复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第一章　复数与复变函数

❶ 复数及其代数运算

第一节　复数及其代数运算

- 复数的产生
- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

复数起源于多项式方程的求根问题.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含**负数开方**的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解答. 设 $x = u + v$,

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解答. 设 $x = u + v$, 那么

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \qquad uv = -2.$$

那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 - 20X - 8 = 0.$$

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20,\qquad uv=-2.$$

那么 u^3,v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$.

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$. $x=u+v=2$.

例题：三次方程求解（一个实根）

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

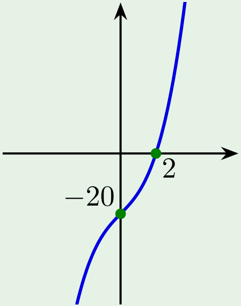
那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$. $x=u+v=2$.



例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + 343/27 = 0$.

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + 343/27 = 0$.

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}$.

例题: 三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6, \qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解，我们可以强行解得 $u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + 343/27 = 0$.

该方程无实数解，我们可以强行解得 $u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u = \frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v = \frac{3-2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9-\sqrt{-3}}{6}, \frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\qquad uv=\frac{7}{3}.$$

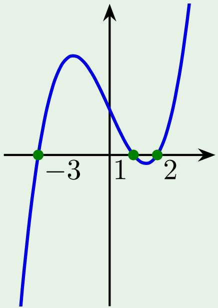
于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$



一般情形三次方程的根

一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

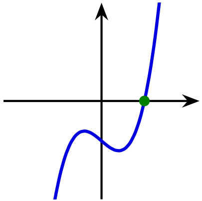
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

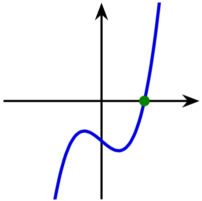


$\Delta>0$, 有 1 个根

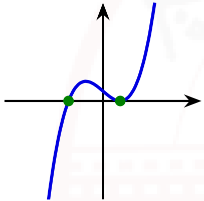
一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:



$\Delta>0$, 有 1 个根

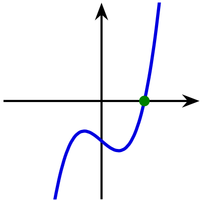


$\Delta=0$, 有 2 个根
$x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

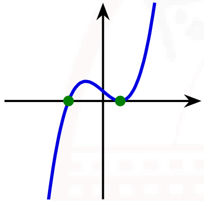
一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

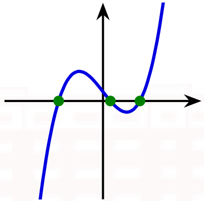


$\Delta>0$, 有 1 个根



$\Delta=0$, 有 2 个根

$x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).



$\Delta<0$, 有 3 个根

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

由此可见, 若想使用求根公式, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹曾说: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。*

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹曾说: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。* 不过, 现在我们可以用更为现代和严格的语言来引入复数.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. 固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. 固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.**

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. 固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$.

实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0\mathrm{i}$.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.**

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$.

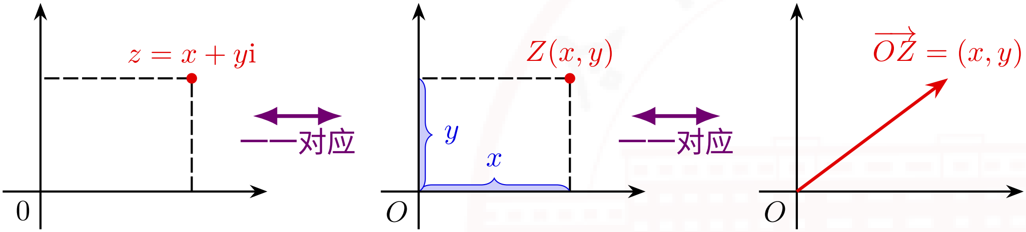
实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0\mathrm{i}$. 于是我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

复平面

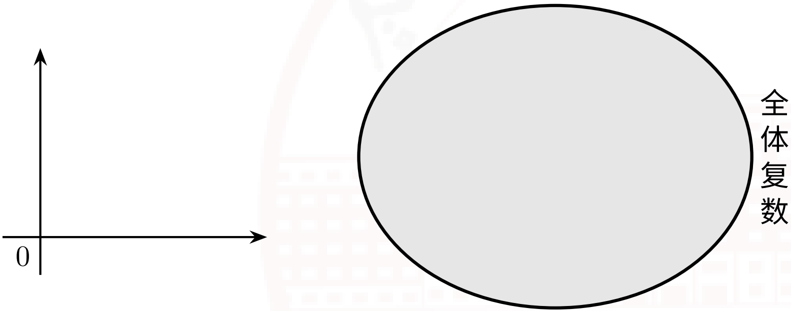
$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基.

$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为**复平面**.

$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为复平面.

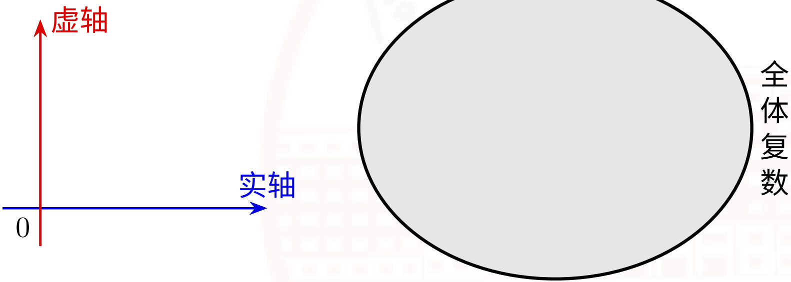


实部和虚部，虚数和纯虚数

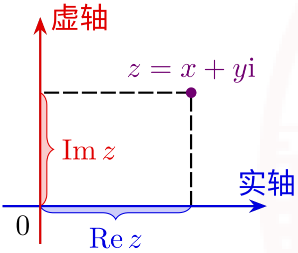


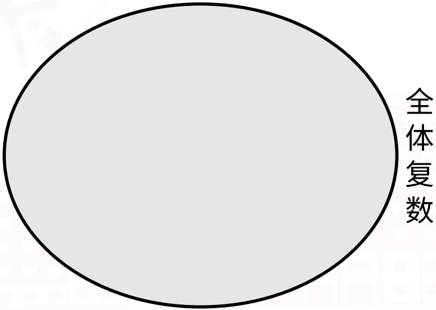
实部和虚部，虚数和纯虚数

- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.

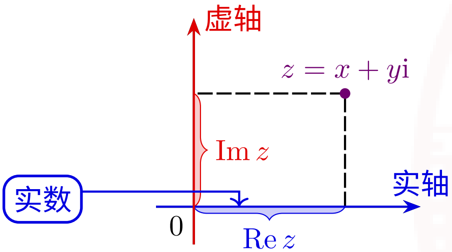


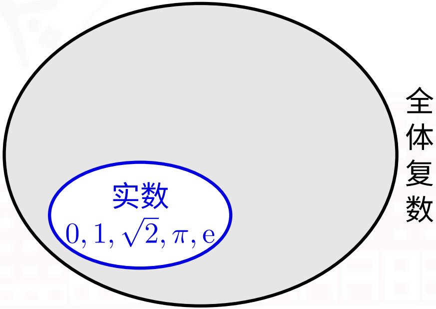
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的实部; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的虚部.





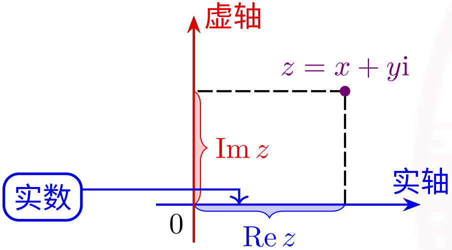
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的实部; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的虚部.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 为实数, 它落在实轴上.

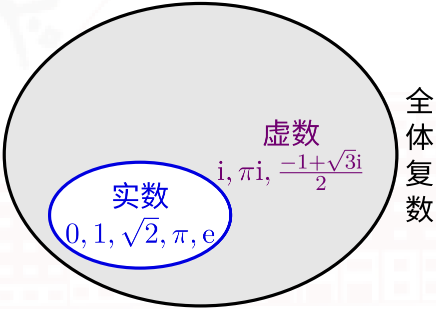




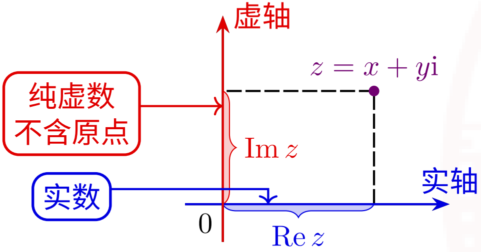
实部和虚部，虚数和纯虚数

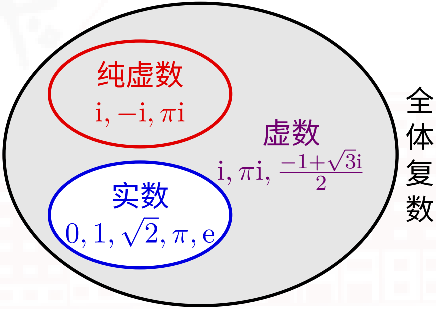
- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时，z 为实数，它落在实轴上.
  - 不是实数的复数是**虚数**.





- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时，z 为实数，它落在实轴上.
  - 不是实数的复数是**虚数**.
- 当实部 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时，z 为**纯虚数**，它落在虚轴上.





例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z = (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 5x - 6)\mathrm{i}$ 是:

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z = (x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数;　　(2) 纯虚数.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数;

(2) 纯虚数.

解答.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；

(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数; (2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$, 即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$, 即 $x=1$ 或 -4.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:
(1) 实数;　　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

练习. 若 $x^2(1+\mathrm{i})-x(5+4\mathrm{i})+4+3\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 $x=$______.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数.

解答.

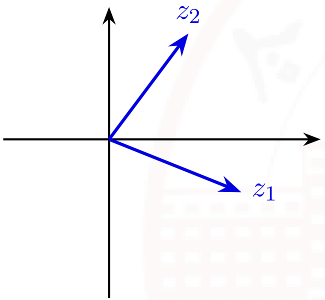
(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

练习. 若 $x^2(1+\mathrm{i})-x(5+4\mathrm{i})+4+3\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 $x=$ __4__.

复数的加法与减法

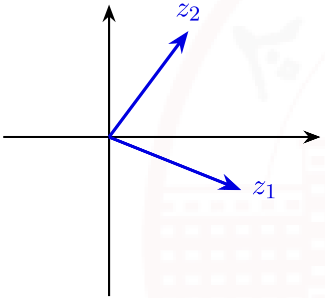
设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$.



复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

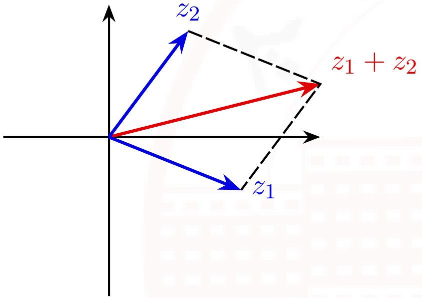


复数的加法与减法

设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i},\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\mathrm{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

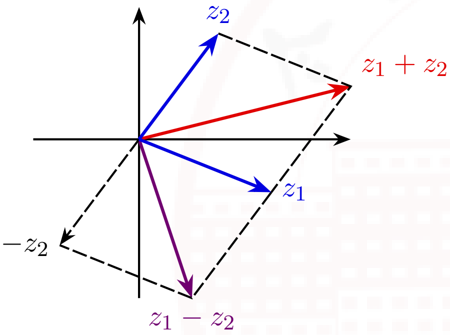


复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的**乘法**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i})=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\mathrm{i}+y_1\mathrm{i}\cdot x_2+y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i}\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i})=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\mathrm{i}+y_1\mathrm{i}\cdot x_2+y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i}\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i})=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\mathrm{i}+y_1\mathrm{i}\cdot x_2+y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i}\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z\neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0=1, z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

例题：复数的乘幂

例.

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \mathrm{i}^4 = 1.$

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=i,\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=i,\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\omega^3=1$.

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=i, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$,

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=i,\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i},\quad z^3=-2+2\mathrm{i},\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=i,\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i},\quad z^3=-2+2\mathrm{i},\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n **次单位根**.

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\quad \mathrm{i}^{4n+1}=i,\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i},\quad z^3=-2+2\mathrm{i},\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n **次单位根**. 那么 $1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$ 是 4 次单位根，$1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根，$-\omega$ 是 6 次单位根.

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}$$

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

练习. 化简 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2026}=$______.

例：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

练习. 化简 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2026}=\underline{\quad -1 \quad}$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi} = x - yi$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

共轭是一种对合

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 　　共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 　　共轭复数和四则运算交换

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

(5) $z = \overline{z} \iff z$ 是实数; $z = -\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z = 0$. 判断实数和纯虚数

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

(5) $z = \overline{z} \iff z$ 是实数; $z = -\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z = 0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

(5) $z = \overline{z} \iff z$ 是实数; $z = -\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z = 0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

练习. z 关于虚轴的对称点是______.

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}z$. x,y 和 $z,\overline{z}$ 可相互表示

(5) $z=\overline{z}\iff z$ 是实数; $z=-\overline{z}\iff z$ 是纯虚数或 $z=0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x,y 表达的形式更简单.

练习. z 关于虚轴的对称点是 $\underline{\quad -\overline{z}\quad}$.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$,

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2}). \qquad \square$$

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+y\mathrm{i}$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}},$$

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z-\overline{z}=\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}},\qquad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z-\overline{z}=\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}},\qquad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

由 z 是虚数可知 $z\neq\overline{z}$.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}},$$

等价于

$$z-\bar{z}=\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}},\qquad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1)=0.$$

由 z 是虚数可知 $z\neq\bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z}=1$, 即 $x^2+y^2=1$. □

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解答.

$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例. $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解答.

$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\frac{3\mathrm{i}-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例. $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解答.

$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\frac{3\mathrm{i}-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{3}{2},\quad \operatorname{Im} z=-\frac{1}{2},\quad z\overline{z}=\Big(\frac{3}{2}\Big)^2+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{5}{2}.$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5\mathrm{i}}{-3 + 4\mathrm{i}}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5\mathrm{i}}{-3 + 4\mathrm{i}} = \frac{(5 - 5\mathrm{i})(-3 - 4\mathrm{i})}{(-3)^2 + 4^2}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i},\end{aligned}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i},$$

因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$.