Random Systems

物理科学与技术学院 张胜 **2015301020018**

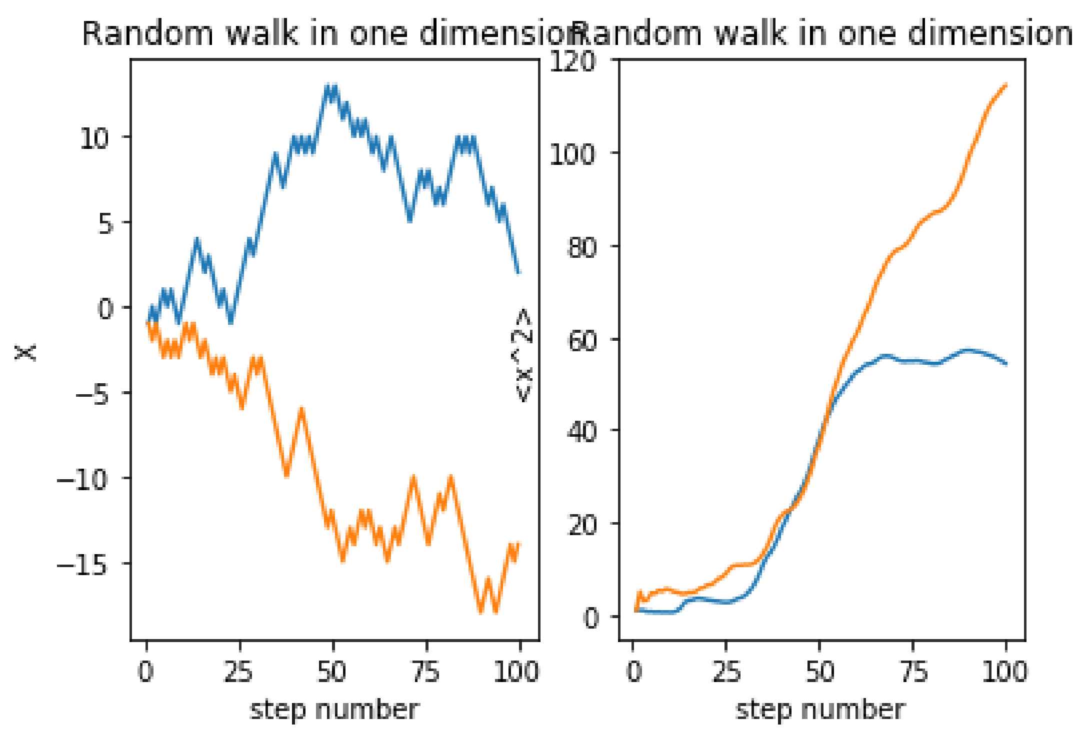
摘要：系统的输入输出及干扰有随机因素，或系统本身带有某种不确定性叫做随机系统。随机过程是随机变量的集合，表示一些随机值随时间变化的系统。这是确定性过程（或确定性系统）的概率对应。在一个随机过程或随机过程中，不是描述一个只能以一种方式演化的过程（例如，一个常微分方程的解），而是存在一些不确定性：即使初始条件（或 起点）是已知的，有几个（通常是无限多的）过程可能发展的方向。

关键词：随机系统，随机过程，不确定性

Random walks

首先先讨论一维 **random walk,**随机粒子走的方向也是随机的，所以第一步选择走左边还是右边都有可能，而且可能性均为 **1/2**，然后接下来的每一步在上一步的基础上向左或

者向右行走的概率也是 **1/2.**在物理过程中，每一步之间的时间大约为一个常数，所以步数与时间成正比。于是下图左边为一维 **random walk** 图，右边为x^2图 （代码-`Random Walk.txt`）



由于每一步之间间隔时间可视为常数，所以以为随机运动的位置也可视为时间的函数，如右图，为 **n** 步之后的位移平方的平均值随步数（时间）的函数，据图像可看做时间的一次线性函数：

$$< x^2 >= 2Dt$$

其中 t 是时间，这里等于步数；因子 D 被称为扩散常数。将这个结果与一个自由粒子的行为进行比较是有用的，自由粒子是以一个恒定速度运动的，并且不受与其他粒子碰撞的阻碍。这样的粒子，我们知道 c = vt，所以它与原点的距离（它的起点）随时间线性增长。而随机行走的粒子与自由粒子有所不同；根据上式它的均方根距离原点的距离只增长为 2Dt。

然后从 Random Systems 到 Diffusion process（扩散过程）

n 步之后的总和为：

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_i s_j \right)$$

和为由于每个步骤之间相互独立且具有相同的概率则：

$$< x_n^2 >= \sum_{i=}^{n} s_i^2$$

描述该物理系统的另一种方式为粒子的密度，如果系统包含大量粒子，则可以方便地定义粒子的密度。

考虑足够大的空间区域包含大量的粒子，从而可以定义密度=质量/体积。然后密度与单位时间单位体积的概率成正比，用（z，t）表示，在时间 t 在（t，y，z）找到一个粒子。因此，p 和 P 服从相同的等式。为了找到这个等式，我们把注意力集中在一个个体 random walks 身上。我们假定它仅限于在一个简单的立方格上，并且每一步都会有一个位移。 P（i，j，k，n）是在时刻 n 在边（i，j，k）发现粒子的概率。由于我们是在一个简单的立方格上，所以有 6 个不同的最近邻点。如果 walk 在 n-1 时刻在其中一个站点上，那么在时刻 n 有一个 1/6 的概率移动到站点（i，j，k）。因此，到达（i，j，k）的总概率是：

$$\begin{aligned}P(i,j,k,n) = \frac{1}{6}[&P(i+1,j,k,n-1) + P(i-1,j,k,n-1) + P(i,j+1,k,n-1) \\ &+ P(i,j-1,k,n-1) + P(i,j,k+1,n-1) + P(i,j,k-1,n-1)]\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{gathered}P(i,j,k,n) - P(i,j,k,n-1) = \frac{1}{6}\{P(i+1,j,k,n-1) - 2P(i,j,k,n-1) + P(i-1,j,k,n-1) + \\ P(i,j=1,k,n+1) - 2P(i,j,k,n-1) + P(i,j-1,k,n-1) + \\ P(i,j,k+1,n-1) - 2P(i,j,k,n-1) + P(i,j,k-1,n-1)\}\end{gathered}$$

我们可以将上式连续这可得：

$$\frac{\partial P(x,y,z,t)}{\partial t} = D\nabla^2 P(x,y,z,t)$$

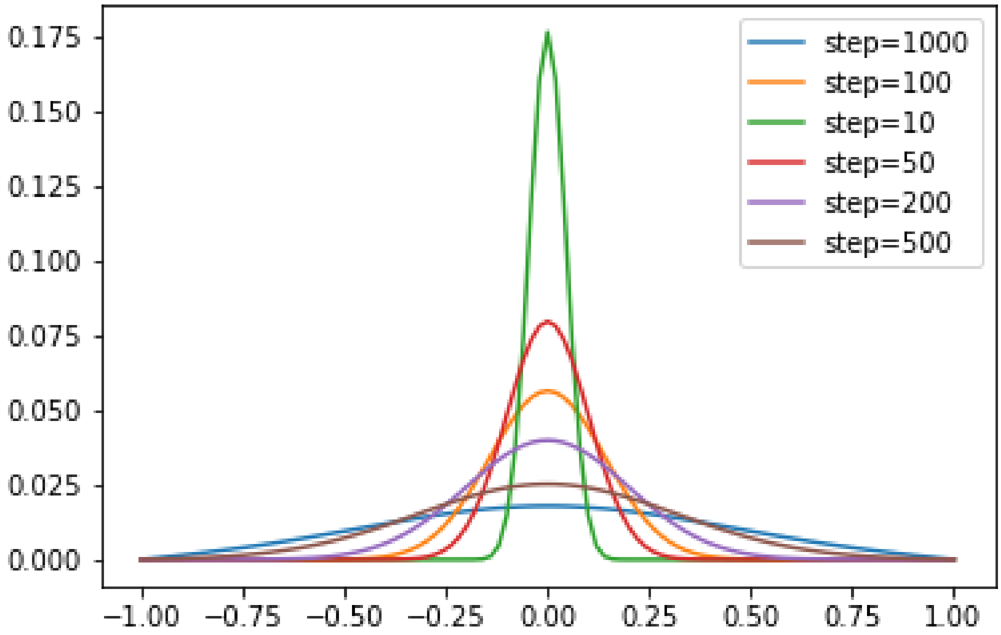
上式中，我们先考虑一维形式：

$$\rho(x,t) = p(i\Delta x, n\Delta t) = p(i,n)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

One Dimension Diffusion

（代码-One_Dimension_Diffusion.txt）



从上图可以看出其位移满足高斯分布：

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sigma} exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\sigma = \sqrt{2Dt}$$

结论：

系统（随机系统）总是倾向于具有更多熵的状态。