HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第三章　复变函数的积分

牛顿-莱布尼兹公式

设有向曲线 $C: z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 起于 $z_1=z(a)$ 终于 $z_2=z(b)$. 若存在 C 上的解析函数 $F(z)$ 使得 $F'(z)=f(z)$, 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(z(t))\Big|_a^b = F(z_2)-F(z_1).\end{aligned}$$

这就是牛顿-莱布尼兹公式. 我们把 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个原函数. 特别地, 若 C 是闭路, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

例如对于整数 $n \neq 0$, 当 a 在闭路 C 的内部时,

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

在 C 上有原函数 $F(z) = -\dfrac{1}{n(z-a)^n}$. 从而 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. 于是我们再次证明了该积分结论的 $n \neq 0$ 情形.

但需要注意 $\dfrac{1}{z-a}$ 在 C 上并没有原函数, 因为 $\ln(z-a)$ 在 C 上有奇点.

不过，不同于单变量实函数的情形，并不是所有的连续函数都有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨定理可知，积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关，只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

定理. **固定 $z_0 \in D$，则函数**

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

是 D 内的解析函数，且 $F'(z) = f(z)$.

由此可知，单连通区域上的解析函数总有原函数.

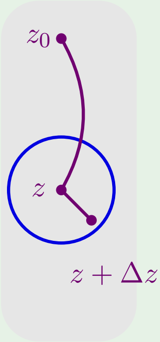
证明. 以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.



原函数的存在性

由于 $f(z)$ 解析，因此连续. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时，由长大不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|&=\left|\int_z^{z+\Delta z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|=\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，因此

$$f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z).\qquad\square$$

积分计算方法 II: 原函数法. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

由于导函数为 0 的函数只能是常值函数, 因此

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C.$$

我们称之为 $f(z)$ 的**不定积分**, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是**单连通区域上解析函数**, 实变情形要求是**闭区间上连续函数**.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $f(z)=z$ 处处解析，且 $\displaystyle\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+C$，因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\displaystyle\int_0^{3+4\mathrm{i}} z\,\mathrm{d}z=-\frac{7}{2}+12\mathrm{i}$，无论从 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的路径如何.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析，且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\cos z^2\,\mathrm{d}z^2=\frac{1}{2}\sin z^2+C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}=-\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z.$

解答. 由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析，且

$$\int z\cos z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}(\sin z)=z\sin z-\int \sin z\,\mathrm{d}z=z\sin z+\cos z+C,$$

因此

$$\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\,\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^{\mathrm{i}}=\mathrm{i}\sin\mathrm{i}+\cos\mathrm{i}-1=\mathrm{e}^{-1}-1.$$

这里我们使用了分部积分法.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_1^{1+\mathrm{i}} z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 $f(z)=z\mathrm{e}^z$ 处处解析，且

$$\int z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}\mathrm{e}^z=z\mathrm{e}^z-\int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z=(z-1)\mathrm{e}^z+C,$$

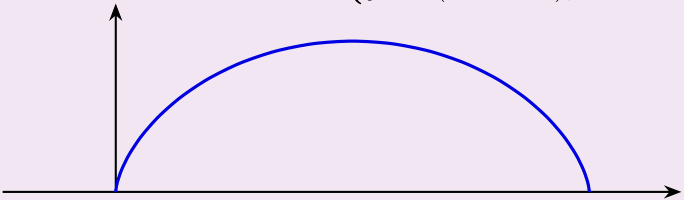
因此

$$\int_1^{1+\mathrm{i}} z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z=(z-1)\mathrm{e}^z\Big|_1^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}(-\sin 1+\mathrm{i}\cos 1).$$

练习. 求 $\displaystyle\int_0^1 z\sin z\,\mathrm{d}z=$ ____ $\sin 1-\cos 1$ ____.

典型例题：利用原函数求积分

例. 求 $\displaystyle\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$



解答. 由于 $f(z) = 2z^2+8z+1$ 处处解析, 因此

$$\text{原积分} = \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z = \left(\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right)\Bigg|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.$$

典型例题：利用原函数求积分

例. 设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧，求 $\displaystyle\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

解答. 函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在单连通区域 $\operatorname{Re} z>-1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int \ln(z+1)\,\mathrm{d}[\ln(z+1)]=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)+C.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\left[\ln^2(1+\mathrm{i})-\ln^2 2\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)^2-\ln^2 2\right)=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}\mathrm{i}.\end{aligned}$$