智能机器人技术
第10章-位置级运动学建模方法

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io

中山大学智能工程学院
2024-Spring

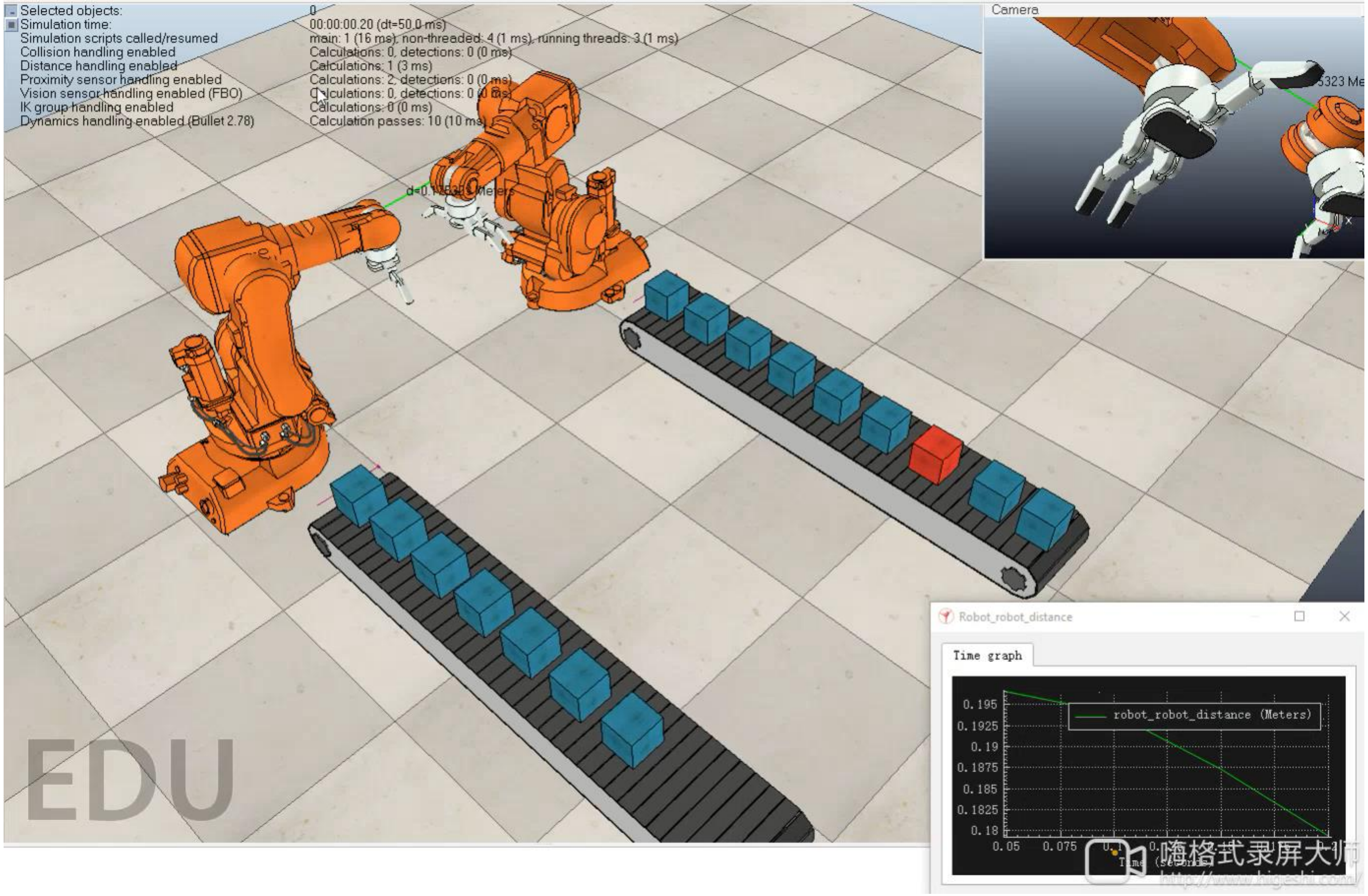
本章内容

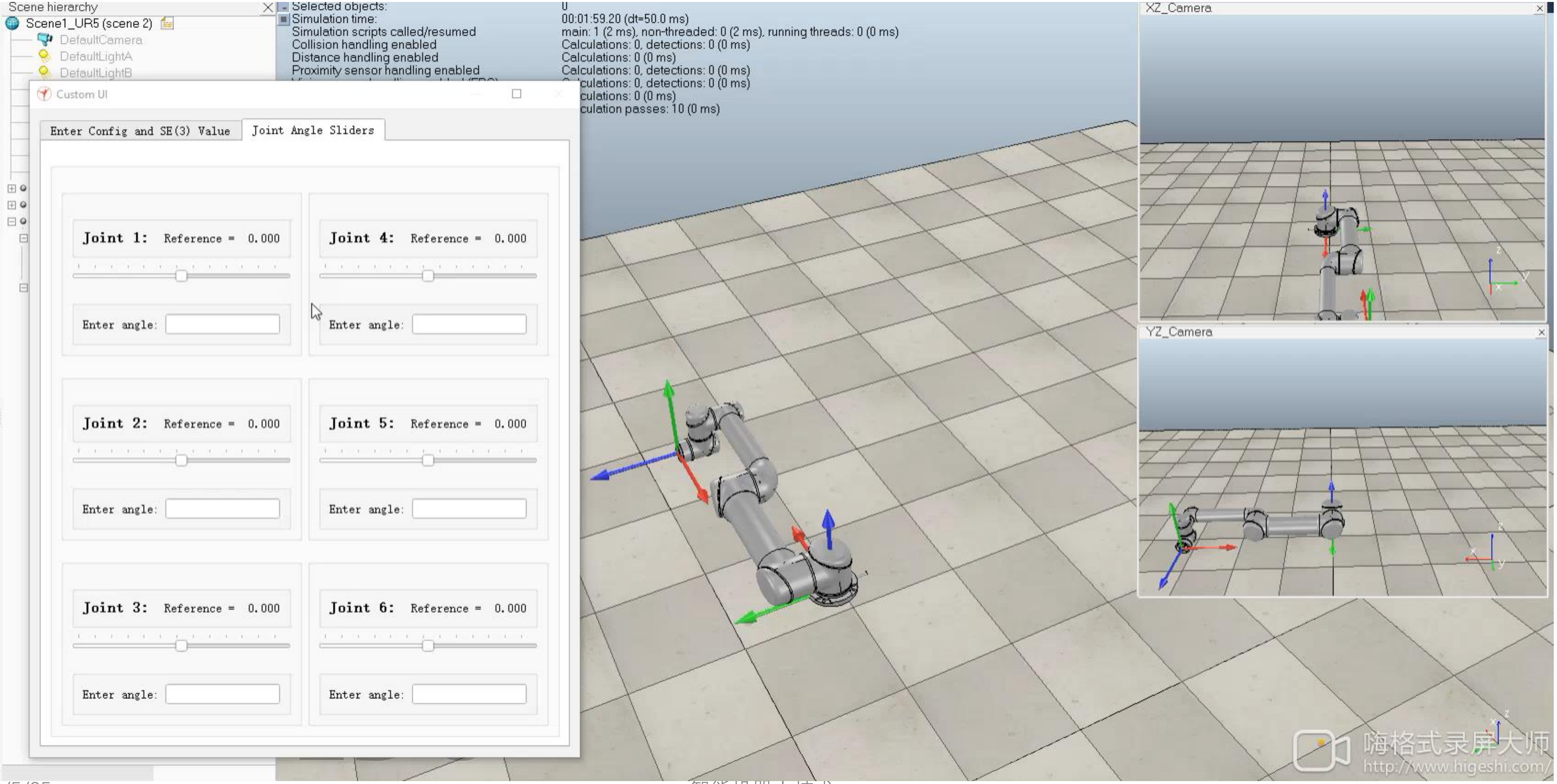
1. 引言：
2. 正向运动学
3. 指数积公式：相对基坐标系
4. 指数积公式：相对末端坐标系
5. 知识点小结

◘ 示例

思考：

1. 机器人如何运动？
2. 运动到何处？
3. 如何控制？




Scene hierarchy
Scene1_UR5 (scene 2)
DefaultCamera
DefaultLightA
DefaultLightB
Custom UI
Enter Config and SE(3) Value
Joint Angle Sliders
Joint 1: Reference = 0.000
Enter angle:
Joint 2: Reference = 0.000
Enter angle:
Joint 3: Reference = 0.000
Enter angle:
Joint 4: Reference = 0.000
Enter angle:
Joint 5: Reference = 0.000
Enter angle:
Joint 6: Reference = 0.000
Enter angle:
Selected objects:
Simulation time:
Simulation scripts called/resumed
Collision handling enabled
Distance handling enabled
Proximity sensor handling enabled
00:01:59.20 (dt=50.0 ms)
main: 1 (2 ms), non-threaded: 0 (2 ms), running threads: 0 (0 ms)
Calculations: 0, detections: 0 (0 ms)
Calculations: 0 (0 ms)
Calculations: 0, detections: 0 (0 ms)
XZ_Camera
YZ_Camera
嗨格式录屏大师
http://www.higeshi.com/

正向运动学（Forward Kinematics）

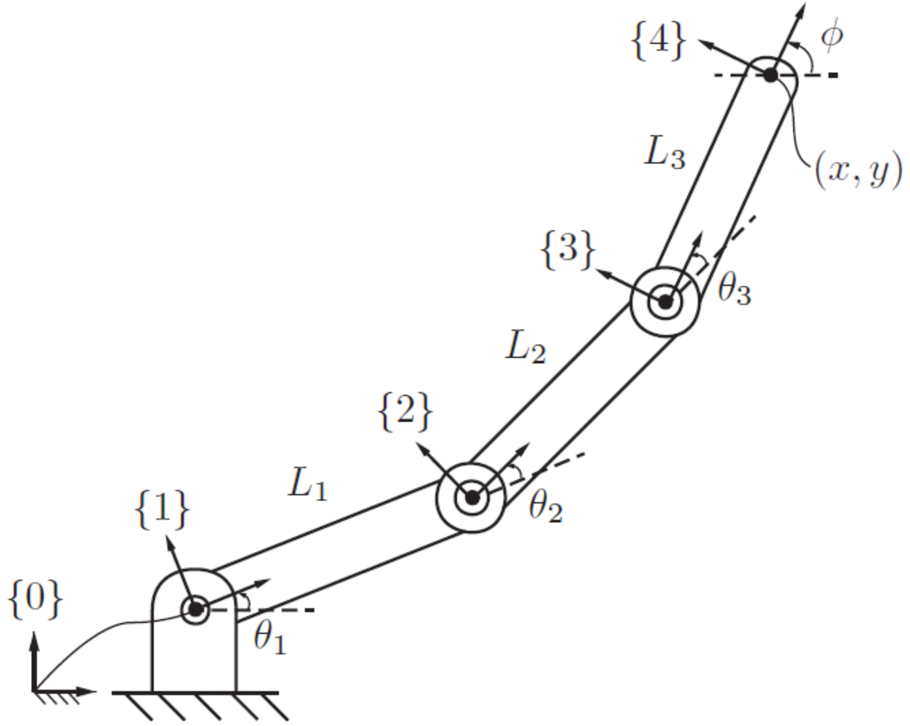
已知关节坐标，求解末端位置和姿态。

- 若给定关节角度，则末端位置及姿态角为：

$$\begin{aligned} x &= L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) + L_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3), \\ y &= L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) + L_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3), \\ \phi &= \theta_1+\theta_2+\theta_3. \end{aligned}$$

- 若只在平面内，则上述方法十分直观且简便。
- 若在空间中，则上述方法将无法分析复杂情况。
- 因此采用上一章中的$T \in SE(3)$来描述。

$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}$$



图：3R机械臂。{0}系与{1}系位置重合；{1}、{2}、{3}系分别放置与关节处，{4}系放置于末端。

- 因此采用上一章中的$T \in SE(3)$来描述：

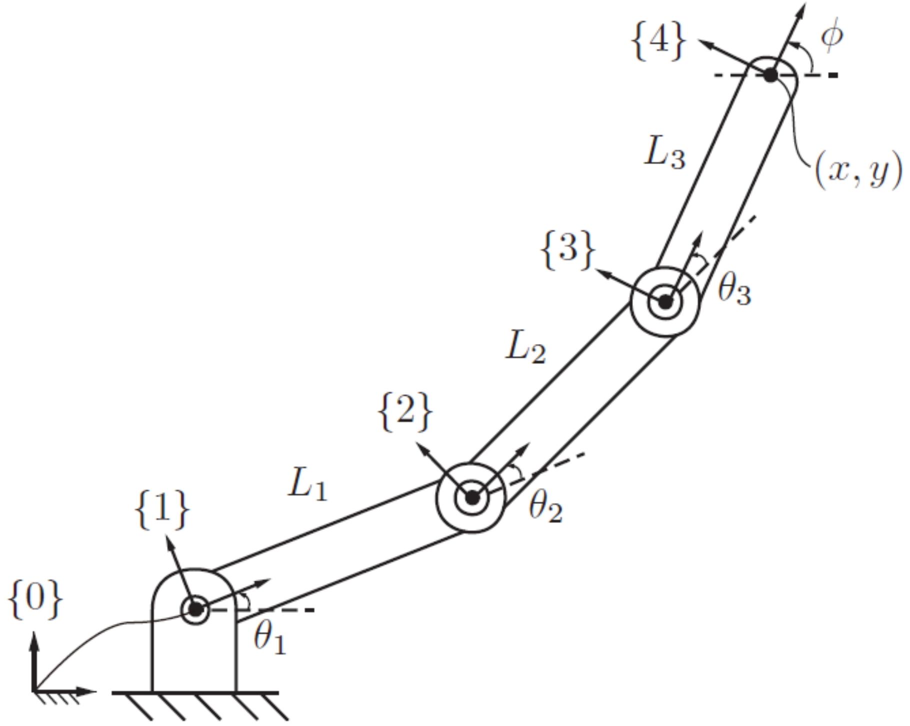
$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}$$

- 其中每个T表示本系相对于前一坐标系的位形：

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

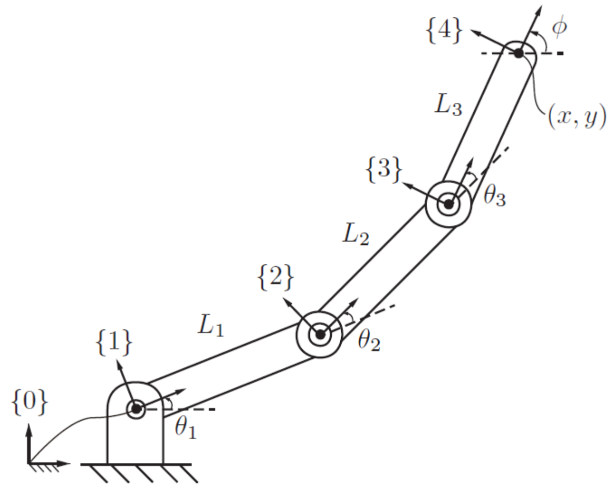
- 除了T_{34}外，其他都含关节参数变量θ_i。



图：3R机械臂。{0}系与{1}系位置重合；{1}、{2}、{3}系分别放置与关节处，{4}系放置于末端。

- 考虑另一种求解方式：定义M为所有关节处于初始位置时，坐标系{4}的位姿：

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&L_1+L_2+L_3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



- 考虑每个关节均为0节距的运动旋量。并将$\theta_1,\theta_2=0$固定不动，只有θ_3可以运动。此时关节3对坐标系{0}的螺旋轴为：

$$\mathcal{S}_3=\begin{bmatrix}\omega_3\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-(L_1+L_2)\\0\end{bmatrix}$$

矩阵形式

- q_3为关节3轴上任一点，如$q_3=(L_1+L_2,0,0)$

$$[\mathcal{S}_3]=\begin{bmatrix}[\omega]&v\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&-(L_1+L_2)\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

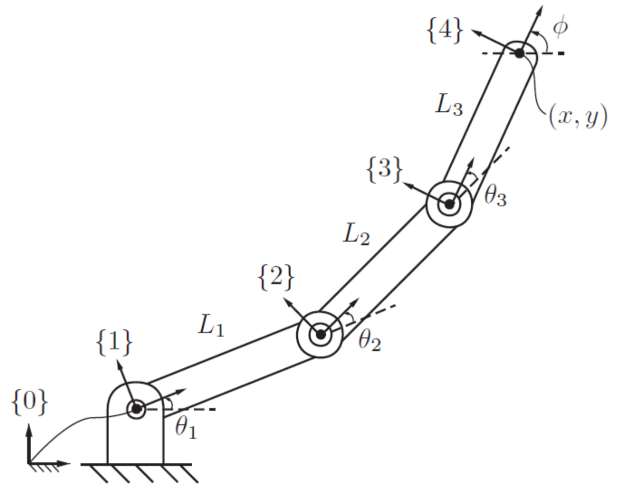
- 假设旋转角速度$\omega_3=1rad/s$，与{0}原点重合的点的线速度大小为L_1+L_2，方向为$-\hat{y}$，或写成：

$$v_3=-\omega_3\times q_3$$

- 由上一章知识：

$$T_{04}=e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$$
$$\theta_1=\theta_2=0$$

$$\boxed{T_{04} = e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M} \quad \theta_1 = \theta_2 = 0$$



- 继续考虑，固定$\theta_1 = 0$及固定θ_3（任意值）。关节2的旋转看作是一螺旋运动施加在刚化系统上（L_2与L_3连成一体）：

$$T_{04} = e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \boxed{e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M} \quad \theta_1 = 0$$

- 关节2的螺旋轴为：

$$[\mathcal{S}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

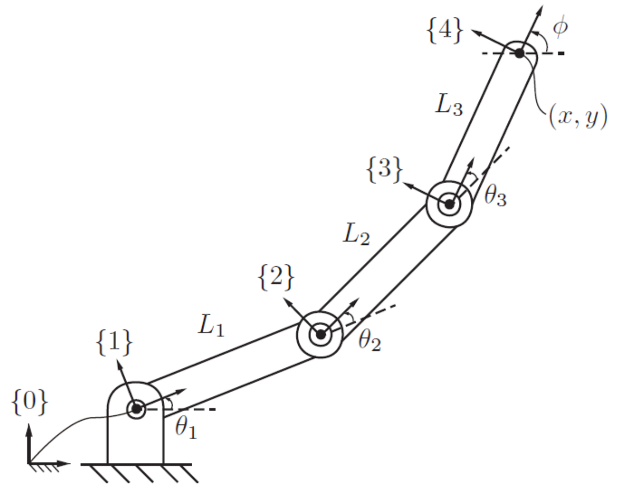
旋转角速度：

$\omega_2 = (0,0,1)$

与{0}原点重合的点的线速度大小为L_1，方向为$-\hat{y}$，或写成：

$$v_2 = -\omega_2 \times q_2$$

$$T_{04} = e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M \quad \theta_1 = 0$$



- 继续考虑，固定θ_2（任意值）、固定θ_3（任意值）。关节1的旋转看作是一螺旋运动施加在整个刚化系统上（L_1, L_2与L_3连成一体）：

$$T_{04} = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M$$

- 指数积公式（Product of Exponential，PoE）

- 关节1的螺旋轴为：

$$[\mathcal{S}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

旋转角速度：$\omega_1 = (0,0,1)$

与{0}原点重合的点的线速度大小为0

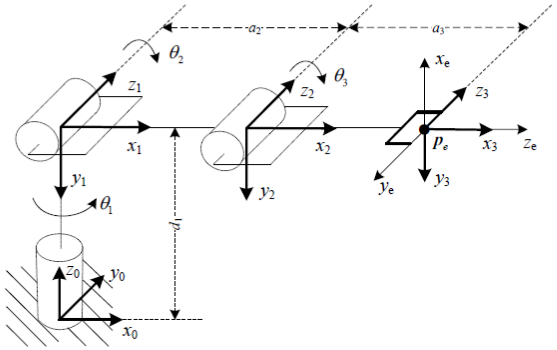
- 上式对任意$\theta_1\theta_2\theta_3$成立。

- 这里螺旋轴$\mathcal{S}_i$全称为空间螺旋轴。

✓ 优点：只涉及坐标系{0}和初始位姿M，无需其他连杆的坐标系。

D-H参数（Denavit-Hartenberg Parameter）

➢ 对每个关节建立坐标系并有对应的参数。



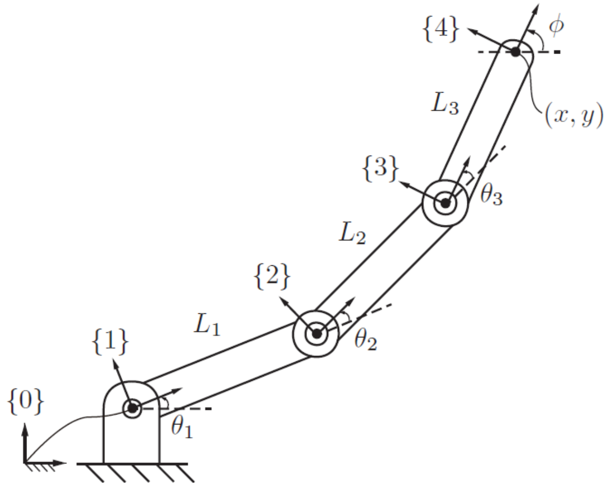
连杆 i	θ_i /°	α_i /°	a_i /m	d_i /m
1	0	-90	0	d_1
2	0	0	a_2	0
3	0	0	a_3	0

✓ 优点：只需要最少数量的参数来描述机器人运动学：n杆机器人，用3n个参数描述结构，n个参数表示关节变量。

× 缺点：需要建立大量坐标系。

指数积公式（PoE）

➢ 利用旋量，转化运动表述。



✓ 优点：无需建立连杆坐标系，只需要{0}和初始位姿M。

× 缺点：需要较多参数来描述机器人运动学：n杆机器人，6n个描述关节轴运动旋量，n个表示关节变量。

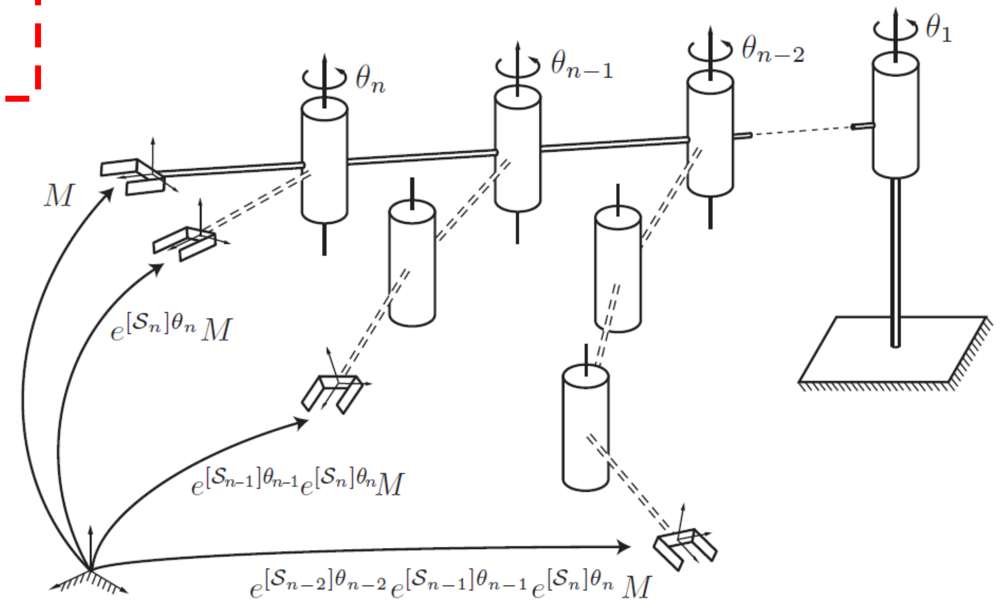
中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

关键点：将每个关节的螺旋运动施加给后面的关节

- 选择基坐标系$\{s\}$和附着在最后一根杆上的末端坐标系$\{b\}$。并将机器人置于初始位置。
- 关节n对应的变量为θ_n，末端的新位型$T \in SE(3)$为

$$T = e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 其中$\mathcal{S}_n = (\omega_n, v_n)$为表示在基坐标系$\{s\}$中的关节n的螺旋轴。
- 若为转动副（节距为0），则$\omega_n \in \mathbb{R}^3$为沿关节轴正向的单位向量；$v_n = -\omega_n \times q_n$；$q_n$为关节轴上任一点，在基坐标系$\{s\}$中测量。
- 若为移动副，则$\omega_n = 0$，$v_n \in \mathbb{R}^3$为沿关节轴正向的单位向量；θ_n表示距离。



图：n个单自由度关节串联的机械臂

- 现假设关节n−1也允许变化θ_{n-1}，即给关节n−1施加螺旋运动，此时末端的新位型为

$$T = e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}}\left(e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M\right)$$

3 指数积公式：相对基坐标系

- 关节n对应的变量为θ_n，末端的新位型$T \in SE(3)$为

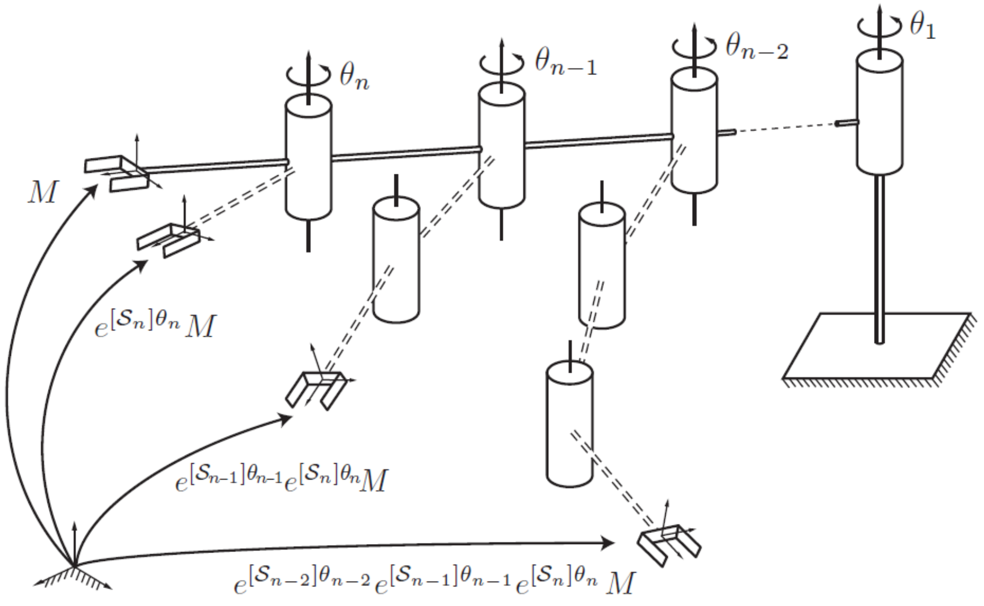
$$T = e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 现假设关节n−1也允许变化θ_{n-1}，即给关节n−1施加螺旋运动，此时末端的新位型为

$$T = e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}} \left(e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \right)$$

- 不断重复，当$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$都发生变化时，有：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M.$$



图：n个单自由度关节串联的机械臂

✓ 相对基坐标系的指数积公式：

① 初始位置时，末端位型$M \in SE(3)$

② 初始位置时，相对$\{s\}$系的螺旋轴$\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$

③ 关节变量$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$

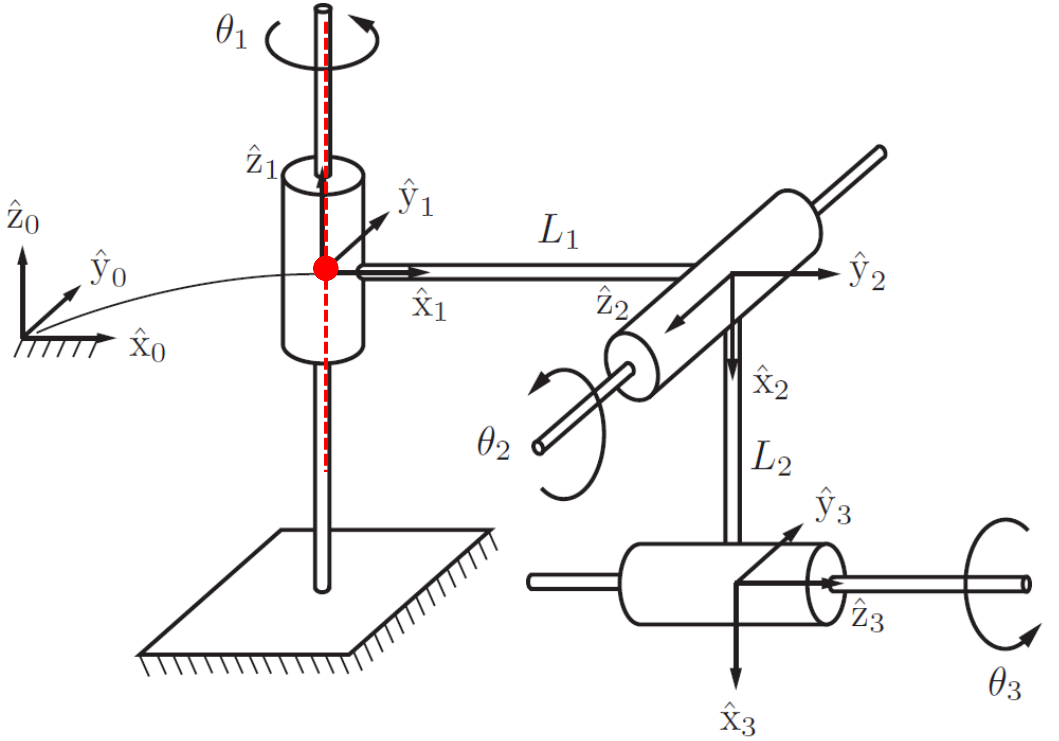
中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

例1

- 正向运动学：$T(\theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$
- 由图观察出初始位型$M\in SE(3)$：

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节1螺旋轴$\mathcal{S}_1=(\omega_1,v_1)$：
  - 观察得到$\omega_1=(0,0,1)$
  - 可以选择q_1在基坐标系原点处，因此$v_1=-\omega_1\times q_1=(0,0,0)$



图：空间3R开链机械臂（图示为初始位置）

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2		
3		

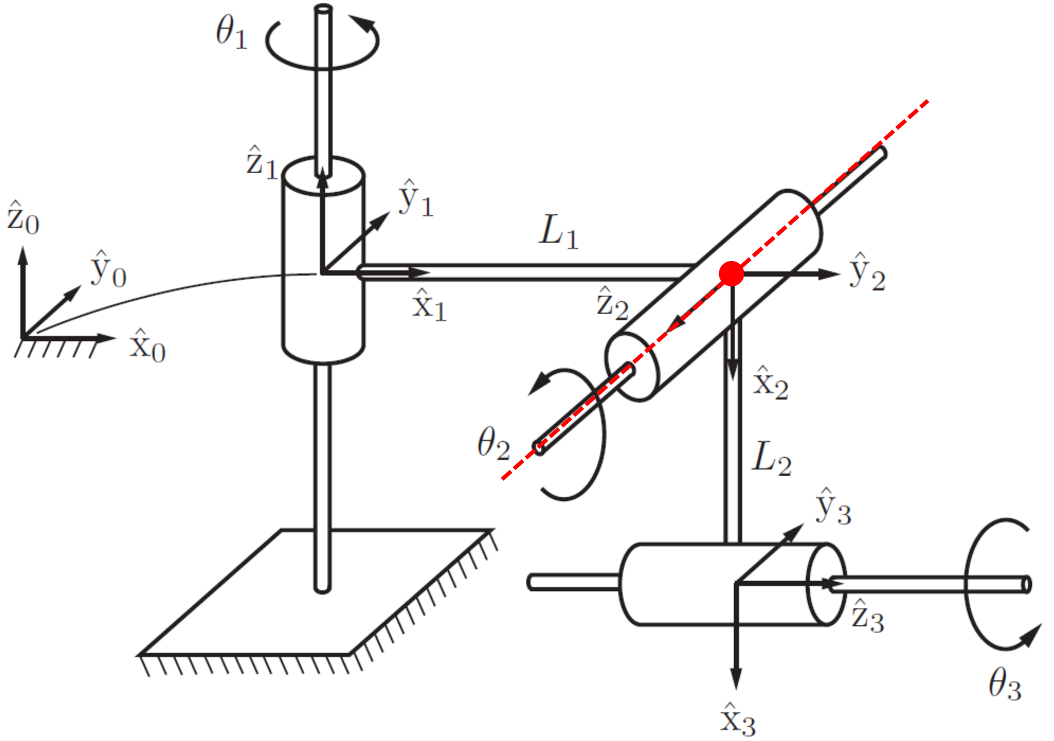
中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

例1

- 正向运动学：$T(\theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$
- 由图观察出初始位型$M\in SE(3)$：

$$M=\begin{bmatrix}0&0&1&L_1\\0&1&0&0\\-1&0&0&-L_2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 关节2螺旋轴$\mathcal{S}_2=(\omega_2,v_2)$：
  - 观察关节2的轴线沿$-\hat{y}_0$，因此$\omega_2=(0,-1,0)$
  - 选择一个关节2轴线上的点$q_2=(L_1,0,0)$
  - 因此$v_2=-\omega_2\times q_2=(0,0,-L_1)$



图：空间3R开链机械臂（图示为初始位置）

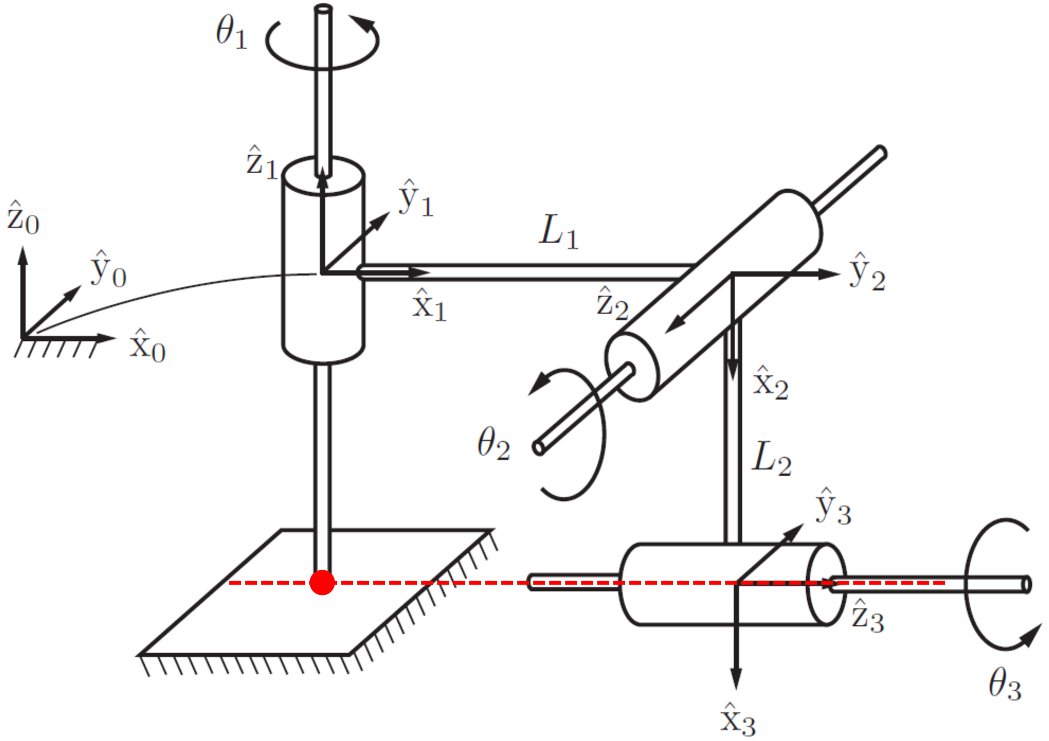
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,-1,0)$	$(0,0,-L_1)$
3		

例1

- 正向运动学：$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M$
- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节3螺旋轴$\mathcal{S}_3 = (\omega_3, v_3)$：
  - 观察关节3的轴线沿$\hat{x}_0$，因此$\omega_3 = (1,0,0)$
  - 选择一个关节3轴线上的点$q_3 = (0,0,-L_2)$
  - 因此$v_3 = -\omega_3 \times q_3 = (0, -L_2, 0)$



图：空间3R开链机械臂（图示为初始位置）

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,-1,0)$	$(0,0,-L_1)$
3	$(1,0,0)$	$(0,-L_2,0)$

例1

- 正向运动学：$T(\theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$
- 由图观察出初始位型$M\in SE(3)$：

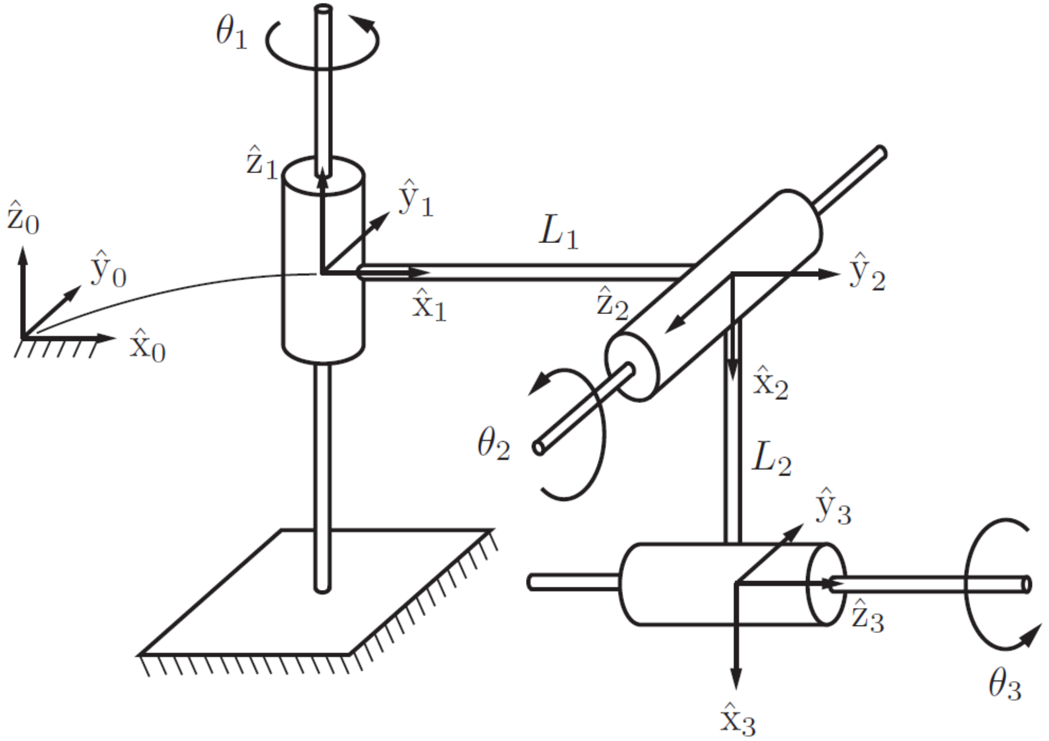
$$M=\begin{bmatrix}0&0&1&L_1\\0&1&0&0\\-1&0&0&-L_2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 3个螺旋轴的矩阵形式：

$$[\mathcal{S}_1]=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad [\mathcal{S}_2]=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&-L_1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{S}_3]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&-L_2\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

回顾：第9章P76



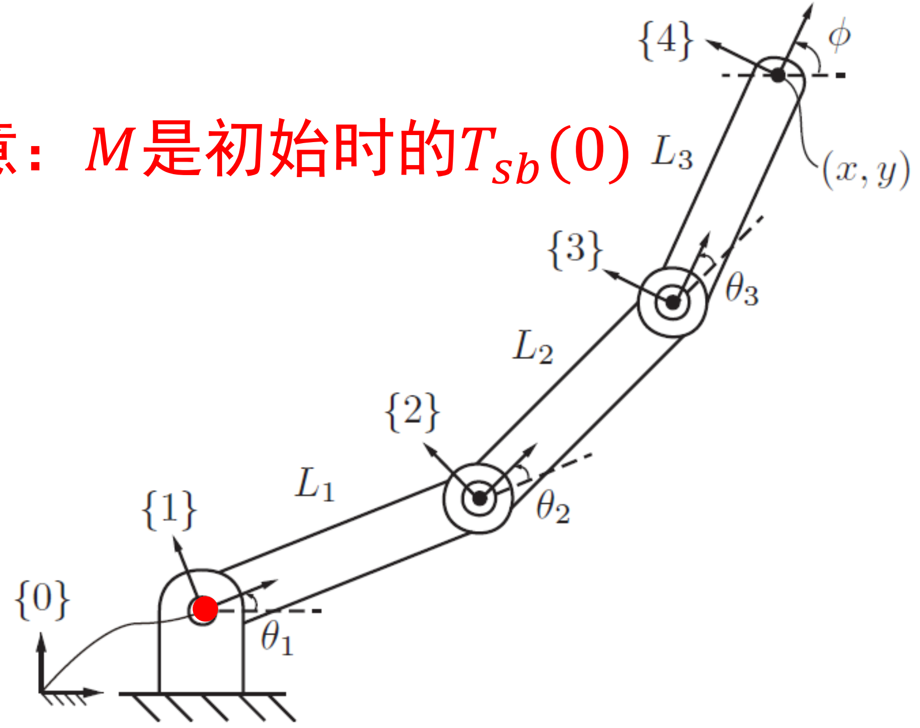
图：空间3R开链机械臂（图示为初始位置）

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,-1,0)$	$(0,0,-L_1)$
3	$(1,0,0)$	$(0,-L_2,0)$

3 指数积公式：相对基坐标系

例2

- 正向运动学：$T_{04} = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} \boxed{M}$ 注意：M是初始时的$T_{sb}(0)$
- 关节1螺旋轴$\mathcal{S}_1 = (\omega_1, v_1)$：
  - 观察得到$\omega_1 = (0,0,1)$
  - 可以选择q_1在基坐标系原点处，因此$v_1 = -\omega_1 \times q_1 = (0,0,0)$



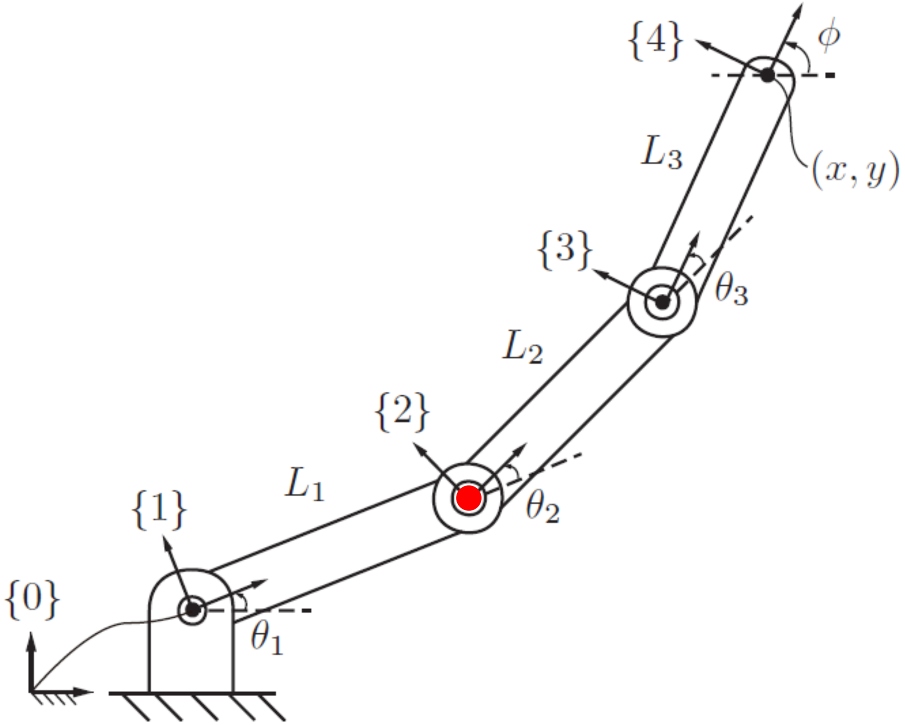
图：3R机械臂。{0}系与{1}系位置重合；{1}、{2}、{3}系分别放置与关节处，{4}系放置于末端。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2		
3		

例2

- 正向运动学：$T_{04} = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3} M$
- 关节2螺旋轴$\mathcal{S}_2 = (\omega_2, v_2)$：
  - 观察得到$\omega_2 = (0,0,1)$
  - 选择一个关节2轴线上的点$q_2 = (L_1, 0,0)$
  - 因此$v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (0, -L_1, 0)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,0,1)$	$(0,-L_1,0)$
3		

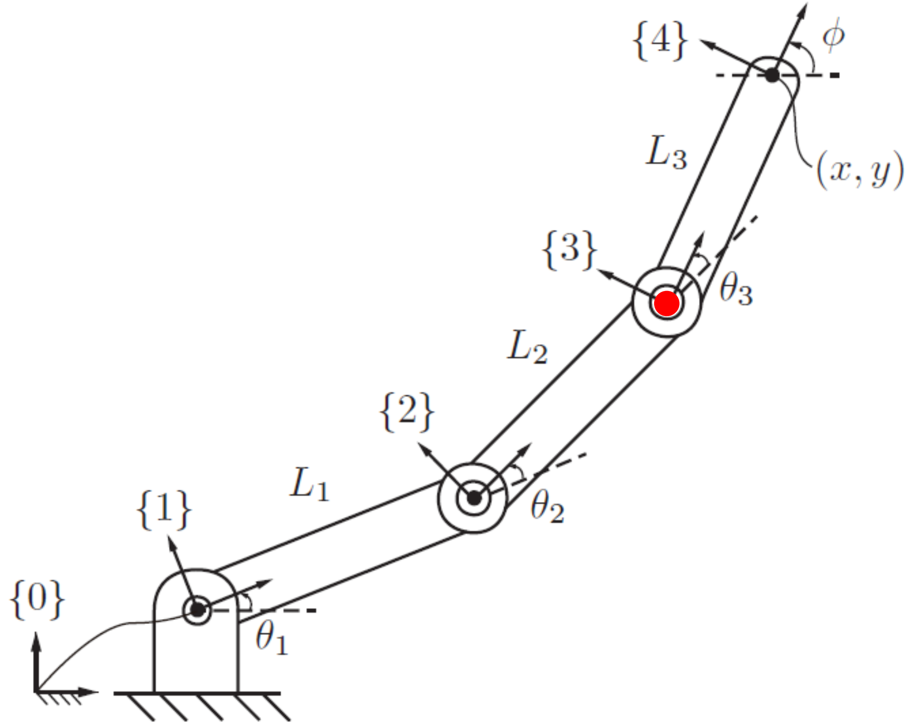


图：3R机械臂。{0}系与{1}系位置重合；{1}、{2}、{3}系分别放置与关节处，{4}系放置于末端。

例2

- 正向运动学：$T_{04}=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$
- 关节3螺旋轴$\mathcal{S}_3=(\omega_3,v_3)$：
  - 观察得到$\omega_3=(0,0,1)$
  - 选择一个关节3轴线上的点$q_3=(L_1+L_2,0,0)$
  - 因此$v_3=-\omega_3\times q_3=(0,-(L_1+L_2),0)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,0,1)$	$(0,-L_1,0)$
3	$(0,0,1)$	$(0,-(L_1+L_2),0)$



图：3R机械臂。{0}系与{1}系位置重合；{1}、{2}、{3}系分别放置与关节处，{4}系放置于末端。

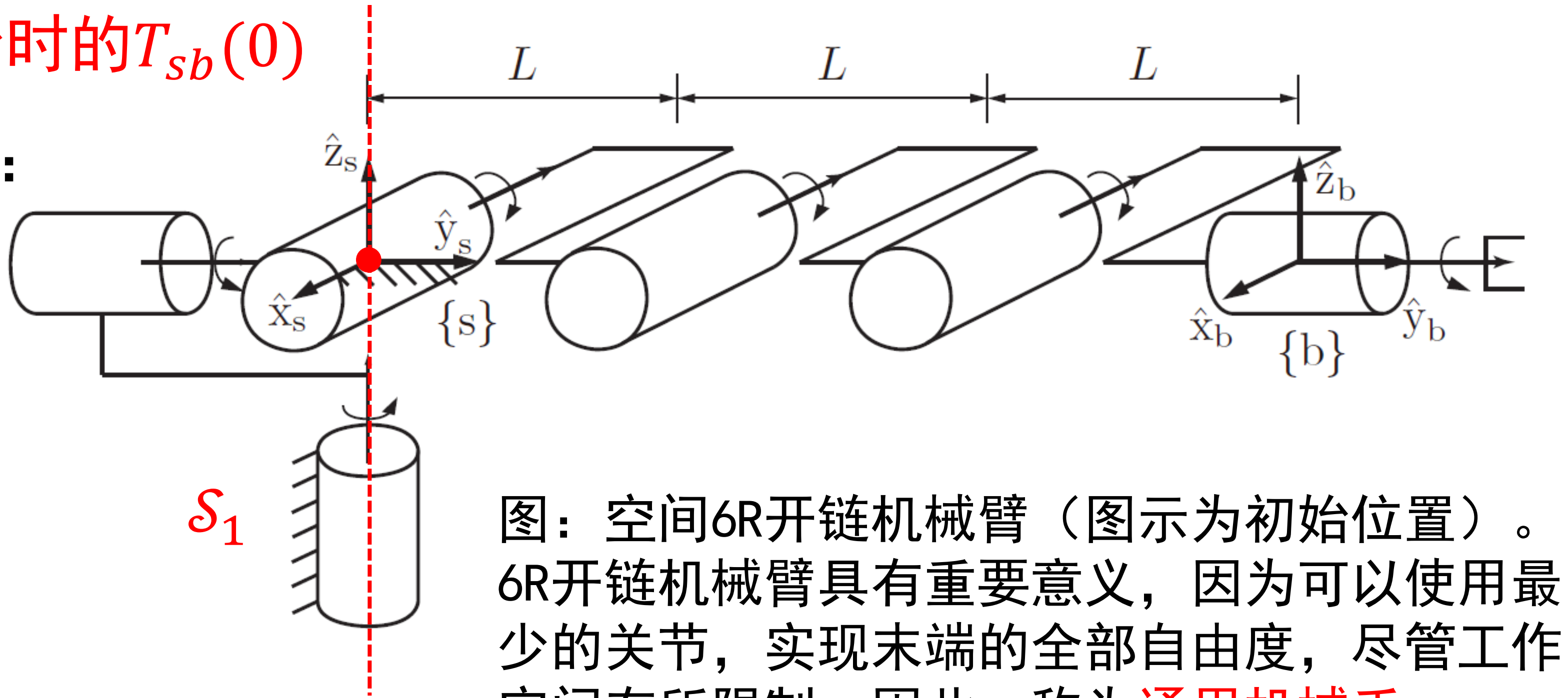
例3

注意：M是初始时的$T_{sb}(0)$

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节1螺旋轴$\mathcal{S}_1 = (\omega_1, v_1)$：
  - 观察得到$\omega_1 = (0,0,1)$
  - 选择一个关节1轴线上的点$q_1 = (0,0,0)$
  - 因此$v_1 = -\omega_1 \times q_1 = (0,0,0)$



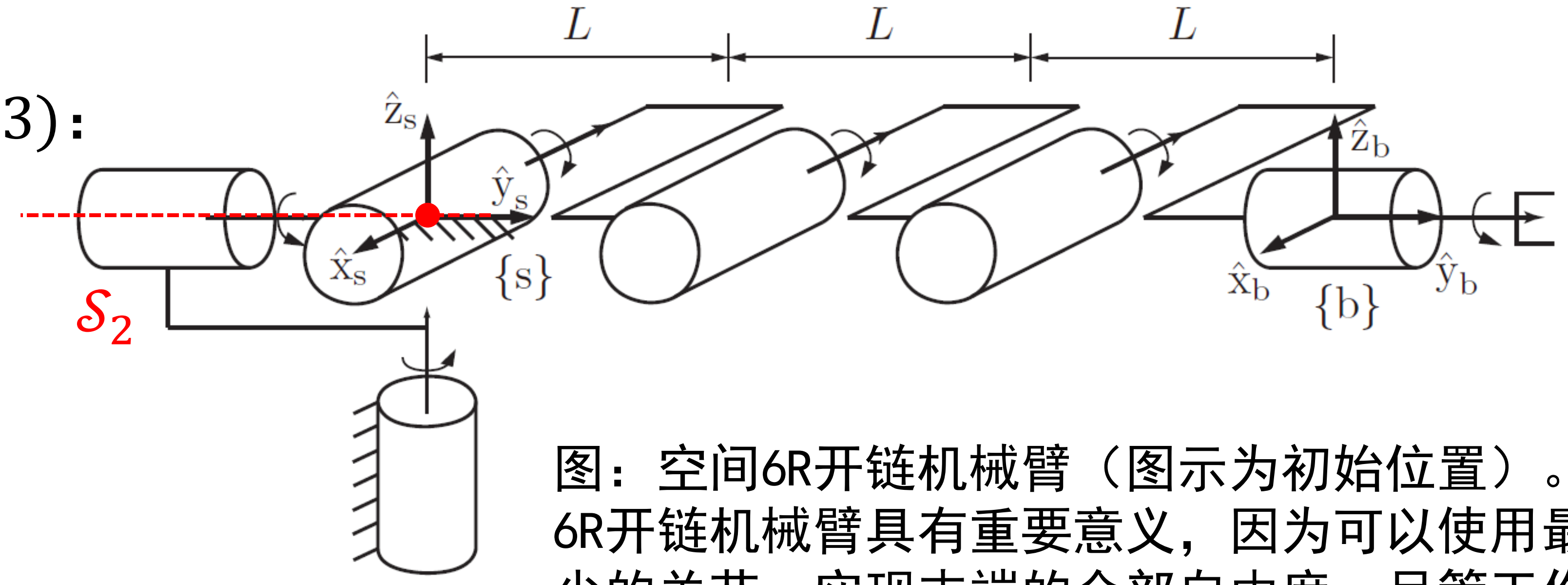
图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2		
3		
4		
5		
6		

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 3L \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

- 关节2螺旋轴$\mathcal{S}_2 = (\omega_2, v_2)$：
  - 观察得到$\omega_2 = (0,1,0)$
  - 选择一个关节2轴线上的点$q_2 = (0,0,0)$
  - 因此$v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (0,0,0)$

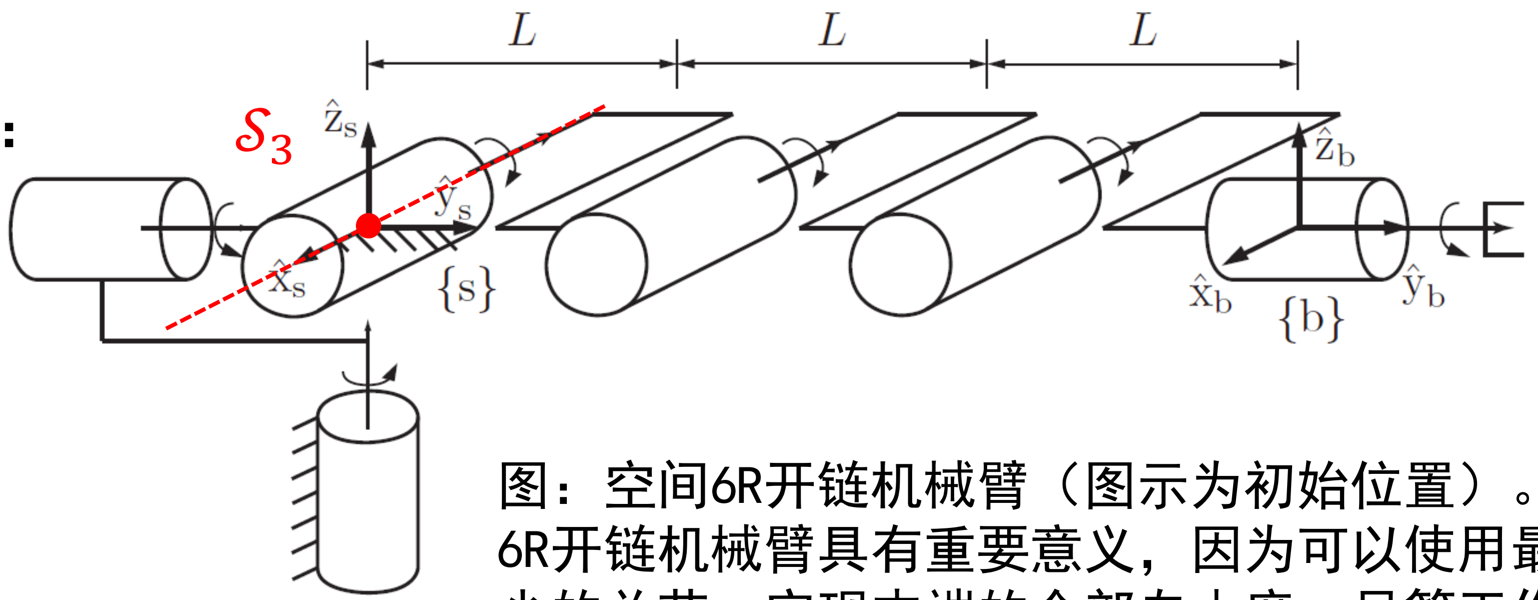
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3		
4		
5		
6		

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节3螺旋轴$\mathcal{S}_3 = (\omega_3, v_3)$：
  - 观察得到$\omega_3 = (-1,0,0)$
  - 选择一个关节3轴线上的点$q_3 = (0,0,0)$
  - 因此$v_3 = -\omega_3 \times q_3 = (0,0,0)$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

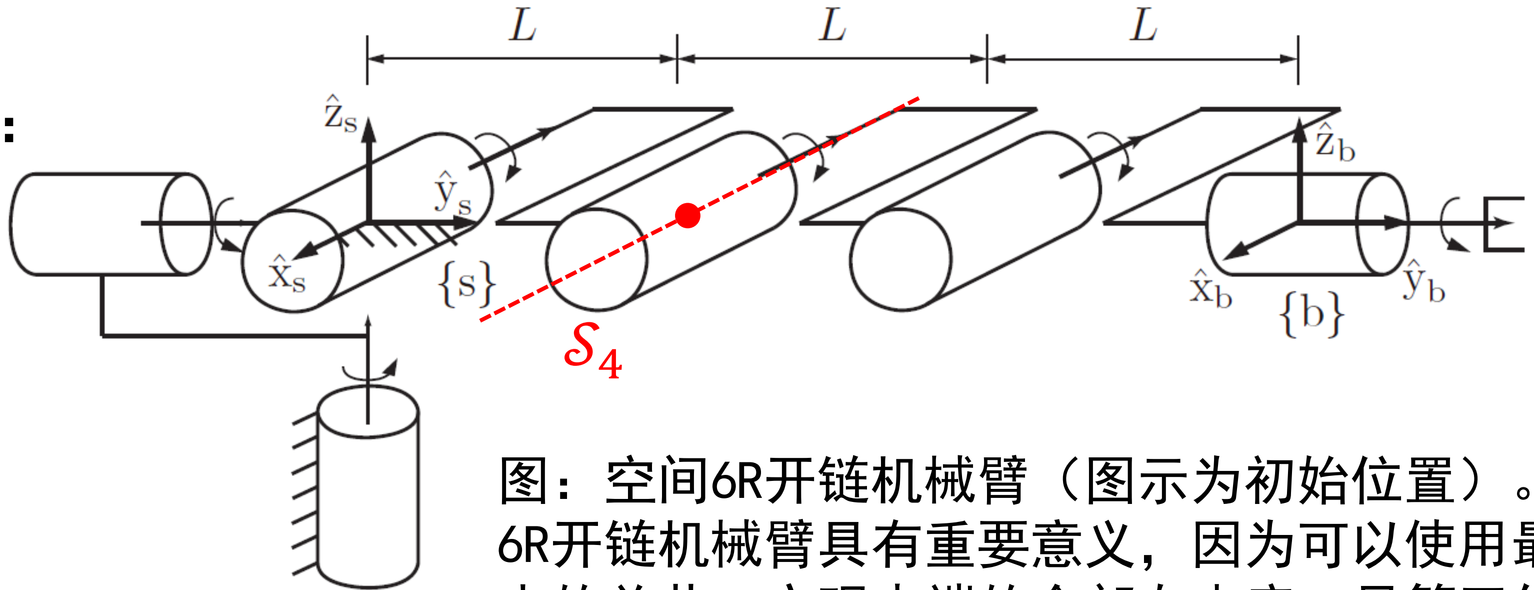
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,0)$
4		
5		
6		

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节4螺旋轴$\mathcal{S}_4 = (\omega_4, v_4)$：
  - 观察得到$\omega_4 = (-1,0,0)$
  - 选择一个关节4轴线上的点$q_4 = (0, L, 0)$
  - 因此$v_4 = -\omega_4 \times q_4 = (0,0,L)$



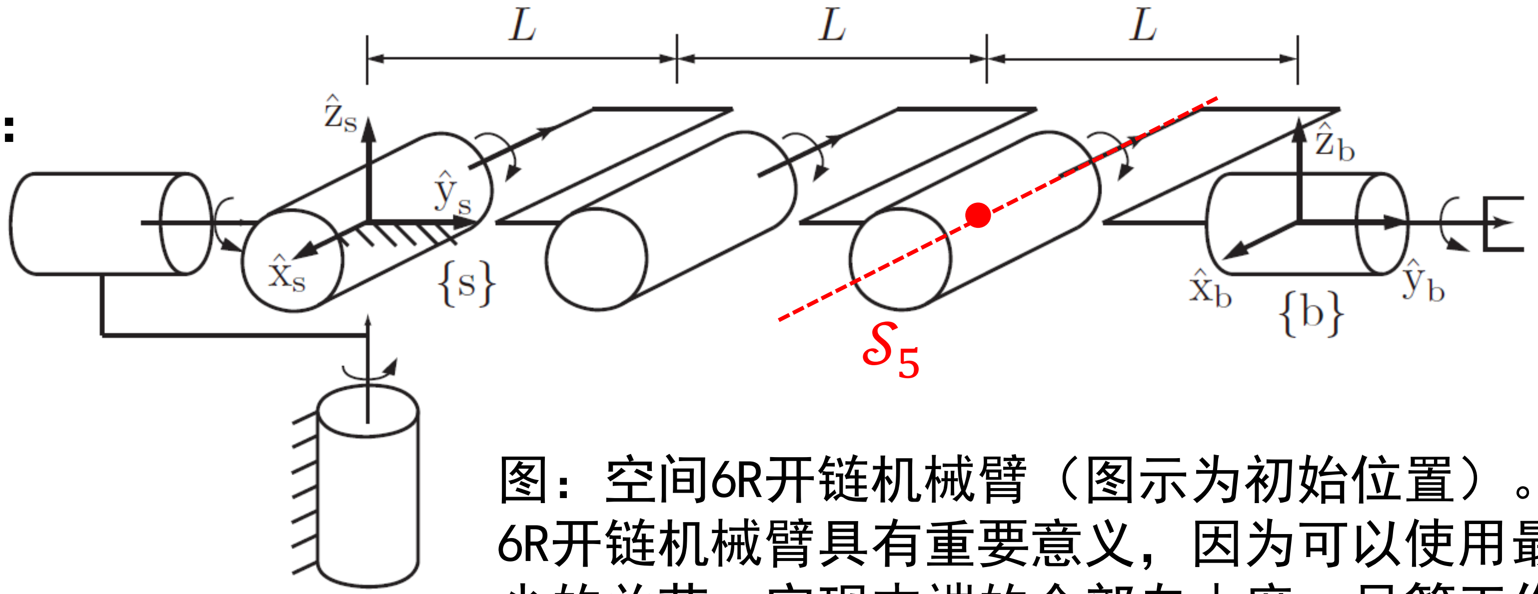
图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,0)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,L)$
5		
6		

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

- 关节5螺旋轴$\mathcal{S}_5 = (\omega_5, v_5)$：
  - 观察得到$\omega_5 = (-1,0,0)$
  - 选择一个关节5轴线上的点$q_5 = (0,2L,0)$
  - 因此$v_5 = -\omega_5 \times q_5 = (0,0,2L)$

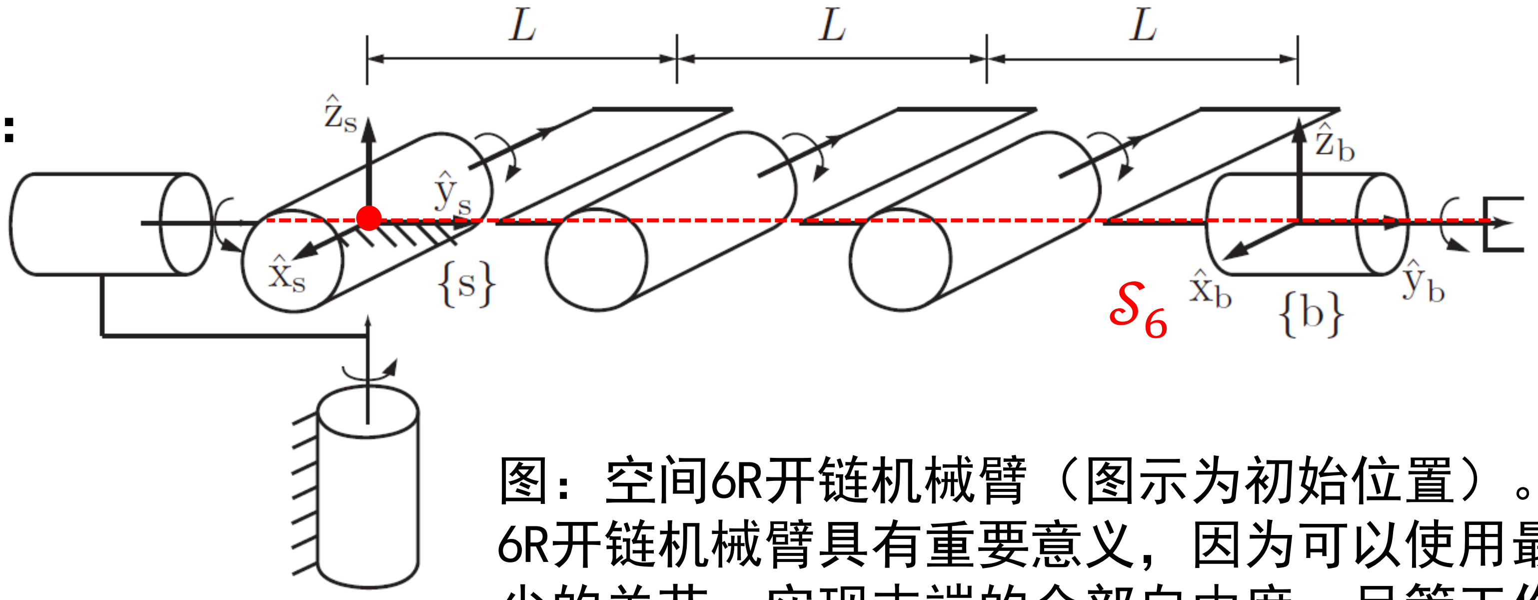
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,0)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,2L)$
6		

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节6螺旋轴$\mathcal{S}_6 = (\omega_6, v_6)$：
  - 观察得到$\omega_6 = (0,1,0)$
  - 选择一个关节6轴线上的点$q_6 = (0,0,0)$
  - 因此$v_6 = -\omega_6 \times q_6 = (0,0,0)$



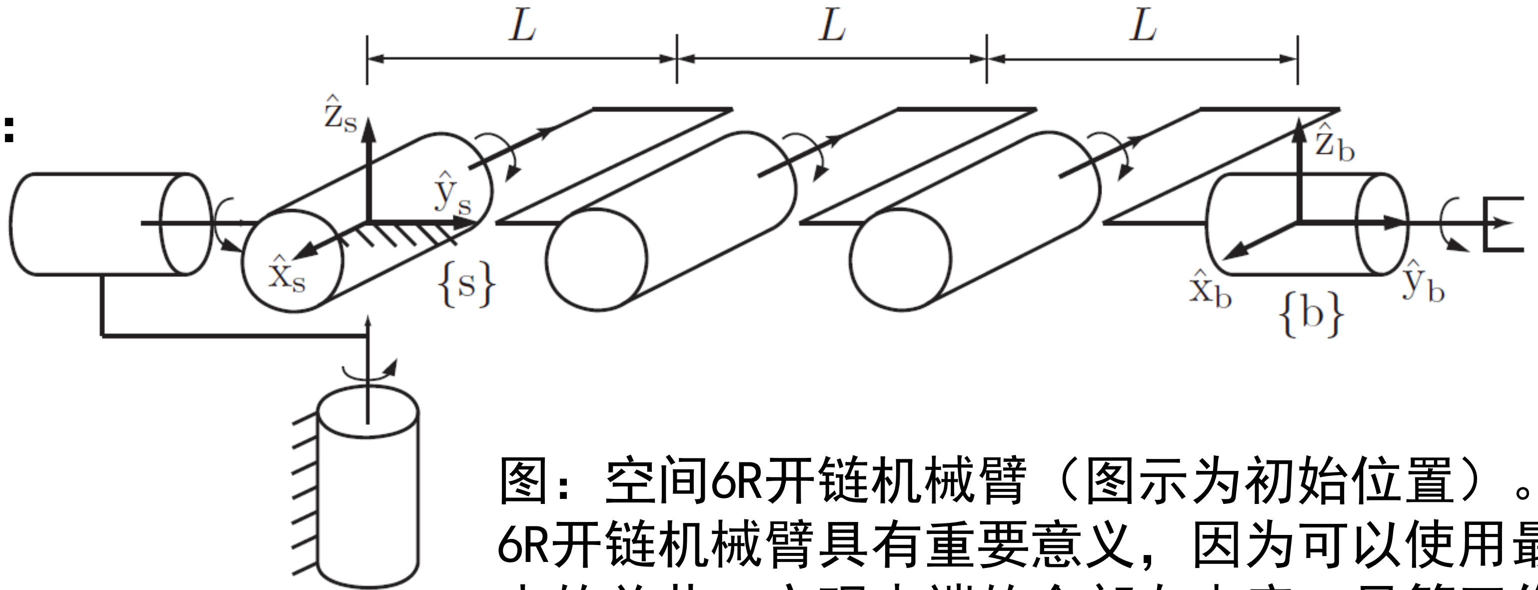
图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,0)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,2L)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

例3

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&3L\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

- 用矩阵形式表示螺旋轴：

$$[\mathcal{S}]=\begin{bmatrix}[\omega]&v\\0&0\end{bmatrix}\in se(3) \longleftarrow \mathcal{S}=\begin{bmatrix}\omega\\v\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6$$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,0)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,2L)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

- 正向运动学方程：

$$T_{06}=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}\cdots e^{[\mathcal{S}_6]\theta_6}M$$

给定机械臂6关节的转动角度θ_i，就可以算出末端的位置和姿态！

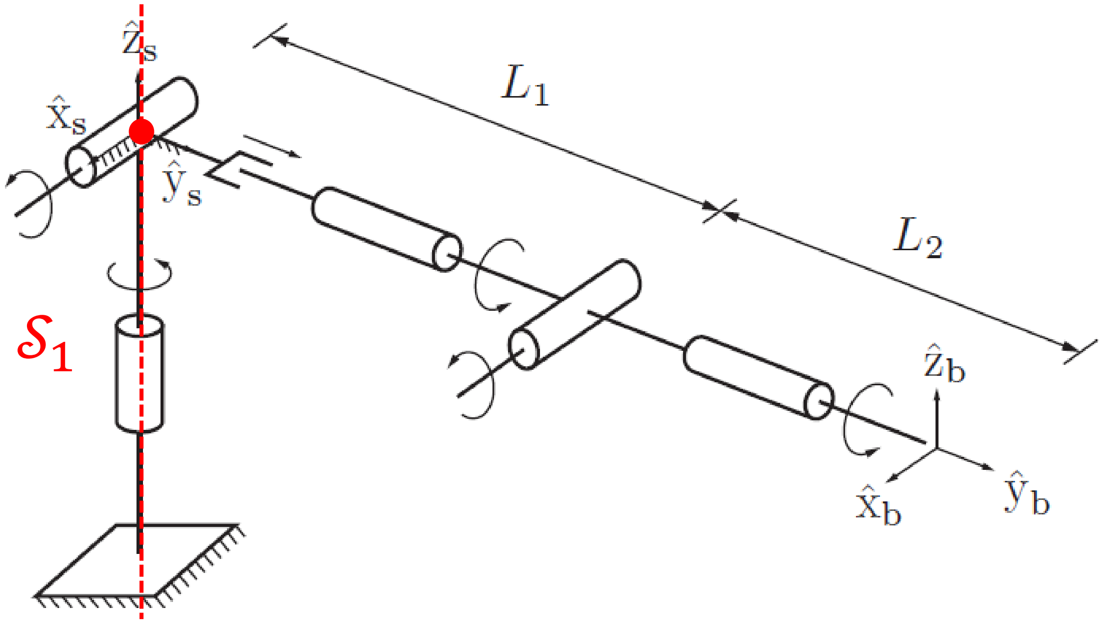
例4

M是初始时的$T_{sb}(0)$

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节1螺旋轴$\mathcal{S}_1 = (\omega_1, v_1)$：
  - $\omega_1 = (0,0,1)$
  - 选择一个关节1轴线上的点$q_1 = (0,0,0)$
  - 因此$v_1 = -\omega_1 \times q_1 = (0,0,0)$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2		
3		
4		
5		
6		

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

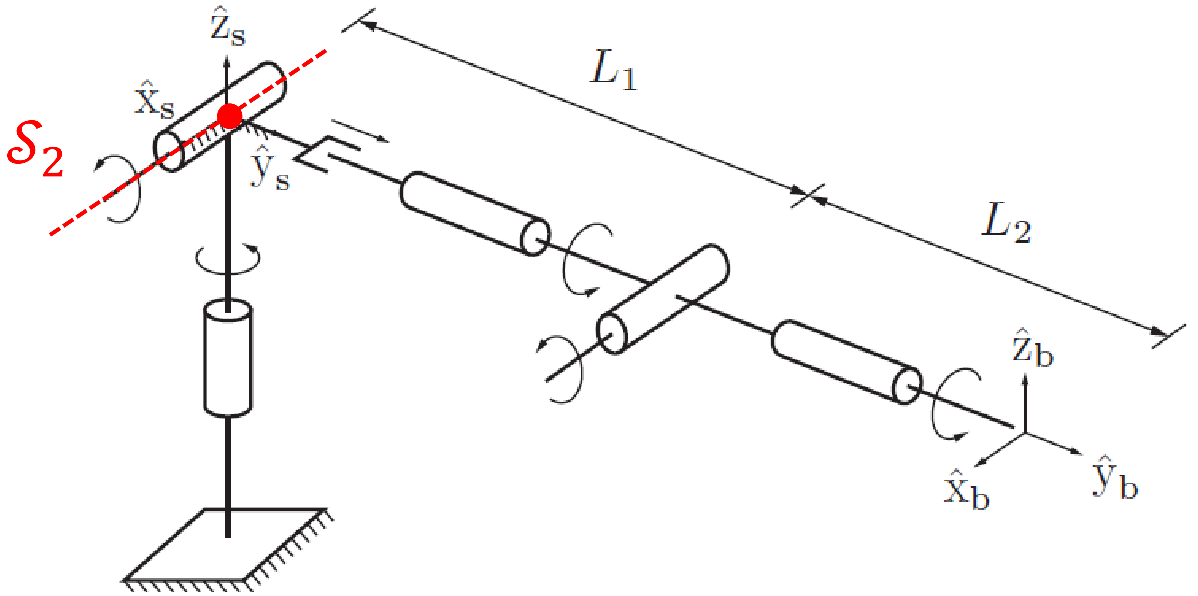
例4

➤ 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 关节2螺旋轴$\mathcal{S}_2 = (\omega_2, v_2)$：

- $\omega_2 = (1,0,0)$
- 选择一个关节2轴线上的点$q_2 = (0,0,0)$
- 因此$v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (0,0,0)$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3		
4		
5		
6		

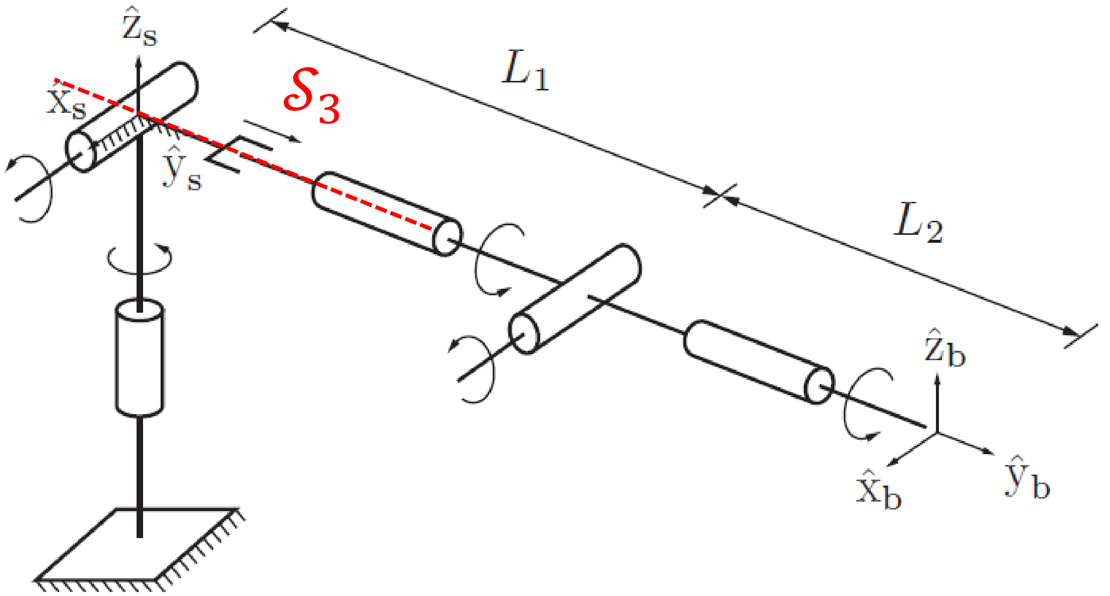
□ 例4

➢ 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 关节3螺旋轴$\mathcal{S}_3 = (\omega_3, v_3)$：

- 移动副：$\omega_3 = (0,0,0)$
- 因此v_3为沿移动方向的单位向量：$v_3 = (0,1,0)$



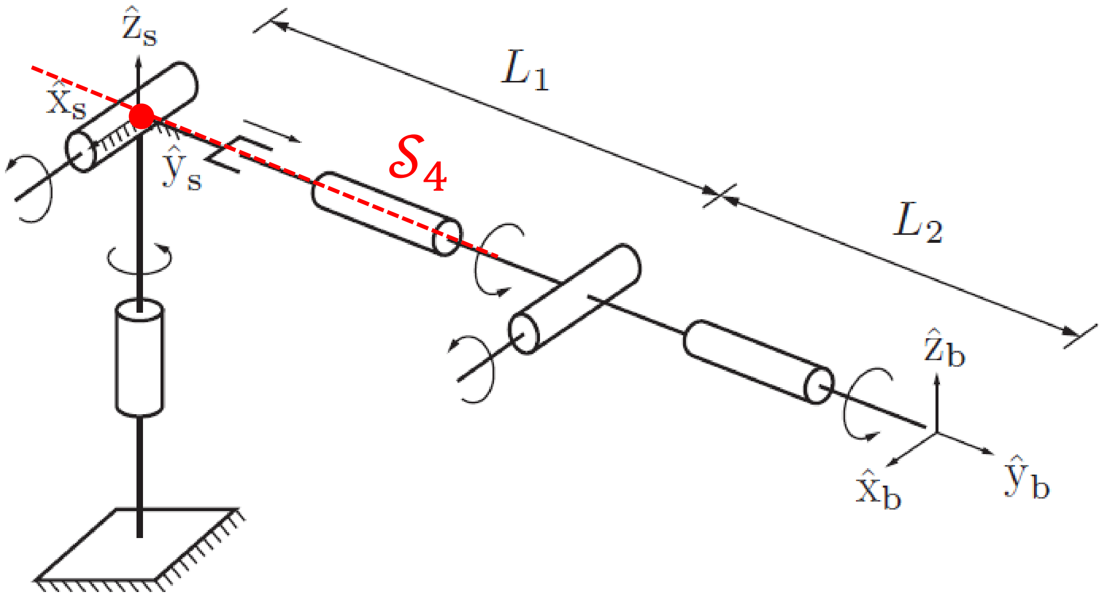
图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$
4		
5		
6		

例4

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）

- 关节4螺旋轴$\mathcal{S}_4 = (\omega_4, v_4)$：
  - $\omega_4 = (0,1,0)$
  - 选择一个关节4轴线上的点$q_4 = (0,0,0)$
  - 因此$v_4 = -\omega_4 \times q_4 = (0,0,0)$

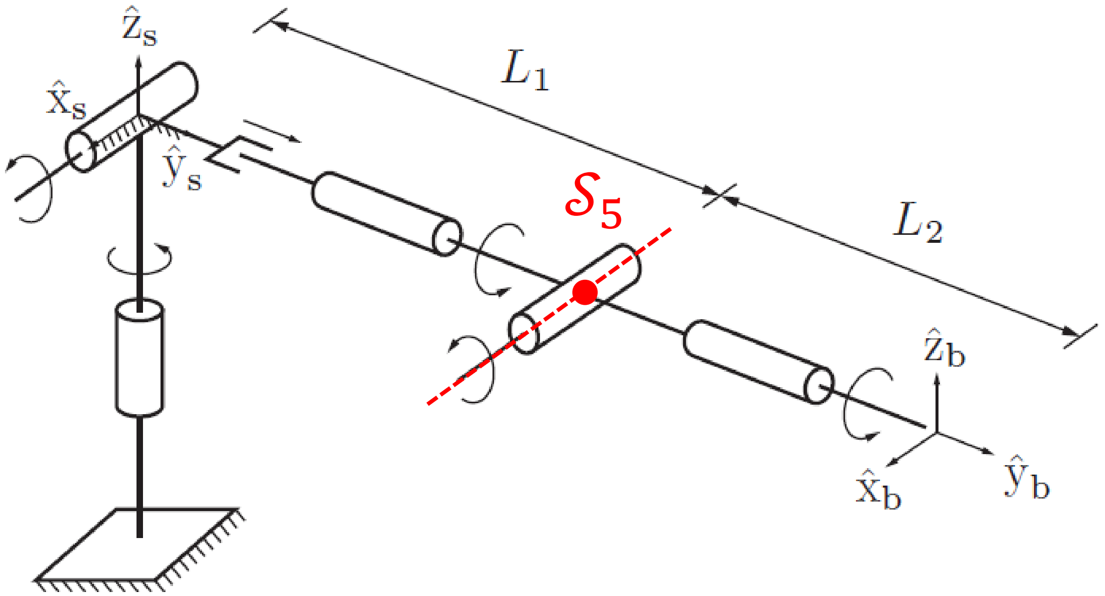
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$
4	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
5		
6		

例4

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节5螺旋轴$\mathcal{S}_5 = (\omega_5, v_5)$：
  - $\omega_5 = (1,0,0)$
  - 选择一个关节5轴线上的点$q_5 = (0, L_1, 0)$
  - 因此$v_5 = -\omega_5 \times q_5 = (0,0,-L_1)$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$
4	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
5	$(1,0,0)$	$(0,0,-L_1)$
6		

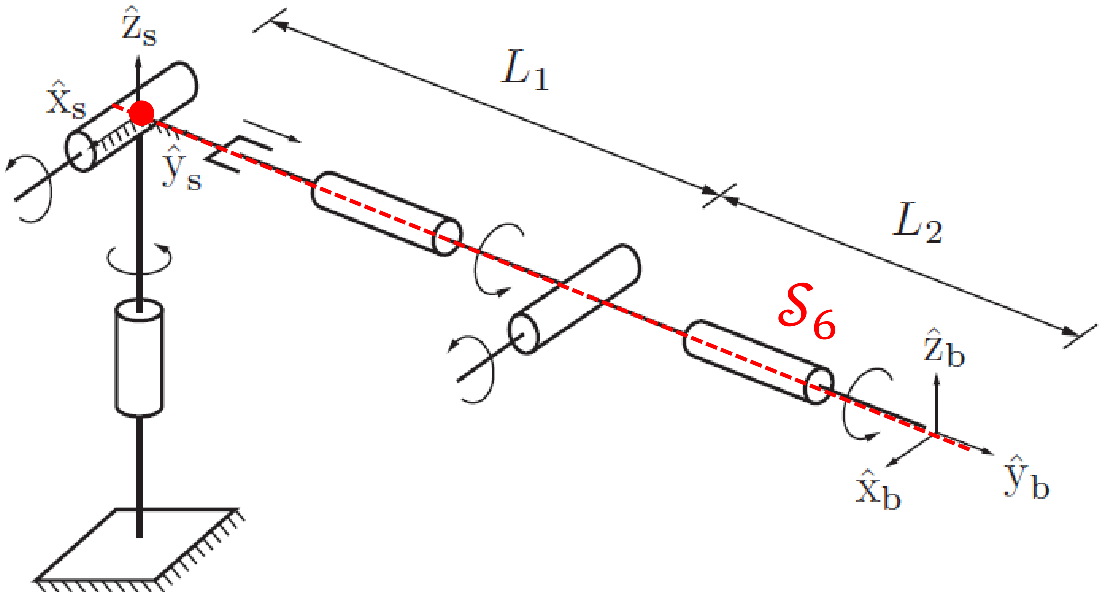
例4

➢ 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ 关节6螺旋轴$\mathcal{S}_6 = (\omega_6, v_6)$：

- $\omega_6 = (0,1,0)$
- 选择一个关节6轴线上的点$q_6 = (0,0,0)$
- 因此$v_6 = -\omega_6 \times q_6 = (0,0,0)$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）。

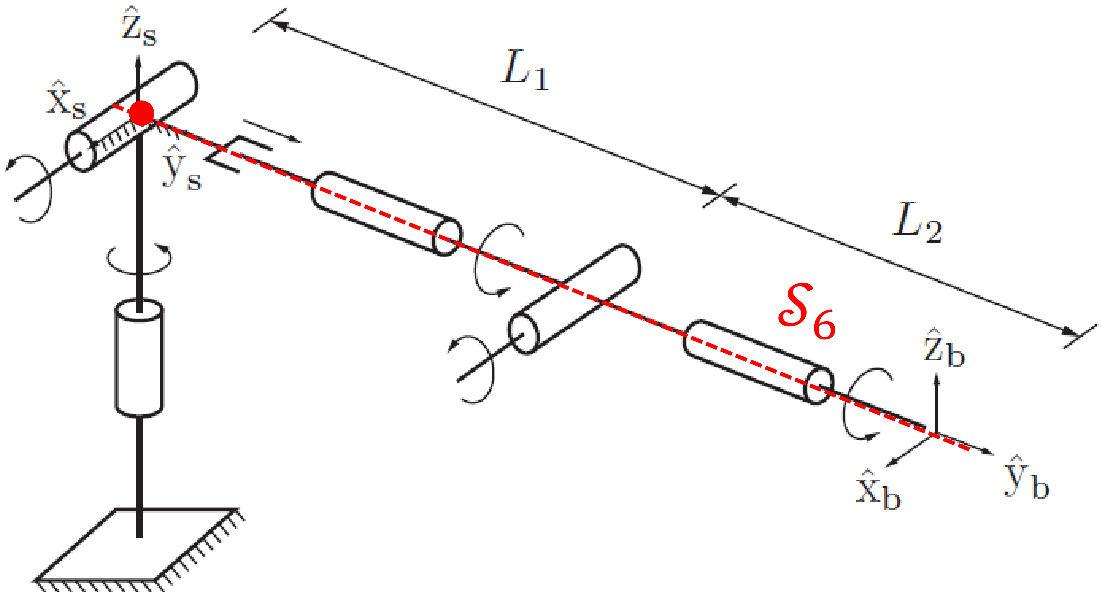
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$
4	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
5	$(1,0,0)$	$(0,0,-L_1)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

3 指数积公式：相对基坐标系

例4

- 由图观察出初始位型$M \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间RRPRRR开链机械臂（图示为初始位置）。

- 用矩阵形式表示螺旋轴：

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \longleftarrow \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

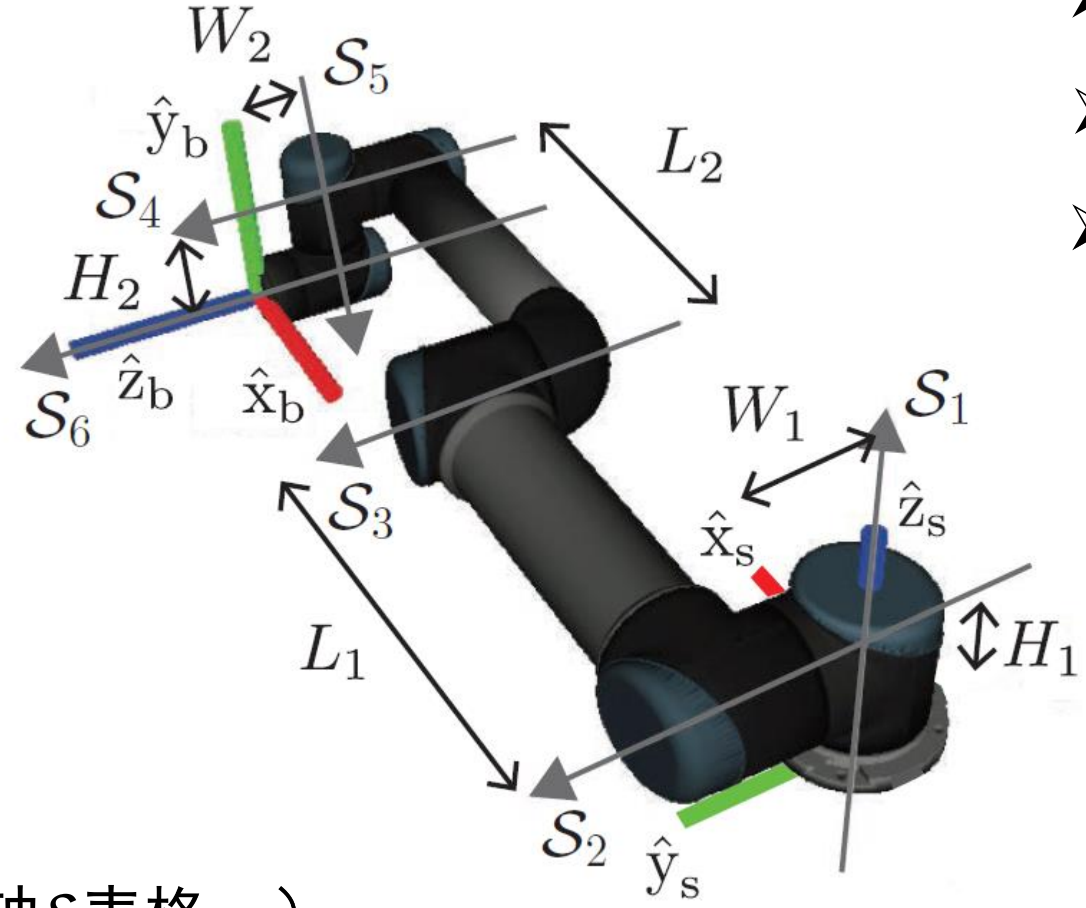
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
2	$(1,0,0)$	$(0,0,0)$
3	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$
4	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
5	$(1,0,0)$	$(0,0,-L_1)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

- 正向运动学方程：

$$T_{06} = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \cdots e^{[\mathcal{S}_6]\theta_6} M$$

含有移动副的机械臂，依然可以用统一的方程来描述正向运动学。

◻ 例5：实例

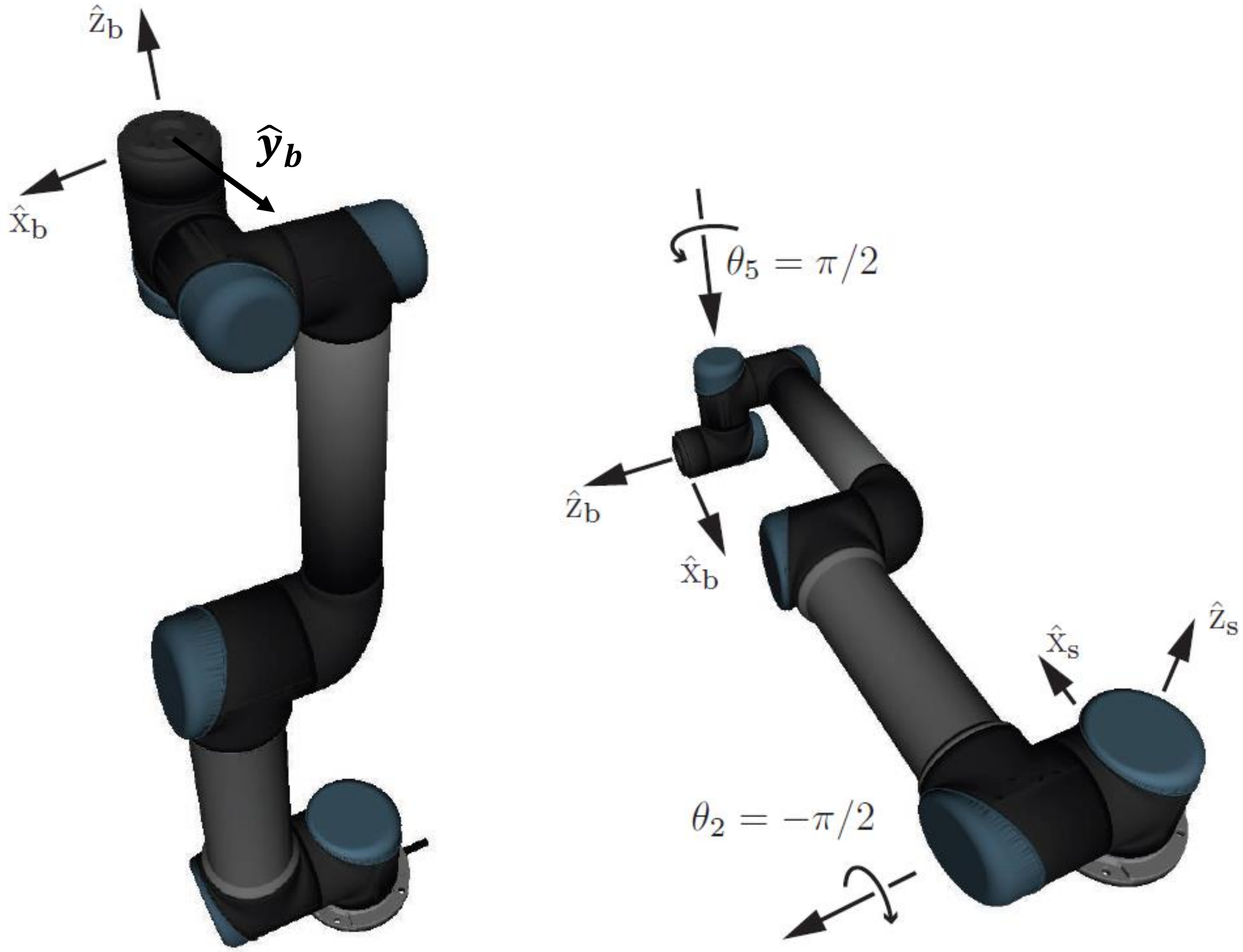


- 右图为初始位置M。
- 关节1和5轴线平行。
- 几何参数：

$$W_1 = 109mm$$
$$W_2 = 82mm$$
$$L_1 = 425mm$$
$$L_2 = 392mm$$
$$H_1 = 89mm$$
$$H_2 = 95mm$$

1. 求正向运动学（螺旋轴$\mathcal{S}$表格。）
2. 求$\theta_2 = -\pi/2$、 $\theta_5 = \pi/2$、其余为0时的末端位形T。

例5：实例



- 右图为初始位置M。
- 左图$\theta_2 = -\pi/2$、$\theta_5 = \pi/2$、其余为0时的末端位形T。
- 关节1和5轴线平行。
- 几何参数：

$$W_1 = 109mm$$
$$W_2 = 82mm$$
$$L_1 = 425mm$$
$$L_2 = 392mm$$
$$H_1 = 89mm$$
$$H_2 = 95mm$$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

回顾：第9章P51

命题

向量线性常微分方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ 的解为 $x(t)=e^{At}x_0$，式中：

$$e^{At}=I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots$$

矩阵指数（Matrix Exponential）满足如下特性：

（1）$d(e^{At})/dt=Ae^{At}=e^{At}A$

（2）若$A=PDP^{-1}$（$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$，可逆阵$P^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$），则$e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}$

（3）若$AB=BA$，则$e^Ae^B=e^{A+B}$

（4）$(e^A)^{-1}=e^{-A}$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

（2）若$A = PDP^{-1}$（$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$，可逆阵$P^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$），则$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

➢ 因此等式

$$e^{M^{-1}PM} = M^{-1}e^{P}M \xrightarrow{\text{可写作}} Me^{M^{-1}PM} = e^{P}M$$

➢ 对前述的指数积公式反复利用此：

$$\begin{aligned}
T(\theta) &= e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots \boxed{e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M} \\
&= e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots \boxed{M e^{M^{-1}[\mathcal{S}_n]M\theta_n}} \\
&= e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots M e^{M^{-1}[\mathcal{S}_{n-1}]M\theta_{n-1}} e^{M^{-1}[\mathcal{S}_n]M\theta_n} \\
&= M e^{M^{-1}[\mathcal{S}_1]M\theta_1} \cdots e^{M^{-1}[\mathcal{S}_{n-1}]M\theta_{n-1}} e^{\boxed{M^{-1}[\mathcal{S}_n]M\theta_n}} \\
&= M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{\boxed{[\mathcal{B}_n]\theta_n}},
\end{aligned}$$

将M往左移动了！

重复操作，将M移动到最左端！

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{V}' &= [\mathrm{Ad}_T]\mathcal{V} \\ [\mathcal{V}'] &= T[\mathcal{V}]T^{-1} \end{aligned}}$$

回顾：第9章P79

$$[\mathcal{B}_i] = M^{-1}[\mathcal{S}_i]M$$

$$\mathcal{B}_i = [Ad_{M^{-1}}]\mathcal{S}_i$$

➢ 这里螺旋轴$\mathcal{B}_i$全称为物体螺旋轴。

区分

回顾：第三章P38

$R_{sb'}$ =相对固定坐标系$\{s\}$绕R转动= RR_{sb}

左乘R，绕固定坐标系的轴转

$R_{sb''}$ =相对物体坐标系$\{b\}$绕R转动= $R_{sb}R$

右乘R，绕物体坐标系的轴转

- 相对基坐标系的PoE：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 相对末端坐标系的PoE：

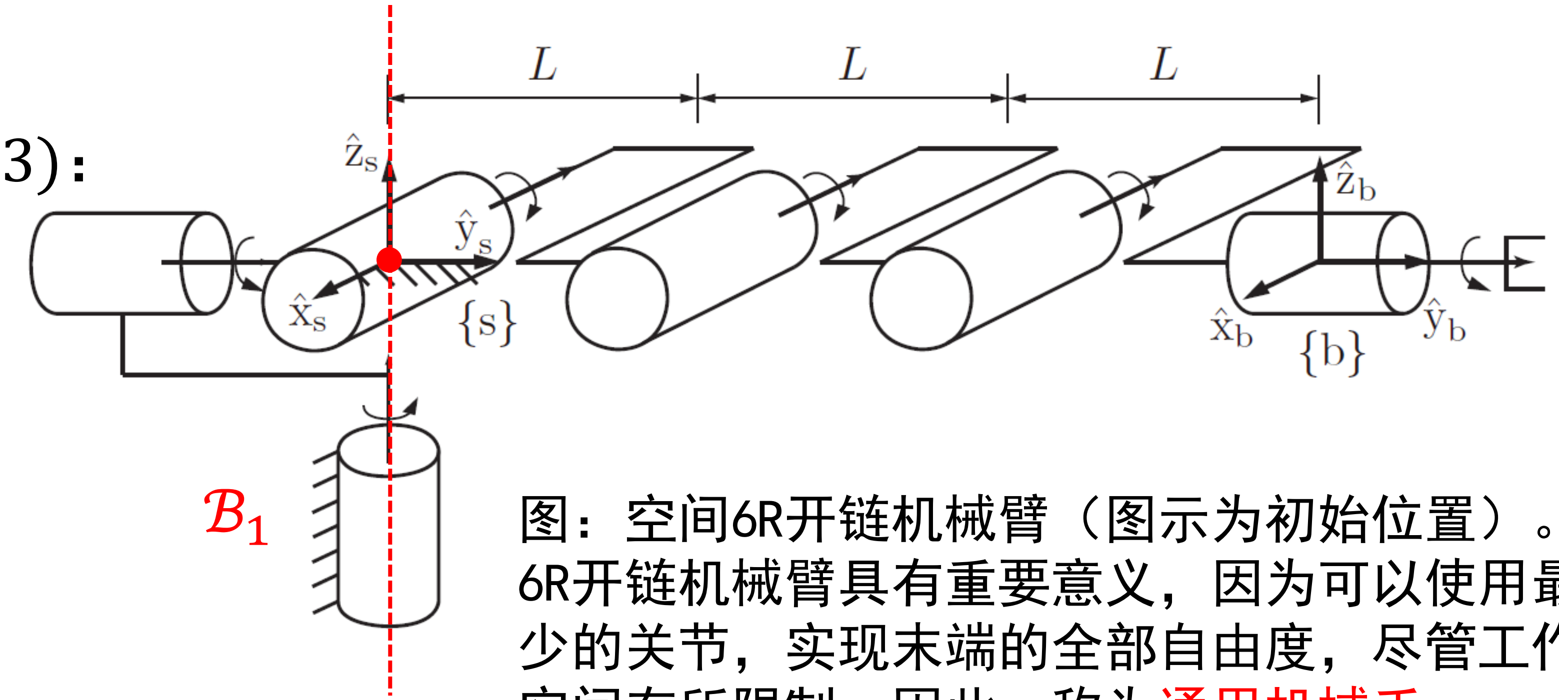
$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$$

- 内在意义：
  - 空间坐标形式中，M首先从较远端关节开始变换，逐渐到最近端。在固定坐标系变换中，更近端关节不会受到远端关节影响（如，关节2的空间螺旋轴$\mathcal{S}_i$不会受到关节3位移的影响）。
  - 物体坐标形式中，M首先从较近端关节开始变换，逐渐到最远端。在物体坐标系变换中，更远端关节不会受到近端关节影响（如，关节3的物体螺旋轴$\mathcal{B}_i$不会受到关节2的位移的影响）。

例6（例3的机械臂）

- 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

- 关节1螺旋轴$\mathcal{B}_1 = (\omega_1, v_1)$：
  - $\omega_1 = (0,0,1)$
  - 选择一个关节1轴线上的点$q_1 = (0, -3L, 0)$
  - 因此$v_1 = -\omega_1 \times q_1 = (-3L, 0,0)$

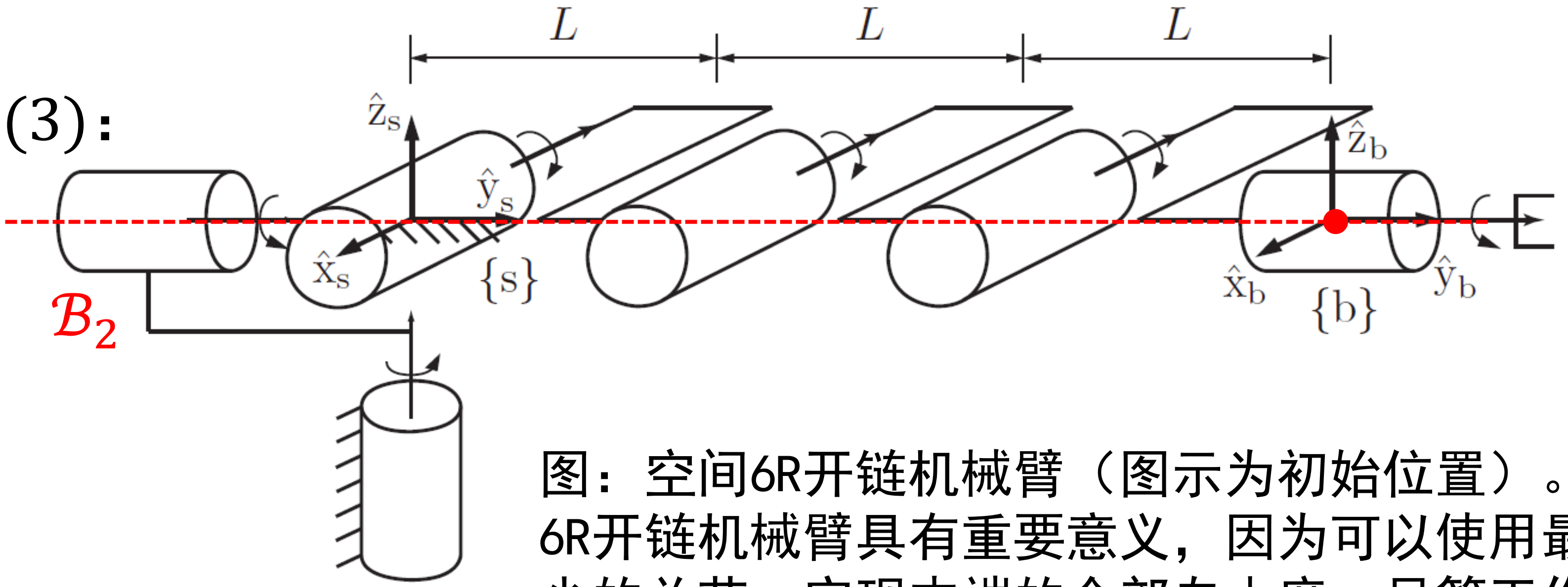
i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2		
3		
4		
5		
6		

例6（例3的机械臂）

- 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 关节2螺旋轴$\mathcal{B}_2 = (\omega_2, v_2)$：
  - $\omega_2 = (0,1,0)$
  - 选择一个关节2轴线上的点$q_2 = (0,0,0)$
  - 因此$v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (0,0,0)$



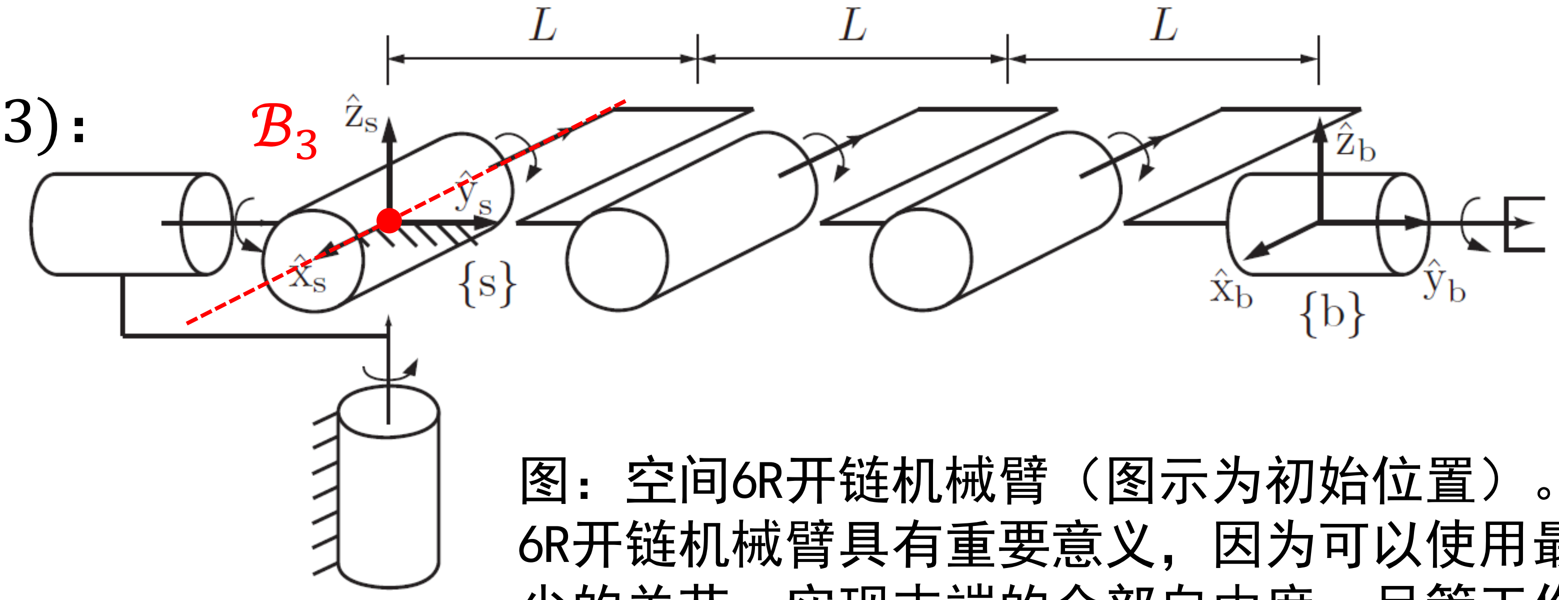
图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3		
4		
5		
6		

例6（例3的机械臂）

➢ 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

➢ 关节3螺旋轴$\mathcal{B}_3 = (\omega_3, v_3)$：

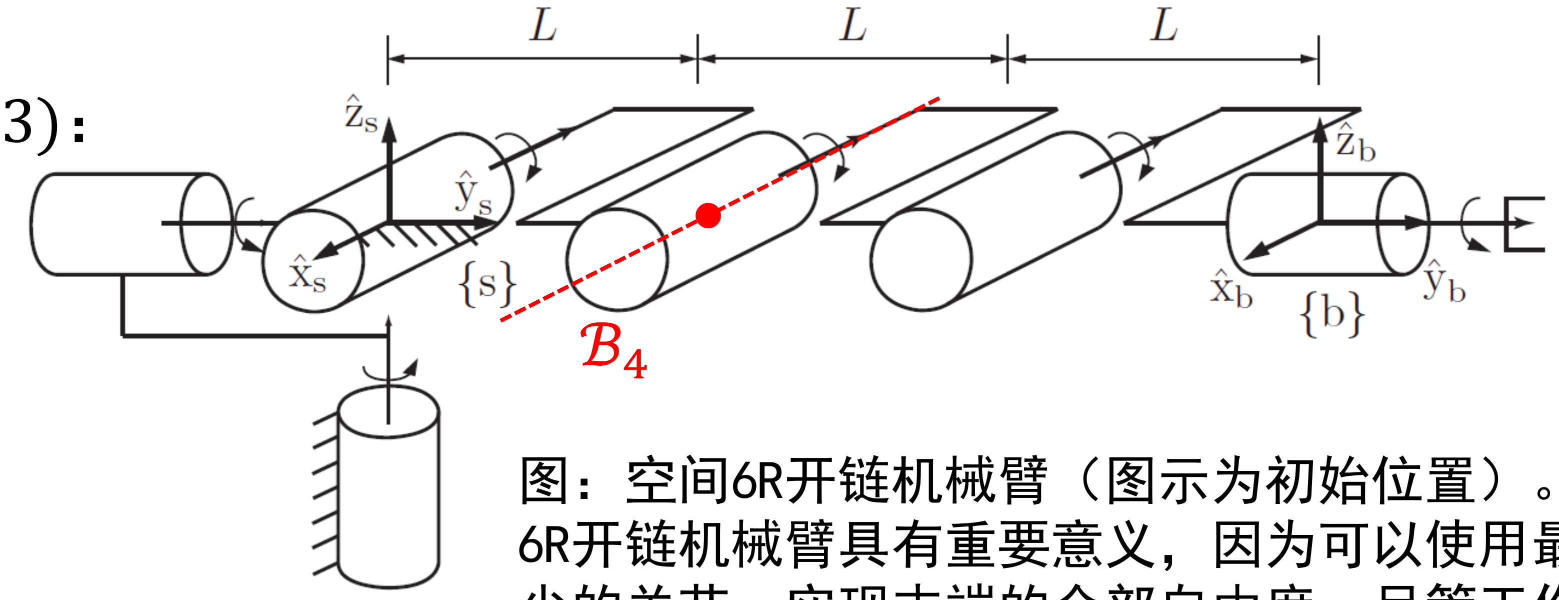
- $\omega_3 = (-1,0,0)$
- 选择一个关节3轴线上的点$q_3 = (0, -3L, 0)$
- 因此$v_3 = -\omega_3 \times q_3 = (0,0,-3L)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,-3L)$
4		
5		
6		

例6（例3的机械臂）

- 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

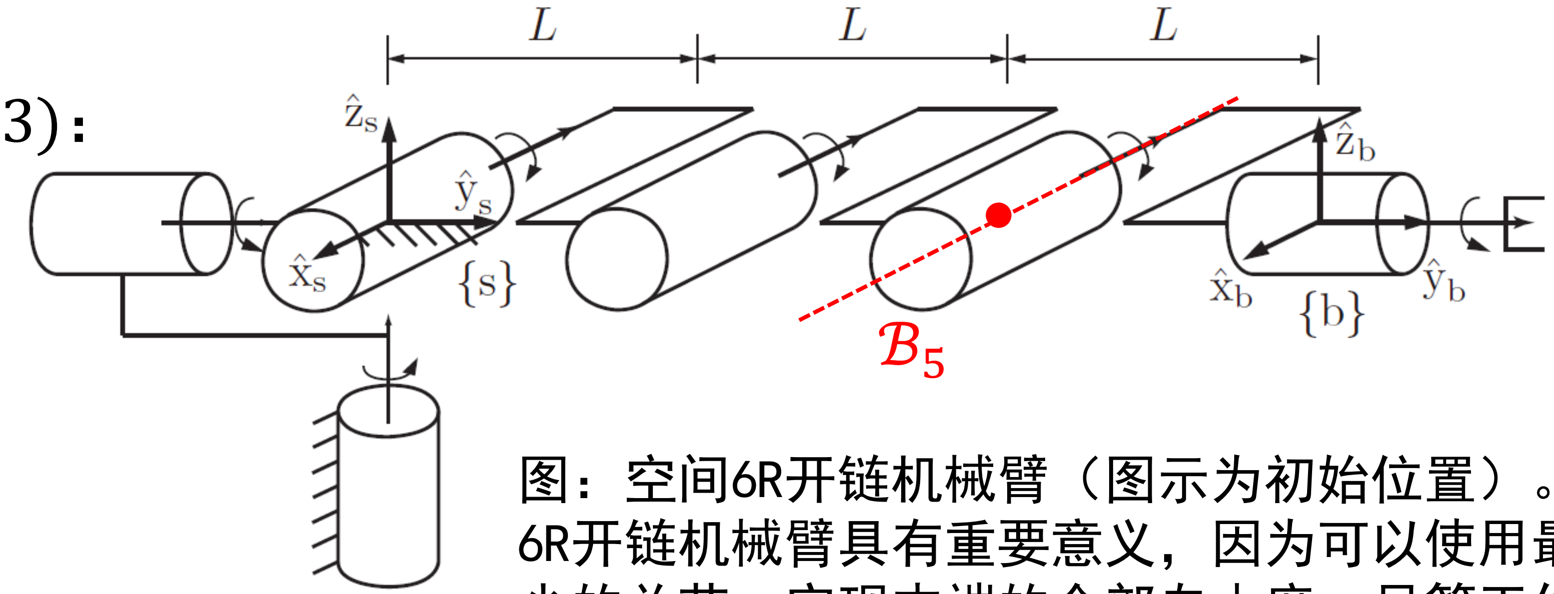
- 关节4螺旋轴$\mathcal{B}_4 = (\omega_4, v_4)$：
  - $\omega_4 = (-1,0,0)$
  - 选择一个关节4轴线上的点$q_4 = (0, -2L, 0)$
  - 因此$v_4 = -\omega_4 \times q_4 = (0,0,-2L)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,-3L)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,-2L)$
5		
6		

例6（例3的机械臂）

➢ 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

➢ 关节5螺旋轴$\mathcal{B}_5 = (\omega_5, v_5)$：

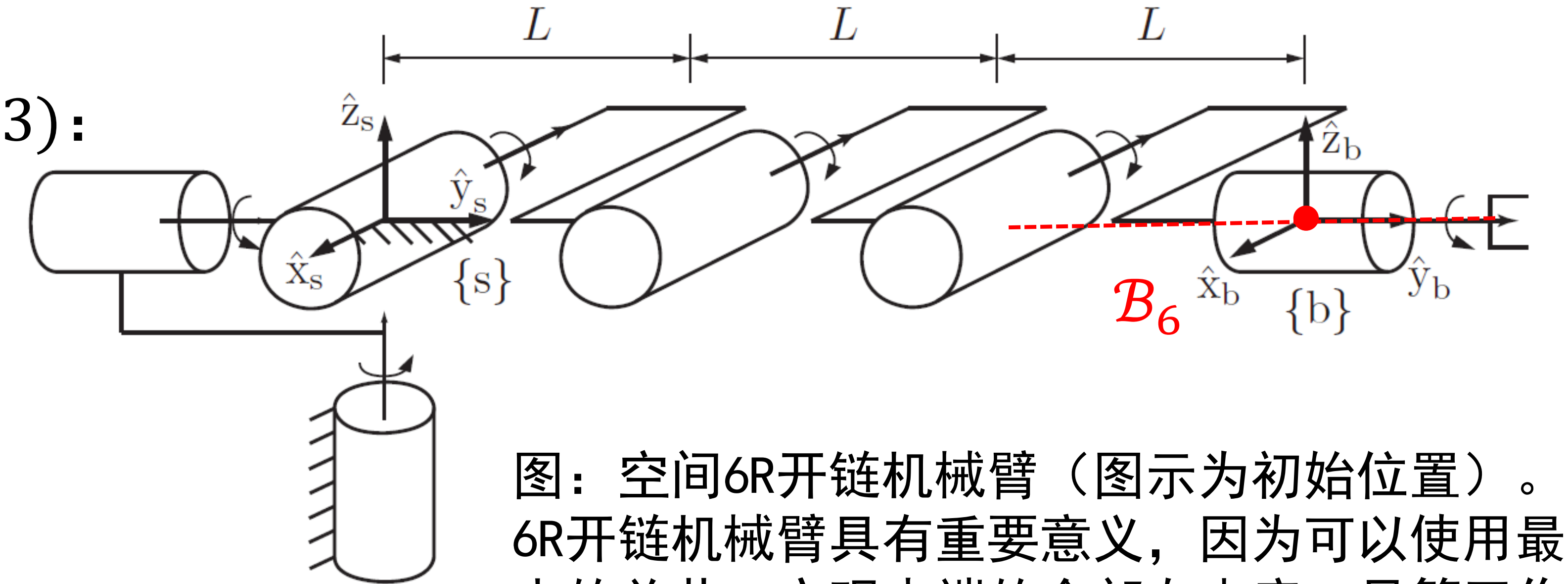
- $\omega_5 = (-1,0,0)$
- 选择一个关节5轴线上的点$q_5 = (0, -L, 0)$
- 因此$v_5 = -\omega_5 \times q_5 = (0,0,-L)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,-3L)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,-2L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,-L)$
6		

例6（例3的机械臂）

➢ 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

➢ 关节6螺旋轴$\mathcal{B}_6 = (\omega_6, v_6)$：

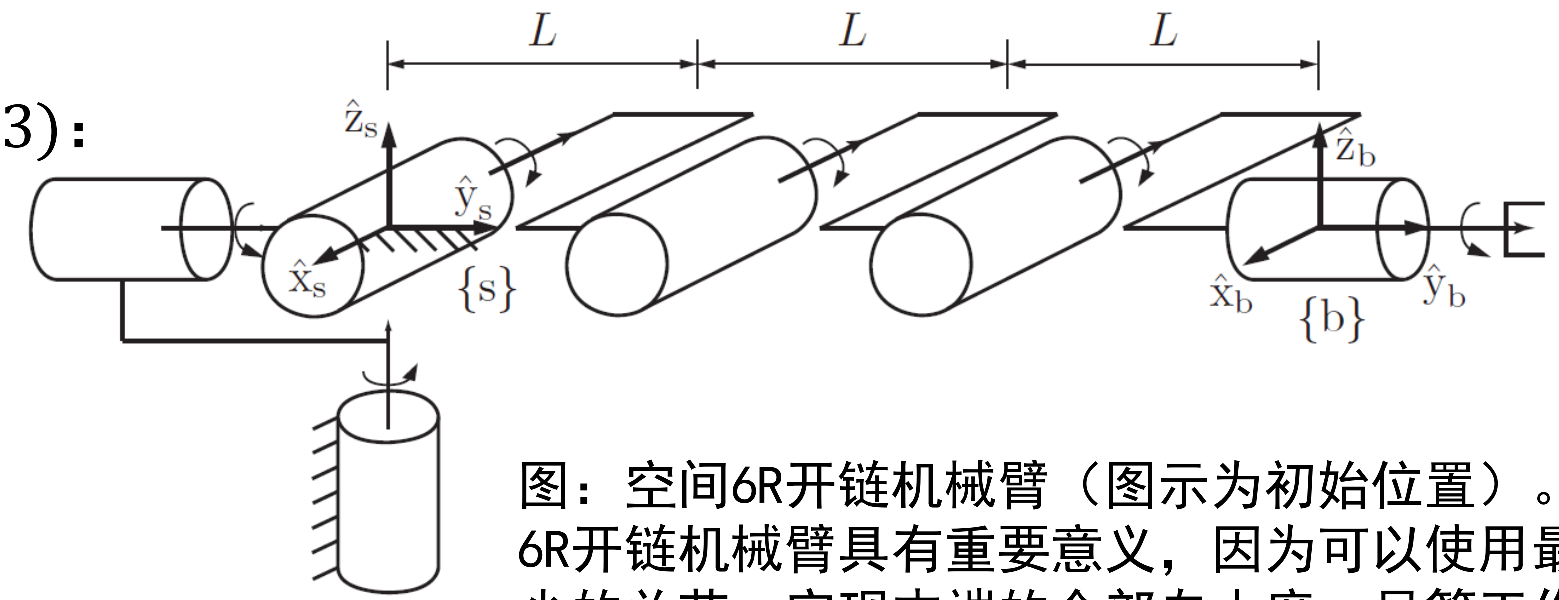
- $\omega_6 = (0,1,0)$
- 选择一个关节6轴线上的点$q_6 = (0,0,0)$
- 因此$v_6 = -\omega_6 \times q_6 = (0,0,0)$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,-3L)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,-2L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,-L)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

例6（例3的机械臂）

➢ 由图观察出初始位型$M_{sb} \in SE(3)$：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



图：空间6R开链机械臂（图示为初始位置）。6R开链机械臂具有重要意义，因为可以使用最少的关节，实现末端的全部自由度，尽管工作空间有所限制。因此，称为通用机械手。

➢ 用矩阵形式表示螺旋轴：

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \longleftarrow \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

i	ω_i	v_i
1	$(0,0,1)$	$(-3L,0,0)$
2	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
3	$(-1,0,0)$	$(0,0,-3L)$
4	$(-1,0,0)$	$(0,0,-2L)$
5	$(-1,0,0)$	$(0,0,-L)$
6	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$

➢ 正向运动学方程：

$$T(\theta) = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} \cdots e^{[\mathcal{B}_6]\theta_6}$$

给定机械臂6关节的转动角度θ_i，就可以算出末端的位置和姿态！

5 知识点小结

知识内容：

- 机器人正向运动学的物理意义：给定关节转角，求解末端坐标系的位置及姿态（位形）。
- 机器人正向运动学的数学本质：利用旋量坐标，求解转动引起的刚体运动，并用SE(3)矩阵表示。

方法内容：

- 基于基坐标系$\{S\}$系的螺旋轴$\mathcal{S}_i$的求解，基坐标系的指数积公式：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \ldots e^{[\mathcal{S}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

- 基于末端坐标系$\{B\}$系的螺旋轴$\mathcal{B}_i$的求解，末端坐标系的指数积公式：

$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \ldots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$$

- 利用指数积公式，分析各类机器人的正向运动学。

附录代码

- T = FKinBody(M, Blist, thetalist)

  给定末端的初始位形M，末端坐标系下的关节旋量Blist，关节角度thetalist，计算末端坐标系位形T。

FKinBody.m

```
function T = FKinBody(M, Blist, thetalist)
T = M;
for i = 1: size(thetalist)
    T = T * MatrixExp6(VecTose3(Blist(:, i) * thetalist(i)));
end
end
```

- T = FKinSpace(M, Slist, thetalist)

  给定末端的初始位形M，空间坐标系下的关节旋量Slist，关节角度thetalist，计算空间坐标系位形T。

FKinSpace.m*

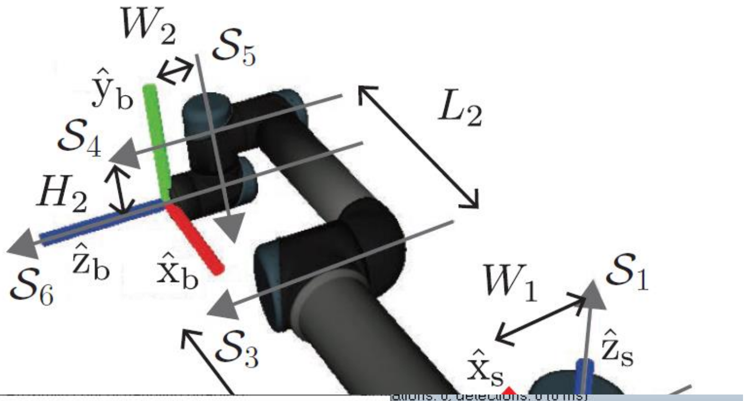
```
function T = FKinSpace(M, Slist, thetalist)
T = M;
for i = size(thetalist): -1: 1
    T = MatrixExp6(VecTose3(Slist(:, i) * thetalist(i))) * T;
end
end
```

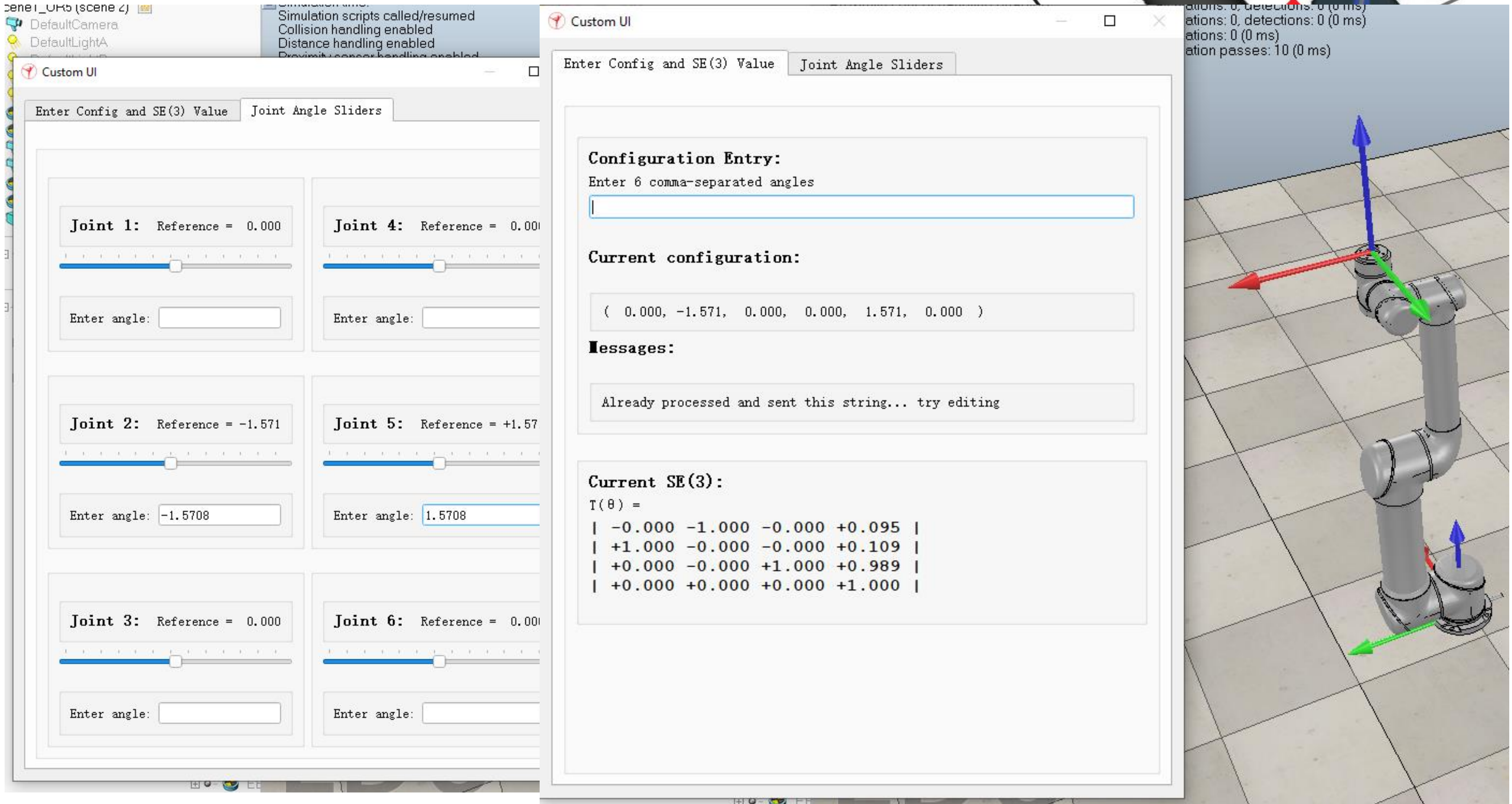
➤ 正向运动学：$T(\Theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{S}_6]\theta_6} M$

```matlab
clear; clc;
% Parameters for UR5 robot
W1 = 109e-3;  W2 = 82e-3;
L1 = 425e-3;  L2 = 392e-3;
H1 = 89e-3;   H2 = 95e-3; % [mm]
% Space screw axes
S = [0 0 0 0 0 0;
     0 1 1 1 0 1;
     1 0 0 0 -1 0;
     0 -H1 -H1 -H1 -W1 H2-H1;
     0 0 0 0 L1+L2 0;
     0 0 L1 L1+L2 0 L1+L2];
% Body screw axes if you want them
B = [0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 0 -1 0;
     0 1 1 1 0 1;
     W1+W2 H2 H2 H2 -W2 0;
     0 -L1-L2 -L2 0 0 0;
     L1+L2 0 0 0 0 0];
% initial configuration
M = [-1 0 0 L1+L2;
     0 0 1 W1+W2;
     0 1 0 H1-H2;
     0 0 0 1];
% desired configuration for later use (IK)
Tsd = [0 1 0 -0.5;
       0 0 -1 0.1;
      -1 0 0 0.1;
       0 0 0 1];
% joint angles
thetalist =[0; -pi/2; 0; 0; pi/5; 0];
% forward kinematics
T = FKinSpace(M, S, thetalist)
```

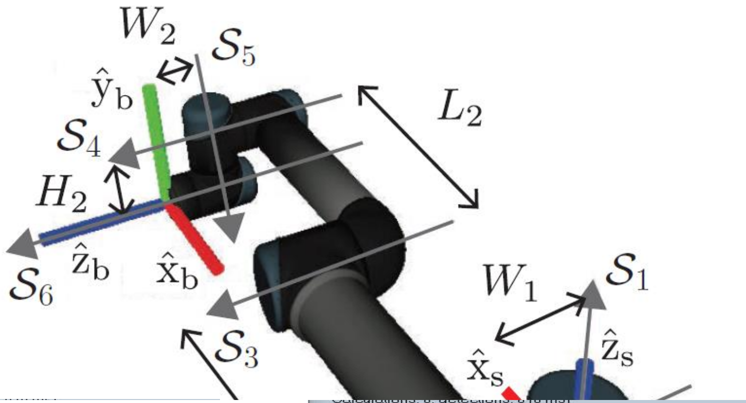
```
T =

   -0.0000   -1.0000    0.0000    0.0950
    0.5878         0    0.8090    0.1753
   -0.8090    0.0000    0.5878    0.9542
         0         0         0    1.0000
```





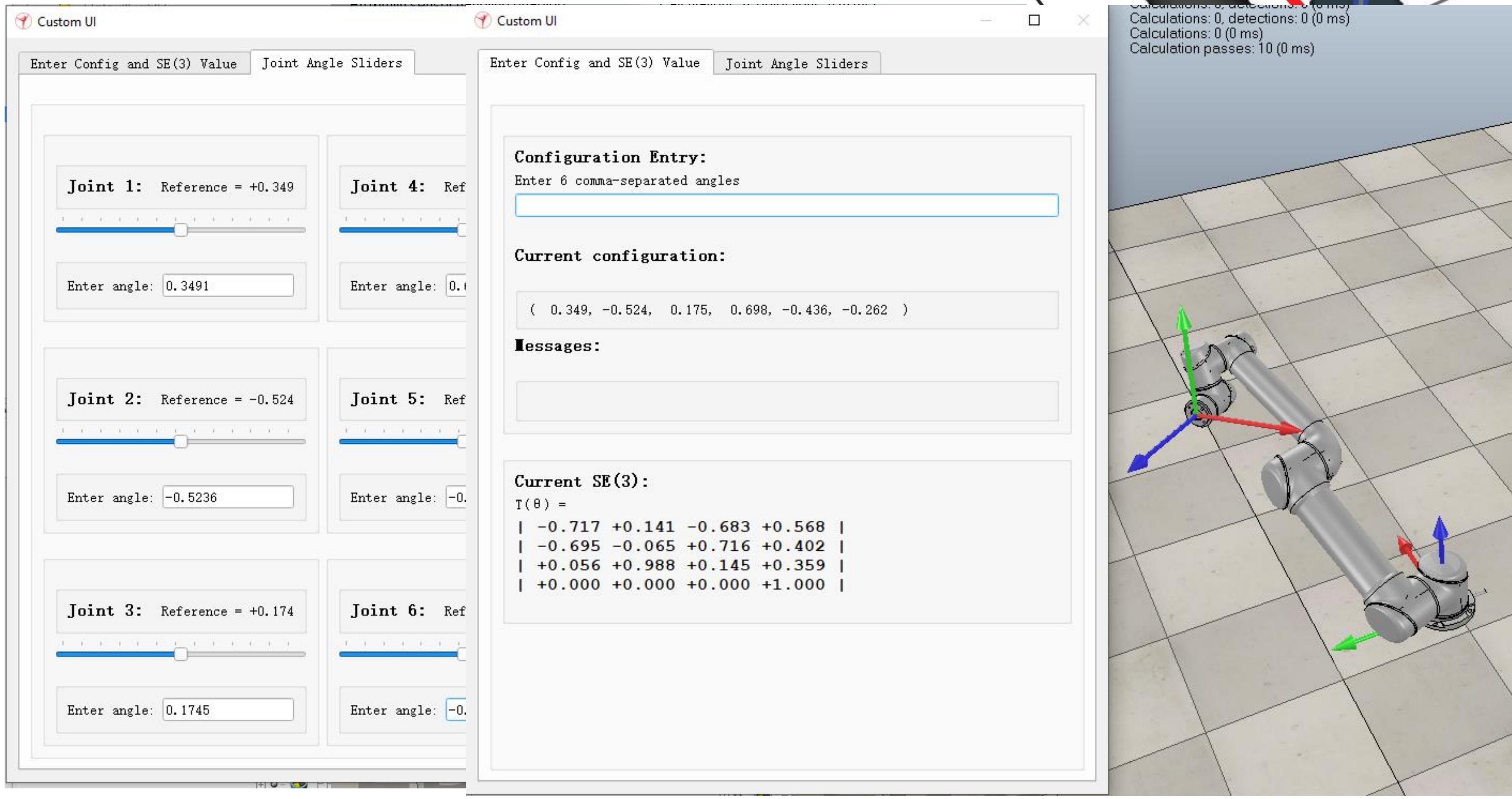
➢ 正向运动学：$T(\Theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}\ldots e^{[\mathcal{S}_6]\theta_6}M$




```
clear; clc;
% Parameters for UR5 robot
W1 = 109e-3;  W2 = 82e-3;
L1 = 425e-3;  L2 = 392e-3;
H1 = 89e-3;   H2 = 95e-3; % [mm]
% Space screw axes
S = [0 0 0 0 0 0;
     0 1 1 1 0 1;
     1 0 0 0 -1 0;
     0 -H1 -H1 -H1 -W1 H2-H1;
     0 0 0 0 L1+L2 0;
     0 0 L1 L1+L2 0 L1+L2];
% Body screw axes if you want them
B = [0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 0 -1 0;
     0 1 1 1 0 1;
     W1+W2 H2 H2 H2 -W2 0;
     0 -L1-L2 -L2 0 0 0;
     L1+L2 0 0 0 0 0];
% initial configuration
M = [-1 0 0 L1+L2;
     0 0 1 W1+W2;
     0 1 0 H1-H2;
     0 0 0 1];
% desired configuration for later use (IK)
Tsd = [0 1 0 -0.5;
       0 0 -1 0.1;
      -1 0 0 0.1;
       0 0 0 1];
% joint angles
thetalist =[20; -30; 10; 40; -25; -15]*pi/180;
% forward kinematics
T = FKinSpace(M, S, thetalist)
```

```
T =

   -0.7166    0.1407   -0.6832    0.5682
   -0.6952   -0.0652    0.7158    0.4019
    0.0562    0.9879    0.1445    0.3582
         0         0         0    1.0000
```



THANKS

谢谢大家

李孟棠 助理教授
智能工程学院

Mail： limt29@mail.sysu.edu.cn
Cell： 13048062488
Web： mengtangli.github.io