



复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章 解析函数

- 1 解析函数的概念
- 2 函数解析的充要条件
- 3 初等函数



第一节 解析函数的概念

- 可导函数
- ■可微函数
- 解析函数

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 w = f(z) 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$.

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

定义. 设 w = f(z) 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在 z_0 可导.

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

定义. 设 w = f(z) 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,则称 f(z) 在 z_0 可导. 这个极限值称为 f(z) 在 z_0 的导数,记作 $f'(z_0)$.

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

定义. 设 w = f(z) 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,则称 f(z) 在 z_0 可导. 这个极限值称为 f(z) 在 z_0 的导数,记作 $f'(z_0)$. 若 f(z) 在区域 D 内处处可导. 称 f(z) 在 D 内可导.

例. 函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

例. 函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

例. 函数
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

例. 函数
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}.$$

例. 函数
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}.$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时, 上式 $\to 2$;

例. 函数
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}.$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时, 上式 $\to 2$; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时, 上式 $\to 1$.

例. 函数
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)\mathbf{i} - (x + 2y\mathbf{i})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y\mathbf{i}}{\Delta x + \Delta y\mathbf{i}}.$$

当 $\Delta x=0, \Delta y\to 0$ 时, 上式 $\to 2$; 当 $\Delta y=0, \Delta x\to 0$ 时, 上式 $\to 1$. 因此该极限不存在, f(z) 处处不可导.

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

例. 求
$$f(z) = z^2$$
 的导数.

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求
$$f(z) = z^2$$
 的导数.

解答.
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求
$$f(z) = z^2$$
 的导数.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

练习. 函数
$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$
 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

例. 求
$$f(z) = z^2$$
 的导数.

 $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.



事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) (c)' = 0, 其中 c 为复常数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1) (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

- (1) (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- (3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$

线性性质

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则,

定理.

- (1) (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- (3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$
- (4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$

线性性质

莱布尼兹法则

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则,

定理.

- (1) (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- (3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$
- (4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- (5) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z);$

线性性质

莱布尼兹法则

复合函数求导

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则,

定理.

- (1) (c)' = 0. 其中 c 为复常数:
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- (3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$
- (4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- (5) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z);$
- (6) $g'(z) = \frac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z).$

线性性质

莱布尼兹法则

复合函数求导

反函数求导

由上述求导法则, 不难知道:



由上述求导法则, 不难知道:

定理.

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处可导.

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

- (1) 在 z_0 处可导的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处可导.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处可导, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处可导, 则 f(g(z)) 在 z_0 处可导.

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

- (1) 在 z_0 处可导的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处可导.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处可导, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处可导, 则 f(g(z)) 在 z_0 处可导.

由此可知,多项式函数处处可导,有理函数在其定义域内处处可导,且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

例题: 利用求导运算法则计算导数

例. 求
$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$$
 的导数.



例题: 利用求导运算法则计算导数

例. 求
$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$$
 的导数.

解答. 由于

80000■088000

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$

例题: 利用求导运算法则计算导数

例. 求
$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{z + 1}$$
 的导数.

解答. 由于

$$f(z) = z - 1 + \frac{4}{z+1},$$
$$f'(z) = 1 - \frac{4}{(z+1)^2}.$$

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导, 则 f(z) 在 z_0 连续.

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

证明. 设
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
,

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

证明. 设
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

证明. 设
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

证明. 设
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

定理. 若 f(z) 在 z_0 可导,则 f(z) 在 z_0 连续.

证明. 设
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

从而
$$f(z)$$
 在 z_0 处连续.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数
$$A$$
 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在 z_0 处可微,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,则称 f(z) 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 f(z) 在 z_0 的微分,记作 $dw=A\Delta z$.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,则称 f(z) 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 f(z) 在 z_0 的微分,记作 $\mathrm{d} w = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样,复变函数的可微和可导是等价的,且 $\mathrm{d} w = f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d} z = \Delta z$.

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,则称 f(z) 在 z_0 处可微,称 $A\Delta z$ 为 f(z) 在 z_0 的微分,记作 $\mathrm{d} w = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样,复变函数的可微和可导是等价的,且 $\mathrm{d} w = f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d} z = \Delta z$. 故

$$dw = f'(z_0) dz, f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$

定义.

定义.

(1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在 z_0 解析.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析,则称 f(z) 在 D 内解析,或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析,则称 f(z) 在 D 内解析,或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析,则称 f(z) 在 D 内解析,或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析,则称 f(z) 在 D 内解析,或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导, 反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导,反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析,都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 f(z) 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 f(z) 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析,则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导,反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析,都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 f(z) 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 f(z) 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

定义.

- (1) 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在 z_0 解析.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处解析,则称 f(z) 在 D 内解析,或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- (3) 若 f(z) 在 z_0 不解析,则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导,反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析,都会导致奇点的产生. 不过, 若 z_0 是 f(z) 定义域的外点, 即存在 z_0 的邻域与 f(z) 定义域交集为空集, 这种情形不甚有趣, 因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的. 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 f(z) 在 z_0 处解析, 则 f(z) 在 z_0 的一个 邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析.

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 f(z) 在 z_0 处解析, 则 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 f(z) 在 z_0 处解析, 则 f(z) 在 z_0 的一个 邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 f(z) 在点 z_0 处解析是 f(z) 在该点可导的()

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

由于一个点的邻域也是一个开集, 因此若 f(z) 在 z_0 处解析, 则 f(z) 在 z_0 的一个 邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集, 它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 f(z) 在点 z_0 处解析是 f(z) 在该点可导的(A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

由于一个点的邻域也是一个开集,因此若 f(z) 在 z_0 处解析,则 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导,从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集,它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 f(z) 在点 z_0 处解析是 f(z) 在该点可导的(A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

答案. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

例. 研究函数
$$f(z) = |z|^2$$
 的解析性.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

例. 研究函数
$$f(z) = |z|^2$$
 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

例. 研究函数
$$f(z) = |z|^2$$
 的解析性.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 z=0, 则当 $\Delta z \to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} + z$;

例. 研究函数
$$f(z) = |z|^2$$
 的解析性.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 z=0, 则当 $\Delta z \to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} + z$;
- 当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时该极限为 $\overline{z} z$.

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 z=0, 则当 $\Delta z \to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} + z$;
- 当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时该极限为 $\overline{z} z$. 因此此时极限不存在.

例. 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 z=0, 则当 $\Delta z \to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} + z$;
- 当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时该极限为 $\overline{z} z$. 因此此时极限不存在. 故 f(z) 仅在 z = 0 处可导. 从而处处不解析.

解析函数的四则运算和复合

定理.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处解析, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 f(g(z)) 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处解析, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 f(g(z)) 在 z_0 处解析.

定理.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处解析, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 f(g(z)) 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 g(z)=0 的点) 内解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处解析, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 f(g(z)) 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 D 内解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 g(z)=0 的点) 内解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 f(w) 在 D' 内解析, 则 f(g(z)) 在 D 内解析.

定理.

- (1) 在 z_0 处解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处解析, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 f(g(z)) 在 z_0 处解析.

定理.

- (1) 在 D 内解析的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 g(z)=0 的点) 内解析.
- (2) 若函数 g(z) 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 f(w) 在 D' 内解析,则 f(g(z)) 在 D 内解析.

由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点

第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

通过对一些简单函数的分析,我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含 x,y,\overline{z} 等内容.

通过对一些简单函数的分析,我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含 x,y,\overline{z} 等内容.

这种现象并不是偶然的.

通过对一些简单函数的分析,我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含 x,y,\overline{z} 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 x, y, \overline{z} 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

设 f 在 z 处可导, f'(z) = a + bi,



设
$$f$$
 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

设
$$f$$
 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \, \Delta x - b \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \, \Delta x + a \, \Delta y + o(\Delta z).$$

设
$$f$$
 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \, \Delta x - b \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \, \Delta x + a \, \Delta y + o(\Delta z).$$

由于
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$
,

设
$$f$$
 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i \Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a \, \Delta x - b \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b \, \Delta x + a \, \Delta y + o(\Delta z).$$

由于
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$
, 因此 u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

反过来, 假设 u,v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$.

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \, \Delta x + v_y \, \Delta y + o(\Delta z) = v_x \, \Delta x + u_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \, \Delta x + v_y \, \Delta y + o(\Delta z) = v_x \, \Delta x + u_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \, \Delta x + (-v_x + iu_x) \, \Delta y + o(\Delta z)$$

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \, \Delta x + v_y \, \Delta y + o(\Delta z) = v_x \, \Delta x + u_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \, \Delta x + (-v_x + iu_x) \, \Delta y + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \, \Delta (x + iy) + o(\Delta z)$$

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \, \Delta x + v_y \, \Delta y + o(\Delta z) = v_x \, \Delta x + u_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \, \Delta x + (-v_x + iu_x) \, \Delta y + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \, \Delta (x + iy) + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \, \Delta z + o(\Delta z).$$

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \, \Delta x + v_y \, \Delta y + o(\Delta z) = v_x \, \Delta x + u_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \, \Delta x + (-v_x + iu_x) \, \Delta y + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \, \Delta (x + iy) + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \, \Delta z + o(\Delta z).$$

故 f(z) 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由此得到



可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由此得到

柯西-黎曼定理. f(z) 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$





可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由此得到

柯西-黎曼定理. f(z) 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$





需要注意的是: 柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.

注意到
$$x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{\mathrm{i}}{2}z + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 z, \overline{z} 看成独立变量, 那么

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 z, \overline{z} 看成独立变量, 那么

• 当 f 在 z 处可导时, df = f' dz.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 z, \overline{z} 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, df = f' dz.
- 当 f 关于 z, \overline{z} 可微时 (即 u, v 可微), $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z} \, \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \, \mathrm{d}\overline{z}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 z, \overline{z} 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, df = f' dz.
- 当 f 关于 z, \overline{z} 可微时 (即 u, v 可微), $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

若把 z, \overline{z} 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, df = f' dz.
- 当 f 关于 z, \overline{z} 可微时 (即 u, v 可微), $\mathrm{d} f = \frac{\partial f}{\partial z} \, \mathrm{d} z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \, \mathrm{d} \overline{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$,此时 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.这也解释了为何 含有 x,y,\overline{z} 形式的函数往往不可导,而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

(1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

- (1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.
- (2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 D 上可导 (从而解析).

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

- (1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.
- (2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 D 上可导 (从而解析).

这些连续性要求也可以换成 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 的连续性.

例. 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

例. 函数
$$f(z) = \overline{z}$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由
$$u=x, v=-y$$
 可知

$$u_x = 1,$$

$$v_x = 0,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_y = -1.$$

例. 函数
$$f(z) = \overline{z}$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 u=x, v=-y 可知

$$u_x = 1, u_y = 0,$$

$$v_x = 0, v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

例. 函数
$$f(z) = \overline{z}$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由
$$u=x, v=-y$$
 可知

$$u_x = 1, u_y = 0,$$

$$v_x = 0, v_y = -1.$$

因为
$$u_x=1\neq v_y=-1$$
, 所以该函数处处不可导, 处处不解析. 也可由 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=1\neq 0$ 看出.

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

$$u_x = 2x,$$

$$v_x = y,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_y = x.$$

$$g$$
,

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

$$u_x = 2x,$$
 $u_y = 0,$ $v_x = y,$ $v_y = x.$

由
$$2x = x, 0 = -y$$
 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程.

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

$$u_x = 2x,$$
 $u_y = 0,$ $v_x = y,$ $v_y = x.$

由 2x=x,0=-y 可知只有 x=y=0,z=0 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0)=u_x(0)+\mathrm{i} v_x(0)=0$.

复变函数与积分变换 ▶ 第二章 解析函数 ▶ 2 函数解析的充要条件 ▶ B 柯西-黎曼方程的应用 田□□□□□□■□□□□□□

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

$$u_x = 2x,$$
 $u_y = 0,$ $v_x = y,$ $v_y = x.$

由 2x=x,0=-y 可知只有 x=y=0,z=0 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导,处处不解析且 $f'(0)=u_x(0)+\mathrm{i} v_x(0)=0$. 也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z + \overline{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}z$$

看出,

解答. 由
$$f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$$
 可知

$$u_x = 2x,$$

$$v_x = y,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_y = x.$$

由
$$2x=x,0=-y$$
 可知只有 $x=y=0,z=0$ 满足 C - R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且 $f'(0)=u_x(0)+\mathrm{i} v_x(0)=0$. 也可由

的
$$f=rac{1}{2}z(z+\overline{z}), \quad rac{\partial f}{\partial \overline{z}}=rac{1}{2}z$$

看出,
$$f'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0} = z|_{z=0} = 0.$$

例. 函数
$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$
 在何处可导, 在何处解析?

例. 函数
$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由
$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$
 可知

例. 函数
$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$v_x = e^x \sin y.$$

$$\sin y$$
,

$$u_y = -\mathrm{e}^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

例. 函数
$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$
 $u_y = -e^x \sin y,$
 $v_x = e^x \sin y,$ $v_y = e^x \cos y.$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

例. 函数
$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$
 $u_y = -e^x \sin y,$
 $v_x = e^x \sin y,$ $v_y = e^x \cos y.$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

实际上,这个函数就是复变量的指数函数 e^z .

练习. 函数()在
$$z=0$$
 处不可导.

$$(A) 2x + 3yi$$

(B)
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C)
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D)
$$x^2 - xyi$$

练习. 函数(A)在
$$z=0$$
 处不可导.

(A)
$$2x + 3yi$$

(B)
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C)
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D)
$$x^2 - xyi$$

练习. 函数(A)在
$$z=0$$
 处不可导.

(A)
$$2x + 3yi$$
 (B) $2x^2 + 3y^2i$

(C)
$$e^x \cos y + i e^x \sin y$$
 (D) $x^2 - xyi$

答案. 根据 C-R 方程可知对于 A,
$$u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$$
.

练习. 函数(A)在
$$z=0$$
 处不可导.

(A)
$$2x + 3yi$$
 (B) $2x^2 + 3y^2i$

(C)
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$
 (D) $x^2 - xyi$

答案. 根据 C-R 方程可知对于 A, $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0.

练习. 函数(A)在
$$z=0$$
 处不可导.

(A)
$$2x + 3yi$$
 (B) $2x^2 + 3y^2i$

(C)
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$
 (D) $x^2 - xyi$

答案. 根据 C-R 方程可知对于 A, $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. C 则是处处都可导.

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 f'(z).

例. 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

解答. 由于

$$u_x = 2x + ay,$$
 $u_y = ax + 2by,$
 $v_x = 2cx + dy,$ $v_y = dx + 2y,$

例. 设函数
$$f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$$
 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$u_x = 2x + ay,$$
 $u_y = ax + 2by,$ $v_x = 2cx + dy,$ $v_y = dx + 2y,$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

例. 设函数
$$f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$$
 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

 $u_y = ax + 2by,$

解答,由于

$$v_x = 2cx + dy,$$

$$v_y = dx + 2y,$$
 因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

 $a = d = 2, \quad b = c = -1,$

 $u_x = 2x + au$.

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

2x + ay = dx + 2y, ax + 2by = -(2cx + dy),

a = d = 2, b = c = -1.

解答. 由于

$$u_x = 2x + ay,$$
 $u_y = ax + 2by,$ $v_x = 2cx + dy,$ $v_y = dx + 2y,$

因此

$$f'(z)=u_x+{
m i}v_x=2x+2y+{
m i}(-2x+2y)=(2-2{
m i})z.$$
复变函数与积分变换 ho 第二章 解析函数 ho 2 函数解析的充要条件 ho B 柯西-黎曼方程的应用

例. 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

例. 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

例. 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数,

例. 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

#00000#0000

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此
$$u_x = v_x = u_y = v_y = 0$$
, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数.

夏变函数与积分变换 ▶ 第二章 解析函数 ▶ 2 函数解析的充要条件 ▶ B 柯西-黎曼方程的应用

例. 若
$$f'(z)$$
 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此
$$u_x = v_x = u_y = v_y = 0$$
, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数.

类似地可以证明,若 f(z) 在 D 内解析,则下述条件均可推出 f(z) 是常数:

例. 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 f(z) = u + iv 是常数.

- arg f(z) 是一常数.
- Re f(z) 是一常数,
- $v = u^2$.

- |f(z)| 是一常数,
 In f(z) 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

非考试内容

例. 若 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正 交.

交.

非考试内容

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零.

非考试内容

例. 若 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正 交.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x,y) = c_1$ 使用隐函数求导法 则得

 $u_x dx + u_y dy = 0$

则得

证明. 由于
$$f'(z)=u_x-\mathrm{i} u_y$$
, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法

 $u_x dx + u_y dy = 0$

从而 $\mathbf{u} = (u_u, -u_r)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

非考试内容

例. 若 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x,y) = c_1$ 使用隐函数求导法

则得
$$u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y = 0,$$

从而
$$\mathbf{u}=(u_y,-u_x)$$
 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.

非考试内容

则得

非考试内容

例. 若 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正 交.

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x,y) = c_1$ 使用隐函数求导法

$$u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

非考试内容

例. 若 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正

证明. 由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x,y) = c_1$ 使用隐函数求导法

则得
$$u_x \, \mathrm{d} x + u_y \, \mathrm{d} y = 0,$$

从而 $\mathbf{u} = (u_y, -u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\mathbf{v} = (v_y, -v_x)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量, 由干

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此这两个切向量 u,v 正交, 从而曲线正交.

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时,



这是因为 $df = f'(z_0) dz$.

这是因为 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍 并逆时针旋转 $\mathrm{arg}\,f'(z_0)$.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍 并逆时针旋转 $\mathrm{arg}\,f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u=c_1,v=c_2$ 正交可知上述例题成立.

第三节 初等函数

- ■指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

(1)
$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$$
 (欧拉恒等式);

(1)
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 (欧拉恒等式);

(2)
$$\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
 (极限定义);

- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
- (3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);

- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
- (3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);
- (4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z=x\in\mathbb{R}$ 时, $\exp z=\mathrm{e}^x$ (e^x 的解析 延拓).

有些人会从 e^x , $\cos x$, $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

有些人会从 e^x , $\cos x$, $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

有些人会从 e^x , $\cos x$, $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

指数函数的定义



$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty} \ \text{型不定式})$$

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} & \left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \ \, \underline{\Psi}不定式) \\ & = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \Big(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)\right) = \mathrm{e}^x. \end{split}$$

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \ \mbox{型不定式}) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x. \end{split}$$

不妨设 n > |z|, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \ \text{型不定式}) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x. \end{split}$$

不妨设 n > |z|, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x}$$

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \ \mbox{型不定式}) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x. \end{split}$$

不妨设 n > |z|, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \ \mbox{型不定式}) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \Big(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\Big)\right) = \mathrm{e}^x. \end{split}$$

不妨设 n > |z|, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

指数函数的性质

定义. 指数函数

 $\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

 $\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

• $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\bullet \exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\bullet \exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$ 处处解析,且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例. 计算函数 $f(z) = \exp(z/6)$ 的周期.

例. 计算函数
$$f(z) = \exp(z/6)$$
 的周期.

解答. 设
$$f(z_1) = f(z_2)$$
, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$.



例. 计算函数
$$f(z) = \exp(z/6)$$
 的周期.

解答. 设
$$f(z_1)=f(z_2)$$
, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得
$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

例. 计算函数
$$f(z) = \exp(z/6)$$
 的周期.

解答. 设
$$f(z_1)=f(z_2)$$
, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得
$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而
$$z_1 - z_2 = 12k\pi i$$
.

例. 计算函数
$$f(z) = \exp(z/6)$$
 的周期.

解答. 设
$$f(z_1)=f(z_2)$$
, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得
$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而
$$z_1 - z_2 = 12k\pi i$$
. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

例. 计算函数
$$f(z) = \exp(z/6)$$
 的周期.

解答. 设
$$f(z_1)=f(z_2)$$
, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得
$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而
$$z_1 - z_2 = 12k\pi i$$
. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地,
$$\exp(az+b)$$
 的周期是 $\frac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢?

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\operatorname{exp} z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\operatorname{arg} z$.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\operatorname{arg} z$.

设
$$z \neq 0$$
, $e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$,

对数函数 ${\rm Ln}\,z$ 定义为指数函数 ${\rm exp}\,z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 ${\rm Ln}$ 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 ${\rm Arg}\,z$ 和 ${\rm arg}\,z$.

设
$$z \neq 0$$
, $e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义.



定义.

(1) 定义对数函数

 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$

它是一个多值函数.

定义.

(1) 定义对数函数

 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

 $\ln z = \ln|z| + i \arg z.$

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$ln z = ln|z| + i \arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支.

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$ln z = ln|z| + i \arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\ln z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 z=x>0 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

例. 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.



例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln} (-1)$ 以及它们的主值.

解答.

例. 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

例. 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 ln 2.

例. 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 ln 2.

(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

例. 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

解答.

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 ln 2.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 πi.

例. 求 $Ln(-2+3i), Ln(3-\sqrt{3}i)$.

例. 求 Ln(-2+3i), Ln(3 - √3i). 解答.

典型例题:对数函数的计算

例. 求 Ln(-2+3i), Ln(3 - √3i). 解答.

典型例题: 对数函数的计算

用工

$$Ln(-2+3i) = ln|-2+3i| + iArg(-2+3i)$$

35 / 56

解答.

例. 求 Ln(-2+3i), $Ln(3-\sqrt{3}i)$.

典型例题: 对数函数的计算

$$Ln(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i \operatorname{Arg}(-2+3i)$$

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \operatorname{In}[-2+3i] + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例. 求
$$Ln(-2+3i), Ln(3-\sqrt{3}i)$$
.

解答.

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2)

$$\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) = \ln|3 + \sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i)$$

例. 求 $Ln(-2+3i), Ln(3-\sqrt{3}i)$.

典型例题: 对数函数的计算

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

 $Ln(3 - \sqrt{3}i) = ln|3 + \sqrt{3}i| + i Arg(3 - \sqrt{3}i)$

$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\mathbf{i} = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi\mathbf{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

. 0

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

例. 解方程
$$e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$$
.

解答. 由于
$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
,

例. 解方程
$$e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$$
.

解答. 由于
$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
,因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + (2k + \frac{1}{3})\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例. 解方程
$$e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$$
.

解答. 由于
$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
,因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求
$$\ln(-1-\sqrt{3}i) =$$
______.

例. 解方程
$$e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$$
.

解答. 由于
$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
,因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求
$$\ln(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}{3}$$
.

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \ge 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立.

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \ge 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均未必成立.

设 x 是正实数,



设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i$$
, $\lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i$,

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 ln z 在负实轴和零处不连续.



设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i$$
, $\lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i$,

因此 ln z 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数,

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \mathrm{Im}\,z < \pi$ 上的单值反函数,

从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i$$
, $\lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + y i) = \ln x - \pi i$,

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \mathrm{Im}\,z < \pi$ 上的单值反函数,

从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 x > 0 时,

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\frac{y}{x},$$

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + y i) = \ln x - \pi i,$$

因此 ln z 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数,

从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 x>0 时,

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
 $v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2 + y^2},$ $(\ln z)' = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot} \frac{x}{y} - \pi$ 类似证明.

定义.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^{\mathbf{a}} = e^{\mathbf{a} \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^{\mathbf{a}} = e^{\mathbf{a} \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $e^{2ak\pi i}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^{a} = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^{a} = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析;

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^{a} = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln|z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析.

当
$$a=\frac{p}{q}$$
 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

当
$$a=rac{p}{q}$$
 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right), \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值.

当
$$a=rac{p}{q}$$
 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right), \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.

当 $a=rac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 q>1 时,

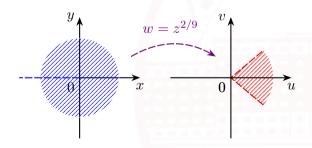
$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right), \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.

当 $a=\frac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 q>1 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right), \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.



对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.



对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a$ i 不可能是 2π i 的整数倍.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a$ i 不可能是 2π i 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a$ i 不可能是 2π i 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a$ i 不可能是 2π i 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a$ i 不可能是 2π i 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

\overline{a}	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n\geqslant 0$ 时处处解析 $n<0$ 时除零点外解析
	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

典型例题: 幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1}$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i}$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i=e^{i\operatorname{Ln} i}$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^{i} = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left(i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right)$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\operatorname{Ln}\mathbf{i}} = \exp\left(\mathbf{i}\cdot\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathbf{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i} \operatorname{Ln} \mathbf{i}} = \exp\left(\mathbf{i} \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathbf{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i} \operatorname{Ln} \mathbf{i}} = \exp\left(\mathbf{i} \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \mathbf{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

幂函数的性质

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a\not\in\mathbb{Z}$ 时总是多值的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a\not\in\mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆,以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立,

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2},$$

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to \infty$.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形 完全不同.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形 完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi,$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

• $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

双曲函数

双曲函数

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{e}^z + \operatorname{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i} z,$$

双曲函数

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{e}^z + \operatorname{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i} z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{e}^z + \operatorname{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i} z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{e}^z + \operatorname{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i} z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq (k + \frac{1}{2})\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{e}^z + \operatorname{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i} z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq (k + \frac{1}{2})\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

 $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i, \operatorname{th} z$ 的周期是 $\pi i.$

设
$$z = \cos w = \frac{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
,

设
$$z=\cos w=rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
,则
$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,$$

设
$$z=\cos w=rac{{
m e}^{{
m i}w}+{
m e}^{-{
m i}w}}{2}$$
,则
$${
m e}^{2{
m i}w}-2z{
m e}^{{
m i}w}+1=0,\quad {
m e}^{{
m i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\;$$
(双值).

设
$$z = \cos w = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
, $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

设
$$z = \cos w = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
, $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

设
$$z = \cos w = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
, $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

设
$$z = \cos w = \frac{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
, $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

• 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$

设
$$z=\cos w=rac{{
m e}^{{
m i}w}+{
m e}^{-{
m i}w}}{2}$$
,则
$${
m e}^{2{
m i}w}-2z{
m e}^{{
m i}w}+1=0,\quad {
m e}^{{
m i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\;$$
(双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z \neq \pm \mathrm{i};$

设
$$z=\cos w=rac{{
m e}^{{
m i}w}+{
m e}^{-{
m i}w}}{2}$$
,则
$${
m e}^{2{
m i}w}-2z{
m e}^{{
m i}w}+1=0,\quad {
m e}^{{
m i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\;$$
(双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数 $Arctan z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$

设
$$z=\cos w=rac{{
m e}^{{
m i}w}+{
m e}^{-{
m i}w}}{2}$$
,则
$${
m e}^{2{
m i}w}-2z{
m e}^{{
m i}w}+1=0,\quad {
m e}^{{
m i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\;$$
(双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z \neq \pm \mathrm{i};$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$
- 反双曲正弦函数 $Arsh z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1});$

设
$$z = \cos w = \frac{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}{2}$$
,则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
, $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数 $\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1.$

解答. 由于
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
,

解答. 由于
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

解答. 由于
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

解答. 由于
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i\operatorname{Ln}((2 \pm \sqrt{3})i) = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i\operatorname{ln}(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i\operatorname{Ln}((2 \pm \sqrt{3})i) = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i\operatorname{ln}(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i\operatorname{Ln}((2 \pm \sqrt{3})i) = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i\operatorname{ln}(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于任意 z, 总存在 θ 使得

Arcsin
$$z = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm \theta$$
,
Arccos $z = 2k\pi \pm \theta$,

Arctan $z = k\pi + \theta$, $(z \neq \pm i)$.

称分子次数小于分母次数的有理函数为真分式.

称分子次数小于分母次数的有理函数为 \mathbf{j} 分式. 任何一个有理函数 f(z) 都可以通过带余除法分解为一个多项式 g(z) 和一个真分式之和.

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 f(z) 都可以通过带余除法分解为一个多项式 g(z) 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出,则这个真分式又可以分拆为部分分式之和,其中部分分式是指形如 $\frac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式.

称分子次数小于分母次数的有理函数为真分式。任何一个有理函数 f(z) 都可以通过带余除法分解为一个多项式 g(z) 和一个真分式之和。

若这个有理函数分母的零点均能求出,则这个真分式又可以分拆为部分分式之和,其中部分分式是指形如 $\frac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式。我们来介绍求这种分拆的一种方法。

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

解答. 设
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$$
,

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

解答. 设
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$$
, 则
$$a = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-2)^2} = 1,$$

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

解答. 读
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$$
, 则
$$a = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{z \to 2} ((z-2)^2 f(z))' = \lim_{z \to 2} \left(\frac{1}{z-1}\right)' = -1,$$

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

解答. 设
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$$
, 则
$$a = \lim_{z \to 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{z \to 2} ((z-2)^2 f(z))' = \lim_{z \to 2} \left(\frac{1}{z-1}\right)' = -1,$$

$$c = \lim_{z \to 2} (z-2)^2 f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{z-1} = 1.$$

例. 将
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$
 展开成部分分式之和.

解答. 设
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2}$$
, 则
$$a = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-2)^2} = 1,$$

 $b = \lim_{z \to 0} ((z-2)^2 f(z))' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z-1}\right)' = -1,$

 $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$

 $c = \lim_{z \to 2} (z - 2)^2 f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{z - 1} = 1.$

因此

52 / 56

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 的 n 阶导数.

非考试内容

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

非考试内容

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析,

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+r^2}$$
 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)^{(n)}$$

得到这种分拆之后,我们可以求出该有理函数的任意阶导数...

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{z-\mathrm{i}} \right)^{(n)} = \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot (-1)^n n! \left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}} \right)$$

得到这种分拆之后,我们可以求出该有理函数的任意阶导数。

例. 计算
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right),$$

则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)^{(n)} = \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}} - \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \right)$$
$$= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} (z+i)^{-n-1}.$$

有理函数的导数

当
$$z = x$$
 为实数时,

$$|x + i| = \sqrt{x^2 + 1}$$
, $\arg(x + i) = \operatorname{arccot} x$,

有理函数的导数

当
$$z = x$$
 为实数时,

$$|x + i| = \sqrt{x^2 + 1}$$
, $arg(x + i) = arccot x$,

于是

$$\frac{1}{(z\pm i)^{n+1}} = (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} e^{\pm i(n+1) \operatorname{arccot} x}.$$

有理函数的导数

当
$$z = x$$
 为实数时,

$$|x + i| = \sqrt{x^2 + 1}$$
, $arg(x + i) = arccot x$,

于是

$$\frac{1}{(z \pm i)^{n+1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} e^{\pm i(n+1) \operatorname{arccot} x}.$$

因此

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = (-1)^n n! (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} \sin((n+1)\operatorname{arccot} x).$$

复变函数与积分变换 ▶ 第二章 解析函数 ▶ 3 初等函数 ▶ E 在有理函数的应用

例. 计算
$$\int \frac{1}{x^3 - 1} \, \mathrm{d}x$$
.

例. 计算
$$\int \frac{1}{x^3-1} dx$$
.

解答. 设
$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
,

例. 计算
$$\int \frac{1}{x^3-1} dx$$
.

解答. 设
$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{\zeta}{x - \zeta} + \frac{\zeta^2}{x - \zeta^2} \right),$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分。

 $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{\zeta}{x - \zeta} + \frac{\zeta^2}{x - \zeta^2} \right),$

 $g(z) = \frac{1}{3}(\ln(z-1) + \zeta \ln(z-\zeta) + \zeta^2 \ln(z-\zeta^2)).$

例. 计算
$$\int \frac{1}{x^3 - 1} \, \mathrm{d}x.$$

#DDDD#DDDDD#DDDD#DDDD#DDD#DDD

解答. 设
$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
, 那么我们有分拆

设

q(z) 在复平面去掉三条射线 $x + \zeta^k, x \leq 0$ 内的导数为 f(z).

复变函数与积分变换 ▶ 第二章 解析函数 ▶ 3 初等函数 ▶ E 在有理函数的应用

56 / 56

$$g(z)$$
 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,
$$3g(z)-\ln(x-1)=2\operatorname{Re}\left(\zeta\ln(x-\zeta)\right)=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\right)$$

$$=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\left(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$g(z)$$
 在复乎面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,
$$3g(z)-\ln(x-1)=2\operatorname{Re}\left(\zeta\ln(x-\zeta)\right)=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\right)$$

$$=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\left(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

于是我们得到当 x > 1 时,

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$g(z)$$
 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,

$$3g(z) - \ln(x - 1) = 2\operatorname{Re}(\zeta \ln(x - \zeta)) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\ln\left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$
$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\left(\ln\sqrt{x^2 + x + 1} - i\operatorname{arccot}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \ln \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{3} \operatorname{arccot} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

于是我们得到当 x > 1 时,

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

可以看出对于实数 x < 1, 上式的导数也等于 f(x), 从而 f(x) 的不定积分为 g(x) + C, $C \in \mathbb{R}$.