第6章 微分运动学与雅可比矩阵

彭键清 副教授

中山大学 智能工程学院

邮箱：pengjq7@mail.sysu.edu.cn

办公室：工学园1栋505

2024年04月15日

第6章 微分运动学与雅可比矩阵

6.1.1 机器人微分运动关系

■ 机器人速度级运动学

➢ 机器人**末端速度**向量（v_e为线速度，ω_e为角速度）

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ex}, v_{ey}, v_{ez}, \omega_{ex}, \omega_{ey}, \omega_{ez} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \Re^6$$

➢ 机器人**关节速度**向量(n为机器人自由度数）

$$\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^{\mathrm{T}} \in \Re^n$$

式中， $\dot{q}_{\mathrm{i}}(i\!=\!1, 2, \ldots, n)$ 为关节i的运动速度

建立机器人末端运动速度与关节速度之间的关系，即为微分运动学方程，或称为速度级运动学方程

6.1.1 机器人微分运动关系

■ 一般形式

➢ 机器人位置级正运动学的一般形式

$$\boldsymbol{T}_n = \mathrm{Fkine}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 末端线速度为位置矢量对时间的导数，即

$$\boldsymbol{v}_e = \frac{d\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{q}} \Rightarrow \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

➢ 末端角速度可通过姿态变换矩阵求导，得到

$$\omega_e^{\times} = \dot{\boldsymbol{R}}_n(\boldsymbol{q})\boldsymbol{R}_n^T(\boldsymbol{q}) \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}^{\times} = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

6.1.1 机器人微分运动关系

■ 一般形式

➢ 因而，一般机械臂（n自由度）的微分运动方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

➢ 也可写成如下形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

速度雅可比矩阵（对空间一般情况）$\boldsymbol{J}$：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \in \Re^{6\times n}$$

雅可比矩阵的分块：$\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \in \Re^{3\times n}$，$\boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \in \Re^{3\times n}$

J 即称为机器人的速度雅可比矩阵(Jacobian Matrix)。数学上关于雅可比矩阵的定义见附录1。

6.1.2 平面2R机械臂举例

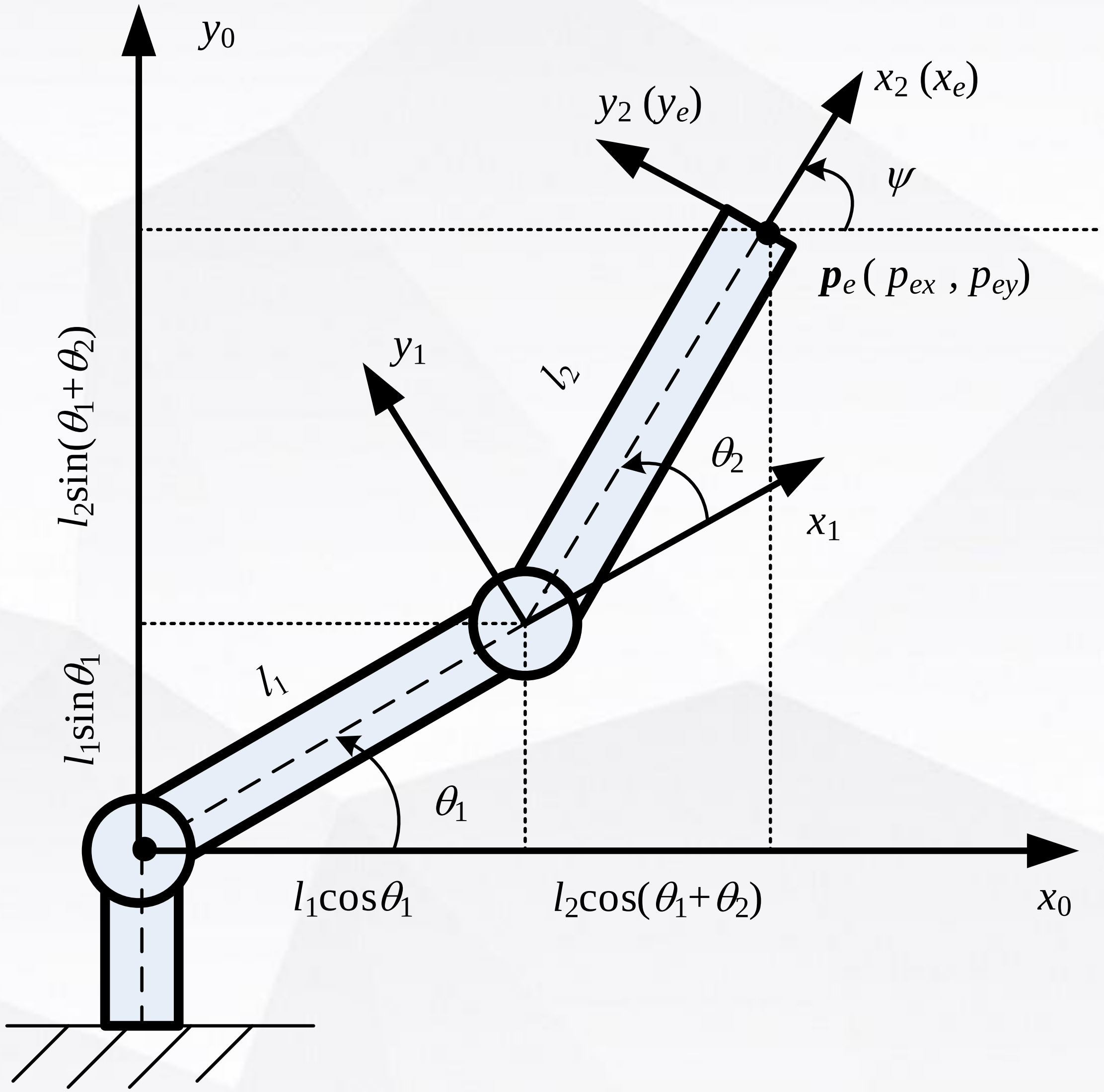
■ 平面2R机械臂运动学方程

➢ **机器人末端位姿**

$$
\begin{cases}
x_e = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\
y_e = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\
\psi_e = \theta_1+\theta_2
\end{cases}
$$

➢ **两边求导后，有**

$$
\begin{cases}
\dot{x}_e = -l_1 s_1\dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}\ \ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \\
\quad = -\ \ l_1 s_1 + l_2 s_{12}\ \ \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}\ \ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \\
\dot{y}_e = \ \ l_1 c_1\dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}\ \ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \\
\quad = \ \ l_1 c_1 + l_2 c_{12}\ \ \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}\ \ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \\
\dot{\psi}_e = \ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2
\end{cases}
$$



6.1.2 平面2R机械臂举例

➢ 写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{ex} \\ \dot{p}_{ey} \\ \dot{\psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

- 其中

$$\boldsymbol{J}_{\text{2DOF}}(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}_e}{\partial \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}} = \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial p_{ex}}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_{ex}}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial p_{ey}}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_{ey}}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial \psi_e}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial \psi_e}{\partial \theta_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

6.1.2 平面2R机械臂举例

- 若**只关心末端定位**而不考虑定姿问题

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{ex} \\ \dot{p}_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

- 其中

$$\boldsymbol{J}_v = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

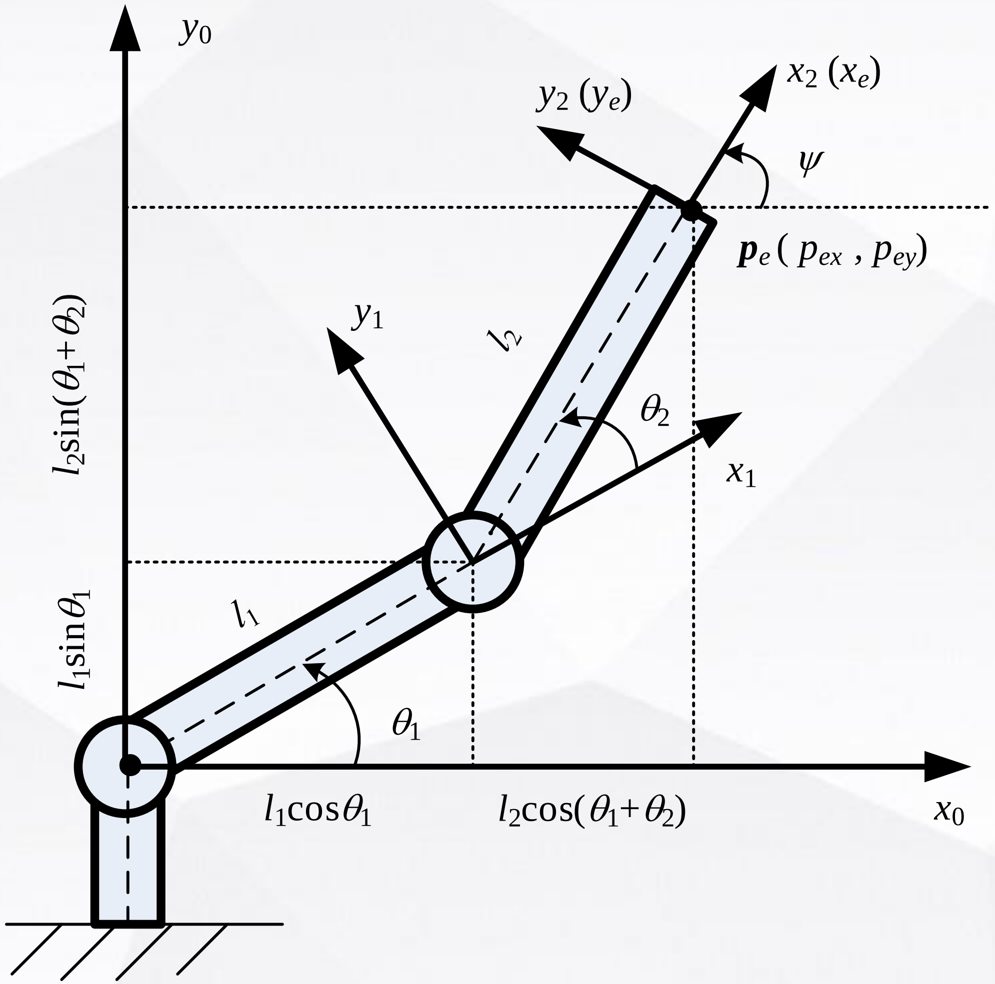
■ 机械臂运动学分析

➢ 单轴运动贡献分析

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_e\\ \dot{y}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12}\end{bmatrix}\dot{\theta}_1+\begin{bmatrix}-l_2s_{12}\\ l_2c_{12}\end{bmatrix}\dot{\theta}_2$$

关节1运动对末端速度的贡献

关节2运动对末端速度的贡献



6.1.2 平面2R机械臂举例

■ 机械臂运动学分析

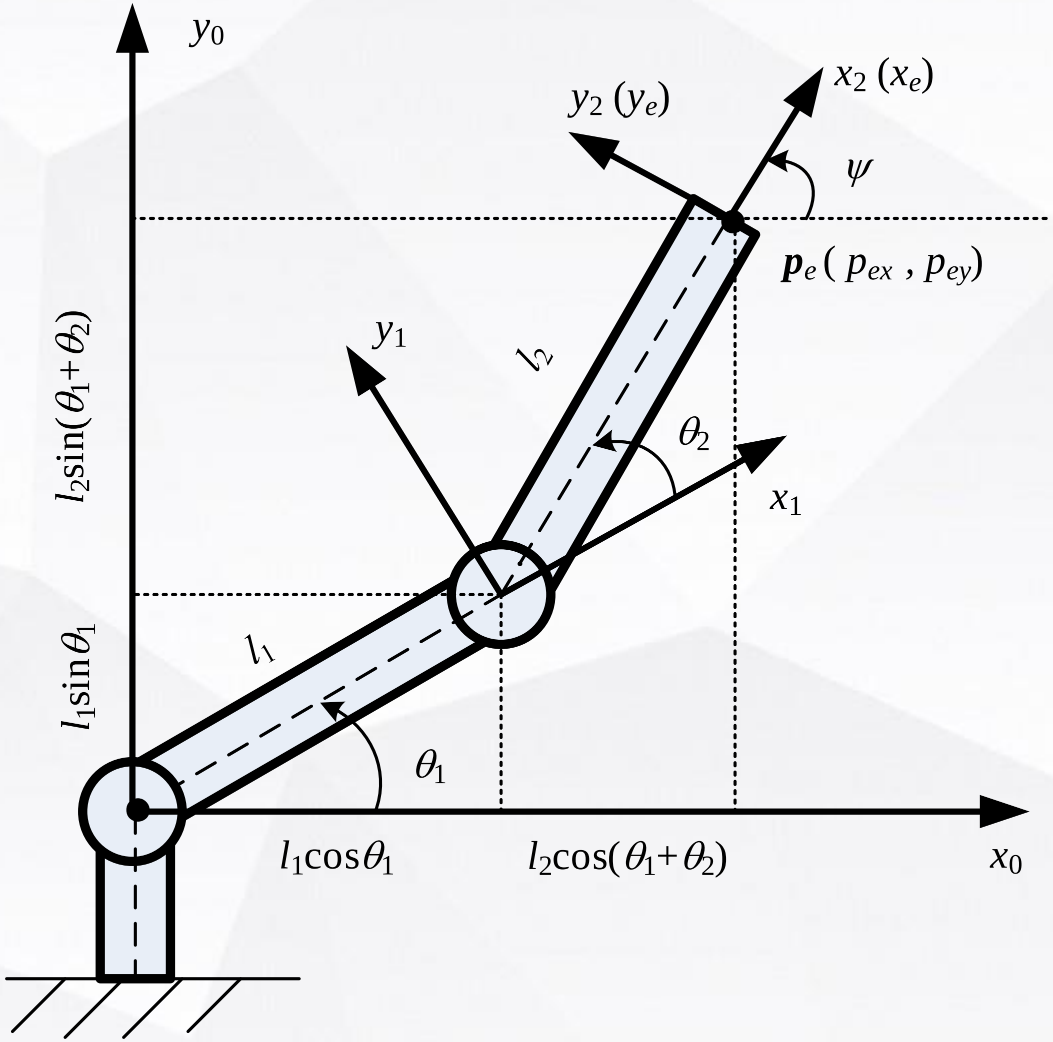
实际上，根据圆周运动规律，可以推导出各角速度对应得末端运动

➢ 关节1运动对末端速度的影响

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{e1}=\boldsymbol{z}\dot{\theta}_1\times\boldsymbol{p}_{e1}=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12}\\ 0\end{bmatrix}\dot{\theta}_1$$

➢ 关节2运动对末端速度的影响

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{e2}=\boldsymbol{z}\dot{\theta}_2\times\boldsymbol{p}_{e2}=\begin{bmatrix}-l_2s_{12}\\ l_2c_{12}\\ 0\end{bmatrix}\dot{\theta}_2$$



6.1.2 平面2R机械臂举例

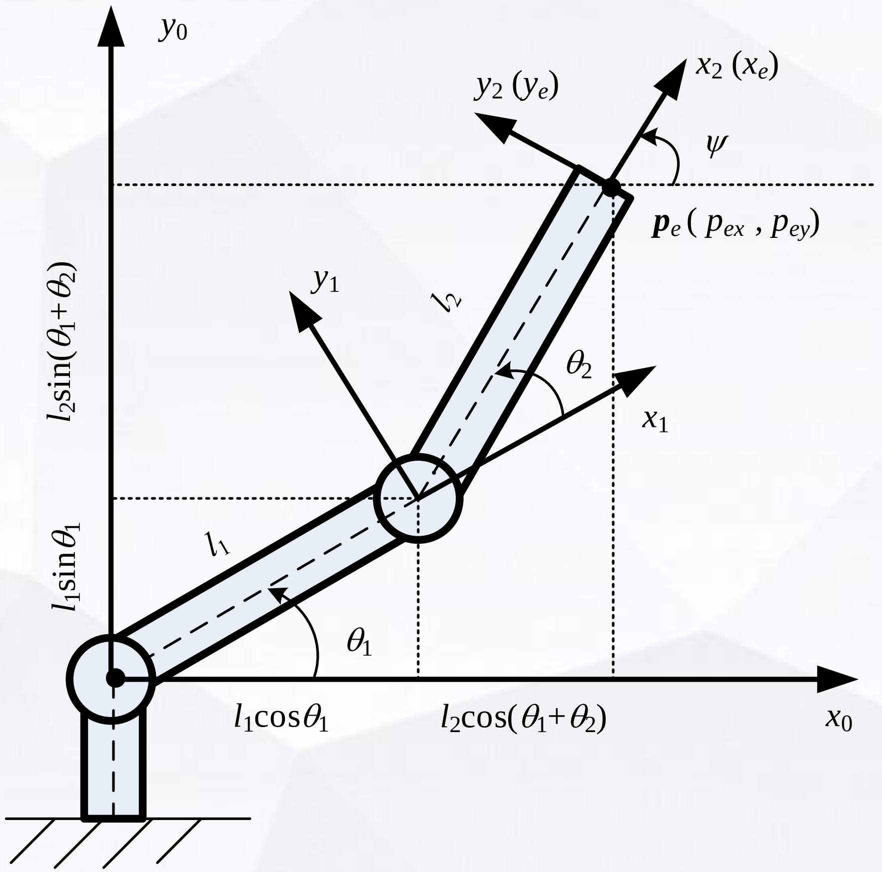
■ 机械臂运动学分析

实际上，根据圆周运动规律，可以推导出各角速度对应得末端运动

➢ 因此末端的速度为

$$\dot{\boldsymbol{p}}_e = \dot{\boldsymbol{p}}_{e1} + \dot{\boldsymbol{p}}_{e2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2$$

与前面的推导结果完全一致。

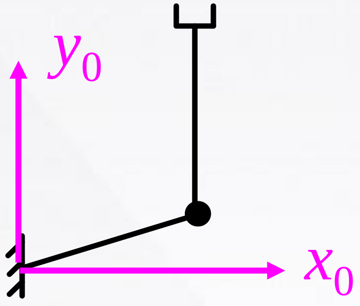


■ 分析实例

例7.1：给定 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}=[1^{\circ}/\mathrm{s},\ 1^{\circ}/\mathrm{s}]^{\mathrm{T}}$，分析在不同臂型下的末端运动速度

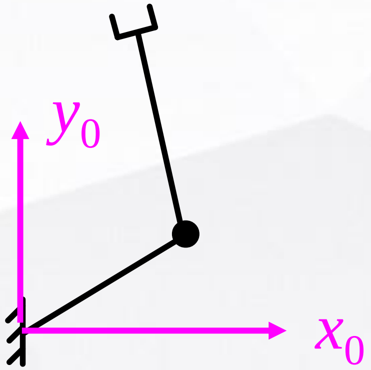
①Θ=[30°，60°]时，计算得到

$$\boldsymbol{v}_e=\begin{bmatrix}-0.0436\\0.0151\end{bmatrix}(\mathrm{m/s}),\quad \omega_e=2\ \ (^{\circ}/\mathrm{s})$$



②Θ=[40°，80°]时，计算得到

$$\boldsymbol{v}_e=\begin{bmatrix}-0.0414\\-0.0041\end{bmatrix}(\mathrm{m/s}),\quad \omega_e=2\ \ (^{\circ}/\mathrm{s})$$

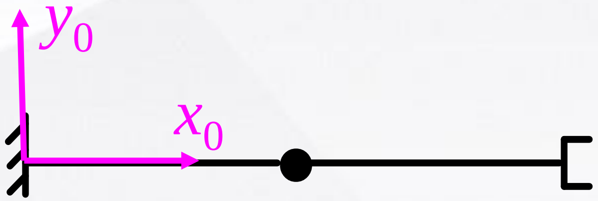


6.1.2 平面2R机械臂举例

■ 分析实例

例7.1：给定 $\dot{\Theta}$=[1°/s, 1°/s]^T， 分析在不同臂型下的末端运动速度

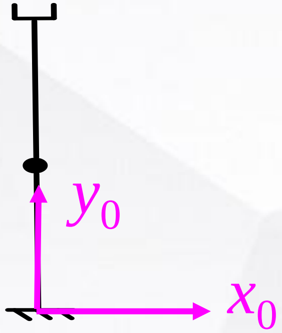
③ Θ=[0°, 0°]时，计算得到



$$v_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0524 \end{bmatrix} (\text{m/s}), \quad \omega_e = 2\ (^\circ/\text{s})$$

臂沿x_0轴方向完全伸直，此臂型下关节运动不产生x方向的线速度

④ Θ=[90°, 0°]时，计算得到



$$v_e = \begin{bmatrix} -0.0524 \\ 0 \end{bmatrix} (\text{m/s}), \quad \omega_e = 2\ (^\circ/\text{s})$$

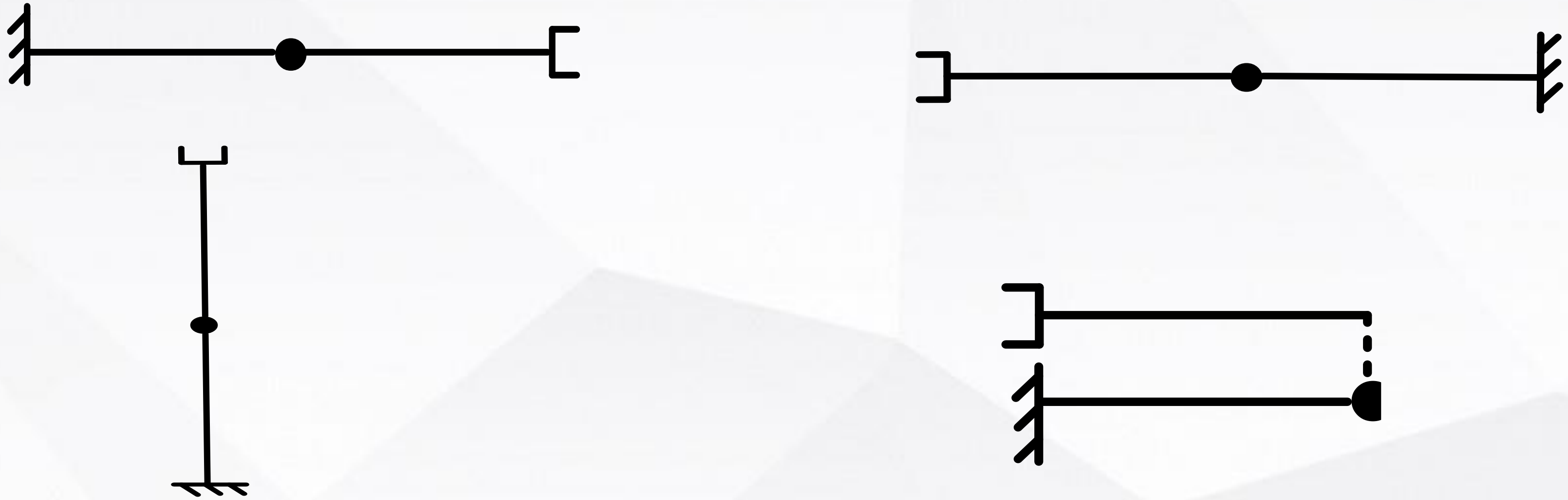
臂沿y_0轴方向完全伸直，此臂型下关节运动不产生y方向的线速度

6.1.2 平面2R机械臂举例

■ 分析实例

例7.1：给定 $\dot{\Theta}$=[1°/s，1°/s]^T， 分析在不同**臂型下**的末端运动速度

➢ 关于运动分析的一些结论



机械臂完全**伸直**或**折叠**时，无论关节角速度多大，沿伸直或折叠方向的末端线速度**分量始终为0**。

6.1.3 雅可比矩阵的性质

■ 一般机械臂的微分运动方程

➢ 对于n自由度机械臂

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_n\right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{v1} & \boldsymbol{J}_{v2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{vn} \\ \boldsymbol{J}_{\omega1} & \boldsymbol{J}_{\omega2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{\omega n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

➢ 则有如下运动速度关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{J}_{v1}\dot{q}_1 + \boldsymbol{J}_{v2}\dot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{J}_{vn}\dot{q}_n \\ \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{J}_{\omega1}\dot{q}_1 + \boldsymbol{J}_{\omega2}\dot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{J}_{\omega n}\dot{q}_n \end{cases}$$

由此可见，机器人速度雅可比矩阵的分块：

- J_{vi}——关节i运动速度到**末端线速度**的传动比
- J_{wi}——关节i运动速度到**末端角速度**的传动比

6.1.3 雅可比矩阵的性质

■ 机器人速度雅可比矩阵的特点

➢ 上述Jacoian矩阵有如下分块形式（根据不同的需要）

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{v1} & \boldsymbol{J}_{v2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{vn}\\ \boldsymbol{J}_{\omega 1} & \boldsymbol{J}_{\omega 2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{\omega n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{v}\\ \boldsymbol{J}_{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{1} & \boldsymbol{J}_{2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{n}\end{bmatrix}$$

➢ 相应地，微分运动方程可表示为广义速度的形式，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e=\boldsymbol{J}_1\dot{q}_1+\boldsymbol{J}_2\dot{q}_2+\cdots+\boldsymbol{J}_n\dot{q}_n$$

上式表示：J_i为关节i运动速度到末端广义速度（包括线速度和角速度）的传动比

6.1.3 雅可比矩阵的性质

■ 机器人速度雅可比矩阵的特点

① 雅可比矩阵建立了关节速度与末端速度之间的映射关系，对于3D空间n自由度机器人，J是$6\times n$矩阵。

② 雅可比矩阵与机器人的D-H参数及臂型有关，主要反映机器人运动的几何特性，故也称为几何雅可比矩阵。

③ J是q的函数，其各元素是q的正弦、余弦值，即J相对于q具有高度非线性，计算量大。但对于给定的q，J是一确定的线性变换。

④ 速度级正运动学总有解，即根据关节速度总能计算末端速度。但对于特殊臂型，不论关节速度多大，末端某些速度分量总为0。

第6章 微分运动学与雅可比矩阵

1 机器人微分运动学概述

2 雅可比矩阵计算的构造法

3 雅可比矩阵计算的直接求导法

4 机器人微分运动分析

5 速度级逆运动学及奇异问题

6 通用逆运动学求解方法

6.2.1 构造法基本原理

■ 关节i为旋转关节

➢ 若关节i为**旋转关节**，其角速度$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$产生的末端角速度和线速度分别为：

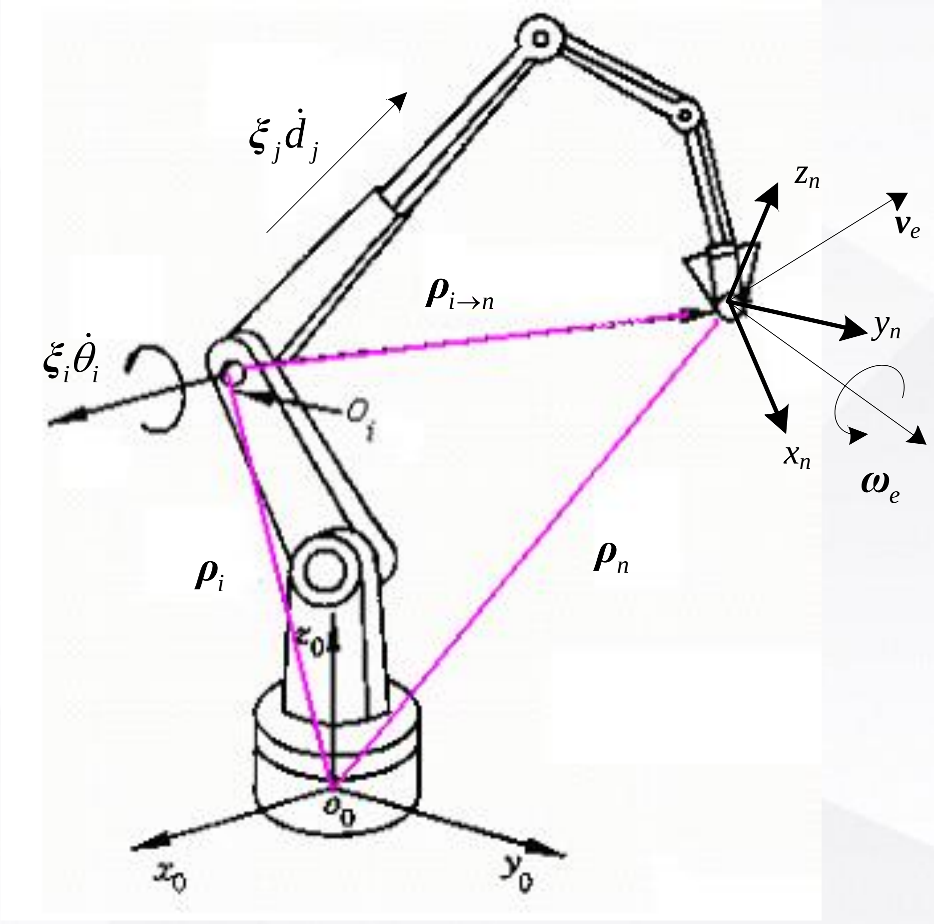
$$\boldsymbol{\omega}_{ei} = \xi_i \dot{\theta}_i = \xi_i \dot{q}_i$$

$$\boldsymbol{v}_{ei} = \boldsymbol{\omega}_{ei} \times \boldsymbol{\rho}_{i\to n} = \left(\xi_i \times \boldsymbol{\rho}_{i\to n}\right)\dot{q}_i$$

其中，

ξ_i ：关节i 旋转轴的单位矢量（**关节轴矢量**）

$\boldsymbol{\rho}_{i\to n}$：关节$i$上的点指向末端点的位置矢量（**牵连运动矢量**）。



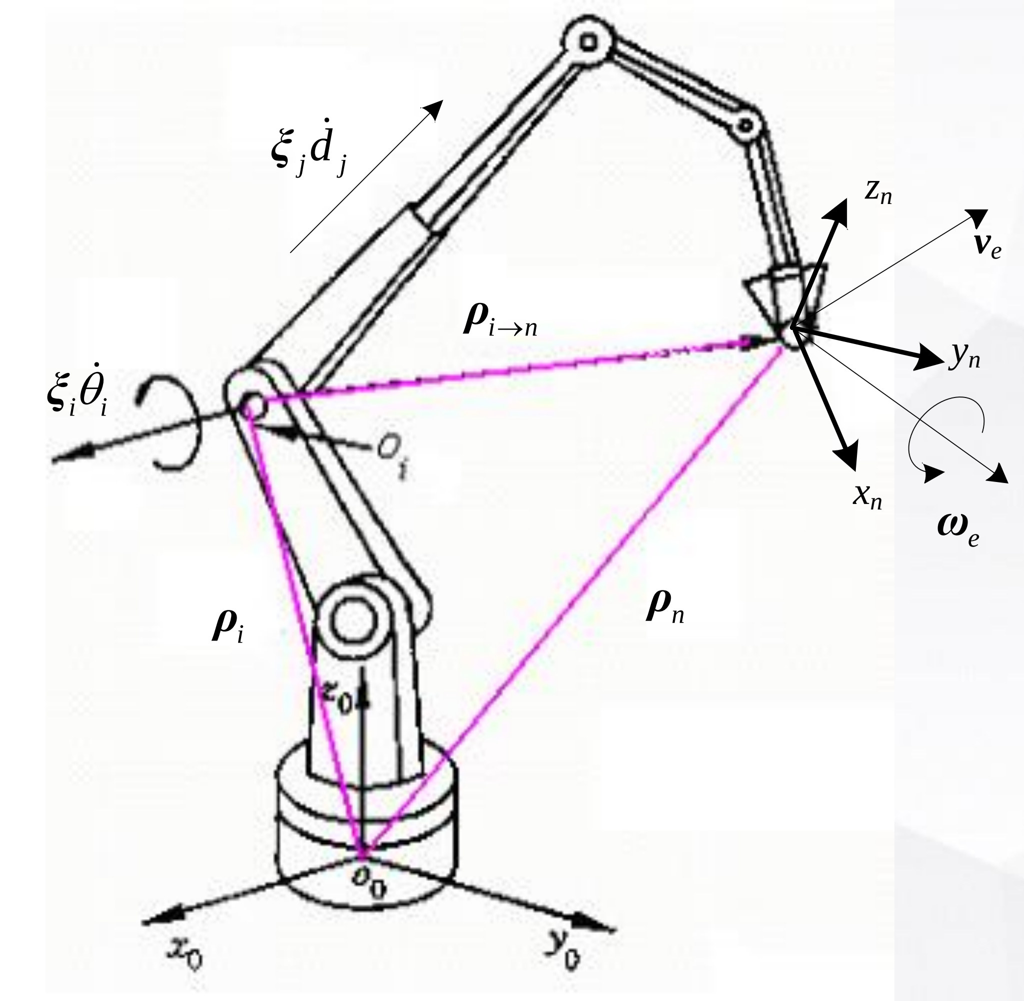
■ 关节i为旋转关节

- 写成矩阵的形式，可得关节i对末端广义速度的贡献：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{ei} \\ \boldsymbol{\omega}_{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \times \boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ \xi_i \end{bmatrix} \dot{q}_i$$

- 相应地，雅可比矩阵的第i列为：

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \times \boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ \xi_i \end{bmatrix}, \quad \text{for Revolute Joint}$$



6.2.1 构造法基本原理

■ 关节*i*为平移关节

➢ 对于移动关节，其平移速度 $\dot{d}_i$ 仅在末端产生线速度而不产生角速度，即：

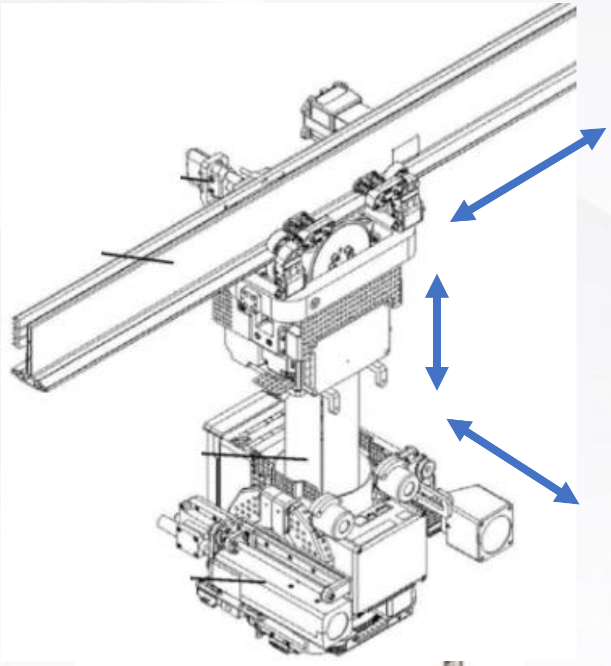
$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{ei} = 0 \\ \boldsymbol{v}_{ei} = \xi_i \dot{d}_i = \xi_i \dot{q}_i \end{cases}$$

➢ 则关节*i*运动速度引起的末端速度：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{ei} \\ \boldsymbol{\omega}_{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i$$

➢ 相应地，雅可比矩阵的第*i*列为：

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{for Prismatic Joint}$$



6.2.1 构造法基本原理

■ 雅可比矩阵的构造

➢ 因此，**雅可比矩阵第*i*列**的表达式为（i=1, 2, … , n）

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_i \times \boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ \xi_i \end{bmatrix} & (\text{若关节}i\text{是旋转关节}) \\ \begin{bmatrix} \xi_i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & (\text{若关节}i\text{是移动关节}) \end{cases}$$

➢ 进一步，**整个雅可比矩阵**按下式构造

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix}$$

➢ 对于全为转动关节的情况，还可表示为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \times \boldsymbol{\rho}_{1\to n} & \xi_2 \times \boldsymbol{\rho}_{2\to n} & \dots & \xi_n \times \boldsymbol{\rho}_{n\to n} \\ \xi_1 & \xi_2 & & \xi_n \end{bmatrix}$$

6.2.2 不同参考系下雅可比的关系

■ 指定参考系{Ref}描述矢量

➢ 对于**旋转**关节

$$ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{\xi}_i \times {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix} $$

➢ 对于**平移**关节

$$ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{\xi}_i \\ 0 \end{bmatrix} $$

➢ 相应地，**在坐标系{Ref}中**描述的运动学方程为

$$ \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{v}_e \\ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \left[{}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}_1, \ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}_2, \cdots, \ {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}_n \right] \dot{\boldsymbol{q}} = {}^{\mathrm{Ref}}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}\right) \dot{\boldsymbol{q}} $$

6.2.2 不同参考系下雅可比的关系

■ 常用参考坐标系

➢ 以{0}系为参考时，${}^{0}J(q)$ 称为“**基座雅可比矩阵**”，微分方程为：

$$\begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_e \\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

➢ 以{n}系为参考时，${}^{n}J(q)$称为“**末端雅可比矩阵**”，微分方程为

$$\begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{v}_e \\ {}^{n}\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = {}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

问题： ${}^{0}J(q)$与 ${}^{n}J(q)$之间有什么关系？

6.2.2 不同参考系下雅可比的关系

■ 不同坐标系中表示的雅可比矩阵

➢ 已知{0}到{n}的姿态变换矩阵${}^0\boldsymbol{R}_n$，则速度矢量存在如下关系：

$$\begin{cases} {}^0\boldsymbol{v}_e = {}^0\boldsymbol{R}_n\,{}^n\boldsymbol{v}_e \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_e = {}^0\boldsymbol{R}_n\,{}^n\boldsymbol{\omega}_e \end{cases}$$

➢ 写成矩阵的形式有：

$$\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{v}_e \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_n & \\ & {}^0\boldsymbol{R}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n\boldsymbol{v}_e \\ {}^n\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix}$$

➢ 结合如下微分运动关系：

$$\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{v}_e \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = {}^0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \begin{bmatrix} {}^n\boldsymbol{v}_e \\ {}^n\boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = {}^n\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

6.2.2 不同参考系下雅可比的关系

■ 不同坐标系中表示的雅可比矩阵

➢ 可得不同坐标系中的雅可比矩阵的关系为：

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & {}^{0}\boldsymbol{R}_n \end{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) $$

$$ {}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_n^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & {}^{0}\boldsymbol{R}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{R}_0 & 0 \\ 0 & {}^{n}\boldsymbol{R}_0 \end{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) $$

由于${}^{0}R_n$是单位正交矩阵，${}^{0}J$与${}^{n}J$的行列式相同，秩相同

6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

1. 基座雅可比矩阵的构造——基本依据

➢ 基本依据（以 {0}系为参考系）

$$^{0}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{0}\xi_i \times {}^{0}\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^{0}\xi_i \end{bmatrix}$$

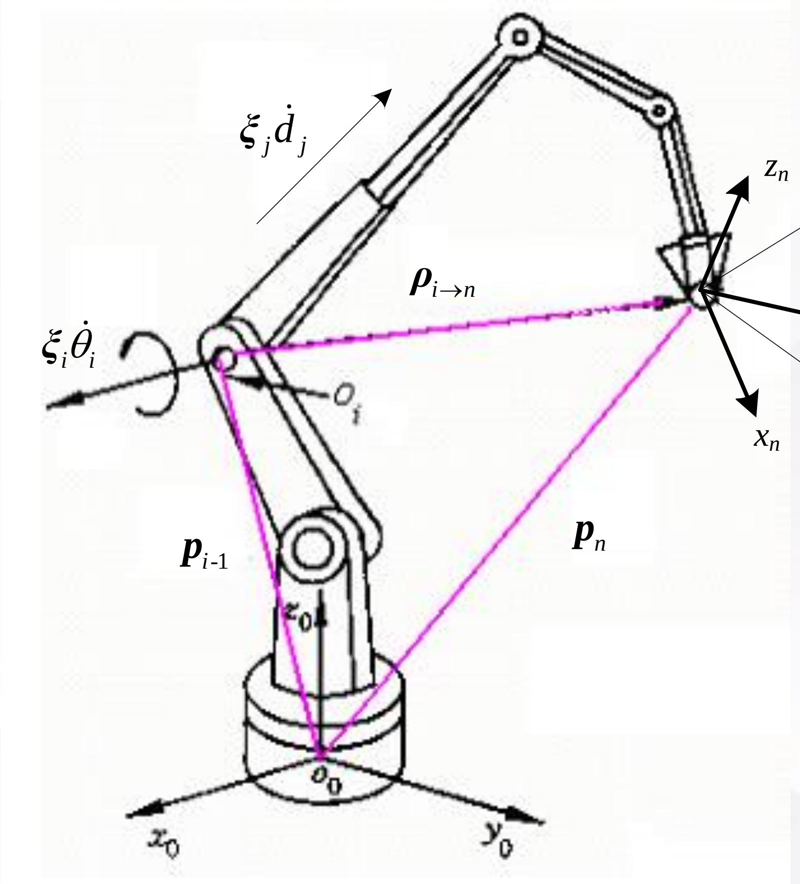
➢ 构造的关键

①确定关节*i*的运动轴矢量$^{0}\xi_i$；

②确定关节*i*到末端的牵连运动矢量$^{0}\rho_{i->n}$；

➢ 采用D-H规则时，{*i*-1}系建在关节*i*上

$$^{0}\boldsymbol{T}_{i-1} = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \cdots {}^{i-2}\boldsymbol{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{x}_{i-1} & {}^{0}\boldsymbol{y}_{i-1} & \boxed{{}^{0}\boldsymbol{z}_{i-1}} & \boxed{{}^{0}\boldsymbol{p}_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$^{0}T_{i-1}$的z_{i-1}和p_{i-1}分别为关节*i*的轴矢量和位置矢量，在{0} 中表示。

6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

1. 基座雅可比矩阵的构造——基本依据

- 关节i的牵连运动矢量为关节i到末端的位置矢量

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_{i\to n} = {}^{0}\boldsymbol{p}_{n} - {}^{0}\boldsymbol{p}_{i-1} $$

- 根据下式可得末端位置矢量${}^{0}\boldsymbol{p}_{n}$

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_{n} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{T}_{n} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{x}_{n} & {}^{0}\boldsymbol{y}_{n} & {}^{0}\boldsymbol{z}_{n} & \boxed{{}^{0}\boldsymbol{p}_{n}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

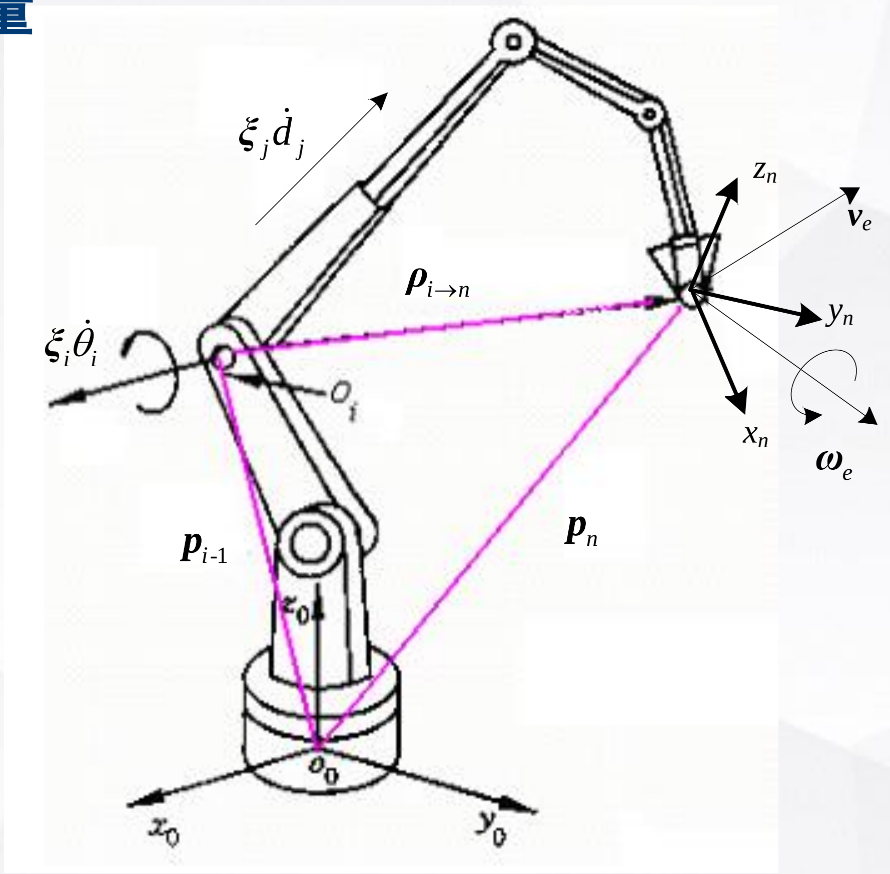
- 因此，采用经典D-H规则时，有(i=2, …, n)

$$ {}^{0}\boldsymbol{\xi}_{i} = {}^{0}\boldsymbol{z}_{i-1} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{i-1}(1:3,3) $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_{i\to n} = {}^{0}\boldsymbol{p}_{n} - {}^{0}\boldsymbol{p}_{i-1} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{n}(1:3,4) - {}^{0}\boldsymbol{T}_{i-1}(1:3,4) $$

对于i=1的情况，则按下式

$$ {}^{0}\xi_{1} = {}^{0}\boldsymbol{z}_{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad {}^{0}\boldsymbol{p}_{1\to n} = {}^{0}\boldsymbol{p}_{n} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{n}(1:3,4) $$



6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

1. 基座雅可比矩阵的构造——构造流程

（1）根据DH参数得出相邻连杆间的位姿矩阵

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i\, c\alpha_i & s\theta_i\, s\alpha_i & a_i\, c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i\, c\alpha_i & -c\theta_i\, s\alpha_i & a_i\, s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

（2）计算{0}到 {i}的位姿矩阵(i=1, …, n)，提取z矢量和p矢量

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_i = {}^{0}\boldsymbol{T}_1\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2 \cdots {}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{n}_i & {}^{0}\boldsymbol{o}_i & {}^{0}\boldsymbol{a}_i & {}^{0}\boldsymbol{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{z}_i = {}^{0}\boldsymbol{a}_i
$$

6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

1. 基座雅可比矩阵的构造——构造流程

具体而言：

$$
\begin{cases}
{}^0\boldsymbol{T}_1 & \Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{z}_1,\ {}^0\boldsymbol{p}_1 \\
{}^0\boldsymbol{T}_2 = {}^0\boldsymbol{T}_1\,{}^1\boldsymbol{T}_2 & \Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{z}_2,\ {}^0\boldsymbol{p}_2 \\
{}^0\boldsymbol{T}_3 = {}^0\boldsymbol{T}_2\,{}^2\boldsymbol{T}_3 & \Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{z}_3,\ {}^0\boldsymbol{p}_3 \\
\quad\vdots & \\
{}^0\boldsymbol{T}_n = {}^0\boldsymbol{T}_{n-1}\,{}^{n-1}\boldsymbol{T}_{2n} & \Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{z}_n,\ {}^0\boldsymbol{p}_n
\end{cases}
$$

（3）构造雅可比矩阵的第i列

$$
\begin{cases}
{}^0\xi_1 = {}^0\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
{}^0\boldsymbol{p}_{1\to n} = {}^0\boldsymbol{p}_n - {}^0\boldsymbol{p}_0 = {}^0\boldsymbol{p}_n
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
{}^0\xi_i = {}^0\boldsymbol{z}_{i-1} \\
{}^0\boldsymbol{p}_{i\to n} = {}^0\boldsymbol{p}_n - {}^0\boldsymbol{p}_{i-1}
\end{cases}
\quad (i = 2, 3, \cdots, n)
$$

$$
\Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^0\xi_i \times {}^0\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^0\xi_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

2. 末端雅可比矩阵的构造——基本依据

- **基本依据（以{n}系为参考系）**

$$ {}^{n}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{n}\xi_i \times {}^{n}\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^{n}\xi_i \end{bmatrix} $$

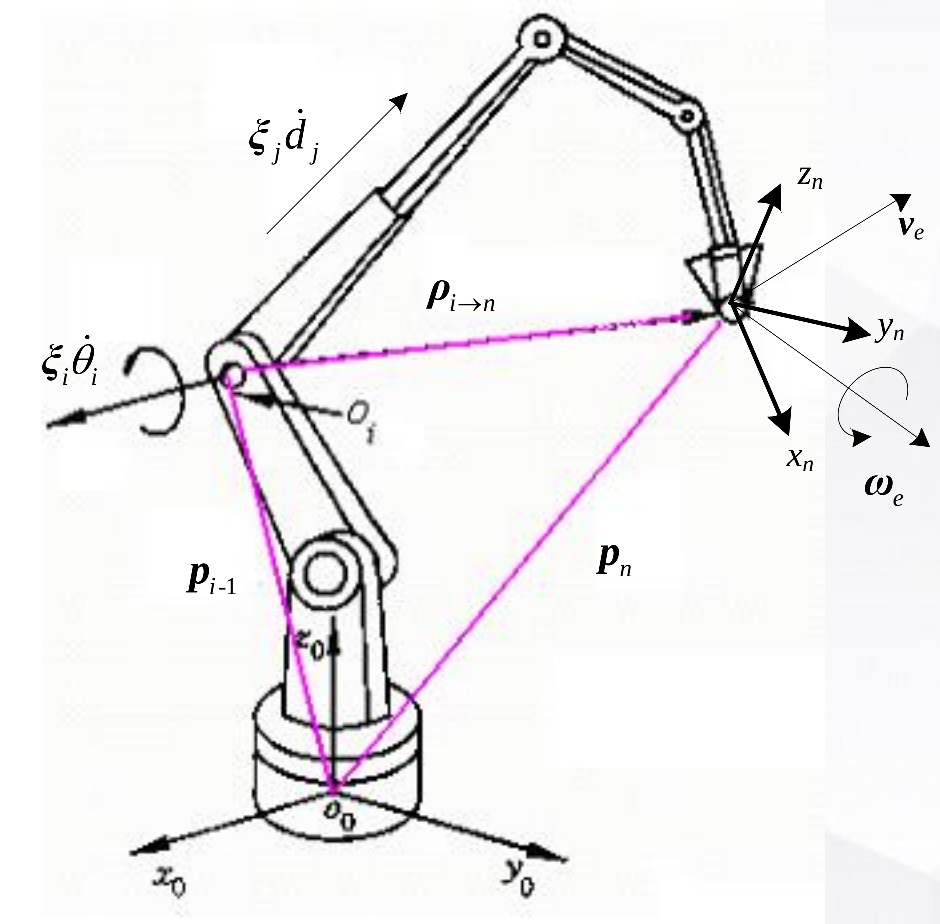
- **构造的关键**

①确定关节i的旋转轴矢量${}^{n}\xi_i$；

②确定关节i到末端的牵连运动矢量${}^{n}\rho_{i\text{->}n}$；

$$ {}^{i-1}\boldsymbol{T}_n = {}^{i-1}\boldsymbol{T}_i \cdots {}^{n-1}\boldsymbol{T}_n $$

$$ {}^{n}\boldsymbol{T}_{i-1} = \left({}^{i-1}\boldsymbol{T}_n\right)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{x}_{i-1} & {}^{n}\boldsymbol{y}_{i-1} & \boxed{{}^{n}\boldsymbol{z}_{i-1}} & \boxed{{}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



${}^{n}T_{i\text{-}1}$中的$z_{i\text{-}1}$和$p_{i\text{-}1}$分别为关节i的运动轴矢量和位置矢量，在{n}中的表示

6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

2. 末端雅可比矩阵的构造——基本依据

- 基本依据（以 {n}系为参考系）

$$ {}^{n}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{n}\xi_i \times {}^{n}\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^{n}\xi_i \end{bmatrix} $$

- 构造的关键

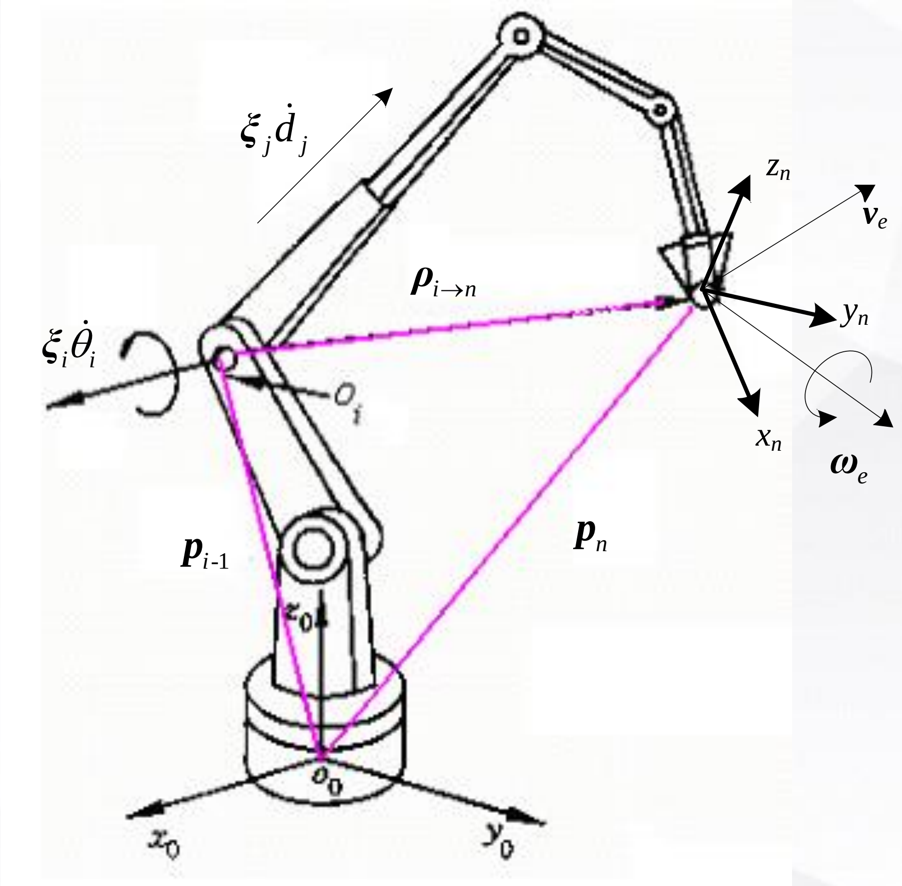
①确定关节i的运动轴矢量${}^{n}\xi_i$；

②确定关节i到末端的牵连运动矢量${}^{n}\rho_{i\text{->}n}$；

- 采用D-H规则时，{i-1}系建在关节i上

$$ {}^{i-1}\boldsymbol{T}_n = {}^{i-1}\boldsymbol{T}_i \cdots {}^{n-1}\boldsymbol{T}_n $$

$$ {}^{n}\boldsymbol{T}_{i-1} = \left({}^{i-1}\boldsymbol{T}_n\right)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{x}_{i-1} & {}^{n}\boldsymbol{y}_{i-1} & \boxed{{}^{n}\boldsymbol{z}_{i-1}} & \boxed{{}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



${}^{n}T_{i\text{-}1}$的$z_{i\text{-}1}$和$p_{i\text{-}1}$分别为关节i的轴矢量和位置矢量，在{n} 中表示。

2. 末端雅可比矩阵的构造——基本依据

- 关节i的牵连运动矢量为关节i到末端的位置矢量

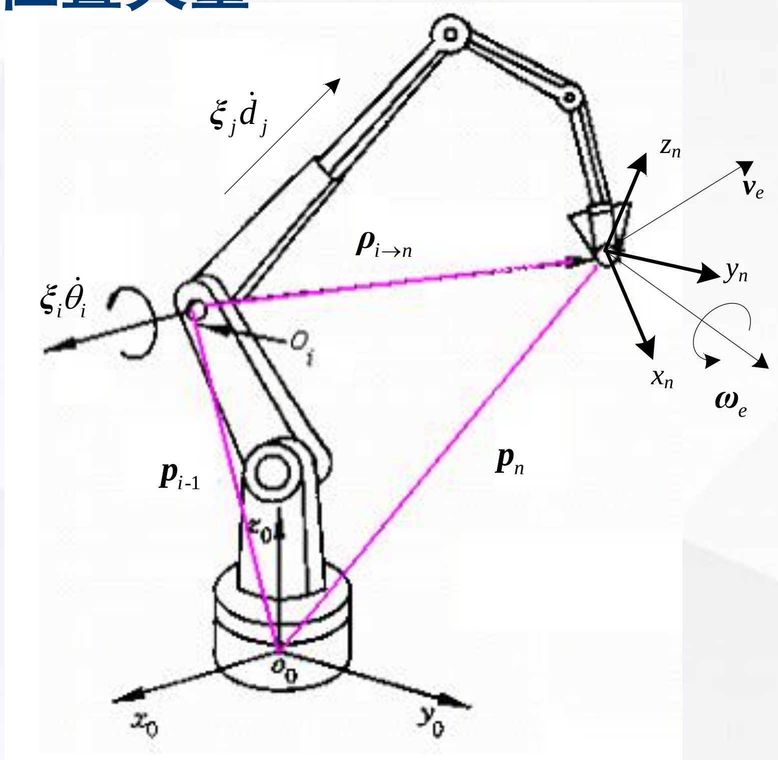
$$ {}^{n}\boldsymbol{p}_{i\to n} = {}^{n}\boldsymbol{p}_{n} - {}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} = -{}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} $$

注意：${}^{n}\boldsymbol{p}_{n}=[0, 0, 0]^{T}$

- 因此，有(i=1, …, n)

$$ {}^{n}\boldsymbol{\xi}_{i} = {}^{n}\boldsymbol{z}_{i-1} = {}^{n}\boldsymbol{T}_{i-1}(1:3,3) $$

$$ {}^{n}\boldsymbol{p}_{i\to n} = -{}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} = -{}^{n}\boldsymbol{T}_{i-1}(1:3,4) $$



6.2.3 基于D-H建模的雅可比矩阵构造

2. 末端雅可比矩阵的构造——构造流程

（1）根据DH参数得出**相邻连杆间**的位姿矩阵；

（2）计算$\{n\}$到 $\{i\}$的位姿矩阵$(i=0,\cdots,n-1)$，并**提取**z**和**p**矢量**

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_n = {}^{i-1}\boldsymbol{T}_i \cdots {}^{n-1}\boldsymbol{T}_n$$

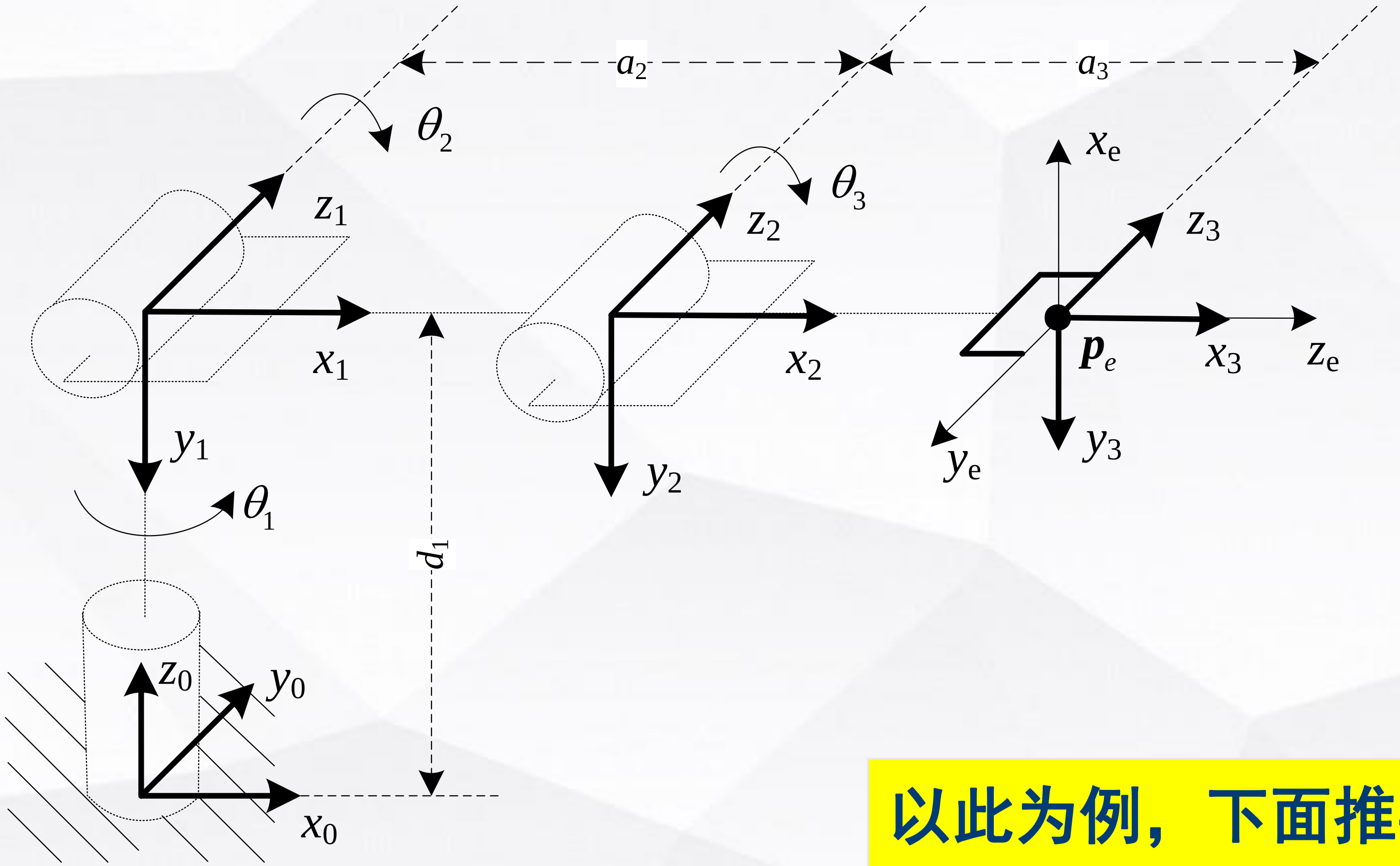
$$^{n}\boldsymbol{T}_{i-1} = \left({}^{i-1}\boldsymbol{T}_n\right)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{n}_{i-1} & {}^{n}\boldsymbol{o}_{i-1} & {}^{n}\boldsymbol{a}_{i-1} & {}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{n}\boldsymbol{z}_{i-1} = {}^{n}\boldsymbol{a}_{i-1}$$

（3）**构造雅可比矩阵的第**i**列**

$$\begin{cases} {}^{n}\boldsymbol{\xi}_i = {}^{n}\boldsymbol{z}_{i-1} \\ {}^{n}\boldsymbol{p}_{i\to n} = {}^{n}\boldsymbol{p}_n - {}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} = -{}^{n}\boldsymbol{p}_{i-1} \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n) \Rightarrow \boxed{{}^{n}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{\xi}_i \times {}^{n}\boldsymbol{\rho}_{i\to n} \\ {}^{n}\boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix}}$$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ D-H坐标系



以此为例，下面推导其基座雅可比矩阵

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ 首先，得到相邻坐标系之间的关系

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad {}^{1}\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{2}\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ 其次，计算{0}系到{i}间的位姿，得出相应的z、p矢量

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{0}\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_2 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 {}^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 - a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{0}\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ d_1 - a_2 s_2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_3 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 {}^{1}\boldsymbol{T}_2 {}^{2}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\boldsymbol{z}_3 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{0}\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \end{bmatrix} $$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ **第三步，计算雅可比矩阵第1列$^0J_1$**

得到如下矢量：

$$^0\xi_1 = {}^0\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p}_{1\to3} = {}^0\boldsymbol{p}_3 - {}^0\boldsymbol{p}_0 = {}^0\boldsymbol{T}_3(1:3,4) = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix}$$

根据定义可得：

$$^0\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\xi_1 \times {}^0\boldsymbol{p}_{1\to3} \\ {}^0\xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ **第四步，计算雅可比矩阵第2列$^0J_2$**

得到如下矢量：

$$ {}^0\xi_2 = {}^0\boldsymbol{z}_1 = {}^0\boldsymbol{T}_1(1:3,3) = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} $$

$$ {}^0\boldsymbol{p}_{2\to3} = {}^0\boldsymbol{p}_3 - {}^0\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ -(a_2s_2 + a_3s_{23}) \end{bmatrix} $$

因而可得：

$$ {}^0\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} {}^0\xi_2 \times {}^0\boldsymbol{p}_{2\to3} \\ {}^0\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \\ -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \\ -(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ **第五步，计算雅可比矩阵第3列${}^0\boldsymbol{J}_3$**

得到如下矢量：

$$
{}^0\xi_3 = {}^0\boldsymbol{z}_2 = {}^0\boldsymbol{T}_2(1:3,3) = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

$$
{}^0\boldsymbol{p}_{3\to 3} = {}^0\boldsymbol{p}_3 - {}^0\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2c_1c_2 \\ a_2s_1c_2 \\ d_1 - a_2s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3c_1c_{23} \\ a_3s_1c_{23} \\ -a_3s_{23} \end{bmatrix}
$$

因而可得：

$$
{}^0\boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} {}^0\xi_3 \times {}^0\boldsymbol{p}_{3\to 3} \\ {}^0\xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3c_1s_{23} \\ -a_3s_1s_{23} \\ -a_3c_{23} \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ 最后，基座雅可比矩阵为

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}_1 & {}^{0}\boldsymbol{J}_2 & {}^{0}\boldsymbol{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & -(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -a_3c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

6.2.4 空间3R肘机械臂的雅可比矩阵

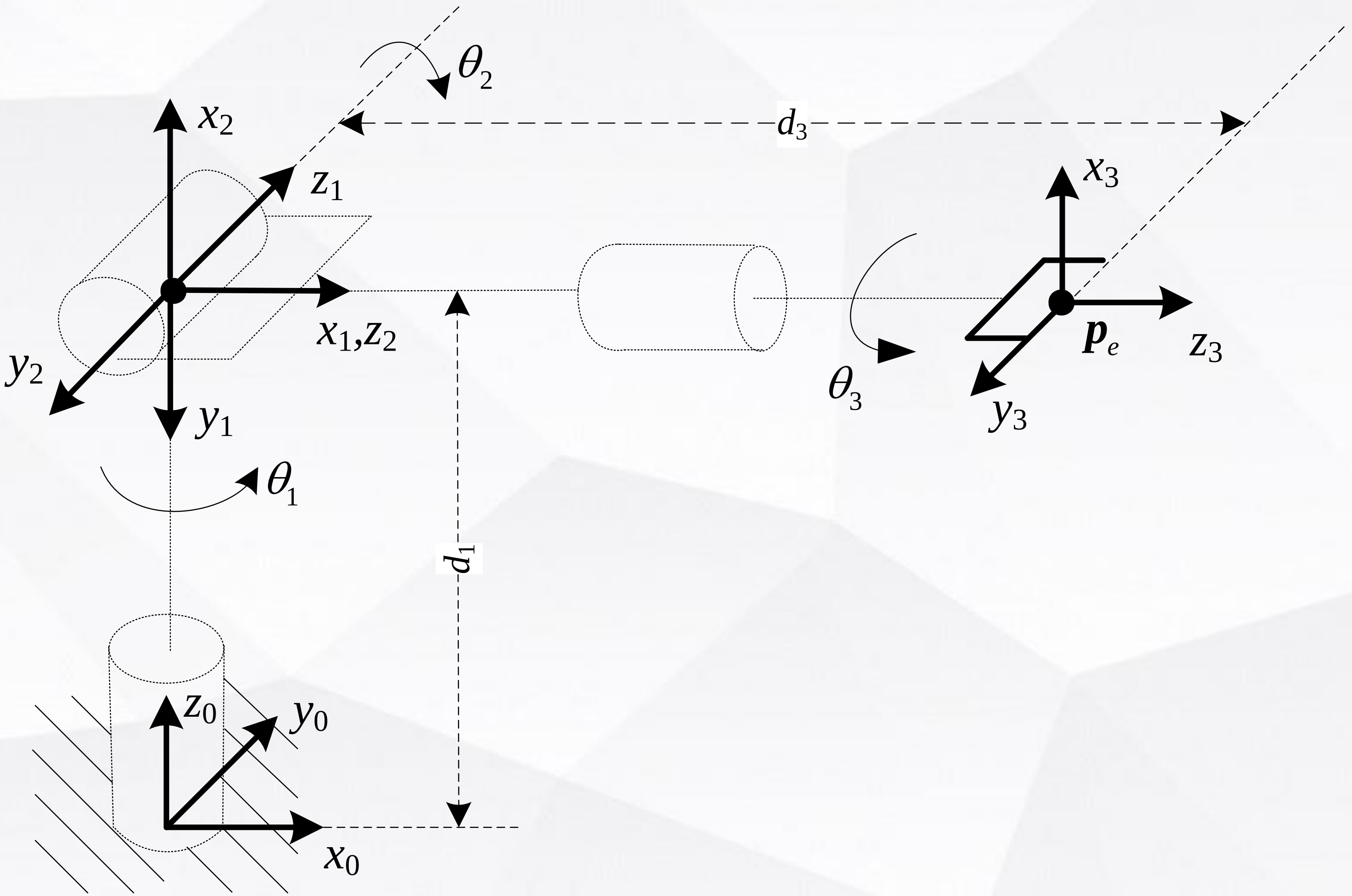
◆ 雅可比矩阵构造过程

➢ 类似地，可求得末端雅可比矩阵为（推导过程作为作业）

$$
{}^{n}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}\right)=\begin{bmatrix} 0 & a_2 s_3 & 0 \\ 0 & a_3+a_2 c_3 & a_3 \\ a_2 c_2+a_3 c_{23} & 0 & 0 \\ -s_{23} & 0 & 0 \\ -c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

6.2.5 空间3R球腕机械臂的雅可比矩阵

◆ D-H坐标系



6.2.5 空间3R球腕机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造结果

➢ 基座雅可比矩阵为：

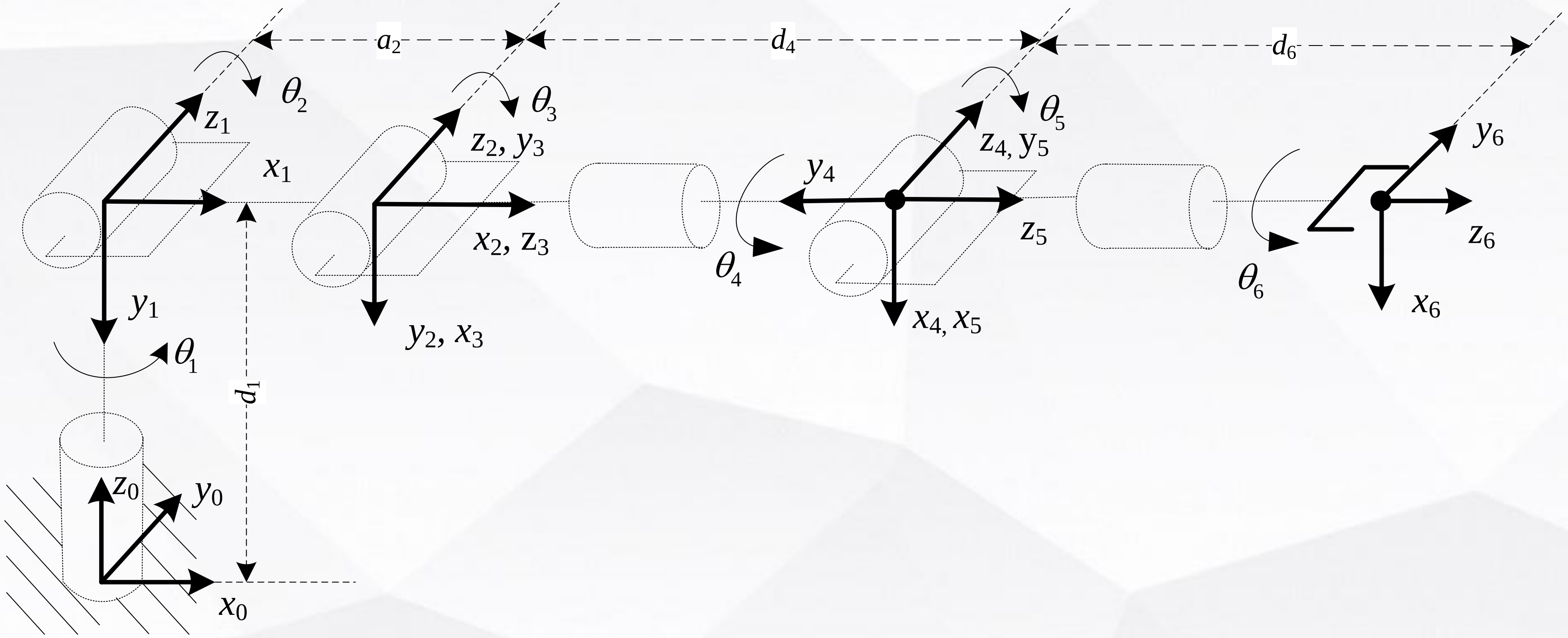
$$
{}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} d_3 s_1 s_2 & -d_3 c_1 c_2 & 0 \\ -d_3 c_1 s_2 & -d_3 s_1 c_2 & 0 \\ 0 & d_3 s_2 & 0 \\ 0 & -s_1 & -c_1 s_2 \\ 0 & \mathrm{c}_1 & -s_1 s_2 \\ 1 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}
$$

➢ 末端雅可比矩阵为：

$$
{}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} d_3 s_2 s_3 & -d_3 c_3 & 0 \\ d_3 s_2 c_3 & d_3 s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -s_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ s_2 s_3 & -\mathrm{c}_3 & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

6.2.6 空间6R腕部分离机械臂的雅可比矩阵

◆ D-H坐标系



6.2.6 空间6R腕部分离机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造结果

- 雅可比矩阵的列分块形式

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\left[{}^{0}\boldsymbol{J}_{1},\quad {}^{0}\boldsymbol{J}_{2},\quad \cdots,\quad {}^{0}\boldsymbol{J}_{6}\right] $$

- 各列的表达式

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{1}=\begin{bmatrix} -s_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right)-d_6\left[s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5\right] \\ c_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right)+d_6\left[c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5\right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

◆ 雅可比矩阵构造结果

➢ 各列的表达式

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix} c_1\left[-a_2s_2+d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right] \\ s_1\left[-a_2s_2+d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right] \\ -a_2c_2-d_4s_{23}-d_6\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right) \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad {}^{0}\boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix} c_1\left[d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right] \\ s_1\left[d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right] \\ -d_4s_{23}-d_6\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right) \\ -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

6.2.6 空间6R腕部分离机械臂的雅可比矩阵

◆ 雅可比矩阵构造结果

➢ 各列的表达式

$$
{}^0\boldsymbol{J}_4=\begin{bmatrix} -d_6\left(s_1c_4+c_1c_{23}s_4\right)s_5 \\ d_6\left(c_1c_4-s_1c_{23}s_4\right)s_5 \\ d_6s_{23}s_4s_5 \\ c_1s_{23} \\ s_1s_{23} \\ c_{23} \end{bmatrix},\quad
{}^0\boldsymbol{J}_5=\begin{bmatrix} -d_6\left[c_1\left(s_{23}s_5-c_{23}c_4c_5\right)+s_1s_4c_5\right] \\ -d_6\left[s_1\left(s_{23}s_5-c_{23}c_4c_5\right)-c_1s_4c_5\right] \\ -d_6\left(c_{23}s_5+s_{23}c_4c_5\right) \\ -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 \\ c_1c_4-s_1c_{23}s_4 \\ s_{23}s_4 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\boldsymbol{J}_6=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5 \\ s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5 \\ c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5 \end{bmatrix}
$$

第6章 微分运动学与雅可比矩阵

6.3.1 直接求导法基本思想

◆ 直接求导法的数学依据

对末端位姿矩阵${}^0T_n$求导，利用该导数与末端速度的关系，可直接得到雅可比矩阵的表达式在{0}下的表示。

已知末端位姿的齐次变换矩阵表达式为：

$$
{}^0\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) & {}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

分别对位置部分、姿态部分进行求导，可得末端线速度、角速度表达式

6.3.2 末端速度表达式

◆ 末端线速度表达式

➢ 末端线速度通过位置矢量直接求导，即：

$$\boldsymbol{v}_e = {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_n(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left({}^0\boldsymbol{J}_{vi}\dot{q}_i\right)$$

➢ 可得关节*i*对末端线速度的传动比：

$${}^0\boldsymbol{J}_{vi} = \frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_i}$$

6.3.2 末端速度表达式

◆ 末端角速度表达式

- 对姿态变换矩阵求导，可得：

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{R}}_n(\boldsymbol{q}) = \left(\boldsymbol{\omega}_e^{\times}\right){}^{0}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) $$

- 其中$\omega^{\times}$ 为由矢量ω的叉乘操作数，即：

$$ \boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} $$

注：也有文献将叉乘操作数表示为 $S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$

6.3.2 末端速度表达式

◆ 末端角速度表达式

- 可求得末端角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_e^{\times} = {}^0\dot{\boldsymbol{R}}_n(\boldsymbol{q})\left[{}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q})\right]^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_i}\left[{}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q})\right]^{\mathrm{T}}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left({}^0\boldsymbol{J}_{\omega i}^{\times}\dot{q}_i\right)$$

- 相应地，关节*i*运动到末端角速度的传动比：

$$ {}^0\boldsymbol{J}_{\omega i}^{\times} = \frac{\partial\left[{}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q})\right]}{\partial q_i}\left[{}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q})\right]^{\mathrm{T}}$$

6.3.3 雅可比矩阵的解析式

◆ 雅可比矩阵确定

➢ 雅可比矩阵的第i列为

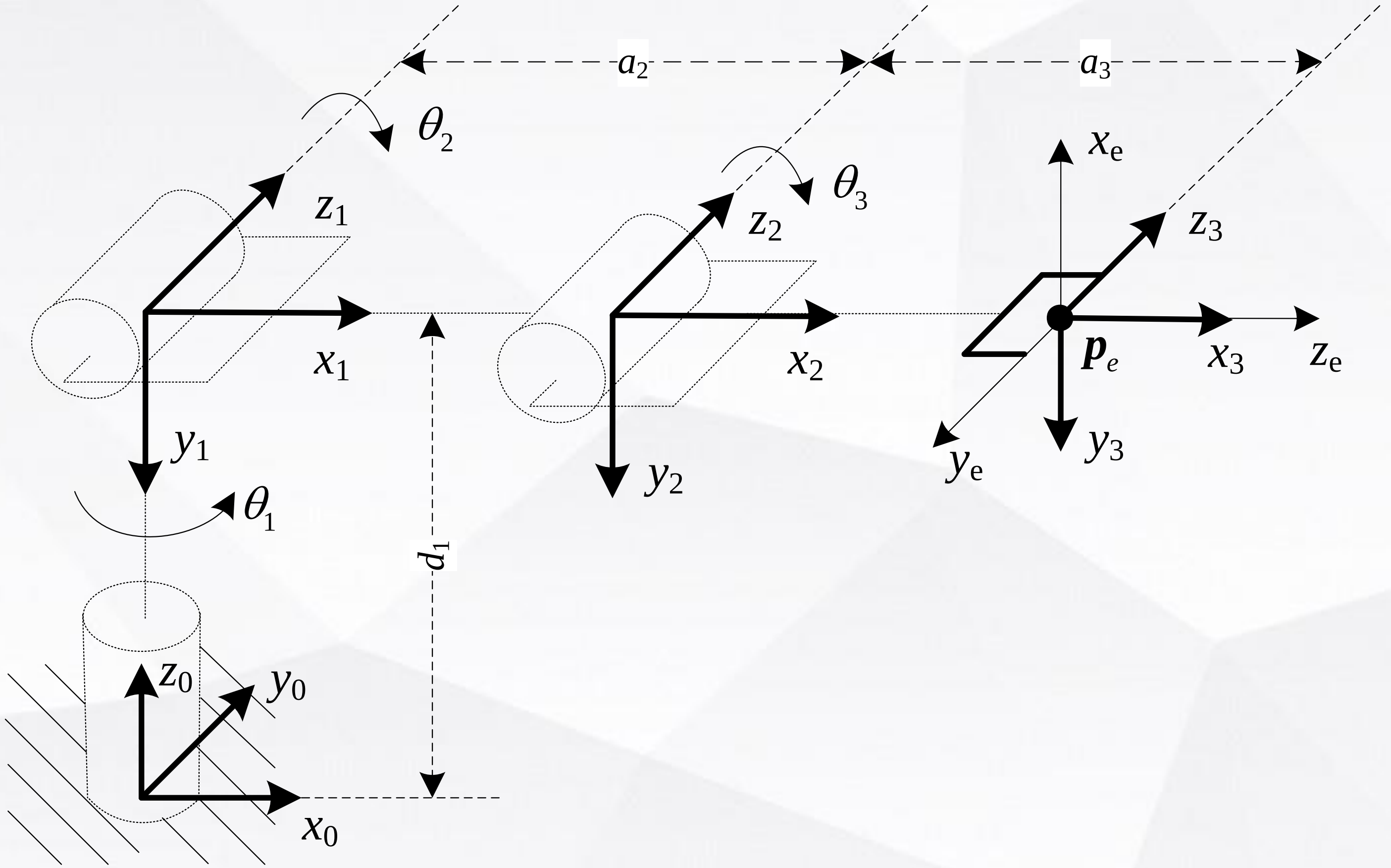
$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}_{vi} \\ {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega i} \end{bmatrix}
$$

➢ 进而可得整个雅可比矩阵，如下

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}_1, & {}^{0}\boldsymbol{J}_2, & \cdots, & {}^{0}\boldsymbol{J}_6 \end{bmatrix}
$$

6.3.4 直接求导法举例

◆ 空间3R肘机械臂D-H坐标系



6.3.4 直接求导法举例

◆ 末端位姿表达式

➢ 通过正运动学方程确定末端位姿

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2\,{}^{2}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1\left(a_2 c_2 + a_3 c_{23}\right) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1\left(a_2 c_2 + a_3 c_{23}\right) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) & {}^{0}\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{bmatrix}
$$

➢ 姿态矩阵表达式

$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

➢ 位置矢量表达式

$$
{}^{0}\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2 c_2 + a_3 c_{23}\right) \\ s_1\left(a_2 c_2 + a_3 c_{23}\right) \\ d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} \end{bmatrix}
$$

6.3.4 直接求导法举例

◆ 位置矢量对各关节求偏导数

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\boldsymbol{J}_{v1} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{p}_3\right)}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{v2} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{p}_3\right)}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -c_1\left(a_2s_2 + a_3s_{23}\right) \\ -s_1\left(a_2s_2 + a_3s_{23}\right) \\ -\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{v3} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{p}_3\right)}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} -a_3c_1s_{23} \\ -a_3s_1s_{23} \\ -a_3c_{23} \end{bmatrix} $$

6.3.4 直接求导法举例

◆ 姿态矩阵对各关节求偏导数

$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

对关节1求偏导

$$
\frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & -c_1 \\ c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

对关节2求偏导

$$
\frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} & -c_1 c_{23} & 0 \\ -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & 0 \\ -c_{23} & s_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

对关节3求偏导

$$
\frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} & -c_1 c_{23} & 0 \\ -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & 0 \\ -c_{23} & s_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

6.3.4 直接求导法举例

◆ 姿态矩阵对各关节求偏导数

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega1}^{\times} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_1} \bullet {}^{0}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{结合操作数的定义}} {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega2}^{\times} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_2} \bullet {}^{0}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega2} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega3}^{\times} = \frac{\partial\left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)}{\partial q_3} \bullet {}^{0}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega3} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

6.3.4 直接求导法举例

◆ 最终的雅可比矩阵表达式

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{J}_{v1} & {}^{0}\boldsymbol{J}_{v2} & {}^{0}\boldsymbol{J}_{v3} \\ {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega 1} & {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega 2} & {}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega 3} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & -(a_2c_2+a_3c_{23}) & -a_3c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

可见：直接求导法与构造法得到相同的结果；但直接求导法对于多自由度的情况非常复杂，也不宜编程实现。

第6章 微分运动学与雅可比矩阵

6.4.1 采用6D变量表示时的微分运动

■ 末端6D微分运动

若末端位姿表示为6D变量的形式，其**状态变量**及**时间导数**分别为

$$\boldsymbol{X}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{\Psi}_e \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{X}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_e \end{bmatrix}$$

另一方面，机器人末端广义速度

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_e \\ \boldsymbol{J}_{Euler} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_e \end{bmatrix}$$

根据**微分运动学**方程，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_e \\ \boldsymbol{J}_{Euler} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

6.4.1 采用6D变量表示时的微分运动

■ 末端6D微分运动

上式两边**乘以时间微分**dt后有

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{J}_{Euler}\delta\boldsymbol{\Psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\delta\boldsymbol{q}$$

其中

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{v}_e dt \\ \delta\boldsymbol{\Psi}_e = \dot{\boldsymbol{\Psi}}_e dt \\ \delta\boldsymbol{q} = \dot{\boldsymbol{q}} dt \end{cases}$$

当$\boldsymbol{J}_{Euler}$**可逆**时，有

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{p}_e \\ \delta\boldsymbol{\Psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_{Euler}^{-1}\boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\delta\boldsymbol{q}$$

6.4.1 采用6D变量表示时的微分运动

■ 速度级运动学方程与微分运动

上式也可写成

$$\delta \boldsymbol{X}_e = \tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\delta \boldsymbol{q}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_{Euler}^{-1}\boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

因而，可按下式预测下一个时刻末端的6D位姿：

$$\boldsymbol{X}_e(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{X}_e(t) + \delta \boldsymbol{X}_e$$

在应用时必须特别注意**旋转运动微分量与欧拉角微分量**的转换关系

6.4.2 采用齐次变换矩阵表示时的微分运动

■ 采用齐次变换矩阵时的微分运动

➢ 末端微分运动矢量为

$$\boldsymbol{D}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{pe}\\ \boldsymbol{\delta}_{\phi e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{ex}, d_{ey}, d_{ez}, \delta_{ex}, \delta_{ey}, \delta_{ez}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其与刚体线速度和角速度的关系为：

$$\boldsymbol{D}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_e\\ \boldsymbol{\omega}_e\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q})\\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{q})\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\delta\boldsymbol{q}$$

6.4.2 采用齐次变换矩阵表示时的微分运动

■ 末端的微分运动

当D_e解出后，可计算末端坐标系相对于参考系的**微分算子**：

$$\Delta_e = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ez} & \delta_{ey} & d_{ex} \\ \delta_{ez} & 0 & -\delta_{ex} & d_{ey} \\ -\delta_{ey} & \delta_{ex} & 0 & d_{ez} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步，末端齐次变换矩阵的微分为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{\Delta}_e \boldsymbol{T}_n$$

因此，下一个时刻末端位姿矩阵：

$$\boldsymbol{T}_n\left(t+dt\right) = \boldsymbol{T}_n\left(t\right) + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_n$$

第6章 微分运动学与雅可比矩阵

1. 机器人微分运动学概述
2. 雅可比矩阵计算的构造法
3. 雅可比矩阵计算的直接求导法
4. 机器人微分运动分析
5. 速度级逆运动学及奇异问题
6. 通用逆运动学求解方法

6.5.1 速度级逆运动学

■ 速度级逆运动学求解问题

➢ 速度级正运动学

根据关节速度计算末端速度，方程如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}\right)\dot{\boldsymbol{q}}$$

其中$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$为$m \times n$的雅可比矩阵，是$q$的函数

➢ 速度级逆运动学

根据末端速度计算关节速度，即对正运动学方程进行求解。

问题：速度级正运动学方程是否可解？

如果可解，如何求解有效解？

如果无有效解，对应什么情况，实际中如何处理？

6.5.1 速度级逆运动学

■ 运动学奇异问题

若J为方阵且满秩（可逆），则有解，且解为：

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_e$$

然而，J不满秩时，求解的关节速度将为无穷大，现实上不存在，意味着给定的末端速度不可实现，机器人损失至少一个运动自由度，此种现象称为机械臂的运动学奇异，对应的关节臂型q称为奇异臂型、末端位姿称为奇异位姿（奇异位形或奇异点）。

注：奇异的概念在线性代数中用于描述方程组的可解性，若系数矩阵为方阵且满秩，则有唯一解；若不满秩，则有无穷解或无解，不满秩的矩阵称为奇异（退化）矩阵。

6.5.2 平面2R机械臂举例

◆ 平面2连杆机械臂速度级正运动学

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

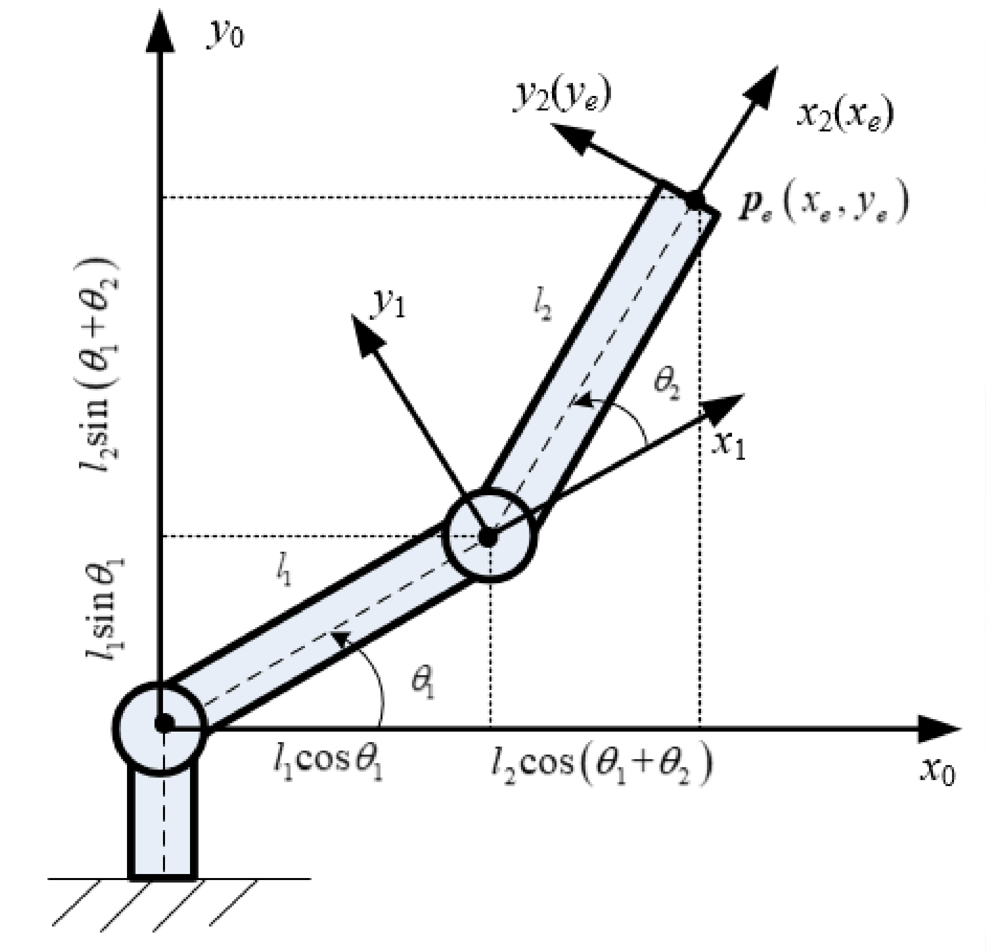
可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

➢ 雅可比矩阵的逆为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$



6.5.2 平面2R机械臂举例

◆平面2连杆机械臂速度级逆运动学

➢ 根据末端速度计算关节角速度的表达式

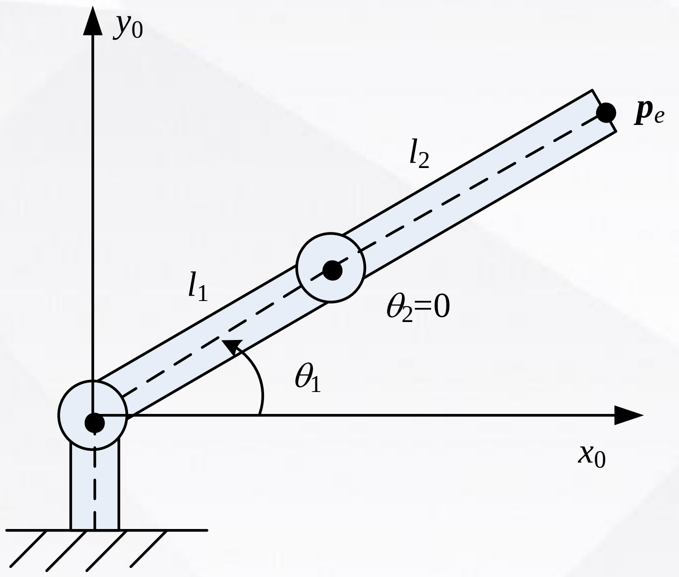
$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix}l_2c_{12} & l_2s_{12}\\-l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_e\\\dot{y}_e\end{bmatrix}$$

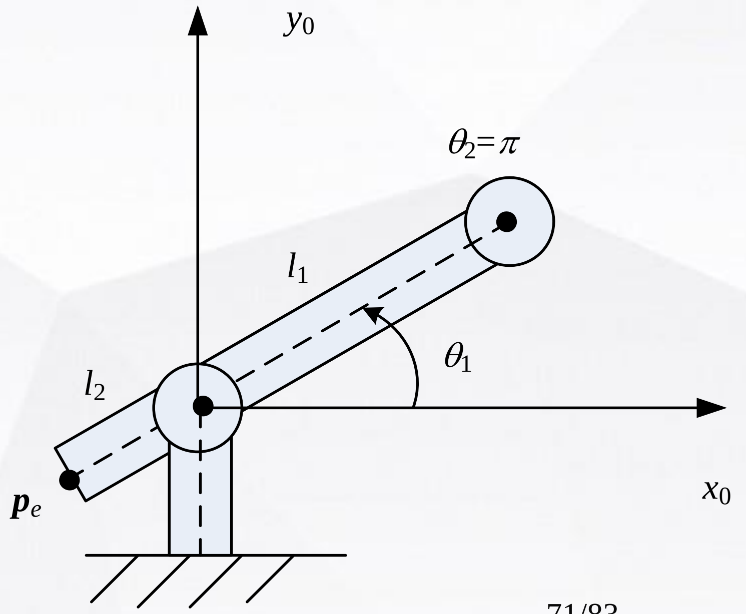
当$\theta_2 = 0\ or\ \pi$

$$\dot{\theta}_1 \to \infty,\quad \dot{\theta}_2 \to \infty$$

说明在此种情况下，要实现给定的末端线速度，关节1和2的角速度将为无穷大，物理上不可行

因而， θ_2=0 或$\theta_2=\pi$ 为奇异条件，此时机械臂末端损失了沿着臂杆方向的运动能力。





6.5.3 雅可比矩阵的奇异值分解及其性质

◆奇异值分解

➢ 对$m\times n$的J，存在m阶正交矩阵U和n阶正交矩阵V，使得

$$J = U \Sigma V^{\mathrm{T}}$$

其中：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 \end{bmatrix}$$

满足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$

(σ_1~σ_m为J的m个奇异值)

➢ 矩阵U的列矢量为u_i、矩阵V的列矢量为v_i，则J还可表示为

$$J = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

满足 $\mathrm{rank}(\Sigma)=\mathrm{rank}(J)$

6.5.3 雅可比矩阵的奇异值分解及其性质

◆奇异值分解

➢ 若J的**秩为r**，且$r \le m$，还可将Σ表示为如下形式

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \qquad (\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0)$$

因而

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

6.5.3 雅可比矩阵的奇异值分解及其性质

◆逆矩阵及广义逆矩阵

➢ 若J为$n\times n$的方阵时（即$m=n$的情况），矩阵逆为

$$J^{-1}=V\Sigma^{-1}U^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_i^T$$

可知：当雅可比矩阵奇异时，至少一个奇异值为0（如最小奇异值σ_n）。此时，$1/\sigma_n$为无穷大，逆矩阵不存在

➢ 对于一般情况，采用Moore-Penrose广义逆

$$J^{+}=J^{\mathrm{T}}\left(JJ^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=V\Sigma^{+}U^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_i^T$$

6.5.3 雅可比矩阵的奇异值分解及其性质

◆关节速度与末端速度的关系

➢ 关节速度范数与末端速度范数的比

$$\frac{1}{\sigma_1} \le \frac{\|\dot{\boldsymbol{q}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}_e\|} \le \frac{1}{\sigma_m}$$

➢ 末端速度范数与关节速度范数的比

$$\sigma_m \le \frac{\|\dot{\boldsymbol{x}}_e\|}{\|\dot{\boldsymbol{q}}\|} \le \sigma_1$$

6.5.4 运动学奇异的通用处理方法

◆基于广义逆的奇异处理

➢ 采用J的伪逆代替矩阵逆进行微分运动学求解

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{+}(\boldsymbol{q})\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_e\\ \boldsymbol{\omega}_e\end{bmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_i^T\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_e\\ \boldsymbol{\omega}_e\end{bmatrix}$$

所得的值为满足下面条件的最优解：

$$\dot{\boldsymbol{q}}:\quad \min_{\dot{\boldsymbol{q}}}\left(\left\|\dot{\boldsymbol{x}}_e-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right\|^2\right)$$

注意：上式只用到了r个非零奇异值对应的项，相当于直接截断了奇异值为0的项，虽然能保证有解，但求解误差大，是通过牺牲精度来获得有效解的。

6.5.4 运动学奇异的通用处理方法

◆阻尼最小方差(DLS）法

- **方法原理：通过对伪逆求解公式进行改造，即采用下式求解**

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{\#}\dot{\boldsymbol{x}}_e \qquad \text{其中，} \boldsymbol{J}^{\#} = \left(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} + \lambda^2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{J}^T$$

- **该方法可实现下式的最小化**

$$\dot{\boldsymbol{q}}: \quad \min_{\dot{q}}\left(\left\|\dot{\boldsymbol{x}}_e - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right\|^2 + \lambda^2\left\|\dot{\boldsymbol{q}}\right\|^2\right)$$

- **结合雅可比矩阵的SVD分解，有**

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{\#}\dot{\boldsymbol{x}}_e = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_i^T\dot{\boldsymbol{x}}_e$$

其中λ为阻尼系数， 阻止了关节角速度为无穷大的情况。

◆阻尼最小方差(DLS）法

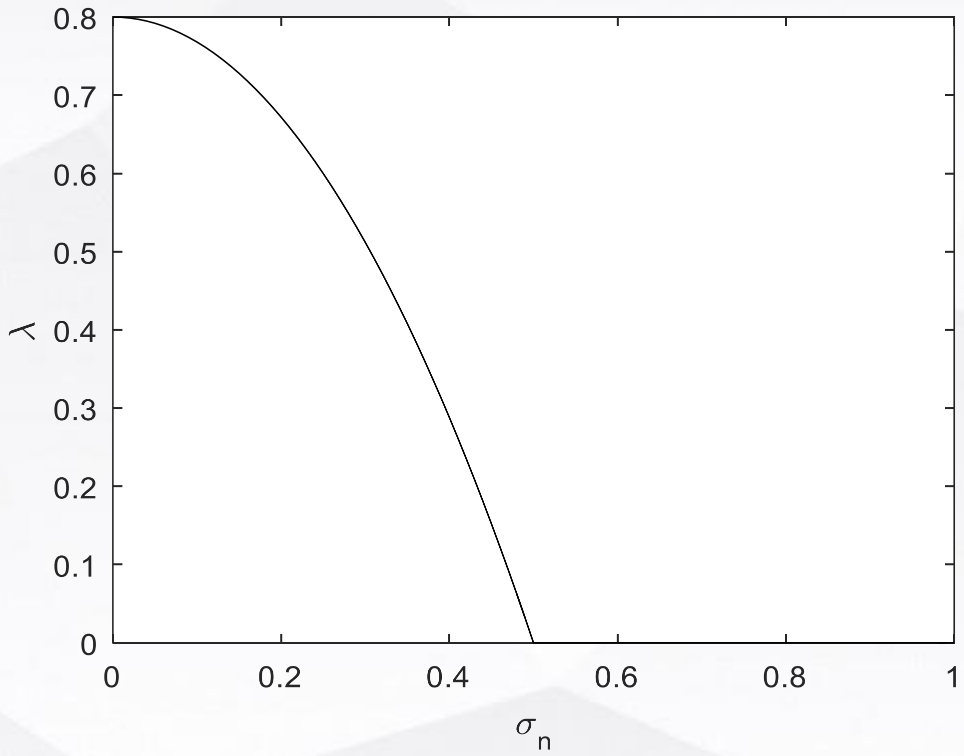
➢ 阻尼系数的**自适应调整**

$$\lambda^2=\begin{cases}0, & \text{当 } \sigma_n \geq \varepsilon \\ \left(1-\left(\dfrac{\sigma_n}{\varepsilon}\right)^2\right)\lambda_m^2, & \text{其他}\end{cases}$$

其中: σ_n ——最小奇异值；

ε ——判断是否奇异的阈值；

λ_m ——奇异区域的最大阻尼系数。



可保证在奇异点处阻尼值最大，在阈值之外则为0。没有进行简单截断，**精度比伪逆法高**。但阻尼系数**对所有奇异值**都产生了作用。

1. 机器人微分运动学概述
2. 雅可比矩阵计算的构造法
3. 雅可比矩阵计算的直接求导法
4. 机器人微分运动分析
5. 速度级逆运动学及奇异问题
6. 通用逆运动学求解方法

迭代方程建立

- 期望末端位姿为

$$T_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_d & \boldsymbol{o}_d & \boldsymbol{a}_d & \boldsymbol{p}_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 当前关节角为$\boldsymbol{q}_c$，基于正运动学得到当前末端位姿

$$T_c = \mathrm{Fkine}(\boldsymbol{q}_c) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_c & \boldsymbol{o}_c & \boldsymbol{a}_c & \boldsymbol{p}_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 则末端位置误差矢量：

$$\boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{q}_c) = \boldsymbol{d}_{pe} = \boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}_c$$

- 末端姿态误差矢量：

$$\boldsymbol{e}_o(\boldsymbol{q}_c) = \boldsymbol{\delta}_\phi \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_c \times \boldsymbol{n}_d + \boldsymbol{o}_c \times \boldsymbol{o}_d + \boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{a}_d)$$

6.6.1 算法原理

□ 迭代方程建立

- ➢ 误差运动学方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{q}_c) \\ \boldsymbol{e}_o(\boldsymbol{q}_c) \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_c)\Delta\boldsymbol{q}$$

- ➢ 因而有（即为迭代方程）

$$\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{J}^{+}(\boldsymbol{q}_c)\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{q}_c) \\ \boldsymbol{e}_o(\boldsymbol{q}_c) \end{bmatrix}$$

Δq为相应于当前末端**位姿误差**的关节位置误差，作为**补偿量进行迭代**。

6.6.2 算法流程

算法流程设计

- $k=1,\ q_{ck}=q_c(k)=q_0$
- 正运动学计算 $T_c(\boldsymbol{q}_{ck})$、雅可比公式计算 $J_c(\boldsymbol{q}_{ck})$
- 根据误差公式计算 $\boldsymbol{e}_{pk}=\boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{q}_{ck}),\ \boldsymbol{e}_{ok}=\boldsymbol{e}_o(\boldsymbol{q}_{ck})$
- 若 $\|\boldsymbol{e}_{pk}\|\le\varepsilon_p$ 且 $\|\boldsymbol{e}_{ok}\|\le\varepsilon_o$，算法停止，$q_{ck}$即为逆解，否则计算关节迭代量

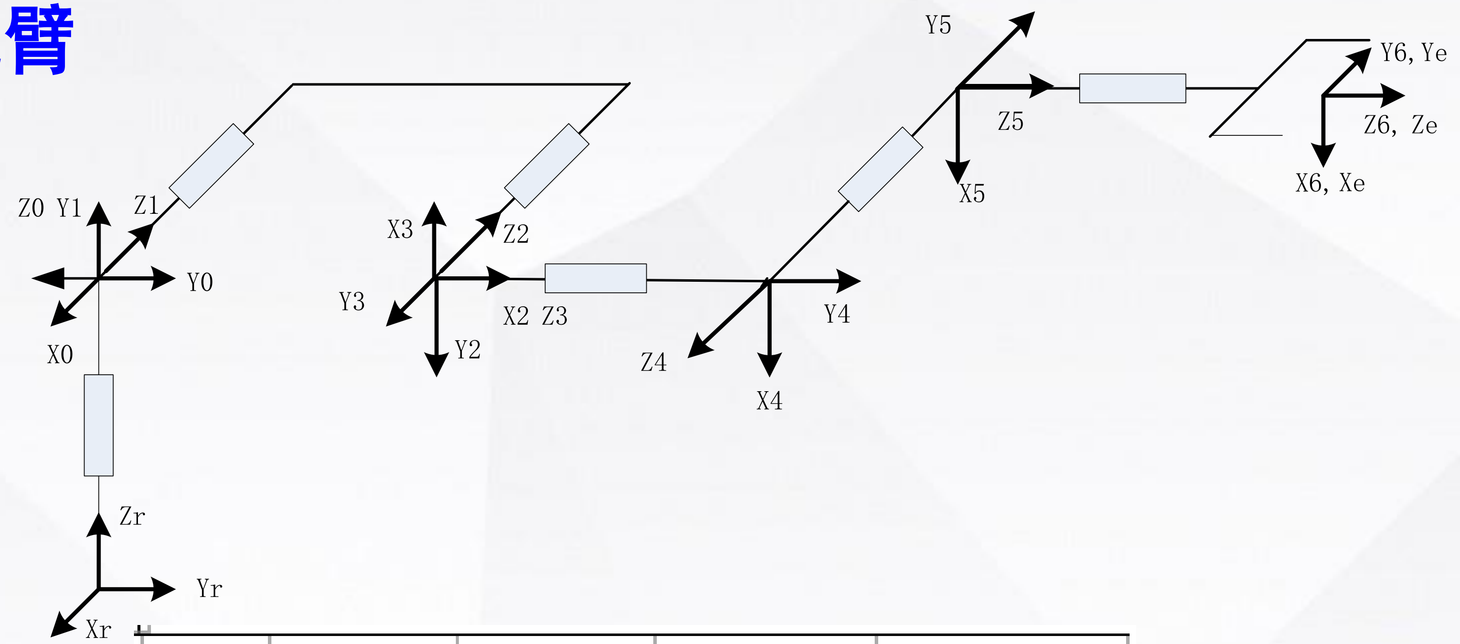
$$\Delta\boldsymbol{q}_k=\boldsymbol{J}^+(\boldsymbol{q}_{ck})\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_p(\boldsymbol{q}_c)\\ \boldsymbol{e}_o(\boldsymbol{q}_c)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}_{c(k+1)}=\boldsymbol{q}_{ck}+\Delta\boldsymbol{q}_k$$

- $k=k+1$，转第二步，循环

6.6.3 求解举例

◆ 举例：末端偏置机械臂

该结构**不满足**解析逆解的条件，可采用上述方法求**数值解**！



i	θ_i /°	α_i /°	a_i /m	d_i /m
1	-90	90	0	0
2	180	0	0.41	0
3	-90	-90	0	0
4	180	90	0	0.41
5	0	-90	0	-0.094
6	0	0	0	0.18

6.6.3 求解举例

◆ 举例：末端偏置机械臂

➢ 给定期望位置

$$T_d = \begin{bmatrix} -0.4659 & -0.8464 & 0.2581 & -0.0611 \\ -0.1932 & -0.1873 & -0.9631 & -0.0352 \\ 0.8635 & -0.4985 & -0.0763 & 0.6368 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 设定迭代初值

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = [5,\ -130,\ 70,\ 20,\ -150,\ 50.0000]^{\mathrm{T}}$$

➢ 采用上述方法，解得

$$\boldsymbol{\Theta}_d = [6.6243,\ -112.6651,\ 74.5159,\ 14.8091,\ 145.3735,\ 41.6301]^{\mathrm{T}}$$

讨论：该方法有什么优点和缺点？迭代初值对求解结果有何影响？如何理解该方法的一组解与机械臂存在多解的关系？

谢　谢！