概率论与数理统计

教师：杜亚星

第三十三讲
不相关与独立

定义: 若 $\rho_{XY}=0$, 则称随机变量 X 与 Y **不相关**或**零相关**.

注意到 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

随机变量 X 与 Y 不相关或零相关的等价条件有:

1. $Cov(X,Y)=0$;　$\because Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

2. $E(XY)=E(X)E(Y)$ —— 较常用

性质： X与Y相互独立，则X与Y不相关；反之不然.

证明： 因为当X与Y相互独立时，有

$$E(XY)=E(X)E(Y),$$

即X与Y不相关.

反之不然，可见下面的例子.

例1： 设X的分布律如右边所示，问X, X^2是否相关?是否独立?

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

解： 由X的分布律可知：$E(X)=E(X^3)=0,$

故X, X^2不相关.

而X, X^2是有关系的，是不独立的. 事实上

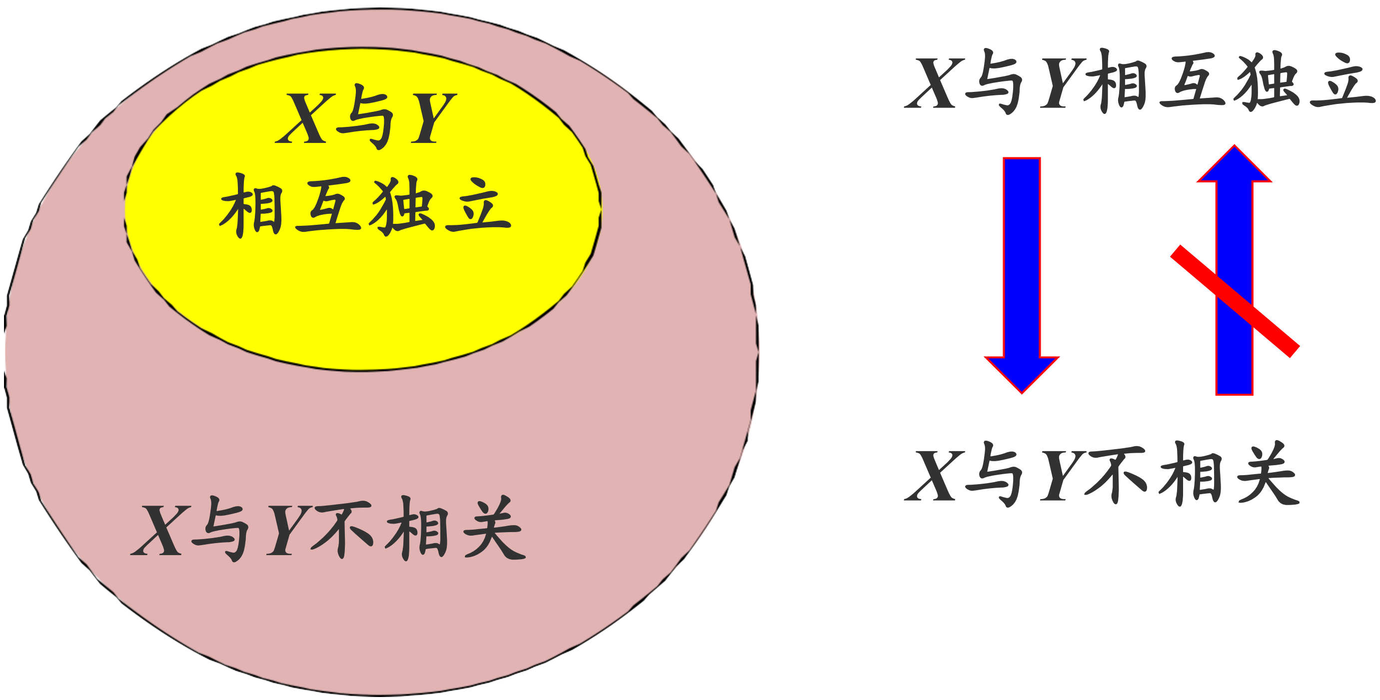
X^2 \ X	-1	0	1	$P\{X^2=j\}$
0	0	$1/2$	0	$1/2$
1	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$P\{X=i\}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$$P\{X=-1, X^2=0\}=0$$

$$\neq P\{X=-1\}P\{X^2=0\}=1/8.$$

说明: X与Y不相关,仅针对于线性关系而言;

X与Y相互独立,是就一般关系而言.



例2：(X, Y)在单位圆内服从均匀分布，请判断X, Y的独立性和相关性.

解：由题知，(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2<1;\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

据第22讲, 知X与Y的边缘密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, -1<x<1;\\ 0, \quad 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, -1<y<1;\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

故 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 即X与Y不独立.

而 $E(XY)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}ydydx=0$; $E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0$

即 $E(XY)=E(X)E(Y)$, 故X与Y不相关.

例3： 设(X,Y)服从二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，根据联合密度函数，可知两者的协方差为

$$Cov(X,Y)=E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\}=\rho\sigma_1\sigma_2.$$

那么 $\rho_{XY}=\rho.$

(由此可知二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$五个参数的含义)

而在第23讲中，曾证明了：二元正态变量$(X,\ Y)$，

X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

故对于二元正态变量 (X,Y)：相互独立等价于不相关.

THE END