第八讲 事件独立性

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

例1：有10件产品，其中8件为正品，2件次品.从中取2次,每次取1件.

（1）采用不放回抽样,（2）采用放回抽样.

设A_i={第i次取到正品}, i=1,2.比较$P(A_2|A_1)$与$P(A_2)$.

不放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\frac{7}{9}\neq P(A_2)=\frac{8}{10}$

放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}=P(A_2)$

因此，放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率不影响.

$$\mathbf{P}(A_2|A_1)=P(A_2)\Rightarrow P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$

还可以得到 $P(A_1|A_2)=\dfrac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)}=P(A_1)$

即A_2的发生对A_1的发生概率也不影响.

这就是事件A_1与A_2相互独立.

定义:设A, B是两随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称A, B**相互独立**.

之所以用上述方式定义，

一是因为A与B事件本身具有对称性，

二是不需要条件概率存在的条件(概率大于0)，即事件的概率可以为0.

注：(1) 零概率事件与任何事件独立

若 $P(B) = 0$,

则 $P(A)P(B) = 0$;

由 $0 \le P(AB) \le P(B) = 0$, 得 $P(AB) = 0$

故 $P(AB) = P(A)P(B)$.

(2)当 $P(A)P(B) \neq 0$，且相互独立时，

$P(A) = P(A|B)$

$P(B) = P(B|A)$

$P(AB) = P(A)P(B)$

若$P(A)>0, P(B)>0$,

则$\mathrm{P(AB)=P(A)P(B)}$等价于 $P(B|A)=P(B)$

也等价于 $P(A|B)=P(A)$

直观来看，若A与B相互独立，则不论A是否发生，都不能提供B是否发生的信息,反之也是.这就有下面的性质：

$$A,B\text{相互独立} \Leftrightarrow \overline{A},B\text{相互独立}$$

$$\Leftrightarrow A,\overline{B}\text{相互独立} \Leftrightarrow \overline{A},\overline{B}\text{相互独立}.$$

证明：仅证明当$P(AB)=P(A)P(B)$时，$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$, 其他的证明类似.

$\because$ 当$P(AB)=P(A)P(B)$时

$$P(A\overline{B}) = P(A-AB)$$

$$=P(A)-P(AB)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$$

定义： 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件， 若对$2 \le k \le n$,均有：

$$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立.

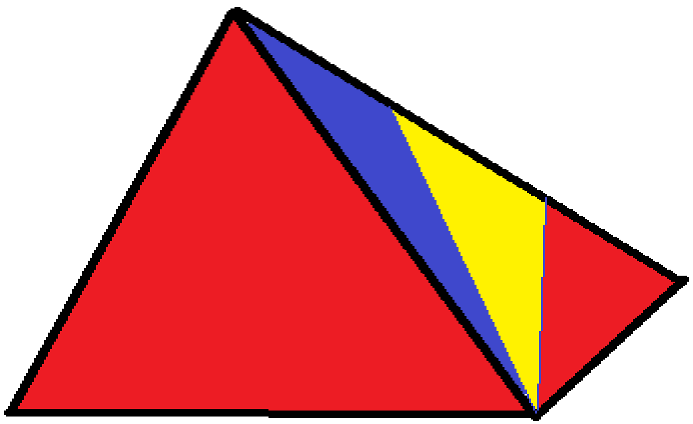
特别地，对于事件A,B,C,相互独立的定义为：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{array}\right\}\text{两两独立}\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{array}\right\}\text{相互独立}$$

两 两 独 立 $\Rightarrow$ 相 互 独 立 ？

不可以

例2:有一个正四面体,现在给一面漆上红色,一面漆上黄色,一面漆上蓝色,还有一面漆上红黄蓝三色.现在任取一面.



令A = "这面含红色",
B = "这面含黄色",
C = "这面含蓝色".

问: A,B,C 是否两两独立?
是否相互独立?

解：对这四面分别标号为 1,2,3,4.

则 $S=\{1,2,3,4\}$， $A=\{1,4\}, B=\{2,4\}, C=\{3,4\}$

$AB=AC=BC=ABC=\{4\}$

$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2$

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=1/4.$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C),$

$P(BC)=P(B)P(C)$ 两两独立

$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$ 不是相互独立.

实际问题中,常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由**实际情形**来判断其独立性.

一旦确定事件是**相互独立的**，在计算概率时，尽可能转化为事件的**乘积进行计算**.

推广定理：设事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则把其中任意 m $(1 \le m \le n)$个事件相应地换成它们的对立事件，所得的 m 个事件仍然相互独立。

(经典问题)

1)将一颗骰子掷4次，至少出现一次“6”点为胜。

2)将两颗骰子掷24次，至少出现一个双“6”点为胜。 问两种方法获胜机会是否相同?

解：设A={1颗骰子掷4次至少出现一个“6”点}；

A_i={1颗骰子第i次掷出“6”点}, i=1, 2, 3, 4;

则 $A=\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ 且A_1，A_2，A_3，A_4相互独立；

从而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-(\frac{5}{6})^4=0.51775$$

设B={2颗骰子掷24次至少出现一个双“6”点};

B_i={2颗骰子第i次掷出双“6”点}, i=1, ···, 24;

则 $B=\bigcup_{i=1}^{24} B_i$ 且B_1, ···, B_{24}相互独立;

从而

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\bigcap_{i=1}^{24}\overline{B})$$

$$=1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(\overline{B_3})\cdots P(\overline{B_4})$$

$$=1-(\frac{35}{36})^{24}=0.49140$$

结论：方法(1)的获胜可能性较大.

注: 事件的相互独立与事件的互斥的区别

1) 不同的概念，不要混淆

若 $P(A)>0, P(B)>0,$

“事件A与事件B相互独立”和“事件A与事件B互斥”表示不同的事情。

2) 二者有不同的作用

若当事件 A_1，A_2，…，A_n两两互斥时，有

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

若当事件 A_1，A_2，…，A_n相互独立时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

例3: $P(A)=0.5, P(B)=0.4$,求下列情况下$P(A\cup B)$.

(1)A与B独立, (2)A与B不相容,

(3)$A\supset B$, (4) $P(AB)=0.3$.

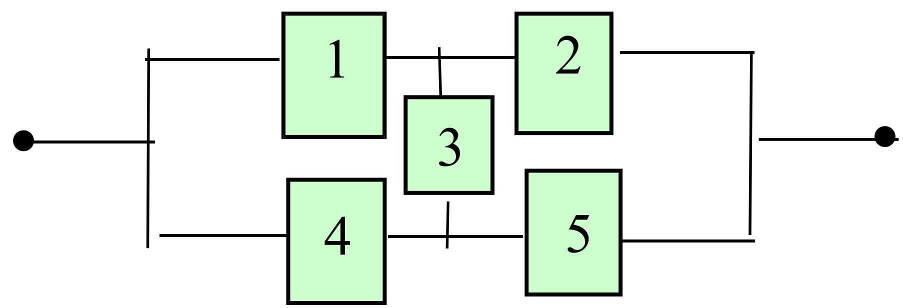
解:(1)$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=0.7$,

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$,

(3)$P(A\cup B)=P(A)=0.5$,

(4)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$.

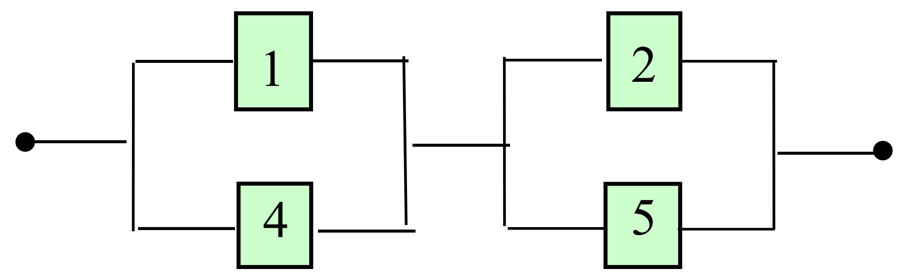
例4：有5个独立元件构成的系统， 设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率.



解：设$A_i=$｛第i个元件运行正常｝，$i=1,2,3,4,5$

$A=$｛系统运行正常｝

$$P(A)=P(A_3)\cdot P(A|A_3)+P(\overline{A}_3)\cdot P(A|\overline{A}_3)$$



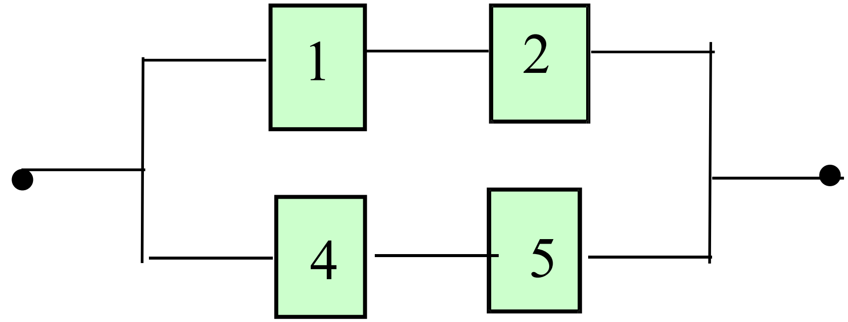
$$p_1 \triangleq P(A|A_3)$$

$$=P((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5))$$

$$=[P(A_1\cup A_4)]^2$$

$$=(2p-p^2)^2$$

$$p_2 \triangleq P(A|A_3)$$
$$= P(A_1A_2 \cup A_4A_5)$$
$$= 2p^2 - p^4$$



$$P(A) = P(A_3)\cdot P(A|A_3) + P(\overline{A}_3)\cdot P(A|\overline{A}_3)$$
$$= p(2p - p^2)^2 + (1-p)(2p^2 - p^4)$$
$$= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

关于**小概率事件**

如果事件A发生的概率$p=0.0001$.那么进行一次试验，事件A会发生吗?

人们经过长期的实践总结得到“概率很小 的事件在一次试验中实际上几乎是不发生 的”(称之为实际推断原理).

例5：某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故.设他每次操作发生事故的概率为$p=0.0001$，他独立重复进行了n次操作. 求

（1）n次都不发生事故的概率;

（2）至少有一次发生事故的概率.

解:设$A_i=\{$第i次不发生事故$\},i=1,2,\ldots,n.$

$B=\{n$次都不发生事故$\},$

$C=\{$至少发生一次事故$\}.$

则$A_1,\ldots,A_n$相互独立，$P(A_i)=1-p=0.9999,$

$$P(B)=P(A_1\cdots A_n)$$
$$=(1-p)^n$$

$$P(C)=P(\bar{B})=1-P(B)=1-(1-p)^n$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} P(C) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 1$

上式的意义为："小概率事件"在大量独立重 复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的。因此提醒我们，决不能轻视小概率事件

$n = 7000$时，$P(C) = \mathbf{1} - (1 - \mathbf{0.0001})^{\mathbf{7000}} = \mathbf{0.5053} > \mathbf{0.5}$

$n = 30000$时，$P(C) = \mathbf{1} - (1 - \mathbf{0.0001})^{\mathbf{30000}} = \mathbf{0.9502}$

第八讲 几何概型

假设条件 → 概率模型 → 古典概型的概率

假设条件:

① Ω的有限性

② ω的等可能性

概率模型: 古典概型

古典概型的概率: $P(A)=\frac{n_A}{n}$

P(特等奖)

古典概型
- 有限性
- 等可能性

θ: 指针起止位置转过的角度

$$S = \{\theta \in R \ 0 \le \theta \le 360\}.$$

概率模型

若试验E具有下列两个特征：

1）无限性： 样本空间S是**几何空间中**的一个区域，包含无穷多个样本点，每个样本点由区域S内的点的随机位置所确定，即

$$S=\{E_1,E_2,\cdots,E_i,\cdots\}$$

2）等可能性： 每个样本点的出现是等可能的，即每个样本点落在S内几何度量相同的子区域内等可能的，则称E所描述的概率模型为**几何概型**.

注 1 ：

几何空间	一维	二维	三维	…
几何度量	长度	面积	体积	…

注 2 ：

几何概型随机试验

记录子弹落点位置(x, θ)

1、定义

对于随机试验E，以m(A)表示事件A的几何度量，S为样本空 间. 若$0 < m(A) < +\infty$, 则对于任一事件A，其概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

一维

$$P(A) = \frac{A的长度}{S的长度}$$

二维

$$P(A) = \frac{A的面积}{S的面积}$$

三维

$$P(A) = \frac{A的体积}{S的体积}$$

2、几何概型性质

(1) 对任一事件A,有 $0 \le p(A) \le 1$;

非负性

(2) $P(S)=1, P(\varnothing)=0$;

规范性

(3) 对于可列多个两两互斥的事件$A_1, A_2, \cdots,$

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \cdots)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + \cdots.$$

可列可加性

几何概型的概率也是公理意义下的概率.

3、与古典概型区别与联系

古典概型

有限性、等可能性

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

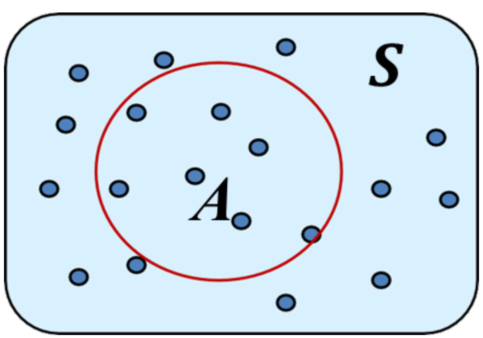
离 散

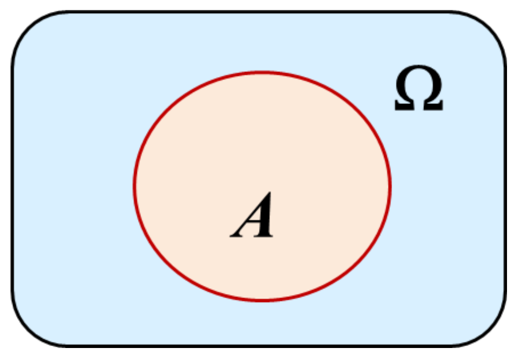
几何概型

无限性、等可能性

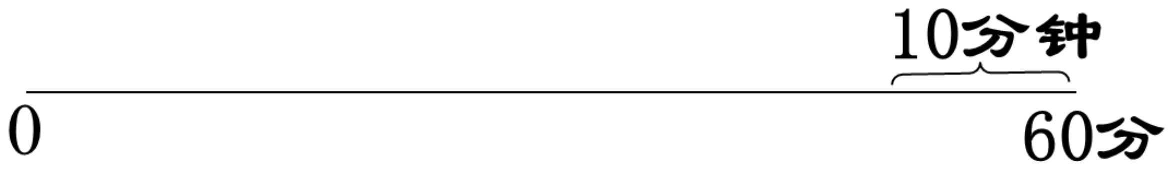
$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

连 续





例1 **某人的表停了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率是多少?**



解: 等待报时的时间为0至60分钟之间，$S = [0,60]$

A={等待报时的时间短于十分钟}$= [0,60]$

所以 $$P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

例2

A: 特等奖

θ: 指针起止位置转过的角度

$$S=\{\theta\in R\ 0\le\theta\le 360\}$$

$$A=\{\theta\in R\ \theta_1\le\theta\le\theta_2\}$$

$$S=r^2\theta$$

$$P(A)=\frac{\theta_2-\theta_1}{360}=\frac{S_{\text{特等奖}}}{S_{\text{圆盘面积}}}$$

例3 两人相约8至9点在某地会面，先到者等候20分 钟，过时不候，假定二人随意的在8至9点之间 到达，问二人能够 会面的概率是多少?

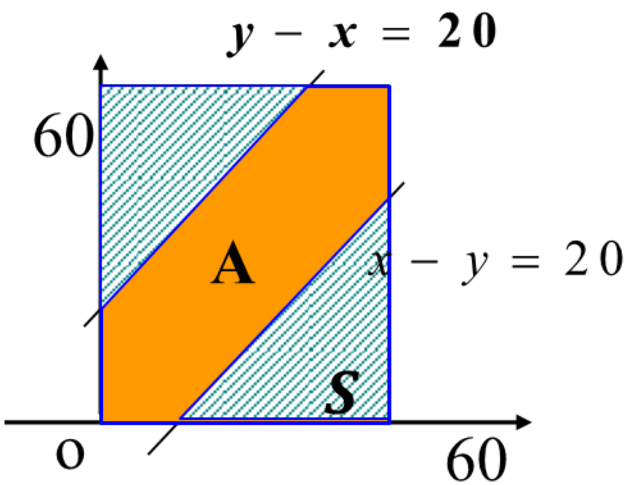
解： 以8点为起点，设二人分别在*x*, *y*时刻（0至60分钟之间）到达， 则

$$S=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 60,\quad 0\le y\le 60\}$$

A={二人能够会面}

$$=\{(x,y)|0\le x\le 60,0\le y\le 60\}$$

所以 $P(A)=\dfrac{60^2-40^2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$



本章内容小结

随机事件与概率
- 随机事件
  - 随机试验
  - 样本空间、随机事件
  - 事件运算：并、交、补、差
- 概率
  - 概率定义：频率、概率、公理化
  - 概率性质
- 古典概率定义及计算
- 条件概率
  - 条件概率定义
  - 全概率公式、贝叶斯公式
  - 事件独立性

THE END