

中国科学技术大学

硕士学位论文



分数阶导弹导引律设计和 仿真研究

作者姓名：朱竹婷
学科专业：导航、制导与控制
导师姓名：王永 教授
完成时间：二〇一二年五月

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



Research on Fractional Order
Proportional Navigation laws of
Missiles

Author's Name: Zhuting Zhu

Speciality: Navigation, Guidance and Control

Supervisor: Prof. Yong Wang

Finished Time: May, 2011

分数阶导弹导引律设计和仿真研究

十系

朱竹婷

中国科学技术大学

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: _____ 签字日期: _____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 保密 _____ 年

作者签名: _____ 导师签名: _____

签字日期: _____ 签字日期: _____

摘 要

导弹导引律是导弹制导系统的重要组成部分，导引律的好坏会对导弹的制导性能产生非常重要影响。比例导引律是一种经典的导引律，在实际导弹制导系统中运用非常广泛。随着目标机动性能的提高以及战场环境的日益复杂，必须对传统的比例导引律进行一定的修正和改进，才能使其有效承担起导引职能。因此，对于比例导引律的修正和改进方法研究以及修正和改进后的导引性能分析一直是导弹导引律研究的重要课题。

本文主要研究了分数阶导弹导引律的设计和分析问题。通过在导弹导引律研究中引入分数阶微积分理论，对于导弹拦截具有时变法向加速度机动目标问题，提出了一种新的分数阶修正纯比例导引律 (FO-MPPN)。通过额外增加分数阶微分项，全局性的利用导弹飞行过程中的视线角的相关变化信息，缩短了导弹的拦截时间，避免了命中点处导弹需用法向过载突变的问题，有效提升了导引律的导引性能。采用似李雅普洛夫函数对 FO-MPPN 律的捕获性能进行了严格证明，证明了对于满足一定条件的理想导弹在 FO-MPPN 律导引下一定可以命中机动目标，最后给出了 FO-MPPN 律捕获性定理。

由于分数阶微积分是整数阶微积分的推广，因此在分数阶微积分框架下可以对传统的比例导引律进行重新研究。本文主要对纯比例导引律 (PPN) 和全方位比例导引律 (AAPN) 进行重新研究和分析，提出了新的分数阶纯比例导引律 (FO-PPN) 和分数阶全方位比例导引律 (FO-AAPN)。结合分数阶微积分的数值实现方法，给出了 FO-PPN 律和 FO-AAPN 律的离散化数值实现形式。通过对导弹尾随追击非机动目标、前向拦截非机动目标、尾随追击机动目标和前向拦截机动目标四种情况下的仿真，验证了 FO-PPN 和 FO-AAPN 律比传统的比例导引律具有更好的导引性能。

关键词： 分数阶修正纯比例导引律，分数阶纯比例导引律，分数阶全方位比例导引律，导引律

ABSTRACT

Missile guidance law is an important component of the missile guidance system, and it has important influence on missile guidance performance. Proportional navigation law, which is a classic guidance law, has an extensive using area in the actual missile guidance system. With the improvement of the target's maneuver performance and the increasing complication of the battle environment, classic proportional navigation law needs to be modified so as to bear the guidance function effectively. Consequently, it has always been an important topic on the research field of missile guidance law to modify the proportional navigation, to study the improvement methods and to analyze the performance of the modified proportional navigation.

This thesis investigates the design and the analysis of the fractional missile guidance law. A fractional order modified pure proportional navigation law (FO-MPPN), which can effectively solve the control problem for the capture of a target with time-varying normal accelerated maneuver, is proposed in this paper. By using the additional fractional order differential item, the changing messages of the line-of-sight during the missile's flight can be used globally. So the guidance law's performance can be effectively optimized on aspects of shorting the capture time and avoiding the sudden change of the normal overload that the missile needed at the point of impact. By means of the Lyapunov-like method, we prove the FO-MPPN capture strictly on maths. The demonstration shows that under certain conditions, an ideal missile guided by the FO-MPPN law can always hit a target with time-varying normal acceleration. At last, the FO-MPPN capture theorem is given.

Since the fractional calculus is the extension of the integer calculus, classic proportional navigation law can be restudied in the framework of fractional calculus. This paper mainly restudies on the pure proportional navigation law and all-aspect proportional navigation law, and comes up with the new fractional order pure proportional navigation (FO-PPN) law and fractional order all-aspect proportional navigation (FO-AAPN) law. Combined with the fractional calculus

numerical implementation methods, the discretized numerical implementation form of FO-PPN and FO-AAPN are also given in this paper. The simulations of the missile's tail collision with a non-maneuvering target, the missile's head-on collision with a non-maneuvering target, the missile's tail collision with a maneuvering target and the missile's head-on collision with a maneuvering target confirm that FO-PPN law and FO-AAPN law have better guidance performance.

Keywords: fractional order modified pure proportional navigation law, fractional order pure proportional navigation law, fractional order all-aspect proportional navigation law, guidance law

目 录	
摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
主要符号对照表	VII
第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 国内外研究现状	3
1.2.1 比例导引律及其改进问题研究	4
1.2.2 分数阶比例导引律研究	5
1.3 本文主要工作及内容安排	6
第二章 分数阶微积分	7
2.1 分数阶微积分的数学基础	7
2.1.1 分数阶微积分的定义	7
2.1.2 分数阶微积分的性质	9
2.2 分数阶算子的数值实现方法	10
2.2.1 分数阶算子连续化实现	10
2.2.2 分数阶算子离散化实现	11
2.3 本章小结	12
第三章 比例导引律	13
3.1 比例导引律相对运动方程组	13
3.2 弹道特性讨论	14
3.2.1 直线弹道	15
3.2.2 弹道各点需用法向过载	16

3.3 比例系数选择	17
3.4 比例导引律优缺点	18
3.5 纯比例导引律	18
3.6 本章小结	20
第四章 分数阶修正纯比例导引律及其捕获性能分析	21
4.1 分数阶修正纯比例导引律	21
4.1.1 分数阶修正纯比例导引律基本思想	21
4.1.2 分数阶修正纯比例导引律导引关系式	22
4.1.3 分数阶修正纯比例导引律数值实现	23
4.2 分数阶修正纯比例导引律捕获性能分析	24
4.2.1 分数阶修正纯比例导引律前提假设	25
4.2.2 分数阶修正纯比例导引律捕获性定理	25
4.2.3 数值仿真实例	30
4.3 本章小结	32
第五章 分数阶比例导引律	33
5.1 分数阶比例导引律	33
5.1.1 分数阶比例导引律导引关系式	33
5.1.2 分数阶比例导引律数值实现	35
5.2 分数阶纯比例导引律仿真分析	36
5.2.1 导弹截击非机动目标	37
5.2.2 导弹截击机动目标	39
5.3 分数阶全方位比例导引律仿真分析	43
5.3.1 导弹截击非机动目标	43
5.3.2 导弹截击机动目标	47
5.4 本章小结	49
第六章 结束语	53
6.1 本文的主要贡献	53
6.2 今后进一步的工作	54
参考文献	55
致 谢	59
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	61

主要符号对照表

r	导弹与目标之间的相对距离
A_t	目标的机动加速度
A_m	导弹的机动加速度
V_t	目标速度矢量
V_m	导弹速度矢量
ρ	目标与导弹的速度比
λ	视线角, 即导弹目标的之间的连线 (目标视线) 与攻击平面内的基准线 (水平线) 之间的夹角
$\dot{\lambda}$	目标视线的旋转角速度
σ_t	目标的航迹角, 即目标速度矢量与基准线之间的夹角
σ_m	导弹的航迹角, 即导弹速度矢量与基准线之间的夹角
η_t	目标前置角, 即目标速度矢量与目标线之间的夹角
η_m	导弹前置角, 即导弹速度矢量与目标线之间的夹角
\dot{r}	导弹与目标在目标视线方向的相对运动速度
N	比例系数, 又称为导航比
n_y	导弹弹道各点的需用法向过载
λ_f	导弹在弹道命中点处的视线角
σ_f	导弹在弹道命中点处的航迹角
η_f	导弹在弹道命中点处的前置角
n_f	导弹弹道命中点处的需用法向过载
t_f	导弹拦截时间
h	导弹的朝向误差角, 即导弹速度矢量与目标速度矢量法线之间的夹角
L	导弹的超前角, 即目标视线与目标速度矢量法线之间的夹角

第一章 绪论

1.1 引言

导弹导引律是导弹制导系统的重要组成部分，其与导引头和自动驾驶仪一起构成了导弹组成部分中最为关键和核心的导弹制导装置。所谓导引是指在某种参考坐标系下确定导弹未来的飞行姿态和运动轨迹的一种行为 (Fossen, 1994)。导弹导引律的选择对于导弹能否命中目标具有至关重要的影响。在导弹和目标的相对位置以及导弹飞行能力确定的前提下，导弹导引律将直接决定导弹在拦截过程中飞行的最优轨迹。从控制的角度看，导弹导引实际上是以实现导弹拦截目标为控制目的，寻找合适补偿量并在恰当的地方进行补偿或施加反馈的控制问题 (Lin, 1991)。由于理想状况下的导弹和目标的相对运动呈现非常复杂的非线性关系，因此其补偿和控制问题比一般的线性系统更为复杂，所需要的技术和手段也因此更加多样。

比例导引律是在导弹导引问题中最早提出的一种经典导引律。比例导引律控制方法简单直接，仅利用目标视线角速度的变化信息即可对导弹速度矢量施加控制。由于所施加的控制量与目标视线角度成比例关系，因此称之为比例导引律。比例导引律对于导弹飞行过程中的相关信息数据需求较少，降低了导引头传感器测量信息的要求，使得在工程实际上更加容易实现，因此被广泛运用于实际的导弹制导系统中。比例导引律的控制目标非常多样，根据控制目标的不同，比例导引律分别如下几大类，一是控制目标为与导弹速度方向垂直的法向加速度，如纯比例导引律 (Pure Proportional Navigation, PPN)、全方位比例导引律 (All Aspect Proportional Navigation, AAPN) 和扩展比例导引律 (Augmented Proportional Navigation, APN) 等 (Ghawghawe and Ghose, 1996; Sim et al., 2000; Siouris, 1974)。二是控制目标为与导弹目标视线方向垂直的侧向加速度，如真比例导引律 (True Proportional Navigation, TPN) 和实际真比例导引律 (Realistic True Proportional Navigation, RTPN) 等 (Guelman, 1976; Yang and Yang, 1996)。三是控制目标为与目标视线的法线方向成某一确定角度的侧向加速度，包括广义比例导引律 (Generalized Proportional Navigation, GPN)、广义真比例导引律 (Generalized True Proportional Navigation, GTPN) 和实际广义真比例导引律 (Realistic Generalized True Proportional Navigation, RGTPN) 等等 (Chakravarthy and Ghose, 1996; Ghose, 1994a; Yuan and

Hsu, 1995)。除此之外，比例导引律还有一些改进形式，如理想比例导引律 (Ideal Proportional Navigation, IPN)，扩展理想比例导引律 (Augmented Ideal Proportional Navigation, AIPN) 等 (Mehrandezh et al., 2000; Yuan and Chern, 1992)。上述比例导引律基于传统的古典控制理论，对于一般情况下的机动和非机动目标，其基本形式和改进形式均能够实现很好的拦截。目前大部分具有实战用途的战术导弹所采用的导引律即为比例导引律。

随着军事技术的飞速发展以及战场环境的日益复杂，对于一些如目标高速机动，存在强电磁干扰等情况，比例导引律不能保证导弹较好的命中目标。对此部分专家和学者们提出了全新的最优导引律。最优导引律大部分是基于线性化后的导弹和目标相对运动方程，利用最优控制理论，最小化二次性能指标，实现导弹导引过程的最小能量或者最短时间控制。最优导引律的关键是对捕获剩余时间 t_{go} 的估计， t_{go} 的估计会对导引律的脱靶量以及捕获域等弹道特性产生影响。关于捕获剩余时间 t_{go} 的估计问题目前有较多的研究成果 (HULL et al., 1991; Tahk et al., 2002; Time, n.d.)。性能指标函数实际上是对导引律弹道特性的一种综合衡量和考虑，对于其他的导引律而言具有普遍重要的意义。不妨考虑如下形式的性能指标函数

$$J = t_f + k \int_0^{t_f} A_m^2 dt = k \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{k} + A_m^2 \right) dt \quad (1.1)$$

其中 t_f 为拦截时间， A_m 为导弹侧向加速度控制量， k 为权重系数，表示对最短时间控制和最小能量控制的一种综合衡量。上述性能指标函数也可以适用于比例导引律等。对于导弹距离目标较远的时候，应尽可能考虑最小能量消耗，即 k 应取较大值，对于导弹距离目标较近的时候，应最求最短命中的时间，即 k 应取较小值。不妨令 $\frac{1}{k} = W_t$ ，则有

$$J = \int_0^{t_f} (W_t + A_m^2) dt \quad (1.2)$$

由 (1.2) 式出发，利用极大值原理可以求得最优控制量 A_m^* 亦即最优导引律。关于最优导引律也有一些相应的改进或者变形形式，如最优途中导引律 (Optimal Midcourse Guidance, OMG)、最优末端导引律 (Optimal Terminal Guidance, OTG) 和基于滚动时域控制导引律 (Receding Horizon Control Guidance, RHCG) 等 (Kim et al., 2000; Nazarov, 1976; Yang, 1996)。最优导引律事实上需要知道目标未来机动的情况，而目标往往是一个独立体，因此最优导引律在很多情况下无法适用。最优导引律仅仅是基于现代控制理论的导弹导引律中的一种。其它的诸如微分对策导引律，滑模导引律以及模糊导引律等均是可以有效解决很多实际问题的导弹导引方法 (Lin and Chen, 2000; Oshman and

Rad, 2006; Shima et al., 2006)。目前,与导弹导引律相关的研究成果非常丰富,随着导弹各种战术性能的提升,以及控制理论、人工智能等技术的飞速发展,导弹导引律必将取得更进一步的发展。众多导引律将为各种导弹制导系统的构建提供充分的理论支持。

不同的导弹导引律具有各自所独有的一些导引特性,对于这些导引特性的研究是导弹导引律研究的重要内容,弹道特性就其中之一。导引律的弹道特性会直接影响导弹的命中精度,因此一直是导引律研究的重点。导引律弹道特性研究涉及弹道弯曲程度、导弹飞行时间、需用过载情况以及脱靶量等多项内容(李新国 等, 2005)。以比例导引律为例,研究表明,比例导引律具有以下弹道特性:一是在满足一定条件下,比例导引律的弹道前段较为弯曲,后段较为平直,确保了在导弹飞行的前段可以充分利用导弹机动能力,而在导弹飞行的后段保持充裕的机动能力。二是在参数选择合理的情况下,比例导引律可以在全弹道上保证需用过载不超出可用过载的范畴,实现目标的全方位攻击。三是在大多数情况下,比例导引律对于机动或者非机动目标具有良好的捕获性能,可以保证在确定的导弹飞行时间命中目标。四是导弹命中点处的需用法向过载会受到导弹速度以及攻击方向的影响,如果命中点处导弹速度较小,可能会使得需用法向过载趋向很大值,从而最终导致导弹脱靶。对于一些大机动目标或者强干扰战场环境,比例导引律的弹道特性会出现一些变化,可能导致命中精度的下降,甚至可能完全脱靶。为使比例导引律可以适应这样一些特殊情况,专家和学者对比例导引律提出了各种修正和改进方法,如比例加追踪法的组合末导引律(张合新 等, 2003)、变系数修正比例导引律(王凤莲 等, 2003)、变结构比例导引律等(Brierley and Longchamp, 1990)。对于这些修正后的导引律的弹道特性研究正是判定这些导引律的导引特性是否有所改进和提升的基础。大部分方法的基本思路是通过现有一些较成熟自动控制理论对比例导引律进行修正和改进。随着自动控制理论的继续发展,比例导引律的修正和改进方法也将变得更加丰富多样。

1.2 国内外研究现状

由于大多数的实际导弹制导系统所采用的导引律均为比例导引律,因此在导弹导引律的研究问题中,比例导引律及其相关研究一直占有非常重的比重。目前关于比例导引律的研究涉及内容非常广泛,例如:不同目标和环境条件情况下的比例导引律的导引性能分析,利用一些技术手段对比例导引律进行修正和改进,各种修正和改进后的比例导引律的弹道特性分析,以及比例导引律的具体技术实现等。本文考虑如下两个问题,一是比例导引律及其改进问题研究,

二是基于分数阶微积分的分数阶比例导引律研究。

1.2.1 比例导引律及其改进问题研究

比例导引律及其改进问题研究是比例导引律研究中的一个热点问题。很多专家和学者提出了各种修正和改进形式。Ha 等针对具有时变加速度的机动目标,提出了一种修正比例导引律 (Modified Proportional Navigation, MPN) 通过在比例导引律中增加导弹在视线方向加速度分量,使得导弹可以准确命中目标 (Ha et al., 1990)。Nesline 等通过增加目标机动加速度对 PPN 律进行修正,提出了 APN 律, Zarchan 等对 APN 律的导引特性进行了分析研究,并指出了对于机动目标 APN 律所需的导弹加速度控制量仅为传统比例导引律的三分之一,因此 APN 律被公认为是拦截机动目标的最优导引律 (Nesline and Zarchan, 1979; Zarchan, 1999)。Sim 等通过附加其他的导弹飞行信息项,提出了一种 AAPN 律 (Sim et al., 2000), AAPN 律可以适用于具有大范围初始角度的导弹拦截问题。雷虎民等人通过引入视线角积分项和拦截时间对比例导引律进行修正,提出了一种扩展 PID 比例导引律 (PID-PN) (雷虎民 等, 1999)。Moon 等利用滑模控制理论对传统的比例导引律进行修正,所提出的修正比例导引律仅需要知道目标机动的最大加速度,即可获得非常好的导引效果 (Moon and Kim, 2000)。Yang 等针对导弹制导问题中的一些不确定性因素,设计了一种基于 H_∞ 理论的修正比例导引律,取得了较好的导引效果 (Yang and Chen, 1998)。

在对比比例导引律及其改进问题的研究中,捕获性能分析事实上是非常重要的,无论如何对比比例导引律进行修订和改进,必须保证导弹可以拦截目标。针对各种不同的修正和改进形式,其捕获性能一般不同。一般来说,比例导引律作用下的导弹和目标相对运动方程的精确闭环形式解是无法准确获得,如 PPN 律。Zarchan 和 Ben-Asher 等基于最优控制理论给出了比例导引律作用下导弹目标相对运动方程的闭环形式解 (Ben-Asher and Yaesh, 1998; Zarchan, 2002)。但是这样的闭环形式解的存在是有条件的,一是仅局限于导弹和目标方程组在线性化后或者在命中点附近的情况 (Shneydor, 1998),二是无界的控制输入信号是有效的 (Shinar and Shima, 1999)。此时导弹的导引问题即为传统的线性二次型最优控制问题。因此对于比例导引律及其修正和改进形式的捕获性能分析需要借助一些别的分析工具。Ha 等直接采用似李雅普洛夫函数证明了 PPN 律和 MPN 律作用下的理想导弹可以随时拦截加速度变化的机动目标 (Ha et al., 1990)。

虽然在比例导引律及其改进问题方面,目前已有很多的研究成果,但是对于比例导引律而言,仍然具有很多可改进之处。将新的控制理论与比例导引律

相结合,可以扩展和丰富导弹导引律的研究内容,对于导弹制导系统建设具有非常重要的意义。因此继续开展对比例导引律及其改进问题的研究是非常有必要的。

1.2.2 分数阶比例导引律研究

分数阶控制理论是近年来新兴的一种控制理论,它是分数阶微积分理论和传统的自动控制理论交叉结合的产物。传统的控制方法大多基于整数阶微积分理论,由于整数阶微积分是分数阶微积分的特例,因此在分数阶微积分理论框架下,可以对现有控制方法进行更进一步的推广和研究。研究表明,采用分数阶微积分可以实现很多实际对象或过程的精确控制。以传统的 PID 控制为例,传统的 PID 控制器可调节参数仅为比例项,微分项和积分项的三个系数,而分数阶 PID 控制器则可以调节上述三个系数、分数阶微分阶次和分数阶积分阶次共五个参数。分数阶 PID 控制器可控制参数更多,可调节空间更大,在对很多实际对象或过程的控制中其控制效果更好,如电机转速控制,机器人位姿控制等等 (Monje et al., 2010; Vinagre and Chen, 2002)。

在导弹飞行控制领域,分数阶微积分理论已经有初步应用,目前主要集中在导弹的动态特性分析。相关研究的基本思想是考虑将分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器进行移植以进一步提升控制效果。张邦楚等在导弹控制系统中引入分数阶控制器 $PI^\lambda D^\mu$,结合导弹的飞行特性,提出了在自控段使用姿态自动驾驶仪 + $PI^\lambda D^\mu$ 控制,在自导段使用过载自动驾驶仪 + PD^λ 控制的策略 (张邦楚, 2005; 张邦楚 等, 2005)。秦昌茂等通过分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器实现了再入过程中气动环境参数剧烈变化情况下的高超声速飞行器姿态控制 (秦昌茂 等, 2010)。对于单纯的导弹导引问题而言,在分数阶微积分理论框架下对于导弹导引律的研究成果目前非常少。王飞等将分数阶微积分理论引入扩展 PID 比例导引律,提出了一种分数阶微积分 PD^λ 比例导引律,分析了分数阶微积分 PD 比例导引律作用下的弹道特性和控制器特性,以及制导系统的静态误差和制导灵敏度 (王飞 等, 2010)。

考虑到分数阶微积分具有诸如全局性、记忆性等整数阶微积分所不具有的特点,特别是分数阶微分反映的不是函数在某点或某邻域的局部性质,而是反映了函数的全局性或者分布式的特征 (Das, 2008),因此有必要在分数阶微积分理论框架下重新分析和研究传统的导弹导引律,如 PPN 律和 AAPN 律等。利用分数阶微积分的相关特性,对导弹飞行过程中的诸多信息进行全局性的综合考虑和使用,进一步提升导引律的导引性能,从而保证导弹可以更好更快的命中目标。

1.3 本文主要工作及内容安排

本文主要研究了分数阶导弹导引律的设计和仿真问题，在分数阶微积分理论框架下对传统比例导引律进行了修正以及重新设计。提出了分数阶修正纯比例导引律 (FO-MPPN)，对 FO-MPPN 的捕获性能进行了详细分析和严格证明。设计了分数阶纯比例导引律 (FO-PPN) 和分数阶全方位比例导引律 (FO-AAPN)。全文共分六章，各章节的主要内容具体如下：

第一章简要介绍了导弹导引律的相关知识和历史，对导弹导引律中比例导引律及其改进问题以及分数阶比例导引律的研究现状进行分析和总结，最后列出了本文的主要内容安排。

第二章介绍了分数阶微积分数学理论，包括分数阶微积分的经典定义和运算性质。详细介绍了分数阶微积分的连续化和离散化数值实现方法。

第三章介绍了传统的比例导引律的相关理论，详细给出了比例导引律作用下导弹和目标的相对运动方程，探讨了比例导引律的弹道特性和比例系数选择问题，列出了比例导引律的各项优缺点，特别介绍了纯比例导引律的相关知识。

第四章针对带有时变法向加速度的机动目标打击问题，提出了采用分数阶微分项进行修正的 FO-MPPN 律，给出了 FO-MPPN 律的导引关系式和数值实现方法，使用似李雅普洛夫方法对 FO-MPPN 律的捕获性能进行了证明，通过数值仿真对 FO-MPPN 律的有效性进行了验证。

第五章在分数阶微积分理论框架下对 PPN 律和 AAPN 律进行重新研究，提出了全新的 FO-PPN 律和 FO-AAPN 律，给出了 FO-PPN 律和 FO-AAPN 律的导引关系式和数值实现方法，最后分别与 PPN 律和 AAPN 律的导引性能进行了仿真对比分析。

第六章总结了本文的主要工作和贡献，对今后工作进行展望。

第二章 分数阶微积分

分数阶微积分理论是对传统的整数阶微积分理论的进一步推广。传统的整数阶微积分是分数阶微积分的特例。分数阶微积分不仅保存了整数阶微积分的一些较好的性质，而且同时还具有一些新的特性，如记忆性和遗传性等等，这些特性会对实际系统或过程的建模和控制产生积极的影响。本章主要对分数阶微积分的相关理论进行介绍，为后续控制策略和方法的研究提供基础。

2.1 分数阶微积分的数学基础

分数阶微积分与传统的整数阶微积分一样具有悠久的历史。其起源可以追溯到 300 年前 Leibniz 给他的好友 L'Hospital 的所写的一封书信，信中第一次提到了分数阶导数的问题。但是由于缺乏实际应用的推动，在过去的几个世纪中，关于分数阶微积分的研究仅仅局限在纯数学领域。近年来的一些研究发现，分数阶微积分比传统的整数阶微积分更适合描述一些实际系统 (de Espíndola et al., 2005; Mainardi, 1997; Pritz, 2003)。分数阶微积分开始被运用于一些物理和工程实际，逐渐成为一个研究热点。分数阶导数或积分反映的不是局部或者点的特性，而是综合考虑了历史的和非局部的分布式的影响 (Das, 2008)。因此分数阶微积分为描述一些具有特殊记忆性或者遗传性的对象或过程提供了有力的数学工具。本节介绍分数阶微积分的相关数学基础，主要包括分数阶微积分的定义及性质。

2.1.1 分数阶微积分的定义

分数阶算子是分数阶微积分理论的基础，在分数阶微积分中广泛使用。分数阶算子的定义如下

定义 2.1.1 (分数阶算子, Fractional Order Operator)

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{df(t)}{dt^\alpha} & \alpha \in \mathbb{N} \\ f(t) & \alpha = 0 \\ \int_a^t f(t) (dt)^{-\alpha} & \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 α 表示分数阶微积分的阶次。当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时， ${}_a D_t^\alpha$ 表示分数阶微分算子。当

$\alpha \in \mathbb{Z}^-$ 时, ${}_a D_t^\alpha$ 表示分数阶积分算子, 或者记为 ${}_a I_t^\alpha$ 。 a 表示运算的初始时刻, 当初始时刻为 0 时, 分数阶微分和积分算子可以分别简记为 D^α 和 I^α 。

定义 2.1.2 (Riemann-Liouville 定义, 简称为 RL 定义)

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(\tau) d\tau & \operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}^- \\ f(t) & \alpha = 0 \\ \frac{d^{[\operatorname{Re}(\alpha)]}}{dt^{[\operatorname{Re}(\alpha)]}} {}_a D_t^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]} f(t) & \operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{d}{dt} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) & \operatorname{Re}(\alpha) = 0 \wedge \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\operatorname{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部。 $[x]$ 表示不小于 x 的最小整数。 $\Gamma(z)$ 为 Γ 函数, 定义在除 $z = 0, -1, -2, \dots$ 的整个复平面上。 Γ 函数形式如下

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.3)$$

定义 2.1.3 (Caputo 定义)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(\tau) d\tau & \operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}^- \\ f(t) & \alpha = 0 \\ {}_a D_t^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]} \frac{d^{[\operatorname{Re}(\alpha)]}}{dt^{[\operatorname{Re}(\alpha)]}} f(t) & \operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}^+ \\ {}_a D_t^{\alpha-1} \frac{d}{dt} f(t) & \operatorname{Re}(\alpha) = 0 \wedge \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

显然, Caputo 积分定义与 RL 积分定义相同, 唯一不同在于微分定义。在微分定义中, RL 定义先计算分数阶微分然后计算整数阶微分, Caputo 定义先计算整数阶微分然后计算分数阶微分。由于分数阶微分运算的不可交换性, 两个定义的计算结果不一样, 但存在一定的数量关系。

定义 2.1.4 (Grünwald-Letnikov 定义)

$${}_a^L D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} f(t-kh) \quad (2.5)$$

其中, $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

在分数阶微积分理论中, 上述三个分数阶微积分定义之间满足一定等式关系。零初始条件下上述三个定义完全等价。其中, 由于 GL 定义采用极限和的形式进行定义, 因此其数值实现更为方便, 在实际仿真分析中运用广泛。RL 定义和 Caputo 定义均采用积分进行定义。但是 Caputo 定义要求比 RL 定义更为

严格, 需要函数 $f(t)$ 高阶可导。由于对于很多实际对象或者系统而言, 其性能或特性一般足够光滑, 因此高阶可导的条件容易满足。由于高阶导数的实际物理意义更为明确, 因此 Caputo 定义比 RL 定义在实际运用中更为广泛。

2.1.2 分数阶微积分的性质

(1) 分数阶算子是线性算子, 即

$${}_a D_t^\alpha [mf(t) + ng(t)] = m{}_a D_t^\alpha f(t) + n{}_a D_t^\alpha g(t) \quad \forall m, n, f(t), g(t) \quad (2.6)$$

(2) 分数阶积分具有交换性。零初始条件下, 分数阶微分才具有交换性, 即

$${}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta = {}_a I_t^\beta {}_a I_t^\alpha = {}_a I_t^{\alpha+\beta} \quad (2.7)$$

$${}_a D_t^\alpha {}_a D_t^\beta = {}_a D_t^\beta {}_a D_t^\alpha = {}_a D_t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.8)$$

(3) 分数阶微分算子是分数阶积分算子的左逆算子, 但反之不成立, 即

$${}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha = I, \quad {}_a D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha \neq I, \quad \alpha > 0 \quad (2.9)$$

(4) 分数阶微分 Leibniz 准则。设函数 $f(t), g(t)$ 高阶可导, 则有

$${}_a D_t^\alpha [g(t)f(t)] = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha)g^{(k)}(t){}_a D_t^{\alpha-k}f(t)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} - R_n^\alpha(t) \quad (2.10)$$

其中 $n \geq \alpha + 1$, 且有

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t g^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\tau \quad (2.11)$$

(5) 分数阶微积分的 Laplace 变换

$$L\{{}_0 I_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.12)$$

$$L\{{}_0^R D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.13)$$

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2.14)$$

$$L\{{}_0^L D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (2.15)$$

其中 $L\{f(t)\} = F(s)$ 。特别的, 零初始条件下有 $L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s)$ 。

2.2 分数阶算子的数值实现方法

从分数阶微积分的定义可知，分数阶算子是具有记忆性的无限维算子，计算分数阶微积分需要利用过去所有的历史数据，因此在实际问题中无法直接运用，需要对其进行连续或者离散实现。本节主要考虑分数阶算子的数值实现方法。

2.2.1 分数阶算子连续化实现

分数阶算子的连续化实现主要是基于频域分析。考虑到分数阶微分的 Laplace 变换形式为 s^α ，Bode 图上对应斜率 $20\alpha\text{dB}/+$ 的直线，因此基于频域连续化实现主要是对该斜线的拟合。对于 s^α 的拟合方法目前主要有两种，一是连分式展开 (Continued Function Expansion, CFE) 近似，二是 Oustaloup 递推滤波器近似。

CFE 近似是一种非常实用的有理函数近似方法，其收敛速度比一般的 Talyor 级数展开更快。CFE 近似将 s^α 转换为整数阶有理传递函数的情形，从而获得分数阶微分算子的连续化实现。所谓连分式，是指如下形式的分式

$$\frac{b_0}{a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots}}} \quad (2.16)$$

其中 b_k, a_k 为常数或者有理函数，简记为 $\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \cdots$ 。特别的，对于形如 $(1+z)^\alpha$ 的函数，其 CFE 如下

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha z}{1} + \frac{(1-\alpha)z}{2} + \frac{(1+\alpha)z}{3} + \frac{(2-\alpha)z}{2} + \cdots + \frac{(n-\alpha)z}{2} + \frac{(n+\alpha)z}{2n+1} + \cdots \quad (2.17)$$

上式在除去负实轴外的复 Z 平面上收敛。

对连分式取 n 项截断，则 s^α 的 CFE 近似形式如下

$$s^\alpha = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_0(s)}{a_0(s)} + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} + \frac{b_2(s)}{a_2(s)} + \cdots + \frac{b_n(s)}{a_n(s)} \quad (2.18)$$

可以利用如下递推公式计算 P_n 和 Q_n ，即

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}} \quad (2.19)$$

Oustaloup 递推滤波器近似仅考虑在某一个频率范围对分数阶微分 s^α 进行逼近。事实上，由于不存在任何滤波器可以在全频段对分数阶微分形式的斜线

进行完全近似，因此只能在某一个感兴趣的频率范围内采用各种不同的连续滤波器进行逼近 (Podlubny et al., 2002)。Oustaloup 递推滤波器逼近及其改进形式可以很好的实现这一点。考虑在频率范围 (ω_b, ω_h) 内采用 Oustaloup 递推滤波器进行逼近，其形式如下 (Oustaloup et al., 2000)

$$s^\alpha = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.20)$$

其中 ω'_k 和 ω_k 为零极点， K 为增益，其具体计算形式为

$$\begin{cases} \omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)}{2N+1}} \\ \omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)}{2N+1}} \\ K = \omega_h^\alpha \end{cases} \quad (2.21)$$

Oustaloup 递推滤波器逼近在频率范围 (ω_b, ω_h) 两端的近似效果出现较大偏差，其改进形式如下 (Xue et al., 2006)

$$s^\alpha = \left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^\alpha \frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-\alpha)s^2 + b\omega_h s + d\alpha} \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.22)$$

其中

$$\begin{cases} \omega'_k = \left(\frac{d\omega_b}{b} \right)^{\frac{\alpha-2k}{2N+1}} \\ \omega_k = \left(\frac{b\omega_h}{d} \right)^{\frac{\alpha+2k}{2N+1}} \end{cases} \quad (2.23)$$

考虑到实际的拟合效果，一般取 $b = 10, d = 9, \omega_b = 10^{-3}, \omega_h = 10^3$ 。

2.2.2 分数阶算子离散化实现

分数阶算子的离散化实现主要分为频域和时域两类方法。频域方法采用传统的离散化方法，如生成函数法，离散滤波器近似方法等等。时域方法主要从分数阶微积分的 GL 定义得到，如短记忆法等。

分数阶微分 s^α 可以采用生成函数 $s = \omega(z^{-1})$ 从复域变换到 Z 域。生成函数 $\omega(z^{-1})$ 可以选择很多种，如前向差分，后向差分，Tustin 函数等。以 Tustin 函数为例，则有

$$\omega(z^{-1}) = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.24)$$

其中 T_s 为采样时间。

结合 CFE 方法, 可以直接得到分数阶微积分的整数阶离散化近似。Vinagre 等将 CFE 方法与 Tustin 函数相结合, 提出了分数阶算子的直接离散方法 (Vinagre et al., 2003), 即

$$\begin{aligned} s^\alpha &= \left(\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^\alpha = \left(\frac{2}{T_s} \right)^\alpha \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^\alpha \right\} \\ &= \left(\frac{2}{T_s} \right)^\alpha \frac{P_n(z^{-1})}{Q_n(z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.25)$$

短记忆法来源于分数阶微积分 GL 定义, 通过对极限和的截断, 来忽略部分历史数据, 从而获得其整数阶离散化近似, 即

$${}_0D_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-L}D_t^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N(t)} b_j f(t - jh) \quad (2.26)$$

其中 L 为记忆长度, h 为计算步长, $N(t) = \min \left\{ \left\lceil \frac{t}{h} \right\rceil, \left\lceil \frac{L}{h} \right\rceil \right\}$, b_j 为二项式系数, 可以通过如下的迭代计算得到, 即

$$b_0 = 1, \quad b_j = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j} \right), \quad j \geq 1 \quad (2.27)$$

取计算步长 $h = T_s$, 记 $f(k) = f(kT_s)$ 则有

$$D^\alpha f(k) = \frac{1}{T_s^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{T_s} \rfloor} b_j f(k - j) \quad (2.28)$$

短记忆法实现计算简单直接, 是很多数值实现问题的首选方法。

2.3 本章小结

本章介绍了分数阶微积分的相关数学理论。详细介绍分数阶微积分的经典定义和运算性质, 在此基础上重点介绍了分数阶算子的数值实现方法。从连续化实现和离散化实现两个方面, 对分数阶算子常用的几种实现方法进行了介绍和说明。本章所介绍的相关理论知识是后续研究的基础。

第三章 比例导引律

比例导引律是一种非常有效且运用范围非常广泛的经典导引律。由于比例导引律具有形式上简单，技术上容易实现，弹道特性平直，导引精度高等诸多优点，因而在现代制导技术飞速发展的今天，仍然在导弹导引问题中占有非常重要的一席之地。本章主要对导弹比例导引律进行介绍。

3.1 比例导引律相对运动方程组

导弹导引问题实际上是一个三维空间中的二体相对运动问题。由于三维导弹导引问题可以分解为两个互相正交的二维导引问题，因此本章主要考虑导弹的攻击平面为垂直平面时的情况。采用极坐标描述导弹和目标的相对位置，如图3.1所示，则可以得到二维平面下导弹和目标的相对运动方程组。其中图3.1中各项参数物理意义如下所示： r 表示导弹与目标之间的相对距离。 A_t 和 A_m 分别表示目标和导弹的机动加速度。 V_t 和 V_m 分别表示目标和导弹速度矢量。 λ 表示导弹视线角，即导弹目标的之间的连线 (目标视线) 与攻击平面内的基准线 (水平线) 之间的夹角。 σ_t 表示目标的航迹角，即目标速度矢量与基准线之间的夹角。 σ_m 表示导弹的航迹角，即导弹速度矢量与基准线之间的夹角。 η_t 表示目标前置角，即目标速度矢量与目标线之间的夹角。 η_m 表示导弹前置角，即导弹速度矢量与目标线之间的夹角。 h 表示导弹的朝向误差角，即导弹速度矢量与目标速度矢量法线之间的夹角。 L 表示导弹的超前角，即目标视线与目标速度矢量法线之间的夹角。

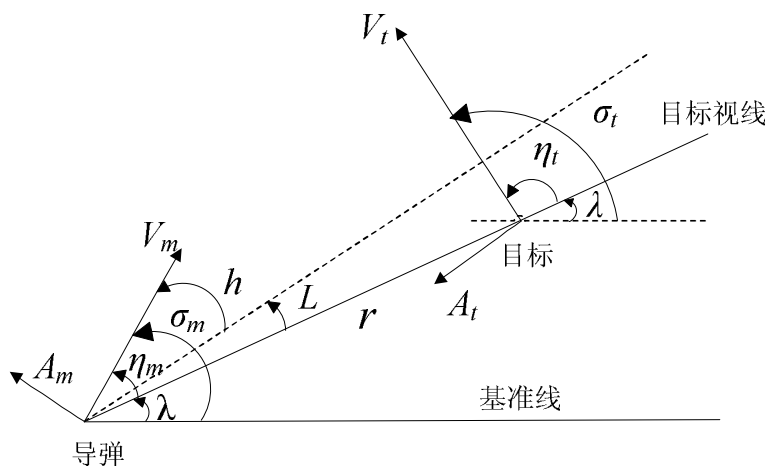


图 3.1 导弹拦截目标相对位置图

在目标视线方向, 相对距离 r 的变化率等于导弹速度矢量和目标速度矢量在该方向上的分量的代数和, 即

$$\dot{r} = V_t \cos \eta_t - V_m \cos \eta_m \quad (3.1)$$

在目标视线垂直方向, 目标视线的旋转角速度与相对距离 r 的乘积等于导弹速度矢量和目标速度矢量在该方向上的分量的代数和, 即

$$r\dot{\lambda} = V_t \sin \eta_t - V_m \sin \eta_m \quad (3.2)$$

由图3.1中的几何关系可得

$$\eta_t = \sigma_t - \lambda \quad (3.3)$$

$$\eta_m = \sigma_m - \lambda \quad (3.4)$$

比例导引律是指导弹在飞行过程中其速度矢量的转动角速度 $\dot{\sigma}_m$ 与目标视线的转动角速度 $\dot{\lambda}$ 成比例, 即

$$\dot{\sigma}_m = N\dot{\lambda} \quad (3.5)$$

其中 N 为比例系数, 又称为导航比。因此比例导引律作用下的导弹和目标相对运动方程组即为

$$\begin{cases} \dot{r} = V_t \cos (\sigma_t - \lambda) - V_m \cos (\sigma_m - \lambda) \\ r\dot{\lambda} = V_t \sin (\sigma_t - \lambda) - V_m \sin (\sigma_m - \lambda) \\ \dot{\sigma}_m = N\dot{\lambda} \end{cases} \quad (3.6)$$

比例导引律的基本思想是通过目标视线的转动角速度调整作用导弹的飞行方向, 即导弹的航迹角 σ_m , 实现零方位角速度控制即能保证导弹击中目标。由于导弹的航迹角 σ_m 实际上是受导弹的机动加速度 A_m 控制的, 因此比例导引律根据导弹的机动加速度 A_m 的方向又可以分为两大类, 一类是加速度 A_m 方向始终与导弹的速度矢量垂直, 如纯比例导引 (Pure Proportional Navigation, PPN)(Becker, 1990; Ghawghawe and Ghose, 1996), 扩展型纯比例导引 (Augmented PPN, APN)(Siouris, 1974) 等, 另一类是加速度 A_m 方向基于目标视线方向, 如真比例导引 (True Proportional Navigation, TPN)(Ghose, 1994b; Guelman, 1976), GTPN(Chakravarthy and Ghose, 1996; Yang, 1987) 等。

3.2 弹道特性讨论

比例导引律作用下导弹的弹道特性可以由方程组 (3.6) 求解获得。方程组 (3.6) 是非线性方程组, 其解析解只能在特定的初始条件下才能得到 (Mahapatra

and Shukla, 1989; Shukla and Mahapatra, 1988; Yuan and Hsu, 1995)。一般情况下通常采用数值计算方法计算得到该方程的数值解 (Cochran et al., 1988; Lin, 1991)。本节主要讨论比例导引律作用下的导弹的直线弹道条件和弹道各点的需用法向过载问题。

3.2.1 直线弹道

由导弹和目标相对运动的几何关系 (3.4) 式和比例导引律 (3.5) 式可得

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \dot{\sigma}_m - \dot{\eta}_m \\ \dot{\eta}_m = (N-1)\dot{\lambda} \end{cases} \quad (3.7)$$

由于直线弹道的条件为 $\dot{\sigma}_m = 0$ ，则 $\dot{\lambda} = -\dot{\eta}_m$ ，因此有 $\dot{\lambda} = \dot{\eta}_m = 0$ ，即

$$\lambda = C_1 (\text{常数}), \quad \eta_m = C_2 (\text{常数}) \quad (3.8)$$

如果考虑 (3.2) 式，则直线弹道条件也可以写成

$$V_m \sin \eta_m - V_t \sin \eta_t = 0 \quad (3.9)$$

则有

$$\eta_m = \arcsin \frac{V_t \sin \eta_t}{V_m} = C_2 \quad (3.10)$$

所以直线弹道要求导弹与目标的速度矢量在与目标视线垂直方向上的分量相等，即必须保证导弹的相对速度始终指向目标。下面考虑如下两种特殊情况下，比例导引律作用的直线弹道条件。

(1) 导弹发射装置固定，即导弹的初始前置角为确定值，即 $\eta_m = C_2$ 。由 (3.9) 式可得

$$\eta_t = \arcsin \frac{V_m \sin C_2}{V_t} \quad \text{或} \quad \eta_t = \pi - \arcsin \frac{V_m \sin C_2}{V_t} \quad (3.11)$$

显然此种情况下直线弹道只有两条，因此导弹发射时候的视线角也只能有如下两个

$$\lambda_1 = \sigma_t - \arcsin \frac{V_m \sin C_2}{V_t}, \quad \lambda_2 = \sigma_t - \pi + \arcsin \frac{V_m \sin C_2}{V_t} \quad (3.12)$$

(2) 导弹发射装置不固定，即导弹的初始前置角可以根据需要随时调整。此时可以通过 λ 的初值 C_1 来调整 η_m 的值，因此只要满足条件

$$\eta_m = \arcsin \frac{V_t \sin(\sigma_t - C_1)}{V_m} \quad \text{或} \quad \eta_m = \pi - \arcsin \frac{V_t \sin(\sigma_t - C_1)}{V_m} \quad (3.13)$$

则导弹沿任何方向发射其弹道均为直线弹道。

3.2.2 弹道各点需用法向过载

比例导引律作用下导弹弹道各点的需用法向过载 n_y 与 $\dot{\lambda}$ 也成比例关系, 因此弹道各点的需用法向过载 n_y 变化情况可以由 $\dot{\lambda}$ 反映出来, 即

$$n_y = \frac{V_m N}{g} \dot{\lambda} \quad (3.14)$$

为保证导弹在截击目标时弹道尽量保持平直, 转弯的速率不能太大, 因此弹道各点的需用法向过载必须收敛, 即 $\dot{\lambda}$ 收敛。下面考虑 $\dot{\lambda}$ 的变化情况。对 (3.2) 式进行微分, 则有

$$\dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} = \dot{V}_t \sin \eta_t + V_t \dot{\eta}_t \cos \eta_t - \dot{V}_m \sin \eta_m - V_m \dot{\eta}_m \cos \eta_m \quad (3.15)$$

由于

$$\begin{cases} \dot{r} = V_t \cos \eta_t - V_m \cos \eta_m \\ \dot{\eta}_t = \dot{\sigma}_t - \dot{\lambda} \\ \dot{\eta}_m = (N-1)\dot{\lambda} \end{cases} \quad (3.16)$$

因此有

$$\ddot{\lambda} = -\frac{1}{r}(2\dot{r} + NV_m \cos \eta_m)(\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^*) \quad (3.17)$$

其中

$$\dot{\lambda}^* = \frac{\dot{V}_t \sin \eta_t - \dot{V}_m \sin \eta_m + V_t \dot{\sigma}_t \cos \eta_t}{2\dot{r} + NV_m \cos \eta_m}$$

(1) 若目标恒定速率直线飞行, 导弹恒定速率飞行, 即 $\dot{\lambda}^* = 0$ 。

当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} > 0$ 时, $\ddot{\lambda}$ 与 $\dot{\lambda}$ 反号。若 $\dot{\lambda} > 0$, 则 $\ddot{\lambda} < 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为有下确界的减函数, 故 $\dot{\lambda}$ 收敛。若 $\dot{\lambda} < 0$, 则 $\ddot{\lambda} > 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为有上确界的增函数, 故 $\dot{\lambda}$ 收敛。此时导弹的弹道变的平直, 在接近目标的时候导弹的转弯速率不大, 脱靶量较小。

当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} < 0$ 时, $\ddot{\lambda}$ 与 $\dot{\lambda}$ 同号。若 $\dot{\lambda} > 0$, 则 $\ddot{\lambda} > 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为增函数, 故 $\dot{\lambda}$ 发散。若 $\dot{\lambda} < 0$, 则 $\ddot{\lambda} < 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为减函数, 故 $\dot{\lambda}$ 发散。此时导弹的弹道变得弯曲, 在接近目标的时候导弹要以极大的速率转弯, 可能会导致脱靶。

(2) 若目标机动飞行, 导弹恒定速率飞行。此时 $\dot{\lambda}^* \neq 0$ 。

当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} > 0$ 时, $\ddot{\lambda}$ 与 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^*$ 反号, $\dot{\lambda}^*$ 为有限值。若 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^* > 0$, 则 $\ddot{\lambda} < 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为减函数, 下确界为 $\dot{\lambda}^*$, 故 $\dot{\lambda}$ 收敛。若 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^* < 0$, 则 $\ddot{\lambda} > 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为增函数, 上确界为 $\dot{\lambda}^*$, 故 $\dot{\lambda}$ 收敛, 此时导弹的弹道变的平直, 在接近目标的时候导弹转弯速率不大, 脱靶量较小。

当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} < 0$ 时, $\ddot{\lambda}$ 与 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^*$ 同号, $\dot{\lambda}^*$ 为有限值。若 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^* > 0$, 则 $\ddot{\lambda} > 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为增函数, $\dot{\lambda}$ 发散。若 $\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^* < 0$, 则 $\ddot{\lambda} < 0$, 即 $\dot{\lambda}$ 为减函数, $\dot{\lambda}$ 发散。此时 $\dot{\lambda}$ 有逐渐离开 $\dot{\lambda}^*$ 的趋势, 导弹的弹道变的弯曲, 在接近目标的时候导弹要以很大的速率转弯, 可能会造成脱靶。

由上述分析可以得到 $\dot{\lambda}$ 的收敛条件, 即

$$N > \frac{2|\dot{r}|}{V_m \cos \eta_m} \quad (3.18)$$

因此比例系数 N 的选择必须满足上式, 否则导弹需用法向过载 n_y 过大, 会得到导弹在接近目标的时候以无穷大的速率转弯, 从而最终导致脱靶。

单独考虑导弹在命中点处的需用法向过载 n_f 。由于命中点处有 $r = 0$, 因此 (3.17) 式即为

$$\dot{\lambda}_f = \dot{\lambda}_f^* = \left. \frac{\dot{V}_t \sin \eta_t - \dot{V}_m \sin \eta_m + V_t \dot{\sigma}_t \cos \eta_t}{2\dot{r} + NV_m \cos \eta_m} \right|_{t=t_f} \quad (3.19)$$

故命中点处的需用法向过载 n_f 为

$$n_f = \frac{V_m N}{g} \dot{\lambda}_f = \frac{1}{g} \left[\frac{\dot{V}_t \sin \eta_t - \dot{V}_m \sin \eta_m + V_t \dot{\sigma}_t \cos \eta_t}{\frac{2\dot{r}}{NV_m} + \cos \eta_m} \right]_{t=t_f} \quad (3.20)$$

当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} > 0$ 时, $\dot{\lambda}_f$ 收敛, 命中点处导弹的需用法向过载 n_f 较小。当 $NV_m \cos \eta_m + 2\dot{r} < 0$ 时, $\dot{\lambda}$ 发散, 因此 $\dot{\lambda}_f \rightarrow \infty$, 即命中点处导弹的需用法向过载 n_f 趋于无穷大, 这在实际情况中是不可能存在的, 因而导弹不能命中目标。显然导弹命中点处的需用法向过载 n_f 与目标视线方向上导弹目标的相对速度 \dot{r} 相关。如果命中点处的相对速度过小, 则所需法向过载会很大。同时, 目标的相关参数 \dot{V}_t 和 $\dot{\sigma}_t$ 也会对命中点处导弹需用法向过载 n_f 产生影响。

3.3 比例系数选择

事实上在3.2.2节中已经给出了比例系数 N 的选择条件 (3.18) 式。此时目标视线的旋转角速度 $|\dot{\lambda}|$ 不断减小, 同时弹道各点的需用法向过载 n_y 也不断减小。由于导弹和目标在目标视线上的相对速度 $|\dot{r}|$ 与导弹的攻击方向有关, 导弹从不同的角度拦截目标, 相对速度 $|\dot{r}|$ 也不同, 因此 (3.18) 式所确定的比例系数 N 的下界也会随实际情况而发生变化的。

比例系数 N 的上限可以由弹道的需用法向过载 n_y 来确定。由 (3.14) 式可知, 如果比例系数 N 无限增大, 即使 $\dot{\lambda}$ 很小, 弹道各点的需用法向过载 n_y 也

会变得非常大，可能会超过可用过载。另外由于比例系数 N 会放大外界干扰信号，如果比例系数 N 过大， $\dot{\lambda}$ 的一个微小变化会使得 $\dot{\sigma}_m$ 产生很大的变化，从而影响制导系统的稳定性。

综合考虑上述情况，比例系数 N 需要恰当的选择，其可以是一个常数或者变量。比例系数 N 为常数时，其通常的选择范围为 $2 \sim 6$ 。

3.4 比例导引律优缺点

比例导引律隶属于经典制导律的范畴。在目前的现役导弹中大多采用比例导引律及其改进形式。随着军事科技的飞速发展，战场态势的日趋复杂，对于战场上出现的高速度、大机动、强干扰的目标，比例导引律则力有不逮，此时只能采用基于现代控制理论的现代制导技术，如最优制导律，微分几何制导律，反馈线性化制导等等。下面列出了比例导引律的主要优缺点：

(1) 比例导引律作用下导弹的弹道比较平直。特别的当比例系数 N 满足条件 (3.18) 时，弹道的前段比较弯曲，能够充分利用导弹的机动能力。弹道的后段比较平直，导弹具有非常充裕的机动能力。

(2) 比例导引律所需利用的信息量较少，结构简单，放宽了导弹对发射初始瞄准角度的严格要求，技术上非常容易实现。

(3) 比例导引律作用下的导弹各项参数和初值选择合适情况下，可以保证全弹道上需用过载小于可用过载。

但是比例导引律也有缺点，

(1) 导弹的速度和攻击方向等因素会对导弹在命中点处的需用法向过载造成影响，可能会使得导弹在接近目标时弹道出现较大程度的弯曲。

(2) 对于大机动且具有强对抗性的目标，比例导引律可能会产生很大的脱靶量，无法使导弹准确命中目标。

(3) 比例导引律的制导精度较低，抗干扰性不强。对于目标采用各种干扰措施的情况，比例导引律无法适用。

3.5 纯比例导引律

比例导引律及其改进形式有很多种，国内外众多专家和学者对比例导引律及其改进形式的进行了详细的分析研究，对各种形式比例导引律作用下导弹的弹道特性、拦截区域、拦截时间和消耗能量等诸多导引性能进行了定性分析和定量计算。本节主要介绍比例导引律中的纯比例导引律 (PPN)。

PPN 律最早由 Guelman 等通过严格的数学推导获得 (Guelman, 1971, 1972, 1973)。PPN 律不对导弹的飞行速率进行控制，仅控制导弹的飞行方向。即

PPN 律的机动加速度 A_m 与速度矢量 V_m 垂直正交, A_m 为导弹的法向加速度, 如图3.1所示。如果考虑目标的机动加速度 A_t 也与速度矢量 V_t 垂直正交, 则 PPN 律作用下的导弹和目标的相对运动方程组为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_t = \frac{A_t}{V_t} \\ \dot{\sigma}_m = \frac{A_m}{V_m} \\ \dot{r} = V_t \cos(\sigma_t - \lambda) - V_m \cos(\sigma_m - \lambda) \\ r\dot{\lambda} = V_t \sin(\sigma_t - \lambda) - V_m \sin(\sigma_m - \lambda) \\ A_m = NV_m\dot{\lambda} \end{cases} \quad (3.21)$$

PPN 律对于非机动目标具有较好的导引效果。方程组 (3.21) 的精确闭环解仅当比例系数 $N = 1, 2$ 时可以求得。因此一般只能通过定性分析来确定拦截条件。对于非机动目标, PPN 律只需要满足 $NV_m > V_m + V_t, V_m > V_t$, 即可以拦截目标。此时除导弹与目标反方向飞行外 ($\dot{\lambda} = 0$), 导弹均能以直线弹道飞行命中目标, 此时 PPN 的性能趋于最优 (Guelman and Shinar, 1984)。

对于一般的机动目标, 方程组 (3.21) 高度非线性化, 无法求得其精确闭环解。此时 PPN 律的拦截条件需要从如下两个方面考虑。

(1) 导弹和目标的相对初始条件不满足 $\dot{\lambda} = 0, \dot{r} > 0$ 。此时如果有如下条件满足, 则导弹可以命中目标。

$$\begin{cases} V_m > \sqrt{2}V_t \\ N > 1 + \frac{V_t}{V_m} \end{cases} \quad (3.22)$$

(2) 导弹和目标的相对初始条件满足 $\dot{\lambda} = 0, \dot{r} > 0$ 。此时如果有如下条件满足, 则导弹可以命中目标。

$$\begin{cases} V_m > \sqrt{2}V_t \\ N > 1 + \frac{V_t}{V_m} \\ |\lambda(0)| > \frac{|\eta_t|}{(N-2)\sqrt{V_m^2 - V_t^2} - 2V_t} \end{cases} \quad (3.23)$$

事实上, PPN 律在拦截机动目标时, 其导引特性不如非机动目标, 因此需要对 PPN 律作进一步改进或者修正。Ghawghawe 等定性的分析了 PPN 律对于时变机动目标的导引效果, 指出有界时变机动会 PPN 律的拦截区域产生影响, 但不会有显著的影响, 此时 PPN 律仍然可以保证导弹击中目标 (Ghawghawe and Ghose, 1996)。Mahapatra 等考虑目标侧向机动情况, 利用准二次线性化方法对

PPN 律作用下的导弹和目标相对运动方程组进行求解,得到了准确的闭环形式解 (Mahapatra and Shukla, 1989)。Ha 等研究了 PPN 律作用下的导弹对具有时变法向加速度机动目标的拦截问题,通过一个似李雅普洛夫函数 (Lyapunov-like function) 证明了当导弹的初始值满足一定条件时,PPN 律可以有效命中目标 (Ha et al., 1990)。因此 PPN 律经过一定的改进和修正仍然可以适用于机动目标的情况。关于 PPN 律及其改进形式作用下的导弹拦截机动目标问题仍然是一个备受关注的研究热点。

3.6 本章小结

本章主要介绍了比例导弹律的相关理论。给出了比例导引律作用下的导弹拦截目标的运动方程组。对比例导引律的弹道特性进行了详细分析。分析了导弹保持直线弹道的初值条件,推导了弹道各点需用法向过载收敛的充分条件,给出了比例系数的选择要求和基本条件,列举了比例导引律的优缺点。最后对一类比较特殊的比例导引律 PPN 律进行了介绍。分析了 PPN 律分别作用非机动和机动目标下的拦截条件。本章相关内容是后续研究开展的必要基础。

第四章 分数阶修正纯比例导引律及其捕获性能分析

纯比例导引律 (PPN) 是一种实际运用非常广泛的比例导引律。关于 PPN 律的分析讨论以及改进也一直是导弹导引问题研究中的重要课题。本章以分数阶微积分理论为基础, 通过计算导弹视线角的分数阶微分对传统的 PPN 律进行修正, 提出了一种新的分数阶修正纯比例导引律 (Fractional Order Modified Pure Proportional Navigation FO-MPPN)。

4.1 分数阶修正纯比例导引律

本节主要介绍 FO-MPPN 律的基本思想。分析给出了 FO-MPPN 的导引关系式以及 FO-MPPN 律导引下的导弹和目标相对运动方程。结合分数阶微积分的相关定义和性质对 FO-MPPN 律的捕获性能进行了研究。

4.1.1 分数阶修正纯比例导引律基本思想

在导弹导引问题中, 一般的导引律大多基于整数阶微积分理论。对于 PPN 律而言, 其通过计算当前时刻导弹视线角的整数阶微分, 对导弹的飞行方向进行控制, 从而实现导弹飞行全过程制导。由于整数阶微分是对函数局部变化率的一种线性描述, 近似地描述了当自变量取值作足够小变动时函数值的变化情况, 反映的是函数的在某个点或者邻域内的局部性质, 因此 PPN 律事实上只利用了导弹飞行过程中的导弹视线角变化的部分或局部信息。注意到导弹飞行过程涉及很多信息变化, 如朝向误差角 h 和导航角 L 等等, 因此 PPN 律在信息利用的范围上存在进一步提升的空间。

通过额外增加导弹飞行过程的一些信息量是对 PPN 律进行修正的有效方法。Nesline 等通过增加目标机动加速度对 PPN 律进行修正, 提出扩展比例导引律 (APN)(Nesline and Zarchan, 1979)。Sim 等通过增加一个与朝向误差角 h 、导弹速率 V_m 以及导弹目标相对距离 r 相关的函数附加项对 PPN 律进行了修正, 提出了全方位比例导引律 (AAPN)(Sim et al., 2000)。Raghunathan 等将 AAPN 律和遗传算法相结合, 提出了一种能够在线实现的基于遗传算法的全方位比例导引律 (DE-AAPN)(Raghunathan and Ghose, 2010)。雷虎民等人通过引入视线角 λ 的积分附加修正项以及拦截时间 t_f 进行修正, 提出了一种扩展 PID 比例导引律 (PID-PN)(雷虎民 等, 1999)。上述改进方法已被证实可以有效的提

升 PPN 律的导引效果，但是这些方法基于整数阶微积分理论。采用分数阶微积分可以从另外一个视角对 PPN 律进行改进。

分数阶微积分是对整数阶微积分的进一步延拓。分数阶微积分将传统的整数阶微积分的阶次推广到了非整数阶的情况，可以更好对实际对象进行数学描述 (廖增 等, 2011)。在分数阶微积分理论中，任意函数的分数阶微分反映的不再是函数在某点或某邻域的局部性质，而是反映了函数的全局性或者分布式的特征 (Das, 2008)。因此如果采用分数阶微积分的这一特性对 PPN 律进行修正，则可以对导弹飞行过程中的全局性或者分布式的信息进行综合考虑，从而有效提升 PPN 律的导引效果。

4.1.2 分数阶修正纯比例导引律导引关系式

考虑导弹和目标的相对运动模型，如图3.1所示。由于 PPN 律在一定条件下可以保证导弹准确命中非机动或者机动目标，因此考虑通过直接附加与导弹视线角分数阶微分项相关的函数对 PPN 律进行修正，即

$$A_m = NV_m \dot{\lambda} + F(p, \lambda, D^p \lambda, \dot{\lambda}) V_m \quad (4.1)$$

其中 p 为分数阶微分阶次，取值范围为 $0 \leq p \leq 1$ 。 $F(p, \lambda, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ 为分数阶微分阶次 p 和导弹视线角 λ 及其分数阶微分 $D^p \lambda$ 和整数阶微分 $\dot{\lambda}$ 的复合函数。

不妨构造如下形式的修正项函数 $F(p, \lambda, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ ，即

$$F(p, \lambda, D^p \lambda, \dot{\lambda}) = F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda}) = p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}}, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (4.2)$$

则修正后的 FO-MPPN 律的导引关系式如下

$$A_m = \begin{cases} NV_m \dot{\lambda} + p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} V_m & \dot{\lambda} \neq 0 \\ 0 & \dot{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 N 为导引系数。

与传统的 PPN 律相比，FO-MPPN 额外增加了分数阶微分项 $D^p \lambda$ ，因此分数阶微分阶次 p 的取值将影响控制量 A_m 的大小。实际上，传统的 PPN 律是 FO-MPPN 律中分数阶微分阶次 p 取特殊值情况下的两个特例。考察分数阶微分阶次 p 取不同值时，FO-MPPN 律的变化情况。

(1) 当分数阶微分阶次 $p = 0$ 时，FO-MPPN 律的修正项函数 $F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ 即为

$$F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda}) = p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} = 0 \quad (4.4)$$

因此 FO-MPPN 律退化为传统的导引系数为 N 时的 PPN 律, 即

$$A_m = NV_m \dot{\lambda} \quad (4.5)$$

(2) 当分数阶微分阶次 $p = 1$ 时, FO-MPPN 律的修正项函数 $F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ 即为

$$F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda}) = p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} = \dot{\lambda} \quad (4.6)$$

因此 FO-MPPN 律退化为传统的导引系数为 $N + 1$ 时的 PPN 律, 即

$$A_m = (N + 1)V_m \dot{\lambda} \quad (4.7)$$

(3) 当分数阶微分阶次 $0 < p < 1$ 时, FO-MPPN 律的修正项函数 $F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ 不再退化为整数阶微分的情形。FO-MPPN 律通过修正项函数 $F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ 中的分数阶微分 $D^p \lambda$ 来获取导弹飞行过程的全局信息, 实现对 PPN 律导引效果的修正和补充, 使得导弹可以更好更快的命中目标。

FO-MPPN 律作用下的导弹和目标相对运动方程组如下

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_t = \frac{A_t}{V_t} \\ \dot{\sigma}_m = \frac{A_m}{V_m} \\ \dot{r} = V_t \cos(\sigma_t - \lambda) - V_m \cos(\sigma_m - \lambda) \\ r \dot{\lambda} = V_t \sin(\sigma_t - \lambda) - V_m \sin(\sigma_m - \lambda) \\ A_m = NV_m \dot{\lambda} + p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} V_m \end{cases} \quad (4.8)$$

显然方程组 (4.8) 呈高度非线性, 而且由于方程组中导引律部分涉及计算函数的分数阶微分, 因此一般条件下无法获得其精确闭环解, 只能在误差范围允许范围内计算其数值解。

4.1.3 分数阶修正纯比例导引律数值实现

考虑 FO-MPPN 律的离散化数值实现问题。不妨采用前向差分法对 FO-MPPN 律进行离散化处理, 即

$$A_m(k) = NV_m \frac{\lambda(k) - \lambda(k-1)}{T_s} + F_d(p, D^p \lambda(k), \lambda(k-1), \lambda(k)) V_m \quad (4.9)$$

其中 T_s 为采样时间, $F_d(p, D^p \lambda(k), \lambda(k-1), \lambda(k))$ 为离散化后 FO-MPPN 律的修正项函数。采用 2.2.2 节的短记忆法对修正项中的分数阶微分项 $D^p \lambda(k)$ 进行离散化处理。根据计算精度要求, 选择合适记忆长度 L , 则离散化后的

FO-MPPN 律的修正项函数即为

$$F_d(p, D^p \lambda(k), \lambda(k-1), \lambda(k)) = \frac{pT_s V_m}{\lambda(k) - \lambda(k-1)} \left[\frac{1}{T_s^p} \sum_{j=0}^N b_j \lambda(k-j) \right]^2 \quad (4.10)$$

其中 b_j 为二项式系数, $N = \min \{k, L\}$ 。显然, 此时视线角需满足条件 $\lambda(k) \neq \lambda(k-1)$ 。

将 (4.10) 式代入 (4.9) 式, 则当 $\lambda(k) \neq \lambda(k-1)$ 时, 离散化的 FO-MPPN 律即为

$$A_m(k) = NV_m \frac{\lambda(k) - \lambda(k-1)}{T_s} + \frac{pT_s V_m}{\lambda(k) - \lambda(k-1)} \left[\frac{1}{T_s^p} \sum_{j=0}^N b_j \lambda(k-j) \right]^2 \quad (4.11)$$

考虑到当 $\lambda(k) = \lambda(k-1)$ 时, 控制量 $A_m(k) = 0$, 因此离散化后的 FO-MPPN 律又可以写成如下形式

$$A_m(k) [\lambda(k) - \lambda(k-1)] = \frac{NV_m}{T_s} [\lambda(k) - \lambda(k-1)]^2 + \frac{pV_m}{T_s^{2p-1}} \left[\sum_{j=0}^N b_j \lambda(k-j) \right]^2 \quad (4.12)$$

将 (4.12) 式展开, 则有

$$\begin{aligned} & A_m(k) [\lambda(k) - \lambda(k-1)] \\ &= \left(\frac{NV_m}{T_s} + \frac{pV_m}{T_s^{2p-1}} \right) \lambda^2(k) + \left(\frac{NV_m}{T_s} + \frac{b_1 p V_m}{T_s^{2p-1}} \right) \lambda^2(k-1) \\ &+ \sum_{j=2}^N \frac{b_j^2 p V_m}{T_s^{2p-1}} \lambda^2(k-j) + 2 \left(b_1 V_m - \frac{NV_m}{T_s} \right) \lambda(k-1) \lambda(k) \\ &+ 2V_m \sum_{\substack{i < j \\ j > 1}}^N b_i b_j \lambda(k-i) \lambda(k-j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

实际上 N 值限定了可利用信息的长度, 反映了时间窗的大小。FO-MPPN 律导引下导弹法向加速度 A_m 在 k 时刻的值与时间窗 $[k-N, k]$ 内所有时刻的导引角信息相关。由于这样关系的存在, 在导弹命中点处控制量 A_m 不会发生突变, 从而避免了 PPN 律命中点处需要法向过载过大的问题。

4.2 分数阶修正纯比例导引律捕获性能分析

虽然 Ha 等和 Song 等通过严格数学分析, 分别证明了当满足一定初始条件, 二维平面和三维空间中的导弹可以在 PPN 律作用下准确命中机动目标 (Ha et al., 1990; Song and Ha, 1994)。但是由于 FO-MPPN 额外增加了分数阶微分

的修正项 $F(p, D^p \lambda, \dot{\lambda})$ ，因此其捕获性能可能会发生变化，对于其能否命中机动目标需要进行重新分析和证明。本节通过选取似李雅普洛夫函数函数，从数学上严格证明了在一定初始条件下，FO-MPPN 律可以保证理想导弹准确命中时变机动目标。

4.2.1 分数阶修正纯比例导引律前提假设

在分析 FO-MPPN 律的捕获性能前，首先对导弹和目标作如下前提假设条件：

A1 导弹和目标在俯仰通道中的运动视为质点运动。制导过程忽略地心引力的影响，不考虑重力对导弹和目标的作用。

A2 导弹的制导系统的工作是理想的。与总体制导过程相比，自动驾驶仪和导引头的动态响应足够快可以忽略。

A3 整个制导过程中导弹速度 V_m 和目标速度大小 V_t 保持恒定不变，方向可变。

A4 为确保导弹拦截目标，导弹相对于目标具有速度优势，即目标与导弹速度比 $\rho = \frac{V_t}{V_m}$ 满足 $0 < \rho < 1$ 。

A5 目标的法向加速度 $|A_t(t)|$ 是关于时间 t 的分段连续有界函数，且函数上确界为 α ，即：

$$|A_t(t)| \leq \alpha, \quad t \geq 0 \quad (4.14)$$

A6 导弹初始航向误差足够小，即

$$\begin{cases} |\rho \sin \eta_t(0) - \sin \eta_m(0)| < \beta \\ |\eta_m(0)| < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \beta \in (0, 1 - \rho) \quad (4.15)$$

A7 比例系数 N 的选择不可过小，其下界应满足

$$N > 1 + \frac{\rho \beta |V_m|^2 + \alpha r(0)}{\beta |V_m|^2 \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}} \quad (4.16)$$

即比例系数 N 的选择仅需要知道与目标加速度上界有关的先验知识，而不用知道目标具体机动过程。

4.2.2 分数阶修正纯比例导引律捕获性定理

定理 4.2.1 若 A1-A4 条件满足，且

$$|\rho \sin \eta_t(t) - \sin \eta_m(t)| < \beta, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.17)$$

$$|\eta_m(t_0)| < \frac{\pi}{2} \quad (4.18)$$

其中 $t_0, t_1 \in [0, \infty)$, $\beta \in (0, 1 - \rho)$ 。则当 $t_0 \leq t \leq t_1$ 时下列不等式成立

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta) \quad (4.19)$$

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (4.20)$$

证明: 由 (4.17) 式可得

$$|\sin \eta_m(t)| - |\rho \sin \eta_t(t)| < |\rho \sin \eta_t(t) - \sin \eta_m(t)| < \beta \quad (4.21)$$

因此有

$$|\sin \eta_m(t)| < \rho |\sin \eta_t(t)| + \beta < \rho + \beta < 1 \quad (4.22)$$

不妨定义如下集合

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\eta \in R : |\eta| < |\arcsin(\rho + \beta)|\} \\ \Omega_2 &= \{\eta \in R : |\eta - \pi| < |\arcsin(\rho + \beta)|\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

由 (4.22) 式可得

$$\eta_m \in \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.24)$$

由 (4.18) 式可知, $\eta_m(t_0) \in \Omega_1$, 又 η_m 关于时间 t 连续, 因此 $\eta_m(t) \in \Omega_1, t_0 \leq t \leq t_1$ 。即

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.25)$$

由 (4.22) 式可得

$$|\sin \eta_m(t)| < \rho |\sin \eta_t(t)| + \beta, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.26)$$

又由于 $\eta_m(t) \in \Omega_1, t_0 \leq t \leq t_1$, 因此

$$\cos \eta_m(t) > 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.27)$$

由 (4.26) 式和 (4.27) 式可得

$$\cos \eta_m(t) > \sqrt{1 - \{\beta + \rho |\sin \eta_t(t)|\}^2}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.28)$$

由 (4.8) 式和 (4.28) 式可得

$$\dot{r}(t) < V_m f(\eta_t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.29)$$

下面考察如下以 η_t 为自变量的函数 $f(\eta_t)$ 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 内的极大值问题,

即

$$f(\eta_t) = \rho \cos \eta_t - \sqrt{1 - \{\beta + \rho |\sin \eta_t|\}^2} \quad (4.30)$$

由于函数 $f(\eta_t)$ 中存在绝对值, 因此分别对 $\sin \eta_t > 0$ 和 $\sin \eta_t < 0$ 两种情况下的函数 $f(\eta_t)$ 进行求导。令 $f'(\eta_t) = 0$, 分类讨论后可得

$$\max_{-\pi \leq \eta_t \leq \pi} f(\eta_t) = -\sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (4.31)$$

因此有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.32)$$

证毕。

定理 4.2.2 设 A1-A7 条件均满足. 如果对于某一常数 $t_2 \in (0, \infty)$, 有

$$|\eta_m(t)| \leq \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (4.33)$$

则 FO-MPPN 律仍可以保证

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (4.34)$$

证明: (反证法) 设 $t_0 = t_1 = 0$, 则由定理 4.2.1 可知

$$\dot{r}(0) < -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (4.35)$$

不妨假设 (4.34) 式不成立, 则存在 $t_3 \in (0, t_2]$, 当 $0 \leq t < t_3$ 时, 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (4.36)$$

$$\dot{r}(t_3) = -V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (4.37)$$

因此当 $0 \leq t \leq t_3$ 时, 有

$$r(t) \leq r(0) \quad (4.38)$$

由 (4.33) 式可得

$$\cos \eta_m \geq \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}, \quad 0 \leq t \leq t_3 \quad (4.39)$$

由方程 (4.8) 式可得

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\ddot{\lambda} + A_t \cos \eta_t - A_m \cos \eta_m \quad (4.40)$$

选择如下似李雅普洛夫函数 $V(t)$

$$V(t) = \frac{1}{2} |r(t) \dot{\lambda}(t)|^2 \quad (4.41)$$

对 $V(t)$ 计算关于时间 t 的微分, 将 (4.40) 式代入, 则有

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= r\dot{\lambda} \left(-\dot{r}\dot{\lambda} + A_t \cos \eta_t - A_m \cos \eta_m \right) \\
 &= r\dot{\lambda} \left\{ A_t \cos \eta_t - \left(A_m - V_m \dot{\lambda} \right) \cos \eta_m \right\} - \rho r |\dot{\lambda}|^2 V_m \cos \eta_t \\
 &= r\dot{\lambda} \left\{ A_t \cos \eta_t - \left[NV_m \dot{\lambda} + p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} - V_m \dot{\lambda} \right] \cos \eta_m \right\} - \rho r \dot{\lambda}^2 V_m \cos \eta_t \\
 &= r\dot{\lambda} A_t \cos \eta_t + r\dot{\lambda}^2 V_m \left[-\rho \cos \eta_t + (1 - N) \cos \eta_m \right] - rp(D^p \lambda)^2 \cos \eta_m
 \end{aligned}$$

由定理 4.2.1 可得,

$$\cos \eta_m \geq \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} > 0, \quad 0 \leq t \leq t_3 \quad (4.42)$$

由 A7 可得,

$$1 - N < - \left[\rho + \frac{\alpha r(0)}{\beta |V_m|^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}} < 0 \quad (4.43)$$

由 (4.42) 式可得

$$rp(D^p \lambda)^2 \cos \eta_m \geq 0 \quad (4.44)$$

因此当 $0 \leq t \leq t_3$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &< r\dot{\lambda} A_t \cos \eta_t + r\dot{\lambda}^2 V_m \left\{ -\rho \cos \eta_t - \left[\rho + \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m^2} \right] \frac{\cos \eta_m}{\sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}} \right\} \\
 &< r\dot{\lambda} A_t \cos \eta_t - \rho r \dot{\lambda}^2 V_m \cos \eta_t - r\dot{\lambda}^2 V_m \left[\rho + \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m^2} \right] \\
 &< r\dot{\lambda} \alpha + r\dot{\lambda}^2 V_m (-\rho \cos \eta_t - \rho) - r\dot{\lambda}^2 \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m} \\
 &\leq r\dot{\lambda} \alpha - \dot{\lambda}^2 \frac{\alpha r(0) r}{\beta V_m} \\
 &< r\dot{\lambda} \alpha - \frac{\alpha r^2 \dot{\lambda}^2}{\beta V_m} \\
 &= \alpha \sqrt{2V} - \frac{2\alpha}{\beta V_m} V
 \end{aligned}$$

上式即为,

$$\sqrt{V}(t) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}} + \left[\sqrt{V}(0) - \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}} \right] \exp \left[\frac{-\alpha t}{\beta V_m} \right] \quad (4.45)$$

由 (4.8) 和 A6 可知, $\sqrt{V}(0) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}}$, 因此 $\sqrt{V}(t) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}}$ 。即当 $0 \leq t \leq t_3$ 时, 有

$$|\rho \sin \eta_t(t) - \sin \eta_m(t)| < \beta \quad (4.46)$$

由定理 4.2.1 可得, 当 $0 \leq t \leq t_3$ 时, 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2} \quad (4.47)$$

显然 $\dot{r}(t_3) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}$, 与 (4.37) 式矛盾。因此 (4.34) 式成立。证毕。

事实上在 A1-A7 条件满足的情况下, 可以推导得出定理 4.2.2 的条件 (4.33) 式成立。下面给出如下定理证明 (4.33) 式。

定理 4.2.3 设 A1-A7 条件满足, 则有

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad t \geq 0 \quad (4.48)$$

且存在一个有限的时间 t_f 使得 $r(t_f) = 0$, 其中

$$t_f < \frac{r(0)}{V_m} \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2} \quad (4.49)$$

证明: (反证法) 由定理 4.2.1 可得

$$|\eta_m(0)| < \arcsin(\rho + \beta) \quad (4.50)$$

假设 (4.48) 式不成立, 则必然存在一个 $t_3 \in (0, \infty)$, 有

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t < t_3 \quad (4.51)$$

$$|\eta_m(t)| = \arcsin(\rho + \beta), \quad t = t_3 \quad (4.52)$$

由定理 4.2.2 及其证明过程可得到

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_3 \quad (4.53)$$

$$|\rho \sin \eta_t(t) - \sin \eta_m(t)| < \beta, \quad 0 \leq t \leq t_3 \quad (4.54)$$

由 (4.54) 式和定理 4.2.2 可得

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_3 \quad (4.55)$$

显然当 $t = t_3$ 时, (4.55) 式与 (4.52) 式相矛盾, 因此 (4.48) 式成立。由定理 4.2.2 可知, 对 $\forall t_0 \in [0, \infty)$, 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (4.56)$$

因此存在一个有限的时间 t_f 使得 $r(t_f) = 0$, 其中 t_f 满足 (4.49) 式。证毕。

由定理 4.2.3 可知, 当导弹的初始航向误差足够小时, 无论目标是否机动, 选择合适的比例系数 N , 采用 FO-MPPN 律制导一定可以保证理想导弹在有限时间内命中目标。

4.2.3 数值仿真实例

用 Matlab 构建试验仿真平台, 考察 FO-MPPN/PPN 律导引下理想导弹对机动目标的拦截问题。目标始终以恒定速率和时变法向加速度作机动飞行, 速度方向时刻发生变化。目标机动时法向加速度为

$$A_t(t) = 10 \cos t (m/s^2) \quad (4.57)$$

导弹则以恒定速率拦截飞行目标。导弹和目标的各项参数取值如表4.1所示。FO-MPPN 律作用下的导弹和目标的相对运动方程如 (4.8) 式所示。由于比例系数 N 常在 2-6 内取值, 同时考虑到当分数阶微分阶次在 $[0, 1]$ 范围内取值时, FO-MPPN 律在两个端点处的情况可以退化为比例系数相差为 1 的 PPN 律情况, 因此本节将 FO-MPPN 律与比例系数分别为 $N = 3$ 和 $N = 4$ 时的 PPN 律进行仿真对比分析。

表 4.1 导弹和目标的各项参数取值

导弹和目标参数	参数设定值
$r(0)$	20000m
$\lambda(0)$	0°
$\sigma_t(0)$	85°
$\sigma_m(0)$	85°
V_t	800m/s ²
V_m	1000m/s ²
α	10m/s ²
β	0.25

仿真过程中采用 Euler 法直接对方程 (4.8) 进行离散求解, 其中采样时间 $T_s = 0.01\text{sec}$ 。FO-MPPN 律中的分数阶微分项 $D^p \lambda$ 采用短记忆法进行离散化数值实现, 为保证计算精度, 选择足够大的记忆长度 $L = 1000$ 。详见2.2.2节。

分数阶微分阶次 p 的选择会对导弹飞行过程中的拦截时间 t_f 和法向加速度 A_m 产生很大的影响。这里通过如下代价函数 $J(p)$ 来确定分数阶微分阶次 p 的值, 即

$$p = \arg \min_{0 \leq p \leq 1} J(p) = \arg \min_{0 \leq p \leq 1} \int_0^{t_f(p)} [A_m^2(p) + W_t] dt \quad (4.58)$$

其中时间权重为 $W_t = 10^6$ 。采用遍历法对分数阶微分阶次进行参数寻优。选择

计算步长为 0.1。通过计算得到最优的分数阶微分阶次 $p = 0.8$ ，此时代价函数 $J(p) = 4.26 \times 10^7$ 。

FO-MPPN 律与两种 PPN 律作用下导弹的拦截时间如表4.2所示。导弹飞行过程中与目标的相对距离 r 变化情况如图4.1所示。FO-MPPN/PPN 律导引下导弹法向加速度的变化情况如图4.2所示。

表 4.2 FO-MPPN/PPN 律导引下导弹拦截时间

导引律	FO-MPPN ($p=0.8$)	PPN ($N=3$)	PPN ($N=4$)
拦截时间 (s)	40.27	42.17	40.84

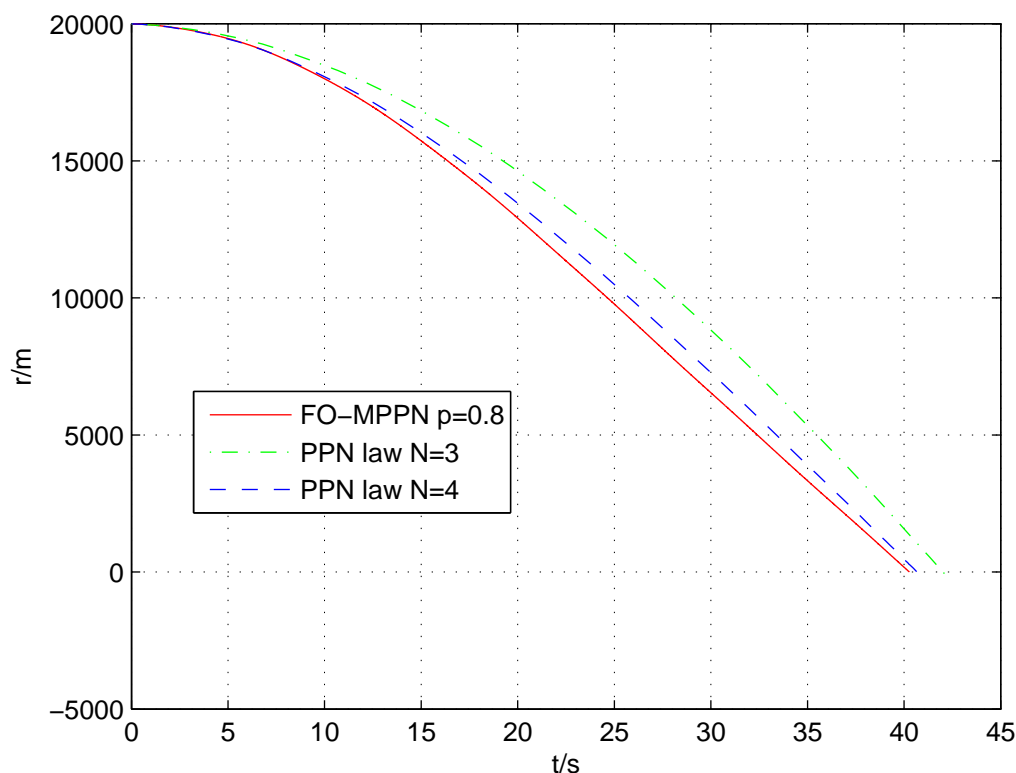


图 4.1 FO-MPPN/PPN 律导引下弹目相对距离变化曲线

图4.1表明，FO-MPPN 律可以使导弹有效击中机动目标。同时与两种 PPN 律相比，FO-MPPN 律导引下的导弹拦截时间更短，其飞行路径也更短。这说明 FO-MPPN 律很好的保持了纯比例导引律在追踪性能方面的优势。由图4.2所示，FO-MPPN 律导引下的导弹法向加速度在导弹飞行的前 15sec 左右略大于 PPN 律导引下的两种情况，而飞行的后 25sec 则明显小于 PPN 导引下的两种情况。尤其值得注意的是，在导弹即将命中目标的时刻，不论比例系数 N 取何

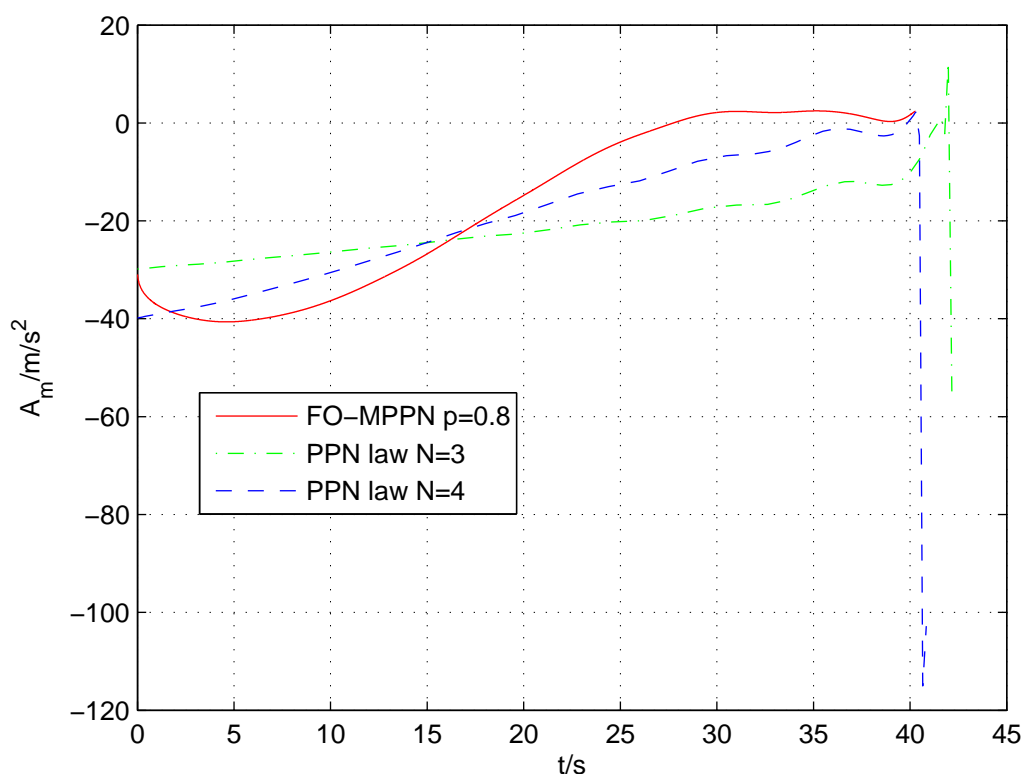


图 4.2 FO-MPPN/PPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线

值，PPN 律导引下的导弹命中点处的法向加速度会突然增大，使得需用法向过载急剧增大超出可用过载的范围，在实际情况下这对导弹是非常不利的。使用分数阶微积分进行修正后，FO-MPPN 律很好的解决了这一问题。由图4.2可以看出，FO-MPPN 律导引下的导弹法向加速度在飞行的后半程几乎稳定在 0 的附近，在命中点同样也没有突变。

4.3 本章小结

本章针对带有时变法向加速度的机动目标打击问题，提出了一种基于分数阶微积分的修正纯比例导引 (FO-MPPN) 律。使用似李雅普洛夫方法证明了在 FO-MPPN 律导引下的理想导弹在满足一定限制条件下，总可以在有限时间内命中目标。仿真实例表明，FO-MPPN 律不仅打击时间更短，而且可以有效解决传统 PPN 导引下在导弹命中点处法向加速度大幅突变的不足。

第五章 分数阶比例导引律

本章在分数阶微积分理论框架下对传统的比例导引律进行分析和研究。对传统的基于整数阶微积分的纯比例导引律 (PPN) 和全方位比例导引律 (AAPN) 进行推广, 提出了全新的分数阶比例导引律, 主要包括分数阶纯比例导引律 (Fractional Order Pure Proportional Navigation, FO-PPN) 和分数阶全方位比例导引律 (Fractional Order All Aspect Proportional Navigation, FO-AAPN)。

5.1 分数阶比例导引律

在经典的导弹导引问题中, 传统的比例导引律是在整数阶微积分理论框架下提出的。由于分数阶微积分理论实际上包含了传统整数阶微积分理论, 同时分数阶微积分具有诸如全局性、记忆性等整数阶微积分所不具有的优点, 因此可以考虑在分数阶微积分理论框架下重新对比比例导引律进行研究, 以进一步提升导引律的导引性能, 使得导弹更好更快的命中目标。本节对比比例导引律中比较典型的 PPN 律和 AAPN 律分别在分数阶微积分理论框架下的基本形式和数值实现进行研究。

5.1.1 分数阶比例导引律导引关系式

分数阶纯比例导引律 (FO-PPN) 的导引关系式如下

$$A_m = NV_m D^p \lambda \quad (5.1)$$

其中 N 为比例系数, p 为分数阶微分阶次, 取值范围为 $0 \leq p \leq 1$ 。显然, 当分数阶微分阶次 $p = 1$ 时, FO-PPN 律即退化为传统的 PPN 律。FO-PPN 律作用下的导弹和目标相对运动方程组如下

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_t = \frac{A_t}{V_t} \\ \dot{\sigma}_m = \frac{A_m}{V_m} \\ \dot{r} = V_t \cos(\sigma_t - \lambda) - V_m \cos(\sigma_m - \lambda) \\ r\dot{\lambda} = V_t \sin(\sigma_t - \lambda) - V_m \sin(\sigma_m - \lambda) \\ A_m = NV_m D^p \lambda \end{cases} \quad (5.2)$$

FO-PPN 律通过计算导弹视线角 λ 的分数阶微分对导弹法向加速度施加控制。由于分数阶微分算子的全局性，因此 FO-PPN 律可以利用导弹飞行过程中视线角 λ 的全局性变化信息，相比较传统的 PPN 律仅利用视线角 λ 的瞬时变化率而言，其控制信息更加丰富全面。

传统的 AAPN 律最早由 Sim 等人于 2000 年提出，其通过增加一个与朝向误差角 h 、导弹速率 V_m 以及导弹目标相对距离 r 相关的函数附加项对 PPN 律进行了修正 (Sim et al., 2000)。由于 AAPN 律实际上是利用了除视线角之外的导弹飞行过程中的相关信息，因此其导引效果比 PPN 律更好。在分数阶微积分理论框架下对 AAPN 律进行重新研究，则分数阶全方位比例导引律 (FO-AAPN) 的导引关系式如下

$$A_m = NV_m D^p \lambda + f(h, \rho) \frac{V_m^2}{r} \quad (5.3)$$

其中 h 表示朝向误差角， $f(h, \rho)$ 为额外的全方位修正项函数。

朝向误差角 h 与导弹航迹角 σ_m 、目标航迹角 σ_t 和视线角 λ 之间存在确定的几何关系。由图3.1可得

$$\sigma_m = \lambda + L + h \quad (5.4)$$

又

$$L = \arcsin \frac{V_t \sin \sigma_t - \lambda}{V_m} \quad (5.5)$$

因此有

$$h = \sigma_m - \lambda - \arcsin \frac{V_t \sin \sigma_t - \lambda}{V_m} \quad (5.6)$$

Sim 等采用朝向误差角 h 的三阶有理多项式对函数 $f(h, \rho)$ 进行拟合，在给定性能指标 J 的情况下给出了系数 a, b, c 的取值，即

$$f(h, \rho) = ah + bh^2 + ch^3 \quad (5.7)$$

其中 $a = 0.1717, b = -0.3885, c = 0.1925$ 。当分数阶微分阶次 $p = 1$ 时，FO-AAPN 律即退化为传统的 AAPN 律。FO-AAPN 律作用下的导弹和目标相对运动方程组如下

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_t = \frac{A_t}{V_t} \\ \dot{\sigma}_m = \frac{A_m}{V_m} \\ \dot{r} = V_t \cos(\sigma_t - \lambda) - V_m \cos(\sigma_m - \lambda) \\ r\dot{\lambda} = V_t \sin(\sigma_t - \lambda) - V_m \sin(\sigma_m - \lambda) \\ A_m = NV_m D^p \lambda + (ah + bh^2 + ch^3) \frac{V_m^2}{r} \end{cases} \quad (5.8)$$

5.1.2 分数阶比例导引律数值实现

考虑 FO-PPN 律的数值实现问题。对 (5.1) 式进行 Laplace 变换, 考虑到实际物理意义的问题, 这里分数阶微分采用 Caputo 定义, 则有

$$A_m(s) = L\{A_m(t)\} = L\{NV_m D^p \lambda(t)\} = NV_m [s^p \lambda(s) - s^{p-1} \lambda(0)] \quad (5.9)$$

分数阶微分项 s^p 的连续化数值实现方法有很多种, 见 2.2.1 节。则 FO-PPN 律基于 Oustaloup 递推滤波器近似改进方法的连续化数值实现为

$$A_m(s) = NV_m \left[\left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(s) - \left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds + b\omega_h}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(0) \right] \quad (5.10)$$

其中 $\omega'_k = \left(\frac{d\omega_b}{b} \right)^{\frac{p-2k}{2N+1}}$, $\omega_k = \left(\frac{b\omega_h}{d} \right)^{\frac{p+2k}{2N+1}}$, $N' = 4, b = 10, d = 9, \omega_b = 10^{-3}, \omega_h = 10^3$ 。采用 Tustin 算子继续对微分算子 s 进行离散, 即为

$$A_m(z^{-1}) = NV_m \left[\left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(s) - \left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds + b\omega_h}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(0) \right]_{s=\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \quad (5.11)$$

FO-PPN 律基于连分式展开的连续化数值实现为

$$\begin{aligned} A_m(s) &= NV_m [\text{CFE}\{s^p\} \lambda(s) - \text{CFE}\{s^{p-1}\} \lambda(0)] \\ &= NV_m \left[\frac{P_n(s)}{Q_n(s)} \lambda(s) - \frac{\overline{P}_n(s)}{\overline{Q}_n(s)} \lambda(0) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中 $P_n(s), Q_n(s), \overline{P}_n(s), \overline{Q}_n(s)$ 可通过 (2.19) 式的迭代计算获得。采用 Tustin 算子则可以获得 FO-PPN 律基于连分式展开的离散化实现, 即

$$\begin{aligned} A_m(z^{-1}) &= NV_m \left[\left(\frac{2}{T_s} \right)^p \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^p \right\} \lambda(s) - \left(\frac{2}{T_s} \right)^{p-1} \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{p-1} \right\} \lambda(0) \right] \\ &= NV_m \left[\frac{M_n(z^{-1})}{N_n(z^{-1})} \lambda(s) - \frac{\overline{M}_n(z^{-1})}{\overline{N}_n(z^{-1})} \lambda(0) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

其中 $M_n(z^{-1}), N_n(z^{-1}), \overline{M}_n(z^{-1}), \overline{N}_n(z^{-1})$ 也可通过 (2.19) 式的迭代计算获得。

也可以从分数阶微分 GL 定义出发, 直接采用短记忆法对 FO-PPN 律进行离散化实现, 设记忆长度为 L , 则 FO-PPN 律基于短记忆法对的离散化数值实现为

$$A_m(k) = \frac{NV_m}{T_s^p} \sum_{j=0}^{N_1} b_j \lambda(k-j) \quad (5.14)$$

其中 b_j 为二项式系数, $N_1 = \min \{k, L\}$ 。

下面考虑 FO-AAPN 律的数值实现问题。注意到 FO-AAPN 律是在 FO-PPN 律的进一步推广, 因此可以直接利用 FO-PPN 律数值实现的相关结果。此时 FO-PPN 律基于 Oustaloup 递推滤波器近似改进方法的离散化数值实现为

$$\begin{aligned} A_m(k) &= NV_m Z^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^p \frac{ds + b\omega_h}{d(1-p)s^2 + b\omega_h s + dp} \prod_{k=-N'}^{N'} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \lambda(0) \right]_{s=\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \right\} \\ &\quad + [ah(k) + bh^2(k) + ch^3(k)] \frac{V_m^2}{r(k)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

FO-AAPN 律基于连分式展开的离散化数值实现为

$$\begin{aligned} A_m(k) &= NV_m Z^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{2}{T_s} \right)^p \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^p \right\} \lambda(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{2}{T_s} \right)^{p-1} \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{p-1} \right\} \lambda(0) \right] \right\} \\ &\quad + [ah(k) + bh^2(k) + ch^3(k)] \frac{V_m^2}{r(k)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

FO-AAPN 律基于短记忆法对的离散化数值实现为

$$A_m(k) = \frac{NV_m}{T_s^p} \sum_{j=0}^{N_1} b_j \lambda(k-j) + [ah(k) + bh^2(k) + ch^3(k)] \frac{V_m^2}{r(k)} \quad (5.17)$$

5.2 分数阶纯比例导引律仿真分析

为检验 FO-PPN 律在导弹导引过程中的有效性, 本节分别对如下情况进行仿真分析。一是导弹前向拦截或者尾随追击非机动目标, 二是导弹前向拦截或者尾随追击机动目标。重点分析比较 FO-PPN 律与传统 PPN 律的拦截时间和控制量大小。

导弹和目标的初始位置与速度等相关参数如表5.1和表5.2所示。分数阶微分

阶次 p 通过如下代价函数确定

$$p = \arg \min_{0 \leq p \leq 1} J(p) = \arg \min_{0 \leq p \leq 1} \int_0^{t_f(p)} [A_m^2(p) + W_t] dt \quad (5.18)$$

其中时间权重 $W_t = 10^4$ 采用遍历法计算最优的分数阶微分阶次 p , 遍历步长 0.01。对 FO-PPN 律进行离散化数值实现采用连分式展开和 Tustin 算子相结合的离散化方法, 如 (5.13) 式所示。

表 5.1 导弹初始位置与速度等相关参数初值

$R_{M1}(m)$	$R_{M2}(m)$	$V_M(m/s)$	$\alpha_m(\text{rad})$
0	10000	1000	$17\pi/18$

表 5.2 目标初始位置与速度等相关参数初值

$R_{T1}(m)$	$R_{T2}(m)$	$V_T(m/s)$	$\alpha_T(\text{rad})$
20000	10000	200	0

5.2.1 导弹截击非机动目标

考虑导弹尾随追击非机动目标的情况。目标始终以恒定速率沿着直线飞行, 方向不发生变化。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-PPN 律和 PPN 律作用下的制导效果。此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.79$ 。图5.1为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。由于导弹飞行速率恒定, 因此图5.1事实上也放映了拦截时间 t_f 的长短。图5.2为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.3为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明, 导弹尾随追击非机动目标的情况中, 采用 FO-PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 PPN 律缩短了 50.33%, 大约一半左右。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 PPN 律的 3.25 倍。其代价函数 J 为 PPN 律的 66.66%。

考虑导弹前向截击非机动目标的情况。目标始终以恒定速率沿着直线飞行, 方向不发生变化。导弹则以恒定速率前向截击飞行目标。此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.88$ 。对比分析 FO-PPN 律和 PPN 律作用下的制导效果。图5.3为导弹前向截击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.4为导弹前向截击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律

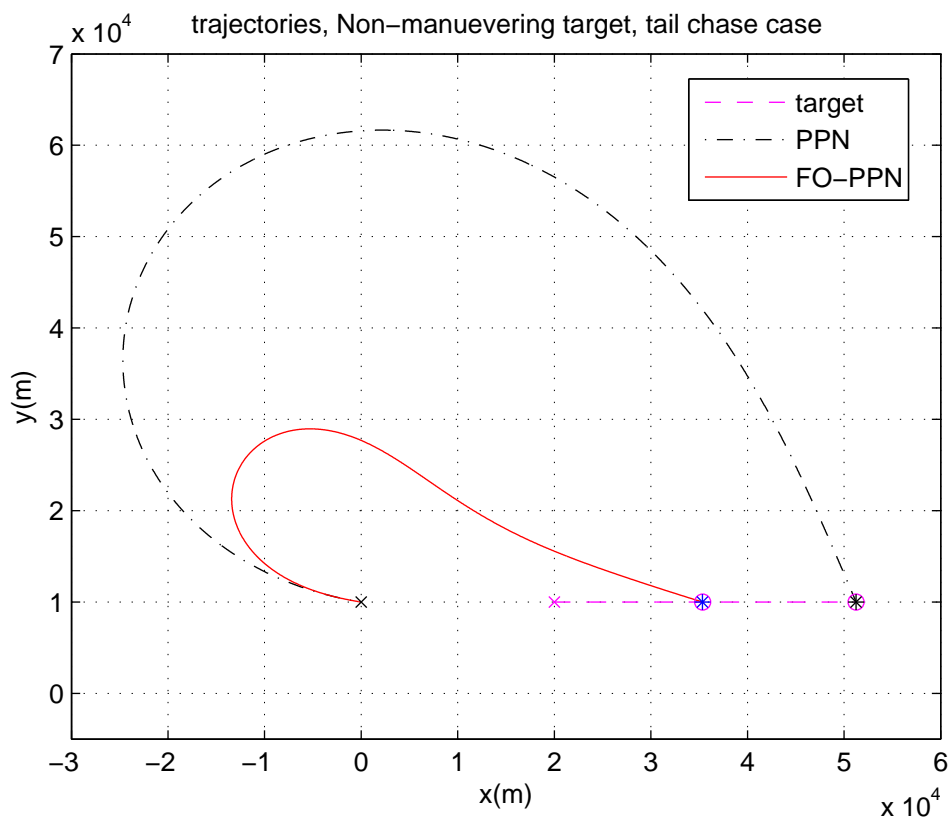


图 5.1 FO-PPN/PPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹尾随追击非机动目标)

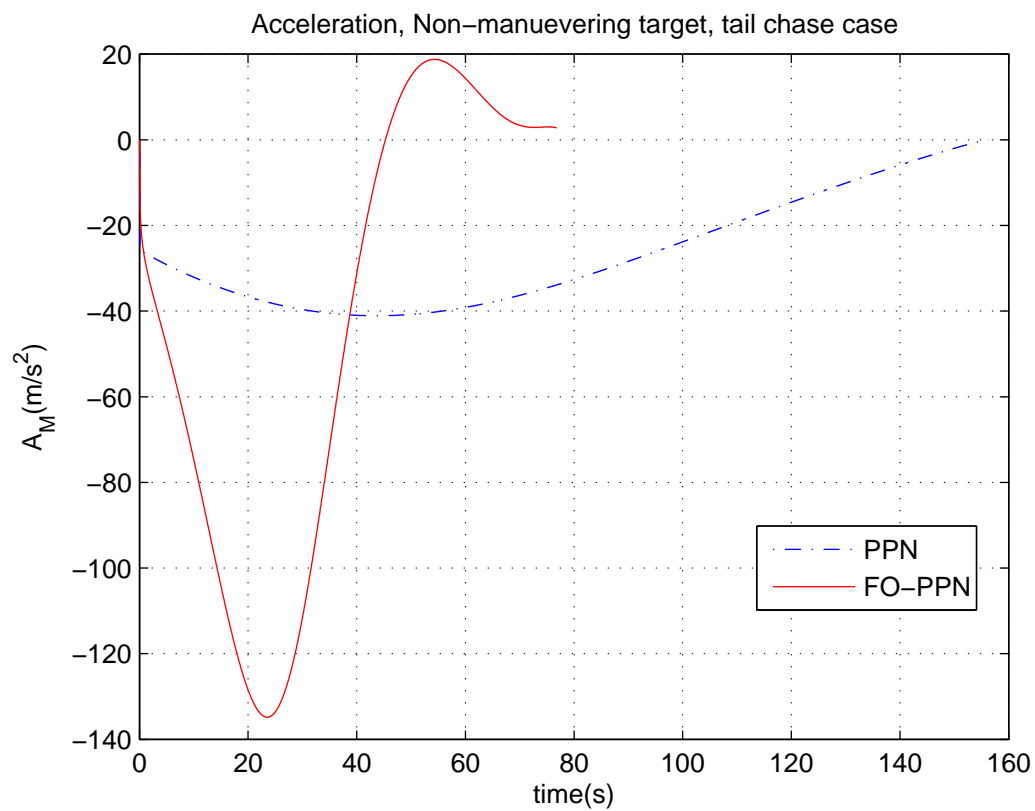


图 5.2 FO-PPN/PPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹尾随追击非机动目标)

表 5.3 导弹尾随追击非机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
PPN	154.73	41.50	100
FO-PPN ($\alpha = 0.79$)	76.85	134.83	66.66

和 PPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.4为导弹前向截击非机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明，导弹前向截击非机动目标的情况中，FO-PPN 律导引下导弹的拦截时间 t_f 比 PPN 律缩短了 30.21%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 PPN 律的 1.62 倍。其代价函数 J 为 PPN 律的 89.58%。

表 5.4 导弹前向截击非机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
PPN	78.23	93.46	100
FO-PPN ($\alpha = 0.88$)	54.60	151.77	89.58

综合考虑导弹尾随追击和前向截击两种情况，虽然 FO-PPN 律使得导弹最大法向加速度有所增加，但是却极大的缩短了拦截时间。整体看来，对于非机动目标 FO-PPN 律比 PPN 律具有更好的制导效果。

5.2.2 导弹截击机动目标

考虑导弹尾随追击机动目标的情况。目标以变化的速率作机动飞行，在开始的 7.5sec 内以加速度 $-10m/s^2$ 机动飞行，在后来的 30sec 至 60sec 内以加速度 $10m/s^2$ 机动飞行，其他时间不作任何机动。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-PPN 律和 PPN 律作用下的制导效果。此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.89$ 。图5.5为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.6为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.5为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导

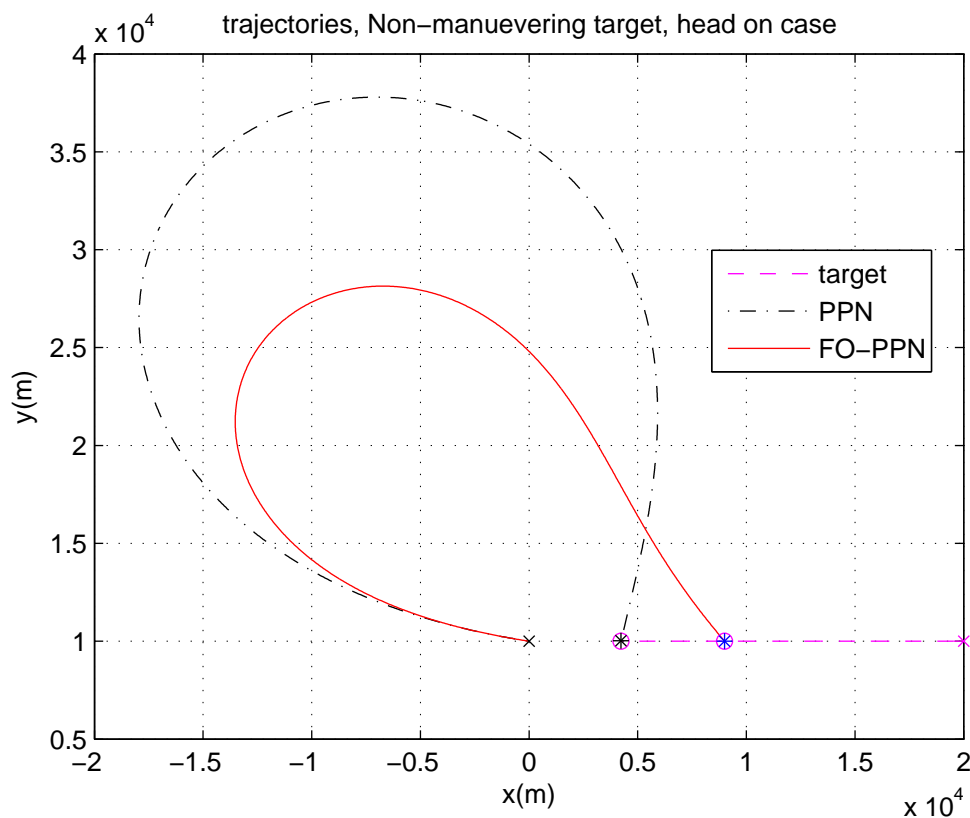


图 5.3 FO-PPN/PPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹前向截击非机动目标)

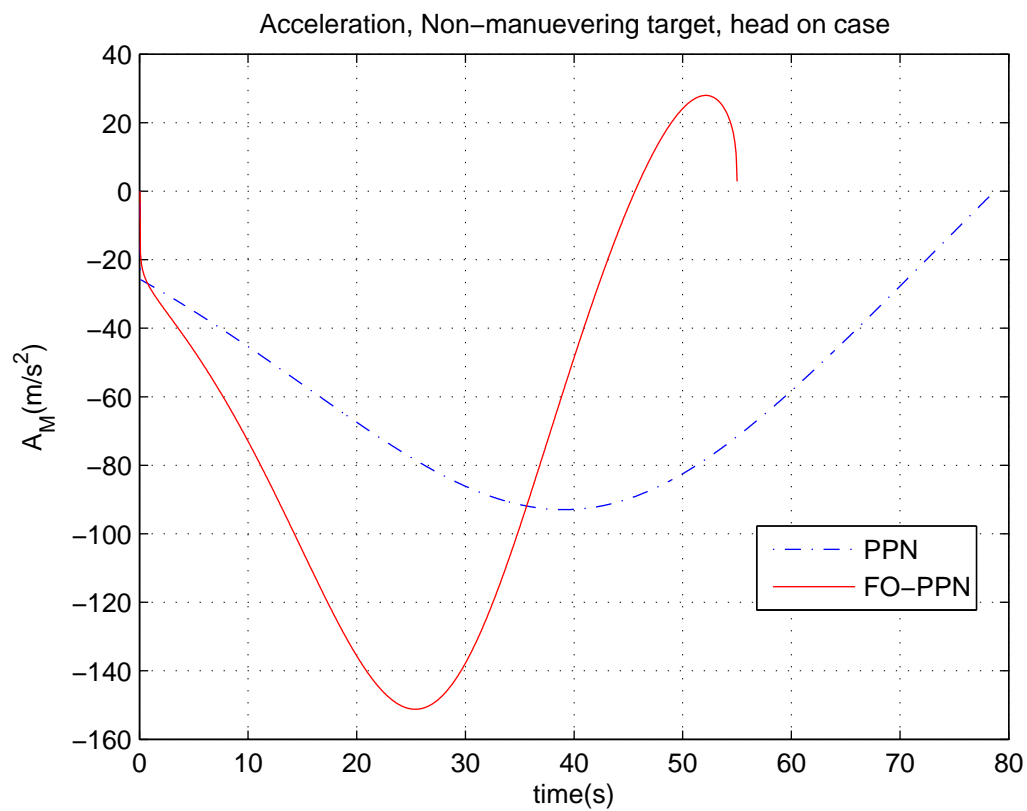


图 5.4 FO-PPN/PPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹前向截击非机动目标)

弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明, 导弹尾随追击机动目标的情况中, 采用 FO-PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 PPN 律缩短了 30.92%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 PPN 律的 1.75 倍。其代价函数 J 为 PPN 律的 84.16%。

表 5.5 导弹尾随追击机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
PPN	116.90	67.56	100
FO-PPN ($\alpha = 0.89$)	80.75	118.15	84.16

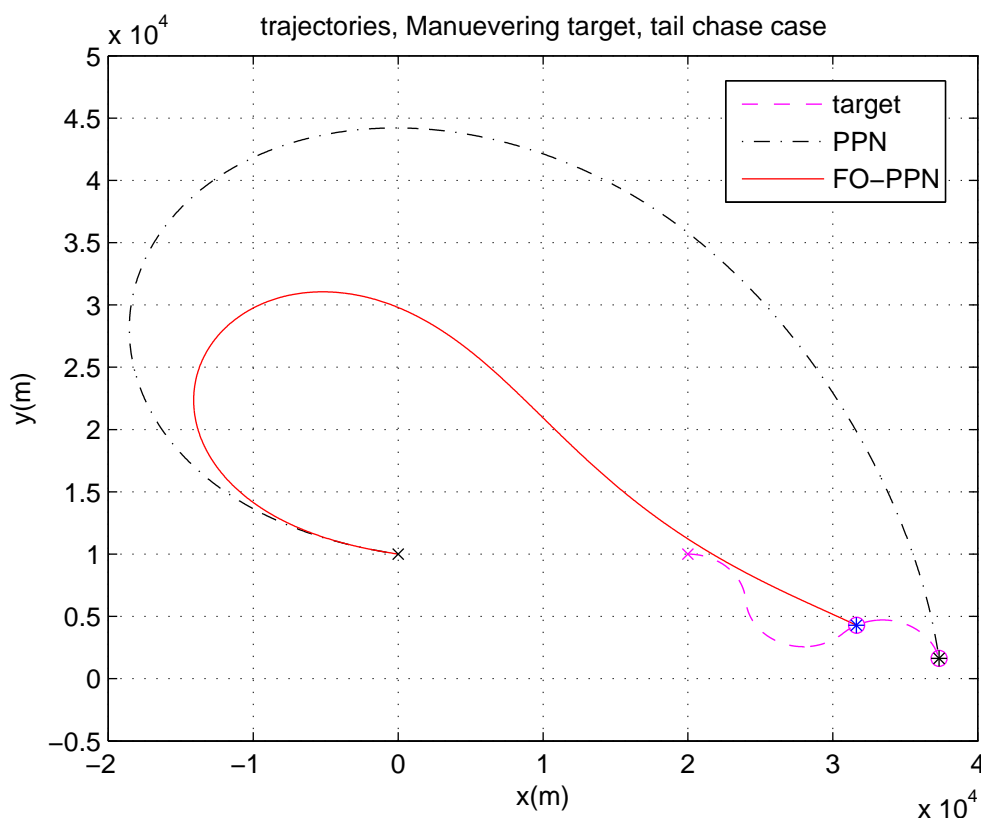


图 5.5 FO-PPN/PPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹尾随追击机动目标)

考虑导弹前向截击机动目标的情况。目标以变化的速率作机动飞行, 在开始的 30sec 内以加速度 $-10m/s^2$ 机动飞行, 在后来的 30sec 至 75sec 内以加速度 $10m/s^2$ 机动飞行, 其他时间不作任何机动。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-PPN 律和 PPN 律作用下的制导效果。此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.89$ 。图5.7为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-PPN

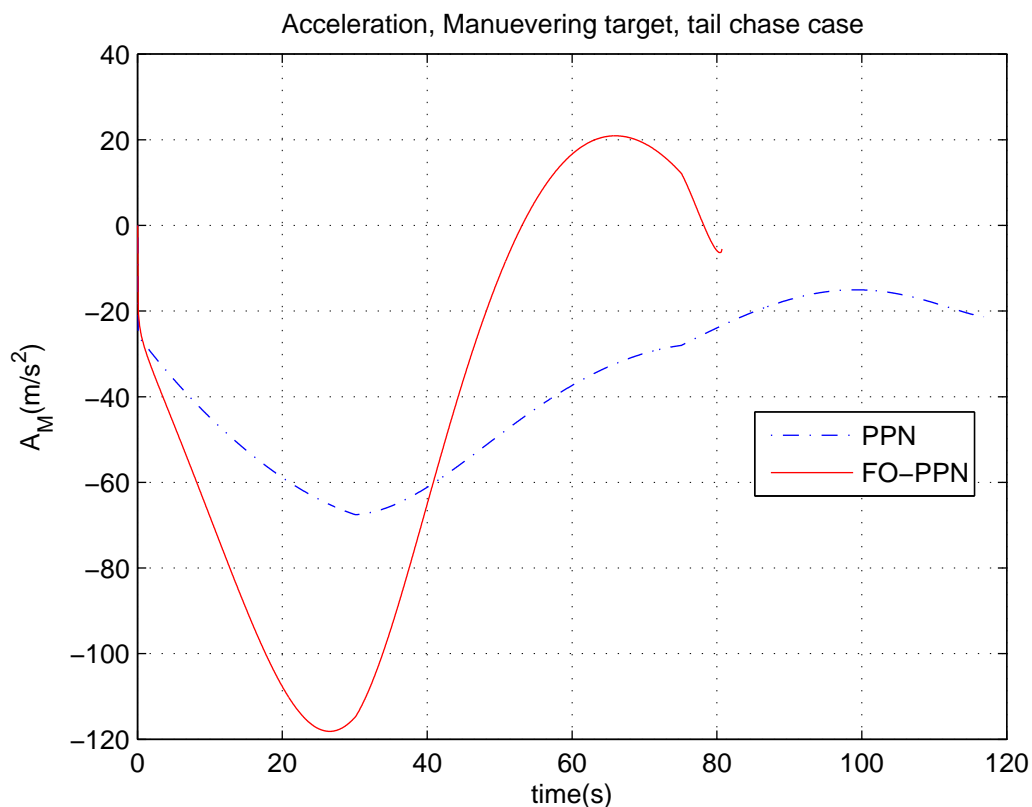


图 5.6 FO-PPN/PPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹尾随追击机动目标)

律和 PPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.8为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.6为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-PPN 律和 PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明，导弹前向截击机动目标的情况中，采用 FO-PPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 PPN 律缩短了 49.90%，大约一半左右。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 PPN 律的 1.96 倍。其代价函数 J 为 PPN 律的 69.57%。

综合考虑导弹尾随追击和前向截击两种情况，虽然 FO-PPN 律使得导弹最大法向加速度有所增加，但是却极大的缩短了拦截时间。整体看来，对于机动目标 FO-PPN 律比 PPN 律具有更好的制导效果。

表 5.6 导弹前向截击机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
PPN	108.60	73.78	100
FO-PPN ($\alpha = 0.81$)	54.40	144.27	69.57

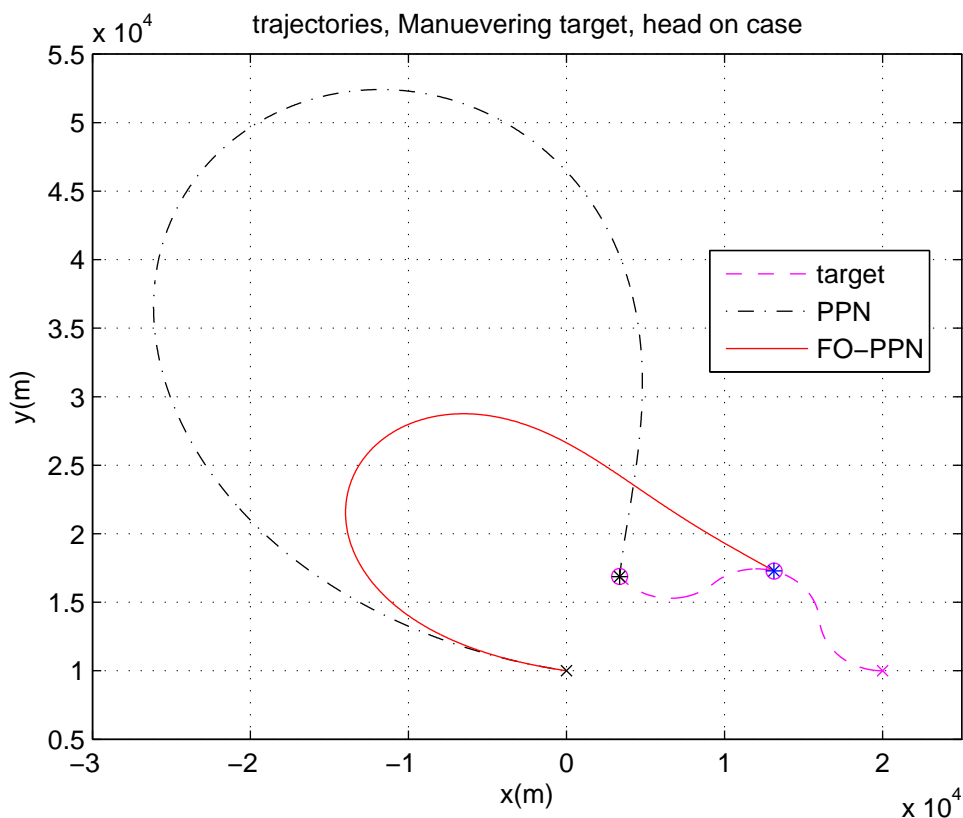


图 5.7 FO-PPN/PPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹前向截击机动目标)

5.3 分数阶全方位比例导引律仿真分析

与 FO-PPN 律的仿真类似, 对 FO-AAPN 律的仿真分析分如下情况, 一是导弹前向拦截或者尾随追击非机动目标, 二是导弹前向拦截或者尾随追击机动目标。分析比较 FO-AAPN 律与传统 AAPN 律的拦截时间和控制量大小。导弹和目标的初始位置与速度等相关参数如表5.1和表5.2所示。

5.3.1 导弹截击非机动目标

考虑导弹尾随追击非机动目标的情况。目标始终以恒定速率沿着直线飞行, 方向不发生变化。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-AAPN 律和 AAPN 律作用下的制导效果。选择计算步长 0.01, 此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.93$ 。图5.9为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。由于导弹飞行速率恒定, 因此图5.9事实上也放映了拦截时间 t_f 的长短。图5.10为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.7为导弹尾随追击非机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导

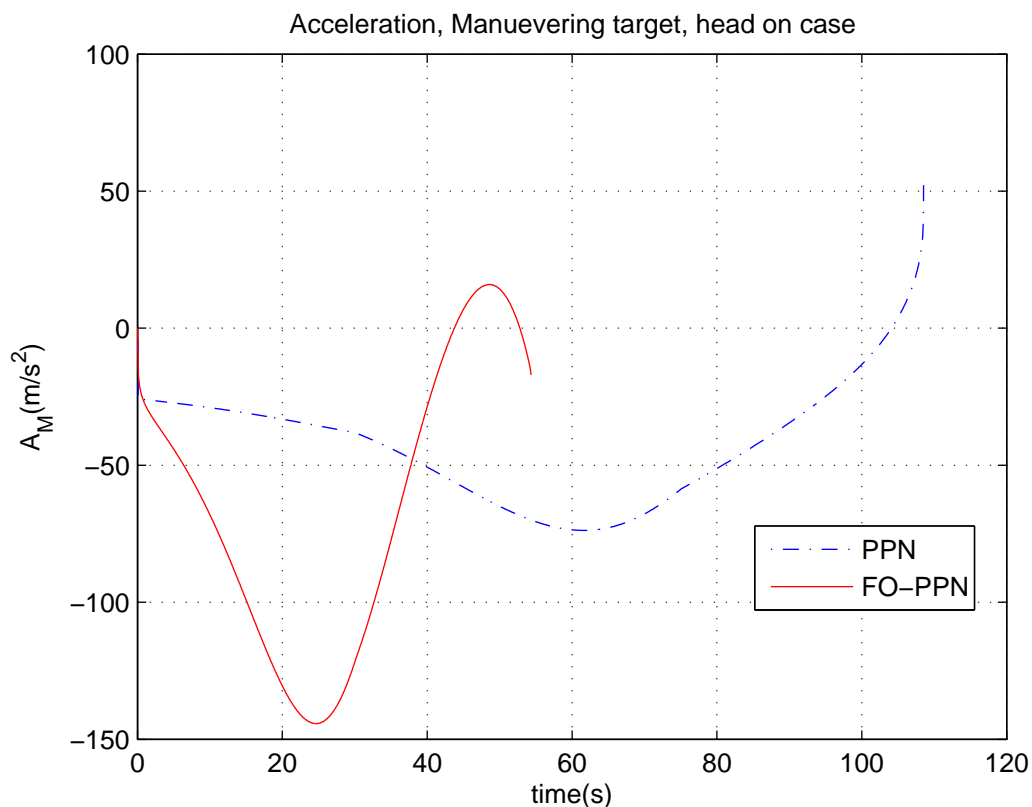


图 5.8 FO-PPN/PPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹前向截击机动目标)

引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明，导弹尾随追击非机动目标的情况下，采用 FO-AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 AAPN 律缩短了 11.80%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 AAPN 律的 0.97 倍。其代价函数 J 为 AAPN 律的 93.88%。

表 5.7 导弹尾随追击非机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
AAPN	69.90	130.83	100
FO-AAPN ($\alpha = 0.93$)	61.65	127.15	93.88

考虑导弹前向截击非机动目标的情况。目标始终以恒定速率沿着直线飞行，方向不发生变化。导弹则以恒定速率前向截击飞行目标。选择计算步长 0.01，此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.95$ 。对比分析 FO-AAPN 律和 AAPN 律作用下的制导效果。图5.11为导弹前向截击非机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.12为导弹前向截击非机动目

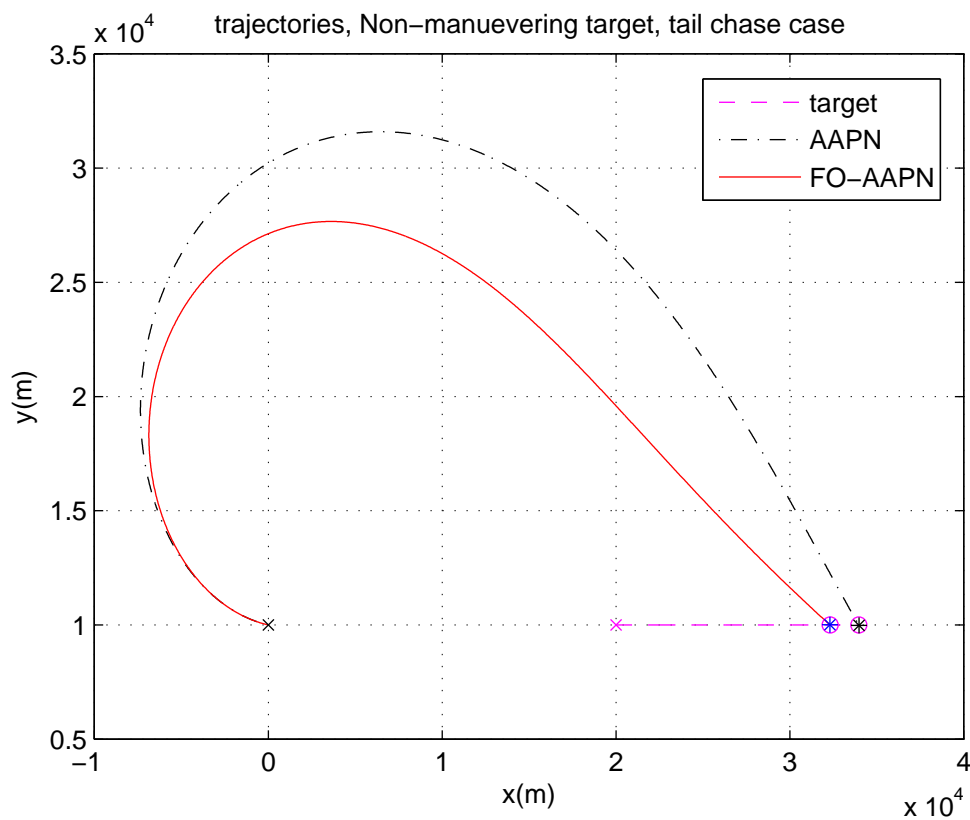


图 5.9 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹尾随追击非机动目标)

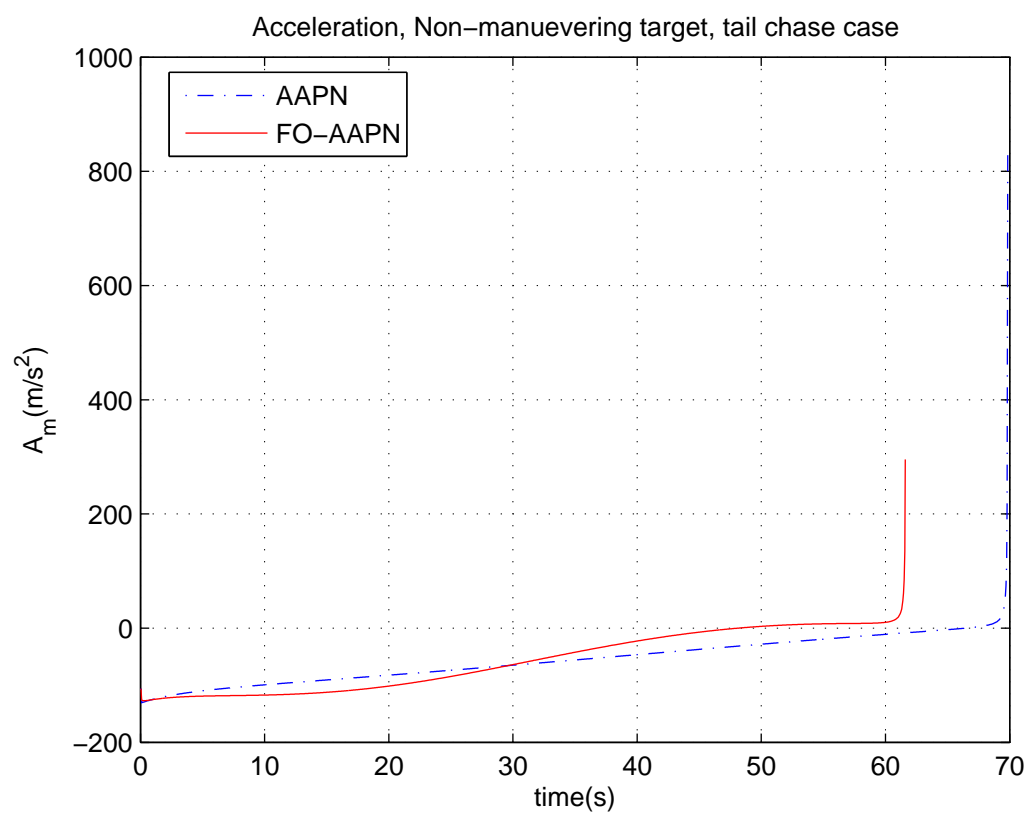


图 5.10 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹尾随追击非机动目标)

标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.8为导弹前向截击非机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明，导弹前向截击非机动目标的情况中，FO-AAPN 律导引下导弹的拦截时间 t_f 比 AAPN 律缩短了 7.65%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 AAPN 律的 1.15 倍。其代价函数 J 为 AAPN 律的 98.64%。

表 5.8 导弹前向截击非机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
AAPN	43.80	131.93	100
FO-AAPN ($\alpha = 0.95$)	40.45	151.45	98.64

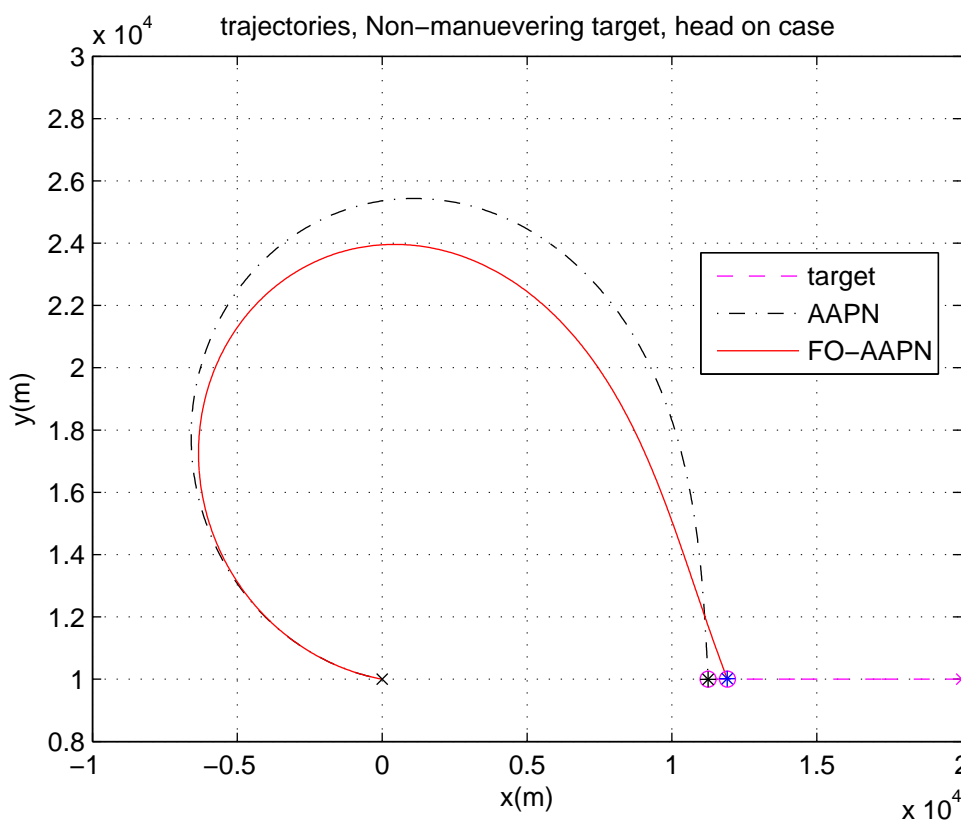


图 5.11 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹前向截击非机动目标)

综合考虑导弹尾随追击和前向截击两种情况，FO-AAPN 律在一定程度上缩短了拦截时间，性能指标有所提升。因此，对于非机动目标 FO-AAPN 律的导引效果比 AAPN 律稍好。

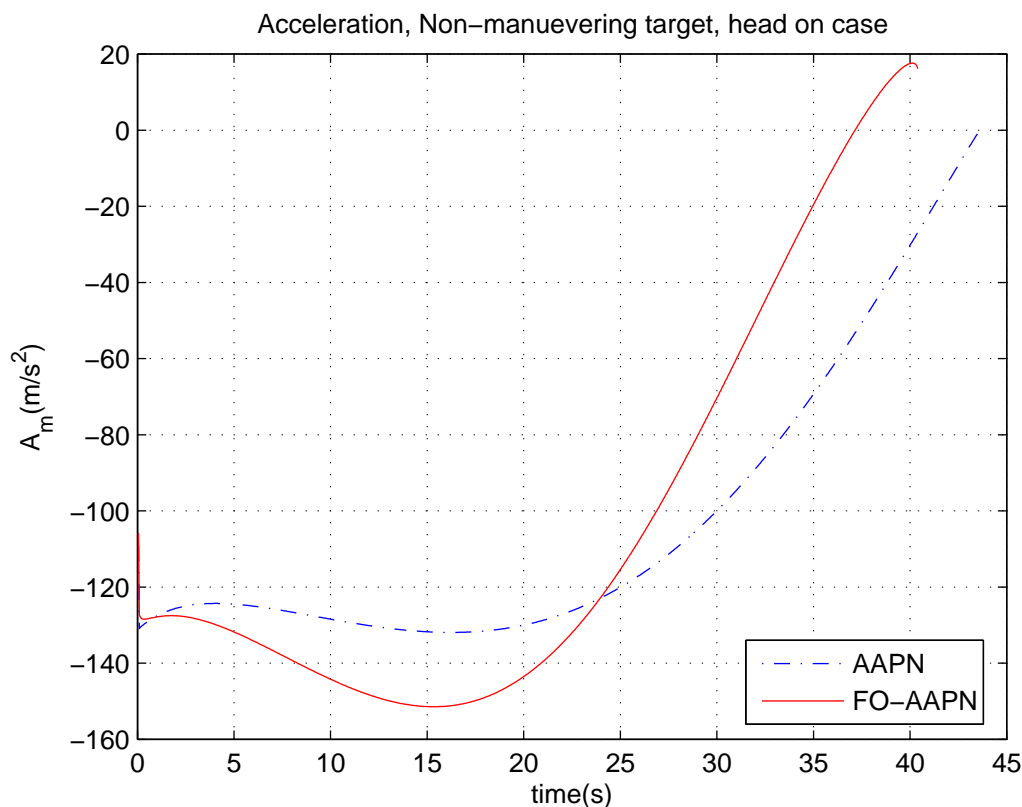


图 5.12 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹前向截击非机动目标)

5.3.2 导弹截击机动目标

考虑导弹尾随追击机动目标的情况。目标以变化的速率作机动飞行，在开始的 7.5sec 内以加速度 $-10m/s^2$ 机动飞行，在后来的 30sec 至 60sec 内以加速度 $10m/s^2$ 机动飞行，其他时间不作任何机动。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-AAPN 律和 AAPN 律作用下的制导效果。选择计算步长 0.001，此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.995$ 。图5.13为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.14为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.9为导弹尾随追击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明，导弹尾随追击机动目标的情况中，采用 FO-AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 AAPN 律缩短了 0.83%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 AAPN 律的 0.997 倍。其代价函数 J 为 AAPN 律的 99.92%。对于此种情况，FO-AAPN 律近似于 AAPN 律，其导引效果与 AAPN 非常接近。

考虑导弹前向截击机动目标的情况。目标以变化的速率作机动飞行，在开

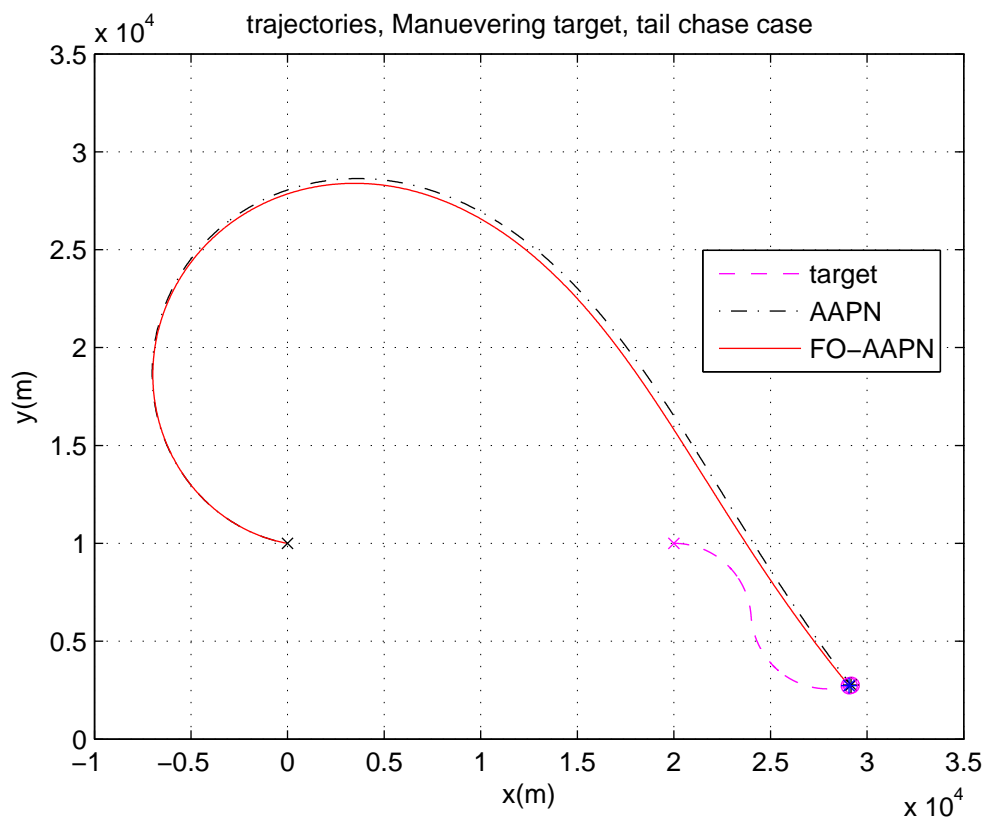


图 5.13 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹尾随追击机动目标)

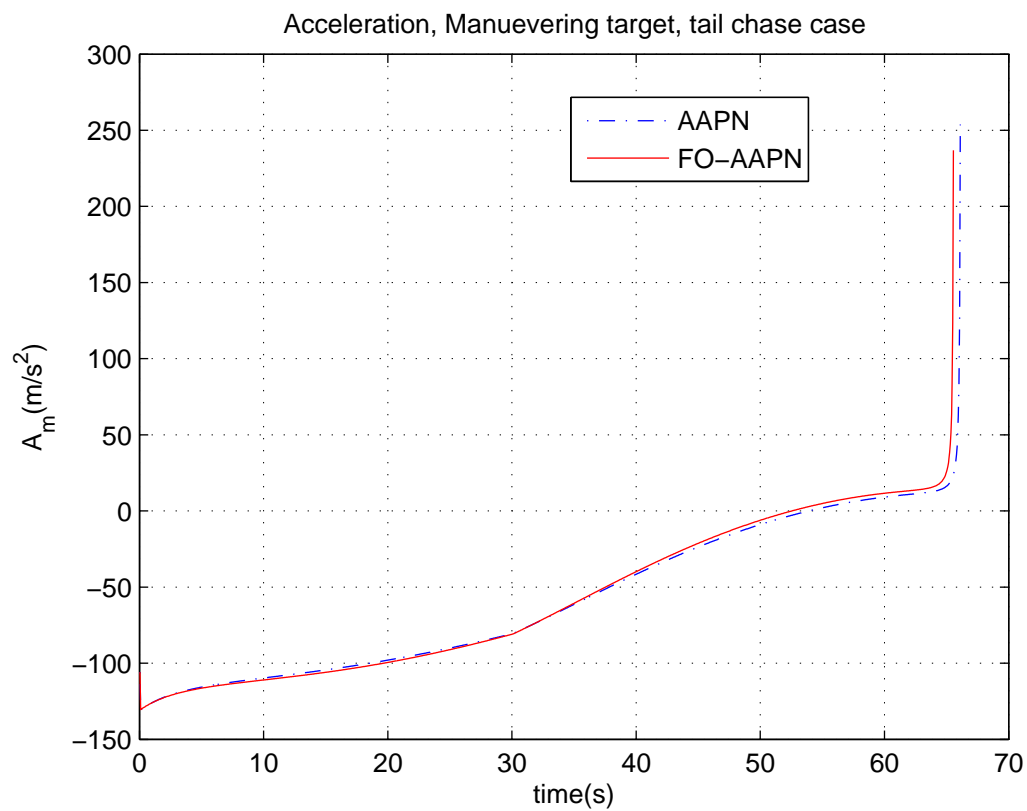


图 5.14 FO-AAPN/AAPN 律导引下导弹法向加速度变化曲线 (导弹尾随追击机动目标)

表 5.9 导弹尾随追击机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
AAPN	66.15	130.83	100
FO-AAPN ($\alpha = 0.995$)	65.60	130.44	99.92

始的 30sec 内以加速度 $-10m/s^2$ 机动飞行, 在后来的 30sec 至 75sec 内以加速度 $10m/s^2$ 机动飞行, 其他时间不作任何机动。导弹则以恒定速率尾随追击飞行目标。对比分析 FO-AAPN 律和 AAPN 律作用下的制导效果。选择计算步长 0.001, 此时最优分数阶微分阶次 $\alpha = 0.950$ 。图5.15为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹和目标的运动轨迹图。图5.16为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹法向加速度 A_m 变化曲线。表5.10为导弹前向截击机动目标情况下分别采用 FO-AAPN 律和 AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 、最大控制量 $|A_m|_{\max}$ 和代价函数 J 的对比结果。仿真分析表明, 导弹前向截击机动目标的情况中, 采用 FO-AAPN 律导引的导弹的拦截时间 t_f 比 AAPN 律缩短了 7.31%。最大加速度 $|A_m|_{\max}$ 是 AAPN 律的 1.002 倍。其代价函数 J 为 AAPN 律的 96.48%。

表 5.10 导弹前向截击机动目标情况

	$t_f(s)$	$ A_m _{\max}(m/s^2)$	$J(\%)$
AAPN	44.40	130.96	100
FO-AAPN ($\alpha = 0.95$)	41.15	131.28	96.48

综合考虑导弹尾随追击和前向截击两种情况, FO-AAPN 律在一定程度上缩短了拦截时间, 而最大控制量变化不大, 整体性能指标有所提升。因此, 对于机动目标 FO-AAPN 律的导引效果比 AAPN 律稍好。

5.4 本章小结

本章在分数阶微积分理论框架下对传统比例导引律中的 PPN 律和 AAPN 律进行了重新研究。提出了全新的分数阶比例导引律, 包括 FO-PPN 律和 FO-AAPN 律。对 FO-PPN 律和 FO-AAPN 律的导引关系式和数值实现方法进

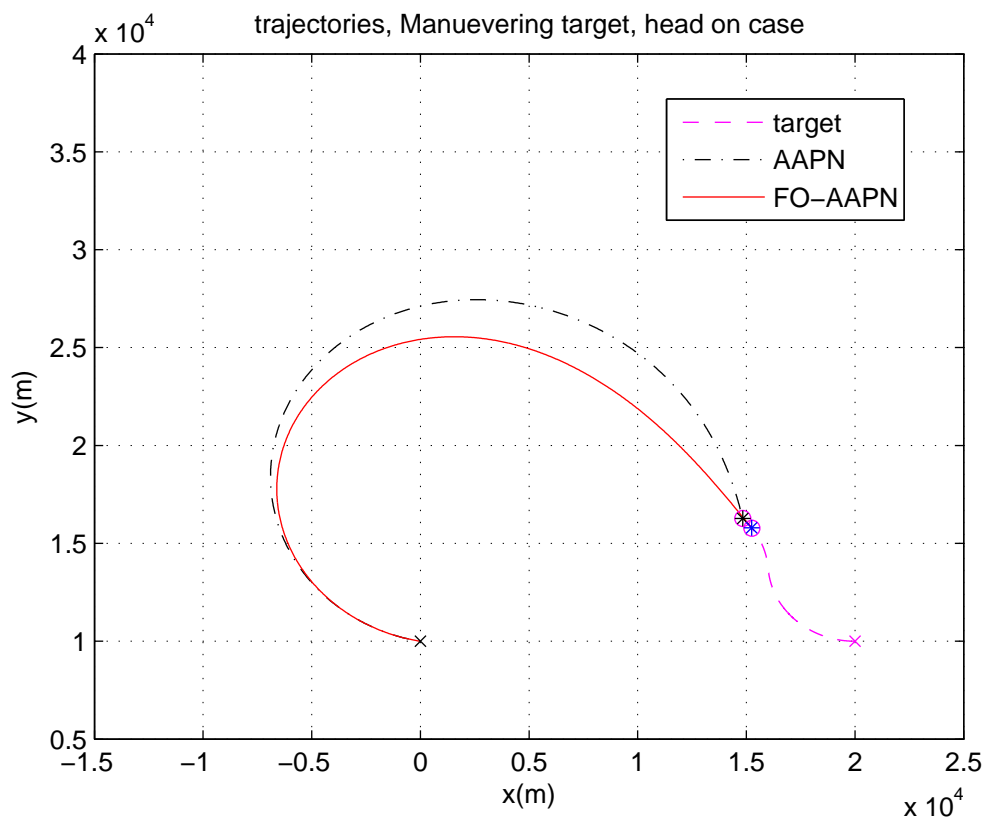


图 5.15 FO-AAPN/AAPN 律引导下导弹和目标的运动轨迹图 (导弹前向截击机动目标)

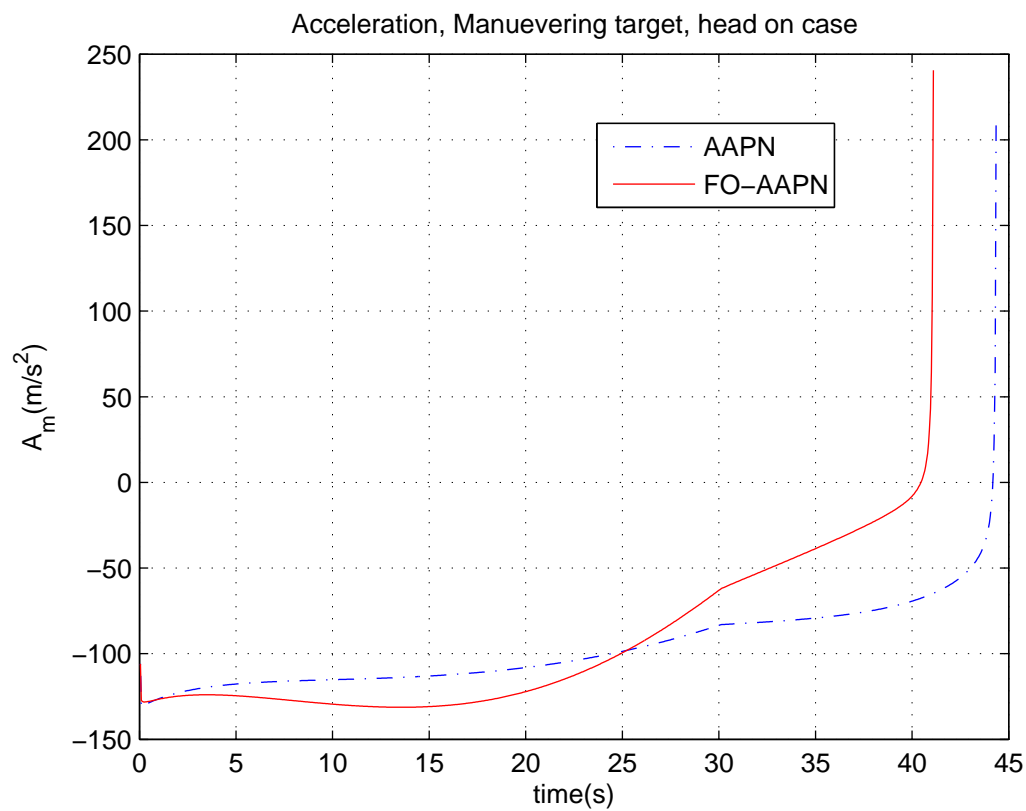


图 5.16 FO-AAPN/AAPN 律引导下导弹法向加速度变化曲线 (导弹前向截击机动目标)

行了深入研究。对导弹尾随追击非机动目标，前向拦截非机动目标，尾随追击机动目标以及前向拦截机动目标四种情况下的分数阶比例导引律与传统比例导引律的导引性能进行了仿真对比分析。仿真分析表明，分数阶比例导引律拦截时间更短，性能指标更优，因此其总体导引性能比传统的比例导引律更好。

第六章 结束语

比例导引律是发展非常成熟的一种导弹导引律，目前被广泛应用于很多实际战术导弹的制导系统中。关于比例导引律的改进研究以及改进后导引性能分析一直以来就是导弹导引律研究的重要课题。本文通过将分数阶系统理论引入导弹导引律的问题研究之中，提出了分数阶修正纯比例导引律 (FO-MPPN)、分数阶纯比例导引律 (FO-PPN) 和分数阶全方位比例导引律 (FO-AAPN)，并对导引性能分析与传统的基于整数解微积分的比例导引律进行仿真对比研究。

6.1 本文的主要贡献

1. 提出了分数阶修正纯比例导引律 (FO-MPPN)，给出了 FO-MPPN 律的导引关系式和数值实现方法，证明得到了 FO-MPPN 律的捕获性定理，对其捕获性能进行仿真分析验证。

对于导弹拦截具有时变法向加速度机动的目标问题，基于分数阶微积分理论首次提出了一种新的 FO-MPPN 律。通过附加分数阶微分项，全局性的利用导弹飞行过程中的视线角的相关信息，缩短了导弹拦截时间，避免了命中点处导弹需用法向过载突变的问题，有效提升了导引律的导引性能。采用似李雅普洛夫函数对 FO-MPPN 律的捕获性能进行了严格证明，给出了 FO-MPPN 律捕获性定理。定理表明，对于满足一定条件的理想导弹在 FO-MPPN 律导引下一定可以命中机动目标。仿真对比分析对该定理的正确性进行了检验，同时对 FO-MPPN 律的有效性进行了验证。详见第四章。

2. 提出了分数阶纯比例导引律 (FO-PPN)，给出了 FO-PPN 律的导引关系式和数值实现方法，并通过仿真实例对比分析了 FO-PPN 律与纯比例导引律 (PPN) 的导引性能。

在分数阶微积分框架下对传统的 PPN 律进行重新研究。利用分数阶微积分的全局性等特点更大程度的充分利用导弹飞行过程中的相关信息。利用 Oustaloup 递推滤波器近似改进、连分式展开以及短记忆法等数值实现方法，给出了 FO-PPN 律离散化数值实现形式。通过对导弹尾随追击非机动目标、前向拦截非机动目标、尾随追击机动目标和前向拦截机动目标四种情况下的仿真，验证了 FO-PPN 律比传统的 PPN 律具有更好的导引性能。详见第五章。

3. 提出了分数阶全方位比例导引律 (FO-AAPN)，给出了 FO-AAPN 律的

导引关系式和数值实现方法,并通过仿真实例对比分析了 FO-AAPN 律与全方位比例导引律 (AAPN) 的导引性能。

在分数阶微积分框架下对传统的 AAPN 律进行重新研究。在 AAPN 律全方位使用导弹飞行过程中除视线角以外的其他信息的基础上,利用分数阶微积分的全局性等特点,提出了全新的 FO-AAPN 律,进一步提升导引律的导引性能。利用 Oustaloup 递推滤波器近似改进、连分式展开以及短记忆法等数值实现方法,给出了 FO-AAPN 律离散化数值实现形式。在导弹尾随追击非机动目标、前向拦截非机动目标、尾随追击机动目标和前向拦截机动目标四种情况下对 FO-AAPN 律和 AAPN 律的导引性能进行了对比仿真,仿真分析表明,FO-AAPN 律比传统的 AAPN 律具有更好的导引性能。详见第五章。

6.2 今后进一步的工作

1. 分数阶比例导引律导引性能的数学分析。

比例导引律的性能分析是导弹导引律研究的重点,目前已有较为成熟的结论。但是对分数阶比例导引律而言,尚无相关研究从数学角度对其导引性能进行严格推导和分析。为继续深入了解和认识分数阶比例导引律,加强和提升导弹导引律的导引效果,有必要对开展对其相关数学分析研究。

2. 在分数阶微积分理论框架下对传统的导弹导引律进行重新研究。

分数阶微积分理论是近年来控制领域的研究热点,在导航制导领域目前已有相关应用。但是在导引律方面,目前尚未相关应用报道。由于分数阶微积分是对整数阶微积分的推广,因此可以在分数阶微积分理论框架下重新研究一些经典的导弹导引律,如分数阶滑模导引律,分数阶 PID 导引律等等。

参考文献

- 雷虎民, 楼顺天, 陈新海. 1999. 一种攻击大机动目标的 PID 型比例导引律 [J]. 西北工业大学学报, 17(001):98–102.
- 张合新, 孟飞. 2003. 组合末制导律及其仿真研究 [J]. 火力与指挥控制 28(001):33–36.
- 王凤莲, 顾文锦. 2003. 反舰导弹变系数修正比例导引研究 [J]. 飞行力学, 21(1):51–54.
- 李新国, 方群. 2005. 有翼导弹飞行动力学 [M]. 西北工业大学出版社.
- 张邦楚. 2005. 基于分数阶微积分的飞航式导弹控制系统设计方法研究 [D]. 南京理工大学.
- 张邦楚, 王少锋, 韩子鹏 等. 2005. 飞航导弹分数阶 PID 控制及其数字实现 [J]. 宇航学报, 26(005):653–656.
- 王飞, 雷虎民. 2010. 基于分数阶微积分 PD^λ 比例导引制导规律 [J]. 控制理论与应用, 27(1):126–130.
- 秦昌茂, 齐乃明. 2010. 高超声速飞行器再入分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 姿态控制 [J]. 火箭与制导学报, 30(4):26–28.
- 廖增, 彭程, 王永 等. 2011. 分数阶系统时域子空间辨识 [J]. 信息与控制, 40(5):658–663.
- Becker K. 1990. Closed-form solution of pure proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 26(3):526–533.
- Ben-Asher Z J, Yaesh I. 1998. Advances in Missile Guidance Theory[M]. American Institute of Aeronautics & Astronautics.
- Brierley D S, Longchamp R. 1990. Application of sliding-mode control to air-air interception problem[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 26(2):306–325.
- Chakravorthy A, Ghose D. 1996. Capturability of realistic generalized true proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 32(1):407–418.
- Cochran E J, No S T, Thaxton G D. 1988. Analytical solutions to a guidance problem[C]//Astrodynamics 1987. 94–100.
- Das S. 2008. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls[M]. Springer, New York.
- Das S. 2011. Functional fractional calculus[M]. Springer Verlag.
- de Espíndola J J, da Silva Neto J M, Lopes E M O. 2005. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement[J]. Applied mathematics and computation, 164(2):493–506.

- Fossen I T. 1994. Guidance and Control of Ocean Vehicles[M]. Wiley, New York.
- Ghawghawe N S, Ghose D. 1996. Pure proportional navigation against time-varying target manoeuvres[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 32(4):1336–1347.
- Ghose D. 1994a. On the generalization of true proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 30(2):545–555.
- Ghose D. 1994b. True proportional navigation with maneuvering target[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 30(1):229–237.
- Guelman M. 1971. A qualitative study of proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, (4):637–643.
- Guelman M. 1972. Proportional navigation with a maneuvering target[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, (3):364–371.
- Guelman M. 1973. Missile acceleration in proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, (3):462–463.
- Guelman M. 1976. The closed-form solution of true proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, (4):472–482.
- Guelman M, Shinar J. 1984. Optimal guidance law in the plane[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 7:471–476.
- Ha J I, Hur S J, Ko S M, et al. 1990. Performance analysis of PNG laws for randomly maneuvering targets[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 26(5):713–721.
- Hull D, Radke J, Mack R. 1991. Time-to-go prediction for homing missiles based on minimum-time intercepts[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 14:865–871.
- Kim B K, Kim J M, Kwon H W. 2000. Receding horizon guidance laws with no information on the time-to-go[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 23(2).
- Lin F C. 1991. Modern navigation, guidance, and control processing[M]. Prentice Hall.
- Lin L C, Chen Y Y. 2000. Design of fuzzy logic guidance law against high-speed target[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 23(1):17–25.
- Mahapatra R P, Shukla S U. 1989. Accurate solution of proportional navigation for maneuvering targets[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 25(1):81–89.
- Mainardi F. 1997. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics[M]. Springer Verlag.
- Mehrandezh M, Sela M N, Fenton G R, et al. 2000. Robotic interception of moving objects using an augmented ideal proportional navigation guidance technique[J]. Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on, 30(3):238–250.

- Monje A C, Chen Q Y, Vinagre M B, et al. 2010. Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications[M]. Springer.
- Moon J, Kim Y. 2000. Design of missile guidance law via variable structure control[C]//Proceedings of the AIAA Guidance Navigation and Control Conference, Denver, Colorado.
- Nazaroff J G. 1976. An optimal terminal guidance law[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 21:407.
- Nesline W F, Zarchan P. 1979. A new look at classical versus modern homing missile guidance[C]//Guidance and Control Conference. 230–242.
- Oshman Y, Rad A D. 2006. Differential-game-based guidance law using target orientation observations[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 42(1):316–326.
- Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. 2000. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis[J]. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 47(1):25–39.
- Podlubny I, Petráš I, Vinagre M B, et al. 2002. Analogue realizations of fractional-order controllers[J]. Nonlinear dynamics, 29(1):281–296.
- Pritz T. 2003. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials[J]. Journal of Sound and Vibration, 265(5):935–952.
- Raghunathan T, Ghose D. 2010. An online-implementable differential evolution tuned all-aspect guidance law[J]. Control Engineering Practice, 18(10):1197–1210.
- Shima T, Idan M, Golan M O. 2006. Sliding-mode control for integrated missile autopilot guidance[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 29(2):250–260.
- Shinar J, Shima T. 1999. Guidance Law Evaluation in Highly Non-linear Scenarios-Comparison to Linear Analysis[C]//Guidance, Navigation and Control Conference in AIAA.
- Shenydor A N. 1998. Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics & Control[M]. Horwood Pub Ltd.
- Shukla S U, Mahapatra R P. 1988. Generalized linear solution of proportional navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 24(3):231–238.
- Sim C Y, Leng B S, Subramaniam V. 2000. An all-aspect near-optimal guidance law[J]. Dynamics and Control, 10(2):165–177.
- Siouris M G. 1974. Comparison between proportional and augmented proportional navigation[J]. Nachrichtentechnische Zeitschrift: 278–280.
- Song H S, Ha J I. 1994. A Lyapunov-like approach to performance analysis of 3-dimensional pure PNG laws[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 30(1):238–248.

- Tahk J M, Ryoo K C, Cho H. 2002. Recursive time-to-go estimation for homing guidance missiles[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 38(1):13–24.
- Time H. to Go Prediction for Homing Missiles Based on Minimum—time Intercepts IJ[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics S, 73:1–5090.
- Vinagre M B, Chen Q Y. 2002. Fractional calculus applications in automatic control and robotics[C]//41st IEEE Conference on decision and control Tutorial Workshop.
- Vinagre M B, Chen Q Y, Petras I. 2003. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator[J]. Journal of the Franklin Institute, 340(5):349–362.
- Xue D, Zhao C, Chne Q Y. 2006. A modified approximation method of fractional order system[C]//Mechatronics and Automation, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on. 1043–1048.
- Yang C. 1987. The closed-form solution of generalized proportional navigation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10:216–218.
- Yang D C, Chen Y H. 1998. Nonlinear H_{∞} robust guidance law for homing missiles[J]. J Guid Control Dyn, 21(6):882–890.
- Yang D C, Yang C C. 1996. Analytical solution of three-dimensional realistic true proportional navigation[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 19(3):569–577.
- Yang M S. 1996. Analysis of optimal midcourse guidance law[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 32(1):419–425.
- Yuan J P, Chern S J. 1992. Ideal proportional navigation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 15(5):1161–1165.
- Yuan J P, Hsu C S. 1995. Solutions of generalized proportional navigation with maneuvering and nonmaneuvering targets[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 31(1):469–474.
- Zarchan P. 1999. Ballistic missile defense guidance and control issues[J]. Science & Global Security, 8(1):99–124.
- Zarchan P. 2002. Tactical and strategic missile guidance.[J]. Progress in Astronautics and Aeronautics, 199:1–695.

致 谢

光阴荏苒，日月如梭，硕士研究生生活已近尾声。在中国科学技术大学三年的学习生活中，我得到了很多的关怀和帮助。值此学位论文完稿之际，请容许我对他们表达诚挚的谢意。

首先，我要感谢我的导师王永教授。回顾三年的求学生涯，王老师在工作上和生活上都给予了我无私的帮助和支持。王老师知识渊博、思维敏捷，他的精心点拨常常使我茅塞顿开；王老师宽仁博爱、虚怀若谷，他的关心照顾令我倍感温暖。他严谨的治学态度和精益求精的工作作风将一直影响和激励我，他对我的关心和教诲我更将永远铭记。借此机会，我谨向王老师致以深深地敬意和诚挚的感谢。

感谢实验室的梁青老师、邵长星老师、周烽老师给予过我的关心和指点，特别感谢彭程老师对我科研工作的悉心指点和无私帮助。感谢实验室师兄郭志伟、李旺、张洋、陈绍青、姚太克、张雷，同学魏璀璨、周林、许凤麟、朱敏、韩飞，以及振动控制与运动体控制实验室的所有师弟师妹们，能在这样一个积极向上、和谐融洽的团队中度过研究生生涯，我深感荣幸。感谢 SA0910 的所有同学，我会铭记我们一起走过的青春岁月和那些充满欢声笑语的日子。

感谢我的男友廖增，他的关心和鼓励，给予我极大的信心和动力。

最后，感谢我敬爱的父母，他们含辛茹苦，为我的成长倾注了最大的心血，正是他们的无私关爱和默默奉献，才有了女儿的今天，他们的支持将永远鼓励着我，是我不断前进的动力。

寥寥数言，难表寸心，谨以此文感谢所有帮助过我的老师、同学和朋友们。

朱竹婷

2012 年 5 月 7 日

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文:

1. 朱竹婷, 廖增, 彭程, 王永. 一种分数阶修正比例导引律. 控制理论与应用 (已录用)
2. 王永, 朱竹婷, 张雷, 彭程. 弹性体导弹的预见跟踪控制. 第 30 届中国控制会议, CCC 2011. 烟台, 中国.<EI: 20113914369049>
3. Zhuting Zhu, Zeng Liao, Shu Liang, Cheng Peng, Yong Wang. Subspace-based identification for fractional order time-delay systems. The 31st Chinese Control Conference, CCC 2012. Hefei, China.(已录用)
4. 王永, 廖增, 彭程, 梁舒, 朱竹婷. 分布阶次系统时域子空间辨识. 控制与决策. (已录用)
5. Zeng Liao, Zhuting Zhu, Shu Liang, Cheng Peng, Yong Wang. Fractional order systems identification based on subspace method in time-domain. The 5th IFAC Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications. Nanjing, China, 2012.