复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

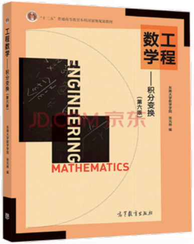
办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

课程信息

- 课时:
  - 10 周 40 课时;
  - 2025-09-09 ～ 2025-11-13
- 课程 QQ 群 (入群答案 1400261B)
  - 008 班 (生医、通信工程) **973042840**
  - 009 班 (车辆创新实验、集成) **973041550**
- 教材: 机械工业出版社《复变函数与积分变换》



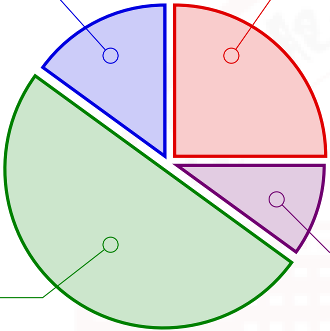
成绩构成

作业 15 分

作业每次会提前发布，每两周交一次. **作业不允许迟交**. 没带的请当天联系助教补交，迟一天交 −50% 当次作业分，迟两天或以上 0 分. 请假需提前交给我请假条.

期末考试 50 分

期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数，45 分以下直接不及格.



课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次，取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答，否则按未考处理**.

期末报告 10 分

完成超星各个章节的习题.

复变函数的应用非常广泛，它包括：

复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……

复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……

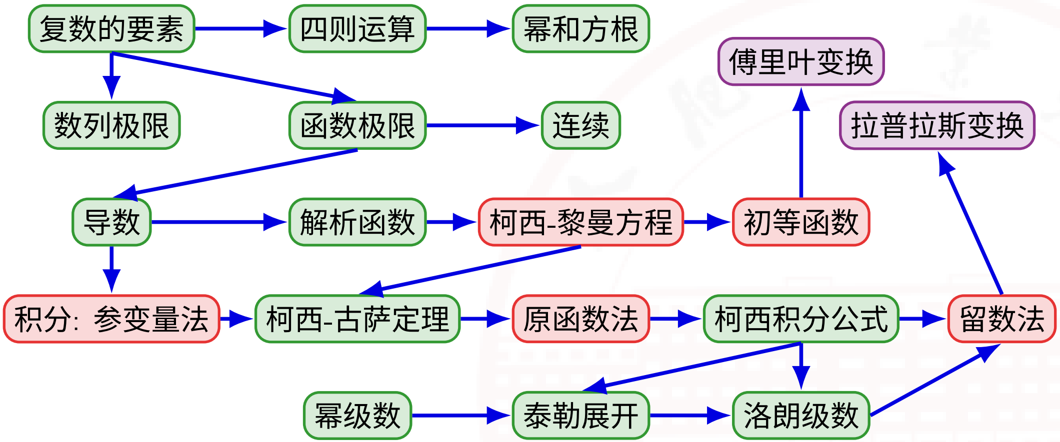
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

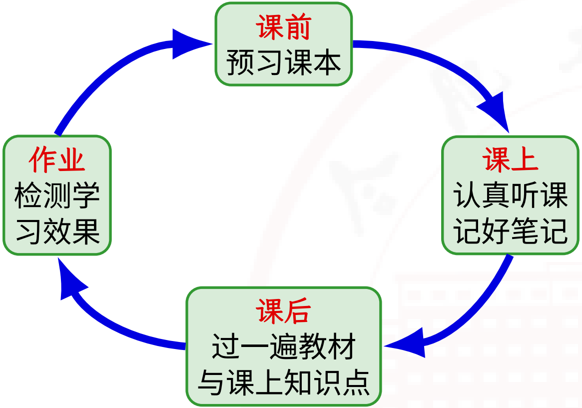
复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统⋯⋯
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学⋯⋯
- 信息学、电子学、电气工程⋯⋯

可以说复变函数应用之广，在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.


复数的要素
四则运算
幂和方根
傅里叶变换
数列极限
函数极限
连续
拉普拉斯变换
导数
解析函数
柯西-黎曼方程
初等函数
积分：参变量法
柯西-古萨定理
原函数法
柯西积分公式
留数法
幂级数
泰勒展开
洛朗级数

课程学习方法



❶ 复数及其代数运算

复数的引入

非考试内容

- 复数起源于多项式方程的求根问题.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$,

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2-4c}{4}$.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2-4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

  (1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2-4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,
- 配方可得 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

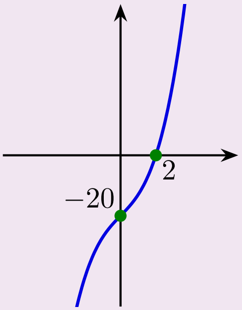
  (1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
  (2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
  (3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.
- 可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解.

复数的引入

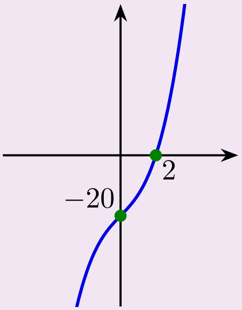
- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$,
- 配方可得 $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4c}{4}$.
- 于是得到求根公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta = b^2 - 4c$.
  (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
  (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
  (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根.
- 可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解.
- 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

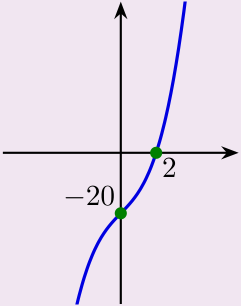


例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.



例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

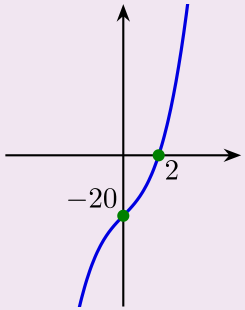
解. • 设 $x=u+v$,



例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

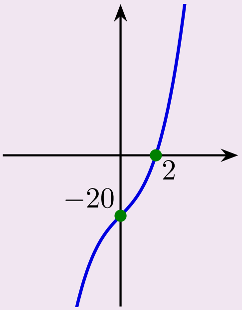
解.
- 设 $x=u+v$,
- 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$



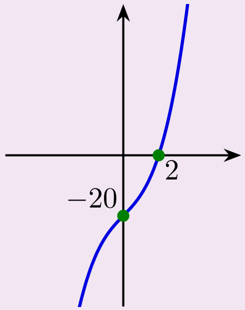
例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解.
- 设 $x=u+v$,
- 则
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$
- 我们希望 $u^3+v^3=20$, $uv=-2$,



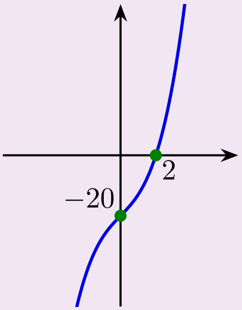
例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解.
- 设 $x=u+v$,
- 则
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$
- 我们希望 $u^3+v^3=20,\ uv=-2$,
- 则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$.



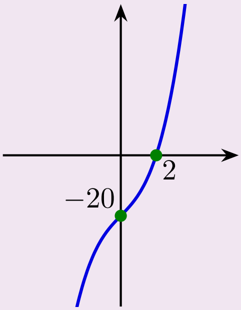
例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解.
- 设 $x = u + v$,
- 则
$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$
- 我们希望 $u^3 + v^3 = 20$, $uv = -2$,
- 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$.
- 解得
$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$



例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解.
- 设 $x=u+v$,
- 则
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$
- 我们希望 $u^3+v^3=20$, $uv=-2$,
- 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$.
- 解得
$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$
- 所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$,



例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

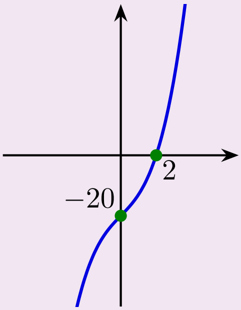
解.
- 设 $x=u+v$,
- 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

- 我们希望 $u^3+v^3=20$, $uv=-2$,
- 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$.
- 解得

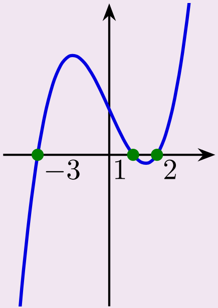
$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

- 所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$,
- $x=u+v=2$.

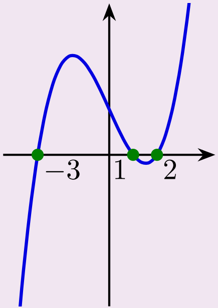


例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

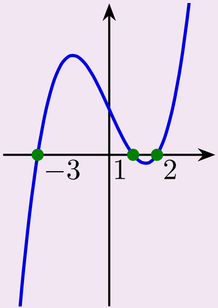


例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.



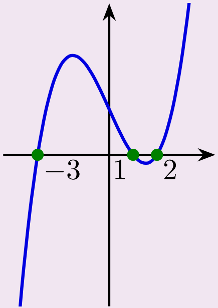
例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解. • 类似地 $x = u + v$, 其中 $u^3 + v^3 = -6$, $uv = \dfrac{7}{3}$.



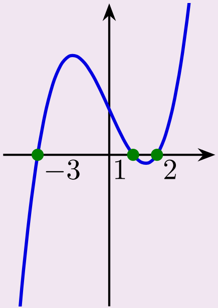
例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解.
- 类似地 $x = u + v$, 其中 $u^3 + v^3 = -6$, $uv = \dfrac{7}{3}$.
- 于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \dfrac{343}{27} = 0$.



例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解.
- 类似地 $x = u + v$, 其中 $u^3 + v^3 = -6$, $uv = \dfrac{7}{3}$.
- 于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \dfrac{343}{27} = 0$.
- 然而这个方程没有实数解.

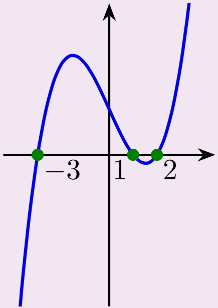


例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解. • 类似地 $x=u+v$, 其中 $u^3+v^3=-6$, $uv=\frac{7}{3}$.

- 于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\frac{343}{27}=0$.
- 然而这个方程没有实数解.
- 我们可以强行解得

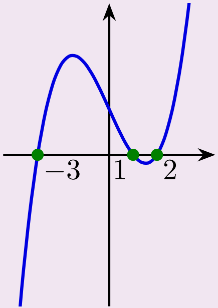
$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3},$$



例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解.
- 类似地 $x=u+v$, 其中 $u^3+v^3=-6$, $uv=\dfrac{7}{3}$.
- 于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\dfrac{343}{27}=0$.
- 然而这个方程没有实数解.
- 我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3},\ u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

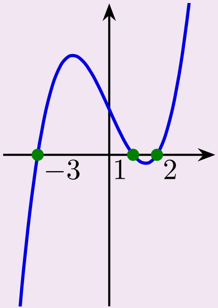


例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解.
- 类似地 $x=u+v$, 其中 $u^3+v^3=-6$, $uv=\dfrac{7}{3}$.
- 于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\dfrac{343}{27}=0$.
- 然而这个方程没有实数解.
- 我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3},\ u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

- $v=\dfrac{3-2\sqrt{-3}}{3},\dfrac{-9-\sqrt{-3}}{6},\dfrac{3+5\sqrt{-3}}{6},$

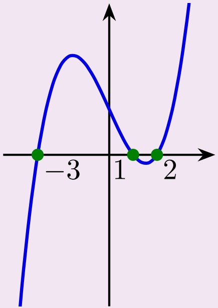


例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解.
- 类似地 $x = u + v$, 其中 $u^3 + v^3 = -6$, $uv = \dfrac{7}{3}$.
- 于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \dfrac{343}{27} = 0$.
- 然而这个方程没有实数解.
- 我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3},\ u = \frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

- $v = \dfrac{3-2\sqrt{-3}}{3}, \dfrac{-9-\sqrt{-3}}{6}, \dfrac{3+5\sqrt{-3}}{6}$,
- $x = u + v = 2, -3, 1$.



三次方程的根

- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

三次方程的根

- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

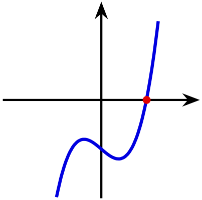
- 由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.

三次方程的根

- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

- 由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.
- 通过分析函数图像的极值点可以知道:

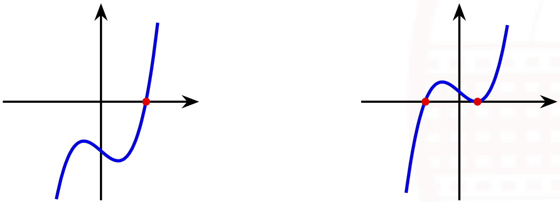


- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

- 由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.
- 通过分析函数图像的极值点可以知道:

  (1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.

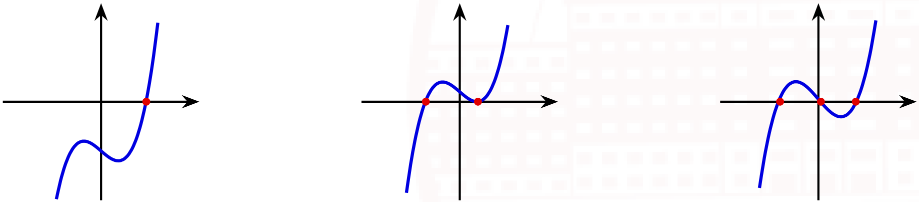


- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

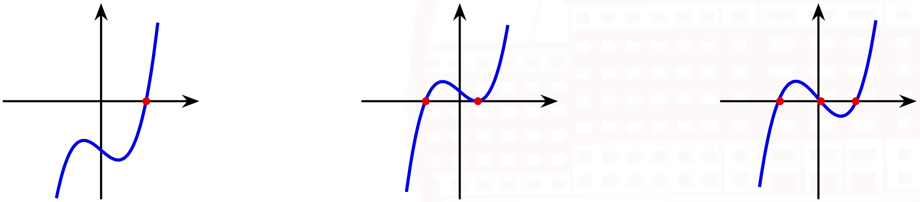
- 由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.
- 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).



三次方程的根

- 对于一般 $x^3+px+q=0$, 类似可得:
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$
- 由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.
- 通过分析函数图像的极值点可以知道:
  (1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.
  (2) 当 $\Delta=0$ 时, 有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
  (3) 当 $\Delta<0$ 时, 有 3 个实根.



- 由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.

- 由此可见，若想使用求根公式，就**必须接受负数开方**.
- 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

- 由此可见, 若想使用求根公式, 就**必须接受负数开方**.
- 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?
- 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

三次方程的根

- 由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.
- 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?
- 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.
- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

三次方程的根

- 由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.
- 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?
- 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.
- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.
- 莱布尼兹曾说: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。*

- 由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.
- 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?
- 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.
- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.
- 莱布尼兹曾说: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。*
- 我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.