概率论与数理统计

教师：杜亚星

第二十二讲　二维均匀分布，二维正态分布

二维均匀分布

若二维随机变量（X,Y）的概率密度在平面上的一个有界区域D内是常数，而在其余地方取值为零，称（X,Y）在D上服从均匀分布。

$$设f(x,y)=\begin{cases}1/A,(x,y)\in D\\ 0,其他\end{cases}$$

其中A为区域D的面积。

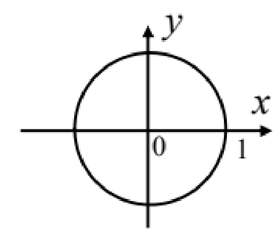
$$\because 1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\iint_D\frac{1}{A}dxdy\Rightarrow$$

$$A=\iint_D d\,xdy$$

◆ **例1：**

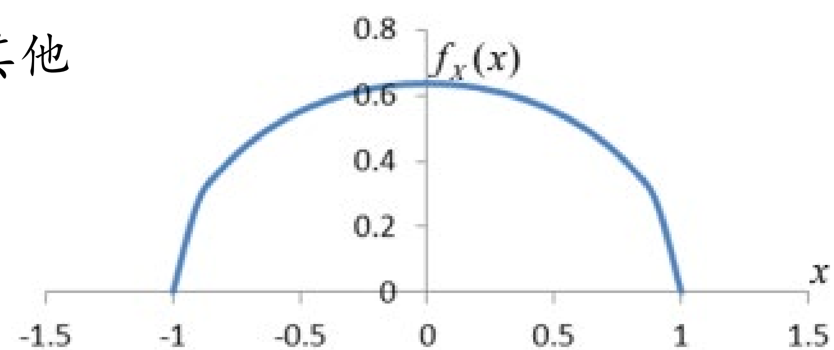
设随机变量（X,Y）在单位圆内服从均匀分布，求联合密度函数，X的边际密度函数及$X=x$时的Y条件密度函数。

解：单位圆的面积为π，$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



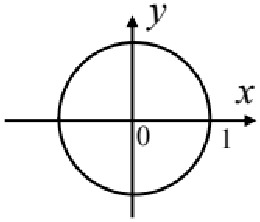
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$



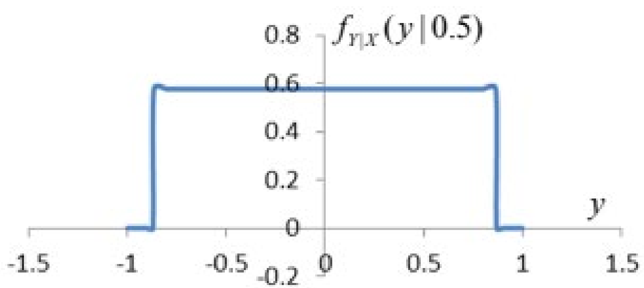
◆ 例1：

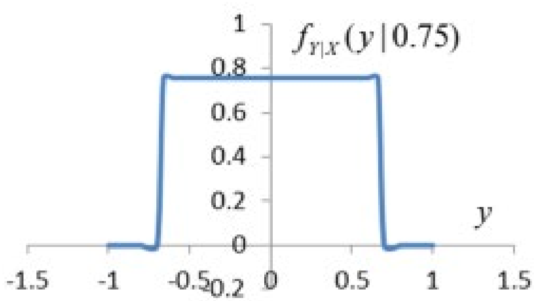
设随机变量（X,Y）在单位圆内服从均匀分布，求联合密度函数，X的边际密度函数及$X=x$时的Y条件密度函数。



解：单位圆的面积为π，$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & |y|<\sqrt{1-x^2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$





二维均匀分布的条件分布仍为：均匀分布

二维正态分布

设二维随机变量（X,Y）的概率密度为：

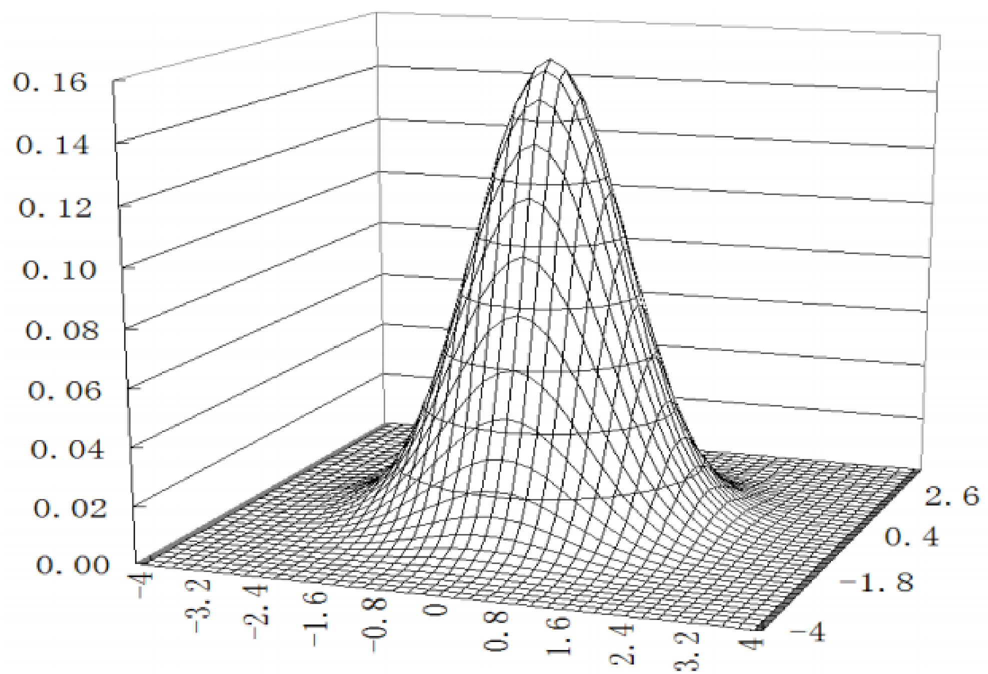
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

其中，μ_1，μ_2，$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$都是常数，称（X,Y）为服从参数为μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ的二维正态分布。

记为：$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$



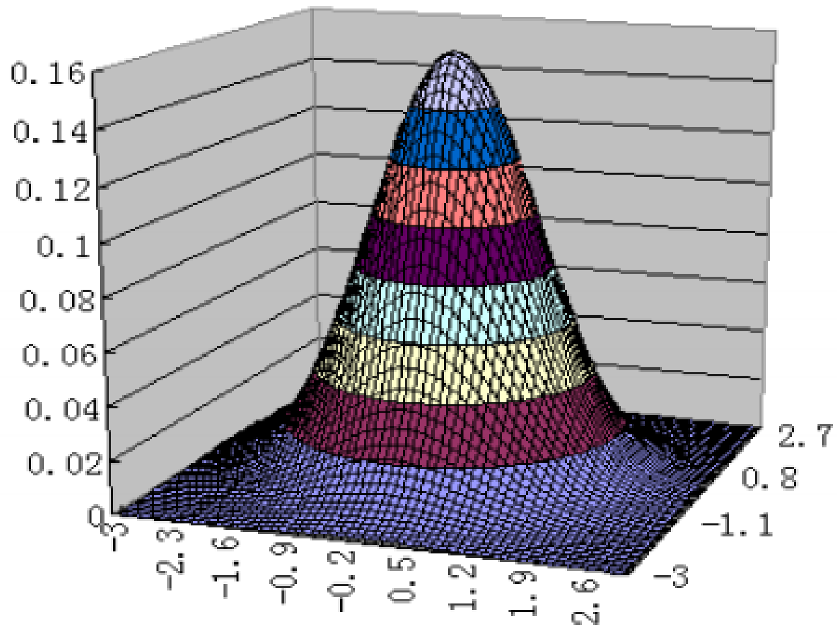
$$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0)$$

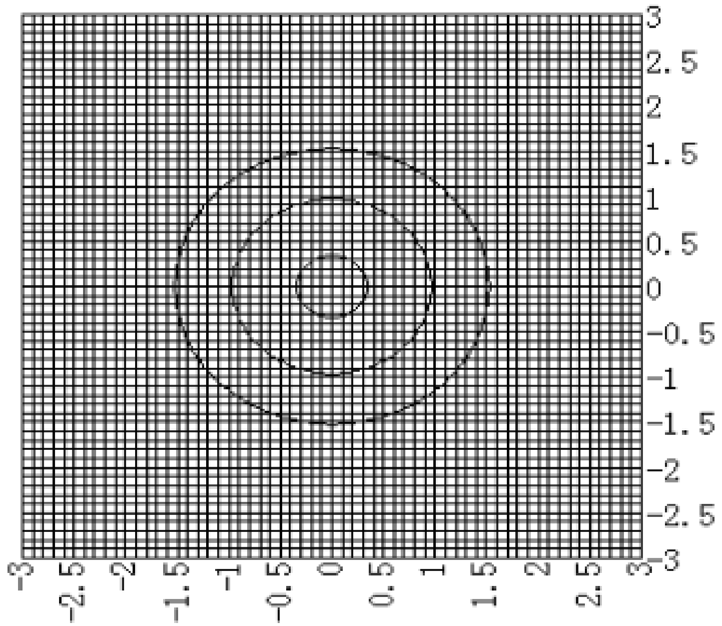
二维正态分布

密度函数图

“钟形”

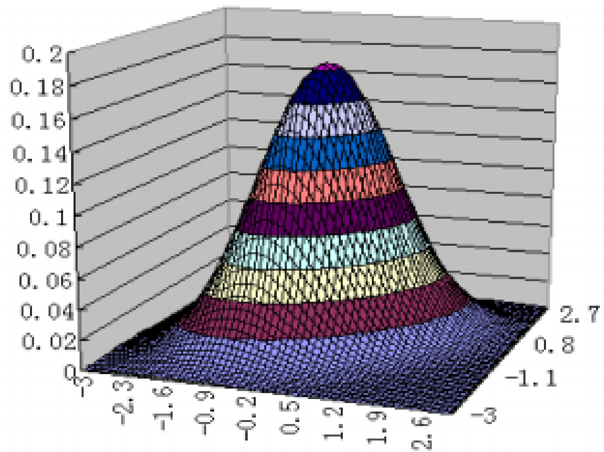
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=0$的顶曲面图及俯瞰图

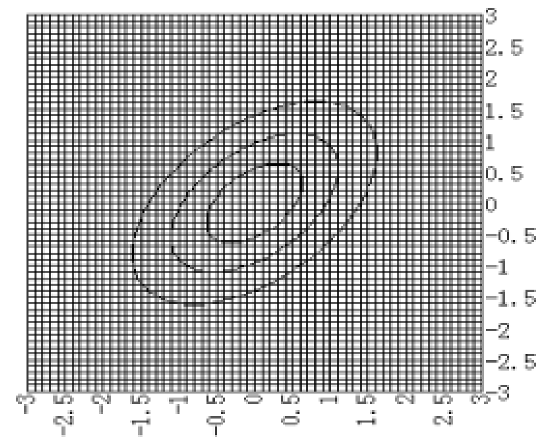




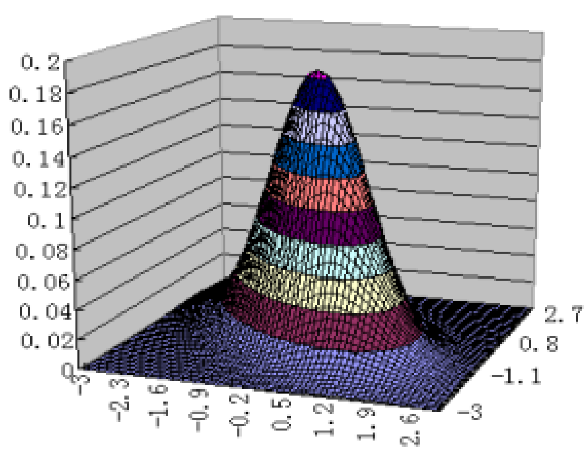
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=\pm0.5$的顶曲面图及俯瞰图

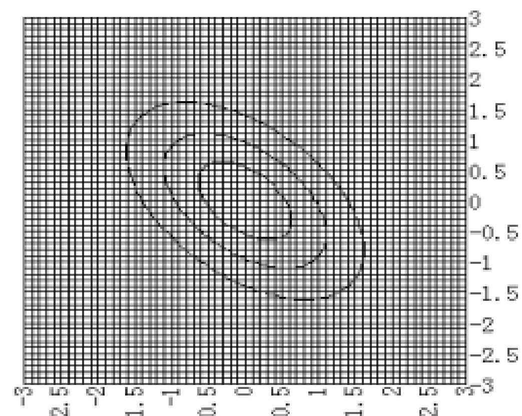
$\rho=0.5$





$\rho=-0.5$





◆ 例2：试求二元正态随机变量的边缘概率密度.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$　　以下记$C=1/\left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C\,exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C\,exp\left\{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\right\}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}exp\left\{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2\boxed{\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\left\{y-\boxed{\left[\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]}\right\}^2\right\}dy$$

$\boldsymbol{\mu}$

$\boldsymbol{\sigma^2}$

◆ **例2:** 试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

$$\therefore f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

$$\text{同理} f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<x<+\infty$$

即二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数ρ.

注： ρ代表两者关系密切程度(相关系数)。

◆ **例3：** 设二元随机变量$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$；求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解：$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

即在X=x条件下，Y的条件分布仍是正态分布，

$$Y|X=x\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

THE END

第二十三讲 随机变量的独立性

相互独立的随机变量

第8讲中把A与B两个事件的独立性定义为$P(AB)=P(A)P(B)$，而随机变量的取值往往可以构成无数的事件，如$X=1, X<1$等，为此要定义两个随机变量的独立性必须包含两个随机变量的许多个事件间的独立.

设x，y为实数，设$A=\{X\le x\}, B=\{Y\le y\}$.

独立性定义：

设$F(x,y)$是二维随机变量(X,Y)的分布函数，$F_X(x)$是X的边缘分布函数，$F_Y(y)$是Y的边缘分布函数，若对所有x，y有：

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y).$$即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

称随机变量***X*，*Y*相互独立**.

独立性等价判断：

离散型： 用分布律判断.对一切i，j都成立$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
即$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

连续型： 用密度函数判断.对在平面的点(x, y)几乎处处成立 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

即在平面上除去“面积”为零的集合以外，上述等式处处成立.

◆例1：

已知(X,Y)的联合分布律，试判断Y与Y的独立性.

X \ Y	0	1	$P(X=i)$
1	1/6	2/6	1/2
2	1/6	2/6	1/2
$P(Y=j)$	1/3	2/3	

解：逐个检验$p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$是否成立

$$P(X=1,Y=0)=1/6=P(X=1)P(Y=0)$$
$$P(X=2,Y=0)=1/6=P(X=2)P(Y=0)$$
$$P(X=1,Y=1)=2/6=P(X=1)P(Y=1)$$
$$P(X=2,Y=1)=2/6=P(X=2)P(Y=1)$$

因而X，Y是相互独立的.

需要检验所有等式成立才能得独立结论

◆例2：

已知(X,Y)的联合分布律，试判断X与Y的独立性.

X \ Y	0	1	$P(X=i)$
1	1/6	2/6	1/2
2	2/6	1/6	1/2
$P(Y=j)$	1/2	1/2	

解：逐个检验$p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$是否成立

$$P(X=1,Y=0)=1/6$$
$$P(X=1)P(Y=0)=1/2\times 1/2=1/4$$

故$P(X=1,Y=0)\neq P(X=1)P(Y=0)$

因而X与Y不相互独立.

只要有一对i，j使$p_{ij}\neq p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$就能判断不独立

◆例3：

设X与Y是相互独立的随机变量，已知(X,Y)的联合分布律，求其余未知的概率值.

X \ Y	0	1	2	$P(X=x_i)$
1	0.01	0.2		
2	0.03			
$P(Y=y_j)$				

X \ Y	0	1	2	$P(X=x_i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	0.75
$P(Y=y_j)$	0.04	0.8	0.16	

◆ **例4:** (X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

问X和Y是否相互独立?

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^{\infty}6\,e^{-(2x+3y)}dy=2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

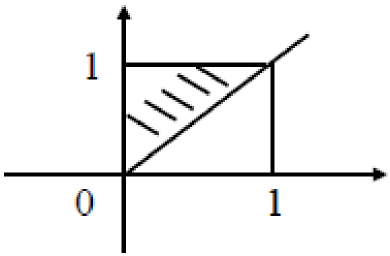
$$=\begin{cases}\int_0^{\infty}6\,e^{-(2x+3y)}dx=3e^{-3y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故有$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因而$X$，$Y$是相互独立的.

结论： 连续型变量独立，其联合密度函数一定能分解成x的函数与y的函数的乘积.即$f(x,y)=g(x)h(y)$.

但是，如果$(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 8xy, 0 < x < y < 1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，则$x,y$相互独立吗？

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^1 8\,xydy = 4x(1-x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 8\,xydx = 4y^3 & 0 < y < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

所以，当$0 < y < x < 1$时（下三角地区），$f(x,y) = 0, f_X(x) \cdot f_Y(y) > 0$，因而$X$，$Y$不是相互独立的.

◆ **例5：** 证明，对于二维正态随机变量(X,Y)，
X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$.

证：因为(X,Y)的联合概率密度为：

$=0$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其边缘概率密度的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

"$\Leftarrow$" 如果$\rho = 0$，则对于所有x，y，有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

即X，Y相互独立.

"$\Rightarrow$" 反之，若X，Y相互独立，

由于$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$都是连续函数，

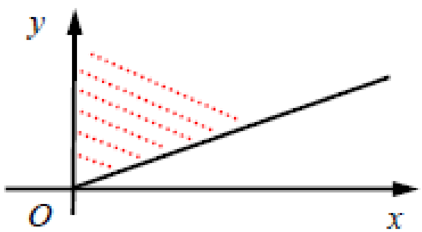
故对于所有的x，y，有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

特别的在顶点上，有$f(\mu_1,\mu_2) = f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$，

即$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$，$\Rightarrow \rho = 0$

◆**例6**：设甲，乙两种元件的寿命X，Y相互独立，服从同一分布，

其概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0\\ 0, 其他\end{cases}$



求甲元件寿命不大于乙元件寿命2倍的概率。

解：(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$P(X\le 2Y)=\iint_{x\leqslant 2y} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_{\frac{x}{2}}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}dy$$

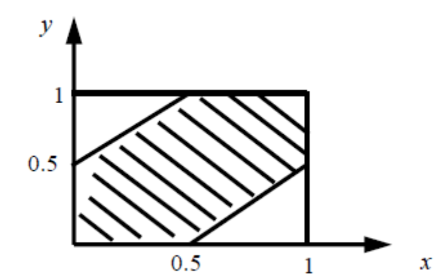
$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{4}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{3x}{4}}dx=\frac{2}{3}$$

◆ **例7：** 在区间(0,1)上任取两数，求这两数之差的绝对值小于0.5的概率.

解：设X，Y分别为(0,1)上任取的两数，则X与Y为独立且同分布的，均服从$U(0,1)$

$$\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1,0<x,y<1\\ \quad 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$P(|X-Y|<0.5)=\iint_{|x-y|<0.5} f(x,y)\,dxdy$$



$$=\iint_{\substack{|x-y|<0.5\\0<x,y<1}} 1dxdy=S_G=1-0.5^2$$

$$=0.75$$

一般n维随机变量的一些概念和结果

◆ n维随机变量

设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$;

设$X_1=X_1(e),X_2=X_2(e),\cdots,X_n=X_n(e)$是定义在$S$上的随机变量，

由它们构成的一个n维向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为**n维随机变量**.

◆ n维随机变量的分布函数

对于任意n个实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，n维函数：

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n)=P(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2,\cdots,X_n\leq x_n)$$

称为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**分布函数**.

◆ ***n*维离散型随机变量的分布律**

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的取值记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$取遍所有可能值,

称为n维离散型随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**分布律**.

◆ ***n*维连续型随机变量的概率密度**

若存在非负函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n维连续型随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**概率密度**.

◆ n维随机变量的边缘分布

若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数$F(x_1,x_2,\cdots x_n)$

（分布律$p(x_1,x_2,\cdots x_n)$，概率密度$f(x_1,x_2,\cdots x_n)$）已知，

则$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的$k(1\le k\le n)$元边缘分布就随之确定.比如：

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

$$p_{X_1}(x_1)=P(X_1=x_1)=\sum_{x_2,x_3,\cdots x_n}P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\right)$$

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)dx_2dx_3\cdots dx_n$$

n维随机变量的相互独立

$(X_1,...,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,...,x_n)$,若对于所有的

$x_1,x_2,...,x_n$有：$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2...,X_n$是相互独立的。

离散

$(X_1,...,X_n)$的分布律为$P(x_1,x_2,...,x_n)$,若对于所有的

$x_1,x_2,...,x_n$，有：$P(x_1,x_2,...,x_n)=P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)...P_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2...,X_n$是相互独立的。

连续

$(X_1,...,X_n)$的概率密度为$f(x_1,x_2,...,x_n)$,若对于所有的

$x_1,x_2,...,x_n$，几乎处处有：$f(x_1,x_2,...,x_n)$

$=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)...f_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2...,X_n$是相互独立的。

两个随机向量的相互独立

◆ $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的独立性

设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$的分布函数为$F_1(x_1,x_2,\cdots x_m)$，

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数为$F_2(y_1,y_2,\cdots y_n)$，

$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots x_m,y_1,y_2,\cdots y_n)$

若$F(x_1,x_2,\cdots x_m,y_1,y_2,\cdots y_n)=F_1(x_1,x_2,\cdots x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots y_n)$

对一切$x_1,\cdots x_m,y_1,\cdots y_n$成立，称$(X_1,\cdots,X_m)$与$(Y_1,\cdots,Y_n)$相互独立.

定理： 设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，

（1）则$X_i(i=1,2,\cdots,m)$与$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$相互独立.

（2）若$h(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是连续函数，

则$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立.

THE END

第二十四讲　二维随机变量函数的分布

二元维随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量(X,Y)具有概率分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

问题：（1）若$U=g(X,Y)$，则U的分布律是什么？
（2）若$U=u(X,Y),V=v(X,Y)$，则(U,V)的分布律是什么？

方法： 对于（1），先确定U的取值$u_i,i=1,2,\cdots$
再找出$(U=u_i)=\{(X,Y)\in D\}$，从而计算出分布律.
方法： 对于（2），先确定(U,V)的取值$(u_i,v_j)\quad i,j=1,2,\cdots$
再找出 $(U=u_i,V=v_j)=\{(X,Y)\in D\}$，从而计算出分布律；

例1：设X与Y的联合分布律为：
令$U = X + Y, V = max(X,Y)$，
求U及(U,V)的分布律.

X \ Y	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解：U的取值范围为2，3，4

$$P(U=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.2$$

$$P(U=3)=P(X+Y=3)=P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})$$

$$=P(\{X=1,Y=2\})+P(\{X=2,Y=1\})=0.1+0.3=0.4$$

$$P(U=4)=P(X+Y=4)=P(X=2,Y=2)=0.4$$

$\therefore U$的分布律为：

U	2	3	4
P_k	0.2	0.4	0.4

◆ **例1**：设X与Y的联合分布律为：
令$U=X+Y, V=max(X,Y)$，

求U及(U,V)的分布律.

X \ Y	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解：U的取值范围为2，3，4；V的取值范围为1，2

$$P(U=2,V=1)=P(X+Y=2,max(X,Y)=1)=P(X=1,Y=1)=0.2$$
$$P(U=3,V=1)=P(X+Y=3,max(X,Y)=1)=0$$
$$P(U=4,V=1)=P(X+Y=4,max(X,Y)=1)=0$$
$$P(U=2,V=2)=P(X+Y=2,max(X,Y)=2)=0$$
$$P(U=3,V=2)=P(X+Y=3,max(X,Y)=2)$$
$$=P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})$$
$$=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0.1+0.3=0.4$$
$$P(U=4,V=2)=P(X+Y=4,max(X,Y)=2)$$
$$=P(X=2,Y=2)=0.4$$

U \ V	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

◆ **例2**：设X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$

令$U=\begin{cases}1, X>1\\ 0, X\le 1\end{cases}$，$V=\begin{cases}1, X>2\\ 0, X\le 2\end{cases}$

求(U,V)的联合分布律.

解：$P(U=0,V=0)=P(X\le 1,X\le 2)=P(X\le 1)=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le 1,\ X>2)=0$$

$$P(U=1,V=0)=P(X>1,X\le 2)=P(1<X\le 2)=\int_1^2 e^{-x}\,dx=e^{-1}-e^{-2}$$

$$P(U=1,V=1)=P(X>1,X>2)$$

$$=P(X>2)=\int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx=e^{-2}$$

U \ V	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

THE END