,\hat{z}_s$$

# 旋转矩阵的应用




- 绕坐标系y轴旋转：

$$\mathrm{Rot}(\hat{y},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

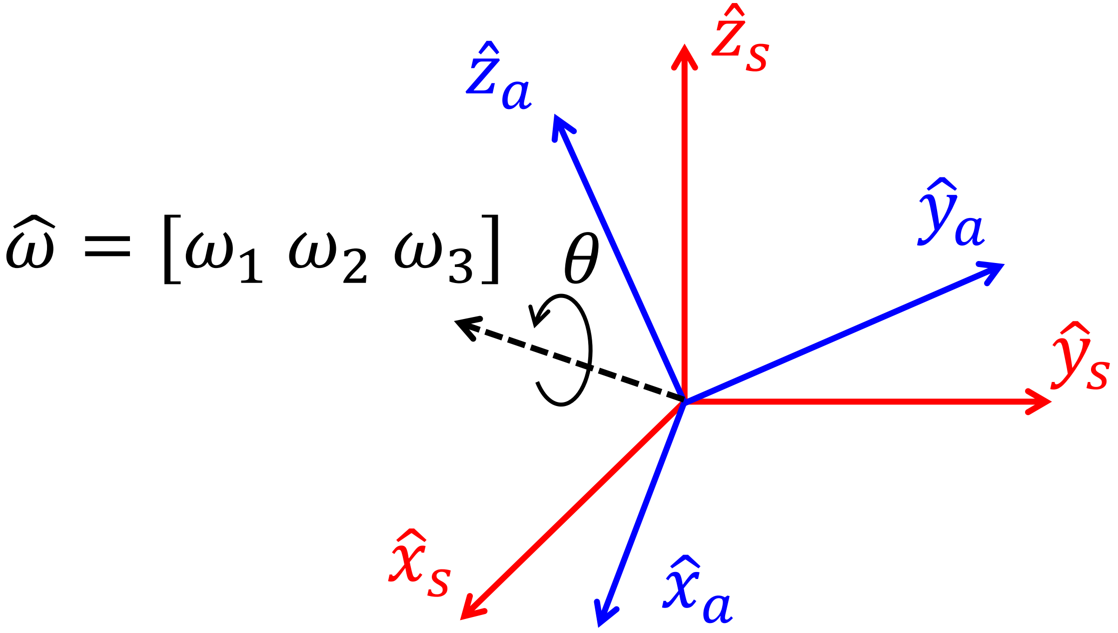
- 绕坐标系z轴旋转：

$$\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

## 旋转矩阵的应用

模长为1

- 绕空间内以单位轴$\hat{\omega}$旋转角度$\theta$：
  - 坐标系$\{s\}$运动到$\{a\}$，用旋转矩阵$R = R_{sa}$表示$\{a\}$相对于$\{s\}$的姿态。
  - 或用旋转矩阵$R = R_{sa}$表示$\{s\}$到$\{a\}$的操作算子。




$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{\omega}_1^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) - \hat{\omega}_3 s_\theta & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_2 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) + \hat{\omega}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_2^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_1 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_2 s_\theta & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) = \mathrm{Rot}(-\hat{\omega},-\theta)$$

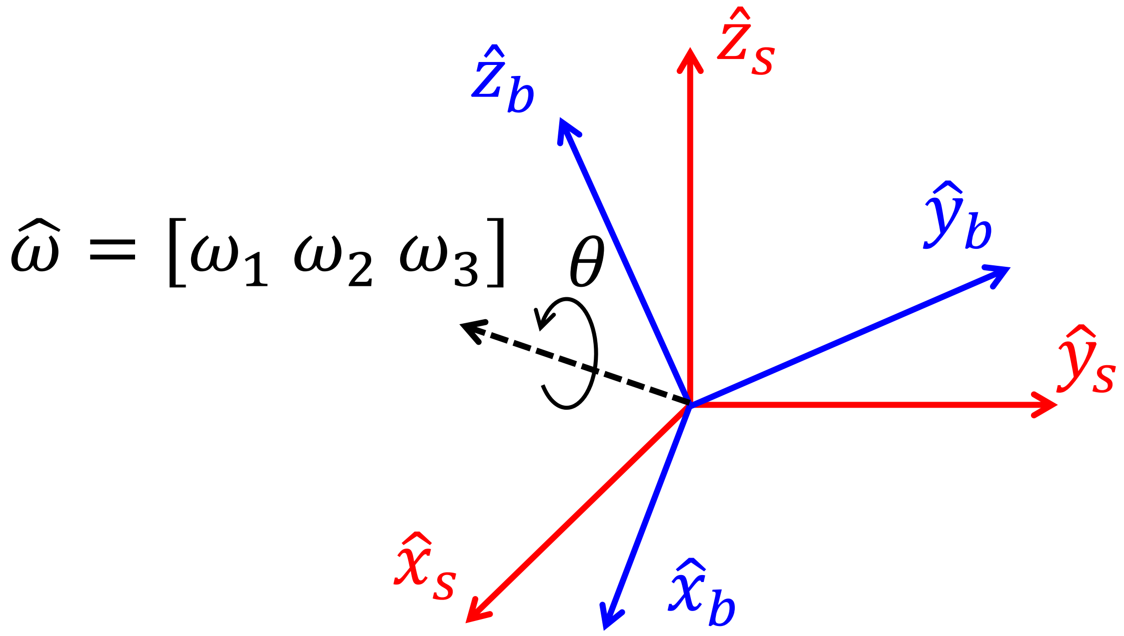
$s_\theta = \sin\theta \quad c_\theta = \cos\theta$

## □ 旋转轴的表述

1. 用$R_{sb}$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位姿；

2. 并想将 $\{b\}$绕单位轴$\widehat{\omega}$转$\theta$，即$R = Rot(\widehat{\omega}, \theta)$。

➢ 必须明确单位轴$\widehat{\omega}$在哪个系表述。尽管$\widehat{\omega}$值相同（即$R$ 也相同），但对应着不同转轴，除非$\{s\}$与$\{b\}$重合。

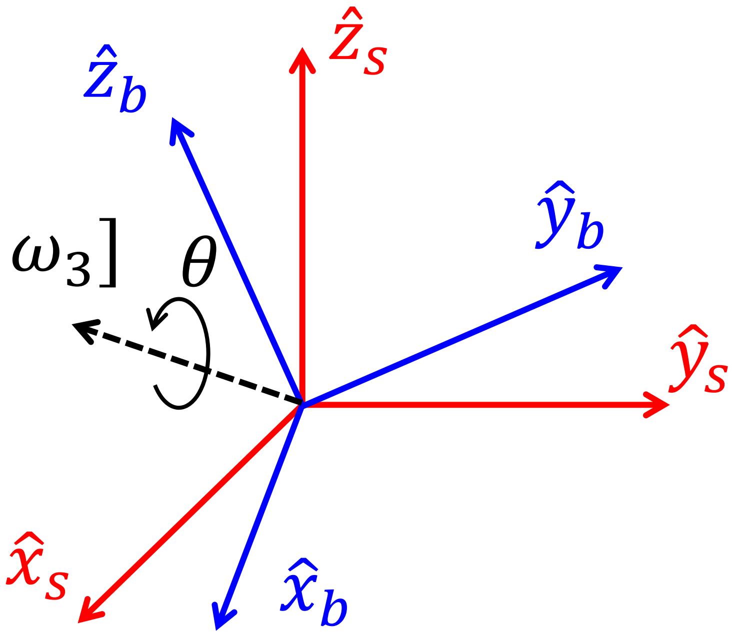


## 旋转轴的表述

- 令$\{b'\}$为绕$\widehat{\omega}=\widehat{\omega}_s$轴旋转$\theta$得到的新坐标系（转轴$\widehat{\omega}$ 在固定坐标系$\{s\}$ 中描述）。

- 令$\{b''\}$为绕$\widehat{\omega}=\widehat{\omega}_b$轴旋转$\theta$得到的新坐标系（转轴$\widehat{\omega}$ 在物体坐标系$\{b\}$ 中描述）。

$$\widehat{\omega}=[\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]$$




$R_{sb}$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位姿

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$ 绕$R$转动$= R R_{sb}$

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$ 绕$R$转动$= R_{sb} R$

$R$表示旋转操作

## ◻ 旋转轴的表述

- 令$\{b'\}$为绕$\widehat{\omega}=\widehat{\omega}_s$轴旋转$\theta$得到的新坐标系（转轴$\widehat{\omega}$ 在固定坐标系$\{s\}$ 中描述）。
- 令$\{b''\}$为绕$\widehat{\omega}=\widehat{\omega}_b$轴旋转$\theta$得到的新坐标系（转轴$\widehat{\omega}$ 在物体坐标系$\{b\}$ 中描述）。

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$ 绕$R$转动$= RR_{sb}$

左乘$R$，绕固定坐标系的轴转。

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$ 绕$R$转动$= R_{sb}R$

右乘$R$，绕物体坐标系的轴转。

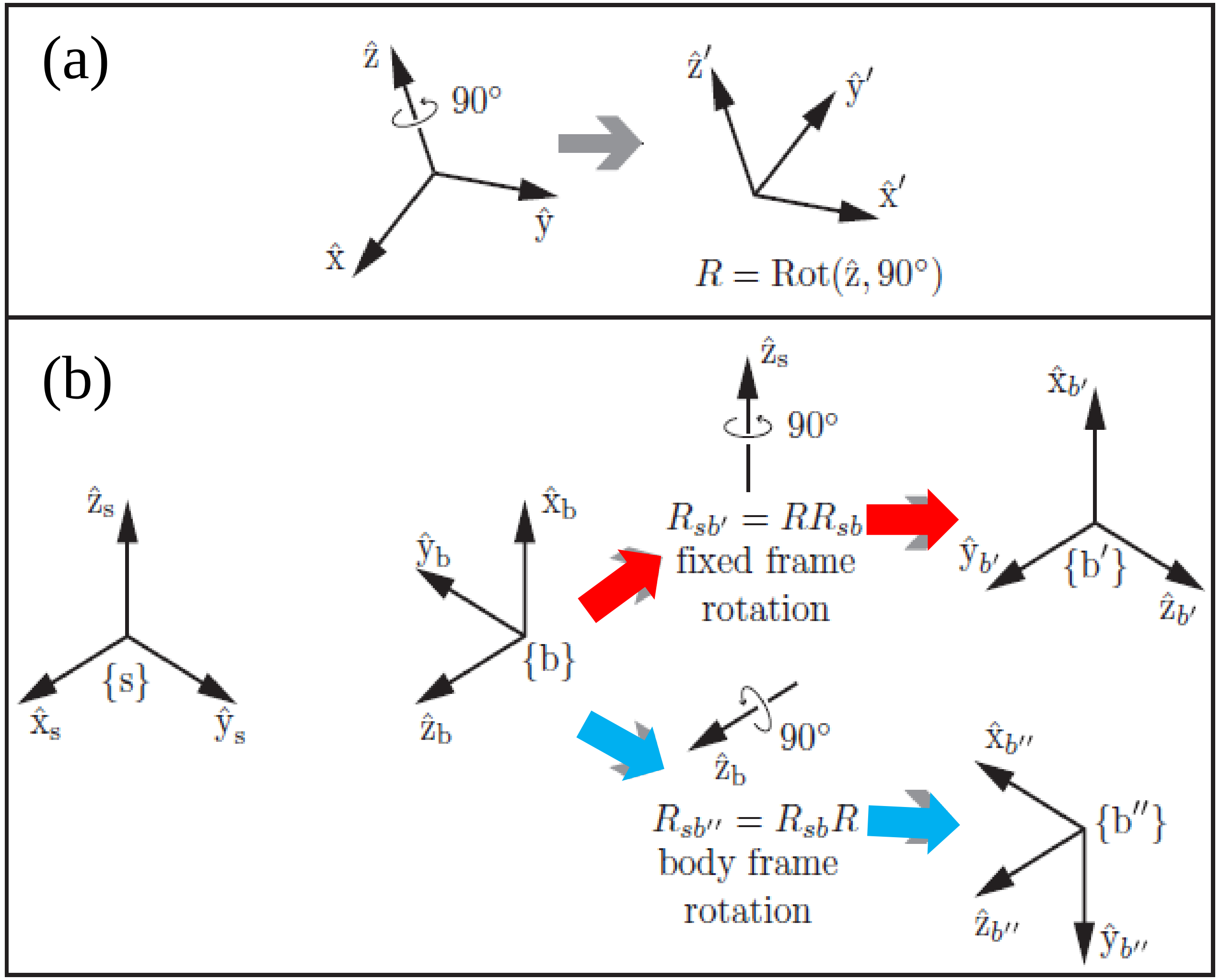
## □ 旋转轴的表述例题

（a） $R = Rot(\hat{z}, 90°)$表示绕$z$轴转90°。

（b） $R_{sb}$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位姿；

1. 上路的分支： $RR_{sb}$： $\{b\}$绕$\{s\}$的$\hat{z}_s$转动，得到$\{b'\}$；

2. 下路的分支：$R_{sb}R$： $\{b\}$绕$\{b\}$的$\hat{z}_b$转动，得到$\{b''\}$；



## 旋转速度向量$v$

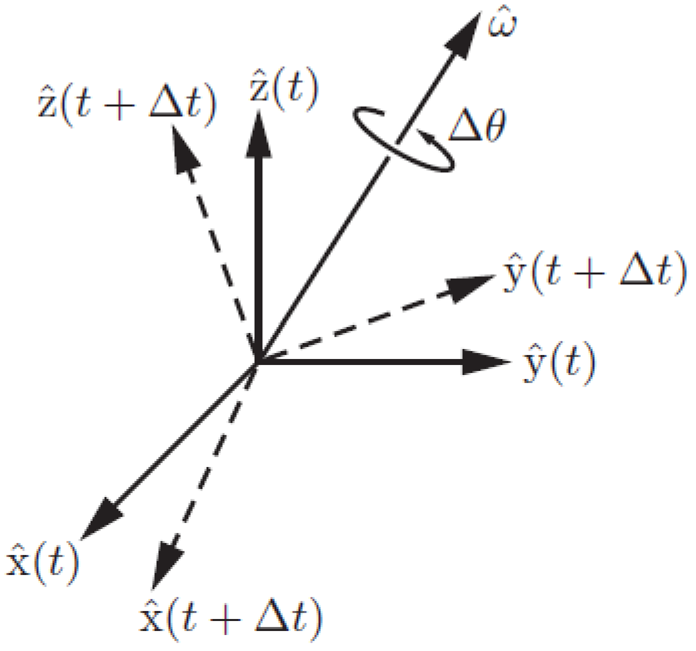
- 只涉及一个坐标系，即表示速度向量的坐标系。
- 因此旋转轴$\hat{\omega}$也需要在同一个坐标系下表示。
- 最终，转动后的向量为：

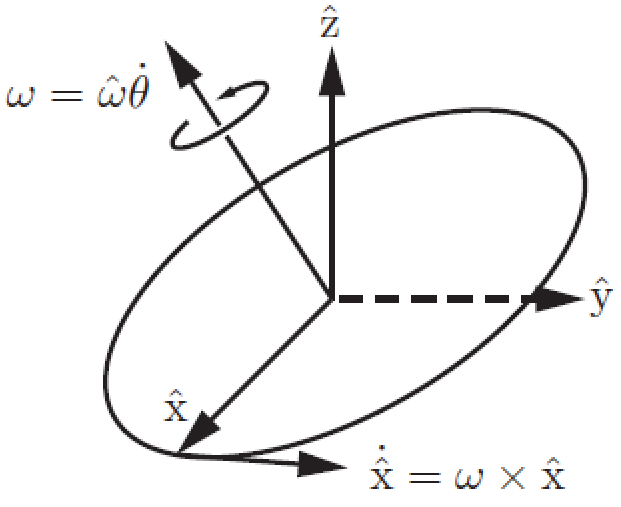
$$v' = Rv.$$

- 类似方法也可以用来将相对$\{d\}$系的角速度，在$\{c\}$系下表示：

$$\omega_c = R_{cd}\omega_d.$$

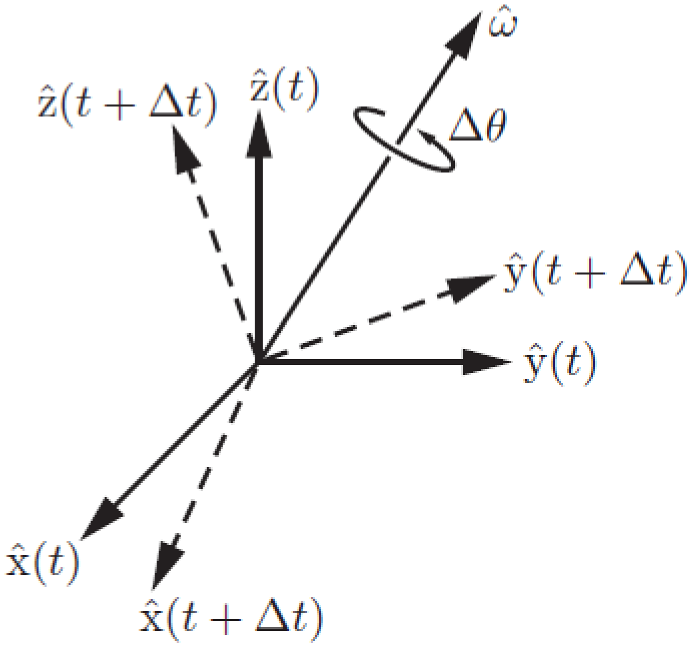
## □ 角速度

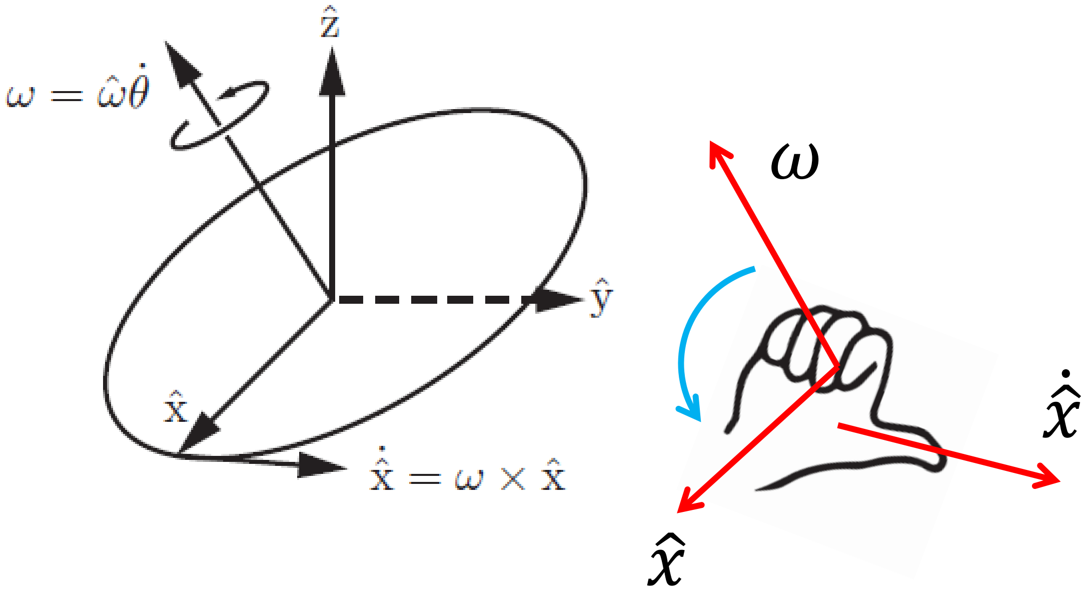



- 假设坐标系$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$附着在一个旋转物体上（单位坐标轴$\hat{x}$等长度为1）。
- 单位坐标轴$\hat{x}$等的方向将随时间变化。
- 考虑由时间$t$到$t+\Delta t$，物体坐标系的姿态绕过原点的某一单位轴$\hat{\omega}$旋转角度$\Delta\theta$。
- 若$\Delta t \to 0$，则$\Delta\theta/\Delta t = \dot{\theta}$，$\hat{\omega}$可看作瞬时单位旋转轴。

## □ 角速度




- 回顾：平面内刚体运动->螺旋轴。
- 实际上，$\dot{\theta}$与$\hat{\omega}$ 的组合即为角速度：

$$\omega = \hat{\omega}\dot{\theta}$$

- 由上图可知：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \omega \times \hat{x} \\ \dot{\hat{y}} &= \omega \times \hat{y} \\ \dot{\hat{z}} &= \omega \times \hat{z} \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\dot{\hat{x}} = \omega \times \hat{x}$$
$$\dot{\hat{y}} = \omega \times \hat{y} \qquad (3)$$
$$\dot{\hat{z}} = \omega \times \hat{z}$$

- 为了表示上述方程，需要选择一个坐标系来描述$\hat{\omega}$。
- 显然，选择$\{s\}$或者$\{b\}$更加自然。

回顾：

$$\hat{x}_b = r_{11}\hat{x}_s + r_{21}\hat{y}_s + r_{31}\hat{z}_s,$$
$$\hat{y}_b = r_{12}\hat{x}_s + r_{22}\hat{y}_s + r_{32}\hat{z}_s,$$
$$\hat{z}_b = r_{13}\hat{x}_s + r_{23}\hat{y}_s + r_{33}\hat{z}_s.$$

$$R = [\hat{x}_b \ \hat{y}_b \ \hat{z}_b] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- 令$R(t) = R_{sb}(t)$表示物体系$\{b\}$相对于固定系$\{s\}$在$t$时刻的位姿，$\dot{R}(t)$为其变化率。
- 在$t$时刻，用$\omega_s \in \mathbb{R}^3$表示固定系中的角速度，则式（3）可写作：

$$\dot{r}_1 = \omega_s \times r_1 \longrightarrow \{s\}\text{系的}\hat{x}\text{轴}$$
$$\dot{r}_2 = \omega_s \times r_2 \longrightarrow \{s\}\text{系的}\hat{y}\text{轴}$$
$$\dot{r}_3 = \omega_s \times r_3 \longrightarrow \{s\}\text{系的}\hat{z}\text{轴}$$

$$\dot{R} = [\omega_s \times r_1 \quad \omega_s \times r_2 \quad \omega_s \times r_3] = \omega_s \times R$$

$$\boxed{\dot{R} = [\omega_s \times r_1 \quad \omega_s \times r_2 \quad \omega_s \times r_3] = \omega_s \times R}$$

- 为了将上式的叉积消去，引入反对称矩阵，将$\omega_s \times R$写作$[\omega_s]R$。

## ■反对称（Skew-Symmetric）

- 给定向量 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$，定义

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵$[x]$就是与向量$x$对应的$3 \times 3$反对称矩阵。

- 容易观察出，$[x] = -[x]^T$。
- 所有$3 \times 3$反对称矩阵的集合称为so(3)。

回顾：什么是SO(3)（特殊正交群）？

## 命题

给定任意$\omega \in \mathbb{R}^3$和$R \in SO(3)$，总有

$$R[\omega]R^{\mathrm{T}} = [R\omega]$$

## 证明

令$r_i^T$为$R$的第$i$行

回顾：

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} &= r_{11}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{21}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{31}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}},\\ \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} &= r_{12}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{22}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{32}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}},\\ \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}} &= r_{13}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{s}} + r_{23}\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{s}} + r_{33}\hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{s}}.\end{aligned}$$

$$R = [\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{b}} \ \ \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}} \ \ \hat{\mathrm{z}}_{\mathrm{b}}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R[\omega]R^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} r_1^{\mathrm{T}}(\omega \times r_1) & r_1^{\mathrm{T}}(\omega \times r_2) & r_1^{\mathrm{T}}(\omega \times r_3) \\ r_2^{\mathrm{T}}(\omega \times r_1) & r_2^{\mathrm{T}}(\omega \times r_2) & r_2^{\mathrm{T}}(\omega \times r_3) \\ r_3^{\mathrm{T}}(\omega \times r_1) & r_3^{\mathrm{T}}(\omega \times r_2) & r_3^{\mathrm{T}}(\omega \times r_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3^{\mathrm{T}}\omega & r_2^{\mathrm{T}}\omega \\ r_3^{\mathrm{T}}\omega & 0 & -r_1^{\mathrm{T}}\omega \\ -r_2^{\mathrm{T}}\omega & r_1^{\mathrm{T}}\omega & 0 \end{bmatrix} = [R\omega]$$

提示：使用了行列式相关性质：3个列向量$\{a, b, c\}$组成的$3 \times 3$矩阵$M$，总有：

$$\det M = a^{\mathrm{T}}(b \times c) = c^{\mathrm{T}}(a \times b) = b^{\mathrm{T}}(c \times a)$$

$$\dot{R} = [\omega_s \times r_1 \quad \omega_s \times r_2 \quad \omega_s \times r_3] = \omega_s \times R$$

反对称矩阵

$$\dot{R} = [\omega_s]R$$

两边右乘$R^{-1}$

$$\dot{R}R^{-1} = [\omega_s]$$

选择了$\{s\}$描述$\hat{\omega}$

回顾：$R(t) = R_{sb}(t)$表示物体系$\{b\}$相对于固定系$\{s\}$在$t$时刻的位姿，$\dot{R}(t)$为其变化率。

## 物体系中表示的角速度

$R_{bs}\omega_s$

$$\omega_b = R_{sb}^{-1}\omega_s = R^{-1}\omega_s = R^T\omega_s$$

反对称矩阵

回顾上页

$$R[\omega]R^{\mathrm{T}} = [R\omega]$$

$$\begin{aligned}[\omega_b] &= [R^T\omega_s] \\ &= R^T[\omega_s]R \\ &= R^T(\dot{R}R^{-1})R \\ &= R^T\dot{R} \\ &= R^{-1}\dot{R}\end{aligned}$$

## □ 命题

令$R(t)=R_{sb}(t)$表示物体系$\{b\}$相对于固定系$\{s\}$ 在$t$时刻的位姿，

则旋转体的角速度为

$$\begin{aligned}\dot{R}R^{-1} &= [\omega_s] \\ R^{-1}\dot{R} &= [\omega_b]\end{aligned}$$

$\omega_s \in \mathbb{R}^3$为角速度$\omega$基于固定系$\{s\}$的向量表示形式，$[\omega_s] \in so(3)$是它的$3 \times 3$反对称矩阵形式

$\omega_b \in \mathbb{R}^3$为角速度$\omega$基于物体系$\{b\}$的向量表示形式，$[\omega_b] \in so(3)$是它的$3 \times 3$反对称矩阵形式

注意：本节课所有坐标系都是静止的！

注意： $\omega_b$ 是相对静止的坐标系 $\{b\}$ 的角速度，$\{b\}$只是与运动刚体随动坐标系在某时刻瞬时重合（下一时刻，在放置新的$\{b\}$ ）。

## 转动的三参数指数坐标

后续将具体推导

- 引入指数坐标，可以将旋转矩阵$R$写成关于转轴（单位向量$\hat{\omega}$）和转角$\theta$的形式。
- 向量$\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$就是该转动的三参数指数坐标形式。并有如下3中解释方法：
  - ✓ 单位转轴$\hat{\omega}$和转角$\theta$。最初$\{b\}$与$\{s\}$重合，然后绕$\hat{\omega}$转动$\theta$，最终相对$\{s\}$的位形为$R_{sb} = R$。
  - ✓ $\{s\}$中表示的$\hat{\omega}\theta$。最初$\{b\}$与$\{s\}$重合，然后在单位时间内运动$\hat{\omega}\theta$（即$\hat{\omega}\theta$在这一时间段的积分），最终相对$\{s\}$的位形为$R_{sb} = R$。
  - ✓ $\{s\}$中表示的$\hat{\omega}$。最初$\{b\}$与$\{s\}$重合，然后在$\theta$时间内运动$\hat{\omega}$（即$\hat{\omega}$在这一时间段的积分），最终相对$\{s\}$的位形为$R_{sb} = R$。

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

## □ 线性微分方程理论

这里不证明，该解是唯一解

- 线性常微分方程：

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

- 式中$x(t) \in \mathbb{R}$，$a \in \mathbb{R}$为常数，初始条件$x(0) = x_0$。则解为：

$$x(t) = e^{at}x_0$$

- 泰勒级数展开：

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$

- 向量线性常微分方程：

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- 式中$x(t) \in \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为常数，初始条件$x(0) = x_0$。则解为：

$$x(t) = e^{At}x_0$$

- 矩阵指数（Matrix Exponential）泰勒级数展开：

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

## □ 性质

$A$可以写成$A=PDP^{-1}$（$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$，可逆阵$P^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$），则：

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \\
&= I + (PDP^{-1})t + (PDP^{-1})(PDP^{-1})\frac{t^2}{2!} + \cdots \\
&= P(I + Dt + \frac{(Dt)^2}{2!} + \cdots)P^{-1} \\
&= Pe^{Dt}P^{-1}.
\end{aligned}
$$

若$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对角阵，则矩阵指数变成非常简单的形式：

$$
e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n t} \end{bmatrix}
$$

## □ 命题

向量线性常微分方程 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 的解为 $x(t) = e^{At}x_0$，式中：

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

矩阵指数（Matrix Exponential）满足如下特性：

（1）$d(e^{At})/dt = Ae^{At} = e^{At}A$

（2）若$A = PDP^{-1}$（$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$，可逆阵$P^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$），则$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

（3）若$AB = BA$，则$e^A e^B = e^{A+B}$

（4）$(e^A)^{-1} = e^{-A}$

## 刚体转动的指数坐标

- 如图的运动，可以假设$p(0)$以单位速度$1rad/s$从$t=0$运动到$t=\theta$。
- 令$p(t)$表示向量末端点路径，其速度$\dot{p}$为：

$$\dot{p}=\hat{\omega}\times p$$

反对称矩阵

$$\dot{p}=[\hat{\omega}]p$$

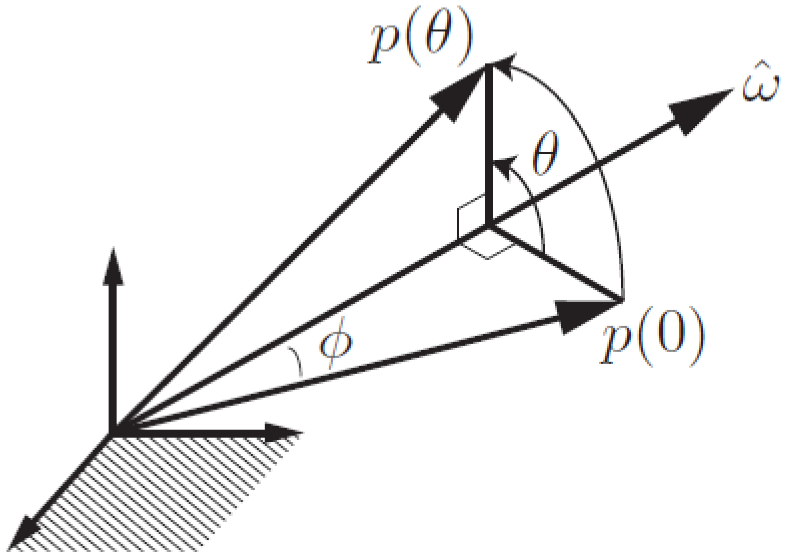
型为$\dot{x}=Ax$

- 解为： $$p(t)=e^{[\hat{\omega}]t}p(0)$$

将$t$换成$\theta$

$$p(\theta)=\boxed{e^{[\hat{\omega}]\theta}}p(0)$$

类似$e^{At}$，如何泰勒级数展开？




图：向量$p(0)$绕单位转轴$\hat{\omega}$旋转$\theta$角度，得到$p(\theta)$。均在固定系$\{s\}$中表示。

## □ $e^{[\hat{\omega}]t}$的展开

提示1：可以验证，$[\hat{\omega}]^3=-[\hat{\omega}]$， $[\hat{\omega}]^4=-[\hat{\omega}]^2$， $[\hat{\omega}]^5=[\hat{\omega}]\cdots$

$$
\begin{aligned}
e^{[\hat{\omega}]\theta} &= I+[\hat{\omega}]\theta+[\hat{\omega}]^2\frac{\theta^2}{2!}+[\hat{\omega}]^3\frac{\theta^3}{3!}+\cdots \\
&= I+\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)[\hat{\omega}]+\left(\frac{\theta^2}{2!}-\frac{\theta^4}{4!}+\frac{\theta^6}{6!}-\cdots\right)[\hat{\omega}]^2
\end{aligned}
$$

提示2：$\sin\theta$、$\cos\theta$的展开

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots \\
\cos\theta &= 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots
\end{aligned}
$$

## $e^{[\hat{\omega}]t}$的展开 -> 罗德里格斯公式（Rodrigues's Formula）

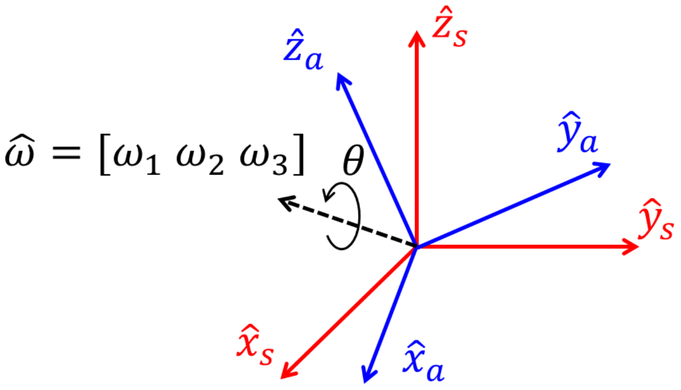
给定向量$\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$，$\theta$为任意标量，而$\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$为单位向量（$||\hat{\omega}|| = 1$），

$[\hat{\omega}]\theta = [\hat{\omega}\theta] \in so(3)$的矩阵指数为：反对称矩阵

特殊正交阵

$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) = e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin\theta\,[\hat{\omega}] + (1-\cos\theta)[\hat{\omega}]^2 \in \boxed{SO(3)}$$

- 上式的意义：




求解

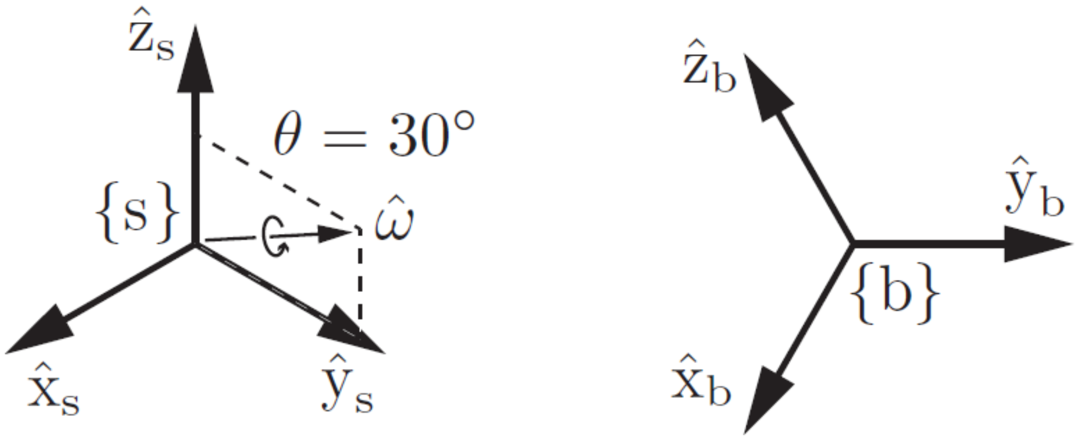
$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{\omega}_1^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) - \hat{\omega}_3 s_\theta & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_2 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) + \hat{\omega}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_2^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_1 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_2 s_\theta & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix}$$

## □ 例

**回顾：**

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$绕$R$转动= $RR_{sb}$

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$绕$R$转动= $R_{sb}R$




图：系$\{b\}$可以通过对系$\{s\}$绕轴$\hat{\omega}_1 = (0, \cos 30°, \sin 30°)$旋转$\theta_1 = 30°$得到。

➢ 该旋转可描述为：

$$\begin{aligned} R &= e^{[\hat{\omega}_1]\theta_1} \\ &= I + \sin\theta_1[\hat{\omega}_1] + (1-\cos\theta_1)[\hat{\omega}_1]^2 \\ &= I + 0.5\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.134\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0.866 & -0.250 & 0.433 \\ 0.250 & 0.967 & 0.058 \\ -0.433 & 0.058 & 0.899 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

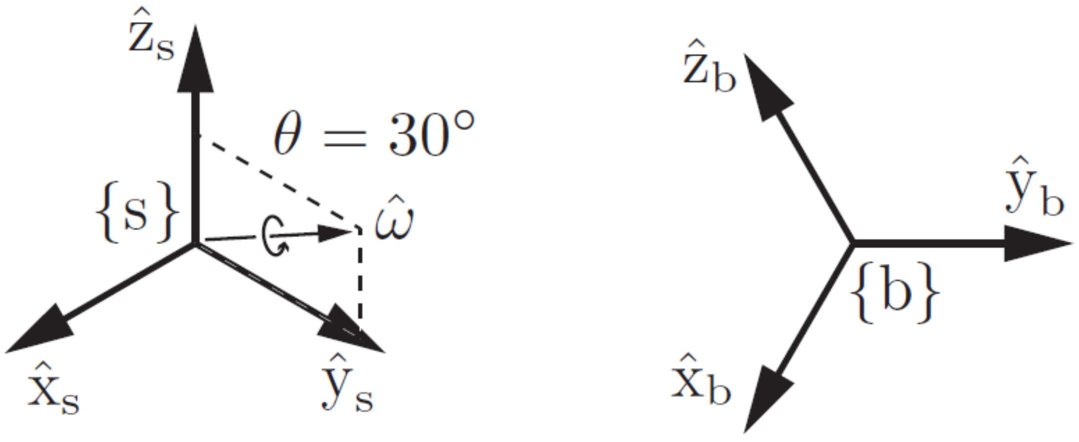
即$R_{sb}$

## 例

回顾：

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系{s} 绕R转动= $RR_{sb}$

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系{b} 绕R转动= $R_{sb}R$




图：系{b}可以通过对系{s}绕轴$\hat{\omega}_1 = (0, \cos 30°, \sin 30°)$旋转$\theta_1 = 30°$得到。

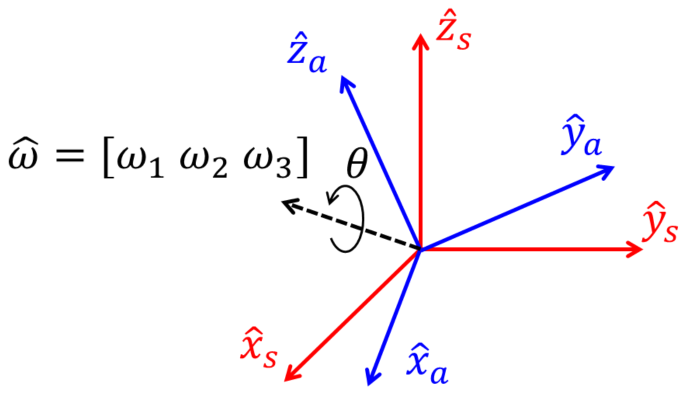
- 若{b}再绕固定系{s}中另一转轴$\hat{\omega}_2$旋转角度$\theta_2$，

即
$$R' = e^{[\hat{\omega}_2]\theta_2} R$$
左乘

- 将与 {b}再绕物体系{b}中一转轴$\hat{\omega}_2$旋转角度$\theta_2$

结果不同
$$R'' = Re^{[\hat{\omega}_2]\theta_2} \neq R' = e^{[\hat{\omega}_2]\theta_2} R$$
右乘

- 矩阵指数：exp：$\hat{\omega}\theta \in so(3)$ -> $R = Rot(\hat{\omega},\theta) \in SO(3)$




求解

$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{\omega}_1^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) - \hat{\omega}_3 s_\theta & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_2 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta) + \hat{\omega}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_2^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_1 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta) - \hat{\omega}_2 s_\theta & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta) + \hat{\omega}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{\omega}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix}$$

- 矩阵对数：log：$R = Rot(\hat{\omega},\theta) \in SO(3)$ -> $\hat{\omega}\theta \in so(3)$

令其相等

$$R = [\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{b}\ \ \hat{\mathrm{y}}_\mathrm{b}\ \ \hat{\mathrm{z}}_\mathrm{b}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boxed{r_{32} - r_{23}} &= 2\hat{\omega}_1 \sin\theta \\ r_{13} - r_{31} &= 2\hat{\omega}_2 \sin\theta \\ r_{21} - r_{12} &= 2\hat{\omega}_3 \sin\theta \end{aligned}$$

$\sin\theta \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{32} - r_{23}) \\ \hat{\omega}_2 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{13} - r_{31}) \\ \hat{\omega}_3 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{21} - r_{12}) \end{aligned}$$

## 5. 刚体转动的矩阵对数



$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)=\begin{bmatrix} c_\theta+\hat{\omega}_1^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta)-\hat{\omega}_3 s_\theta & \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta)+\hat{\omega}_2 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-c_\theta)+\hat{\omega}_3 s_\theta & c_\theta+\hat{\omega}_2^2(1-c_\theta) & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta)-\hat{\omega}_1 s_\theta \\ \hat{\omega}_1\hat{\omega}_3(1-c_\theta)-\hat{\omega}_2 s_\theta & \hat{\omega}_2\hat{\omega}_3(1-c_\theta)+\hat{\omega}_1 s_\theta & c_\theta+\hat{\omega}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\text{相等}]{\text{令其}} R=[\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{b}\ \ \hat{\mathrm{y}}_\mathrm{b}\ \ \hat{\mathrm{z}}_\mathrm{b}]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{32}-r_{23} &= 2\hat{\omega}_1\sin\theta \\ r_{13}-r_{31} &= 2\hat{\omega}_2\sin\theta \\ r_{21}-r_{12} &= 2\hat{\omega}_3\sin\theta \end{aligned} \xrightarrow{\sin\theta\neq 0} \begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{32}-r_{23}) \\ \hat{\omega}_2 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{13}-r_{31}) \\ \hat{\omega}_3 &= \frac{1}{2\sin\theta}(r_{21}-r_{12}) \end{aligned}$$

$$\hat{\omega}_1^2+\hat{\omega}_2^2+\hat{\omega}_3^2=1$$

so(3)

$$[\hat{\omega}]=\begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega}_3 & \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 & 0 & -\hat{\omega}_1 \\ -\hat{\omega}_2 & \hat{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2\sin\theta}\left(R-R^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\operatorname{tr} R=r_{11}+r_{22}+r_{33}=1+2\cos\theta$$

- 前面给出了当$\sin\theta \neq 0$时的结果。
- 当$\sin\theta = 0$时，即$\theta = k\pi$：
  - 当$k$为偶数时，无论$\hat{\omega}$取何值，刚体都能转回原处，因此$R = I$，不需要定义$\hat{\omega}$。
  - 当$k$为奇数时，罗德里格斯公式可以化简为：$R = e^{[\hat{\omega}]\pi} = I + 2[\hat{\omega}]^2$
  - 提出上式的3个对角元素，可导出：

$$\hat{\omega}_i = \pm\sqrt{\frac{r_{ii}+1}{2}}, \qquad i = 1,2,3$$

- 提出上式的非对角元素，可导出：

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2 &= r_{12} \\ 2\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3 &= r_{23} \\ 2\hat{\omega}_1\hat{\omega}_3 &= r_{13} \end{aligned}$$

- 由对称性，可导出：

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_{21} \\ r_{23} &= r_{32} \\ r_{13} &= r_{31} \end{aligned}$$

- 上述方法给出，$\theta$在$2\pi$区间都有解。
- 注意到转轴的正负，我们可以继续限制$\theta$在$[0,\pi]$内。

## □ 算法

给定$R \in SO(3)$，总能找到单位转轴$\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$（$||\hat{\omega}|| = 1$），$\theta \in [0,\pi]$，使得$R = e^{[\hat{\omega}]\theta}$ 。

- 若$R = I$，则$\theta = 0$，不用定义$\hat{\omega}$。
- 若$\mathrm{tr}R = -1$，则$\theta = \pi$， $\hat{\omega}$可取右侧3种任一种：
- 其他情况，

$$\theta = \cos^{-1}\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\, R - 1)\right) \in [0, \pi)$$

$$[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^{\mathrm{T}})$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{33})}} \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 + r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{22})}} \begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 + r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{11})}} \begin{bmatrix} 1 + r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$$

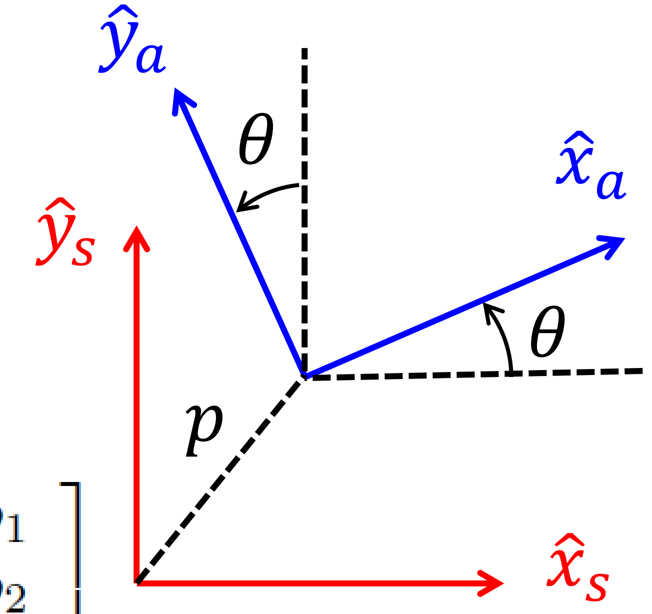
每个$R \in SO(3)$总会满足上述一种情况，因此存在一个与之对应的矩阵对数$[\hat{\omega}]\theta$。

## 特殊欧式群（Special Euclidean Group, SE(3)）

回顾：
什么是SO(3)？so(3)？

- 又称刚体运动（Rigid Body Motion）群、齐次变换（Homogeneous Transformation）矩阵群。
- 用旋转矩阵$R \in SO(3)$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$姿态，用向量$p \in \mathbb{R}^3$表示$\{b\}$原点相对于$\{s\}$的位置，并整合在一起，形成$4 \times 4$的矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




- 降为到2维平面内，SE（2）为

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 命题1

齐次变换阵$T \in SE(3)$的逆也是齐次变换阵。

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里不同于$R^{-1} = R^T$

$T^{-1} \neq T^T$

## 命题2

两个齐次变换阵的乘积也是齐次变换阵。

## 命题3

齐次变换阵的乘法满足结合律，但一般不满足交换律。

$$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$$

$$T_1T_2 \neq T_2T_1$$

## 齐次

如前述，对一向量$x \in \mathbb{R}^3$进行旋转+平移，

需要计算$Rx + p$，利用$T \in SE(3)$：

$$T\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx + p \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标

## □ 命题4

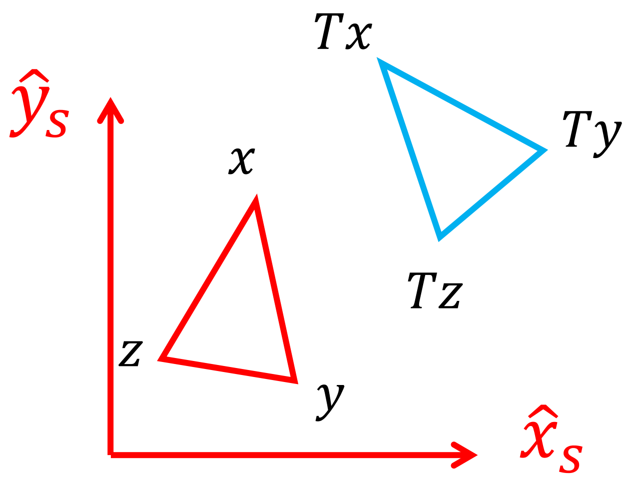
$T$可以看作对空间$\mathbb{R}^3$的点的变换

给定$T=(R,p)\in SE(3)$和$x,y\in\mathbb{R}^3$，总有

$$\|Tx-Ty\|=\|x-y\|$$

$$\langle Tx-Tz,Ty-Tz\rangle=\langle x-z,y-z\rangle$$

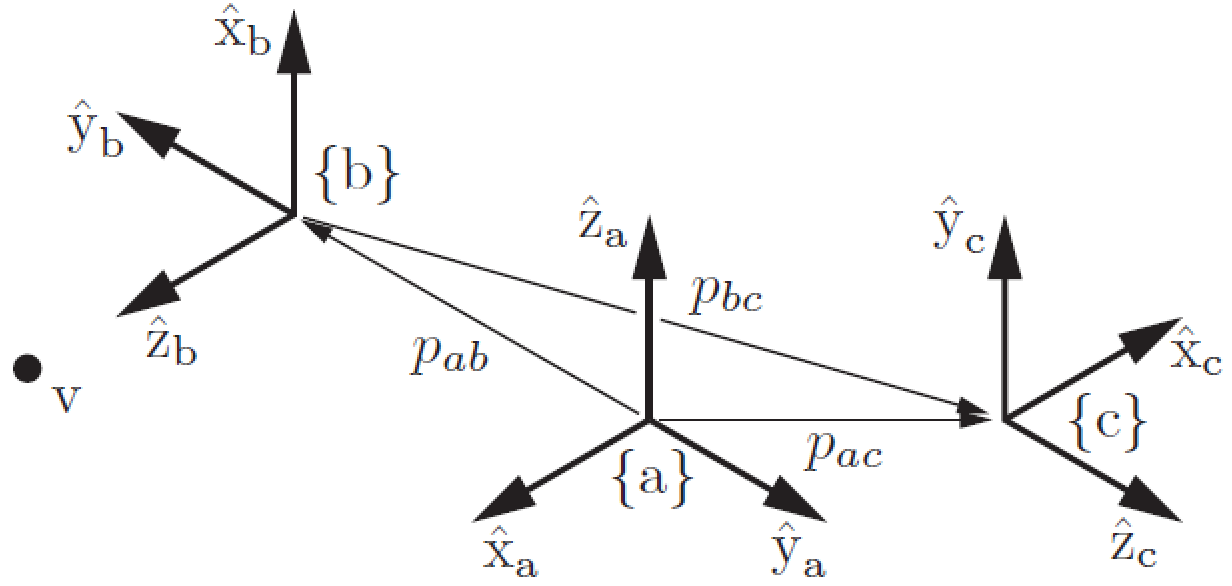
- 第一个式子：齐次变换有等距特性。
- 第二个式子：齐次变换有等角特性。
- 例如，有三角形，三个顶点分别用$x,y,z\in\mathbb{R}^3$表示。三点使用齐次变换$T\in SE(3)$旋转并平移后，得到新三角形。两三角形全等。



# 齐次变换矩阵的应用

回顾：旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 的应用。

1. 表示位形/位姿（位置和姿态）；
2. 变换参考坐标系；
3. 移动向量或坐标系。




图：空间中3个参考坐标系，点v在$\{b\}$中可表示为$v_b = (0,0,1.5)$

➤ 令固定坐标系$\{s\}$与$\{a\}$重合，$\{a\}$相对于$\{s\}$的位形为$T_{sa} = (R_{sa}, p_{sa})$，$\{b\}$、$\{c\}$类似：

$$R_{sa} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{sc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

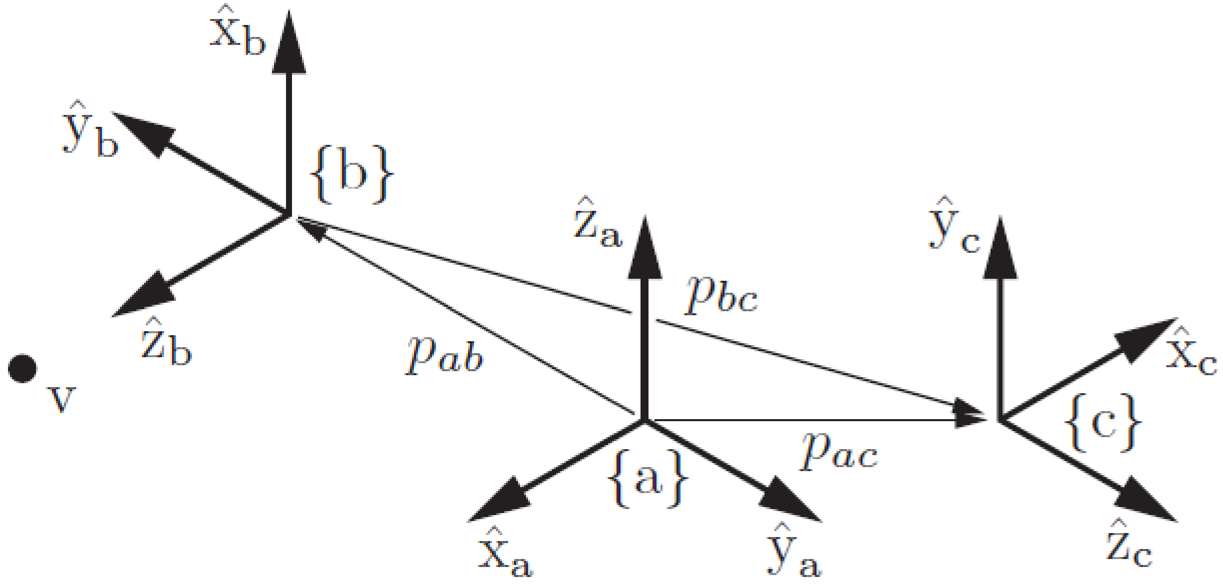
➤ 原点相对于$\{s\}$的位置为：

$$p_{sa} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{sb} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{sc} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# 齐次变换矩阵的应用

回顾：旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 的应用。

1. 表示位形/位姿（位置和姿态）；
2. 变换参考坐标系；
3. 移动向量或坐标系。




图：空间中3个参考坐标系，点v在$\{b\}$中可表示为$v_b = (0,0,1.5)$

➢ 任何坐标系都可以相对其他坐标系来表示，不一定局限于相对$\{s\}$。如$\{c\}$相对于$\{b\}$：

$$R_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ $\{c\}$原点相对于$\{b\}$的位置为：

$$p_{bc} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## 齐次变换矩阵的应用

1. 表示位形/位姿（位置和姿态）；
2. 变换参考坐标系；
3. 移动向量或坐标系。

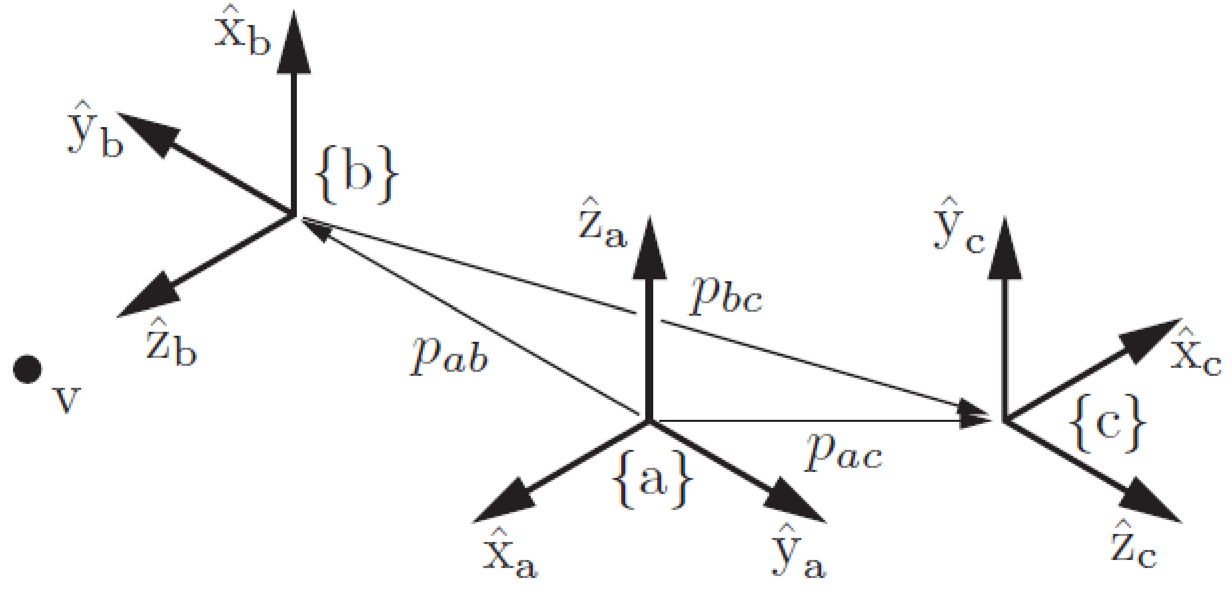
➢ 类似于旋转运动的下角标相减原则：

$$T_{ab}T_{bc} = T_{a\cancel{b}}T_{\cancel{b}c} = T_{ac}$$

$$T_{ab}v_b = T_{a\cancel{b}}v_{\cancel{b}} = v_a,$$

向量v在$\{b\}$的表示

向量v在$\{a\}$的表示




图：空间中3个参考坐标系，点v在$\{b\}$中可表示为$v_b = (0,0,1.5)$

## □ 齐次变换矩阵的应用

1. 表示位形/位姿（位置和姿态）；
2. 变换参考坐标系；
3. 移动向量或坐标系。

➢ 设$T_{sb}$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的位形，齐次变换矩阵$T=(R,p)=(Rot(\hat{\omega},\theta),p)$作用于$T_{sb}$：先绕$\hat{\omega}$转动$\theta$，再平移$p$。

➢ 为不引起混淆，将$3\times3$的旋转算子$Rot(\hat{\omega},\theta)$写成齐次变换矩阵的形式：

$$\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)=\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

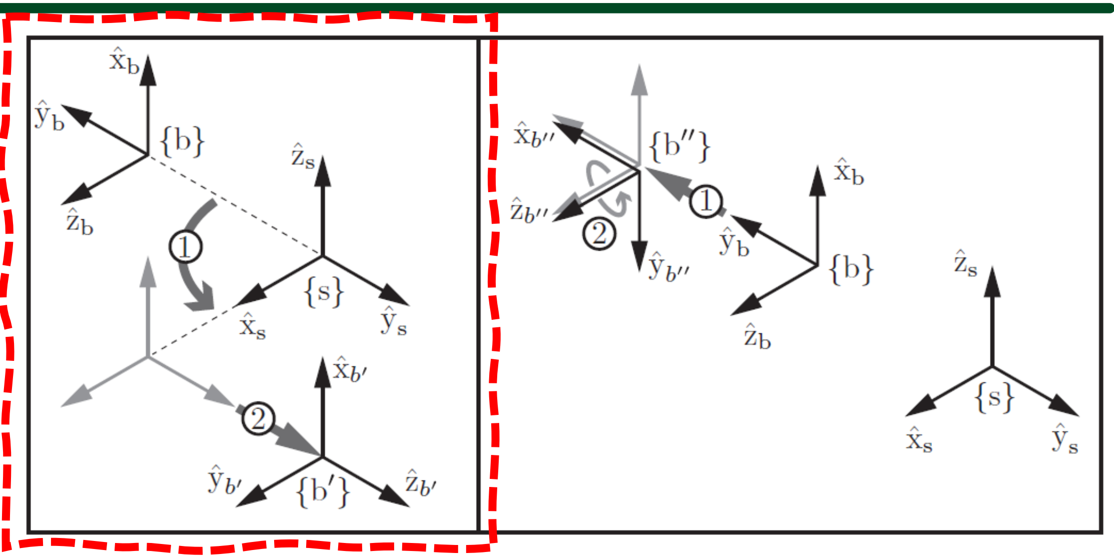
绕坐标系x轴旋转：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

➢ 同样，可以定义移动算子：

$$\mathrm{Trans}(p)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 齐次变换矩阵的应用

- 对于$T_{sb}$左乘还是右乘$T=(R,p)$，关系着是相对$\{s\}$还是$\{b\}$进行的旋转与平移：




$$T_{sb'} = TT_{sb} = \underline{\mathrm{Trans}(p)\,\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)}T_{sb}$$

左乘，相对$\{s\}$

$$= \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR_{sb} & Rp_{sb}+p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{sb''} = T_{sb}T = T_{sb}\,\mathrm{Trans}(p)\,\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)$$

右乘，相对$\{b\}$

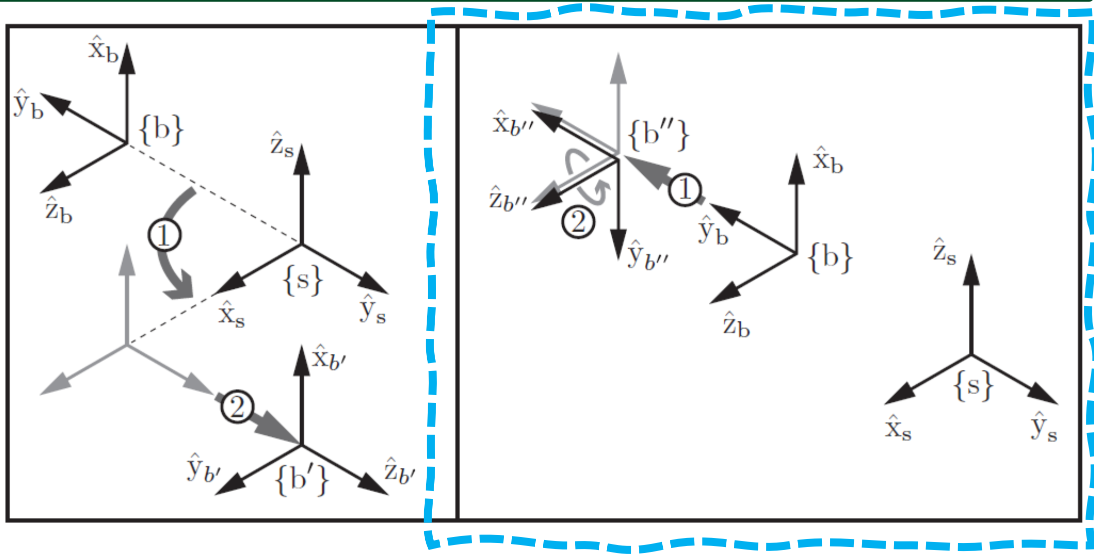
$$= \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb}R & R_{sb}p+p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 解释：

1. 先将$\{b\}$相对$\{s\}$绕$\hat{\omega}$转动$\theta$（若两系原点一开始不重合，则会产生位移）
2. 再相对$\{s\}$移动$p$，得到新系$\{b'\}$

## 齐次变换矩阵的应用

- 对于$T_{sb}$左乘还是右乘$T=(R,p)$，关系着是相对$\{s\}$还是$\{b\}$进行的旋转与平移：




$$T_{sb'} = TT_{sb} = \mathrm{Trans}(p)\,\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)T_{sb}$$
$$= \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR_{sb} & Rp_{sb}+p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘，相对$\{s\}$

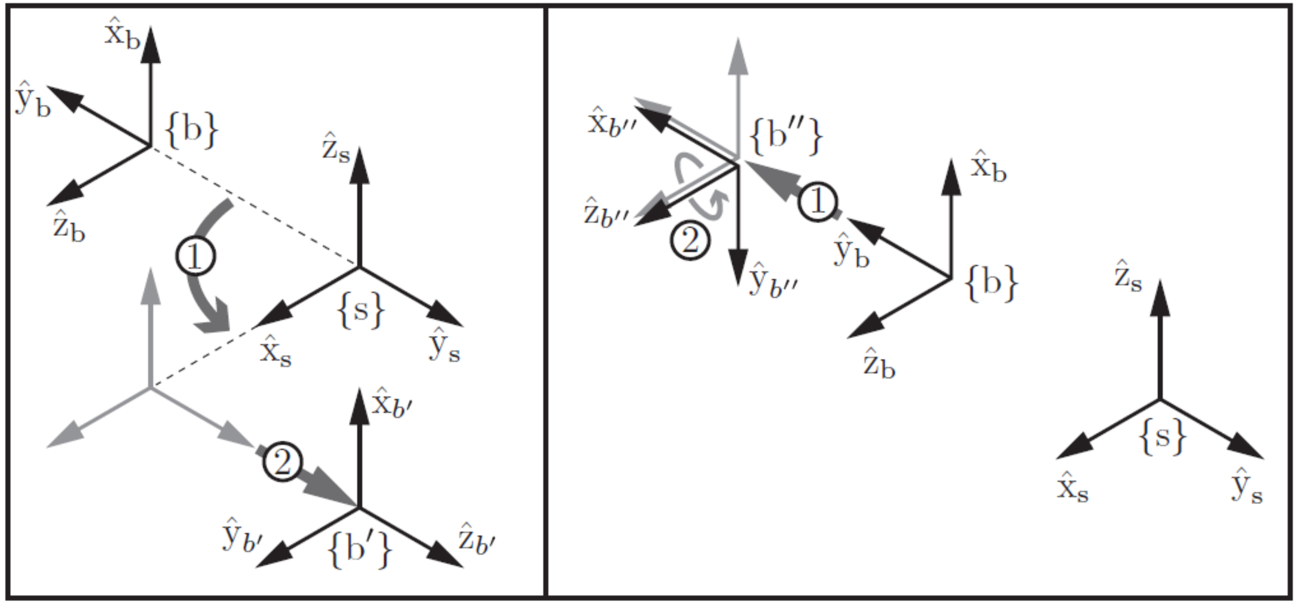
$$T_{sb''} = T_{sb}T = T_{sb}\,\mathrm{Trans}(p)\,\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta)$$
$$= \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb}R & R_{sb}p+p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

右乘，相对$\{b\}$

- 解释：

1. 先将$\{b\}$相对于自身移动$p$
2. 再相对新坐标系绕$\hat{\omega}$转动$\theta$（此时坐标系原点不会运动），得到新系$\{b''\}$

## 例




图：单位转轴$\hat{\omega}=(0,0,1)$，转角$\theta=90°$，点$p=(0,2,0)$。 初始$\{b\}$原点与$\{s\}$距离为2。

左图：左乘操作：$\{b\}$先绕$\hat{z}_s$转动$\theta$，再沿$\hat{y}_s$移动$p$，得到$\{b'\}$

右图：右乘操作：$\{b\}$先沿$\hat{y}_b$移动$p$ ，再绕新的$\hat{z}_b$转动$\theta$，得到$\{b''\}$

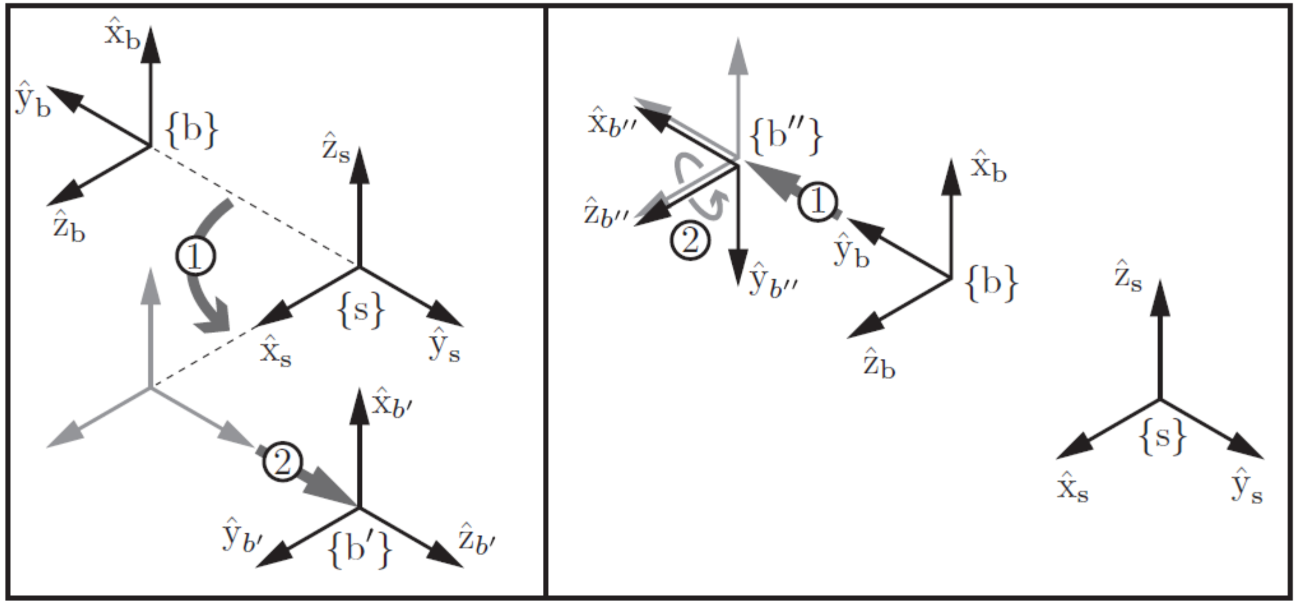
- 初始位形

$$T_{sb}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&-2\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 对应的齐次变换矩阵

$$T=(\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta),p)=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

## □ 例




图：单位转轴$\hat{\omega} = (0,0,1)$，转角$\theta = 90°$，点$p = (0,2,0)$。初始$\{b\}$原点与$\{s\}$距离为2。

左图：左乘操作：$\{b\}$先绕$\hat{z}_s$转动$\theta$，再沿$\hat{y}_s$移动$p$，得到$\{b'\}$

右图：右乘操作：$\{b\}$先沿$\hat{y}_b$移动$p$，再绕新的$\hat{z}_b$转动$\theta$，得到$\{b''\}$

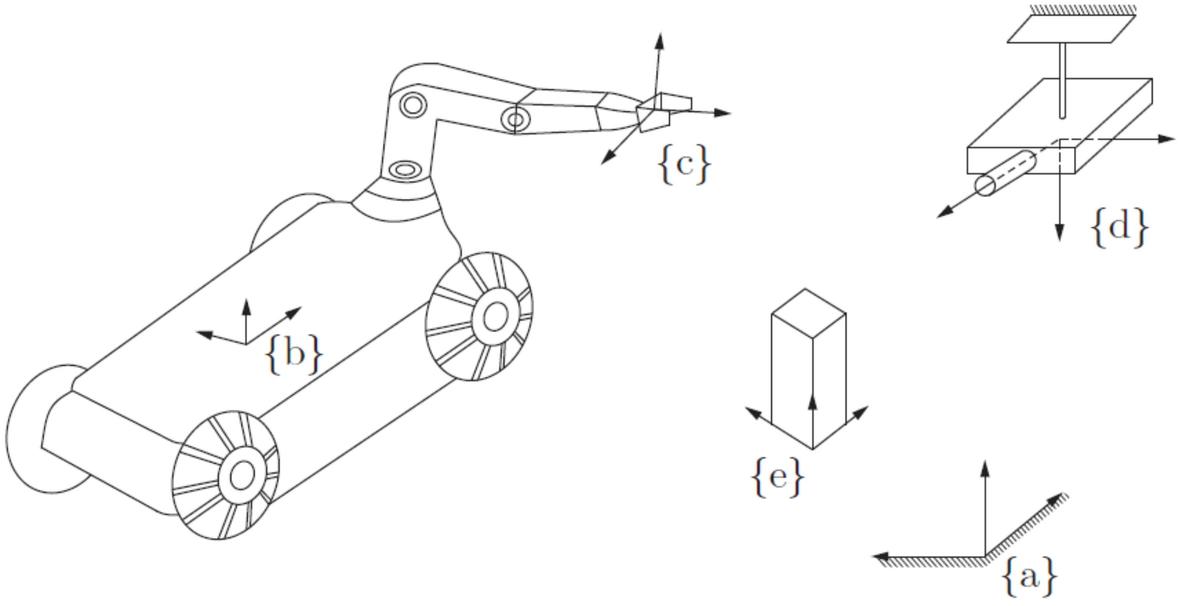
- 左乘操作的结果

$$TT_{sb} = T_{sb'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 右乘操作的结果

$$T_{sb}T = T_{sb''} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 例




➢ 已知：

- 机器车相对于相机$T_{db}$
- 目标物体相对于相机$T_{de}$
- 相机相对于空间$T_{ad}$
- 机械夹爪相对于机器车$T_{bc}$

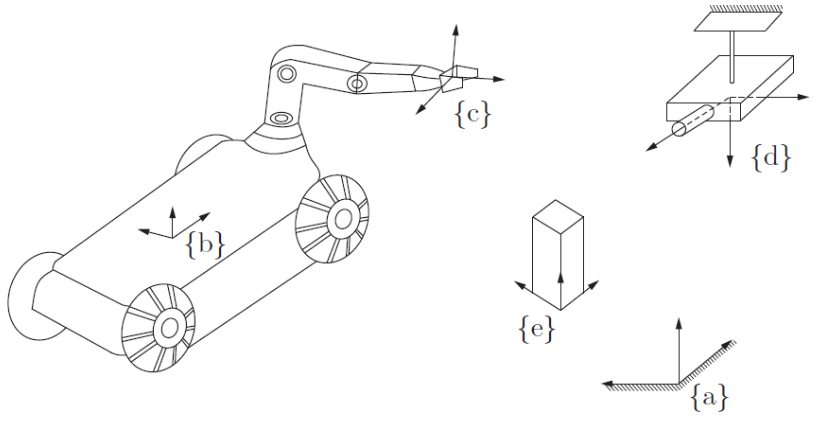
➢ 求解：

- 机械夹爪相对于目标物体$T_{ce}$

➢ 解：

$$T_{ab}T_{bc}T_{ce} = T_{ad}T_{de}$$
$$T_{ab} = T_{ad}T_{db}$$
$$T_{ce} = (T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1}T_{ad}T_{de}$$

## 例




- 机器车相对于相机$T_{db}$

$$T_{db} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 250 \\ 0 & -1 & 0 & -150 \\ -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 相机相对于空间$T_{ad}$

$$T_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 目标物体相对于相机$T_{de}$

$$T_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 机械夹爪相对于机器车$T_{bc}$

$$T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 30 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -40 \\ 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 解：

- 机械夹爪相对于目标物体$T_{ce}$

$$T_{ce} = (T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1} T_{ad}T_{de}$$

$$T_{ce} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -260/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 130/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 物体运动旋量（Body Twist）

回顾： $R^{-1}\dot{R} = [\omega_b]$

$\omega_b \in \mathbb{R}^3$为角速度$\omega$基于物体系$\{b\}$的向量表示形式，$[\omega_b] \in so(3)$是它的$3\times3$反对称矩阵形式

$$T_{sb}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 类似的，$T^{-1}\dot{T}$或$\dot{T}T^{-1}$有无物理意义？
- 先探索对$\dot{T}$左乘$T^{-1}$：

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{T} &= \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{R^{\mathrm{T}}\dot{R}} & \boxed{R^{\mathrm{T}}\dot{p}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- $R^T\dot{R}$在$\{b\}$系下描述的角速度。
- $\dot{p}$ 在 $\{s\}$ 系下描述的 $\{b\}$ 系原点的线速度。
- $R^T\dot{p}$ 在 $\{b\}$ 系下描述的 $\{b\}$ 系原点的线速度。

- 将$\omega_b$和$v_b$组合，称为物体运动旋量 $\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$。

Body twist

➢ 对$\dot{T}$左乘$T^{-1}$得到$T^{-1}\dot{T}$：

$$\begin{aligned}T^{-1}\dot{T} &= \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}}\dot{R} & R^{\mathrm{T}}\dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{[\omega_b]} & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \longrightarrow \mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6.\end{aligned}$$

回顾：SO(3)，so(3)，SE(3)，se(3)

矩阵形式？意义？相互关系？

➢ 角速度$\omega_b$可以写成反对称的形式$[\omega_b]$。

类似的，运动旋量也可以：

$$T^{-1}\dot{T} = [\mathcal{V}_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \longrightarrow$$

➢ 包含了对应刚体位形SE(3)的运动旋量。

## 空间运动旋量（Spatial Twist）

$$T_{sb}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回顾： $\dot{R}R^{-1} = [\omega_s]$

$\omega_s \in \mathbb{R}^3$为角速度$\omega$基于固定系$\{s\}$的向量表示形式，$[\omega_s] \in so(3)$是它的$3 \times 3$反对称矩阵形式

- 类似的，对$\dot{T}$右乘$T^{-1}$：

$$\begin{aligned} \dot{T}T^{-1} &= \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{\dot{R}R^{\mathrm{T}}} & \dot{p} - \dot{R}R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- $\dot{R}R^T$在$\{s\}$系下描述的角速度。

- 将$\omega_s$和$v_s$组合，称为空间运动旋量。

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$ Spatial twist

- 或者写成反对称矩阵的形式：

$$\dot{T}T^{-1} = [\mathcal{V}_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

## 空间运动旋量（Spatial Twist）

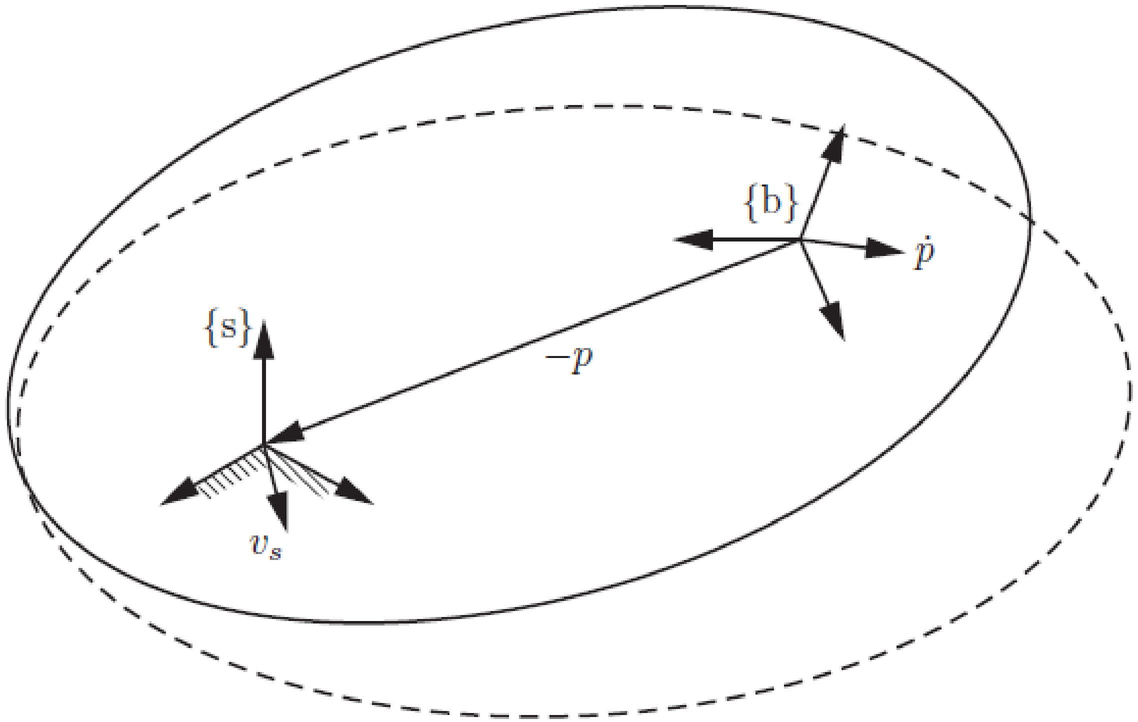
$$T_{sb}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 类似的，对$\dot{T}$右乘$T^{-1}$：

$$\begin{aligned} \dot{T}T^{-1} &= \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{R}R^{\mathrm{T}} & \boxed{\dot{p} - \dot{R}R^{\mathrm{T}}p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

物理意义

- $v_s = \dot{p} - \dot{R}R^T p = \dot{p} - \omega_s \times p = \dot{p} + \omega_s \times (-p)$




图：初始位置（实线）
移动之后（虚线）

✓ 假设运动刚体的尺寸足够大，$v_s$可看作是刚体上与$\{s\}$系原点重合的点的瞬时速度，在$\{s\}$中度量。

## □ $\mathcal{V}_s$与$\mathcal{V}_b$的关系

- $\omega_b$表示在$\{b\}$中的角速度， $\omega_s$表示在$\{s\}$中的角速度。
- $v_b$表示在$\{b\}$中与$\{b\}$原点重合的点的线速度，$v_s$表示在$\{s\}$中与$\{s\}$原点重合的点的线速度。
- 注意：

对$\dot{T}$左乘$T^{-1}$得到$T^{-1}\dot{T}$

$$[\mathcal{V}_b] = T^{-1}\dot{T} \qquad [\mathcal{V}_s] = \dot{T}T^{-1}$$

对$\dot{T}$右乘$T^{-1}$得到$\dot{T}T^{-1}$

- 因此

$$[\mathcal{V}_b] = T^{-1}\dot{T} = T^{-1}[\mathcal{V}_s]T$$
$$[\mathcal{V}_s] = T[\mathcal{V}_b]T^{-1}$$

- 展开

$$[\mathcal{V}_s] = \begin{bmatrix} R[\omega_b]R^{\mathrm{T}} & -R[\omega_b]R^{\mathrm{T}}p + Rv_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 利用等式$R[\omega]R^T = [R\omega]$和$[\omega]p = -[p]\omega$：

$$\begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix}$$

## 伴随变换矩阵（Adjoint Representation）

给定$T=(R,p)\in SE(3)$，其伴随变换矩阵$[Ad_T]$为：

$$[\mathrm{Ad}_T]=\begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{6\times 6}$$

- 对于任意$\mathcal{V}\in\mathbb{R}^6$，与$T$相关联的伴随射映（adjoint map）为：

$$\mathcal{V}'=[\mathrm{Ad}_T]\mathcal{V}$$ 或写作 $$\mathcal{V}'=\mathrm{Ad}_T(\mathcal{V})$$

- 写成矩阵的形式（$[\mathcal{V}]\in se(3)$）：

$$[\mathcal{V}']=T[\mathcal{V}]T^{-1}$$

$$T_{sb}(t)=T(t)=\begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\dot{T}=[\mathcal{V}_b]=\begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in se(3)$$

$$\dot{T}T^{-1}=[\mathcal{V}_s]=\begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in se(3)$$

$$[\mathcal{V}_b]=T^{-1}\dot{T}=T^{-1}[\mathcal{V}_s]T$$

$$[\mathcal{V}_s]=T[\mathcal{V}_b]T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix}$$

## 命题

令$T_1, T_2 \in SE(3)$和$\mathcal{V} = (\omega, v)$。

$$[\mathrm{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

- 则有

$$\mathrm{Ad}_{T_1}\left(\mathrm{Ad}_{T_2}(\mathcal{V})\right) = \mathrm{Ad}_{T_1 T_2}(\mathcal{V})$$

或写作

$$[\mathrm{Ad}_{T_1}][\mathrm{Ad}_{T_2}]\mathcal{V} = [\mathrm{Ad}_{T_1 T_2}]\mathcal{V}$$

- 若令$T_1 = T^{-1}$， $T_2 = T$，则可推出：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{T^{-1}}\left(\mathrm{Ad}_T(\mathcal{V})\right) &= \mathrm{Ad}_{T^{-1}T}(\mathcal{V}) \\ &= \mathrm{Ad}_I(\mathcal{V}) = \mathcal{V}\end{aligned}$$

- 并且，对任意$T \in SE(3)$，有

$$[\mathrm{Ad}_T]^{-1} = [\mathrm{Ad}_{T^{-1}}]$$

## 运动旋量结果小结

有固定坐标系$\{s\}$和物体坐标系$\{b\}$，及一个可微的齐次变换令$T_{sb} \in SE(3)$：

$$T_{sb}(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 则物体运动旋量的矩阵形式为：

$$T_{sb}^{-1}\dot{T}_{sb} = [\mathcal{V}_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

- 且空间运动旋量的矩阵形式为：

$$\dot{T}_{sb}T_{sb}^{-1} = [\mathcal{V}_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

- 两者间的关系为：

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]\mathcal{V}_b,$$

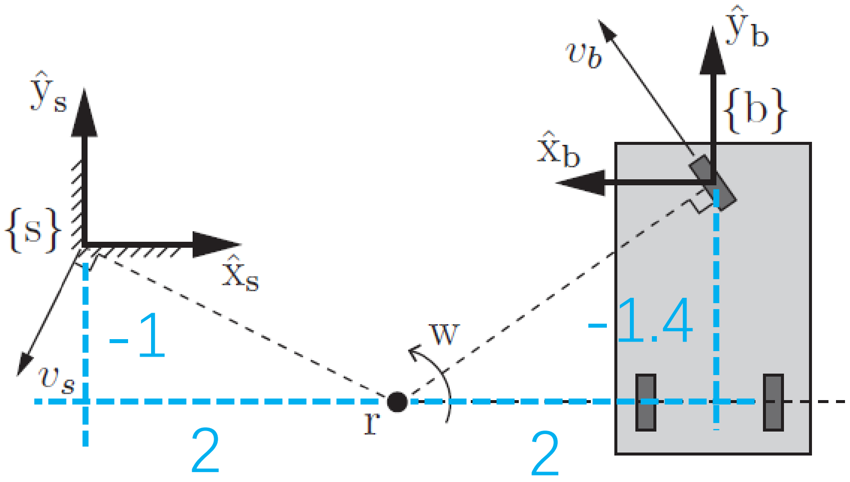
$$\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & 0 \\ -R^{\mathrm{T}}[p] & R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = [\mathrm{Ad}_{T_{bs}}]\mathcal{V}_s.$$

- 写为更通用的形式：对于任意两坐标系$\{c\}$和$\{d\}$，运动旋量$\mathcal{V}_c$和$\mathcal{V}_d$之间有：

$$\mathcal{V}_c = [\mathrm{Ad}_{T_{cd}}]\mathcal{V}_d, \qquad \mathcal{V}_d = [\mathrm{Ad}_{T_{dc}}]\mathcal{V}_c.$$

## □ 例

单轮（前驱）小车以角速度$\omega = 2rad/s$（$\omega_s = (0,0,2)$或$\omega_b = (0,0,-2)$）绕平面内点$r$（$r_s = (2,-1,0)$或$r_b = (2,-1.4,0)$）转动。




图：与小车底盘瞬时运动相对应的运动旋量可形象地表示为角速度$\omega$绕某一点$r$旋转

➢ 此时有

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 根据简单几何观察，有

$$v_s = \omega_s \times (-r_s) = r_s \times \omega_s = (-2,-4,0),$$
$$v_b = \omega_b \times (-r_b) = r_b \times \omega_b = (2.8,4,0),$$

➢ 由此可导出

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2.8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ 思考：试着计算是否有 $\mathcal{V}_s = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]\mathcal{V}_b$

Command Window

```
>> Tsb = [-1 0 0 4; 0 1 0 0.4; 0 0 -1 0; 0 0 0 1];
>> AdTsb = Adjoint(Tsb)

AdTsb =

   -1.0000         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0   -1.0000         0         0         0
         0         0   -0.4000   -1.0000         0         0
         0         0    4.0000         0    1.0000         0
    0.4000    4.0000         0         0         0   -1.0000

>> Vs = [0 0 2 -2 -4 0]';
>> Vb = [0 0 -2 2.8 4 0]';
>> AdTsb*Vb

ans =

         0
         0
    2.0000
   -2.0000
   -4.0000
         0

>> AdTsb*Vb - Vs

ans =

   1.0e-15 *

         0
         0
         0
    0.2220
         0
         0
```

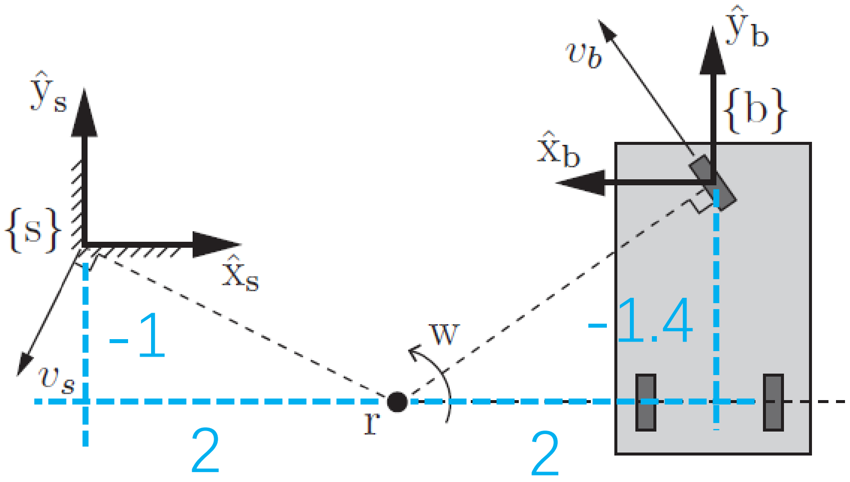
$rad/s$（$\omega_s = (0,0,2)$

$r_s = (2,-1,0)$或$r_b =$

1 | 4, 0.4, 0, 1

-4, 0),

, 0),




图：与小车底盘瞬时运动相对应的运动旋量可形象地表示为角速度$\omega$绕某一点$r$旋转

➢ 由此可导出

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2.8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

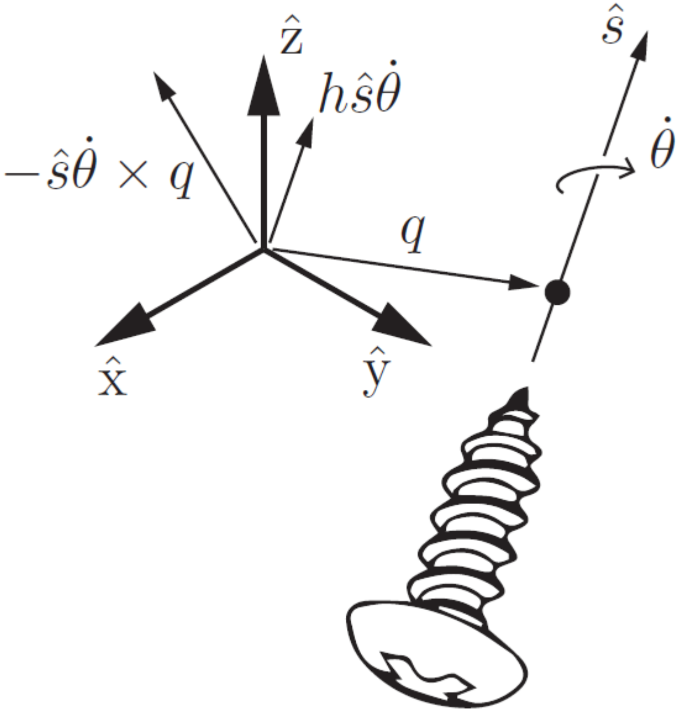
➢ 思考：试着计算是否有 $\mathcal{V}_s = [\mathrm{Ad}_{T_{sb}}]\mathcal{V}_b$

## 螺旋轴

回顾：转动的三参数指数坐标P42

- 旋转运动：角速度$\omega$可写成$\hat{\omega}\theta$的形式。
- 旋转+平移运动：即运动旋量，也可以写螺旋轴$\mathcal{S}$与绕该周转动的速度组合形式。
- 螺旋轴$\mathcal{S}$代表了与螺丝类似的运动：绕螺丝轴的转动与沿着螺丝轴的进动。
- 螺旋轴$\mathcal{S}$的一种表示形式$\{q, \hat{s}, h\}$：
  - $q \in \mathbb{R}^3$为螺旋轴上任一点；
  - $\hat{s}$为螺旋轴方向向量；
  - $h$为螺旋节距（Screw Pitch）；

这里做介绍，后有其他形式。




图：$h$=螺旋节距=线速度/角速度

➢ 可将运动旋量$\mathcal{V}=(\omega,v)$与螺旋轴

$\mathcal{S}=\{q,\hat{s},h\}$及速度$\dot{\theta}$相联系：

$$\boxed{\mathcal{V}}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\hat{s}\dot{\theta}}\\ \boxed{-\hat{s}\dot{\theta}\times q+h\hat{s}\dot{\theta}}\end{bmatrix}$$

向量形式

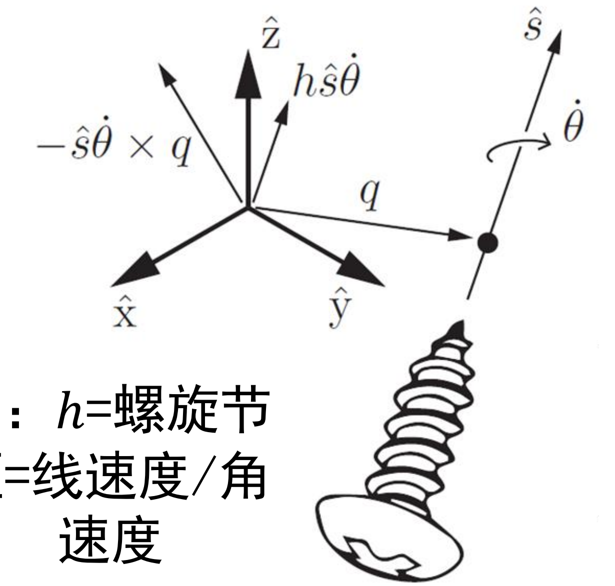
与前述单纯的转动一致

➢ 两部分组成：

- 沿螺旋轴的移动$h\hat{s}\dot{\theta}$
- 由于转动引起的原点位置变化$-\hat{s}\dot{\theta}\times q$ （方向与$\hat{s}$ 正交）

➢ 当$\omega=0$，节距$h$无限大

$q$ 不唯一 $\hat{s}=v/\|v\|$ $\dot{\theta}=\|v\|$




图：$h$=螺旋节距=线速度/角速度

➢ 不难看出，对于任意$\mathcal{V}=(\omega,v)$，当$\omega\neq 0$，有螺旋轴$\{q,\hat{s},h\}$和速度$\dot{\theta}$：

$q$ 为轴上任一点 $\hat{s}=\omega/\|\omega\|$

$h=\hat{\omega}^{\mathrm{T}}v/\dot{\theta}$ $\dot{\theta}=\|\omega\|$

## 螺旋轴的表达

即螺旋轴$\mathcal{S}$主需要简单地正则化$\mathcal{V}$

- 若$\omega \neq 0$，螺旋轴$\mathcal{S} = \mathcal{V}/||\omega|| = (\omega/||\omega||, v/||\omega||)$

  螺旋轴$\mathcal{S}$的角速度$\dot{\theta} = ||\omega||$，$\mathcal{S}\dot{\theta} = \mathcal{V}$

- 若$\omega = 0$，螺旋轴$\mathcal{S} = \mathcal{V}/||v|| = (0, v/||v||)$

  螺旋轴$\mathcal{S}$的线速度$\dot{\theta} = ||v||$，$\mathcal{S}\dot{\theta} = \mathcal{V}$

注意：

虽然可以使用$(\omega, v)$来描述正则化的螺旋轴$\mathcal{S}$（$||\omega||$或$||v||$必为1），及运动旋量$\mathcal{V}$（$\omega$或$v$ 没有限制），但其物理意义不同。

## 命题

- 给定参考坐标系，螺旋轴$\mathcal{S}$可写成 $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$

  若$\|\omega\| = 1$，则$v = -\omega \times q + h\omega$（若为纯转动，$h = 0$）

  若$\omega = 0, \|v\| = 1$，则$h \to \infty$（对应纯移动）

## 螺旋轴的表达

➢ 由于螺旋轴$\mathcal{S}$是正则化的运动旋量，因此$\mathcal{S}=(\omega,v)$的矩阵表示形式为：

$$[\mathcal{S}]=\begin{bmatrix}[\omega] & v\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in se(3),\qquad [\omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\in so(3)$$

➢ 两个不同坐标系$\{a\}$、$\{b\}$中所描述的螺旋轴之间的映射关系为：

$$\mathcal{S}_a=[\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]\mathcal{S}_b,\qquad \mathcal{S}_b=[\mathrm{Ad}_{T_{ba}}]\mathcal{S}_a.$$

回顾：伴随矩阵、伴随映射P79-81

$$[\mathcal{S}]\theta=\begin{bmatrix}[\omega]\theta & v\theta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in se(3)$$

## 刚体运动的指数坐标$\mathcal{S}\theta$

- $\mathcal{S}=(\omega,v)$为螺旋轴，$\theta$为沿螺旋轴将$I$移动到$T$的距离。
- 若$\mathcal{S}=(\omega,v)$节距$h$有限，则$||\omega||=1$，$\theta$为绕螺旋轴转动的角度。
- 若$\mathcal{S}=(\omega,v)$节距$h$无，则$\omega=0$，$||v||=1$，$\theta$为绕螺旋轴移动的距离。

回顾P57：转动的矩阵指数、对数$R=e^{[\omega]\theta}$

$$R=e^{[\omega]\theta}$$

exp：$\hat{\omega}\theta\in so(3)$ -> $R=Rot(\hat{\omega},\theta)\in SO(3)$

log：$R=Rot(\hat{\omega},\theta)\in SO(3)$ -> $\hat{\omega}\theta\in so(3)$

- 螺旋运动的矩阵指数、对数

$$T=e^{[\mathcal{S}]\theta}$$

exp：$[\mathcal{S}]\theta\in se(3)$ -> $T=(R,p)\in SE(3)$

log：$T=(R,p)\in SE(3)$ -> $[\mathcal{S}]\theta\in se(3)$

## 命题

- 有螺旋轴$\mathcal{S}=(\omega,v)$，若$||\omega||=1$，

  则对于任意沿螺旋轴的距离$\theta$，都有

$$
\begin{aligned}
e^{[\mathcal{S}]\theta} &= I+[\mathcal{S}]\theta+[\mathcal{S}]^2\frac{\theta^2}{2!}+[\mathcal{S}]^3\frac{\theta^3}{3!}+\cdots = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & \underline{\left(I\theta+(1-\cos\theta)[\omega]+(\theta-\sin\theta)[\omega]^2\right)}\, v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

对$\theta$求导

回顾P54：罗德里格斯公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rot}(\hat{\omega},\theta) &= e^{[\hat{\omega}]\theta} \\
&= I+\sin\theta\,[\hat{\omega}]+(1-\cos\theta)[\hat{\omega}]^2 \in SO(3)
\end{aligned}
$$

- 若$\omega=0$，$||v||=1$，则

$$
e^{[\mathcal{S}]\theta}=\begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

## ◻ 刚体运动的矩阵对数

➢ 根据Chasles-Mozzi定理证明过程（详见教材第3章第3. 3. 3节），给定$(R, p) \in SE(3)$，总能找到与之对应的螺旋轴$\mathcal{S} = (\omega, v)$和标量$\theta$使得：

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{其中}} [\mathcal{S}]\theta = \begin{bmatrix} [\omega]\theta & v\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

## 算法

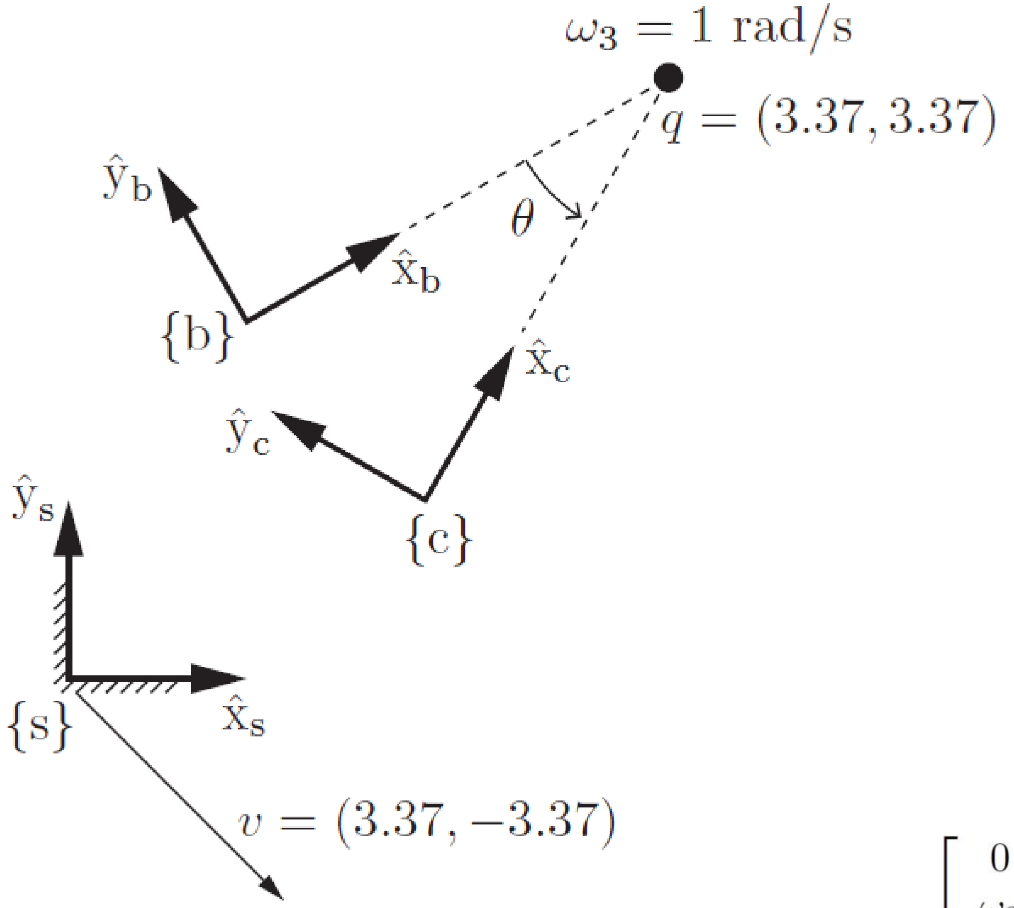
- 给定$(R,p)$写作$T\in SE(3)$，总能找到$\theta\in[0,\pi]$及$\mathcal{S}=(\omega,v)$使得$T=e^{[\mathcal{S}]\theta}$。
- 其中，$\mathcal{S}\theta\in\mathbb{R}^6$是$T$的指数坐标；$[\mathcal{S}]\theta\in se(3)$是$T$的矩阵对数。
  - 若$R=I$，则$\omega=0$， $v=p/||p||$，$\theta=||p||$；
  - 否则，先利用$SO(3)$的矩阵对数确定$\omega$，（ $SO(3)$ 的算法中写为$\hat{\omega}$，P60）；再利用下式计算$v$：

$$v=G^{-1}(\theta)p$$

其中

$$G^{-1}(\theta)=\frac{1}{\theta}I-\frac{1}{2}[\omega]+\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)[\omega]^2$$

## 例




图：所示的平面内刚体运动

- {b}和{c}相对于{s}的位形用$SE(3)$描述：

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 & 1 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{sc} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 & 2 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 纯转动，节距$h = 0$，螺旋轴$\mathcal{S} = (\omega, v)$：

$$\omega = (0, 0, \omega_3), \quad v = (v_1, v_2, 0).$$

左乘

- 可导出$T_{sb}$到$T_{sc}$的螺旋运动，即$T_{sc} = \boxed{e^{[\mathcal{S}]\theta} T_{sb}}$

$$T_{sc} T_{sb}^{-1} = e^{[\mathcal{S}]\theta}$$

- 最终

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 & v_1 \\ \omega_3 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3.37 \\ 1 & 0 & 0 & -3.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3.37 \\ -3.37 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad (or } 30^\circ)$$

matlab

Command Window

```
>> Tsb = [cosd(30) -sind(30) 0 1;
sind(30) cosd(30) 0 2;
0 0 1 0;
0 0 0 1];
>> Tsc = [cosd(60) -sind(60) 0 2;
sind(60) cosd(60) 0 1;
0 0 1 0;
0 0 0 1];
>> expmat = MatrixLog6(Tsc*inv(Tsb))

expmat =

         0   -0.5236         0    1.7624
    0.5236         0         0   -1.7624
         0         0         0         0
         0         0         0         0

>> 1.7624/0.5236

ans =

    3.3659
```

图：所示的平面内刚体运动

- $\{b\}$和$\{c\}$相对于$\{s\}$的位形用$SE(3)$描述：

.37)

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 & 1 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{sc} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 & 2 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 纯转动，节距$h = 0$，螺旋轴$\mathcal{S} = (\omega, v)$：

$$\omega = (0, 0, \omega_3), \quad v = (v_1, v_2, 0).$$

左乘

- 可导出$T_{sb}$到$T_{sc}$的螺旋运动，即$T_{sc} = \boxed{e^{[\mathcal{S}]\theta} T_{sb}}$

$$T_{sc} T_{sb}^{-1} = e^{[\mathcal{S}]\theta}$$

- 最终

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 & v_1 \\ \omega_3 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3.37 \\ 1 & 0 & 0 & -3.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3.37 \\ -3.37 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad (or } 30^\circ)$$

matlab

## 定义

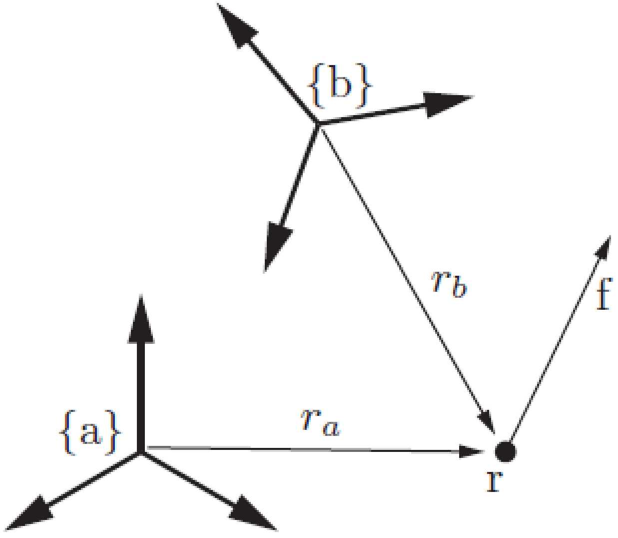
- 考虑作用在刚体上一点$r$的纯力$f$。
- 在参考系$\{a\}$下，$r$可表示为$r_a \in \mathbb{R}^3$，$f$可表示为$f_a \in \mathbb{R}^3$。
- 该力产生的力矩（torque）或力偶（moment）为$m_a \in \mathbb{R}^3$：

$$m_a = r_a \times f_a$$

- 与运动旋量类似，可以将力矩和力合成为空间里（spatial force），称为力旋量（wrench）：在$\{a\}$中：

$$\mathcal{F}_a = \begin{bmatrix} m_a \\ f_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

- 若刚体上作用多个力旋量，只要表示在同一坐标系下，进行相加即可。




- 注意：不同于位形，无法简单利用$T_{ba} \in SE(3)$将$\{a\}$下表示的力旋量，变换到$\{b\}$下。

## 变换力旋量

- 在$\{a\}$与$\{b\}$下表示运动旋量$\mathcal{V}_a,\mathcal{V}_b$。
- 在不同坐标系下，功率相等：

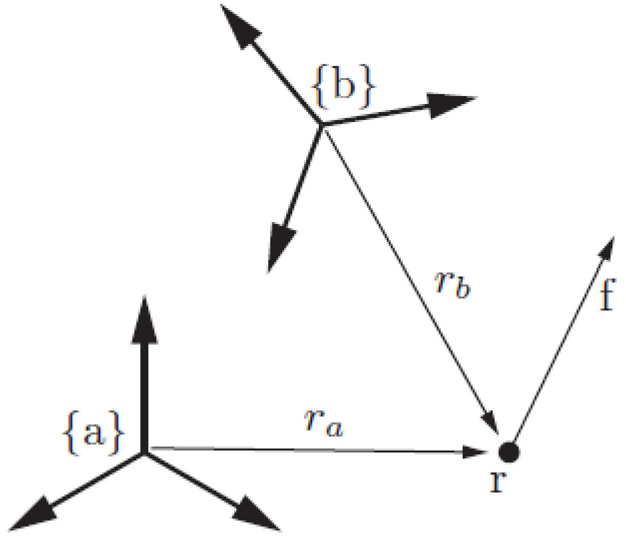
$$\mathcal{V}_b^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_b=\mathcal{V}_a^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a.$$

- 回顾伴随矩阵P79-81，有变换：

$$\mathcal{V}_a = [\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]\mathcal{V}_b$$

- 因此：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_b^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_b &= ([\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]\mathcal{V}_b)^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a \\ &= \mathcal{V}_b^{\mathrm{T}}[\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a.\end{aligned}$$




- 即：在坐标系$\{a\}$与$\{b\}$下表示力旋量$\mathcal{F}_a,\mathcal{F}_b$有关系：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b &= \mathrm{Ad}_{T_{ab}}^{\mathrm{T}}(\mathcal{F}_a)=[\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a, \\ \mathcal{F}_a &= \mathrm{Ad}_{T_{ba}}^{\mathrm{T}}(\mathcal{F}_b)=[\mathrm{Ad}_{T_{ba}}]^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_b.\end{aligned}$$

- 常用的力旋量：空间力旋量$\mathcal{F}_s$和物体力旋量$\mathcal{F}_b$（spatial wrench, body wrench ）

## 例

- 机械手系$\{h\}$上的重力旋量：

$$\mathcal{F}_h = (0,0,0,0,-5\ \mathrm{N},0)$$

- 苹果系$\{a\}$上的重力旋量：

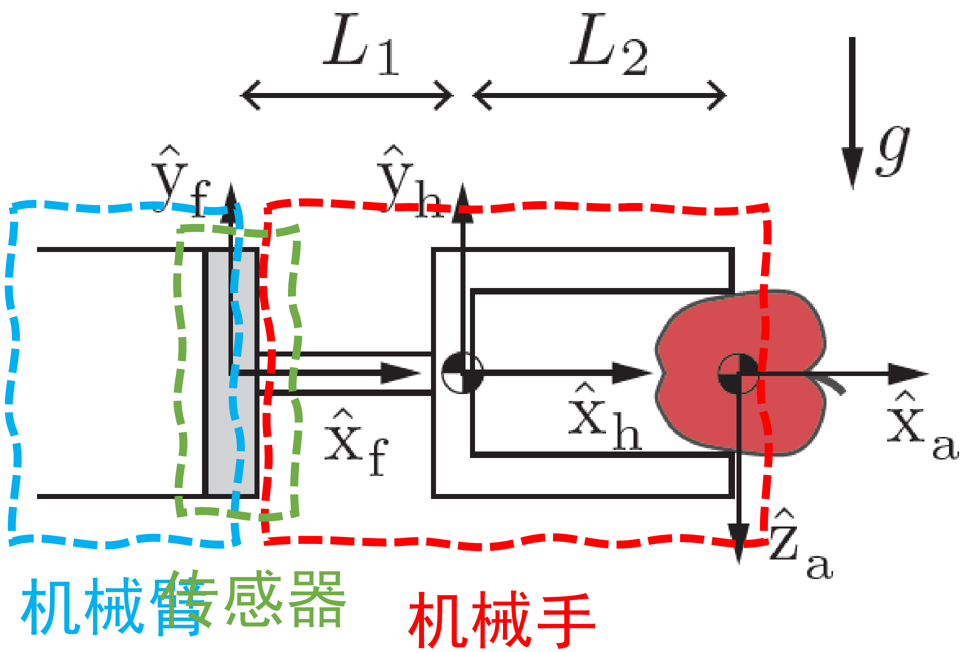
$$\mathcal{F}_a = (0,0,0,0,0,1\ \mathrm{N}).$$

- 变换矩阵：

$$T_{hf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1\ \mathrm{m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.25\ \mathrm{m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 因此，传感器测量的力旋量：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_f &= [\mathrm{Ad}_{T_{hf}}]^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_h + [\mathrm{Ad}_{T_{af}}]^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a \\ &= [0\ 0\ -0.5\ \mathrm{Nm}\ 0\ -5\ \mathrm{N}\ 0]^{\mathrm{T}} + [0\ 0\ -0.25\ \mathrm{Nm}\ 0\ -1\ \mathrm{N}\ 0]^{\mathrm{T}} \\ &= [0\ 0\ -0.75\ \mathrm{Nm}\ 0\ -6\ \mathrm{N}\ 0]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$



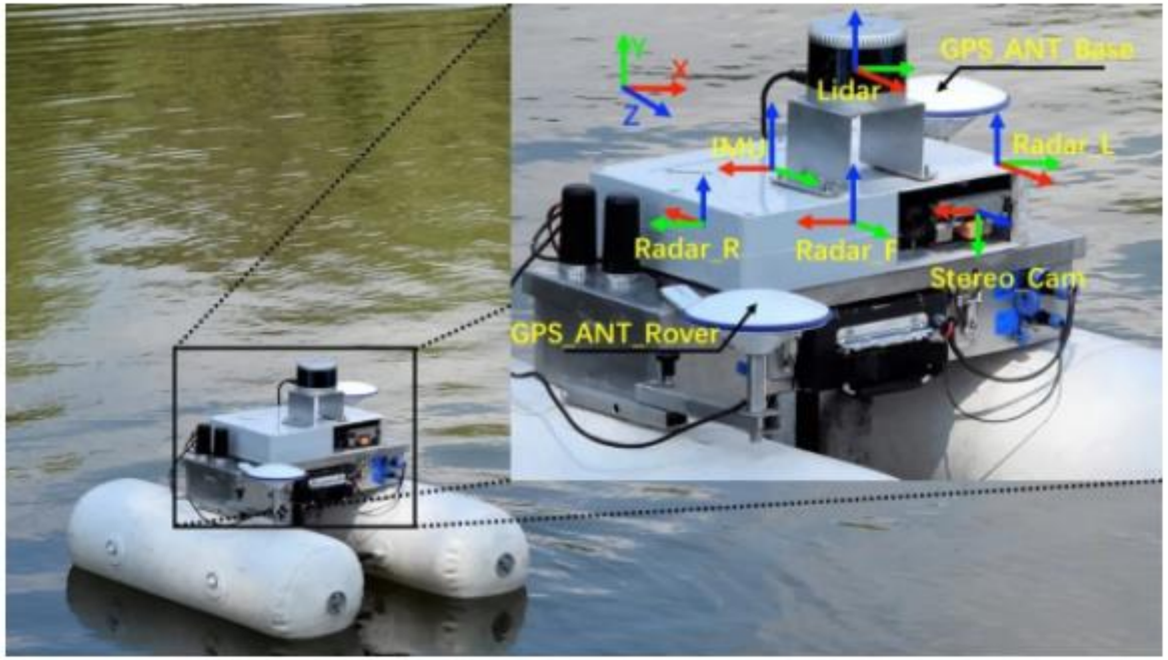

图：机械手抓持质量为0.1kg的苹果，重力加速度g=10m/s2，机械手自重0.5kg。
距离:L1=10cm， L2=15cm。
求机械手与机械臂之间6D力传感器测量的力和力矩?

## 眼动追踪

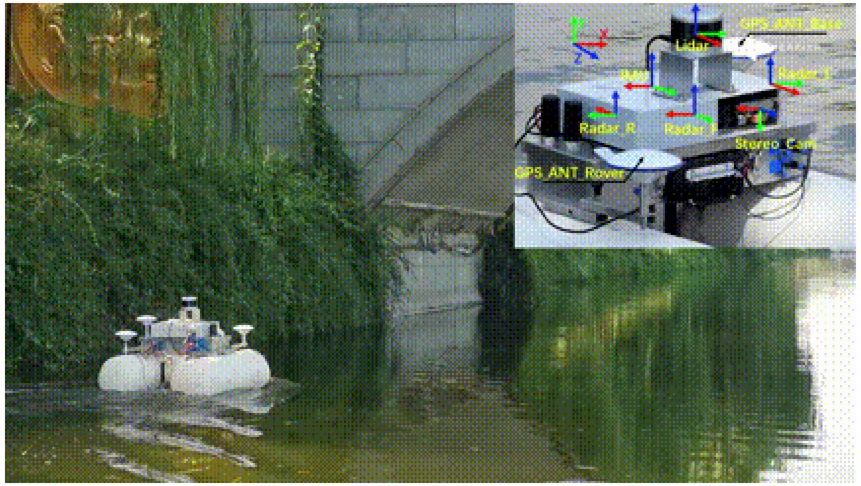
- 如何表示眼睛的朝向？

## □ 智能车/船/飞行器

➢ 如何表示机器人/传感器的位形？




无人自动驾驶船：多种传感器
获取的信息如何统一坐标系



无人船自动行驶

多种传感器获取信息

| 刚体转动 | 一般刚体运动 |
|---|---|
| $R\in SO(3)$:3×3矩阵<br>$R^TR=I, detR=1$ | $T\in SE(3)$:4×4矩阵<br>$T=\begin{bmatrix}R & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}, R\in SO(3), P\in\mathbb{R}^3$ |
| $R^{-1}=R^T$ | $T^{-1}=\begin{bmatrix}R^T & -R^Tp\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ |
| 坐标系变换:<br>$R_{ab}R_{bc}=R_{ac}, R_{ab}p_b=p_a$ | 坐标系变换:<br>$T_{ab}T_{bc}=T_{ac}, T_{ab}p_b=p_a$ |
| 旋转坐标系$\{b\}$:<br>$R=Rot(\hat{\omega},\theta)$<br>$R_{sb'}=RR_{sb}$(绕轴线$\hat{\omega}_s=\hat{\omega}$转动$\theta$)<br>$R_{sb''}=R_{sb}R$(绕轴线$\hat{\omega}_b=\hat{\omega}$转动$\theta$) | 旋转坐标系$\{b\}$:<br>$T=\begin{bmatrix}Rot(\hat{\omega},\theta) & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$<br>$T_{sb'}=TT_{sb}$(先绕轴线$\hat{\omega}_s=\hat{\omega}$转动$\theta$,再相对于$\{s\}$移动$\{b\}$原点距离$p$)<br>$T_{sb''}=T_{sb}T$(先相对于$\{b\}$移动$\{b\}$原点距离$p$,再绕新的坐标系中的轴线$\hat{\omega}$转动$\theta$) |
| 单位转轴$\hat{\omega}\in\mathbb{R}^3$<br>其中,$\|\|\hat{\omega}\|\|=1$ | 单位螺旋轴$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6$<br>其中,①$\|\|\hat{\omega}\|\|=1$或②$\omega=0, \|\|v\|\|=1$<br>对于具有有限节距$h$的螺旋轴$\{q,\hat{s},h\}$<br>$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{s}\\ -\hat{s}\times q+h\hat{s}\end{bmatrix}$ |
| 角速度$\omega=\hat{\omega}\dot{\theta}$ | 运动旋量$\mathcal{V}=\mathcal{S}\dot{\theta}$ |


| | |
|---|---|
| 旋转坐标系$\{b\}$:<br>$R=Rot(\hat{\omega},\theta)$<br>$R_{sb'}=RR_{sb}$(绕轴线$\hat{\omega}_s=\hat{\omega}$转动$\theta$)<br>$R_{sb''}=R_{sb}R$(绕轴线$\hat{\omega}_b=\hat{\omega}$转动$\theta$) | 旋转坐标系$\{b\}$:<br>$T=\begin{bmatrix}Rot(\hat{\omega},\theta) & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$<br>$T_{sb'}=TT_{sb}$(先绕轴线$\hat{\omega}_s=\hat{\omega}$转动$\theta$,再相对于$\{s\}$移动$\{b\}$原点距离$p$)<br>$T_{sb''}=T_{sb}T$(先相对于$\{b\}$移动$\{b\}$原点距离$p$,再绕新的坐标系中的轴线$\hat{\omega}$转动$\theta$) |
| 单位转轴$\hat{\omega}\in\mathbb{R}^3$<br>其中,$\|\|\hat{\omega}\|\|=1$ | 单位螺旋轴$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6$<br>其中,①$\|\|\hat{\omega}\|\|=1$或②$\omega=0, \|\|v\|\|=1$<br>对于具有有限节距$h$的螺旋轴$\{q,\hat{s},h\}$<br>$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{s}\\ -\hat{s}\times q+h\hat{s}\end{bmatrix}$ |
| 角速度$\omega=\hat{\omega}\dot{\theta}$ | 运动旋量$\mathcal{V}=\mathcal{S}\dot{\theta}$ |


| | |
|---|---|
| 对于三维向量$\omega\in\mathbb{R}^3$,<br>$[\omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\in so(3)$<br>对于$\omega, x\in\mathbb{R}^3, R\in SO(3), [\omega]=-[\omega]^T$,<br>$[\omega]x=-[x]\omega, [\omega][x]=([x][\omega])^T$,<br>$R[\omega]R^T=[R\omega]$ | 对于$\mathcal{V}=\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6, [\mathcal{V}]=\begin{bmatrix}[\omega] & v\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in se(3)$<br>$(\omega,v)$可描述运动旋量$\mathcal{V}$或单位螺旋轴$\mathcal{S}$,取决于上下文 |
| $\dot{R}R^{-1}=[\omega_s], R^{-1}\dot{R}=[\omega_s]$ | $\dot{T}T^{-1}=[\mathcal{V}_s], T^{-1}\dot{T}=[\mathcal{V}_s]$<br>$[Ad_T]=\begin{bmatrix}R & 0\\ [p]R & R\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{6\times 6}$<br>$[Ad_T]^{-1}=[Ad_{T^{-1}}], [Ad_{T_1}][Ad_{T_2}]=[Ad_{T_1T_2}]$ |

| 刚体转动 | 一般刚体转动 |
| --- | --- |
| 坐标系变换:<br>$\hat{\omega}_a = R_{ab}\hat{\omega}_b, \ \omega_a = R_{ab}\omega_b$ | 坐标系变换:<br>$\mathcal{S}_a = [Ad_{T_{ab}}]\mathcal{S}_b, \mathcal{V}_a = [Ad_{T_{ab}}]\mathcal{V}_b$ |
| $R \in SO(3)$的指数坐标:$\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$<br>$exp: [\hat{\omega}]\theta \in so(3) \to R \in SO(3)$<br>$R = Rot(\hat{\omega}\theta) = e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1-\cos\theta)[\hat{\omega}]^2$<br>$log: R \in SO(3) \to [\hat{\omega}]\theta \in so(3)$<br>相关算法参考课件3.2.3 | $T \in SE(3)$的指数坐标:$\mathcal{S}\theta \in \mathbb{R}^6$<br>$exp: [\mathcal{S}]\theta \in se(3) \to T \in SE(3)$<br>$T = e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & temp \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$<br>$\text{temp} = (I\theta + (1-\cos\theta)[\omega] + (\theta - \sin\theta)[\omega]^2)v$<br>$log: T \in SE(3) \to exp: [\mathcal{S}]\theta \in se(3)$<br>相关算法参考课件3.3.3 |
| 力矩的坐标变换:<br>$m_a = R_{ab}m_b$ | 力矩的坐标变换:<br>$\mathcal{F}_a = (m_a, f_a) = [Ad_{T_{ba}}]^T\mathcal{F}_b$ |

# 附录代码

- invR = RotInv(R)
  计算旋转矩阵R的逆。
- so3mat = VecToso3(omg)
  将一个三维向量omg转换成3x3的反对称矩阵。
- omg = so3ToVec(so3mat)
  将一个3x3的反对称矩阵转换成三维向量omg。
- [omghat, theta] = AxisAng3(expc3)
  从旋转的指数坐标expc3的三维向量$\hat{\omega}\theta$中抽取旋转轴线$\hat{\omega}$和旋转角度$\theta$。
- [S, theta] = AxisAng6(expc6)
  从旋转的指数坐标expc6的三维向量$\hat{\omega}\theta$中抽取旋转轴线$S$和旋转角度$\theta$。

```
function [omghat, theta] = AxisAng3(expc3)
theta = norm(expc3);
omghat = expc3 / theta;
end
```

```
function omg = so3ToVec(so3mat)
omg = [so3mat(3, 2); so3mat(1, 3); so3mat(2, 1)];
end
```

```
function [S, theta] = AxisAng6(expc6)
theta = norm(expc6(1: 3));
if NearZero(theta)
    theta = norm(expc6(4: 6));
end
S = expc6 / theta;
end
```

## R = MatrixExp3(so3mat)

计算与旋转指数$so3mat \in so(3)$对应的旋转矩阵$R \in SO(3)$。

```
function  R = MatrixExp3(so3mat)
omgtheta = so3ToVec(so3mat);
if NearZero(norm(omgtheta))
    R = eye(3);
else
    [omghat, theta] = AxisAng3(omgtheta);
    omgmat = so3mat / theta;
    R = eye(3) + sin(theta) * omgmat + (1 - cos(theta)) * omgmat * omgmat;
end
end
```

## T = MatrixExp6(se3mat)

计算与旋转指数$se3mat \in se(3)$对应的齐次矩阵$T \in SE(3)$。

```
function T = MatrixExp6(se3mat)
omgtheta = so3ToVec(se3mat(1: 3, 1: 3));
if NearZero(norm(omgtheta))
    T = [eye(3), se3mat(1: 3, 4); 0, 0, 0, 1];
else
    [omghat, theta] = AxisAng3(omgtheta);
    omgmat = se3mat(1: 3, 1: 3) / theta;
    T = [MatrixExp3(se3mat(1: 3, 1: 3)), ...
         (eye(3) * theta + (1 - cos(theta)) * omgmat ...
          + (theta - sin(theta)) * omgmat * omgmat) ...
            * se3mat(1: 3, 4) / theta;
         0, 0, 0, 1];
end
end
```

- so3mat = MatrixLog3(R)

  计算与旋转矩阵$R \in SO(3)$对应的矩阵对数$so3mat \in so(3)$。

- expmat = MatrixLog6(T)

  计算与齐次矩阵$T \in SE(3)$对应的矩阵对数$se3mat \in se(3)$。

```
function so3mat = MatrixLog3(R)
acosinput = (trace(R) - 1) / 2;
if acosinput >= 1
    so3mat = zeros(3);
elseif acosinput <= -1
    if ~NearZero(1 + R(3, 3))
        omg = (1 / sqrt(2 * (1 + R(3, 3)))) ...
              * [R(1, 3); R(2, 3); 1 + R(3, 3)];
    elseif ~NearZero(1 + R(2, 2))
        omg = (1 / sqrt(2 * (1 + R(2, 2)))) ...
              * [R(1, 2); 1 + R(2, 2); R(3, 2)];
    else
        omg = (1 / sqrt(2 * (1 + R(1, 1)))) ...
              * [1 + R(1, 1); R(2, 1); R(3, 1)];
    end
    so3mat = VecToso3(pi * omg);
else
    theta = acos(acosinput);
    so3mat = theta * (1 / (2 * sin(theta))) * (R - R');
end
end
```

```
function expmat = MatrixLog6(T)
[R, p] = TransToRp(T);
omgmat = MatrixLog3(R);
if isequal(omgmat, zeros(3))
    expmat = [zeros(3), T(1: 3, 4); 0, 0, 0, 0];
else
    theta = acos((trace(R) - 1) / 2);
    expmat = [omgmat, (eye(3) - omgmat / 2 ...
                      + (1 / theta - cot(theta / 2) / 2) ...
                        * omgmat * omgmat / theta) * p;
              0, 0, 0, 0];
end
end
```

- T = RpToTrans(R,p)

  构造与旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 及位置向量 $p \in \mathbb{R}^3$ 对应的齐次矩阵 $T \in SE(3)$。

```
function T = RpToTrans(R, p)
T = [R, p; 0, 0, 0, 1];
end
```

- [R, p] = TransToRp(T)

  从齐次矩阵 $T \in SE(3)$ 中分解旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 及位置向量 $p \in \mathbb{R}^3$。

```
function [R, p] = TransToRp(T)
R = T(1: 3, 1: 3);
p = T(1: 3, 4);
end
```

- invT = TransInv(T)

  计算齐次矩阵 $T \in SE(3)$ 的逆。

- se3mat = VecTose3(V)

  构造与六维向量形式的运动旋量 $V$ 对应的 $se(3)$ 矩阵。

```
function se3mat = VecTose3(V)
se3mat = [VecToso3(V(1: 3)), V(4: 6); 0, 0, 0, 0];
end
```

- V = se3ToVec(se3mat)

  计算基于 $se(3)$ 矩阵的六维向量形式的运动旋量 $V$。

```
function V = se3ToVec(se3mat)
V = [se3mat(3, 2); se3mat(1, 3); se3mat(2, 1); se3mat(1: 3, 4)];
end
```

# 附录代码



- AdT = Adjoint(T)

  计算齐次矩阵$T \in SE(3)$的6x6伴随矩阵$[Ad_T]$。

```
function AdT = Adjoint(T)
[R, p] = TransToRp(T);
AdT = [R, zeros(3); VecToso3(p) * R, R];
end
```

- S = ScrewToAxis(q, s, h)

  返回正则化的螺旋轴$S$表示形式，基于螺旋轴方向的单位向量$s$，轴上一点$q$，节距$h$。

```
function S = ScrewToAxis(q, s, h)
S = [s; cross(q, s) + h * s];
end
```

THANKS

# 谢谢大家

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io