



北京理工大学

抓石子游戏中的数学问题

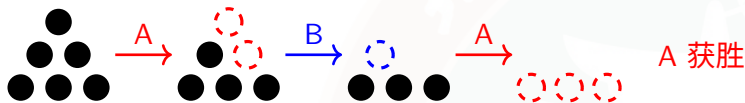
张神星 (合肥工业大学)

北京理工大学

zhangshenxing@hfut.edu.cn

抓石子游戏

- Alice 和 Bob 在玩一个游戏, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.



- 如果一开始石子的个数是 4 的倍数, 那么每次 A 取 x 个之后, B 只需要取 $4 - x$ 个, 就可以保证必胜.
- 如果一开始石子的个数不是 4 的倍数, 那么 A 只需要取 1 ~ 3 个石子, 使得剩下的石子个数是 4 的倍数即可获胜.

必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.
- 如果初始有 n 个石子, 令

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1, & \text{先手必胜;} \\ 0, & \text{后手必胜.} \end{cases}$$

- 那么

$$\mathcal{P}(n) = 1 - \mathcal{P}(n-1)\mathcal{P}(n-2)\mathcal{P}(n-3) = \begin{cases} 1, & 4 \nmid n; \\ 0, & 4 \mid n. \end{cases}$$

- 这个序列 ($n \geq 0$) 形如:

0111 0111 0111 ...

- 我们将这个游戏记为 $\text{SUB}(S)$, 其中 $S \subset \mathbb{N}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比 S 中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 级 | 级 | 级 | 级 | 级 | 级 | 级 | 级 | 级 |
| 必 | 必 | 必 | 必 | 必 | 必 | 必 | 必 | 必 |
| 胜 | 胜 | 胜 | 胜 | 胜 | 胜 | 胜 | 胜 | 胜 |
| 点 | 点 | 点 | 点 | 点 | 点 | 点 | 点 | 点 |

可以变成 $0 \sim m-1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合) 等等.

我们今天只讨论 S 有限的一维一堆情形. subtraction game

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$. 因此我们只需考虑 S 的所有元素公因子为 1 的情形.

- 我们将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

- 那么 $\mathcal{G}(n) \leq k$. 于是 S-G 序列中连续 s_k 项形成的序列只有 $(k+1)^{s_k}$ 种可能, 从而由抽屉原理可知, 存在两个相同的 s_k 项序列. 而 $\mathcal{G}(n)$ 仅由它之前的 s_k 项决定, 所以我们得到:

命题

ultimately periodic

序列 \mathcal{G} 是**最终周期**的, 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n), \forall n \geq \ell$.

- 将最小的 p 称为 $(\mathcal{G}_S$ 或 $\text{SUB}(S)$ 的) ^{period}周期, 最小的 ℓ 称为 ^{pre-period}预周期.

- 于是

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2)\cdots = \mathcal{G}(0)\cdots\mathcal{G}(\ell-1)\underline{\mathcal{G}(\ell)\cdots\mathcal{G}(\ell+p-1)}.$$

这里 $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 \mathcal{H} 重复得到的序列.

- 不难说明, 满足 $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p), \ell \leq \forall n \leq \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期.
- 因此对于任意集合 S , 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 S-G 序列.
- 显然 $p, \ell \leq (k+1)^{s_k}$.

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$.
- $1 \in S$ 不含偶数 $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$.
- 事实上, 如果 $S' = S \cup \{x + pt\}$, 其中 $x \in S, p$ 是 \mathcal{G}_S 周期, 则 $\mathcal{G}_{S'} = \mathcal{G}_S$.
- 设 $S = \{a, c = at + r\}, 0 \leq r < a$, 则

$$\mathcal{G}_S = \begin{cases} (0^a 1^a)^{t/2} 0^r 2^{a-r} 1^r, & 2 \mid t; \\ (0^a 1^a)^{(t+1)/2} 2^r, & 2 \nmid t, \end{cases} \quad \ell = 0, p = c + a \text{ 或 } 2a.$$

这里 $\mathcal{H}^t = \mathcal{H} \cdots \mathcal{H}$ 表示 t 个 \mathcal{H} 重复得到的序列. 注意 $2 \nmid t$ 时这里未必是最小循环节.

例

设 $S = \{1, b, c\}$, $2 \nmid b$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1, b\}} = \underline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = 01$. 我们有

| c | \mathcal{G}_S | ℓ | p |
|-----|--|--------|-------|
| 奇数 | $\underline{\mathcal{H}}$ | 0 | 2 |
| 偶数 | $\underline{\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2}$ | 0 | $c+b$ |

例

设 $S = \{1, 2, 3t + r\}$, $0 \leq r < 3$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = 012$. 我们有

| r | \mathcal{G}_S | ℓ | p |
|------|-------------------------|--------|-------|
| 0 | $\underline{(012)^t 3}$ | 0 | $c+1$ |
| 1, 2 | $\underline{012}$ | 0 | 3 |

例

设 $S = \{1, 4, c = 5t + r\}$, $0 \leq r < 5$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \underline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = 01012$. 我们有

| r, c | \mathcal{G}_S | ℓ | p |
|----------------|--|---------|---------|
| $r = 0, c = 5$ | <u>$\mathcal{H} 323$</u> | 0 | 8 |
| $r = 0, c > 5$ | $\mathcal{H}^t 323013$ <u>$\mathcal{H}^{t-1}012012$</u> | $c + 6$ | $c + 1$ |
| $r = 1, 4$ | <u>\mathcal{H}</u> | 0 | 5 |
| $r = 2$ | <u>$\mathcal{H}^t 012$</u> | 0 | $c + 1$ |
| $r = 3$ | <u>$\mathcal{H}^{t+1} 32$</u> | 0 | $c + 4$ |

三元集合: $a = 1, b \geq 6$ 偶

命题

设 $S = \{1, b, c\}$, 其中 $b \geq 6$ 是偶数, $c = t(b+1) + r, 0 \leq r \leq b$. 我们有

| | r | ℓ | p |
|---------------------------------|--|--|---|
| | $1, b$ | 0 | $b + 1$ |
| | $[3, b - 1]$ 是奇数 | 0 | $c + b$ |
| | $b - 2$ | 0 | $c + 1$ |
| | $c = b + 1$ | 0 | $2b$ |
| $c > b + 1$ $r \leq b - 4$ 偶 | $\begin{cases} r > b - 2t - 2 \\ r = b - 2t - 2 \\ r < b - 2t - 2 \end{cases}$ | $\begin{cases} (\frac{b-r}{2} - 1)(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \end{cases}$ | $\begin{cases} c + 1 \\ b - 1 \\ c + b \end{cases}$ |

- 可以看出在带 1 的三元集情形, p 和 ℓ 的形式与 c 模 $\{1, b\}$ 的周期的同余类有关.
- 除去有限多种情形外, c 在每一个同余类中, p 和 ℓ 是 c 的一次函数.

三元集合: $a = 1, b \geq 6$ 偶 (续)

该情形 \mathcal{G} 序列较为复杂. 例如: 若 $0 < r = 2v < b - 2t - 2$, $b = 2k$, 则

| | |
|-------|---|
| i | $\mathcal{G}((c+1)i+j), 0 \leq j \leq c$ |
| 0 | $\mathcal{H}^t(01)^v 2$ |
| 1 | $(32)^{k-v-1}(01)^{v+1} 2, \mathcal{H}^{t-1}(01)^v 0$ |
| 2 | $1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 2, (32)^{k-v-2}(01)^{v+2} 2, \mathcal{H}^{t-2}(01)^v 0$ |
| i | $1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-i+1} 2(01)^{v+i-2} 0,$ $1(01)^{k-v-i} 2(01)^{v+i-1} 2, (32)^{k-v-i}(01)^{v+i} 2, \mathcal{H}^{t-i}(01)^v 0$ |
| $t-1$ | $1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+2} 2(01)^{v+t-3} 0,$ $1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 2, (32)^{k-v-t+1}(01)^{v+t-1} 2, \mathcal{H}^1(01)^v 0$ |
| t | $1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 0,$ $1(01)^{k-v-t} 2(01)^{v+t-1} 2, (32)^{k-v-t}(01)^{v+t} 2, (01)^v 0$ |
| $t+1$ | $1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 0,$ $1(01)^{k-v-t} 2(01)^{v+t-1} 0, 1(01)^{k-v-t-1} 2(01)^{v+t} 2, (32)^{k-v-t-1} 01 \dots$ |

命题

(1) 设 $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}, 0 \leq r < 3a$, 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

(2) 设 $S = \{a, a+1, \dots, b-1, b, c = t(a+b) + r\}, 0 \leq r < a+b$, 则

$$\ell = 0, \quad p = \begin{cases} a + b, & a \leq r \leq b; \\ c + a, & r = 0 \text{ 或 } r > b; \\ c + b, & 0 < r < a. \end{cases}$$

例

设 $S = \{2, 3, 5, 7\}$, 则 $G_S = \underline{0^2 1^2 2^2 3^2 4}$ 周期为 9. 对于 $11 \leq c \leq 500$, $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期为

$$\ell_c = \begin{cases} 2c-4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ c+5, & c \equiv 10 \pmod{18}; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p_c = \begin{cases} c+2, & c \equiv 0, 8, 9, 10, 17 \pmod{18}; \\ 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ 9, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

由此我们猜测 $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 周期和预周期关于 c 是最终逐剩余类线性的:

猜想

固定集合 S . 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$, 使得当 $c \geq N$ 且 $c \equiv r \pmod q$ 时, $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

定理

上述猜想在如下情形成立:

- (1) $1 \in S$ 且 S 所有元素均为奇数;
- (2) $S = \{1, b\}$;
- (3) $S = \{a, 2a\}$;
- (4) $S = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$.

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 S-G 序列. 如果 \mathcal{G}_S 的周期为 2, 称 $\text{SUB}(S)$ 是**最终二分的**. 可以证明如果 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.

例

设 $a \geq 3$ 是奇数. 如果 S 是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \dots, 2^a + 1\}$;
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\}$;
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\}$;
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\}$,

则 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的.

根据上面的例子和猜想的启发, 我们发现了如下三元最终二分 $\text{SUB}(S)$.

定理

设 $a \geq 3$ 是奇数, $t \geq 1$. 如果 S 是如下情形之一:

(1) $S = \{a, a + 2, (2a + 2)t + 1\}$; (来自 $\{a, a + 2, 2a + 3\}$)

(2) $S = \{a, 2a + 1, (3a + 1)t - 1\}$; (来自 $\{a, 2a + 1, 3a\}$)

(3) $S = \{a, 2a - 1, (3a - 1)t + a - 2\}$, (来自 $\{a, a + 2, 2a + 3\}$)

则 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的.

例如情形 (1) 的 G-S 序列开头为 $(a = 2k + 1)$:

| | | | | | | |
|-------|---|---|---------------------------|---------------------------|-----------|--|
| i | $\mathcal{G}((a+1)(2t+1)i+j), 0 \leq j < (a+1)(2t+1) = c+a$ | | | | | |
| 0 | $0^a 1$ | [| $1^{a-1} 22$ | $0^a 1$ | $]^{t-1}$ | $1^{a-1} 22 \quad 02^{a-3} 331$ |
| 1 | $030^{a-2} 1$ | [| $01^{a-2} 21$ | $020^{a-2} 1$ | $]^{t-1}$ | $01^{a-2} 21 \quad 0202^{a-5} 321$ |
| i | $(01)^{i-1} 030^{a-2i} 1$ | [| $(01)^{i-1} 01^{a-2i} 21$ | $(01)^{i-1} 020^{a-2i} 1$ | $]^{t-1}$ | $(01)^{i-1} 01^{a-2i} 21 (01)^{i-1} 0202^{a-2i-3} 321$ |
| $k-1$ | $(01)^{k-2} 030^3 1$ | [| $(01)^{k-2} 01^3 21$ | $(01)^{k-2} 020^3 1$ | $]^{t-1}$ | $(01)^{k-2} 01^3 21 \quad (01)^{k-2} 020321$ |
| k | $(01)^{k-1} 0301$ | [| $(01)^{k-1} 0121$ | $(01)^{k-1} 0301$ | $]^{t-1}$ | $(01)^{k-1} 0101 \quad (01)^{k-1} 0101$ |

謝 謝

