概率论与数理统计

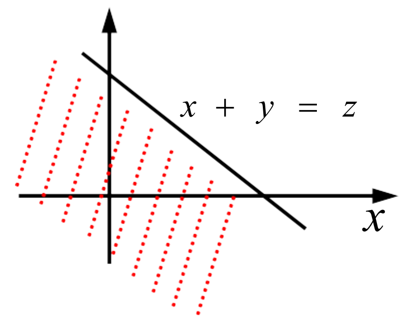
教师：杜亚星

第二十五讲
$Z=X+Y$，$Z=Y/X$，
$Z=XY$ 的分布

连续型随机变量$Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx]dy$$

固定z,y

令$u=x+y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy]du=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$

故$Z=X+Y$的概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

由X,Y的对等性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

卷积公式：

将X和Y相互独立时，$Z=X+Y$的密度函数公式称为卷积公式

即

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx}$$

例1: 设X和Y是相互独立的标准正态随机变量，

求$Z=X+Y$的概率密度。

解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{\frac{t}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}}{=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$

推广结论：设X,Y相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$，则

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2})$$

更一般的结论：

n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即：

若$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots n$，且它们相互独立，则其线性组合：

$$c_0+c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n \quad \sim \quad N(\mu,\sigma_2)$$

其中$c_1,c_2\cdots c_n$是不全为0的常数，两个参数(可由期望及方差得到)为：

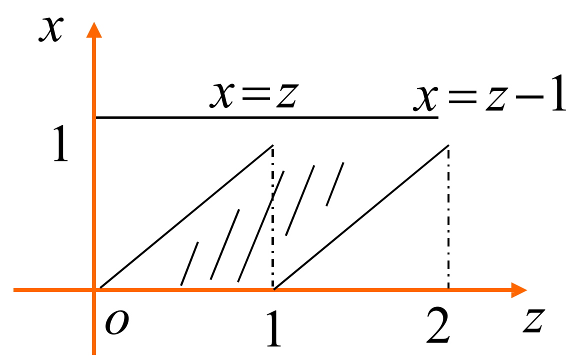
$$\mu=c_0+c_1\mu_1+\cdots+c_n\mu_n, \qquad \sigma^2=c_1^{\ 2}\sigma_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}\sigma_2^{\ 2}+\cdots+c_n^{\ 2}\sigma_n^{\ 2}$$

例2： X,Y相互独立，同时服从$[0,1]$上的均匀分布

求$Z=X+Y$的概率密度。

解：由卷积公式:$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

易知仅当 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases}$ 即$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ z-1\le x\le z \end{cases}$ 时，



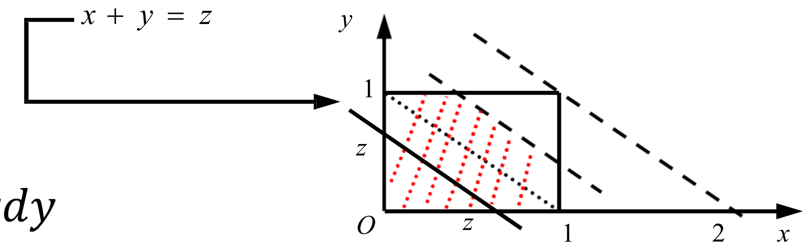
上述积分的被积函数不等于零！

根据x与z构成的区域，

依 z 分段考虑，得：

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z dx = z & 0\le z\le 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z & 1<z\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

另解，先求$F(x)$再求$f(x)$法：



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le z\le 1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{x+y\le z\\ 0<x,y<1}} 1\times 1dxdy=$三角形面积$=\dfrac{1}{2}z^2$

当$1<z\le 2$时，$F_Z(z)=$正方形面积减去三角形面积$=1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2$

当$z>2$时，$F_Z(z)=1$

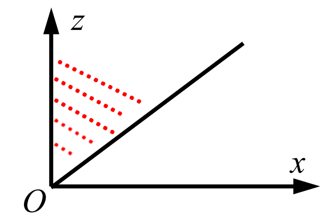
$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ 0.5z^2, & 0\le z\le 1\\ -0.5z^2+2z-1, & 1<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}z & ,0\le z\le 1\\ 2-z & ,1\le z\le 2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

例3：设X,Y相互独立、服从相同的指数分布，概率密度

为：$f(x)=f(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 求$Z=X+Y$的概率密度.

解：根据卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$



仅当$x>0$、$z-x>0$时，$f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z \beta e^{-\beta x}\beta e^{\beta(z-x)}dx=\beta^2 ze^{-\beta z}, & z>0\\ 0 & ,z\le 0\end{cases}$$

这是参数为$(2,\beta)$的Γ分布（$Gamma$）的密度函数

离散变量的独立和分布

1. $X_1, X_2, \cdots X_n$独立且均服从$B(1,p)$,则$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim B(n,p)$
2. $X \sim B(n_1,p), Y \sim B(n_2,p)$,两者独立，则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$
3. $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$,两者独立，则 $X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

证：3. $P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \times \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!\,(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

例4：设 $P(X=1)=0.25$, $P(X=2)=0.75$, $Y\sim N(0,1)$, X与Y独立，求$Z=X+Y$的密度函数.

全概率公式

解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=P(X=1)P(X+Y\le z\mid X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z\mid X=2)$$

$$=0.25P(Y\le z-1)+\ 0.75P(Y\le z-2)$$

$$=0.25\Phi(z-1)+\ 0.75\Phi(z-2)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.25\varphi(z-1)+0.75\varphi(z-2)$$

$$=0.25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}+0.75\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-2)^2}{2}}$$

连续型随机变量$Z=Y/X$、$Z=XY$ 的分布

$Z=Y/X$的概率密度函数为：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x,xz)\,dx$$

$Z=X\,Y$的概率密度函数为：

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}\,f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

若 X和 Y相互独立

$Z = Y/X$的概率密度函数为：

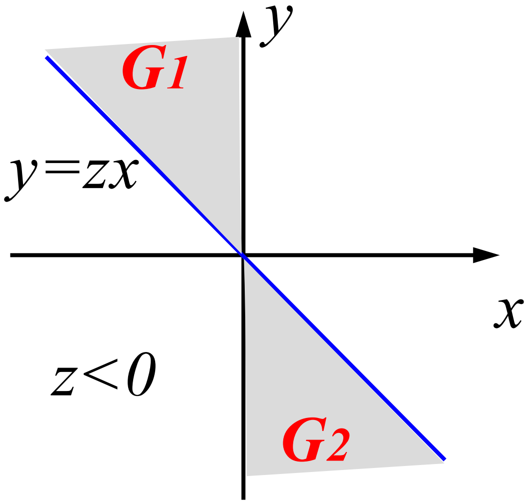
$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x) f_Y(xz)\, dx$$

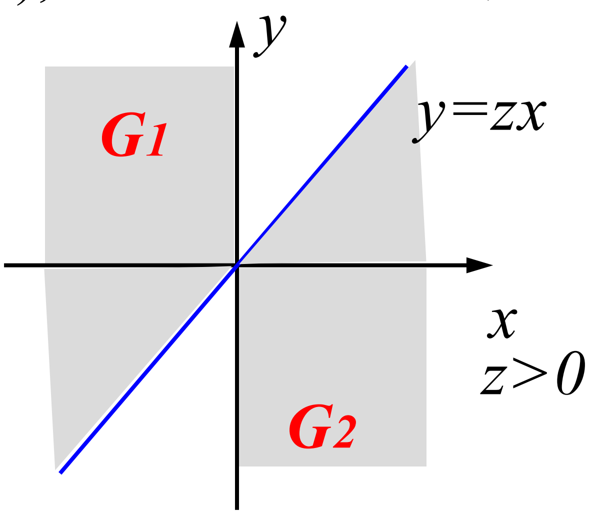
$Z = X\ Y$的概率密度函数为：

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

连续型随机变量$Z=Y/X$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则$Z=Y/X$的分布函数为：





$$F_{Y/X}(z)=P\{Y/X\le z\}=\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx}f(x,y)dy\right]dx$$

令$y = xu$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{\infty} xf(x,xu)du\right]dx + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)du\right]dx + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} |x|f(x,xu)du\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x,xu)dx\right]du$$

$$f_{Y/X}(z) = F_{Y/X}{}'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x,xz)\, dx$$

THE END