



# 北京理工大学

## 抓石子游戏中的数学问题

---

张神星 (合肥工业大学)

北京理工大学

[zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)





## 抓石子游戏

- Alice 和 Bob 在玩一个游戏, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走  $1 \sim 3$  个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.





## 抓石子游戏

- Alice 和 Bob 在玩一个游戏, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走  $1 \sim 3$  个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.



## 抓石子游戏

- Alice 和 Bob 在玩一个游戏, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走  $1 \sim 3$  个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.









## 必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.

## 必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.

## 必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.
- 如果初始有  $n$  个石子, 令

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1, & \text{先手必胜;} \\ 0, & \text{后手必胜.} \end{cases}$$

## 必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.
- 如果初始有  $n$  个石子, 令

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1, & \text{先手必胜;} \\ 0, & \text{后手必胜.} \end{cases}$$

- 那么

$$\mathcal{P}(n) = 1 - \mathcal{P}(n-1)\mathcal{P}(n-2)\mathcal{P}(n-3) = \begin{cases} 1, & 4 \nmid n; \\ 0, & 4 \mid n. \end{cases}$$

## 必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.
- 如果初始有  $n$  个石子, 令

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1, & \text{先手必胜;} \\ 0, & \text{后手必胜.} \end{cases}$$

- 那么

$$\mathcal{P}(n) = 1 - \mathcal{P}(n-1)\mathcal{P}(n-2)\mathcal{P}(n-3) = \begin{cases} 1, & 4 \nmid n; \\ 0, & 4 \mid n. \end{cases}$$

- 这个序列 ( $n \geq 0$ ) 形如:

0111 0111 0111 ...















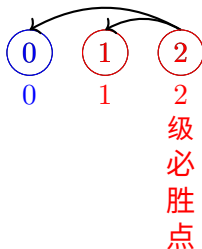






## 必胜点

- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S \subset \mathbb{N}$  表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比  $S$  中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.



可以变成  $0 \sim m-1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.



## 必胜点

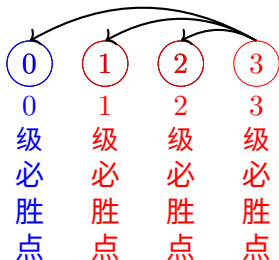
- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S \subset \mathbb{N}$  表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比  $S$  中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.

0	1	2
0	1	2
级	级	级
必	必	必
胜	胜	胜
点	点	点

可以变成  $0 \sim m-1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.

## 必胜点

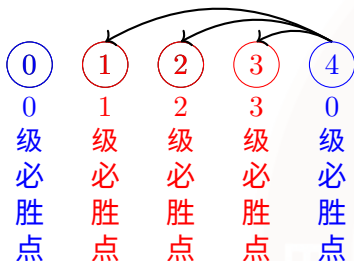
- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S \subset \mathbb{N}$  表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比  $S$  中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.



可以变成  $0 \sim m-1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.

## 必胜点

- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S \subset \mathbb{N}$  表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比  $S$  中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.



可以变成  $0 \sim m-1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.

## 必胜点

- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S \subset \mathbb{N}$  表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比  $S$  中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0级必胜点	1级必胜点	2级必胜点	3级必胜点	0级必胜点	1级必胜点	2级必胜点	3级必胜点	0级必胜点

可以变成  $0 \sim m-1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.



- 如果  $n$  个石子情形是  $m$  级必胜点, 定义  $\mathcal{G}_S(n) = m$ , 并称该序列为 **Sprague-Grundy 序列** (或 Nim 序列).

- , 定义  $\mathcal{G}_S(n) = m$ , 并称该序列为 (S-极小序列). 那么
- $$\min\{\mathcal{G}_S(n-s) : s \in S\},$$
- 的非负整数 (minimal except).

, 定义  $\mathcal{G}_S(n) = m$ , 并称该序列为 (列). 那么

$$\min\{\mathcal{G}_S(n - s) : s \in S\},$$

的非负整数 (minimal except).

, 定义  $\mathcal{G}_S(n) = m$ , 并称该序列为 (S-极小序列). 那么

$$\min\{\mathcal{G}_S(n-s) : s \in S\},$$

的非负整数 (minimal except).

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如



实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 ( $S$  无限);

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 ( $S$  无限);
- 高维情形 ( $n$  是向量,  $S$  是向量集合) 等等.

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 ( $S$  无限);
- 高维情形 ( $n$  是向量,  $S$  是向量集合) 等等.

我们今天只讨论  $S$  有限的 <sup>subtraction game</sup> 一维一堆情形.

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 ( $S$  无限);
- 高维情形 ( $n$  是向量,  $S$  是向量集合) 等等.

我们今天只讨论  $S$  有限的 <sup>subtraction game</sup> 一维一堆情形.

注意到  $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ .





- 我们将集合  $S$  中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

- 那么  $\mathcal{G}(n) \leq k$ .



- 我们将集合  $S$  中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

- 那么  $\mathcal{G}(n) \leq k$ . 于是 S-G 序列中连续  $s_k$  项形成的序列只有  $(k+1)^{s_k}$  种可能, 从而由抽屉原理可知, 存在两个相同的  $s_k$  项序列.

- 我们将集合  $S$  中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

- 那么  $\mathcal{G}(n) \leq k$ . 于是 S-G 序列中连续  $s_k$  项形成的序列只有  $(k+1)^{s_k}$  种可能, 从而由抽屉原理可知, 存在两个相同的  $s_k$  项序列. 而  $\mathcal{G}(n)$  仅由它之前的  $s_k$  项决定, 所以我们得到:



- 我们将集合  $S$  中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

- 那么  $\mathcal{G}(n) \leq k$ . 于是 S-G 序列中连续  $s_k$  项形成的序列只有  $(k+1)^{s_k}$  种可能, 从而由抽屉原理可知, 存在两个相同的  $s_k$  项序列. 而  $\mathcal{G}(n)$  仅由它之前的  $s_k$  项决定, 所以我们得到:

# 命题

ultimately periodic

序列  $\mathcal{G}$  是**最终周期**的, 即存在整数  $p \geq 1, \ell \geq 0$  使得  $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n), \forall n \geq \ell$ .

- 将最小的  $p$  称为  $(\mathcal{G}_S$  或  $\text{SUB}(S)$  的) <sup>period</sup>周期, 最小的  $\ell$  称为 <sup>pre-period</sup>预周期.

- 于是

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2)\cdots = \mathcal{G}(0)\cdots\mathcal{G}(\ell-1)\underline{\mathcal{G}(\ell)\cdots\mathcal{G}(\ell+p-1)}.$$

这里  $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$  表示无穷多个  $\mathcal{H}$  重复得到的序列.

- 于是

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2)\cdots = \mathcal{G}(0)\cdots\mathcal{G}(\ell-1)\underline{\mathcal{G}(\ell)\cdots\mathcal{G}(\ell+p-1)}.$$

这里  $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$  表示无穷多个  $\mathcal{H}$  重复得到的序列.

- 不难说明, 满足  $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p), \ell \leq \forall n \leq \ell + s_k$  的最小的  $p$  和  $\ell$  就是周期和预周期.

- 于是

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2)\cdots = \mathcal{G}(0)\cdots\mathcal{G}(\ell-1)\underline{\mathcal{G}(\ell)\cdots\mathcal{G}(\ell+p-1)}.$$

这里  $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$  表示无穷多个  $\mathcal{H}$  重复得到的序列.

- 不难说明, 满足  $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p), \ell \leq \forall n \leq \ell + s_k$  的最小的  $p$  和  $\ell$  就是周期和预周期.
- 因此对于任意集合  $S$ , 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 S-G 序列.

- 于是

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2) \cdots = \mathcal{G}(0) \cdots \mathcal{G}(\ell-1) \mathcal{G}(\ell) \cdots \mathcal{G}(\ell+p-1).$$

这里  $\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$  表示无穷多个  $\mathcal{H}$  重复得到的序列.

- 不难说明, 满足  $G(n) = G(n+p), \ell \leq \forall n \leq \ell + s_k$  的最小的  $p$  和  $\ell$  就是周期和预周期.
- 因此对于任意集合  $S$ , 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 S-G 序列.
- 显然  $p, \ell \leq (k+1)^{s_k}$ .



当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的.



当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道.

当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$ .

当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$ .
- $1 \in S$  不含偶数  $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$ .

当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$ .
- $1 \in S$  不含偶数  $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$ .
- 事实上, 如果  $S' = S \cup \{x + pt\}$ , 其中  $x \in S, p$  是  $\mathcal{G}_S$  周期, 则  $\mathcal{G}_{S'} = \mathcal{G}_S$ .

## 抓石子游戏中的数学问题 ▶ 2 已知的结论

- ## 抓石子游戏中的数学问题 ▶ 2 已知的结论

## 抓石子游戏中的数学问题 ▶ 2 已知的结论

## 抓石子游戏中的数学问题 ▶ 2 已知的结论

-



三元集合:  $a = 1, b$  奇

## 例

设  $S = \{1, b, c\}$ ,  $2 \nmid b$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1, b\}} = \underline{\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{H} = 01$ . 我们有

$c$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
奇数	$\mathcal{H}$	0	2
偶数	$\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2$	0	$c+b$

三元集合:  $a = 1, b = 2$

## 例

设  $S = \{1, 2, 3t + r\}$ ,  $0 \leq r < 3$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \underline{\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{H} = 012$ . 我们有

$r$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
0	<u>(012)<sup>t</sup>3</u>	0	$c+1$
1, 2	<u>012</u>	0	3

三元集合:  $a = 1, b = 4$

## 例

设  $S = \{1, 4, c = 5t + r\}$ ,  $0 \leq r < 5$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} = 01012$ . 我们有

$r, c$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
$r = 0, c = 5$	<u><math>\mathcal{H} \ 323</math></u>	0	8
$r = 0, c > 5$	$\mathcal{H}^t \ 323013$ <u><math>\mathcal{H}^{t-1} 012012</math></u>	$c + 6$	$c + 1$
$r = 1, 4$	<u><math>\mathcal{H}</math></u>	0	5
$r = 2$	<u><math>\mathcal{H}^t 012</math></u>	0	$c + 1$
$r = 3$	<u><math>\mathcal{H}^{t+1} \ 32</math></u>	0	$c + 4$

三元集合:  $a = 1, b \geq 6$  偶

## 命题

设  $S = \{1, b, c\}$ , 其中  $b \geq 6$  是偶数,  $c = t(b+1) + r, 0 \leq r \leq b$ .

三元集合:  $a = 1, b \geq 6$  偶

## 命题

设  $S = \{1, b, c\}$ , 其中  $b \geq 6$  是偶数,  $c = t(b+1) + r, 0 \leq r \leq b$ . 我们有

	$r$	$\ell$	$p$
	$1, b$	$0$	$b + 1$
	$[3, b - 1]$ 是奇数	$0$	$c + b$
	$b - 2$	$0$	$c + 1$
	$c = b + 1$	$0$	$2b$
$c > b + 1$ $r \leq b - 4$ 偶	$\begin{cases} r > b - 2t - 2 \\ r = b - 2t - 2 \\ r < b - 2t - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (\frac{b-r}{2} - 1)(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \end{cases}$	$\begin{cases} c + 1 \\ b - 1 \\ c + b \end{cases}$



三元集合:  $a = 1, b \geq 6$  偶

## 命题

设  $S = \{1, b, c\}$ , 其中  $b \geq 6$  是偶数,  $c = t(b+1) + r, 0 \leq r \leq b$ . 我们有

	$r$	$\ell$	$p$
	$1, b$	$0$	$b + 1$
	$[3, b - 1]$ 是奇数	$0$	$c + b$
	$b - 2$	$0$	$c + 1$
	$c = b + 1$	$0$	$2b$
$c > b + 1$ $r \leq b - 4$ 偶	$\begin{cases} r > b - 2t - 2 \\ r = b - 2t - 2 \\ r < b - 2t - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (\frac{b-r}{2} - 1)(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \\ t(c + b + 2) - b \end{cases}$	$\begin{cases} c + 1 \\ b - 1 \\ c + b \end{cases}$

- 可以看出在带 1 的三元集情形,  $p$  和  $\ell$  的形式与  $c$  模  $\{1, b\}$  的周期的同余类有关.
- 除去有限多种情形外,  $c$  在每一个同余类中,  $p$  和  $\ell$  是  $c$  的一次函数.

三元集合:  $a = 1, b \geq 6$  偶 (续)

该情形  $\mathcal{G}$  序列较为复杂.



三元集合:  $a = 1, b \geq 6$  偶 (续)

该情形  $\mathcal{G}$  序列较为复杂. 例如: 若  $0 < r = 2v < b - 2t - 2$ ,  $b = 2k$ , 则

$i$	$\mathcal{G}((c+1)i+j), 0 \leq j \leq c$
0	$\mathcal{H}^t(01)^v 2$
1	$(32)^{k-v-1}(01)^{v+1} 2, \mathcal{H}^{t-1}(01)^v 0$
2	$1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 2, (32)^{k-v-2}(01)^{v+2} 2, \mathcal{H}^{t-2}(01)^v 0$
$i$	$1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-i+1} 2(01)^{v+i-2} 0,$ $1(01)^{k-v-i} 2(01)^{v+i-1} 2, (32)^{k-v-i}(01)^{v+i} 2, \mathcal{H}^{t-i}(01)^v 0$
$t-1$	$1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+2} 2(01)^{v+t-3} 0,$ $1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 2, (32)^{k-v-t+1}(01)^{v+t-1} 2, \mathcal{H}^1(01)^v 0$
$t$	$1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 0,$ $1(01)^{k-v-t} 2(01)^{v+t-1} 2, (32)^{k-v-t}(01)^{v+t} 2, (01)^v 0$
$t+1$	$1(01)^{k-v-2} 2(01)^{v+1} 0, \dots, 1(01)^{k-v-t+1} 2(01)^{v+t-2} 0,$ $1(01)^{k-v-t} 2(01)^{v+t-1} 0, 1(01)^{k-v-t-1} 2(01)^{v+t} 2, (32)^{k-v-t-1} 01 \dots$

## 命题

设  $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}, 0 \leq r < 3a$ , 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

## 更多的例子

## 命题

设  $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}, 0 \leq r < 3a$ , 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

## 命题

设  $S = \{a, a+1, \dots, b-1, b, c = t(a+b) + r\}, 0 \leq r < a+b$ , 则

$$\ell = 0, \quad p = \begin{cases} a + b, & a \leq r \leq b; \\ c + a, & r = 0 \text{ 或 } r > b; \\ c + b, & 0 < r < a. \end{cases}$$

设  $S = \{2, 3, 5, 7\}$ , 则  $G_S = \underline{0^2 1^2 2^2 3^2 4}$  周期为 9. 对于  $11 \leq c \leq 500$ ,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期为

$$\ell_c = \begin{cases} 2c-4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ c+5, & c \equiv 10 \pmod{18}; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p_c = \begin{cases} c+2, & c \equiv 0, 8, 9, 10, 17 \pmod{18}; \\ 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ 9, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

## 主要猜想结论

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod q$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod q$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

### 定理 (TCS2024)

上述猜想在如下情形成立：

## 主要猜想结论

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod{q}$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

## 定理 (TCS2024)

上述猜想在如下情形成立：

(1)  $1 \in S$  且  $S$  所有元素均为奇数;



## 主要猜想结论

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod q$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

### 定理 (TCS2024)

**上述猜想在如下情形成立：**

- (1)  $1 \in S$  且  $S$  所有元素均为奇数;
- (2)  $S = \{1, b\}$ ;

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod q$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

## 定理 (TCS2024)

上述猜想在如下情形成立：

- (1)  $1 \in S$  且  $S$  所有元素均为奇数;
- (2)  $S = \{1, b\}$ ;
- (3)  $S = \{a, 2a\}$ ;

## 主要猜想结论

根据这些结论, 我们猜想  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  周期和预周期关于  $c$  是最终逐剩余类线性的:

## 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod{q}$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

## 定理 (TCS2024)

上述猜想在如下情形成立：

- (1)  $1 \in S$  且  $S$  所有元素均为奇数;
- (2)  $S = \{1, b\}$ ;
- (3)  $S = \{a, 2a\}$ ;
- (4)  $S = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ .

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 S-G 序列.





ultimately bipartite

例

设  $a \geq 3$  是奇数. 如果  $S$  是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \dots, 2^a + 1\};$
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\};$
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\};$
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\},$

则  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的.





如下三元最终二分  $\text{SUB}(S)$ .

### 定理

设  $a \geq 3$  是奇数,  $t \geq 1$ . 如果  $S$  是如下情形之一:

(来自  $\{a, a + 2, 2a + 3\}$ )

(来自  $\{a, 2a + 1, 3a\}$ )

(来自  $\{a, a+2, 2a+3\}$ )

则  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的.



謝謝

BEIJING