智科专业本科生课程《智能机器人技术》

第7章 运动学奇异分析与性能评价

彭键清 副教授

中山大学 智能工程学院

邮箱：pengjq7@mail.sysu.edu.cn

办公室：工学园1栋505

2024年04月22日

第7章 运动学奇异分析与性能评价

7.1 运动学奇异判据

■ 雅可比矩阵奇异的判断

- 速度级逆运动学方程

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{x}}_e$$

- 方阵降秩的充要条件是其**行列式**为0，即

$$\det\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\right) = 0$$

判据：使雅可比矩阵**行列式为0**的臂型为奇异臂型。基于此判据可推导奇异条件的**表达式**。

拓展：也可根据SVD分解得到的**最小奇异值是否为0**来判断是否奇异。但该方法不易得到表达式，一般仅用于**数值判断**。

■ 参考系对奇异条件的影响分析

- ➢ 分别在{a}系和{b}系的雅可比矩阵有如下关系

$$ {}^{a}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{a}\boldsymbol{R}_{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{a}\boldsymbol{R}_{b} \end{bmatrix} {}^{b}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) $$

- ➢ 可知，不同参考系下的雅可比行列式相同，即

$$ \det\left({}^{a}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\right) = \det\left({}^{b}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\right) $$

结论：奇异条件与参考系的选择无关。但通过选择合适的参考系，可以得到简洁表达式，进而简化奇异分析过程。

第7章 运动学奇异分析与性能评价

1 运动学奇异的判据

2 **空间3R机械臂运动学奇异分析**

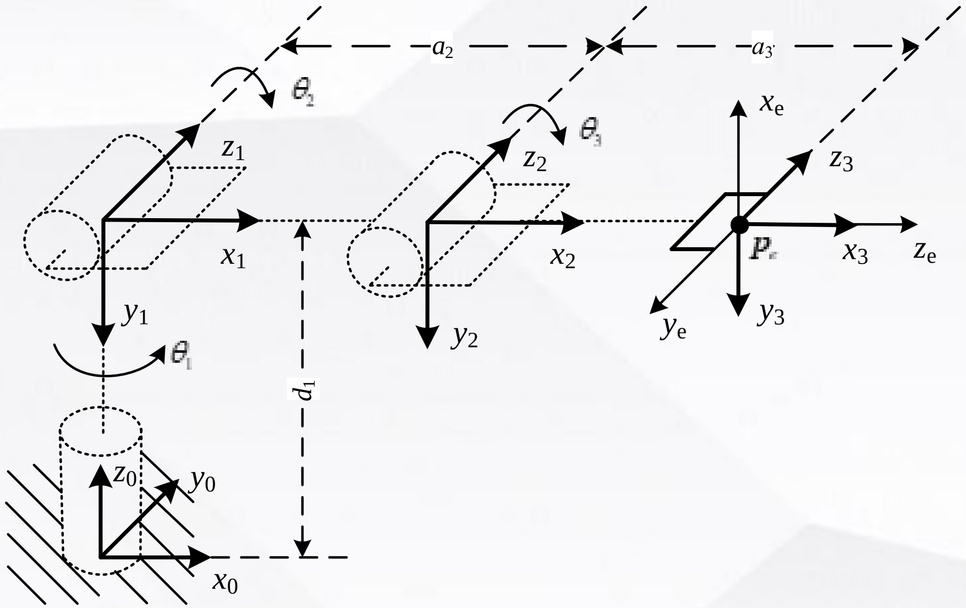
3 腕部可分离6R机械臂奇异分析

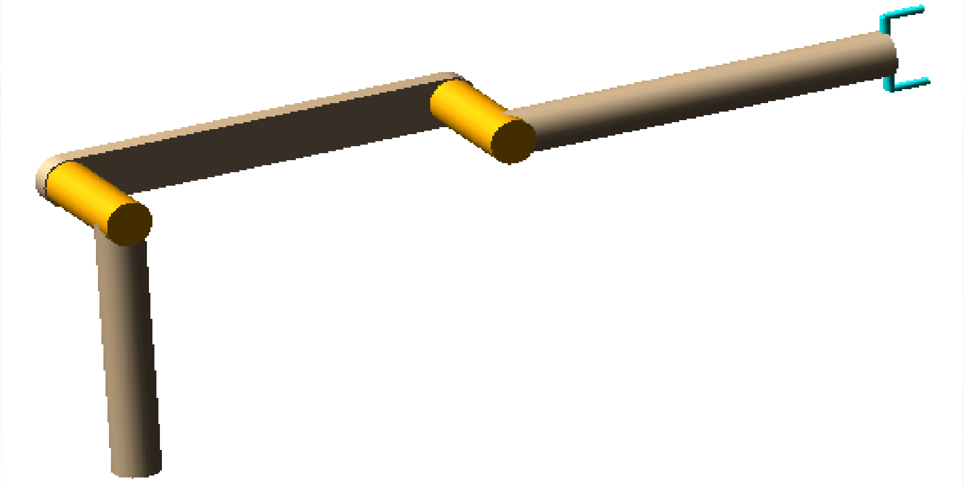
4 一般6R机械臂运动学奇异分析

5 机器人运动性能评价

7.2.1 空间3R肘机械臂分析

◆ 构型及D-H坐标





D-H参数表

连杆i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	0	-90	0	d_1
2	0	0	a_2	**0**
3	**0**	**0**	a_3	**0**

1. 基于基座雅可比矩阵的分析

➢ 基座雅可比矩阵为（不特别说明时以{0}为参考，下同）

$$J(\Theta)=\begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & -(a_2c_2+a_3c_{23}) & -a_3c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\Re^{6\times 3}$$

7.2.1 空间3R肘机械臂分析

1. 基于基座雅可比矩阵的分析

- 若将末端线速度和角速度分开考虑，得到分块矩阵

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{\Theta})\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}
-s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23}\\
c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23}\\
0 & -(a_2c_2+a_3c_{23}) & -a_3c_{23}\\
\hdashline
0 & -s_1 & -s_1\\
0 & \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_1\\
1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

- 相应的运动学方程分解为

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_e\\ \boldsymbol{\omega}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\\ \boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{\Theta})\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\Theta}} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}\\ \boldsymbol{\omega}_e=\boldsymbol{J}_\omega(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}\end{cases}
$$

1. 基于基座雅可比矩阵的分析

- 该机械臂用于进行末端定位，因而考虑末端线速度方程

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}, \qquad \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta}) \in \Re^{3\times3}$$

- 若Jv为满秩的3×3方阵，则关节角速度可按下式求得

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \left[\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})\right]^{-1}\boldsymbol{v}_e$$

若*Jv*不满秩，则关节角速度无有效解。因此可以通过分析*Jv*来判断机械臂是否处于奇异状态。

7.2.1 空间3R肘机械臂分析

1. 基于基座雅可比矩阵的分析

◆ 对雅可比分块矩阵进行奇异分析

$$J_v(\Theta)=\begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & -(a_2c_2+a_3c_{23}) & -a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

➢ 根据行列式的计算公式，可得

$$\left|J_v(q)\right|=\det\left(J_v(q)\right)=a_2a_3s_3(a_2c_2+a_3c_{23})$$

➢ 令行列式为0，可得矩阵不满秩的条件，即

$$\left|J_v(q)\right|=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_3=0 \ \text{ or } \ a_2c_2+a_3c_{23}=0}$$

2. 基于末端雅可比矩阵的分析

➢ 类似地，可求得末端雅可比矩阵为

$$
{}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})=\left[\begin{array}{ccc}
0 & a_2 s_3 & 0 \\
0 & a_3+a_2 c_3 & a_3 \\
a_2 c_2+a_3 c_{23} & 0 & 0 \\
\hdashline
-s_{23} & 0 & 0 \\
-c_{23} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

➢ 其分块矩阵为

$$
{}^{n}\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{\Theta})=\begin{bmatrix}
0 & a_2 s_3 & 0 \\
0 & a_3+a_2 c_3 & a_3 \\
a_2 c_2+a_3 c_{23} & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

2. 基于末端雅可比矩阵的分析

- 根据行列式的计算公式，可得

$$\left|{}^{n}\boldsymbol{J}_{v}(\boldsymbol{\Theta})\right|=\det\left({}^{n}\boldsymbol{J}_{v}(\boldsymbol{\Theta})\right)=a_2a_3s_3\left(a_2c_2+a_3c_{23}\right)$$

- 令行列式为0，可得矩阵不满秩的条件，即

$$\left|{}^{n}\boldsymbol{J}_{v}(\boldsymbol{q})\right|=0 \Longrightarrow \boxed{s_3=0 \;\text{ or }\; a_2c_2+a_3c_{23}=0}$$

可见，基于末端雅可比和基座雅可比分析的结果一样，因为

$$\det\left({}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})\right)=\det\left({}^{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})\right)$$

再次说明了雅可比矩阵的奇异性与坐标系的选择无关！

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

1. 肘部奇异（边界奇异）

① 肘部奇异条件

$$s_3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \theta_3 = 0 \\ \theta_3 = \pi \end{cases}$$

② 肘部奇异时的运动特点

- 将奇异条件下的关节变量代入末端雅可比表达式，可得

$$ {}^n\boldsymbol{J}_v = \begin{bmatrix} 0 & a_2 s_3 & 0 \\ 0 & a_3 + a_2 c_3 & a_3 \\ a_2 c_2 + a_3 c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta_3=0\text{或}\pi\text{代入}} {}^n\boldsymbol{J}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 \pm a_2 & a_3 \\ (a_2 \pm a_2) c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

1. 肘部奇异（边界奇异）

➢ 此时的运动学方程为：

$$\begin{bmatrix} {}^{n}v_{ex} \\ {}^{n}v_{ey} \\ {}^{n}v_{ez} \end{bmatrix} = {}^{n}\boldsymbol{J}_{v}\left(\boldsymbol{\Theta}\right)\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 \pm a_2 & a_3 \\ \left(a_2 \pm a_2\right)c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

➢ 各轴分量为：

$$\begin{cases} {}^{n}v_{ex} = 0 \\ {}^{n}v_{ey} = \left(a_3 \pm a_2\right)\dot{\theta}_2 + a_3\dot{\theta}_3 \\ {}^{n}v_{ez} = \left(a_2 \pm a_2\right)c_2\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

表明：该臂型下关节运动无法产生末端在x_3方向的线速度，即机械臂末端损失了一个运动自由度。

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

1. 肘部奇异（边界奇异）

③ 肘部奇异臂型分析

$$s_3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \theta_3 = 0 \\ \theta_3 = \pi \end{cases}$$

➢ 将奇异条件下的关节变量代入末端位置表达式，可得

$${}^0\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta_3=0\text{或}\pi\text{代入}} {}^0\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2\left(a_2 \pm a_3\right) \\ s_1c_2\left(a_2 \pm a_3\right) \\ d_1 - s_2\left(a_2 \pm a_3\right) \end{bmatrix}$$

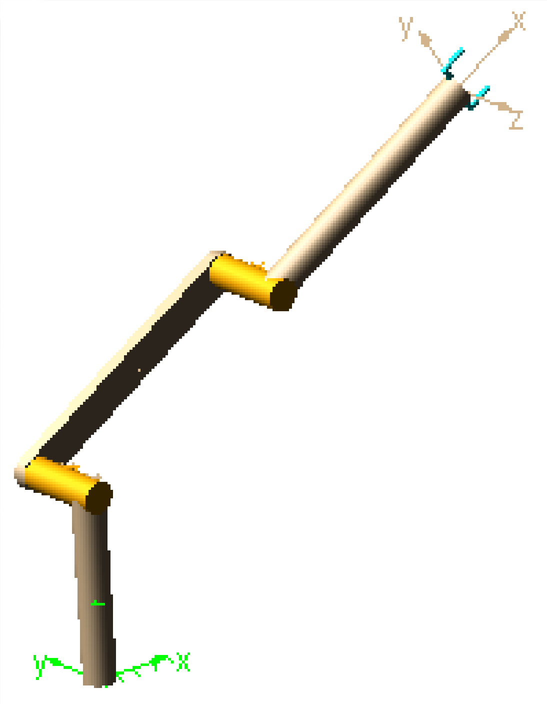
此时末端点相对于肩部点S(0, 0, d_1) 的距离为

$$\left|{}^0\boldsymbol{p}_3 - {}^0\boldsymbol{S}\right| = \left|a_2 \pm a_3\right| \Longrightarrow \text{机械臂末端处于工作空间边界}$$

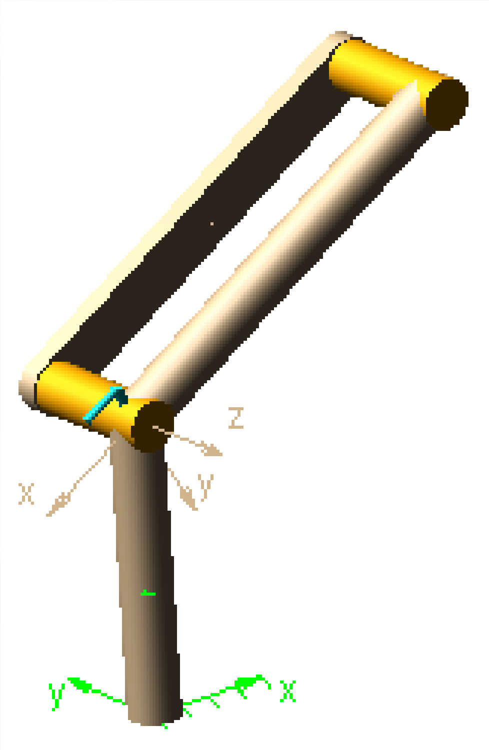
7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

1. 肘部奇异（边界奇异）

- 奇异臂型的三维状态（s3=0)）



(a)工作空间外边界$\theta_3=0$



(b)工作空间内边界$\theta_3=\pi$

特点：末端损失x_3（沿臂伸展）方向的平动自由度（$^3v_{ex}=0$）

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

2. 肩部奇异（内部奇异）

① 肩部奇异条件

$$\boxed{a_2c_2 + a_3c_{23} = 0} \longrightarrow \begin{cases} \theta_2 = \operatorname{atan}\left(\dfrac{a_2 + a_3c_3}{a_3s_3}\right) \\ \theta_2 = \operatorname{atan}\left(\dfrac{a_2 + a_3c_3}{a_3s_3}\right) - \pi \end{cases}$$

② 肩部奇异时的运动特点

➤ 将奇异条件下的关节变量代入末端雅可比表达式，可得

$$ {}^{n}\boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q})\big|_{a_2c_2+a_3c_{23}=0} = \begin{bmatrix} 0 & a_2s_3 & 0 \\ 0 & a_3 + a_2c_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

2. 肩部奇异（内部奇异）

➢ 此时的运动学方程为：

$$\begin{bmatrix} {}^{n}v_{ex} \\ {}^{n}v_{ey} \\ {}^{n}v_{ez} \end{bmatrix} = {}^{n}\boldsymbol{J}_{v}(\boldsymbol{\Theta})\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 s_3 & 0 \\ 0 & a_3 + a_2 c_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

➢ 各轴分量为：

$$\begin{cases} {}^{n}v_{ex} = a_2 s_3 \dot{\theta}_2 \\ {}^{n}v_{ey} = \left(a_3 + a_2 c_3\right)\dot{\theta}_2 + a_3 \dot{\theta}_3 \\ {}^{n}v_{ez} = 0 \end{cases}$$

表明：该臂型下关节运动无法产生末端在z_3方向的线速度，即机械臂末端损失了一个运动自由度

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

2. 肩部奇异（内部奇异）

③ 肩部奇异臂型分析

$$a_2c_2 + a_3c_{23} = 0$$

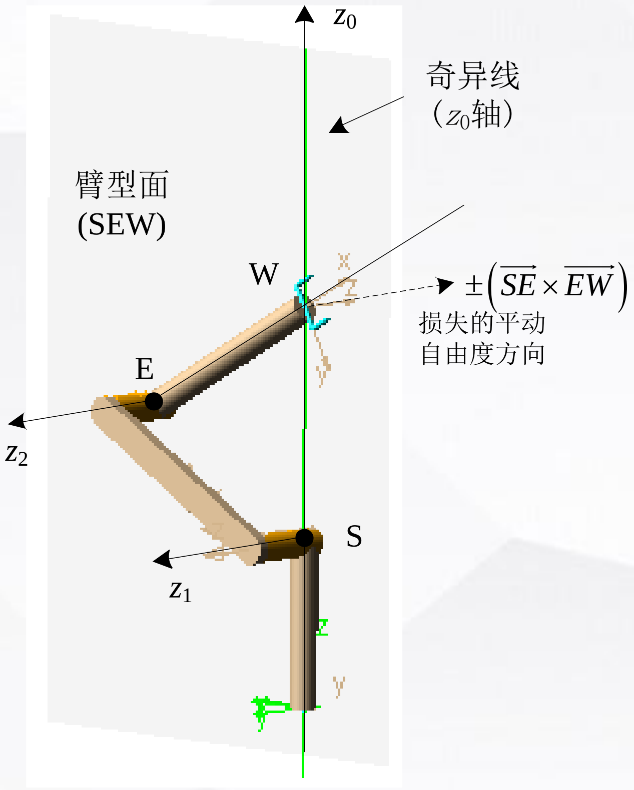
- 将奇异条件下的关节变量代入末端位置表达式，可得

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{a_2c_2+a_3c_{23}=0} {}^{0}\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix} $$

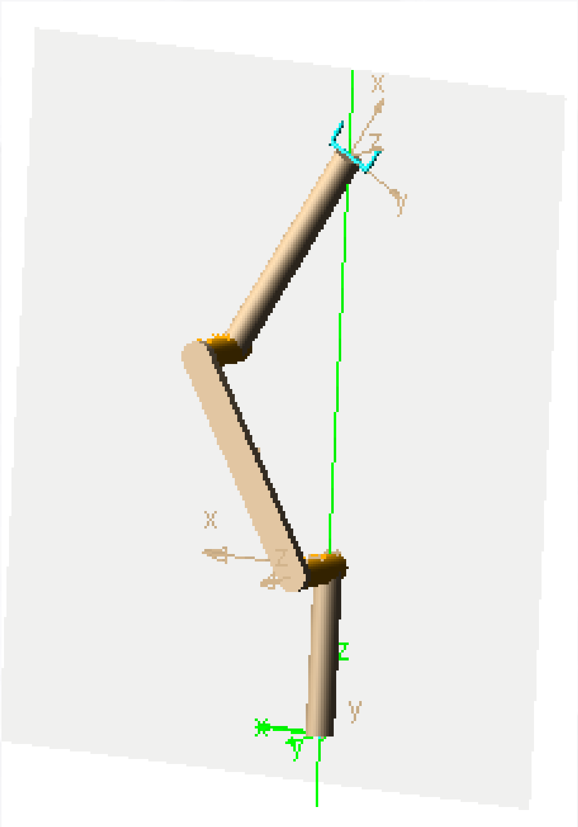
此时末端点位于z_0轴上 ($p_{ex}= p_{ey} =0$)

7.2.2 空间3R肘机械臂奇异臂型分析

2. 肩部奇异（内部奇异）



(a) 奇异臂型1 $\left(\theta_2=-30,\ \theta_3=-120\right)$

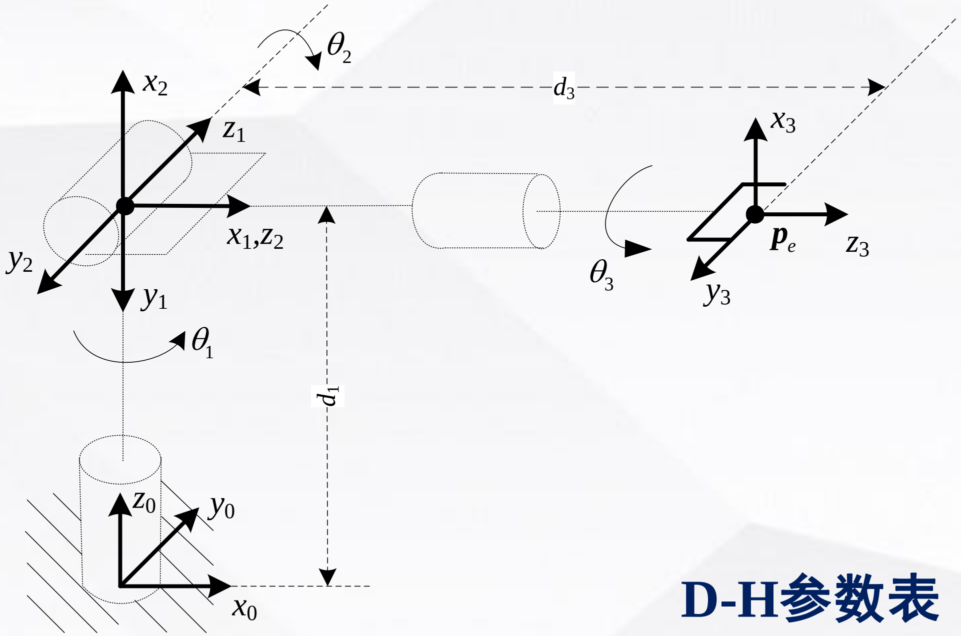


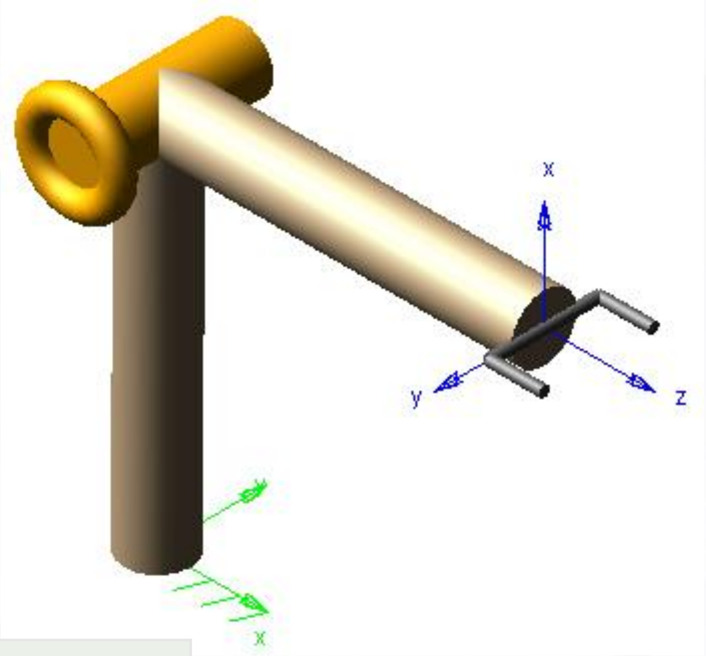
(b) 奇异臂型2 $\left(\theta_2=-60,\ \theta_3=-60\right)$

特点：损失z_3（垂直于臂型面SEW）方向的平动自由度（${}^3v_{ez}=0$）

7.2.3 空间3R球腕机械臂分析

◆ 构型及D-H坐标





D-H参数表

连杆i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	0	-90	0	d_1
2	-90	-90	*0*	**0**
3	**0**	**0**	a_3	d_3

7.2.3 空间3R球腕机械臂分析

◆ 奇异条件确定

➢ 该臂用于**定姿**，故考虑末端角速度对于的雅可比分块矩阵

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0 & -s_1 & -c_1 s_2\\ 0 & c_1 & -s_1 s_2\\ 1 & 0 & -c_2\end{bmatrix},\quad {}^{n}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}-s_2 c_3 & -s_3 & 0\\ s_2 s_3 & -c_3 & 0\\ -c_2 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

➢ 行列式（基座及末端雅可比行列式相同，可用任何一个分析）

$$
\left|{}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})\right|=\left|{}^{n}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})\right|=s_2
$$

➢ 可得奇异条件为：

$$
s_2=0 \Rightarrow \begin{cases}\theta_2=0\\ \theta_2=\pi\end{cases}
$$

7.2.3 空间3R球腕机械臂分析

◆ 奇异时的运动分析

➢ 发生奇异时的雅可比矩阵为 ($s_2=0$, $c_2=\pm1$)

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0 & -s_1 & 0\\ 0 & \mathrm{c}_1 & 0\\ 1 & 0 & \mp1\end{bmatrix},\quad {}^{n}\boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0 & -s_3 & 0\\ 0 & -\mathrm{c}_3 & 0\\ \mp1 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

➢ 基座坐标系下的运动学方程为

$$
\begin{bmatrix}{}^{0}\omega_{ex}\\ {}^{0}\omega_{ey}\\ {}^{0}\omega_{ez}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -s_1 & 0\\ 0 & \mathrm{c}_1 & 0\\ 1 & 0 & \mp1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}
$$

◆ 奇异时的运动分析

➢ 各轴角速度分量为

$$\begin{cases} {}^0\omega_{ex} = -s_1\dot{\theta}_2 \\ {}^0\omega_{ey} = c_1\dot{\theta}_2 \\ {}^0\omega_{ez} = \dot{\theta}_1 \mp \dot{\theta}_3 \end{cases}$$

可知，产生的角速度满足：

$${}^0\omega_{ex}^2 + {}^0\omega_{ey}^2 = \dot{\theta}_2^2$$

特点：x、y轴的角速度线性相关，不能独立确定，即末端损失绕矢量$\pm(z_1\times z_2)$ 或$\pm(z_1\times z_0)$旋转的运动

◆ 奇异时的臂型分析

➢ 将奇异时的关节变量代入末端姿态矩阵，可得(s_2=0, c_2=±1)

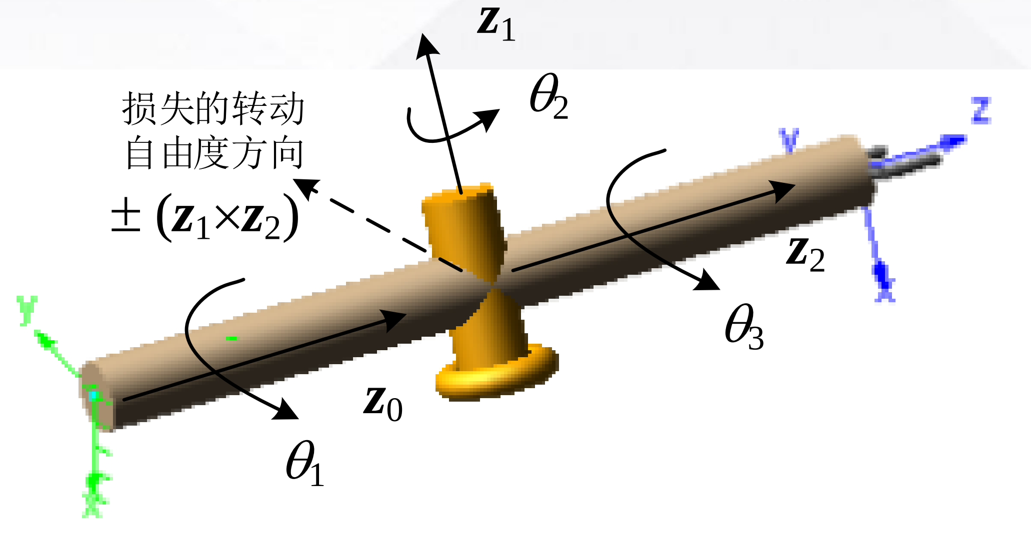
$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix} s_1s_3+c_1c_2c_3 & s_1c_3-c_1c_2s_3 & -c_1s_2 \\ -c_1s_3+s_1c_2c_3 & -c_1c_3-s_1c_2s_3 & -s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} s_1s_3\pm c_1c_3 & s_1c_3\mp c_1s_3 & 0 \\ -c_1s_3\pm s_1c_3 & -c_1c_3\mp s_1s_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pm\cos(\theta_1\mp\theta_3) & \sin(\theta_1\mp\theta_3) & 0 \\ \pm\sin(\theta_1\mp\theta_3) & -\cos(\theta_1\mp\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{bmatrix}
$$

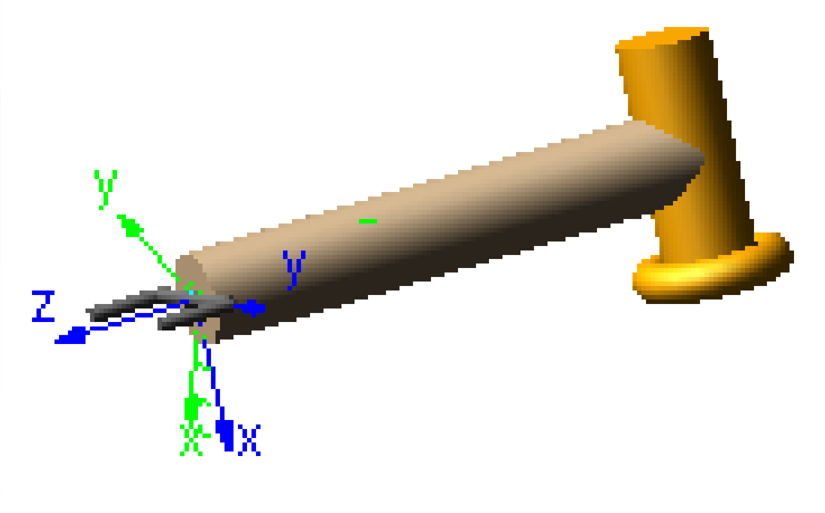
- 此时z_3/z_2与z_0共线，关节1与关节3同轴
- 损失绕矢量±($z_1\times z_2$) 或±($z_1\times z_0$)方向的转动自由度（垂直于腕部三轴所处的面）

7.2.3 空间3R球腕机械臂分析

◆ 奇异时的臂型分析



(a)腕部奇异臂型1（$\theta_2=0$）



(b)腕部奇异臂型2（$\theta_3=\pi$）

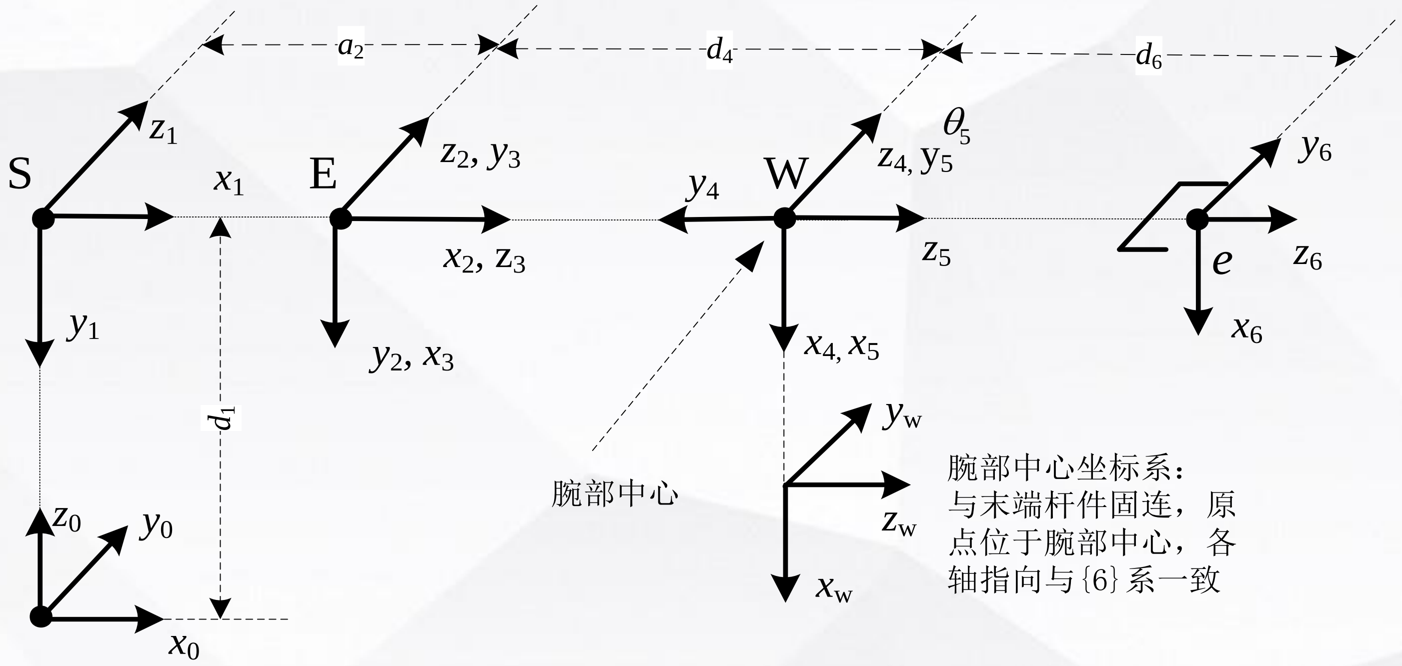
特点：损失了绕矢量$\pm(z_1 \times z_2)$ 或$\pm(z_1 \times z_0)$方向的转动自由度（垂直于腕部三轴所处的面）

1. 运动学奇异的判据
2. 空间3R机械臂运动学奇异分析
3. 腕部可分离6R机械臂奇异分析
4. 一般6R机械臂运动学奇异分析
5. 机器人运动性能评价

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心坐标系与末端坐标系

将末端杆件坐标系原点建在腕部中心，得到腕部中心坐标系$\{x_w y_w z_w\}$。



注：腕部中心坐标系$\{x_w y_w z_w\}$与$\{x_6 y_6 z_b\}$均与末端连杆固连，两者仅原点位置不同。

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心运动速度与末端速度的关系

➢ 腕部中心与末端运动速度满足

$$\boldsymbol{\omega}_e=\boldsymbol{\omega}_w$$

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_w+\boldsymbol{\omega}_w\times d_6\boldsymbol{z}_6=\boldsymbol{v}_w-d_6\boldsymbol{z}_6^{\times}\boldsymbol{\omega}_w$$

➢ 写成矩阵的形式，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_e\\ \boldsymbol{\omega}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -d_6\boldsymbol{z}_6^{\times}\\ O & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_w\\ \boldsymbol{\omega}_w\end{bmatrix}$$

结论：腕部中心点、末端点都为末端杆件上的点，因而角速度相同，而线速度相差由于偏置矢量产生的牵连运动。对于d_6=0的特例，两者的线速度和角速度完全相同。

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心及末端的微分运动方程

➢ **末端点**运动速度对应的微分运动学方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

➢ **腕部中心点**运动速度对应的微分运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

➢ 根据**末端点**及**腕部中心**速度的关系，有

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -d_6\boldsymbol{z}_6^{\times} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}, \quad \det(\boldsymbol{U}) = 1$$

注：上述两个运动学方程反映了**同一连杆**（末端连杆）上**不同参考点**的运动关系。

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心及末端的微分运动方程

➢ 末端点、腕部点的微分运动学关系小结

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}, \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -d_6\boldsymbol{z}_6^{\times} \\ O & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix}$$

➢ 雅可比矩阵的关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -d_6\boldsymbol{z}_6^{\times} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{J}_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -d_6\boldsymbol{z}_6^{\times} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad det(\boldsymbol{U}) = 1 \end{cases}$$

由此可知，J_e与J_w具有**相同的行列式**，因而奇异条件相同。
实际上，若令$d_6=0$，则J_e与J_w相同。

7.3.1 腕部运动的分解

■ 回顾：末端点运动对应的雅可比矩阵

$$
\boldsymbol{J}_{e1}=\begin{bmatrix}
-s_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right)-d_6\left[s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5\right]\\
c_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right)+d_6\left[c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5\right]\\
0\\
0\\
0\\
1
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{J}_{e2}=\begin{bmatrix}
c_1\left[-a_2s_2+d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right]\\
s_1\left[-a_2s_2+d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right]\\
-a_2c_2-d_4s_{23}-d_6\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)\\
-s_1\\
c_1\\
0
\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{J}_{e3}=\begin{bmatrix}
c_1\left[d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right]\\
s_1\left[d_4c_{23}+d_6\left(c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\right)\right]\\
-d_4s_{23}-d_6\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)\\
-s_1\\
c_1\\
0
\end{bmatrix}
$$

7.3.1 腕部运动的分解

■ 回顾：末端点运动对应的雅可比矩阵

$$
\boldsymbol{J}_{e(4-6)}=\begin{bmatrix}
-d_6\left(s_1c_4+c_1c_{23}s_4\right)s_5 & -d_6\left[c_1\left(s_{23}s_5-c_{23}c_4c_5\right)+s_1s_4c_5\right] & 0 \\
d_6\left(c_1c_4-s_1c_{23}s_4\right)s_5 & -d_6\left[s_1\left(s_{23}s_5-c_{23}c_4c_5\right)-c_1s_4c_5\right] & 0 \\
d_6s_{23}s_4s_5 & -d_6\left(c_{23}s_5+s_{23}c_4c_5\right) & 0 \\
c_1s_{23} & -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 & c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5 \\
s_1s_{23} & c_1c_4-s_1c_{23}s_4 & s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5 \\
c_{23} & s_{23}s_4 & c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5
\end{bmatrix}
$$

上述为J_e的表达式，若令$d_6=0$（红色的部分），可得J_w的表达式（也可根据定义直接推导，结果一样）

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心点对应的雅可比矩阵

令J_e中的$d_6=0$后，得到腕部中心运动对应的雅可比矩阵

$$
J_w=\begin{bmatrix}
-a_2s_1c_2-d_4s_1s_{23} & c_1\left(-a_2s_2+d_4c_{23}\right) & d_4c_1c_{23} & 0 & 0 & 0\\
a_2c_1c_2+d_4c_1s_{23} & s_1\left(-a_2s_2+d_4c_{23}\right) & d_4s_1c_{23} & 0 & 0 & 0\\
0 & -a_2c_2-d_4s_{23} & -d_4s_{23} & 0 & 0 & 0\\
0 & -s_1 & -s_1 & c_1s_{23} & -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 & c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5\\
0 & c_1 & c_1 & s_1s_{23} & c_1c_4-s_1c_{23}s_4 & s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5\\
1 & 0 & 0 & c_{23} & s_{23}s_4 & c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5
\end{bmatrix}
$$

讨论：该矩阵有什么特点？反映了什么样的情况？

◆ 腕部中心点对应的雅可比矩阵

- 实际为三角矩阵，写成分块矩阵的形式为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22}\end{bmatrix}$$

- 各分块矩阵的表达式为：

$$\boldsymbol{J}_{11}=\begin{bmatrix}-s_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -c_1\left(a_2s_2-d_4c_{23}\right) & d_4c_1c_{23}\\ c_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -s_1\left(a_2s_2-d_4c_{23}\right) & d_4s_1c_{23}\\ 0 & -\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -d_4s_{23}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}_{21}=\begin{bmatrix}0 & -s_1 & -s_1\\ 0 & c_1 & c_1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{22}=\begin{bmatrix}c_1s_{23} & -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 & c_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)-s_1s_4s_5\\ s_1s_{23} & c_1c_4-s_1c_{23}s_4 & s_1\left(s_{23}c_5+c_{23}c_4s_5\right)+c_1s_4s_5\\ c_{23} & s_{23}s_4 & c_{23}c_5-s_{23}c_4s_5\end{bmatrix}$$

7.3.1 腕部运动的分解

◆ 腕部中心6自由度运动的分解

➢ 根据**腕部中心**微分运动方程及**分块矩阵**：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}, \qquad \boldsymbol{J}_{\mathrm{w}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

➢ 可得**分解后**的运动学方程：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{J}_{11}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_u \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{J}_{21}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_u + \boldsymbol{J}_{22}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_l \end{cases}$$

其中，

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\Theta}}_u = \left[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3\right]^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}_l = \left[\dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6\right]^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

腕部中心的**6DOF运动**分解为两个**3DOF运动**：

①腕部的**平动**，体现在**腕部中心**的线速度上；

②腕部的**转动**，体现在**末端杆件**的角速度上。

7.3.1 腕部运动的分解

- **腕部中心6自由度运动的分解**
  - 对于逆运动学问题

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_u = \left({}^0\boldsymbol{J}_{11}\right)^{-1}\left({}^0\boldsymbol{v}_w\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_l = \left({}^0\boldsymbol{J}_{22}\right)^{-1}\left[{}^0\boldsymbol{\omega}_w - \left({}^0\boldsymbol{J}_{21}\right)\dot{\boldsymbol{\Theta}}_u\right]$$

其运动学奇异由对角分块矩阵确定，即由${}^0\boldsymbol{J}_{11}$和${}^0\boldsymbol{J}_{22}$确定，分别对应：位置奇异和姿态奇异。

7.3.2 奇异条件的确定

◆ 奇异条件判据

- 计算J_w的行列式

$$\left|\boldsymbol{J}_{\mathrm{w}}\right| = \left|\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}\right| = \left|\boldsymbol{J}_{11}\right| \cdot \left|\boldsymbol{J}_{22}\right|$$

- 可见，Jw的奇异条件由下面两式确定

$$\begin{cases} \left|\boldsymbol{J}_{11}\right| = 0 \\ \left|\boldsymbol{J}_{22}\right| = 0 \end{cases}, \qquad \boldsymbol{J}_{11}, \boldsymbol{J}_{22} \in R\Re^{3\times 3}$$

如上可知，奇异问题可以分解为**两个**子问题：

① **位置奇异**问题（J11不满秩）

② **姿态奇异**问题（J22不满秩）

7.3.2 奇异条件的确定

◆ 位置奇异条件（J_{11}不满秩）

➢ 位置奇异的条件通过令J_{11}行列式为0可以分析得到，其中

$$\boldsymbol{J}_{11}=\begin{bmatrix} -s_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -c_1\left(a_2s_2-d_4c_{23}\right) & d_4c_1c_{23} \\ c_1\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -s_1\left(a_2s_2-d_4c_{23}\right) & d_4s_1c_{23} \\ 0 & -\left(a_2c_2+d_4s_{23}\right) & -d_4s_{23} \end{bmatrix}$$

➢ 类似于3R肘机器人的分析结果，可得

$$\left|\boldsymbol{J}_{11}\right|=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_3=0 \\ a_2c_2+d_4s_{23}=0 \end{cases}$$

7.3.2 奇异条件的确定

◆ **位置奇异条件（J_{11}不满秩）**

上述两个条件分别为肘部奇异和肩部奇异。

（1）肘部奇异条件

$$c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \pm\frac{\pi}{2}$$

（2）肩部奇异条件

$$a_2 c_2 + d_4 s_{23} = 0$$

7.3.2 奇异条件的确定

◆ 姿态奇异条件（J_{22}不满秩）

- 根据上面的推导，可知{0}系下的分块

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_{22}=\begin{bmatrix} c_1 s_{23} & -s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4 & c_1\left(s_{23}c_5 + c_{23}c_4 s_5\right) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 s_{23} & c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4 & s_1\left(s_{23}c_5 + c_{23}c_4 s_5\right) + c_1 s_4 s_5 \\ c_{23} & s_{23}s_4 & c_{23}c_5 - s_{23}c_4 s_5 \end{bmatrix}
$$

- 若以{3}系为参考系，可得相应的J_{22}为

$$
{}^{3}\boldsymbol{J}_{22}=\begin{bmatrix} 0 & -s_4 & c_4 s_5 \\ 0 & c_4 & s_4 s_5 \\ 1 & 0 & c_5 \end{bmatrix}
$$

7.3.2 奇异条件的确定

◆ 姿态奇异条件（J_{22}不满秩）

- 而从{0}到{3}的姿态变换矩阵为

$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} \\ -s_{23} & 0 & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{n}_3 & {}^{0}\boldsymbol{o}_3 & {}^{0}\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}
$$

- 可知{0}、{3}系下的J_{22}满足如下关系

$$
{}^{0}\boldsymbol{J}_{22} = {}^{0}\boldsymbol{R}_3 \, {}^{3}\boldsymbol{J}_{22}
$$

- 行列式满足

$$
\left|{}^{0}\boldsymbol{J}_{22}\right| = \left|{}^{0}\boldsymbol{R}_3 \, {}^{3}\boldsymbol{J}_{22}\right| = \left|{}^{0}\boldsymbol{R}_3\right| \cdot \left|{}^{3}\boldsymbol{J}_{22}\right| = \left|{}^{3}\boldsymbol{J}_{22}\right|
$$

因此，分析${}^{0}J_{22}$的奇异条件转换为分析${}^{3}J_{22}$的奇异条件，类似于3R球腕机械臂的分析。

7.3.2 奇异条件的确定

◆ 姿态奇异条件（J_{22}不满秩）

➢ 分块矩阵$^3J_{22}$的行列式

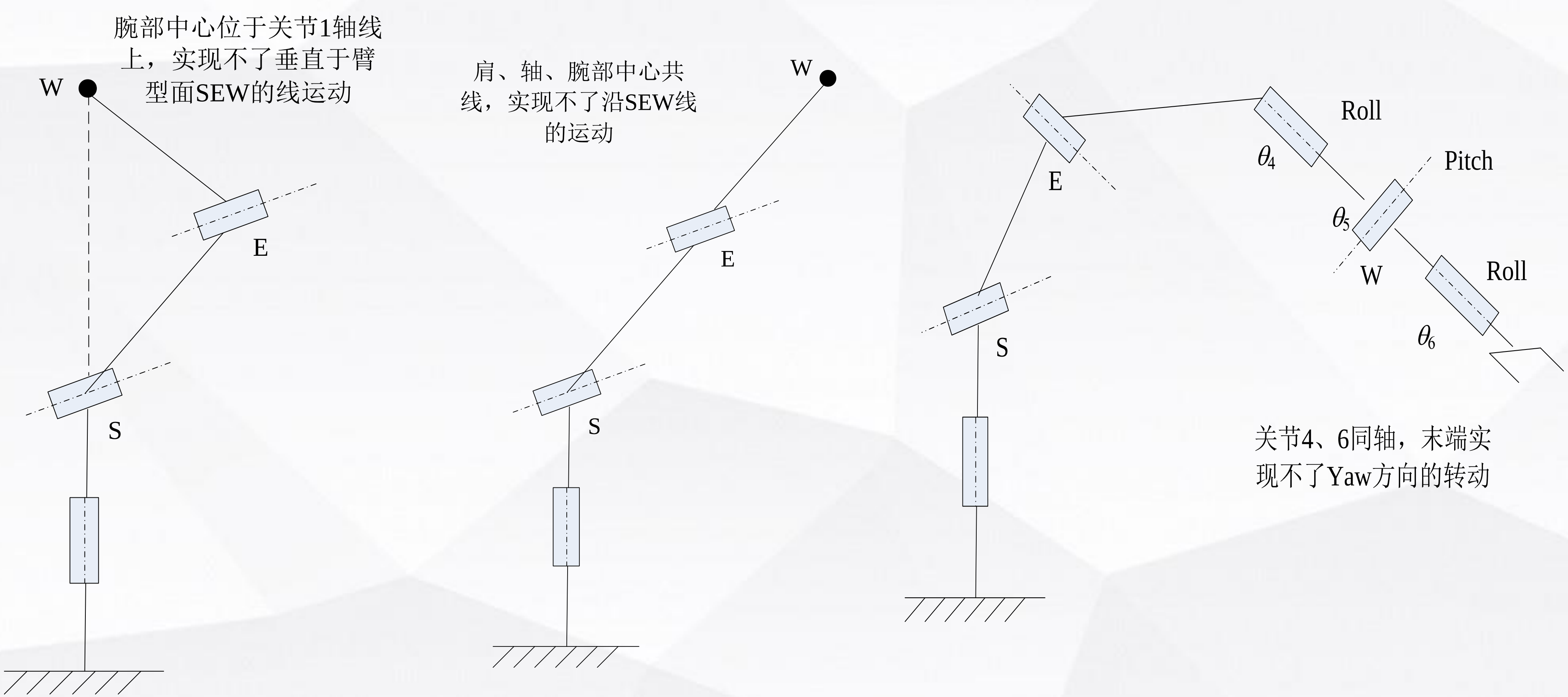
$$\left|{}^3\boldsymbol{J}_{22}\right| = \left|\begin{bmatrix} 0 & -s_4 & c_4 s_5 \\ 0 & c_4 & s_4 s_5 \\ 1 & 0 & c_5 \end{bmatrix}\right| = s_5$$

➢ 因此可得姿态奇异（即腕部奇异）的条件为

$$s_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_5 = 0 \\ \theta_5 = \pi \end{cases}$$

7.3.3 奇异臂型

◆ 空间6R腕部分离机械臂的奇异臂型



（1）肩部奇异　　（2）肘部奇异　　（3）腕部奇异

第7章 运动学奇异分析与性能评价

1 运动学奇异的判据

2 空间3R机械臂运动学奇异分析

3 腕部可分离6R机械臂奇异分析

4 一般6R机械臂运动学奇异分析

5 机器人运动性能评价

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

■ 雅可比矩阵的SVD分解

➢ 设J为$n\times n$的矩阵，则存在m阶正交矩阵U和n阶正交矩阵V，使得

$$J = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

其中，$U=[u_1,u_2,\ldots,u_n]$、$V=[v_1,v_2,\ldots,v_n]$均是正交矩阵，Σ为对角阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

上式中，σ_i为奇异值，满足$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_n \geq 0$。若A的秩为$r$（$r>0$），则满足$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > 0$。

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

■ 雅可比矩阵的SVD分解

➢ 根据SVD分解的性质，有如下关系

$$\left|\det(\boldsymbol{J})\right| = \left|\det(\Sigma)\right| = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$$

结论：只有所有奇异值均不为0时，矩阵才是非奇异的。反之，只要有**一个奇异值为0**，则矩阵是**奇异**的。

➢ 根据奇异值判断矩阵奇异的方法

进行SVD分解，然后按奇异值从大到小排列，若最小奇异值值非0，则矩阵非奇异；若为0，则矩阵奇异。
进一步，若确定最小非0奇异值的序号为*r*，则矩阵的秩为*r*。

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

- **举例：3R肘机器人，$d_1=a_2=a_3=0.5$m**

➢考虑三种情况

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}30^{\circ} & 30^{\circ} & 60^{\circ}\end{bmatrix}$$ （非奇异状态）

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}30^{\circ} & 30^{\circ} & 0^{\circ}\end{bmatrix}$$ （$s_3=0$，边界奇异）

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}30^{\circ} & 30^{\circ} & 120^{\circ}\end{bmatrix}$$ （$a_2c_2+a_3c_{23}=0$，内部奇异）

分别计算相应的雅可比矩阵，并进行奇异值分解。在Matlab中可直接用函数[U S V] = svd(J)可以获得分解矩阵。

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

■ **举例：3R肘机器人，$d_1=a_2=a_3=0.5\text{m}$**

➢**第1种情况（不奇异），[30º, 30º, 60º]**

$$J_{v1}=\begin{bmatrix} -0.2165 & -0.6495 & -0.4330 \\ 0.3750 & -0.3750 & -0.2500 \\ 0 & -0.4330 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

➢**分解矩阵如下**

$$U_1=\begin{bmatrix} -0.7969 & -0.5000 & -0.3391 \\ -0.4601 & 0.8660 & -0.1958 \\ -0.3916 & 0 & 0.9202 \end{bmatrix}$$

$$S_1=\begin{bmatrix} 0.9750 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4330 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2220 \end{bmatrix}$$

$$V_1=\begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.8817 & 0 & -0.4719 \\ 0.4719 & 0 & 0.8817 \end{bmatrix}$$

其中S为奇异值组成的矩阵，三个奇异值均大于0。

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

■ **举例：3R肘机器人，$d_1=a_2=a_3=0.5$m**

➢**第2种情况（边界奇异），[30º, 30º, 0º]**

$$\boldsymbol{J}_{v2}=\begin{bmatrix} -0.4330 & -0.4330 & -0.2165 \\ 0.7500 & -0.2500 & -0.1250 \\ 0 & -0.8660 & -0.4330 \end{bmatrix}$$

➢**分解矩阵如下**

$$\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix} -0.4330 & -0.5000 & -0.7500 \\ -0.2500 & 0.8660 & -0.4330 \\ -0.8660 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix} 1.1180 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0.4472 & 0 & -0.8944 \end{bmatrix}$$

S矩阵有一个奇异值为0。

7.4.1 基于SVD分解的奇异分析

- **举例：3R肘机器人，$d_1=a_2=a_3=0.5\text{m}$**

➢第3种情况（内部奇异），[30º, 30º, 120º]

$$J_{v3}=\begin{bmatrix} 0 & -0.4330 & -0.2165 \\ 0 & -0.2500 & -0.1250 \\ 0 & 0 & 0.4330 \end{bmatrix}$$

➢<u>分解矩阵如下</u>

$$U_3=\begin{bmatrix} -0.7500 & 0.4330 & 0.5000 \\ -0.4330 & 0.2500 & -0.8660 \\ 0.5000 & 0.8660 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$S_3=\begin{bmatrix} 0.6124 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix}$$

S矩阵有一个奇异值为0。

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 雅可比矩阵改造

➢ 将雅可比矩阵表达式中的p_n分离出来（以旋转关节为例）

$$J_i = \begin{bmatrix} \xi_i \times \rho_{i\to n} \\ \xi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & -p_n^{\times} \\ O_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i-1} \times p_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

令

$$M = \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & -p_n^{\times} \\ O_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times p_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

则有

$$J_i = MS_i \qquad (i=1,2\cdots,n)$$

S_i称为改造后的关节螺旋。M为始终满秩的牵连矩阵。

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 雅可比矩阵改造

➢ 改造后的**关节螺旋**

$$\boldsymbol{S}_i=\begin{cases}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{i-1}\times\boldsymbol{p}_{i-1}\\ \boldsymbol{z}_{i-1}\end{bmatrix}, & i\text{为转动关节}\\ \begin{bmatrix}-\boldsymbol{z}_{i-1}\\ 0\end{bmatrix}, & i\text{为移动关节}\end{cases}$$

满足 $\boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_i \quad (i=1,2\cdots,n)$

➢ 改造后的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_n]$$

满足

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{S},\quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}$$

$S=[S_1, S_2, \ldots, S_n]$称为**改造后的雅可比**。

由于M始终满秩，S与J具有相同的奇异条件。

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 矩阵初等变换——方法原理

- 机械臂速度级运动方程写成如下形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{61} & J_{61} & \cdots & J_{6n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

初等变换不改变矩阵的秩，但可改变方程的形式

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 矩阵初等变换——方法原理

➢ 初等行变换，相当于左乘初等矩阵，有

$$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{6n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

➢ 初等列变换，相当于左乘初等矩阵，有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{6n} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 矩阵初等变换——方法原理

➢ **等价**雅可比矩阵

$$\hat{J} = P_s \cdots P_1 J Q_1 \cdots Q_l = PJQ$$

其中P、Q均为可逆矩阵，即

$$P = P_s \cdots P_1$$

$$Q = Q_1 \cdots Q_l$$

因而，初等变换前后的**两个矩阵等价**，**秩相同**，可以通过分析变换后的矩阵获得奇异条件

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 常用初等变换

➢ **初等行变换(*i*<—>j)**

$$
\boldsymbol{P}_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i^{th}\text{行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j^{th}\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

对应的方程

$$
\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{61} & J_{61} & \cdots & J_{6n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_j \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{j1} & J_{j2} & \cdots & J_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{i1} & J_{i2} & \cdots & J_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{6n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}
$$

◆ 常用初等变换

➢ 初等行变换($k*r_i$)

$$
\boldsymbol{P}_2=\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i^{th}\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

对应的方程

$$
\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n}\\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ J_{61} & J_{61} & \cdots & J_{6n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ k\dot{x}_i\\ \vdots\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ kJ_{i1} & kJ_{i2} & \cdots & kJ_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{6n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}
$$

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 常用初等变换

➢ 初等行变换（$k*r_j+r_i$）

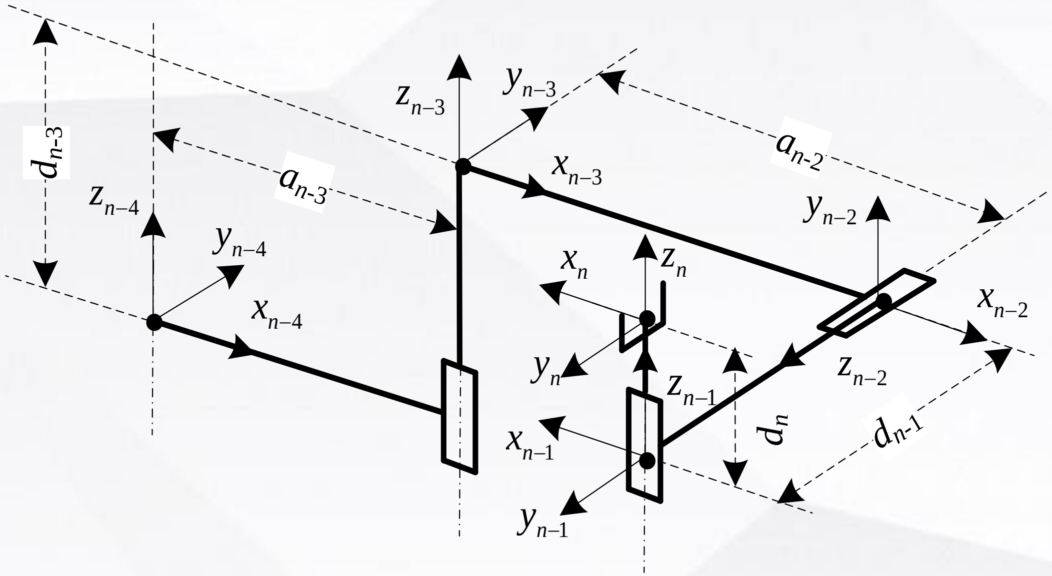
$$P_3=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i^{th}\text{行} \\ \\ \leftarrow j^{th}\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

对应的方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots \\ k\dot{x}_j+\dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ kJ_{j1}+J_{i1} & kJ_{j2}+J_{i2} & \cdots & kJ_{jn}+J_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ J_{61} & J_{62} & \cdots & J_{6n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}$$

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 分析实例



$$
{}^{n-2}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & s_{n-1}\\ \lambda_2 & 1 & 0 & -c_{n-1}\\ \lambda_3 & 0 & 1 & 0\\ \lambda_4 & 0 & 0 & -d_{n-1}c_{n-1}\\ \lambda_5 & 0 & 0 & -d_{n-1}s_{n-1}\\ \lambda_6 & a_{n-2} & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

思路：经过初等变换获得简洁的等价雅可比矩阵，从而简化奇异分析过程。

7.4.2 基于雅可比矩阵初等变换的奇异分析

◆ 分析实例

➢ 经过4次初等变换后，可得到**分块对角阵**

$$\hat{S} = P_4 P_3 P_2 P_1 \bullet S(\Theta) = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & O_{3\times3} \end{bmatrix}$$

基于分块对角阵，可进行运动**分解/降维**

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_u \\ \hat{V}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & O_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_u \\ \dot{\Theta}_v \end{bmatrix}$$

运动学方程求解，**极大简化了**后续的解算！！

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_u = (S_{21})^{inv} V_v \\ \dot{\Theta}_v = (S_{12})^{-1} (V_u - S_{11}\dot{\Theta}_u) \end{cases}$$

第7章 运动学奇异分析与性能评价

1 运动学奇异的判据

2 空间3R机械臂运动学奇异分析

3 腕部可分离6R机械臂奇异分析

4 一般6R机械臂运动学奇异分析

5 机器人运动性能评价

7.5.1 机器人运动性能问题

◆ 运动性能评价问题

启发：机器人处于奇异臂型时，末端**损失**了运动自由度，说明运动能力降低了，因此**是否奇异**是运动性能的一种**定性评价**。

那么，对于**非奇异**的情况，有没有运动能力的差异？

讨论：如何**定量地**评价机器人的运动性能？

◆ 运动性能评价问题

引申：机器人的运动性能，确切地说是机器人**末端的运动能力**，即在**相同关节运动**条件下，**不同臂型**下末端运动能力的大小。

思路：结合雅可比矩阵的特点，定量评价运动性能。

8.5.2 性能指标

◆ 最小奇异值及条件数指标

➢ 雅可比矩阵的SVD分解

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}},\qquad \left|\det\left(\boldsymbol{J}\right)\right|=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$$

➢ 最小奇异值

最小奇异值越接近0，离奇异状态越近；反之则越远。

因此，其大小可以作为一个定量指标。

◆ 最小奇异值及条件数指标

➢ 条件数

根据推导关节及末端速度变化率满足：

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{J}\|\|\boldsymbol{J}^{-1}\|}\frac{\|\delta\dot{\boldsymbol{x}}_e\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}_e\|}\le\frac{\|\delta\dot{\boldsymbol{q}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{q}}\|}\le\|\boldsymbol{J}\|\|\boldsymbol{J}^{-1}\|\frac{\|\delta\dot{\boldsymbol{x}}_e\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}_e\|}$$

定义条件数为：

$$k(\boldsymbol{q})=\|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\|\|\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\|=\frac{\sigma_1}{\sigma_m}$$

其范围为：

$$k(\boldsymbol{q})\in[1,\ \infty)$$

$k(\boldsymbol{q})\to\infty$，运动学奇异

$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n$，各向同性

7.5.2 性能指标

◆ 可操作度

- 若关节速度范数小于等于1（广义**单位球**）

$$\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2 = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}} \le 1$$

- 可推导出如下关系：

$$\left(\frac{\dot{x}_{u1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_{u2}}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\dot{x}_{um}}{\sigma_m}\right)^2 \le 1$$

- 即末端速度在U空间的投影为m维**广义椭球**，椭球**体积为**

$$V = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m = d\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$$

7.5.2 性能指标

◆ 可操作度

- 定义可操作度为（将体积中的**常数d去掉**）

$$w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$$

- 结合雅可比矩阵的性质，上式还可表示为：

$$w(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\det\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\right)} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$$

- 对于方阵，可操作性度还可表示为：

$$w(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\det\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\right)} = \left|\det\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\right)\right|$$

7.5.2 性能指标

◆ 可操作度

➢ 分析实例——**平面2R机械臂**

雅可比矩阵为

$$J_v = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

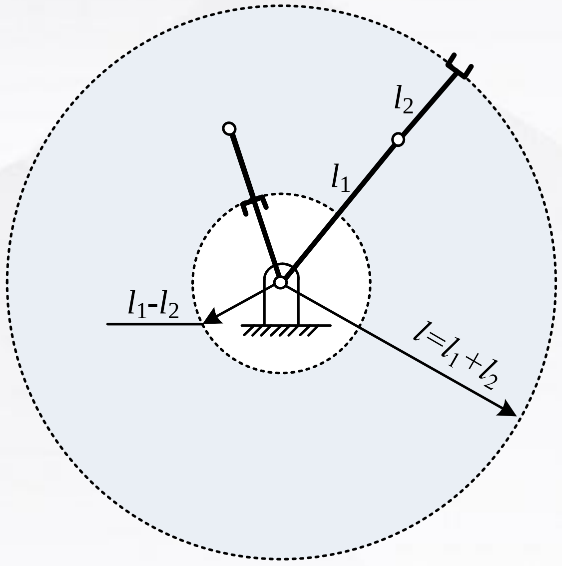
可操作度为

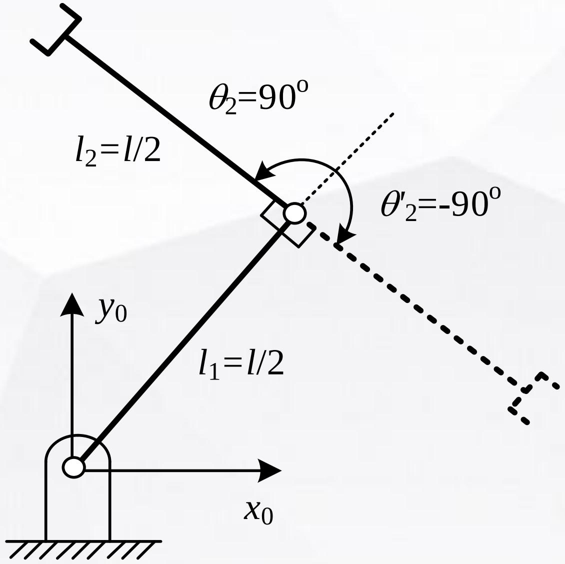
$$w(\boldsymbol{\Theta}) = \left|\det\left(J_v(\boldsymbol{\Theta})\right)\right| = l_1 l_2 \left|\sin\theta_2\right|$$

➢ 若l_1+l_2=常数，**最大可操作度为**

$$w_{\max} = \max w(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{l^2}{4}$$

$$\left(\theta_2 = \pm 90^{\circ},\ l_1 = l_2 = l/2\right)$$





7.5.2 性能指标

◆ 灵巧度/调节指数

最小奇异值、条件数、可操作度数存在的问题：

① 尺度/单位相关（Scale/Unit Dependent）

不同尺寸机械臂之间无法评价。

② 量纲相关（Dimension Dependent）

平动、转动的量纲不同。

③ 无界性（Unbounded）

最大值趋向于无穷。

7.5.2 性能指标

◆ 灵巧度/调节指数

解决办法

① 归一化雅可比矩阵

采用标称长度（或特征长度），对雅可比矩阵进行处理。

② 定义运动调节指数

基于归一化矩阵条件数倒数的百分比定义新的指标。

7.5.2 性能指标

◆ 灵巧度/调节指数

① 归一化雅可比矩阵

➢ 雅可比矩阵表示为平动、转动分块形式：

$$J=\begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{p}_n \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

采用标称长度L对线速度进行归一化，则有：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L}\boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{L}(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{p}_1) & \frac{1}{L}(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{p}_2) & \cdots & \frac{1}{L}(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{p}_n) \\ \boldsymbol{J}_{\omega 1} & \boldsymbol{J}_{\omega 2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{\omega n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

归一化后的微分运动方程为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{J}}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}=\tilde{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}}$$

7.5.2 性能指标

◆ 灵巧度/调节指数

① 归一化雅可比矩阵

➢ 归一化后的微分运动方程为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{J}}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = \tilde{\boldsymbol{J}} \dot{\boldsymbol{q}}$$

其中，

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_e = \frac{1}{L} \boldsymbol{v}_e$$

$$\tilde{\boldsymbol{J}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{J}}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \times \tilde{\boldsymbol{p}}_1 & \boldsymbol{e}_2 \times \tilde{\boldsymbol{p}}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \times \tilde{\boldsymbol{p}}_n \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}, \quad \text{此处 } \tilde{\boldsymbol{p}}_i = \frac{\boldsymbol{p}_i}{L}$$

7.5.2 性能指标

◆ 灵巧度/调节指数

② 运动条件指数

➢ **运动条件指数定义：**

$$KCI=\frac{1}{k_{\min}}\times 100\%$$

其中，$k_{\min}$为所有臂型下的最小条件数

$$k_{\min}=\min_{\boldsymbol{q}}\left(k\left(\tilde{\boldsymbol{J}}\left(\boldsymbol{q}\right)\right)\right)$$

由此，KCI的范围为

$$KCI\in\left(0,\ 100\%\right]$$

$KCI\rightarrow 0$，运动学奇异

$KCI=100$，各向同性

7.5.3 各向同性机器人

◆ 各向同性判据及几何含义

- 对于n自由度机器人，当满足下列条件时为各向同性机器人：

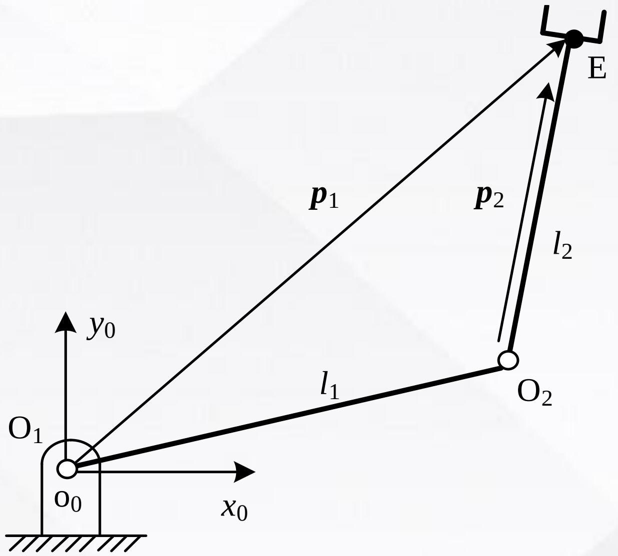
$$\tilde{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{J}}=\tilde{\boldsymbol{J}}\tilde{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{T}}=\sigma^2\boldsymbol{I}_n$$

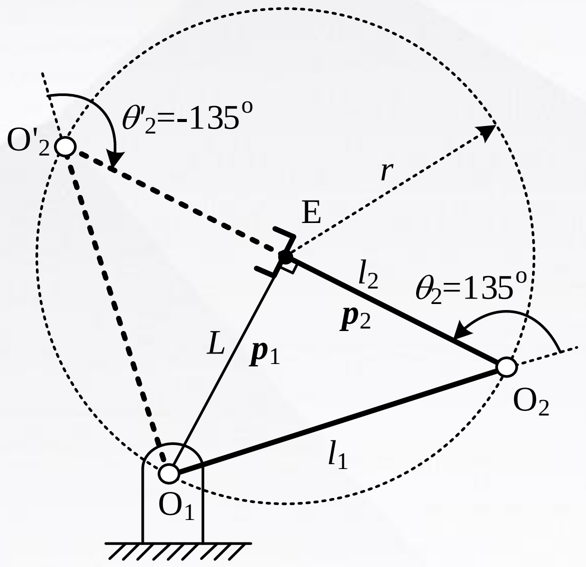
- 判据，同时满足下面两式：

$$\tilde{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{J}}=\sigma^2\boldsymbol{I}_n$$

$$\tilde{\boldsymbol{J}}\tilde{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{T}}=\sigma^2\boldsymbol{I}_n$$

◆ 各向同性平面2R机器人





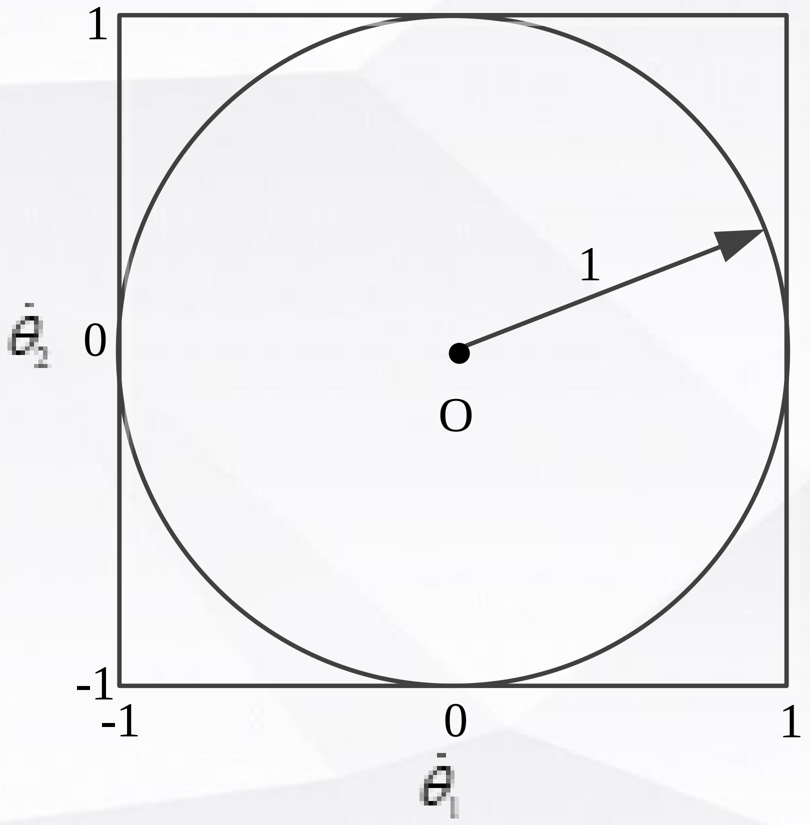
➢ 各向同性的条件：

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{p}_1\| = \|\boldsymbol{p}_2\| = \sigma \\ \boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = r \\ l_1 = \sqrt{2}r \\ \theta_2 = \pm 135^\circ \end{cases}$$

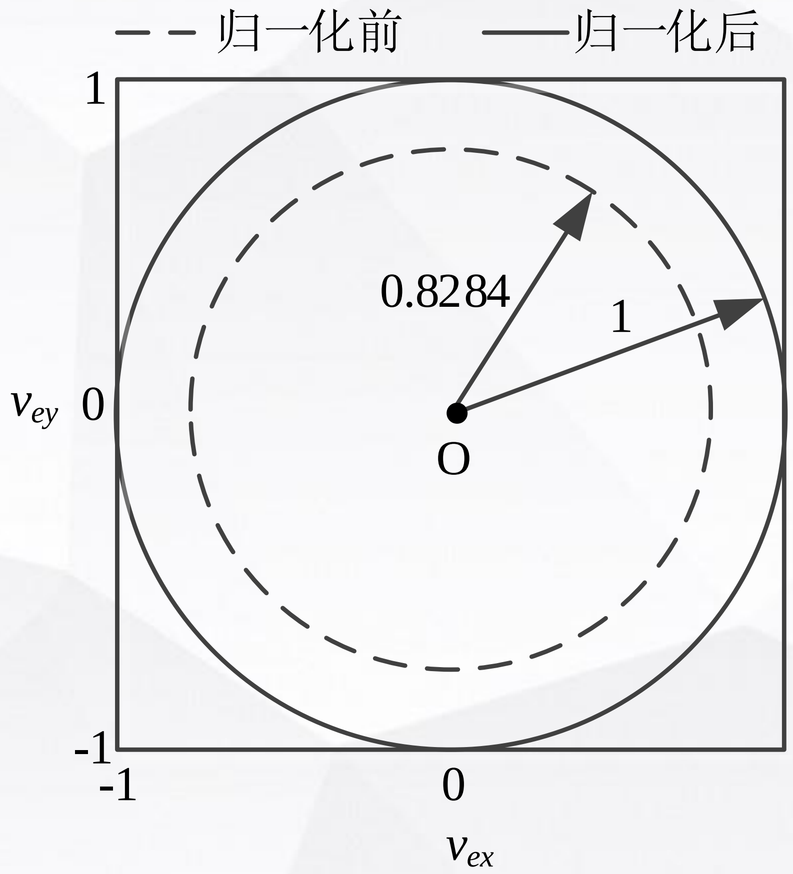
l_1与p_1、p_2构成等腰直角三角形

7.5.3 各向同性机器人

◆ 各向同性平面2R机器人



(a) 关节速度空间



（b）末端线速度空间

◆ 各向同性平面3R机器人

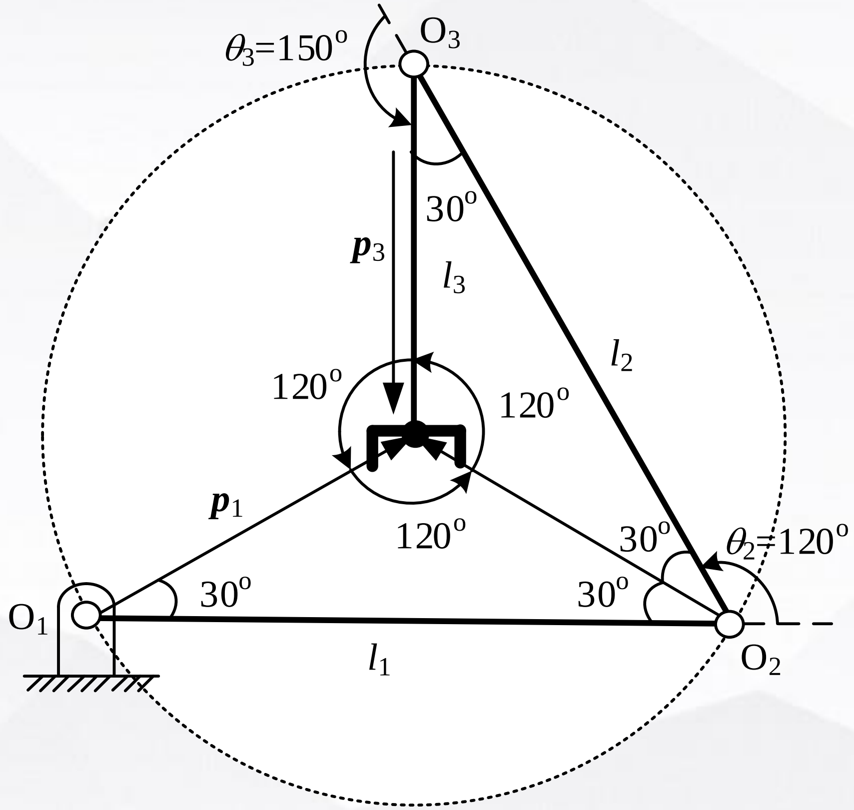
- 条件：$\|\boldsymbol{p}_1\| = \|\boldsymbol{p}_2\| = \|\boldsymbol{p}_3\| = r$

得到 $\begin{cases} l_1 = l_2 = \sqrt{3}r, \quad l_3 = r \\ \theta_2 = \pm 120^{\circ}, \quad \theta_3 = \pm 150^{\circ} \end{cases}$

- 特征长度及总长度

$$L = \frac{\|\boldsymbol{p}_i\|}{\|\tilde{\boldsymbol{p}}_i\|} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

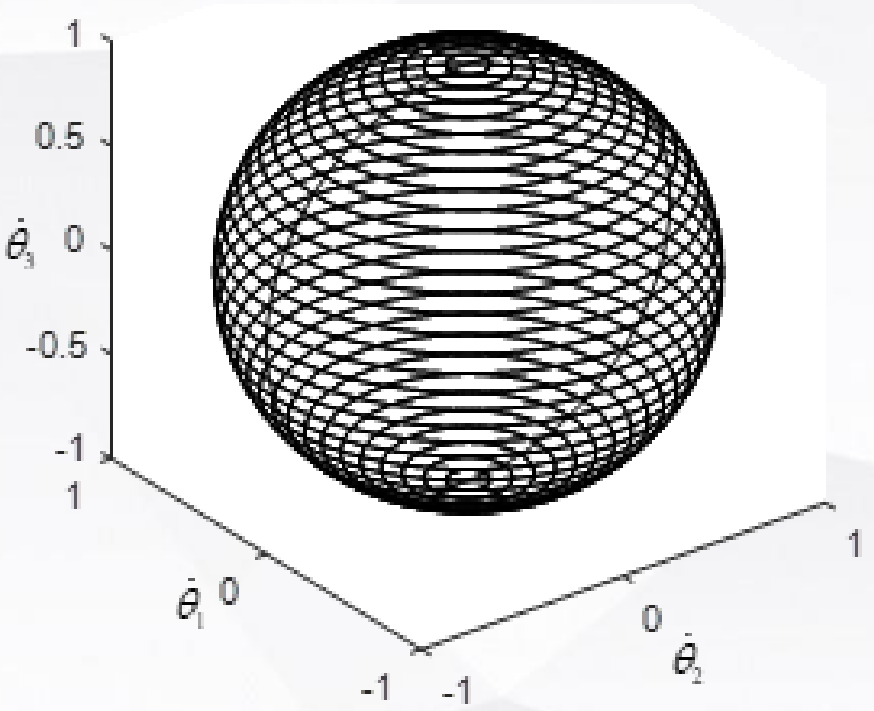
$$l = l_1 + l_2 + l_3 = \left(1 + 2\sqrt{3}\right) l_3$$



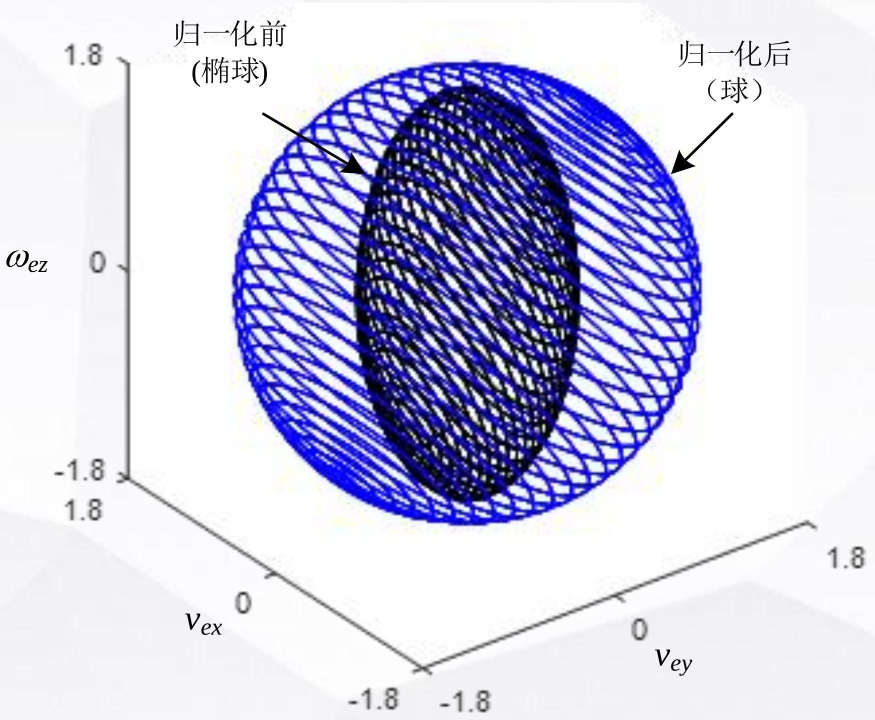
O_1、O_2、O_3构成等边三角形，三点均布在E为圆心、l_3为半径的圆上

7.5.3 各向同性机器人

◆ 各向同性平面3R机器人



(a) 关节速度空间（单位球）



(b) 末端速度空间

（归一化前椭球，归一化后为球）

谢　谢！