复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$.

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$.

解答

(1) 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=\mathrm{i}r$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+\mathrm{i}v=z^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$. 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=\mathrm{i}r$，则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+\mathrm{i}v=z^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$. 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$. 可以说明当 $u=4$ 时，对任意 v，$u+\mathrm{i}v$ 都是该双曲线上某一点的像.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$.

解答

(1) 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像是线段 $0 < |w| < 4, \arg w = \pi$.

(2) 由于 $w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. 因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$. 可以说明当 $u = 4$ 时, 对任意 v, $u + iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

(3) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$，则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$. 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$. 可以说明当 $u=4$ 时，对任意 v，$u+iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\mathrm{Re}\, w=4$.

(3) 设 $z=re^{i\theta}$，则 $w=r^2e^{2i\theta}$.

例：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\pi/2$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\pi/4, 0<|z|<2$.

解答

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像是线段 $0<|w|<4, \arg w=\pi$.

(2) 由于 $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$. 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$. 可以说明当 $u=4$ 时, 对任意 v, $u+iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\mathrm{Re}\, w=4$.

(3) 设 $z=re^{i\theta}$, 则 $w=r^2e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0<\arg w<\pi/2, 0<|w|<4$.