复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)
办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　解析函数

❶ 解析函数的概念

第一节　解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

- 由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

- 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$.
- 若极限
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例：线性函数的不可导性

例

函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答

由定义可知

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，上式 $\to 2$；当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时，上式 $\to 1$. 因此该极限不存在，$f(z)$ 处处不可导.

例：复变函数的导数

练习

函数 $f(z)=\bar{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案

处处不可导.

例

求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解答

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.$$

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理

(1) $(c)'=0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

(3) $(f\pm g)'=f'\pm g',\quad (cf)'=cf'$; 线性性质

(4) $(fg)'=f'g+fg',\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$; 莱布尼兹法则

(5) $\Big(f\big(g(z)\big)\Big)'=f'[g(z)]\cdot g'(z)$; 复合函数求导

(6) $g'(z)=\dfrac{1}{f'(w)}, g=f^{-1}, w=g(z)$. 反函数求导

- 由上述求导法则，不难知道:

定理

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处可导.

- 由此可知，多项式函数处处可导，有理函数在其定义域内处处可导，且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

利用求导运算法则计算导数

例

求 $f(z) = \dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

解答

- 由于
$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$
- 因此
$$f'(z) = 1 - \frac{4}{(z-1)^2}.$$

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明

- 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$,
- 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

- 从而 $f(z)$ 在 z_0 处连续. □

- 复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义

若存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.

- 和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z=\Delta z$.
- 故

$$\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\mathrm{d}z,\ f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

定义

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 **解析**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个**解析函数**.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个**奇点**.

- **在一点解析蕴含在这点可导，反之未必.** 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生. 不过，若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点，即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集，这种情形不甚有趣，因此我们不考虑这类奇点.
- **在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的.** 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.
- 由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ **解析点全体是一个开集**，它是可导点集合的内点构成的集合.

练习

函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

答案

解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答

- 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.
- 故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

- 不难证明:

定理

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

- 由此可得:

定理

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z)=0$ 的点) 内解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f\big(g(z)\big)$ 在 D 内解析.

- 由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点.