Linear Algebra homework2.7

本次作业参见第 116-120 页。

1 Find $A^\top$ and A^{-1} and $(A^{-1})^\top$ and $(A^\top)^{-1}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and also} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Verify that $(AB)^\top$ equals $B^\top A^\top$ but those are different from $A^\top B^\top$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

show also that $AA^\top$ is different from $A^\top A$. But both of those matrices are _____.

3 (a) The matrix $((AB)^{-1})^\top$ comes from $(A^{-1})^\top$ and $(B^{-1})^\top$. *In what order?*

(b) If U is upper triangular then $(U^{-1})^\top$ is _____ triangular.

4 Show that $A^2 = 0$ is possible but $A^\top A = 0$ is not possible (unless A = zero matrix).

5 (a) The row vector $\boldsymbol{x}^\top$ times A times the column $\boldsymbol{y}$ produces what number?

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \_\_\_\_\_.$$

(b) This is the row $\boldsymbol{x}^\top A =$ _____ times the column $\boldsymbol{y} = (0, 1, 0)$.

(c) This is the row $\boldsymbol{x}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ times the column $A\boldsymbol{y} =$ _____.

6 The transpose of block matrix $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ is $M^\top =$ _____. Test an example. Under what conditions on A, B, C, D is the block matrix symmetric?

7 True or False:

(a) The block matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ A & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ is automatically symmetric.

(b) If A and B are symmetric then their product AB is symmetric.

(c) If A is not symmetric then A^{-1} is not symmetric.

(d) When A, B, C are symmetric, the transpose of ABC is CBA.

8 Why are there $n!$ permutation matrices of order n?

9 If P_1 and P_2 are permutation matrices, so is P_1P_2. This still has the rows of I in some order. Given examples with $P_1P_2 \neq P_2P_1$ and $P_3P_4 = P_4P_3$.

11 Which permutation makes PA upper triangular? Which permutations make P_1AP_2 lower triangular? Multiplying A on the right by P_2 exchanges the _____ of A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

12 Explain why the dot product of $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ equals the dot product of $P\boldsymbol{x}$ and $P\boldsymbol{y}$. Then $(P\boldsymbol{x})^\top(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}$ tells us that $P^\top P = I$ for any permutation. With $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ and $\boldsymbol{y} = (1, 4, 2)$ choose P to show that $P\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ is not always $\boldsymbol{x} \cdot P\boldsymbol{y}$.

14 If P has 1's on the antidiagonal from $(1, n)$ to

$(n, 1)$, describe PAP. Note $P = P^\top$.

15 All row exchange matrices are symmetric: $P^\top = P$. Then $P^\top P = I$ becomes $P^2 = I$. Other permutation matrices may or may not be symmetric.

(a) If P sends row 1 to row 4, then $P^\top$ send row ____ to row ____. When $P^\top = P$ the row exchanges come in pairs with no overlap.

(b) Find a 4 by 4 example with $P^\top = P$ that moves all four rows.

16 If $A = A^\top$ and $B = B^\top$, which of these matrices are certainly symmetric?

$$(a)\ A^2 - B^2 \qquad (b)\ (A + B)(A - B)$$
$$(c)\ ABA \qquad (d)\ ABAB.$$

18 (a) How many entries of S can be chosen independently, if $S = S^\top$ is 5 by 5?

(b) How do L and D (still 5 by 5) give the same number of choices in $LDL^\top$?

(c) How many entries can be chosen if A is *skew-symmetric*? ($A^\top = -A$).

19 Suppose A is rectangular (m by n) and S is symmetric (m by m).

(a) Transpose $A^\top SA$ to show its symmetry. What shape is this matrix?

(b) Show why $A^\top A$ has no negative numbers on its diagonal.

21 After elimination clears out column 1 below the first pivot, find the symmetric 2 by 2 matrix that appears in the lower right corner:

$$\text{Start from } S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } S = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

24 Factor the following matrix into $PA = LU$. Factor it also into $A = L_1P_1U_1$ (hold the exchange of row 3 until 3 times row 1 is subtracted from row 2):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

25 Prove that the identify matrix cannot be the product of three row exchanges (or five). It can be the product of two exchanges (or four).

27 If every row of a 4 by 4 matrix contains the numbers $0, 1, 2, 3$ in some order, can the matrix be symmetric?

28 Prove that no reordering of rows and reordering of columns can transpose a typical matrix. (Watch the diagonal entries.)

29 Wires go between Boston, Chicago, and Seattle. Those cities are at voltages x_B, x_C, x_S. With unit resistances between cities, the currents between cities are in $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \text{ is } \begin{bmatrix} y_{BC} \\ y_{CS} \\ y_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \\ x_S \end{bmatrix}.$$

(a) Find the total currents $A^\top \boldsymbol{y}$ out of the three cities.

(b) Verify that $(A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y}$ agrees with $\boldsymbol{x}^\top (A^\top \boldsymbol{y})$—six terms in both.

32 The matrix P that multiplies (x, y, z) to give (z, x, y) is also a rotation matrix. Find P and P^3. The rotation axis $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ doesn't move, it equals $P\mathbf{a}$. What is the angle of rotation from $\mathbf{v} = (2, 3, -5)$ to $P\mathbf{v} = (-5, 2, 3)$?

33 Write $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ as the product ES of an elementary row operation matrix E and a symmetric matrix S.

34 Here is a new factorization of A into LS: trian-

gular (with 1's) times symmetric:

> Start from $A = LDU$. The A equals $L(U^\top)^{-1}$ times $S = U^\top DU$.

Why is $L(U^\top)^{-1}$ triangular? Its diagonal is all 1's. Why is $U^\top DU$ symmetric?

中文翻译参考：

1 当：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{以及} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

求相应的 $A^\top$，A^{-1}，$(A^{-1})^\top$ 和 $(A^\top)^{-1}$。

2 已知：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

验证 $(AB)^\top$ 等于 $B^\top A^\top$ 但是不等于 $A^\top B^\top$。证明 $AA^\top$ 不同于 $A^\top A$，但是这两个矩阵都是 ____.

3 (a) 矩阵 $((AB)^{-1})^\top$ 是 $(A^{-1})^\top$ 和 $(B^{-1})^\top$ 的乘积. 它们的顺序是什么？

(b) 如果 U 是上三角矩阵，那么 $(U^{-1})^\top$ 是 ____ 三角矩阵.

4 证明 $A^2 = 0$ 是可能的，但是 $A^\top A = 0$ 是不可能的 (除非 A 是零矩阵).

5 (a) 行向量 $\boldsymbol{x}^\top$ 乘矩阵 A 乘列向量 $\boldsymbol{y}$ 等于多少？

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \_\_\_\_.$$

(b) 等价于行向量 $\boldsymbol{x}^\top A =$ ____ 乘列向量 $\boldsymbol{y} = (0, 1, 0)$.

(c) 等价于行向量 $\boldsymbol{x}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ 乘列向量 $A\boldsymbol{y} =$ ____.

6 分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的转置是 $M^\top =$ ____. 并举一个例子说明. A, B, C, D 满足什么条件时分块矩阵是对称的？

7 判断对错:

(a) 分块矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ A & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 是对称矩阵。

(b) 如果 A 和 B 是对称矩阵，那么它们的乘积 AB 也是对称的。

(c) 如果 A 不对称，那么 A^{-1} 也不对称。

(d) 当 A, B, C 是对称的时，ABC 的转置是 CBA.

8 为什么 n 阶矩阵有 $n!$ 个排列矩阵？

9 如果 P_1 和 P_2 是排列矩阵, 那么 P_1P_2 也是排列矩阵。它的行仍然是单位阵 I 的行按某种顺序排列。举例即找出相应的排列矩阵 P_1, P_2, P_3, P_4 满足 $P_1P_2 \neq P_2P_1$ 以及 $P_3P_4 = P_4P_3$。

11 已知矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

当排列矩阵 P 是多少时使得 PA 变成上三角矩阵？当排列矩阵 P_1, P_2 为多少时，使得 P_1AP_2 成为下三角矩阵。在 A 的右侧乘 P_2 会交换 A 的 ____。

12 解释为什么 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的点积等于 $P\boldsymbol{x}$ 和 $P\boldsymbol{y}$ 的点积？那么由 $(P\boldsymbol{x})^\top(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}$，告诉我们对于任意排列矩阵有：$P^\top P = I$。当 $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$，$\boldsymbol{y} = (1, 4, 2)$，选择一个矩阵 P，证明 $P\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ 不等于 $\boldsymbol{x} \cdot P\boldsymbol{y}$。

14 如果 P 在反（斜）对角线上从 $(1, n)$ 到 $(n, 1)$ 位置都是 1，描述 PAP 是何矩阵。注意 $P = P^\top$.

15 所有的行交换矩阵都是对称的：$P^\top = P$，那么 $P^\top P = I$ 变成 $P^2 = I$。其他的排列矩阵可能是对称的也可能不是对称的。

(a) 如果 P 把矩阵的第 1 行交换到第 4 行，那么

$P^\top$ 把矩阵的第 ____ 行交换到第 ____ 行。当 $P^\top = P$，行交换会成对出现，并且没有重叠。

(b) 求一个 4×4 的矩阵 P，满足 $P^\top = P$，会移动全部 4 个行。

16 如果 $A = A^\top$，$B = B^\top$，下面哪些矩阵一定对称？

$$(a)\ A^2 - B^2 \qquad (b)\ (A+B)(A-B)$$
$$(c)\ ABA \qquad (d)\ ABAB.$$

18 (a) 如果 5×5 的矩阵 S 满足：$S = S^\top$，那么 S 中有多少元素可以独立选择（一个元素的取值不影响其他元素）?

(b) L 和 D (仍然是 5×5 矩阵) 满足什么条件，矩阵 $LDL^\top$ 跟 (a) 有一样的结果？

(c) 如果 A 是反对称的，即 $A^\top = -A$，那么 A 有多少元素可以独立选取？

19 假设 A 是矩形矩阵 $(m\times n)$，矩阵 S 是对称的 $(m\times m)$。

(a) 证明 $A^\top SA$ 是对称的。该矩阵是什么形状？

(b) 证明 $A^\top A$ 对角线上的元素都是非负的。

21 使用消元法将第一个轴元下的元素都变成 0 后，求出现在右下角的 2×2 的对称矩阵。

$$3\times 3 \text{ 矩阵 } S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } S = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

24 分解下面的矩阵得到：$PA = LU$ (L,U 分别为下、上三角矩阵，P 是排列矩阵)。同时分解矩阵得到：$A = L_1P_1U_1$ (第 3 行保持不变，直到第 2 行减去 3 乘第 1 行):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

25 证明单位矩阵不会是 3 个（或 5 个）行交换矩阵的乘积，可能是 2 个（或 4 个）行交换矩阵的乘积。

27 如果一个 4×4 矩阵的每一行都包含 $0,1,2,3$ (顺序不同)，这个矩阵可以是对称的吗？如果可以试着求出其中一个。

28 证明对一个典型矩阵的行或列进行重新排列，不能得到它的的转置矩阵 (注意对角线上的元素)。

29 在波士顿，芝加哥和西雅图之间铺设电缆。这三个城市的电压分别是 x_B, x_C, x_S，城市与城市之间是单位电阻，城市之间的电流 $\boldsymbol{y}$ 是：

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \text{ 即 } \begin{bmatrix} y_{BC} \\ y_{CS} \\ y_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \\ x_S \end{bmatrix}.$$

(a) 求途经三个城市的总电流 $A^\top\boldsymbol{y}$。

(b) 验证 $(A\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}^\top(A^\top\boldsymbol{y})$ 一致---两者都有 6 项。

32 矩阵 P 乘 (x,y,z) 得到 (z,x,y)，因而 P 也叫旋转矩阵。求 P 和 P^3。旋转轴 $\mathbf{a} = (1,1,1)$ 不会移动，它等于 $P\mathbf{a}$。求从 $\mathbf{v} = (2,3,-5)$ 到 $P\mathbf{v} = (-5,2,3)$ 的旋转角？

33 将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ 写成 ES 乘积的形式（即求 E, S，使 $A = ES$）。其中 E 是一个初等行运算矩阵，S 是一个对称矩阵。

34 现有一种新的矩阵分解：$A = LS$，即: 三角形矩阵 L (对角线元素是 1) 乘对称矩阵 S:

$$A = LDU.\ A \text{ 等于 } L(U^\top)^{-1} \text{ 乘 } S = U^\top DU.$$

为什么 $L(U^\top)^{-1}$ 是三角形矩阵？对角线上的元素都是 1。为什么矩阵 $U^\top DU$ 是对称的？