



设二元连续型随机变量 $(X, Y)$ 具有概率密度 $f(x, y)$ ,  
 $Z$ 是 $X, Y$ 的函数,  $Z = g(X, Y)$ .

**问题:**  $Z$ 的概率分布或密度函数是什么?

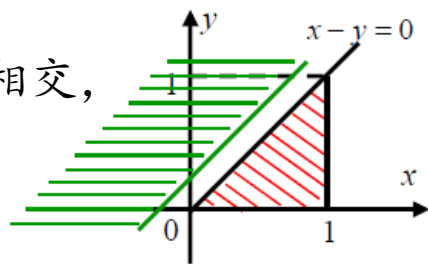
**方法:** 先求 $Z$ 的分布函数再求导得到密度函数.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$
$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

◆ **例3:** 设 $(X, Y)$ 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$   
求 $Z = X - Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$ .

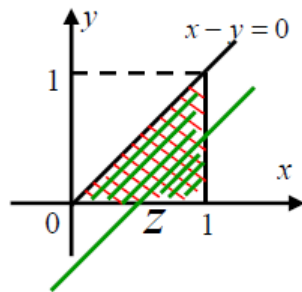
解:  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X - Y \leq z) = \iint_{x-y \leq z} f(x, y) dx dy$

当 $z \leq 0$ 时, 画 $x - y \leq z$ 区域图, 可见, 不与 $f(x, y)$ 非零区域相交, 所以 $F_Z(z) = 0$ .



当 $0 < z < 1$ 时, 根据画 $x - y \leq z$ 区域图, 得:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x-y \leq z} f(x, y) dx dy = 1 - \iint_{x-y > z} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \int_z^1 dx \int_0^{x-z} 3x dy = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3 \end{aligned}$$



当 $z \geq 1$ 时,  $F_Z(z) = 1$ ,  $\therefore f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 3(1 - z^2)/2 & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

## 二元随机变量函数的分布

设二元**离散型随机变量**  $(X, Y)$  具有概率分布

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

**问题：** (1) 若  $U = g(X, Y)$ ，则  $U$  的分布律是什么？

(2) 若  $U = u(X, Y), V = v(X, Y)$ ，则  $(U, V)$  的分布律是什么？

**方法：** 对于 (1)，先确定  $U$  的取值  $u_i, i = 1, 2, \dots$

再找出  $(U = u_i) = \{(X, Y) \in D\}$ ，从而计算出分布律。

**方法：** 对于 (2)，先确定  $(U, V)$  的取值  $(u_i, v_j) \quad i, j = 1, 2, \dots$

再找出  $(U = u_i, V = v_j) = \{(X, Y) \in D\}$ ，从而计算出分布律；



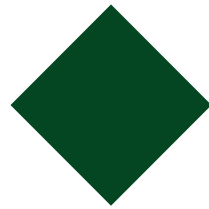
设二元**连续型随机变量**  $(X, Y)$  具有概率分布  $f(x, y)$ ,  $Z$  是  $X, Y$  的函数,  $Z = g(X, Y)$ .

**问题:**  $Z$  的概率分布或密度函数是什么?

**方法:** 先求  $Z$  的分布函数再求导得到密度函数.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$F_Z'(z) = f_Z(z)$$



**THE END**