第5章 机器人位置级逆运动学

彭键清 助理教授、硕导

中山大学 智能工程学院

邮箱：pengjq7@mail.sysu.edu.cn

办公室：工学园1栋505

2024年04月08日

5.1.1 位置级逆运动学问题

◆位置级逆运动学问题

- **问题描述：根据机械臂末端位姿，确定关节位置**
  - **未知量（待求解变量）：关节位置$\boldsymbol{q}$**
  - **已知量：末端位姿$\boldsymbol{X}_e$或$\boldsymbol{T}_e$**
  - **逆运动学表示为：**

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{ikine}\left(\boldsymbol{X}_e\right)$$

或

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{Ikine}\left(\boldsymbol{T}_e\right)$$

5.1.2 可解性分析

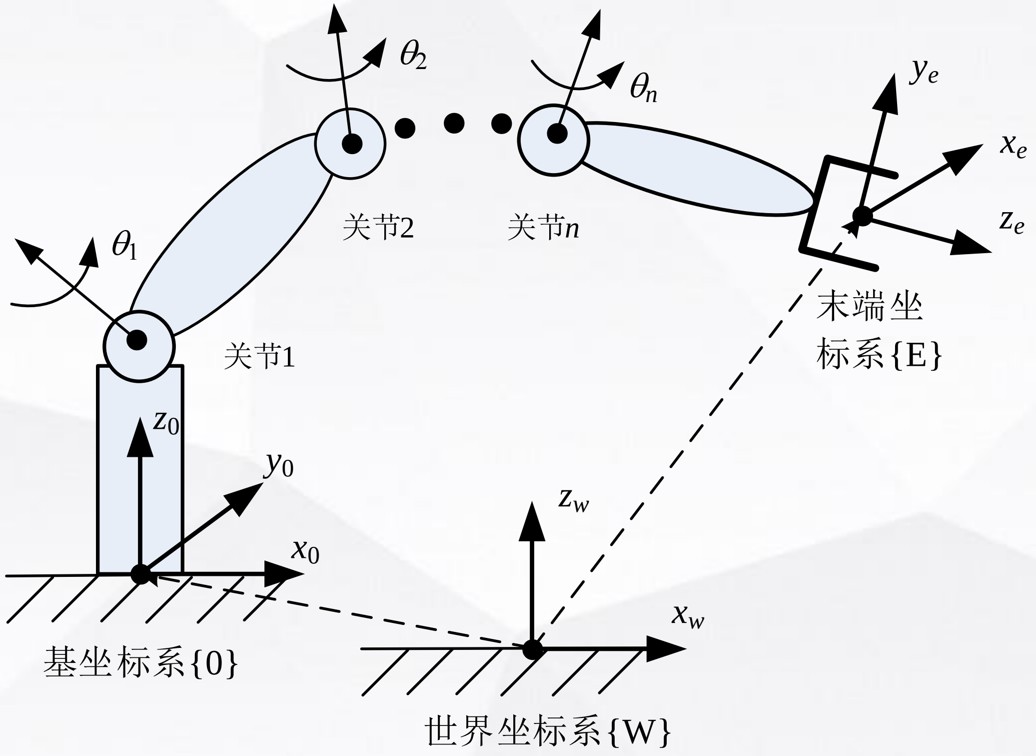
◆ 未知量（待解量）分析

➢ 对于n自由度机器人，有n个关节变量，即

$$\boldsymbol{q}=[q_1, q_2, \cdots, q_n]^{\mathrm{T}}$$

其中q_i为关节位置，$\boldsymbol{q}$为n维向量。

对于n-DOF机械臂，有n个未知数



5.1.2 可解性分析

◆ 已知量分析

➢ 已知量为末端位姿，采用6维变量表示时，有

$$\boldsymbol{X}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_e\\ \boldsymbol{\Psi}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_e, & y_e, & z_e, & \alpha_e, & \beta_e, & \gamma_e\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\Re^6$$

➢ 采用齐次变换矩阵，则有如下形式

$$ {}^0\boldsymbol{T}_n=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^0\boldsymbol{R}_n & {}^0\boldsymbol{p}_n\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$$

对于一般情况（完整的末端定位和定姿），有6个已知数

5.1.2 可解性分析

◆方程组

➢ 当通过D-H方法建立运动学模式时，末端位姿为{0}到{n}的齐次变换矩阵，即

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_n = {}^{0}\boldsymbol{T}_1(q_1)\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2(q_2)\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{T}_n(q_n) = \mathrm{Fkine}(\boldsymbol{q}) $$

上式即为关节变量到末端位姿的映射，为正运动学方程。其特点是对于一组$\boldsymbol{q}$，总能确定一组$\boldsymbol{T}$，且唯一。

➢ 姿态部分

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_n = [\boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{o} \quad \boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} $$

➢ 位置部分

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$

5.1.2 可解性分析

◆逆解情况分析

- 逆运动学方程实际为对下面正运动学方程进行求解

$$^{0}\boldsymbol{T}_{n} = \mathrm{Fkine}(\boldsymbol{q})$$

- 可根据未知数个数、方程个数判断逆解的情况

①欠自由度机器人

未知数个数<已知数个数，超定方程组，一般无解

②全自由度机器人

未知数个数=已知数个数，适定方程组，有限组解

③冗余自由度机器人

未知数个数>已知数个数，欠定方程组，无限组解

1 逆运动学问题概述

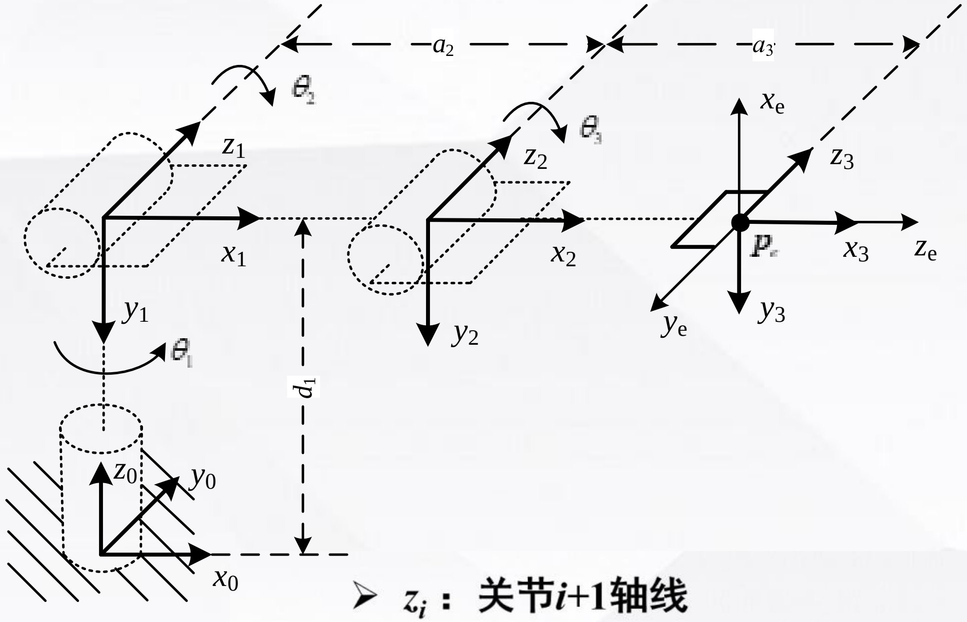
2 空间3R肘机械臂逆运动学

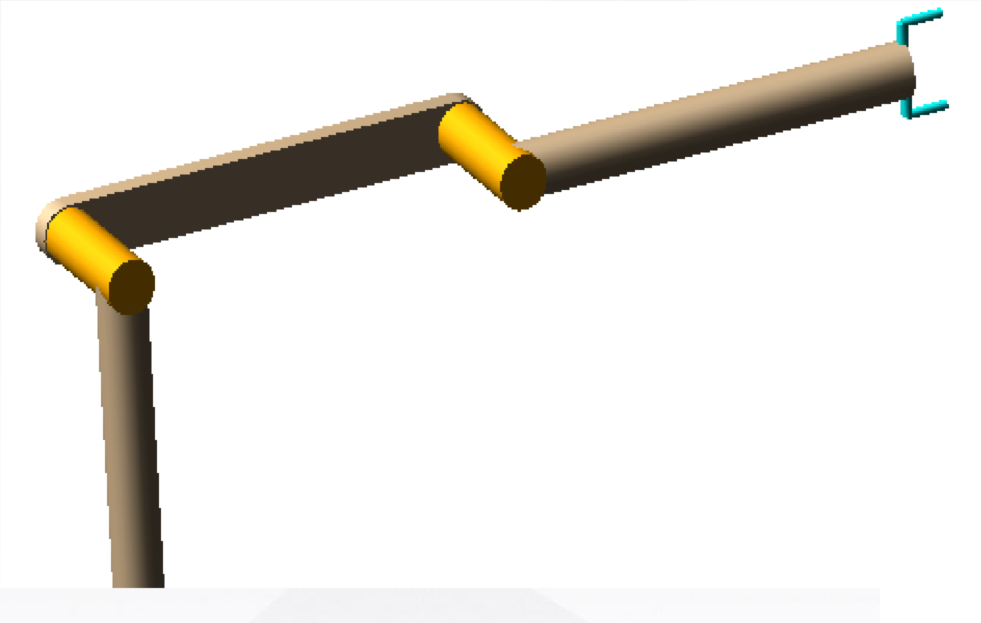
3 空间3R球腕机械臂逆运动学

4 深入讨论与提高

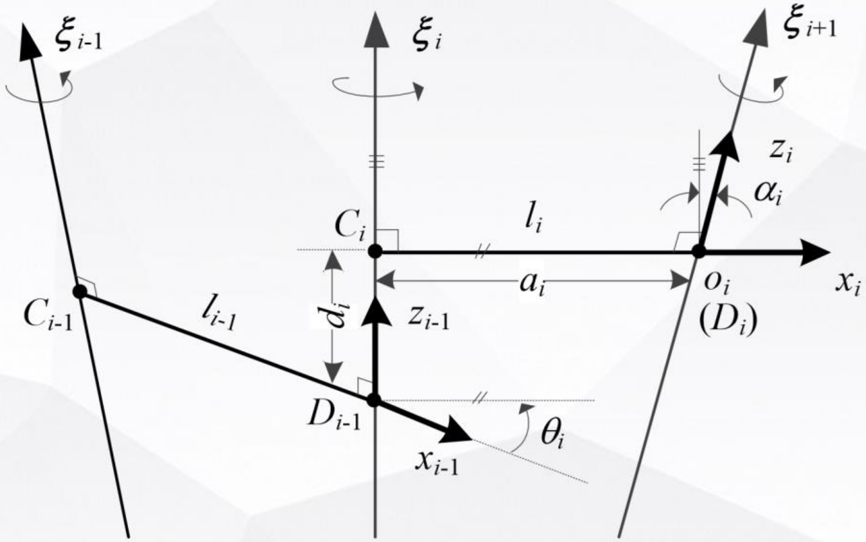
5.2.1 正运动学表达式

◆ D-H坐标及D-H参数





- z_i ： 关节i+1轴线
- o_i： 若z_i和$z_{i\text{-}1}$异面，以D_i为原点；
  若相交，则交点为原点；
  若平行，以C_{i+1}为原点。
- x_i： 若z_i和$z_{i\text{-}1}$异面或平行，为公垂线l_i
  若相交，则以两轴所在面法向量
  为x_i，即$x_i=\pm(z_{i\text{-}1}\times z_i)$
- y_i: 根据右手定则建立



5.2.1 正运动学表达式

◆ 相邻杆件间的位姿关系

D-H参数代入后分别得到

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{1}\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{2}\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

◆ 位置正运动学方程

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3={}^{0}\boldsymbol{T}_1\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2\,{}^{2}\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1-a_2s_2-a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.2.2 方程组构建

◆ 根据已知条件及表达式，建立方程组

➢ 已知：

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

➢ 结合正运动学解析表达式：

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

如何求解关节角 $\theta_1 \sim \theta_3$？

5.2.2 方程组构建

◆ 根据已知条件及表达式，建立方程组

➢ 分析臂型特点：该机器人用于末端定位，因此从位置项入手

$$ {}^0\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} & p_x \\ * & p_y \\ & p_z \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} (\text{已知}),\quad {}^0\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ * & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ & d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} (\text{表达式}) $$

➢ 因此，可得如下方程组：

$$ \begin{cases} p_x = a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & (1) \\ p_y = a_2s_1c_2 + a_3s_1c_{23} = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & (2) \\ p_z = d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} & (3) \end{cases} $$

可见求逆解的过程，实际为求解三角函数方程的问题

5.2.3 方程组求解

◆ 求解方程组

$$\begin{cases} p_x = a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} = c_1 \left(a_2 c_2 + a_3 c_{23} \right) & (1) \\ p_y = a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} = s_1 \left(a_2 c_2 + a_3 c_{23} \right) & (2) \\ p_z = d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} & (3) \end{cases}$$

- **首先，式(1)^2+(2)^{2}可得：**

$$p_x^2 + p_y^2 = \left(a_2 c_2 + a_3 c_{23} \right)^2 \quad （4）$$

- **式(3)两边减去d_1后，平方可得：**

$$\left(p_z - d_1 \right)^2 = \left(a_2 s_2 + a_3 s_{23} \right)^2 \quad （5）$$

- **上述两式展开后相加可得（利用了$c_3=c_2c_{23}+s_2s_{23}$）：**

$$c_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + \left(p_z - d_1 \right)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 a_2 a_3}$$

5.2.3 方程组求解

◆ 求解方程组

$$\begin{cases} p_x = a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} = c_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) & (1) \\ p_y = a_2s_1c_2 + a_3s_1c_{23} = s_1\left(a_2c_2 + a_3c_{23}\right) & (2) \\ p_z = d_1 - a_2s_2 - a_3s_{23} & (3) \end{cases}$$

- **因此：**

$$\theta_3 = \pm\text{acos}\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + \left(p_z - d_1\right)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}\right)$$

- **当θ_3解出后，代入式(3)后可得（利用了$s_{23}=s_2c_3+c_2s_3$）：**

$$\left(a_2 + a_3c_3\right)s_2 + \left(a_3s_3\right)c_2 = d_1 - p_z$$

- **由此，根据三角函数方程的求解方法，可以解出：**

$$\theta_2 = \text{asin}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) - \phi, \quad \theta_2 = \pi - \text{asin}\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) - \phi$$

$$A = a_2 + a_3c_3$$

$$B = a_3s_3$$

$$C = d_1 - p_z$$

5.2.3 方程组求解

◆ 求解方程组

$$\begin{cases} p_x = a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} = c_1 \left(a_2 c_2 + a_3 c_{23} \right) & (1) \\ p_y = a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} = s_1 \left(a_2 c_2 + a_3 c_{23} \right) & (2) \\ p_z = d_1 - a_2 s_2 - a_3 s_{23} & (3) \end{cases}$$

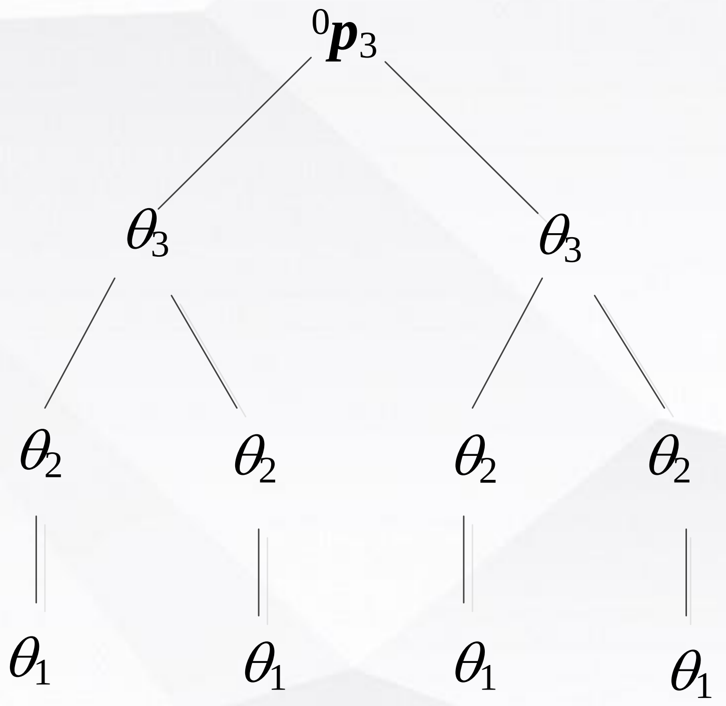
➢ **当θ_3和θ_2解出后，代入式(1)和(2)后可得**

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{p_x}{a_2 c_2 + a_3 c_{23}} \\ s_1 = \dfrac{p_y}{a_2 c_2 + a_3 c_{23}} \end{cases}$$

➢ **因此，可以解出**

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}\left(s_1, \ c_1 \right) = \mathrm{atan2}\left(\frac{p_y}{a_2 c_2 + a_3 c_{23}}, \frac{p_x}{a_2 c_2 + a_3 c_{23}} \right)$$

◆ 求解流程小结



空间3R肘机械臂逆运动学

$$^0\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$ （已知量）

$$^0\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix} c_1\left(a_2c_2+a_3c_{23}\right) \\ s_1\left(a_2c_2+a_3c_{23}\right) \\ d_1-a_2s_2-a_3s_{23} \end{bmatrix}$$ （关于变量的表达式）

根据上述求解过程，可知有4组逆解

5.2.4 求解实例与多解臂型分析

◆ 实例

➢ 给定

$$\boldsymbol{p}_e = \begin{bmatrix} p_{ex} \\ p_{ey} \\ p_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3268 \\ 0.7660 \\ 0.7000 \end{bmatrix}$$

➢ 解得

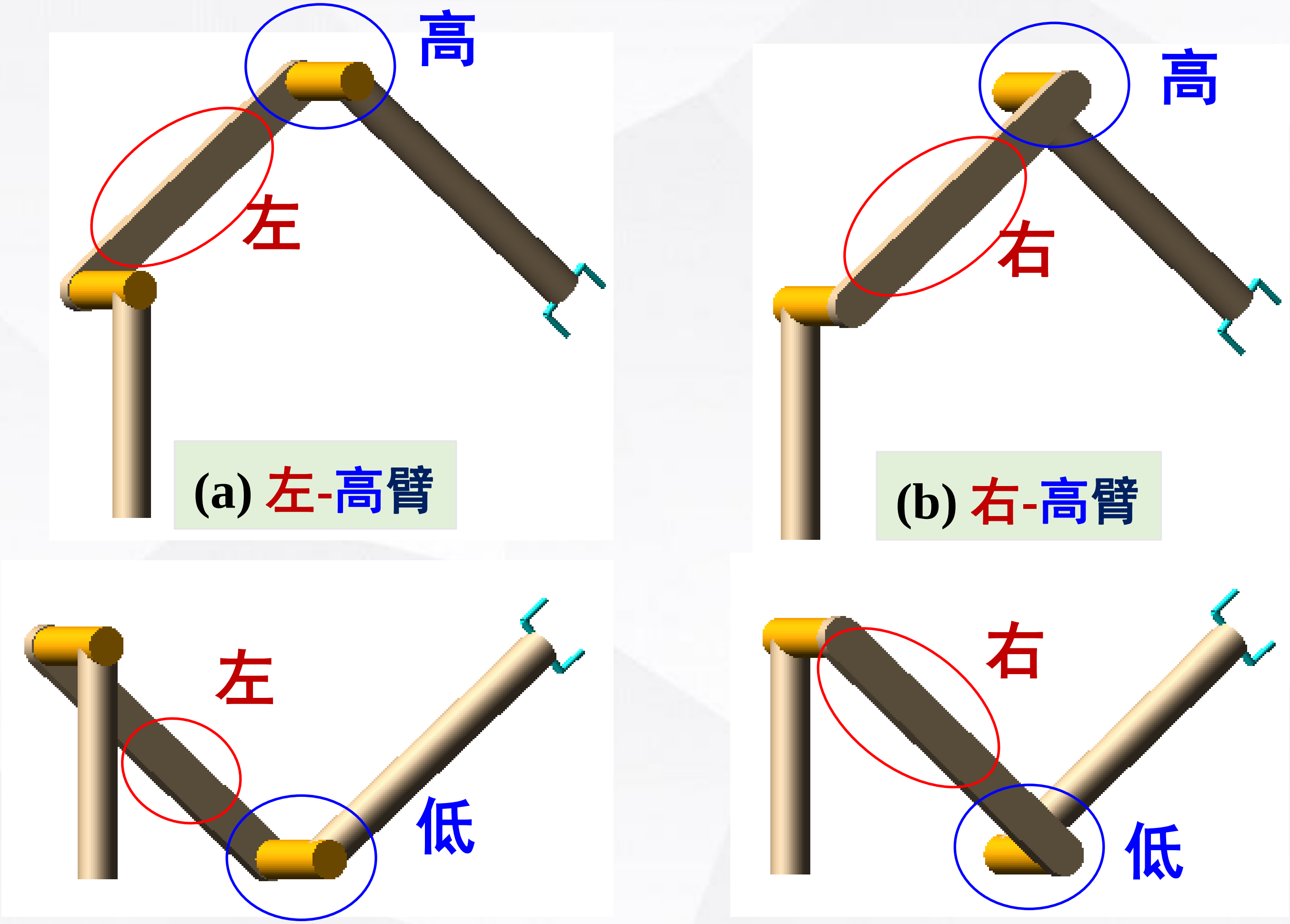
求解结果

臂型	θ_1	θ_2	θ_3	臂型特征
1	30	-40	80	左-高 臂
2	-150	-140	-80	右-高 臂
3	30	40	-80	左-低 臂
4	-150	140	80	右-低 臂

◆ 臂型分析

四组关节角度对应的臂型：

- ➢ 左 高
- ➢ 右 高
- ➢ 左 低
- ➢ 右 低



(a) 左-高臂

(b) 右-高臂

(c) 左-低臂

(d) 右-低臂

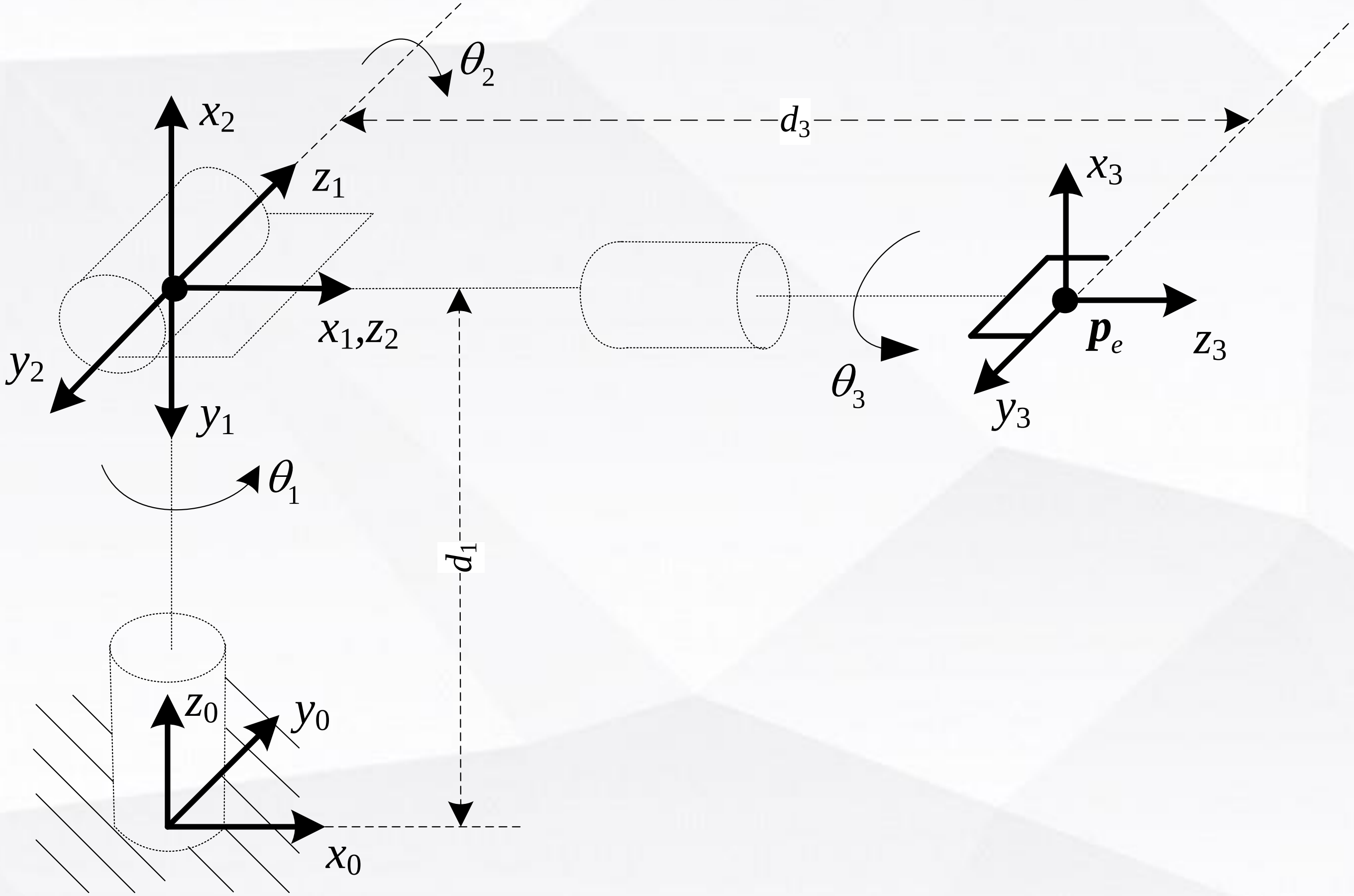
1 逆运动学问题概述

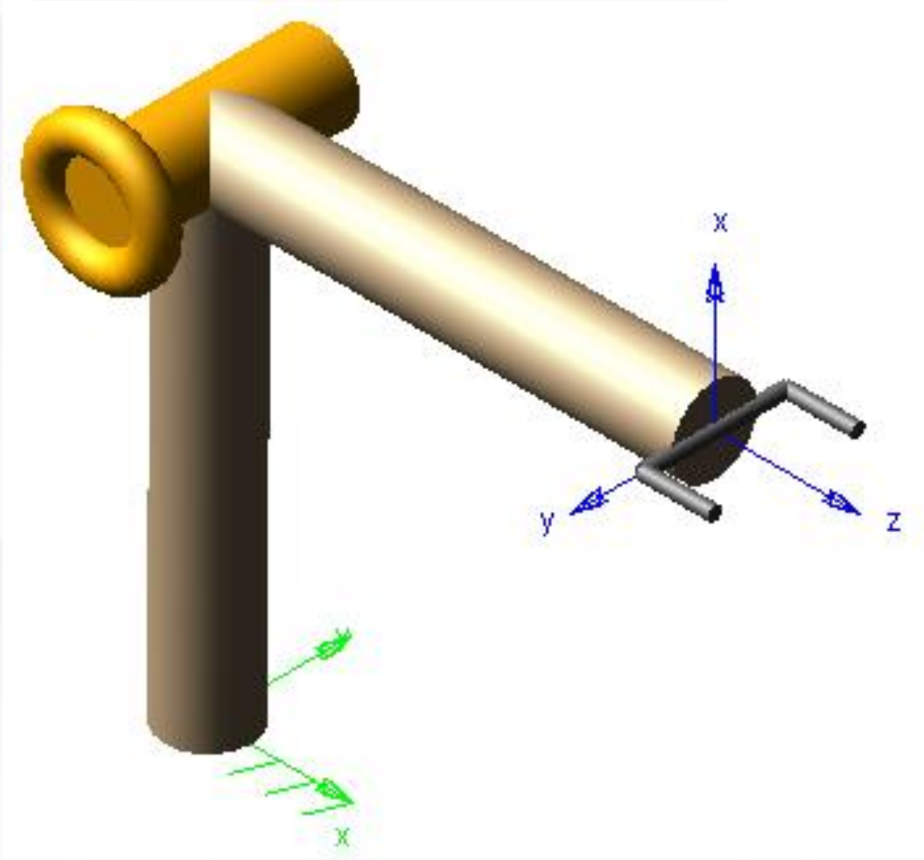
2 空间3R肘机械臂逆运动学

3 空间3R球腕机械臂逆运动学

4 深入讨论与提高

◆ D-H坐标及D-H参数


θ_2
x_2
d_3
z_1
x_3
x_1,z_2
p_e
z_3
y_2
θ_3
y_3
y_1
θ_1
d_1
z_0
y_0
x_0


x
y
z
x

5.3.1 正运动学表达式

◆ 相邻杆件间的位姿关系

D-H参数代入后分别得到

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{1}\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{2}\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

◆ 位置正运动学方程

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3={}^{0}\boldsymbol{T}_1\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2\,{}^{2}\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} s_1s_3+c_1c_2c_3 & s_1c_3-c_1c_2s_3 & -c_1s_2 & -d_3c_1s_2 \\ -c_1s_3+s_1c_2c_3 & -c_1c_3-s_1c_2s_3 & -s_1s_2 & -d_3s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 & d_1-d_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.3.2 方程组构建及求解

◆ 根据已知条件及表达式，建立方程组

➢ 分析臂型特点：该机器人用于末端定姿，因此从姿态项入手

- 已知条件

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & \\ n_y & o_y & a_y & * \\ n_z & o_z & a_z & \\ \hline & \mathbf{0} & & 1 \end{array}\right]
$$

- 表达式

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & s_1 c_3 - c_1 c_2 s_3 & -c_1 s_2 & \\ -c_1 s_3 + s_1 c_2 c_3 & -c_1 c_3 - s_1 c_2 s_3 & -s_1 s_2 & * \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & -c_2 & \\ \hline & \mathbf{0} & & 1 \end{array}\right]
$$

5.3.2 方程组构建及求解

◆ **根据已知条件及表达式，建立方程组**

➢ **采用类似于欧拉角求解的方式，可得**

$$if\ (a_z = \pm 1)$$

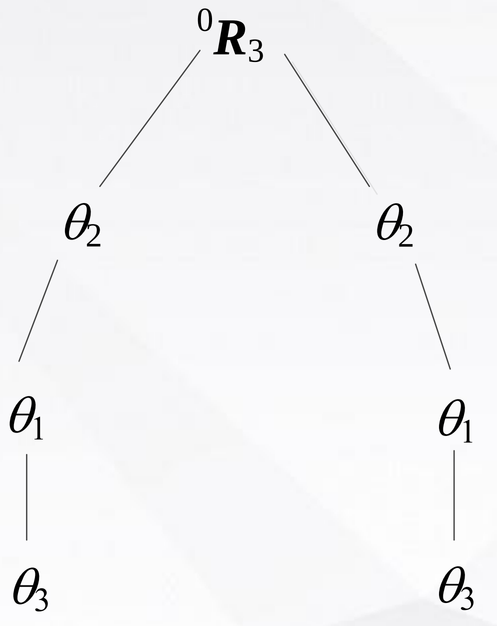
$$\begin{cases} \theta_2 = 0,\ \text{or}\ \ \pi \\ \theta_1 \pm \theta_3 = \text{atan2}(o_x, -o_y) \end{cases}$$

$$else$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \text{acos}(-a_z), \quad \text{or} \quad \theta_2 = -\text{acos}(-a_z) \\ \theta_1 = \text{atan2}\ (-a_y s_2,\ \ -a_x s_2) \\ \theta_3 = \text{atan2}\ (o_z s_2,\ \ -n_z s_2) \end{cases}$$

5.3.2 方程组构建及求解

◆ 求解流程小结



空间3R球腕机械臂运动学

$$^{0}\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad \text{（已知量）}$$

$$^{0}\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix} s_1s_3+c_1c_2c_3 & s_1c_3-c_1c_2s_3 & -c_1s_2 \\ -c_1s_3+s_1c_2c_3 & -c_1c_3-s_1c_2s_3 & -s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & -c_2 \end{bmatrix} \quad \text{（表达式）}$$

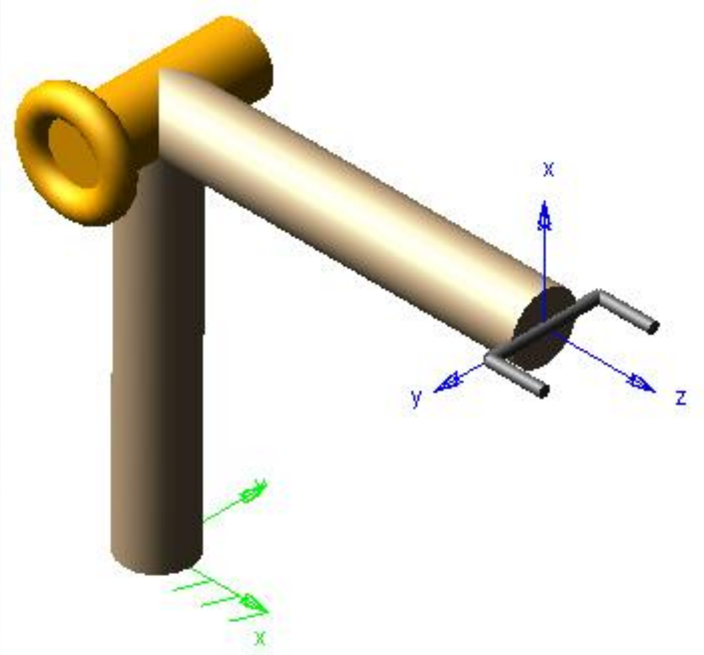
根据上述求解过程，可知有2组逆解

5.3.3 求解实例及臂型分析

◆ 实例

➢ 给定末端姿态矩阵为：

$$^{0}\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}0.6827 & 0.5399 & 0.4924\\ -0.7185 & 0.3733 & 0.5868\\ 0.1330 & -0.7544 & 0.6428\end{bmatrix}$$



得到下面两组解：

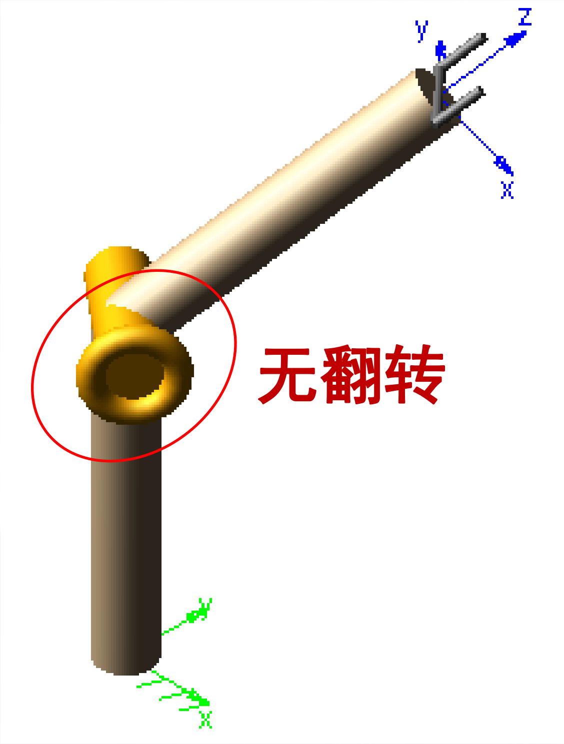
求解结果

臂型	θ_1	θ_2	θ_3	臂型特征
1	50	-130	80	无翻转腕
2	-130	130	-100	翻转腕

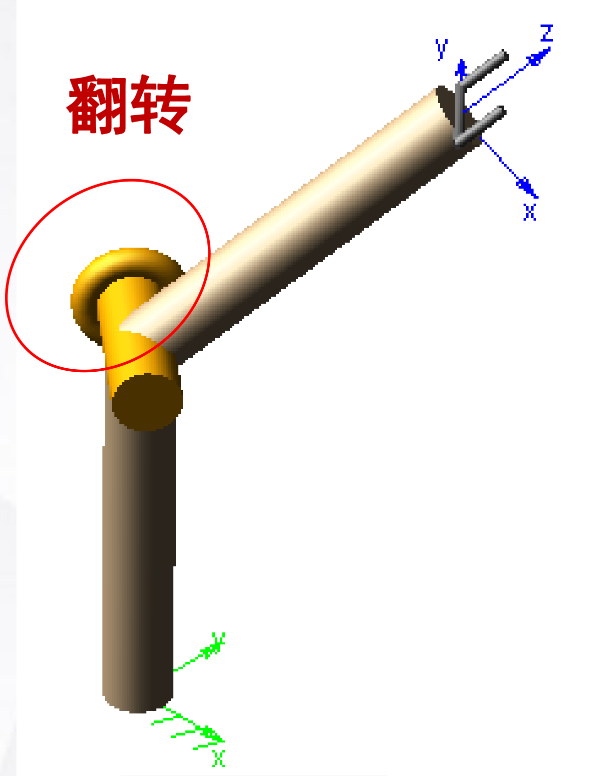
◆ 臂型分析

两组解对应的腕部构型为

- 无翻转腕
- 翻转腕



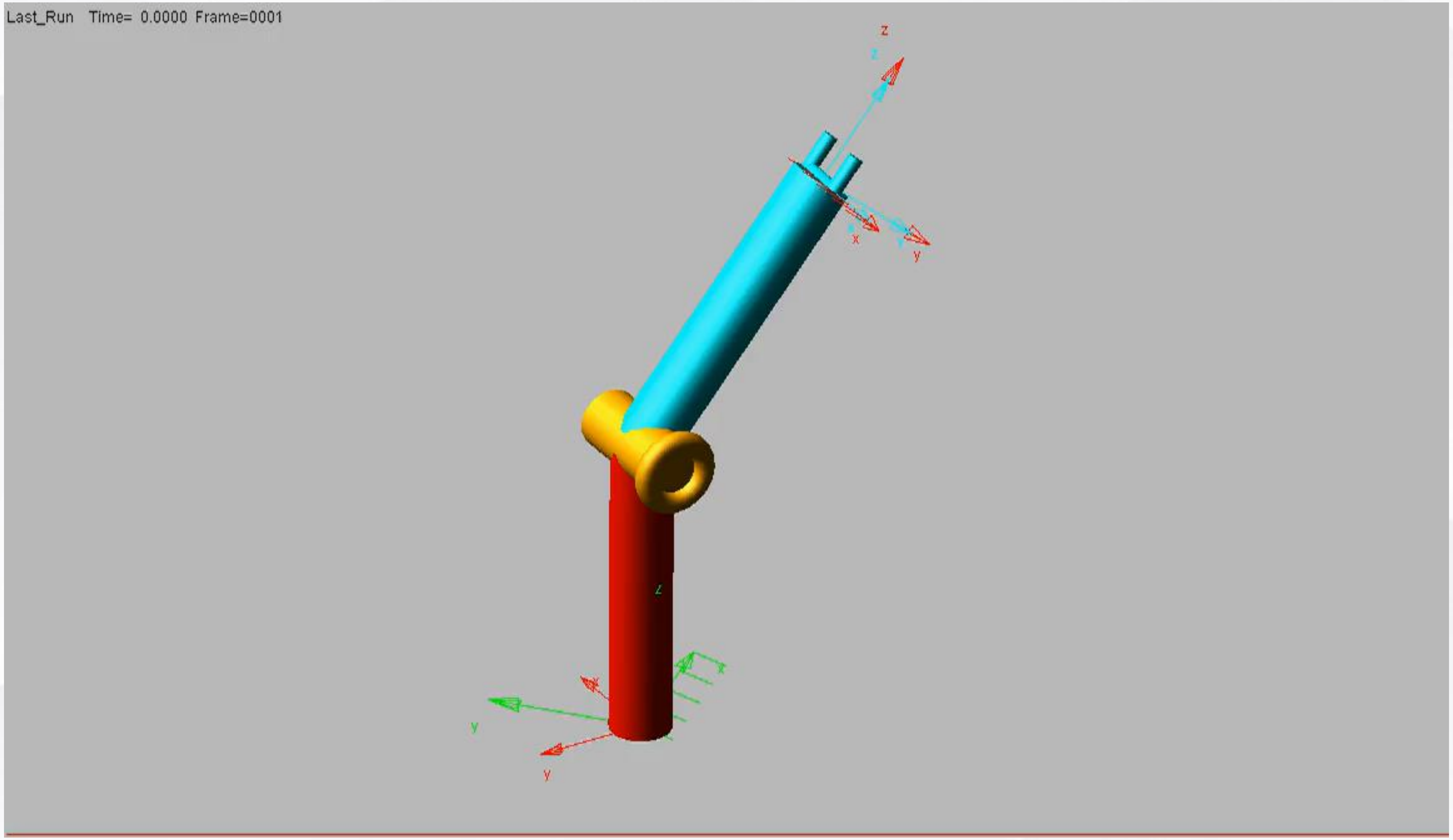
(a) 无翻转腕



(b)翻转腕

5.3.3 求解实例及臂型分析

◆ 翻转腕动画展示



第5章 机器人位置级逆运动学

5.4.1 关于逆运动学的一些问题

◆ 深入问题

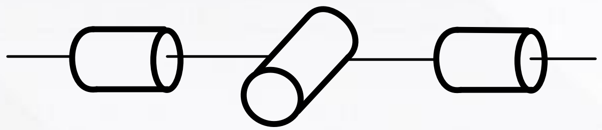
1. 6R机械臂具有解析解的条件是什么？
2. 一般6R机械臂的逆运动学方程有多少组解？
3. 对于没有封闭解的情况，如何求逆运动学方程？
4. 对于冗余机械臂的情况，如何求逆运动学方程？

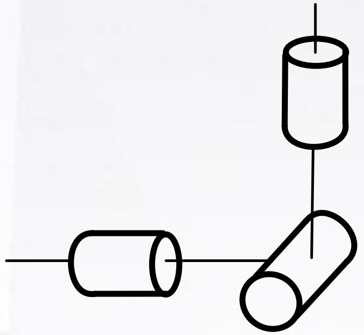
5.4.2 问题的思考

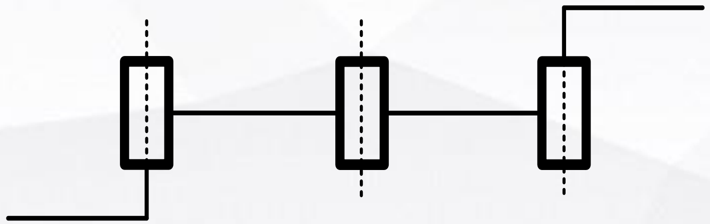
◆ **6R机械臂具有封闭解的两个充分条件**

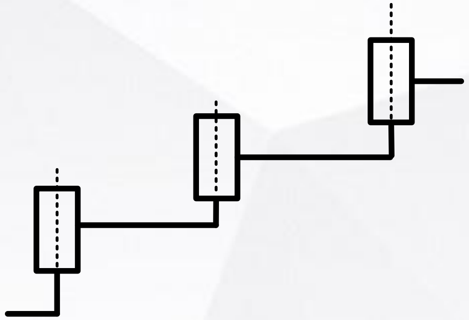
(1) 三个相邻关节轴交于一点
(2) 三个相邻关节轴相互平行

→ Pieper准则









5.4.2 问题的思考

◆ 一般6R机械臂的逆运动学解的个数

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{T}_2 \, {}^{2}\boldsymbol{T}_3 \, {}^{3}\boldsymbol{T}_4 \, {}^{4}\boldsymbol{T}_5 \, {}^{5}\boldsymbol{T}_6 = {}^{0}\boldsymbol{T}_6 $$

$$ \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{A}_4 \boldsymbol{A}_5 = \boldsymbol{A}_2^{-1} \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{hand}} \boldsymbol{A}_6^{-1} $$

$$ x_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \quad (i=3,\ 4,\ 5) $$

$$ \boxed{f\left(x_3^{16}, x_3^{15}, \cdots, 1\right) = 0} $$

最后得到关于tan(θ_3/2) 的16阶代数方程，所以最多有16组解

5.4.2 问题的思考

◆ 对于没有封闭解的情况，如何求逆运动学方程？

不满足Pieper准则的情况，可采用如下方法。

（1）代数法（解析法）

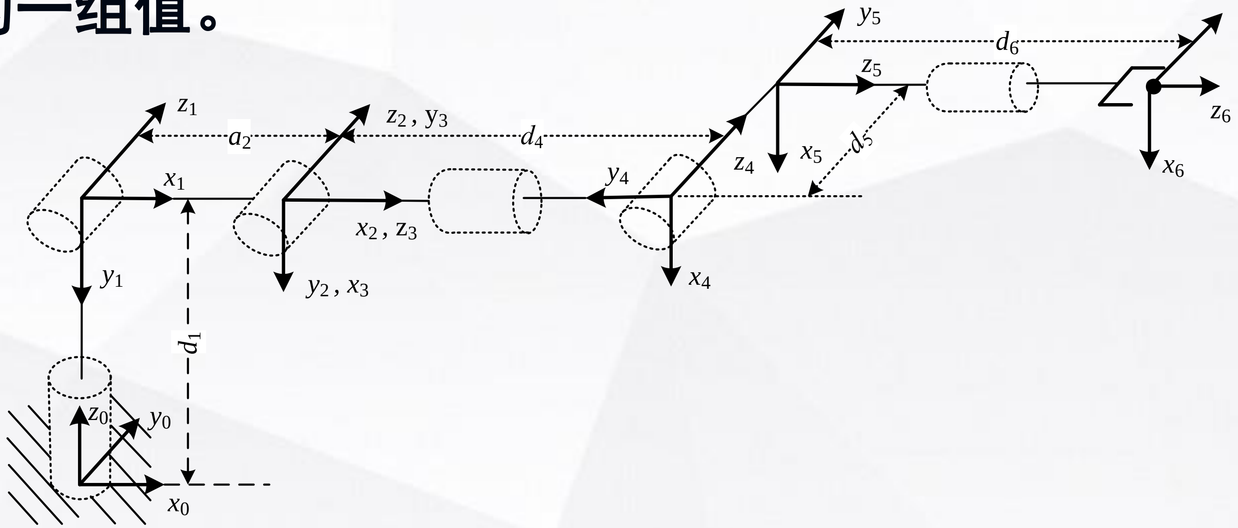
如前述析配消元法，通用、可得完全解，但求解过程复杂。

（2）数值法

通过数值迭代的思路进行求解，需要基于微分运动学，具有通用性，但只能得到相应于迭代初值的一组值。

（3）改变偏置法

通过改变偏置项、构造具有解析解的构型。可得部分解，但仅适合于部分结构



5.4.2 问题的思考

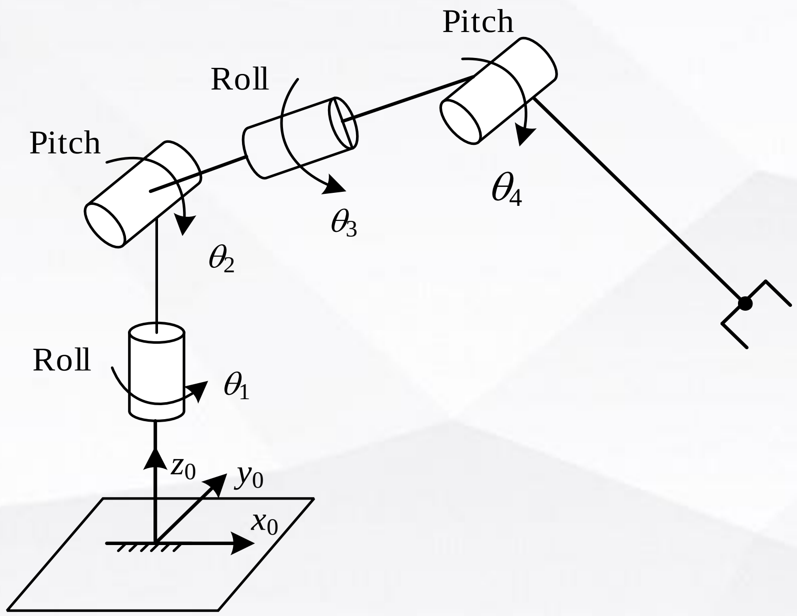
◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

（1）求解思路

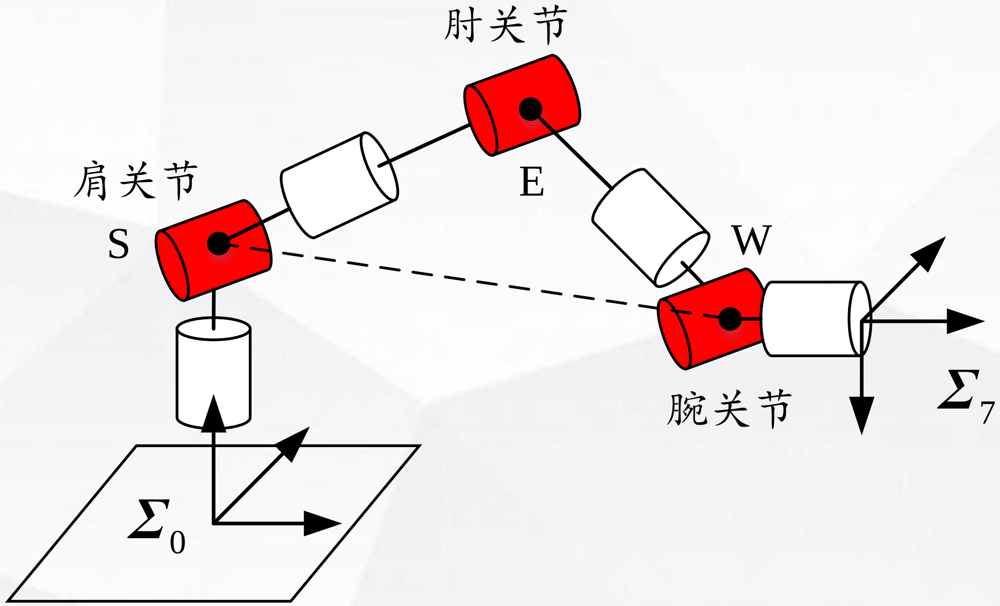
- 冗余性参数化
- 给定参数下的非冗余臂逆运动学

（2）冗余性参数化方法

- 关节角参数化
- 臂型角参数化



4R冗余机械臂(定位或定姿）

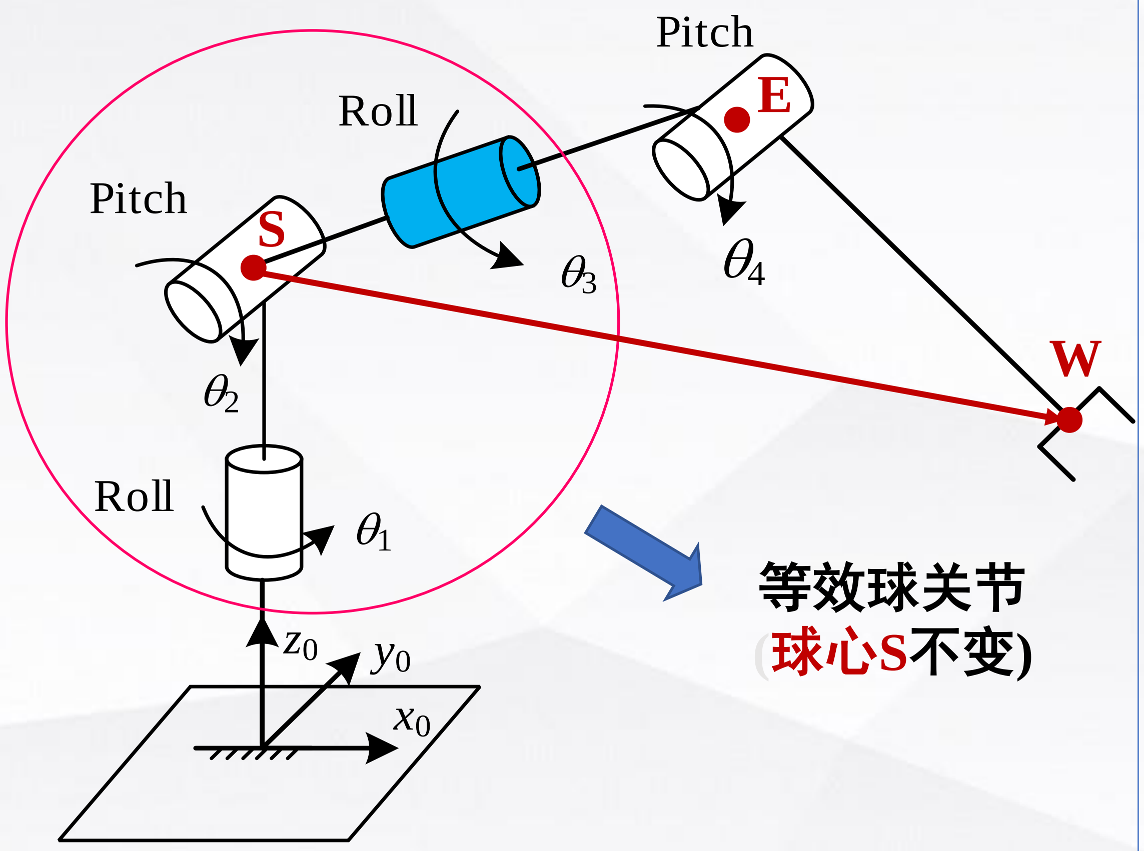


7R冗余机械臂(定位且定姿）

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程?

➢ 4R机械臂举例——构型分析



等效球关节
(球心S不变)

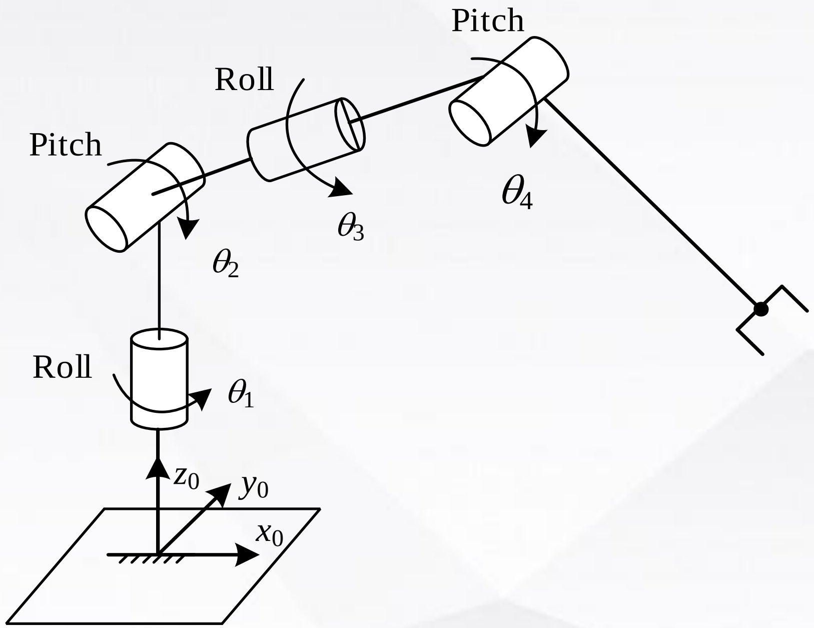
① 与原3R肘机械臂相比增加了一个Roll关节（即关节3）

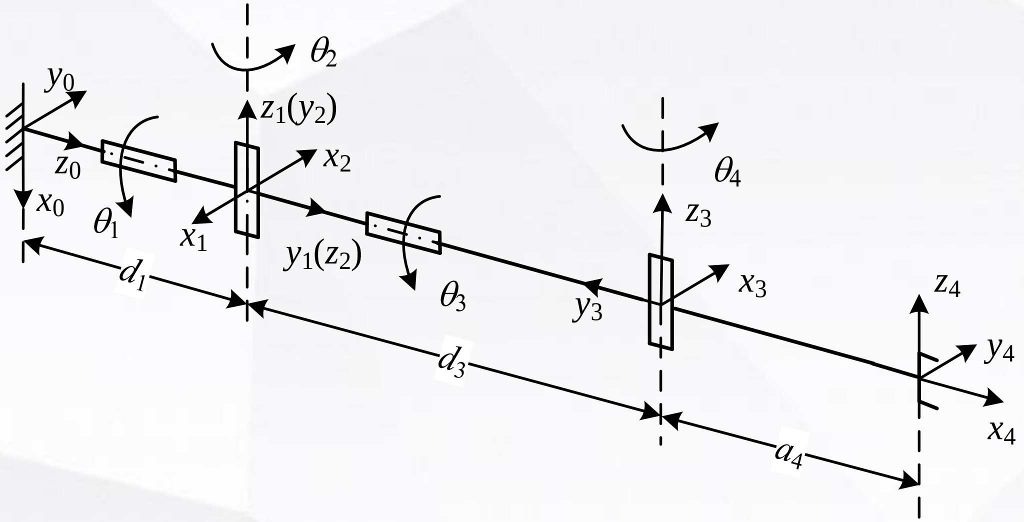
② 前三个关节形成等效球关节（球肩），球心S的位置不变

③ 肩部中心S到腕部中心W的长度SW仅与θ_4有关

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 4R机械臂举例——D-H建模



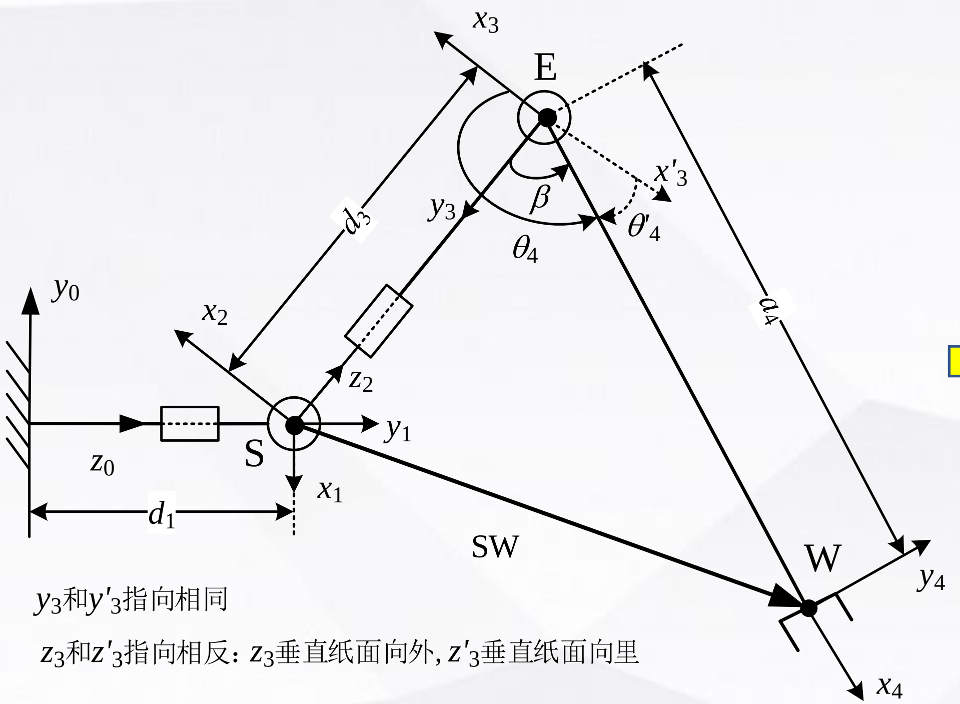


连杆i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	-90	90	0	d_1
2	180	90	0	0
3	0	-90	0	d_3
4	-90	0		0

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 4R机械臂举例——求解θ_4



y_3和y'_3指向相同

z_3和z'_3指向相反：z_3垂直纸面向外，z'_3垂直纸面向里

① 几何法： 根据余弦定理求解

②代数法：求解三角函数方程

$$ {}^{0}\boldsymbol{SW} = {}^{0}\boldsymbol{p}_4 - [0 \quad 0 \quad d_1]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z - d_1 \end{bmatrix} \quad \text{(已知)} $$

$$ {}^{2}\boldsymbol{SW} = {}^{2}\boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} a_4 c_3 c_4 \\ a_4 s_3 c_4 \\ d_3 - a_4 s_4 \end{bmatrix} \quad \text{（表达式）} $$

$$ \left\| {}^{2}\boldsymbol{SW} \right\| = \left\| {}^{0}\boldsymbol{SW} \right\| \quad \text{（方程）} $$

$$ \begin{cases} \theta_4 = \arcsin \dfrac{d_3^{\,2} + a_4^{\,2} - \left(p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 \right)}{2 d_3 a_4} \\ \theta_4 = \pi - \arcsin \dfrac{d_3^{\,2} + a_4^{\,2} - \left(p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 \right)}{2 d_3 a_4} \end{cases} $$

5.4.2 问题的思考

- **对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？**
  - **4R机械臂举例——关节角参数化**

基于末端位置建方程

$$\begin{cases} c_1\left(a_4c_2c_3c_4-a_4s_2s_4+d_3s_2\right)+a_4s_1s_3c_4=p_x & (1)\\ s_1\left(a_4c_2c_3c_4-a_4s_2s_4+d_3s_2\right)-a_4c_1s_3c_4=p_y & (2)\\ d_1-d_3c_2+a_4c_2s_4+a_4s_2c_3c_4=p_z & (3) \end{cases}$$

对(1)、(2)进行处理后

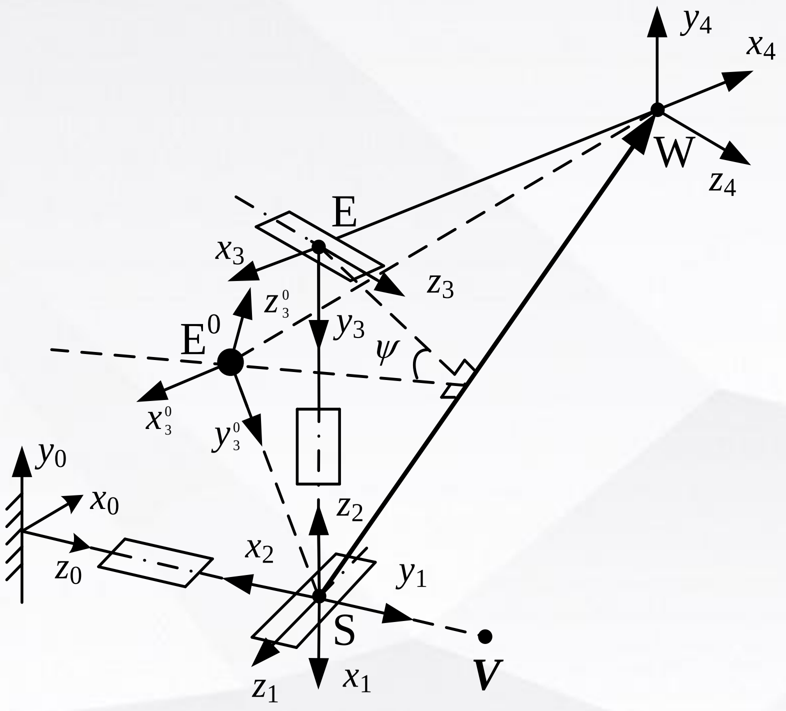
$$\begin{cases} a_4s_3c_4=s_1p_x-c_1p_y & (4)\\ a_4c_2c_3c_4-a_4s_2s_4+d_3s_2=c_1p_x+s_1p_y & (5) \end{cases}$$

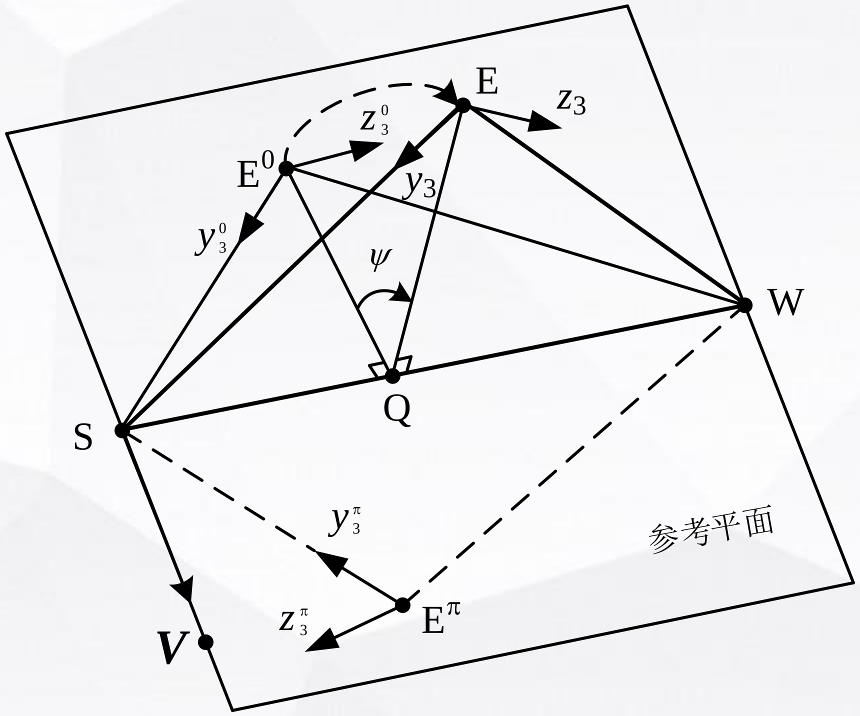
式(3)、(4) 中的任一个式子，仅包含$\theta_1\sim\theta_3$中的两个。因此，给定一个可求另一个 $\Longrightarrow$ 关节角参数化方法

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 4R机械臂举例——臂型角参数化

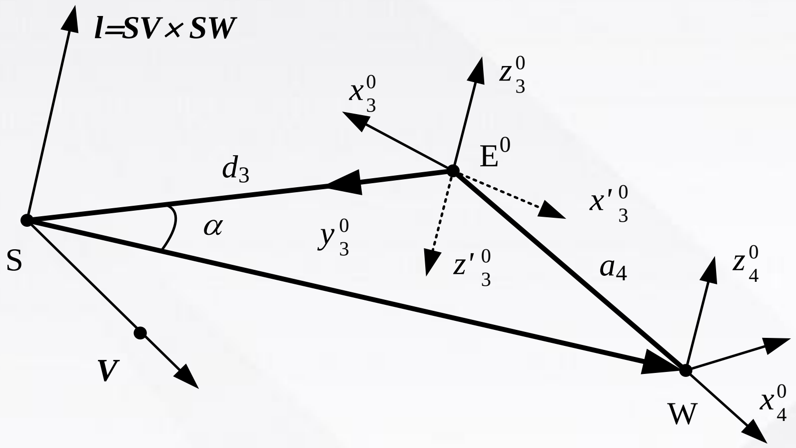




臂型角 ψ 为当前臂型面SEW与参数面SE^{0}W的夹角

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程?

➢ 4R机械臂举例——臂型角参数化



①已知条件

$$ {}^0\boldsymbol{R}_3^0 = \left[{}^0\boldsymbol{x}_3^0,\ {}^0\boldsymbol{y}_3^0,\ {}^0\boldsymbol{z}_3^0\right] $$ （ψ=0时的肘部姿态，已知）

$$ {}^0\boldsymbol{R}_3(\psi) = {}^0\boldsymbol{R}_\psi \bullet {}^0\boldsymbol{R}_3^0 = \begin{bmatrix} r_{11\psi} & r_{12\psi} & r_{13\psi} \\ r_{21\psi} & r_{22\psi} & r_{23\psi} \\ r_{31\psi} & r_{32\psi} & r_{33\psi} \end{bmatrix} $$ （给定ψ后，已知）

②肘部姿态的表达式

$$ {}^0\boldsymbol{R}_3 = {}^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2\,{}^2\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} s_1s_3+c_1c_2c_3 & -c_1s_2 & s_1c_3-c_1c_2s_3 \\ -c_1s_3+s_1c_2c_3 & -s_1s_2 & -c_1c_3-s_1c_2s_3 \\ s_2c_3 & c_2 & -s_2s_3 \end{bmatrix} $$

③求解结果

$$ \begin{cases} \theta_2 = \pm\arccos r_{32\psi} \\ \theta_1 = \operatorname{atan2}\left(-r_{22\psi}/s_2,\ -r_{12\psi}/s_2\right) = \operatorname{atan2}\left(-r_{22\psi}s_2,\ -r_{12\psi}s_2\right) \\ \theta_3 = \operatorname{atan2}\left(-r_{33\psi}/s_2,\ r_{31\psi}/s_2\right) = \operatorname{atan2}\left(-r_{33\psi}s_2,\ r_{31\psi}s_2\right) \end{cases} $$

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 4R机械臂举例——算例分析

给定末端位置

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 0.4677 \\ -0.1120 \\ 0.0577 \end{bmatrix} $$

关节角参数化方法求解结果

序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	备注
1	10	20.0000	30.0000	40.0000	以θ_1为冗余参数
2		102.4449	150.0000	40.0000	
3		102.4449	-30.0000	140.0000	
4		20.0000	-150.0000	140.0000	

序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	备注
1	10.0000	20.0000	30.0000	40.0000	以θ_2为冗余参数
2	-36.9289		-30.0000	40.0000	
3	-36.9289		150.0000	140.0000	
4	10.0000		-150.0000	140.0000	

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 4R机械臂举例——算例分析

给定末端位置

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 0.4677 \\ -0.1120 \\ 0.0577 \end{bmatrix} $$

臂型角参数化方法求解结果

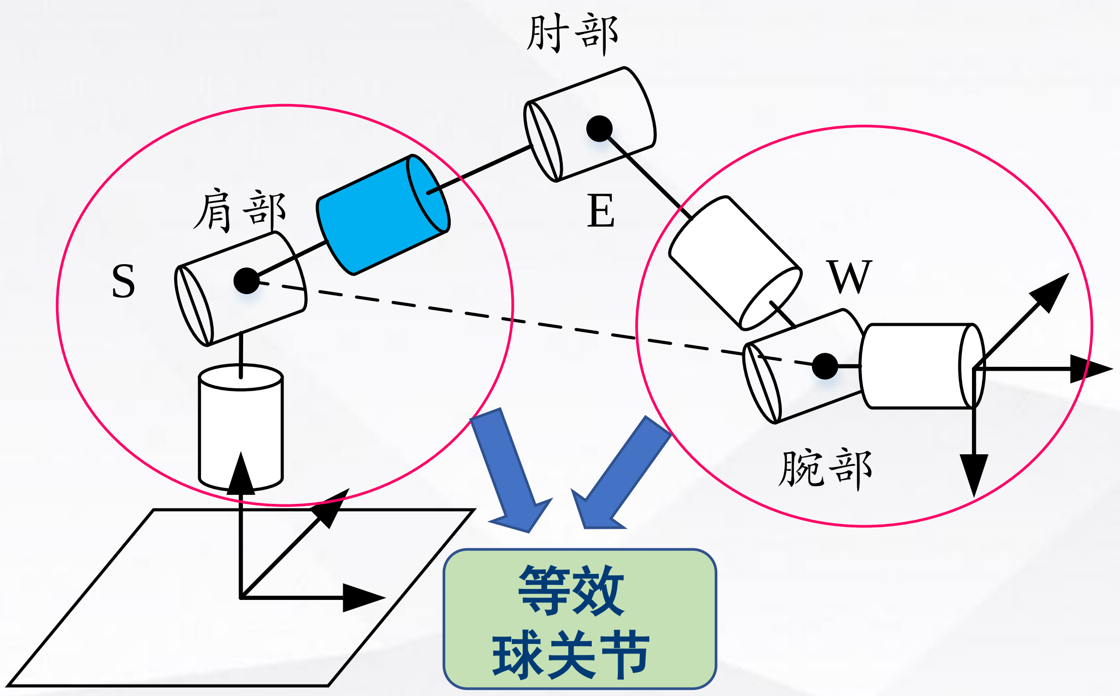
序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	给定ψ
1	31.93	29.96	63.39	40	30
2	-148.07	-29.96	-116.61	40	
3	31.93	29.96	-116.61	140	
4	-148.07	-29.96	63.39	140	

序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	给定ψ
1	19.7055	95.2758	136.60	40	130
2	-160.2945	-95.2758	-43.40	40	
3	19.7055	95.2758	-43.40	140	
4	-160.2945	-95.2758	136.60	140	

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

➢ 7R机械臂举例——构型分析



① 与原6R机械臂相比增加了一个Roll关节（即关节3）

② 前三个关节形成等效球关节（球肩）

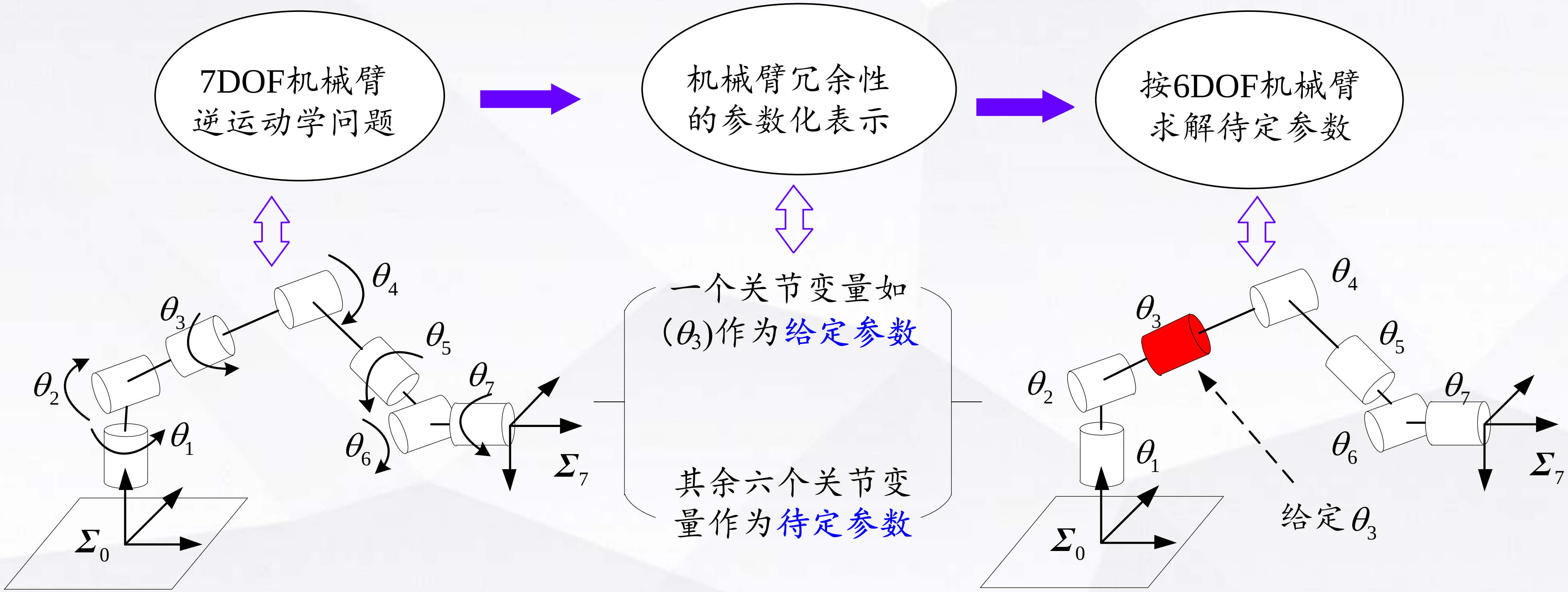
③ 后三个关节形成等效球关节腕（球腕）

④ 肩部中心S到腕部中心W的长度SW仅与θ_4有关

5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程？

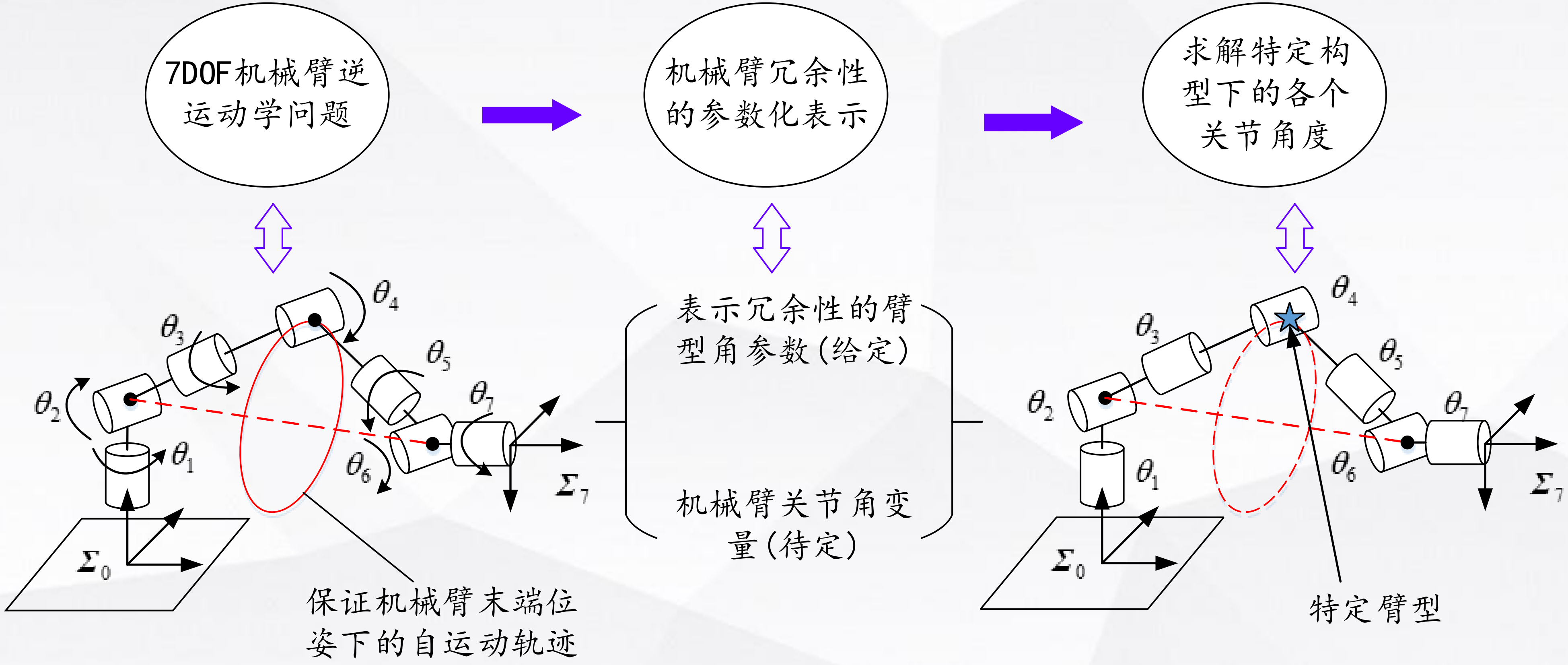
➢ 7R机械臂举例——关节角参数化



5.4.2 问题的思考

◆ 对于冗余机械臂如何求逆运动学方程?

➢ 7R机械臂举例——臂型角参数化



THANKS

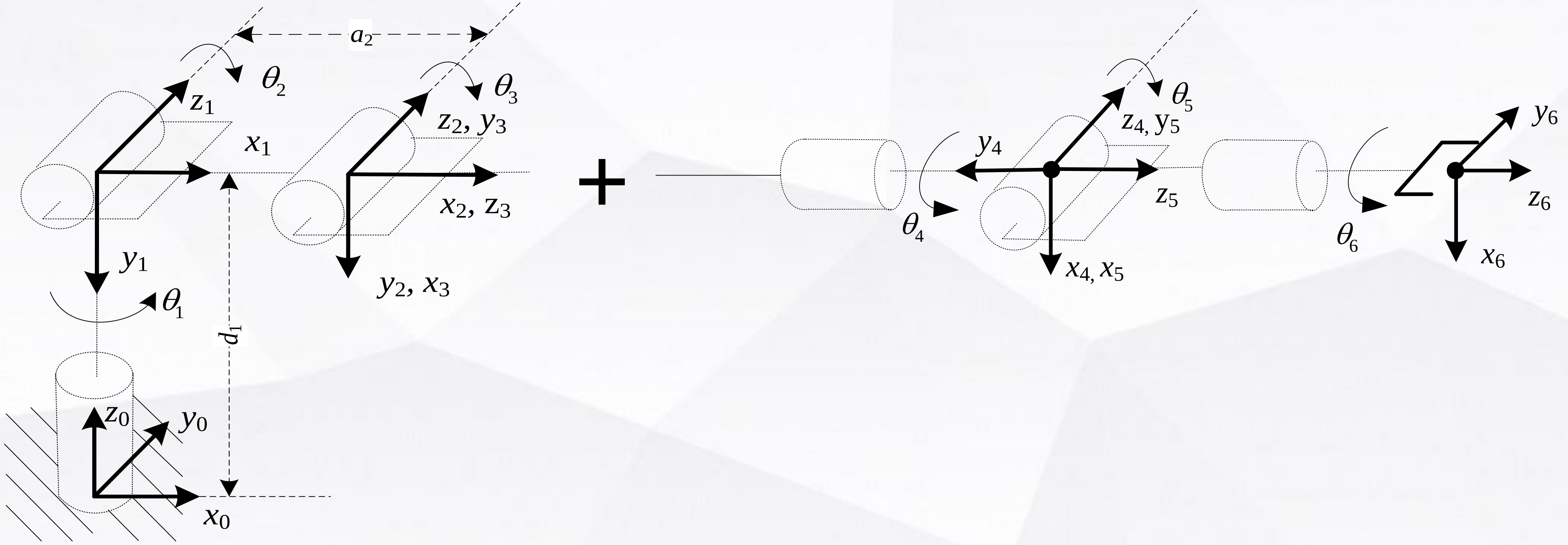
谢 谢!

附录一 腕部分离6R机械臂逆运动学

◆ 腕部分离6R机械臂构型特点

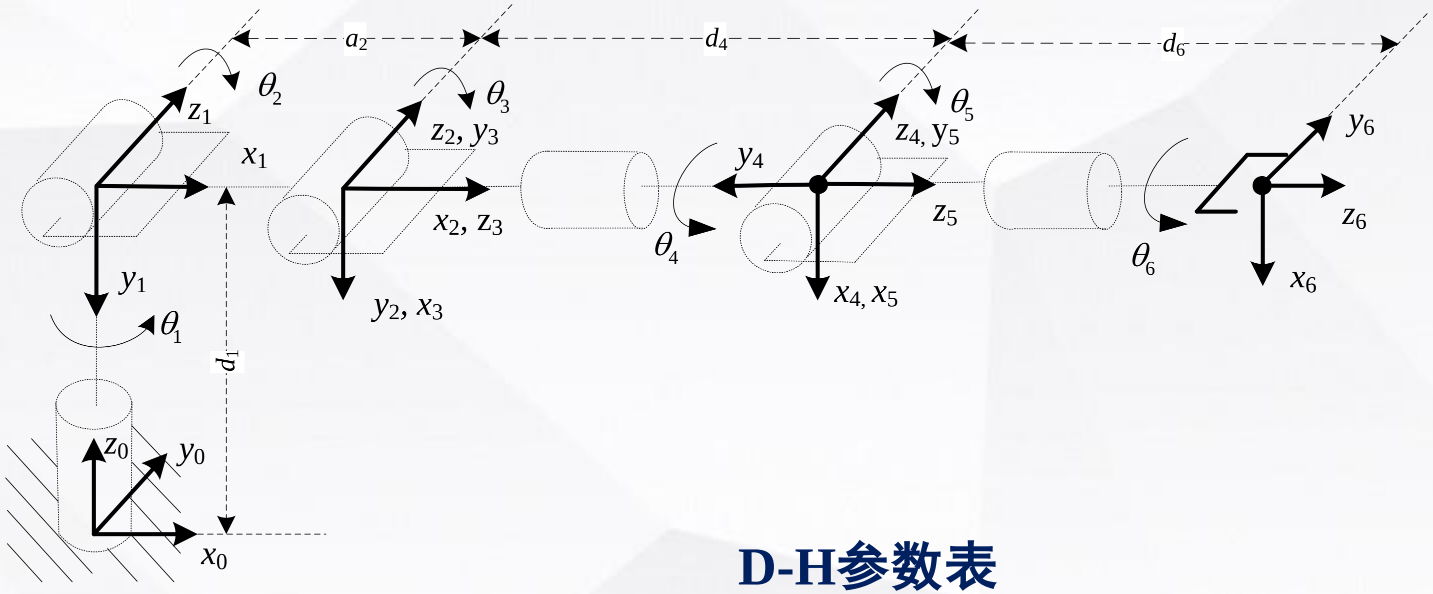
为实现末端定位、定姿，可结合3R机械臂的特点，构建6R机械臂：

- ➢ 肘部定位——通过3R肘机械臂确定腕部位置
- ➢ 腕部定姿——3R球腕机械臂确定最终姿态



正运动学表达式

◆ D-H坐标系及其参数表



D-H参数表

连杆 i	$\theta_i(°)$	$\alpha_i(°)$	a_i(mm)	d_i(mm)
1	0	-90	0	d_1
2	0	0	a_2	0
3	90	90	0	0
4	0	-90	0	d_4
5	0	90	0	0
6	0	0	0	d_6

正运动学表达式

◆ 正运动学方程

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_6 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{T}_2 \cdots {}^{5}\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
n_x = -\left[c_1 s_{23} s_5 + \left(s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4\right) c_5\right] c_6 - \left(s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4\right) s_6
$$

$$
n_y = -\left[s_1 s_{23} s_5 - \left(c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4\right) c_5\right] c_6 + \left(c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4\right) s_6
$$

$$
n_z = -\left(c_{23} s_5 + s_{23} c_4 c_5\right) c_6 + s_{23} s_4 s_6
$$

$$
o_x = \left[c_1 s_{23} s_5 + \left(s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4\right) c_5\right] s_6 - \left(s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4\right) c_6
$$

$$
o_y = \left[s_1 s_{23} s_5 - \left(c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4\right) c_5\right] s_6 + \left(c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4\right) c_6
$$

$$
o_z = \left(c_{23} s_5 + s_{23} c_4 c_5\right) s_6 + s_{23} s_4 c_6
$$

正运动学表达式

◆ 正运动学方程

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_{6} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{T}_{2}\cdots{}^{5}\boldsymbol{T}_{6} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

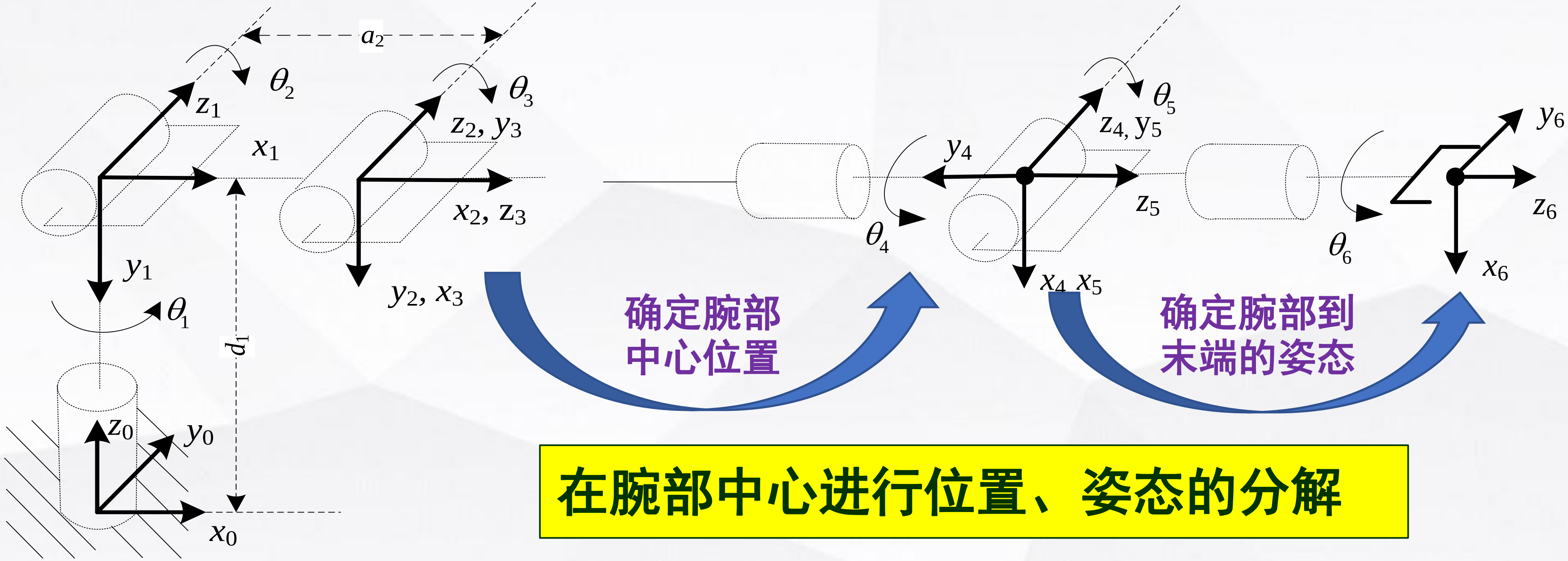
$$
\begin{aligned}
a_x &= c_1 s_{23} c_5 - \left(s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4\right) s_5 \\
a_y &= s_1 s_{23} c_5 + \left(c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4\right) s_5 \\
a_z &= c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5 \\
p_x &= a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 \left[c_1 s_{23} c_5 - \left(s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4\right) s_5\right] \\
p_y &= a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 \left[s_1 s_{23} c_5 + \left(c_1 s_4 + s_1 c_{23} c_4\right) s_5\right] \\
p_z &= d_1 - a_2 s_2 + d_4 c_{23} + d_6 \left(c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5\right)
\end{aligned}
$$

逆运动学求解思路

◆ 求解思路——位置、姿态分解

关键：将6R机械臂分解为3R肘机械臂和3R腕机械臂

- 3R肘机械臂 → 求解前三个关节角（肘部逆解）
- 3R腕机械臂 → 求解后三个关节角（腕部逆解）



在腕部中心进行位置、姿态的分解

肘部关节角求解

◆ 腕部中心位置的表达式

➢ 腕部中心即{4}系原点，因此，可通过${}^{0}T_4$得其表达式

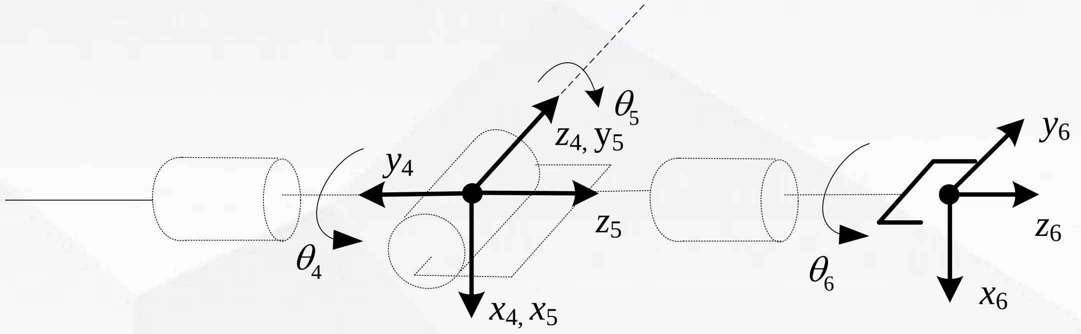
$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_4 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \cdots {}^{3}\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -c_1s_{23} & -c_1c_{23}s_4 - s_1c_4 & a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & -s_1s_{23} & -s_1c_{23}s_4 + c_1c_4 & a_2s_1c_2 + d_4s_1s_{23} \\ -s_{23}c_4 & -c_{23} & s_{23}s_4 & d_1 - a_2s_2 + d_4c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

其中的位置矢量为

$$
{}^{0}\boldsymbol{p}_w = {}^{0}\boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} \\ a_2s_1c_2 + d_4s_1s_{23} \\ d_1 - a_2s_2 + d_4c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2c_2 + d_4s_{23}\right) \\ s_1\left(a_2c_2 + d_4s_{23}\right) \\ d_1 - a_2s_2 + d_4c_{23} \end{bmatrix}
$$

肘部关节角求解

◆ 腕部中心位置的已知量



➢ 根据臂型特点，可知**末端**和**腕部中心**满足

$$ {}^0\boldsymbol{p}_6 = {}^0\boldsymbol{p}_4 + d_6\,{}^0\boldsymbol{z}_6 \Longrightarrow {}^0\boldsymbol{p}_4 = {}^0\boldsymbol{p}_6 - d_6\,{}^0\boldsymbol{z}_6 $$

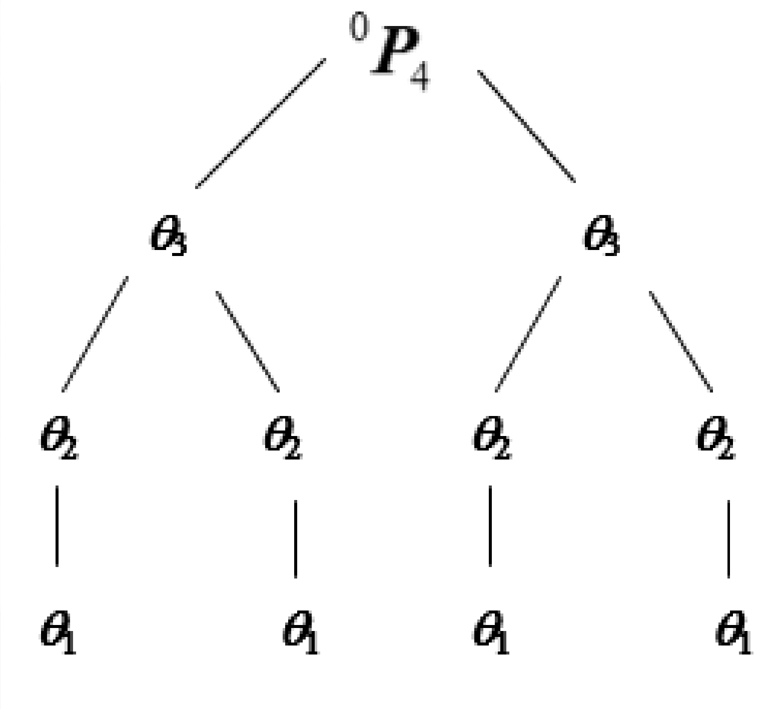
➢ 对于给定的${}^0\boldsymbol{T}_6$，可确定${}^0\boldsymbol{p}_4$，即（**p6**和**z6**都为**已知量**）

$$ {}^0\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{根据}p_6\text{和}p_4\text{的关系}} {}^0\boldsymbol{p}_4 = {}^0\boldsymbol{p}_6 - d_6\,{}^0\boldsymbol{z}_6 = \begin{bmatrix} p_x - d_6 a_x \\ p_y - d_6 a_y \\ p_z - d_6 a_z \end{bmatrix} $$

肘部关节角求解

- **结合表达式与已知量构建方程组**
  - 令${}^0p_4$的表达式和已知量相等，可得

$$
\begin{cases}
p_x - d_6 a_x = a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} = c_1\left(a_2 c_2 + d_4 s_{23}\right) \\
p_y - d_6 a_y = a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} = s_1\left(a_2 c_2 + d_4 s_{23}\right) \\
p_z - d_6 a_z = d_1 - a_2 s_2 + d_4 c_{23}
\end{cases}
$$



采用类似于3R肘机械臂的方法，可以解出θ_1、θ_2、θ_3。

肘部关节角求解

◆ 求解方程组

$$\begin{cases} \theta_3 = \mathrm{asin}\left(\dfrac{\left(p_x - d_6 a_x\right)^2 + \left(p_y - d_6 a_y\right)^2 + \left(p_z - d_6 a_z - d_1\right)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2 a_2 d_4}\right) \\ \theta_3 = \pi - \mathrm{asin}\left(\dfrac{\left(p_x - d_6 a_x\right)^2 + \left(p_y - d_6 a_y\right)^2 + \left(p_z - d_6 a_z - d_1\right)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2 a_2 d_4}\right) \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \mathrm{asin}\left(\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \phi \\ \pi - \left(\mathrm{asin}\left(\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \phi\right) \end{cases}$$

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}\left(\frac{p_y - d_6 a_y}{a_2 c_2 + d_4 s_{23}}, \frac{p_x - d_6 a_x}{a_2 c_2 + d_4 s_{23}}\right)$$

◆ 腕部到末端的姿态——已知量

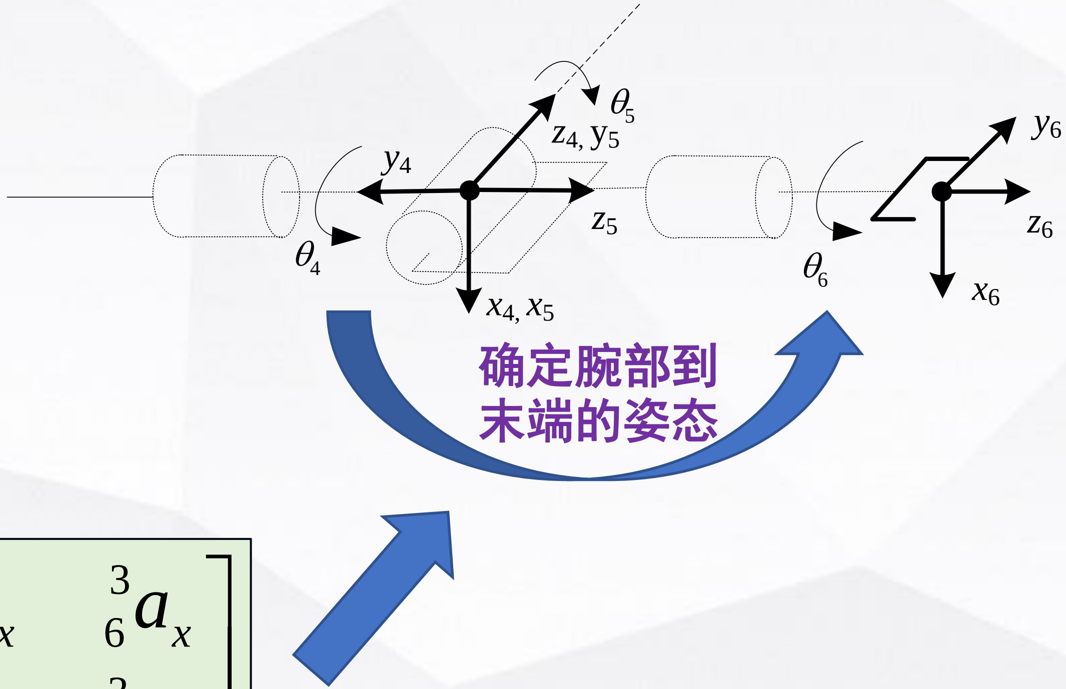
➢ 当θ_1~θ_3解出后，可得$^0T_3$：

$$^0T_3={}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3=\begin{bmatrix}{}^0\boldsymbol{R}_3 & {}^0\boldsymbol{p}_3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中，$^0R_3$为已知项。

➢ 结合给定的$^0R_6$，可得：

$$^3\boldsymbol{R}_6=\left({}^0\boldsymbol{R}_3\right)^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{R}_6=\begin{bmatrix}{}^3_6n_x & {}^3_6o_x & {}^3_6a_x\\ {}^3_6n_y & {}^3_6o_y & {}^3_6a_y\\ {}^3_6n_z & {}^3_6o_z & {}^3_6a_z\end{bmatrix}$$



腕部关节角求解

◆ 腕部到末端的姿态——表达式

➢ 根据D-H建模方法，可得${}^0T_3$解析式，即：

$$
{}^3T_6={}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6+c_4s_6 & -s_4c_5s_6+c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4+d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

其中，姿态部分即${}^3R_6$的表达式为：

$$
{}^3R_6=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6+c_4s_6 & -s_4c_5s_6+c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}
$$

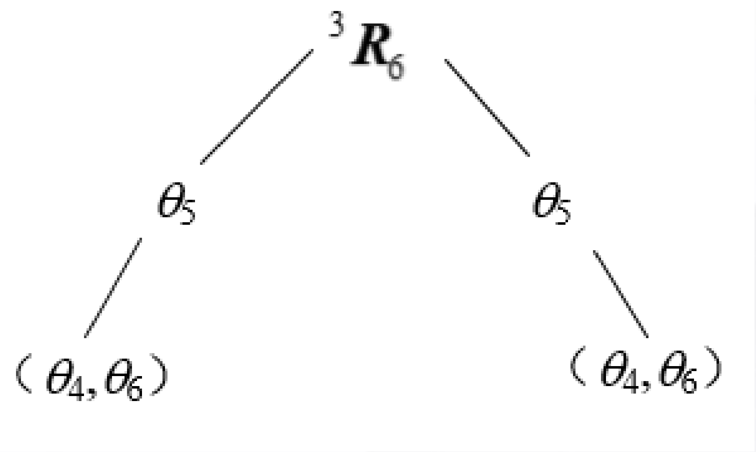
腕部关节角求解

◆ 结合表达式与已知量构建方程组

➢ 根据表达式和已知量，得如下方程组：

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3_6n_x & {}^3_6o_x & {}^3_6a_x \\ {}^3_6n_y & {}^3_6o_y & {}^3_6a_y \\ {}^3_6n_z & {}^3_6o_z & {}^3_6a_z \end{bmatrix}$$

方程形式类似于**3R球腕**机械臂的情况，也类似于**欧拉角与R矩阵**的关系。



腕部关节角求解

◆ 腕部求解关节角求解

采用类似于3R球腕机械臂的方法，即可求出（2组解）：

$$if\left({}_{6}^{3}a_z=\pm 1\right)$$

$$\begin{cases}\theta_5=0 \text{ or } \pi \\ \theta_4\pm\theta_6=\operatorname{atan2}\left(-{}_{6}^{3}o_x,{}_{6}^{3}o_y\right)\end{cases}$$

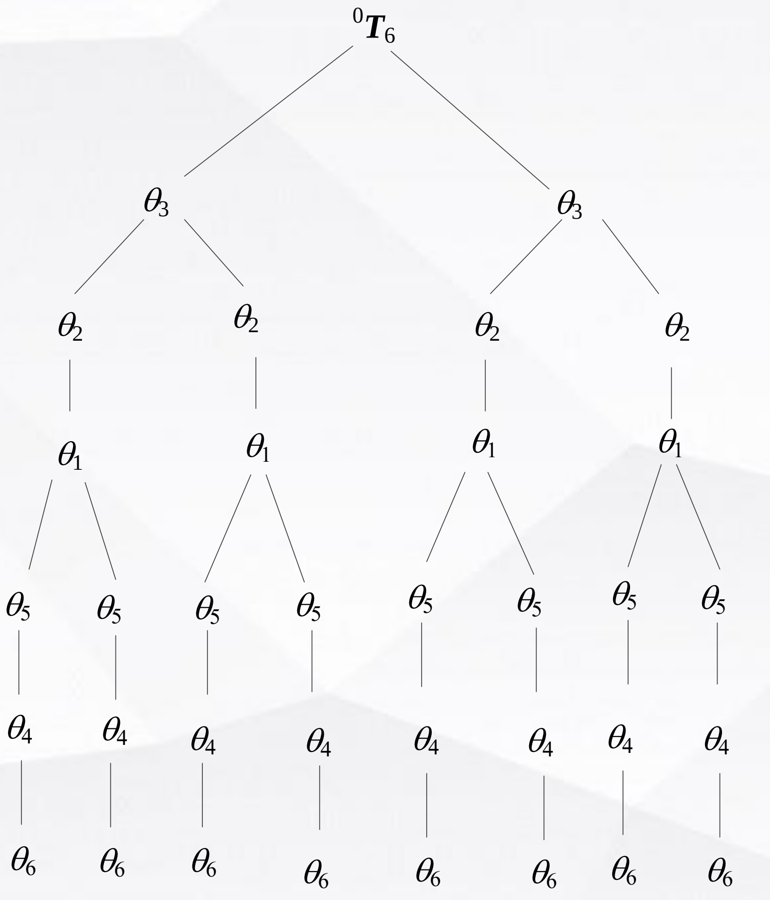
$$else$$

$$\begin{cases}\theta_5=\operatorname{acos}\left({}_{6}^{3}a_z\right), \quad \text{or} \quad \theta_5=-\operatorname{acos}\left({}_{6}^{3}a_z\right) \\ \theta_4=\operatorname{atan2}\left({}_{6}^{3}a_y/s_5,\ {}_{6}^{3}a_x/s_5\right)=\operatorname{atan2}\left({}_{6}^{3}a_y s_5,\ {}_{6}^{3}a_x s_5\right) \\ \theta_6=\operatorname{atan2}\left({}_{6}^{3}o_z/s_5,\ -{}_{6}^{3}n_z/s_5\right)=\operatorname{atan2}\left({}_{6}^{3}o_z s_5,\ -{}_{6}^{3}n_z s_5\right)\end{cases}$$

讨论：腕部分离6R机器人，逆运动学有多少组?

求解流程总结与实例分析

◆ 求解流程小结



肘部运动学(腕部中心位置)

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_4 = {}^{0}\boldsymbol{p}_6 - d_6\,{}^{0}\boldsymbol{z}_6 = \begin{bmatrix} p_x - d_6 a_x \\ p_y - d_6 a_y \\ p_z - d_6 a_z \end{bmatrix} \quad \text{（已知量）} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} c_1\left(a_2 c_2 + d_4 s_{23}\right) \\ s_1\left(a_2 c_2 + d_4 s_{23}\right) \\ d_1 - a_2 s_2 + d_4 c_{23} \end{bmatrix} \quad \text{（关于变量的表达式）} $$

腕部运动学(腕部姿态)

$$ {}^{3}\boldsymbol{R}_6 = \left({}^{0}\boldsymbol{R}_3\right)^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\boldsymbol{R}_6 = \begin{bmatrix} {}^{3}_{6}n_x & {}^{3}_{6}o_x & {}^{3}_{6}a_x \\ {}^{3}_{6}n_y & {}^{3}_{6}o_y & {}^{3}_{6}a_y \\ {}^{3}_{6}n_z & {}^{3}_{6}o_z & {}^{3}_{6}a_z \end{bmatrix} \quad \text{（已知量）} $$

$$ {}^{3}\boldsymbol{R}_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad \text{（表达式）} $$

求解流程总结与实例分析

- **给定：**

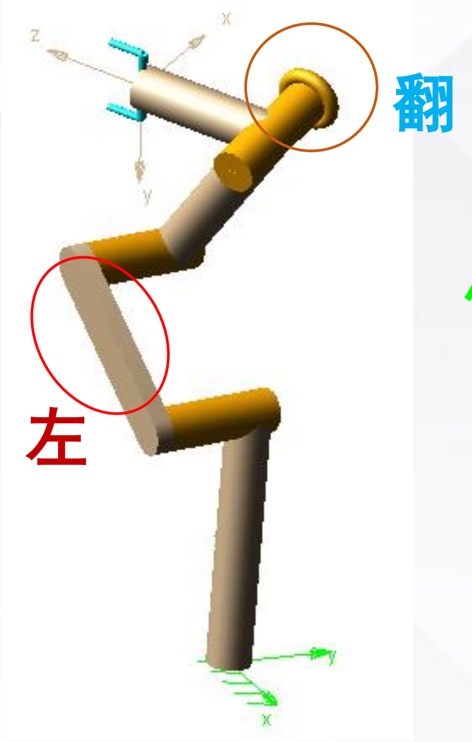
$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5173 & -0.1592 & -0.8409 & -0.3390 \\ 0.8335 & 0.1290 & -0.5372 & -0.2153 \\ 0.1940 & -0.9788 & 0.0660 & 1.5074 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

求得8组解如下

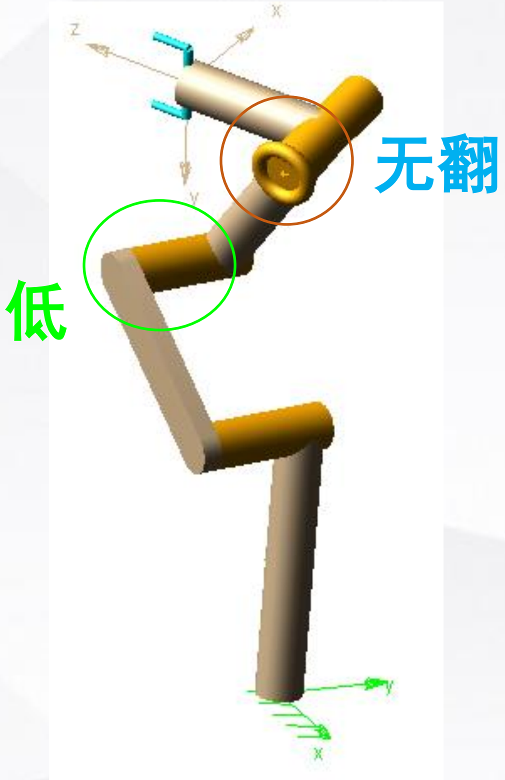
连杆 i	$\theta_1/°$	$\theta_2/°$	$\theta_3/°$	$\theta_4/°$	$\theta_5/°$	$\theta_6/°$	臂型特征
1	-170.0000	-39.6111	0.0000	26.9951	122.4542	-84.3502	左低臂-翻转腕
2	-170.0000	-39.6111	0.0000	-153.0049	-122.4542	95.6498	左低臂-无翻腕
3	10.0000	-40.0000	0.0000	-150.0000	50.0000	-120.0000	右高臂-翻转腕
4	10.0000	-40.0000	0.0000	30.0000	-50.0000	60.0000	右高臂-无翻腕
5	-170.0000	-140.0000	180.0000	30.0000	50.0000	-120.0000	左高臂-翻转腕
6	-170.0000	-140.0000	180.0000	-150.0000	-50.0000	60.0000	左高臂-无翻腕
7	10.0000	-140.3889	180.0000	-153.0049	122.4542	-84.3502	右低臂-翻转腕
8	10.0000	-140.3889	180.0000	26.9951	-122.4542	95.6498	右低臂-无翻腕

求解流程总结与实例分析

➢ 八组关节角度对应的臂型如下（前4）

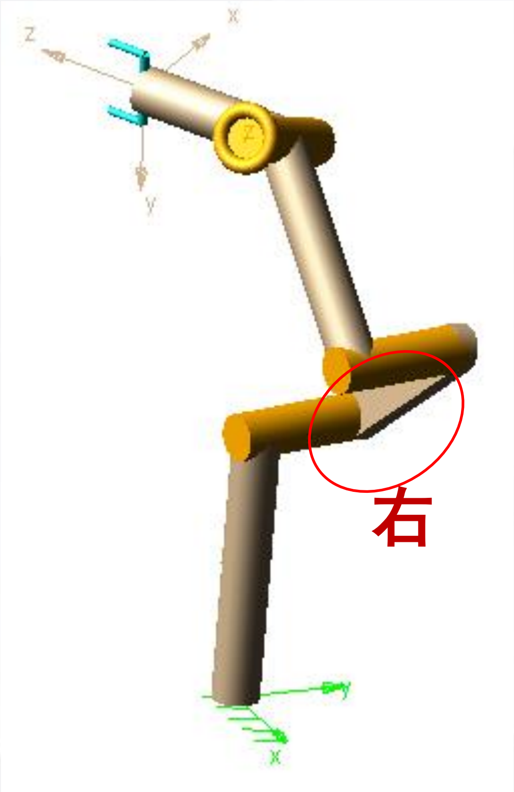


(a) 左低臂-翻转腕



(b) 左低臂-无翻转腕

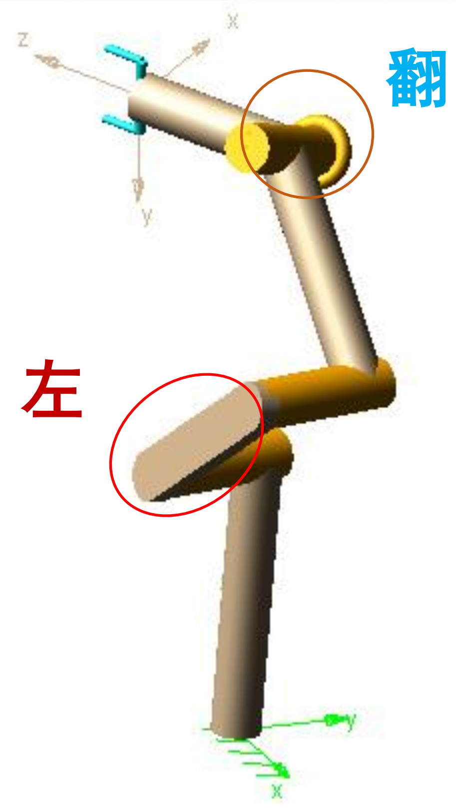
(c) 右高臂-翻转腕



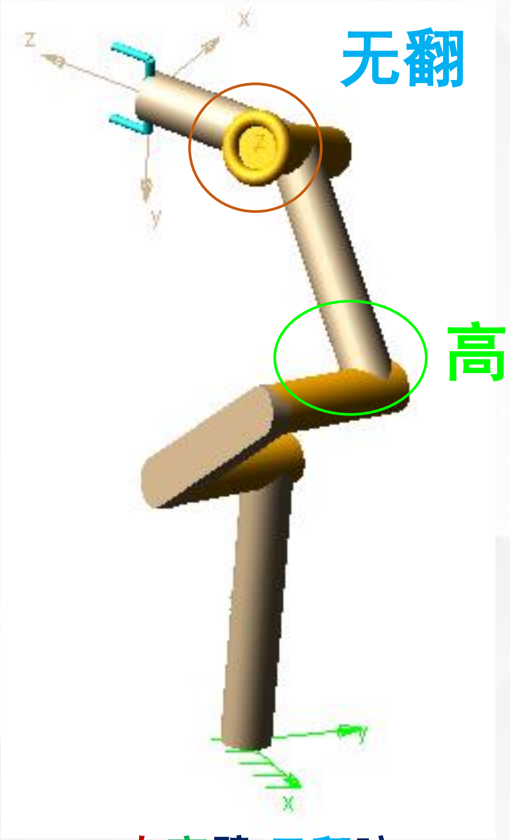
(d) 右高臂-无翻腕

求解流程总结与实例分析

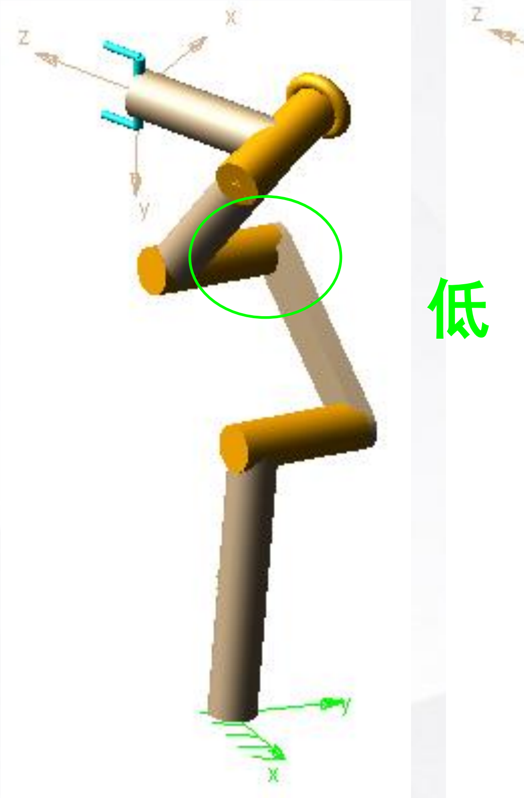
➤ 八组关节角度对应的臂型如下（后4）：



(e) 左高臂-翻转腕



(f) 左高臂-无翻腕



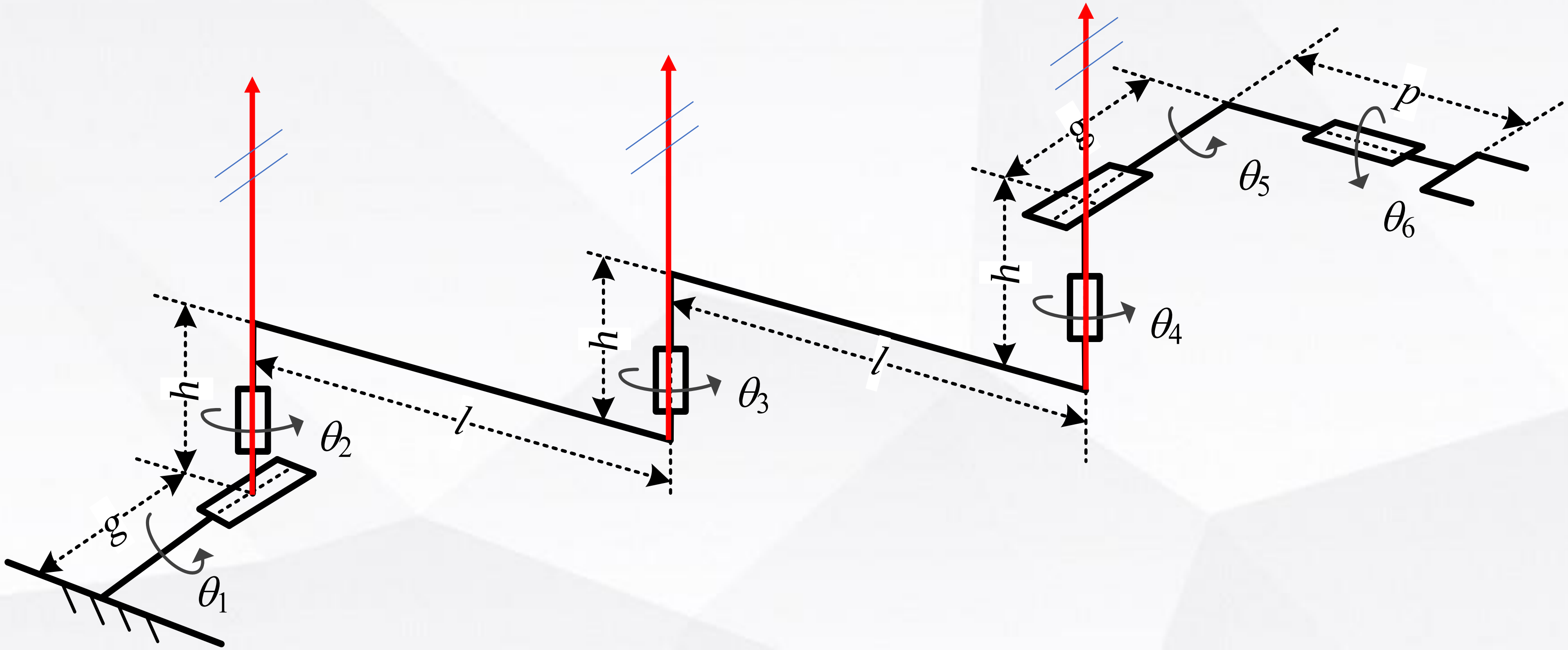
(g)右低臂-翻转腕

(h) 右低臂-无翻腕

附录二 三轴平行6R机械臂逆运动学

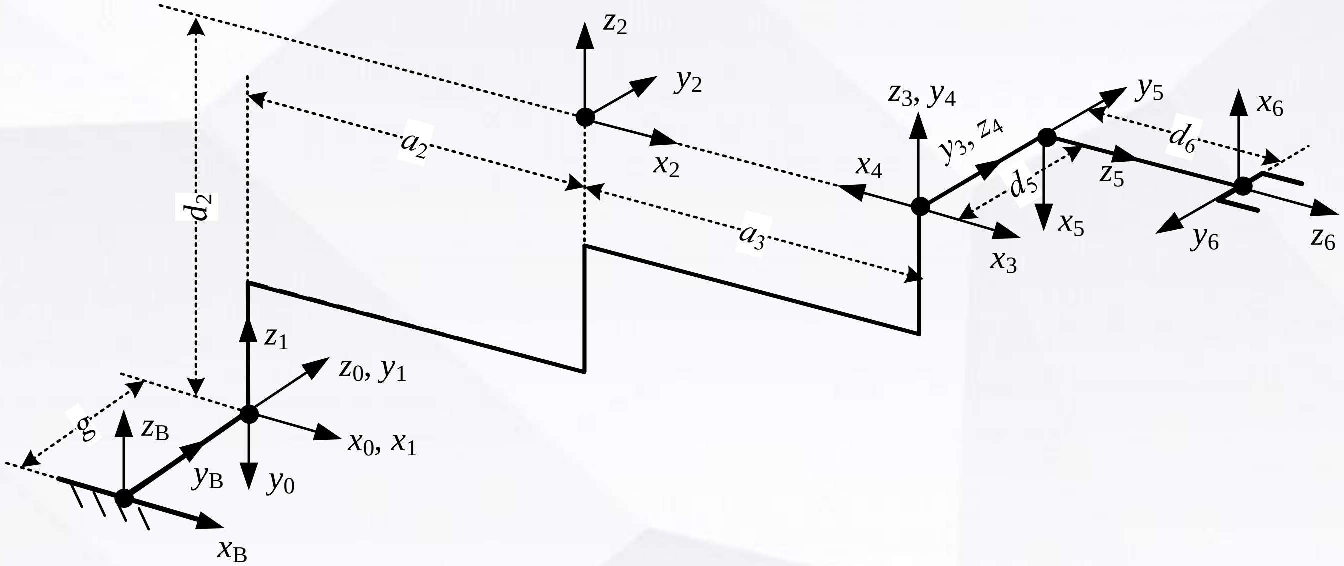
◆ 构型特点

特点：关节2、3、4三轴平行，构成一个平面



正运动学表达式

◆ D-H坐标系及其参数表



连杆 i	θ_i(°)	α_i(°)	a_i(m)	d_i(m)
1	0	90	0	0
2	0	0	l	$3h$
3	0	0	l	0
4	180	90	0	0
5	-90	90	0	g
6	180	0	0	p

正运动学表达式

◆ 相邻坐标系间的齐次变换矩阵

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{2}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{4}\boldsymbol{T}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
{}^{5}\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

正运动学表达式

◆ 正运动学方程推导

根据臂型特点，将共面三轴一起考虑，${}^0T_6 = {}^0T_1\ {}^1T_4\ {}^4T_6$

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1T_4 = {}^1T_2\ {}^2T_3\ {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_{234} & \boxed{0} & s_{234} & \boxed{a_2c_2 + a_3c_{23}} \\ s_{234} & \boxed{0} & -c_{234} & \boxed{a_2s_2 + a_3s_{23}} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^4T_6 = {}^4T_5\ {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & d_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5c_6 & -c_5 & -d_6c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

绕z_1[redacted]

\+

沿x_1、y_1[redacted]

共面三轴的运动

正运动学表达式

◆ 正运动学方程推导

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_6 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1\, {}^{1}\boldsymbol{T}_4\, {}^{4}\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ n_x = (c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5) c_6 + c_1 s_{234} s_6 $$

$$ n_y = (s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5) c_6 + s_1 s_{234} s_6 $$

$$ n_z = s_{234} c_5 c_6 - c_{234} s_6 $$

$$ o_x = -(c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5) s_6 + c_1 s_{234} c_6 $$

$$ o_y = -(s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5) s_6 + s_1 s_{234} c_6 $$

$$ o_z = -s_{234} c_5 s_6 - c_{234} c_6 $$

$$ a_x = c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5 $$

$$ a_y = s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5 $$

$$ a_z = s_{234} s_5 $$

$$ p_x = c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + s_{234} d_5) + s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5) $$

$$ p_y = s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + s_{234} d_5) - c_1 d_2 + d_6 (s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5) $$

$$ p_z = a_2 s_2 + a_3 s_{23} - c_{234} d_5 + s_{234} s_5 d_6 $$

逆运动学求解方程推导

◆ 求解思路——运动分解

关键：将6DOF运动分解为面内3DOF及面外3DOF运动

➢ **共面关节组——θ_2、θ_3、θ_4**

$$
{}^1\boldsymbol{T}_4 = {}^1\boldsymbol{T}_2\,{}^2\boldsymbol{T}_3\,{}^3\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} c_{234} & 0 & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} \\ s_{234} & 0 & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

x_1-y_1面内运动：沿x_1、y_1的平动及绕z1的转动

面外运动：z_1分量与θ_2~θ_4无关，由θ_5、θ_6实现

➢ **非共面关节组——θ_1、θ_5、θ_6**

$$
{}^1\boldsymbol{T}_6 = {}^1\boldsymbol{T}_4\,{}^4\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6 + s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6 & c_{234}s_5 & a_2c_2 + a_3c_{23} + d_5s_{234} + d_6c_{234}s_5 \\ s_{234}c_5c_6 - c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6 - c_{234}c_6 & s_{234}s_5 & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_5c_{234} + d_6s_{234}s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & d_2 - d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

逆运动学求解方程推导

◆ 运动学分解

➢ 根据下式（其中${}^{0}T_{6}$为已知矩阵）

$${}^{0}\boldsymbol{T}_{6}={}^{0}\boldsymbol{T}_{1}(\theta_{1})\,{}^{1}\boldsymbol{T}_{4}(\theta_{234})\,{}^{4}\boldsymbol{T}_{6}(\theta_{5},\theta_{6})$$

可得

$${}^{0}\boldsymbol{T}_{1}^{-1}(\theta_{1})\,{}^{0}\boldsymbol{T}_{6}={}^{1}\boldsymbol{T}_{4}(\theta_{234})\,{}^{4}\boldsymbol{T}_{6}(\theta_{5},\theta_{6})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{{}^{1}\boldsymbol{T}_{6}(\theta_{1})={}^{1}\boldsymbol{T}_{6}(\theta_{234},\theta_{5},\theta_{6})}$$

逆运动学求解方程推导

◆ 非共面关节角求解

➢ 上面方程左侧化简

$$
{}^{1}\boldsymbol{T}_6={}^{0}\boldsymbol{T}_1^{-1}\,{}^{0}\boldsymbol{T}_6=\begin{bmatrix} c_1n_x+s_1n_y & c_1o_x+s_1o_y & c_1a_x+s_1a_y & c_1p_x+s_1p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \boxed{s_1n_x-c_1n_y \quad s_1o_x-c_1o_y \quad s_1a_x-c_1a_y \quad s_1p_x-c_1p_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

只与θ_1、θ_5、θ_6有关

➢ 上面方程右侧化简

$$
{}^{1}\boldsymbol{T}_6={}^{1}\boldsymbol{T}_4\,{}^{4}\boldsymbol{T}_6=\begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6+s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6+s_{234}c_6 & c_{234}s_5 & a_2c_2+a_3c_{23}+d_5s_{234}+d_6c_{234}s_5 \\ s_{234}c_5c_6-c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6-c_{234}c_6 & s_{234}s_5 & a_2s_2+a_3s_{23}-d_5c_{234}+d_6s_{234}s_5 \\ \boxed{s_5c_6 \quad -s_5s_6 \quad -c_5 \quad d_2-d_6c_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

逆运动学求解方程推导

◆ 非共面关节角求解

$$
{}^{1}\boldsymbol{T}_{6}={}^{0}\boldsymbol{T}_{1}^{-1}\,{}^{0}\boldsymbol{T}_{6}=\begin{bmatrix} c_1n_x+s_1n_y & c_1o_x+s_1o_y & c_1a_x+s_1a_y & c_1p_x+s_1p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ s_1n_x-c_1n_y & s_1o_x-c_1o_y & s_1a_x-c_1a_y & s_1p_x-c_1p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}\boldsymbol{T}_{6}={}^{1}\boldsymbol{T}_{4}\,{}^{4}\boldsymbol{T}_{6}=\begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6+s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6+s_{234}c_6 & c_{234}s_5 & a_2c_2+a_3c_{23}+d_5s_{234}+d_6c_{234}s_5 \\ s_{234}c_5c_6-c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6-c_{234}c_6 & s_{234}s_5 & a_2s_2+a_3s_{23}-d_5c_{234}+d_6s_{234}s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & d_2-d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

求解θ_1和θ_5

➢ 得到三角函数方程

$$
\begin{cases} s_1a_x-c_1a_y=-c_5 \\ s_1p_x-c_1p_y=d_2-d_6c_5 \end{cases}
$$

逆运动学求解方程推导

◆ 非共面关节角求解

$$\begin{cases} s_1 a_x - c_1 a_y = -c_5 & (1) \\ s_1 p_x - c_1 p_y = d_2 - d_6 c_5 & (2) \end{cases}$$

将（1）代入（2）后有

$$\left(p_x - d_6 a_x\right) s_1 - \left(p_y - d_6 a_y\right) c_1 = d_2$$

根据上式求解θ_1

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{d_2}{\sqrt{\left(p_x - d_6 a_x\right)^2 + \left(p_y - d_6 a_y\right)^2}}\right) - \varphi \quad \text{或} \quad \theta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{d_2}{\sqrt{\left(p_x - d_6 a_x\right)^2 + \left(p_y - d_6 a_y\right)^2}}\right) - \varphi$$

进一步解得

$$\theta_5 = \pm\arccos\left(c_1 a_y - s_1 a_x\right)$$

$$\theta_6 = \operatorname{atan2}\left(\frac{o_y c_1 - o_x s_1}{s_5}, \frac{n_x s_1 - n_y c_1}{s_5}\right) = \operatorname{atan2}\left(\left(o_y c_1 - o_x s_1\right) s_5, \left(n_x s_1 - n_y c_1\right) s_5\right)$$

逆运动学求解方程推导

◆ 共面关节角求解

将求解出的θ_1、θ_5、θ_6代入后可求得${}^1T_4$（已知项），即：

$$
{}^1\boldsymbol{T}_4 = {}^0\boldsymbol{T}_1^{-1} \bullet {}^0\boldsymbol{T}_6 \bullet {}^4\boldsymbol{T}_6^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1_4n_x & {}^1_4o_x & {}^1_4a_x & {}^1_4p_x \\ {}^1_4n_y & {}^1_4o_y & {}^1_4a_y & {}^1_4p_y \\ {}^1_4n_z & {}^1_4o_z & {}^1_4a_z & {}^1_4p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

结合表达式${}^1T_4(\theta_2,\theta_3,\theta_4)$，可得方程：

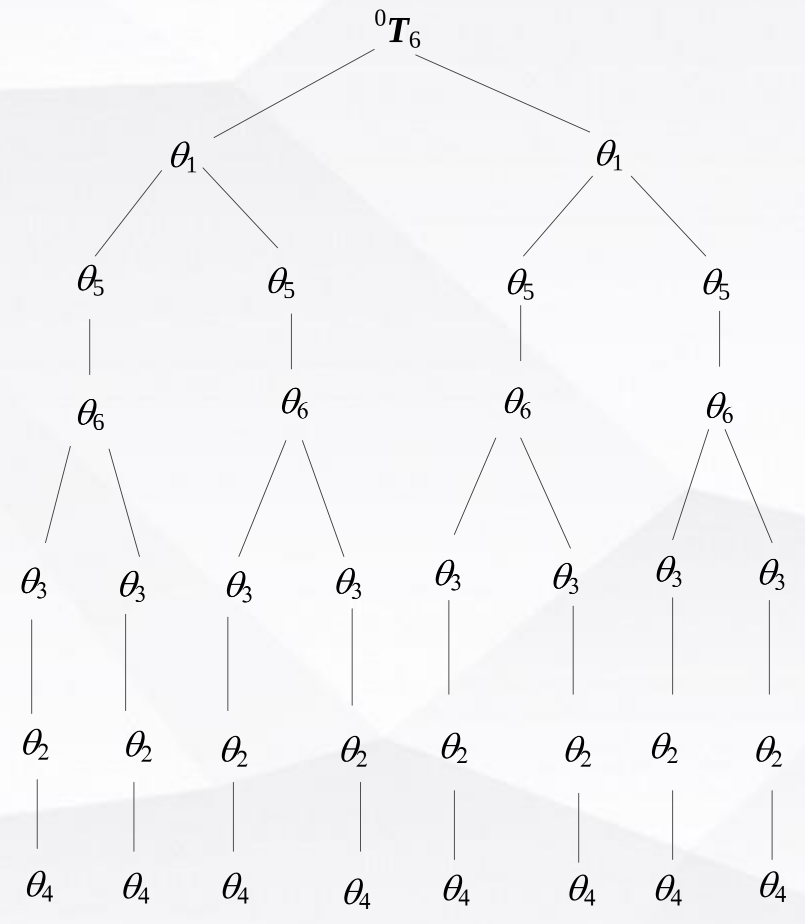
求解θ_2和 θ_3

$$
\begin{bmatrix} {}^1_4n_x & {}^1_4o_x & \boxed{{}^1_4a_x} & \boxed{{}^1_4p_x} \\ {}^1_4n_y & {}^1_4o_y & \boxed{{}^1_4a_y} & \boxed{{}^1_4p_y} \\ {}^1_4n_z & {}^1_4o_z & {}^1_4a_z & {}^1_4p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{234} & 0 & \boxed{s_{234}} & \boxed{a_2c_2 + a_3c_{23}} \\ s_{234} & 0 & \boxed{-c_{234}} & \boxed{a_2s_2 + a_3s_{23}} \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

求解θ_{234}，进一步得θ_4

逆运动学求解方程推导

◆ 求解流程小结



非共面关节组（末端三轴指向、质心位置在{1}中的z轴分量仅与θ_1、θ_5、θ_6有关）

$$\boldsymbol{L}_3\left({}^1\boldsymbol{T}_6\right) = \boldsymbol{L}_3\left({}^0\boldsymbol{T}_1^{-1} \bullet {}^0\boldsymbol{T}_6\right)$$（取齐次变换矩阵的第三行）

$$= \left[s_1 n_x - c_1 n_y,\ s_1 o_x - c_1 o_y,\ s_1 a_x - c_1 a_y,\ s_1 p_x - c_1 p_y\right]$$

$$\boldsymbol{L}_3\left({}^1\boldsymbol{T}_6\right) = \boldsymbol{L}_3\left({}^1\boldsymbol{T}_4\, {}^4\boldsymbol{T}_6\right)$$

$$= \left[s_5 c_6, -s_5 s_6, -c_5, d_2 - d_6 c_5\right]$$

共面关节组（仅影响x, y轴的位置和绕z轴的姿态，因而，根据p_x, p_y, a_x, a_y即可求解）

$${}^1\boldsymbol{T}_4 = {}^0\boldsymbol{T}_1^{-1} \bullet {}^0\boldsymbol{T}_6 \bullet {}^4\boldsymbol{T}_6^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1_4n_x & {}^1_4o_x & {}^1_4a_x & {}^1_4p_x \\ {}^1_4n_y & {}^1_4o_y & {}^1_4a_y & {}^1_4p_y \\ {}^1_4n_z & {}^1_4o_z & {}^1_4a_z & {}^1_4p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$（已知量）

$${}^1\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} c_{234} & 0 & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} \\ s_{234} & 0 & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$（表达式）