



概率论与数理统计

教师：杜亚星





第二十一讲 二维连续型随机变量 条 件概率密度



(三) 条件概率密度

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$,
 (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$,
若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 且 $f_Y(y)$ 连续,
则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

(三) 条件概率密度

同理，若对于固定的 x ， $f_X(x) > 0$ ，且 $f_X(x)$ 连续，在 $X = x$ 条件下， Y 的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$



例1: 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值, 当观察到 $X=x$ ($0 < x < 1$) 时, 数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值, 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$.

解: X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

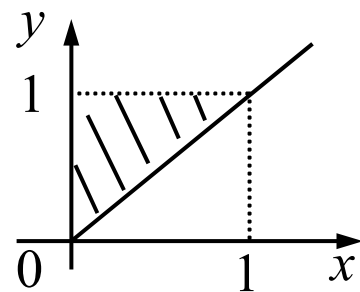
对任给 x ($0 < x < 1$), 在 $X=x$ 条件下, Y 的条件概率密度为:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故 (X,Y) 的概率密度为: $f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

例1: 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值, 当观察到 $X = x (0 < x < 1)$ 时,
数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



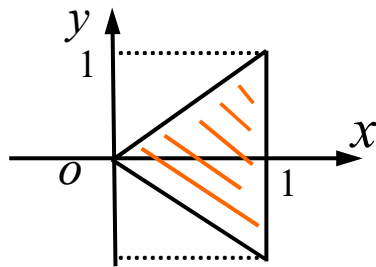
所以 Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例2: 设随机变量 (X, Y) 在区域 $|y| < x < 1$ 内的密度函数是常数, 之外为零, 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 及 $P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$.

解: 概率密度 $f(x, y)$ 的非零区域如图所示。

$$\text{设 } f(x, y) = \begin{cases} k, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



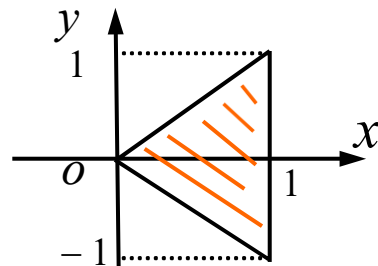
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x k dy = k \int_0^1 2x dx = k$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{|y|}^1 dx = 1 - |y|, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

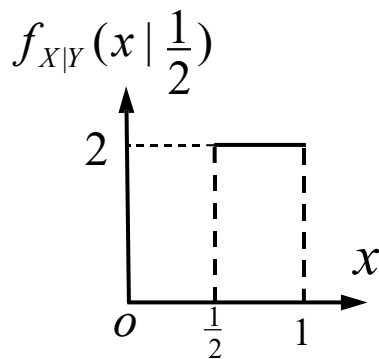
例2: 设随机变量 (X, Y) 在区域 $|y| < x < 1$ 内的密度函数是常数，之外为零，求 $f_{X|Y}(x|y)$ 及 $P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$.

于是给定 y ($-1 < y < 1$), X 的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - |y|}, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

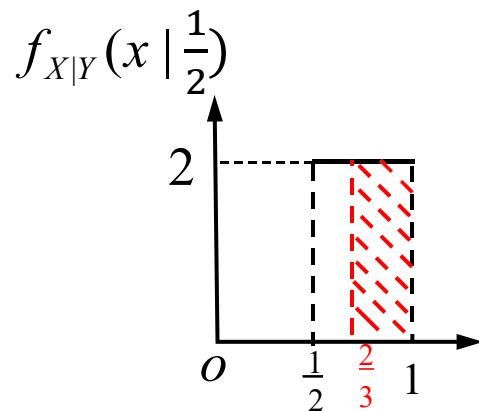


$$\text{当 } y = \frac{1}{2} \text{ 时, } f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



例2: 设随机变量 (X, Y) 在区域 $|y| < x < 1$ 内的密度函数是常数, 之外为零, 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 及 $P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$.

已得:
$$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2}) &= \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^1 2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



例3: 设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了 X 分钟，再由乙完成，加起来共用 Y 分钟。若

$X \sim U(0, 30)$ ，在 $X=x$ 条件下， $Y \sim U(x, 30)$ 。

- (1) 求 (X, Y) 的联合概率密度及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;
- (2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

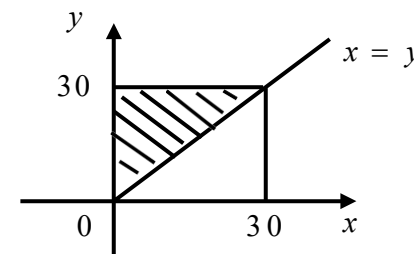


解: (1) 已知 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 0 < x < 30 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

当 x 为 $(0, 30)$ 上一固定值时, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{30-x}, & x < y < 30 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{30(30-x)}, & 0 < x < y < 30 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$
$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{30(30-x)} dx = \frac{1}{30} \ln \frac{30}{(30-y)}, & 0 < y < 30 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



当 $0 < y < 30$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{(30-x) \ln \frac{30}{(30-y)}}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



(2) 已得：当 $0 < y < 30$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{(30-x)\ln \frac{30}{(30-y)}}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 10|Y = 25) &= \int_0^{10} f_{X|Y}(x|25)dx \\ &= \int_0^{10} \frac{1}{(30-x)\ln 6} dx = \frac{\ln 30 - \ln 20}{\ln 6} \approx 0.2263 \end{aligned}$$

二维离散型与连续型随机变量分布比较

二维离散型随机变量

(X, Y) 联合分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

X 的边缘分布律

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i.}, i = 1, 2, \dots$$

$X = x_i$ 时 Y 的条件分布律

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}, j = 1, 2, \dots$$

二维连续型随机变量

(X, Y) 联合概率密度

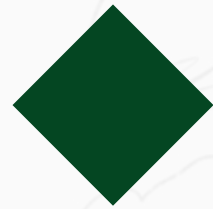
$$f(x, y), (x, y) \in D$$

X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$X = x$ 时 Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, y \in D_x$$



THE END