复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第五章　留数

1. 留数
2. 留数的应用

第一节　留数

- 留数定理
- 留数的计算方法
- 在 ∞ 的留数

定义. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在它的某个去心邻域内的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots.$$

定义. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在它的某个去心邻域内的洛朗展开为

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots.$$

称

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]:=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ 在 z_0 **的留数**, 其中 C 为该去心邻域中绕 z_0 的一条闭路.

留数

定义. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在它的某个去心邻域内的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots .$$

称

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ 在 z_0 的留数, 其中 C 为该去心邻域中绕 z_0 的一条闭路.

可以看出, 知道留数之后可以用来计算积分.

复变函数积分计算方法 III: 留数定理. 若 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 内部的奇点为 $z_1, z_2, \dots, z_n$，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

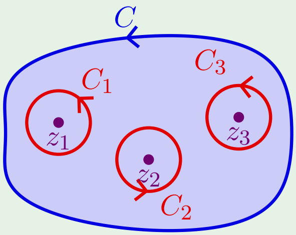
复变函数积分计算方法 III: 留数定理. 若 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 内部的奇点为 $z_1, z_2, \dots, z_n$，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证明. 由复合闭路定理，

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].\end{aligned}$$

□



可去奇点的留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则显然 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$.

例. $f(z) = \dfrac{z^3(\mathrm{e}^z - 1)^2}{\sin z^4}$.

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则显然 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$.

例. $f(z) = \dfrac{z^3(e^z - 1)^2}{\sin z^4}$. 由于 0 是分子的五阶零点, 分母的四阶零点, 因此 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

可去奇点的留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.

例. $f(z) = \dfrac{z^3(\mathrm{e}^z - 1)^2}{\sin z^4}$. 由于 0 是分子的五阶零点, 分母的四阶零点, 因此 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点. 故

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = 0.$$

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

本性奇点的留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

例. $f(z) = z^4 \sin \dfrac{1}{z}$.

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

例. $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}$. 由于

$$f(z) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} + \cdots$$

本性奇点的留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

例. $f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z}$. 由于

$$f(z) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} + \cdots$$

因此

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{120}.$$

设 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

极点的留数计算方法

设 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

留数计算公式 I. 若 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点或可去奇点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

设 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

留数计算公式 I. 若 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点或可去奇点，那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

留数计算公式 II. 若 z_0 是一阶极点或可去奇点，那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

证明. 设

$$
\begin{aligned}
f(z) &= c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \cdots, \\
g(z) &= c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots,
\end{aligned}
$$

极点的留数计算方法

证明. 设

$$
\begin{aligned}
f(z) &= c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \cdots, \\
g(z) &= c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots,
\end{aligned}
$$

则 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$.

证明. 设

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+\cdots,$$
$$g(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots,$$

则 $g(z)=(z-z_0)^m f(z)$. 由泰勒展开系数与函数导数的关系可知

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z_0).$$

□

典型例题：留数的计算

例. 求 $\text{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right]$.

解答. 显然 0 是 n 阶极点,

例. 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right]$.

解答. 显然 0 是 n 阶极点，

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(\mathrm{e}^z)^{(n-1)}$$

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right]$.

解答. 显然 0 是 n 阶极点,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^n}, 0\right] &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(\mathrm{e}^z)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^z = \frac{1}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，

例. 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点.

例. 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z-\sin z}{z^3}\Big)''$$

计算会很繁琐.

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)}$$

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = -\frac{1}{120}.$$

典型例题：留数的计算

例. 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = -\frac{1}{120}.$$

练习. 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5}, 0\right] =$ ______.

典型例题：留数的计算

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

解答. 因为 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，所以是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的三阶极点. 若用公式

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = -\frac{1}{120}.$$

练习. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5}, 0\right] = \underline{\ 1/24\ }$.

留数计算公式 III. 设 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

留数的计算方法

留数计算公式 III. 设 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证明. 不难看出 z_0 是 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点或可去奇点.

留数计算公式 III. 设 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证明. 不难看出 z_0 是 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点或可去奇点. 因此

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

□

留数计算公式 III. 设 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证明. 不难看出 z_0 是 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点或可去奇点. 因此

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{\dfrac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} \qquad \square$$

留数计算公式 III. 设 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 解析且 z_0 是 Q 的一阶零点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证明. 不难看出 z_0 是 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点或可去奇点. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),z_0]&=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.\end{aligned}$$

□

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^8-1}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right]$.

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^8-1}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right]$.

解答. 由于 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 是分母的 1 阶零点，

例. 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^8-1}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right]$.

解答. 由于 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 是分母的 1 阶零点，因此

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^8-1}, \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right]=\frac{z}{(z^8-1)'}\bigg|_{z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}}=\frac{z}{8z^7}\bigg|_{z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}}=\frac{\mathrm{i}}{8}.$$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z| < 2$ 内有奇点 $z = 0, 1.$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,dz.$

解答. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1$.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1.$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2}=0,$$

例题：留数的应用

例. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解答. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z| < 2$ 内有奇点 $z = 0, 1$.

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2} = 1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z\to 1} \left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)' = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),0] + \operatorname{Res}[f(z),1]\big] = 2\pi\mathrm{i}.$$

定义. 设 $f(z)$ 在某个圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，且洛朗展开为

$$f(z)=\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

称

$$\mathbf{Res}[f(z),\infty]:=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ **在 ∞ 的留数**，其中 C 为该圆环域中绕 0 的一条闭路.

由于

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = \cdots + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_{-2} + \cdots$$

由于

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = \cdots + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_{-2} + \cdots$$

因此有

留数计算公式 IV.

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right].$$

留数之和为 0

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在扩充复平面内各奇点处的留数之和为 0.

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在扩充复平面内各奇点处的留数之和为 0.

证明. 设闭路 C 内部包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$.

留数之和为 0

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在扩充复平面内各奇点处的留数之和为 0.

证明. 设闭路 C 内部包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$. 由留数定理

$$-\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

留数之和为 0

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在扩充复平面内各奇点处的留数之和为 0.

证明. 设闭路 C 内部包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$. 由留数定理

$$-\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0.$ □

例题：留数的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z) = \dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

例题：留数的应用

例. 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$，其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$,

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$, 其中 0 是本性奇点, 它的留数不易求得. 而 $-\mathrm{i}$ 是 10 阶极点, 它的留数也难以计算.

例题：留数的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$, 其中 0 是本性奇点, 它的留数不易求得. 而 $-\mathrm{i}$ 是 10 阶极点, 它的留数也难以计算. 因此我们将问题转化为计算闭路 C 外部的奇点处留数.

例题：留数的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$，其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$，其中 0 是本性奇点，它的留数不易求得. 而 $-\mathrm{i}$ 是 10 阶极点，它的留数也难以计算. 因此我们将问题转化为计算闭路 C 外部的奇点处留数.

解答. $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3,\infty$.

例题：留数的应用

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$，其中 $f(z)=\dfrac{\sin(1/z)}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$.

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $1,-\mathrm{i},0$，其中 0 是本性奇点，它的留数不易求得．而 $-\mathrm{i}$ 是 10 阶极点，它的留数也难以计算．因此我们将问题转化为计算闭路 C 外部的奇点处留数.

解答. $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3,\infty$.

$$\operatorname{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2(3+\mathrm{i})^{10}}\sin\frac{1}{3}.$$

例题：留数的应用

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}\sin z}{(1+\mathrm{i}z)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

例题：留数的应用

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}\sin z}{(1+\mathrm{i}z)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),-\mathrm{i}]+\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),0]\big]$$

例题：留数的应用

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}\sin z}{(1+\mathrm{i}z)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),-\mathrm{i}]+\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),0]\big]\\ &= -2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\big]=-\frac{\pi\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})^{10}}\sin\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

积分的计算方法汇总

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

积分的计算方法汇总

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

定积分 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

是闭路

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

是闭路

否

$f(z)$ 解析

是

求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

是闭路

否

$f(z)$ 解析

否

设曲线方程为 $z(t)$, 则

积分 $= \int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$

可能需要分段计算

是

求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

是闭路

是

内 (外) 部只有孤立奇点

否

$f(z)$ 解析

否

设曲线方程为 $z(t)$, 则

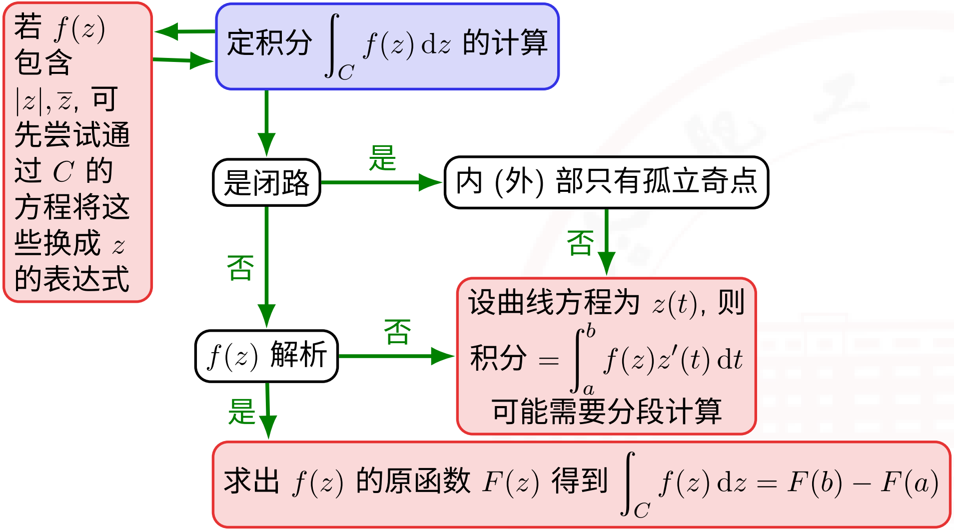
积分 $= \int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$

可能需要分段计算

是

求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总


若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式
定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算
是闭路
是
内 (外) 部只有孤立奇点
否
否
$f(z)$ 解析
否
设曲线方程为 $z(t)$, 则
积分 $= \int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$
可能需要分段计算
是
求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

是闭路

是

内 (外) 部只有孤立奇点

是

闭路内部和外部孤立奇点数量

否

设曲线方程为 $z(t)$, 则

积分 $= \displaystyle\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$

可能需要分段计算

否

$f(z)$ 解析

否

是

求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总

定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算

若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式

是闭路

是

内 (外) 部只有孤立奇点

是

闭路内部和外部孤立奇点数量

闭路内易计算

闭路内奇点留数之和并乘 $2\pi\mathrm{i}$

否

否

$f(z)$ 解析

否

设曲线方程为 $z(t)$, 则

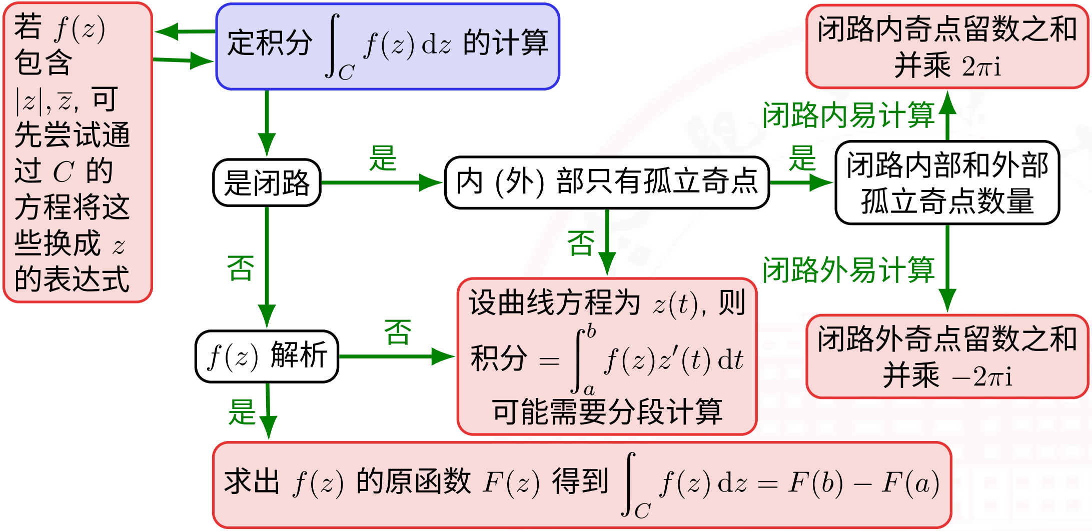
积分 $= \displaystyle\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$

可能需要分段计算

是

求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

积分的计算方法汇总



定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算
若 $f(z)$ 包含 $|z|, \overline{z}$, 可先尝试通过 C 的方程将这些换成 z 的表达式
是闭路
是
内 (外) 部只有孤立奇点
是
闭路内部和外部孤立奇点数量
闭路内易计算
闭路内奇点留数之和并乘 $2\pi\mathrm{i}$
闭路外易计算
闭路外奇点留数之和并乘 $-2\pi\mathrm{i}$
否
否
设曲线方程为 $z(t)$, 则
积分 $= \int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$
可能需要分段计算
$f(z)$ 解析
否
是
求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$

第二节　留数的应用

- 正弦余弦的有理函数的积分
- 有理函数的广义积分
- 有理函数与三角函数之积的广义积分
- 含幂函数的积分
- 含对数函数的积分

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数.

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\Big(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\Big)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z.$$

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 相应计算公式会在考试中按需提供.

考虑 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是一个有理函数. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\Big(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\Big)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z.$$

由于被积函数是一个有理函数, 它的积分可以由 $|z|<1$ 内奇点留数得到.

例题：三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

例题：三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$,

例题：三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

例题：三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{\mathrm{i}}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}\,\mathrm{d}z.$$

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{\mathrm{i}}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)\big(z-\dfrac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}z.$$

设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$，

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{\mathrm{i}}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)\big(z-\dfrac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}z.$$

设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$，则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=\dfrac{10}{3}$, $\operatorname{Res}[f(z),\dfrac{1}{3}]=-\dfrac{8}{3}$,

例题：三角函数的有理函数的积分

例. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

解答. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{\mathrm{i}}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\dfrac{1}{3})}\,\mathrm{d}z.$$

设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$，则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=\dfrac{10}{3}$，$\operatorname{Res}[f(z),\dfrac{1}{3}]=-\dfrac{8}{3}$，

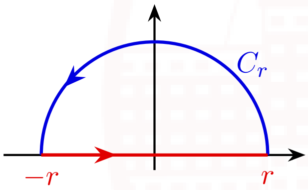
$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\mathrm{i}}{6}\cdot 2\pi\mathrm{i}\Big[\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),\frac{1}{3}]\Big]=\frac{2\pi}{9}.$$

有理函数的广义积分

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.

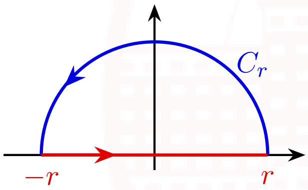
考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 我们先考虑 $\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$.

考虑 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 我们先考虑 $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $C = C_r + [-r, r]$ 如下图所示, 使得上半平面内 $f(z)$ 的奇点均在 C 内,



考虑 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 我们先考虑 $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $C = C_r + [-r, r]$ 如下图所示, 使得上半平面内 $f(z)$ 的奇点均在 C 内, 则

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname{Res}[f(z), a] = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次,

由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次，当 $r \to +\infty$ 时，

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r} |f(z)| = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \to 0.$$

由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次，当 $r \to +\infty$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r}|f(z)| = \pi \max_{|z|=r}|zf(z)| \to 0.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}[R(z), a].$$

由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次, 当 $r \to +\infty$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r}|f(z)| = \pi \max_{|z|=r}|zf(z)| \to 0.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}[R(z), a].$$

这里, 由于积分收敛, 因此广义积分值和其柯西主值

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

相等.

例题：有理函数的广义积分

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$

例题：有理函数的广义积分

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$

解答. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$.

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a > 0.$

解答. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), a\mathrm{i}] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^3}\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{12}{(z+a\mathrm{i})^5} = \frac{3}{16a^5\mathrm{i}},\end{aligned}$$

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a > 0.$

解答. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), a\mathrm{i}] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^3}\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{12}{(z+a\mathrm{i})^5} = \frac{3}{16a^5\mathrm{i}},\end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z), a\mathrm{i}] = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 和前一种情形类似, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}, a],$$

考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 和前一种情形类似, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}, a],$$

因此所求积分分别为它的实部和虚部.

例题：有理函数与正弦、余弦之积的广义积分

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$

解答. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$,

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a>0.$

解答. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]'=-\frac{\mathrm{e}^{-a}(a+1)\mathrm{i}}{4a^3}.$$

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$

解答. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$,

$$\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{i}] = \lim_{z \to a\mathrm{i}} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]' = -\frac{\mathrm{e}^{-a}(a+1)\mathrm{i}}{4a^3}.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{i}] = \frac{\pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^3},$$

例. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a>0.$

解答. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 $a\mathrm{i}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]'=-\frac{\mathrm{e}^{-a}(a+1)\mathrm{i}}{4a^3}.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^3}.$$

定理. 设实数 p 不是整数, $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且满足

$$\lim_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

定理. 设实数 p 不是整数，$f(x)$ 是一个有理函数，分母没有正实根，且满足

$$\lim_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{p+1} f(x) = 0,$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^p \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_a \operatorname{Res}\left[\mathrm{e}^{p\ln(-z)} f(z), a\right],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的非零奇点.

例题：含幂函数的积分

例. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, 0 < p < 1.$

例. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, 0 < p < 1.$

解答. 设

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z(z+1)},$$

例题：含幂函数的积分

例. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, 0 < p < 1.$

解答. 设

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z(z+1)},$$

则 $f(z)$ 在正实轴和零以外的奇点为 $a=-1$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \lim_{z\to -1} \frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z} = -\mathrm{e}^{p\ln 1} = -1.$$

例题：含幂函数的积分

例. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, 0 < p < 1.$

解答. 设

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z(z+1)},$$

则 $f(z)$ 在正实轴和零以外的奇点为 $a = -1$，且

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \lim_{z\to-1} \frac{\mathrm{e}^{p\ln(-z)}}{z} = -\mathrm{e}^{p\ln 1} = -1.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

定理. 设 $f(x)$ 是一个有理函数, 分母没有正实根, 且分母至少比分子高 2 次, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sum_a \operatorname{Res}\big[\ln^2(-z)f(z), a\big],$$

其中 a 取遍 $f(z)$ 的奇点.

例题：含对数函数的积分

例. 计算 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{d}x.$

例. 计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

解答. 设

$$f(z)=\frac{\ln^2(-z)}{z^2-2z+2},$$

例题：含对数函数的积分

例. 计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

解答. 设

$$f(z)=\frac{\ln^2(-z)}{z^2-2z+2},$$

则 $f(z)$ 在正实轴和零以外的奇点为 $1\pm\mathrm{i}$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z),1+\mathrm{i}]=\lim_{z\to1+\mathrm{i}}\frac{\ln^2(-z)}{z-(1-\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac12\ln2-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\Big)^2,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1-\mathrm{i}]=\lim_{z\to1-\mathrm{i}}\frac{\ln^2(-z)}{z-(1+\mathrm{i})}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac12\ln2+\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\Big)^2.$$

例题：含对数函数的积分

由于二者互为共轭，二者之和为

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\right)^2\right)=-\frac{3\pi}{4}\ln 2.$$

因此

$$I=\frac{3\pi}{8}\ln 2.$$