复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　解析函数

1 函数解析的充要条件

第一节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

- 通过对一些简单函数的分析，我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式，而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 等内容.
- 这种现象并不是偶然的.
- 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.
- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画：形式推导

- 设 f 在 z 处可导，$f'(z) = a + b\mathrm{i}$，
- 则
$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = \Delta f = (a + b\mathrm{i})(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + o(\Delta z).$$
- 展开可知
$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$
- 由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$，
- 因此 u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

可导的等价刻画：形式推导

- 反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$.
- 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\
\Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\Delta y + o(\Delta z) \\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z) \\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta z + o(\Delta z).
\end{aligned}$$

- 故 $f(z)$ **在** z **处可导，且** $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

可导的等价刻画：柯西-黎曼方程

- 由此得到

柯西-黎曼定理

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i} v_x = v_y - \mathrm{i} u_y.$$

柯西-黎曼方程的等价形式

- 注意到 $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}, y=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$.
- 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则，定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}.$$

- 若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量，那么当 f 在 z 处可导时，$\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微)，$\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$.
- 所以 **f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$，此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$.**
- 这也解释了为何含有 $x,y,\overline{z}$ 形式的函数往往不可导，而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

可导的充分性条件

- 由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

- 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

- 这些连续性要求也可以换成 $\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 的连续性.
- 另外需要注意的是: 柯西-黎曼定理中中的可微性和 C-R 方程缺一不可.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导，在何处解析？

解答

由 $u=x, v=-y$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= 1, & u_y &= 0, \\
v_x &= 0, & v_y &= -1.
\end{aligned}
$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$，所以该函数处处不可导，处处不解析.

也可由 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=1\neq 0$ 看出.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导，在何处解析？

解答

由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\
v_x &= y, & v_y &= x.
\end{aligned}
$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程.

因此该函数只在 0 可导，处处不解析且 $f'(0) = u_x(0) + \mathrm{i}v_x(0) = 0$.

也可由 $f = \dfrac{1}{2}z(z+\overline{z}), \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}z$ 看出，$f'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0} = z|_{z=0} = 0$.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导，在何处解析？

解答

由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x&=\mathrm{e}^x\cos y, & u_y&=-\mathrm{e}^x\sin y,\\ v_x&=\mathrm{e}^x\sin y, & v_y&=\mathrm{e}^x\cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导，处处解析，且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

实际上，这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

练习

函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3yi$ (B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$ (D) x^2-xyi

答案

根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$.

对于 *BD*, 各个偏导数在 0 处取值都是 0.

C 则是处处都可导.

例: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答

由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x+ay=dx+2y, \quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2, \quad b=c=-1,$$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=2x+2y+\mathrm{i}(-2x+2y)=(2-2\mathrm{i})z.$$

例: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=0$,

因此 $u_x=v_x=u_y=v_y=0$, u,v 均为常数,

从而 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是常数. $\square$

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $v=u^2$.
- $u=v^2$.

例

若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零.

对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0$，

从而 $(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.

由于

$$u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此二者正交. $\square$

例：解析函数的保角性

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时,
- 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为**保角性**.
- 这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.
- 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.
- 由 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 正交可知上述例题成立.