

# 数字信号处理大作业

xuan

## 一、任务

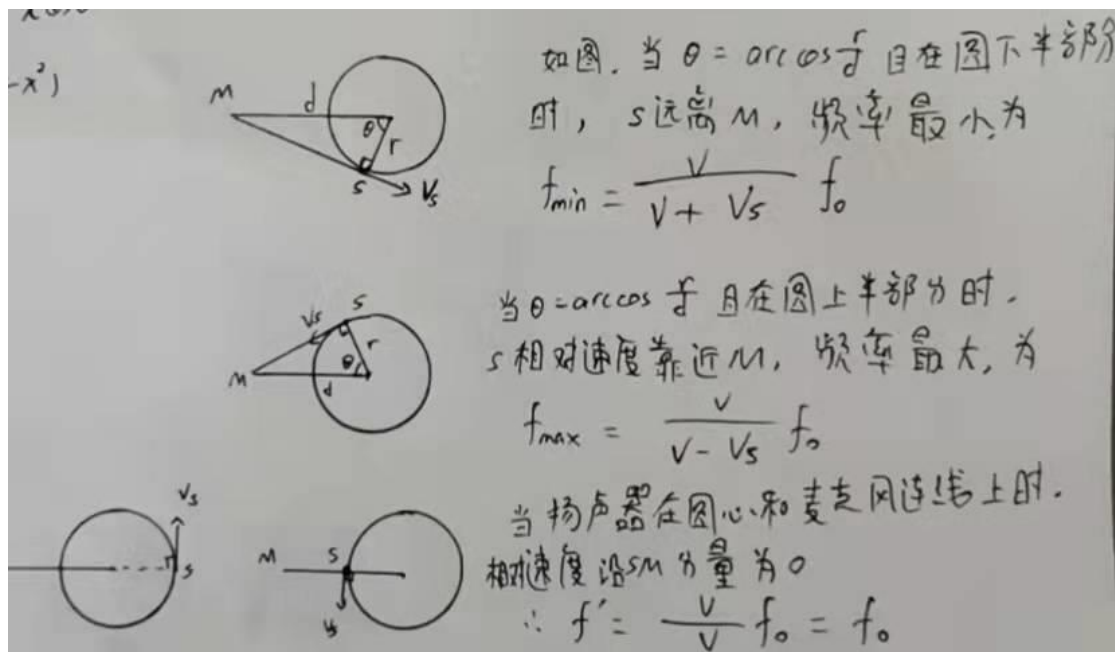
### 1. 问题 1

当速度方向与扬声器和麦克风的连线垂直时,  $v_s$  径向分量为 0, 接收后的频率等于播发频率  $f_0$

当速度方向与扬声器和麦克风的连线平行时,  $v_s$  沿着径向, 若速度方向远离麦克风, 则为最

小频率  $f_{\min} = \frac{v}{v+v_s} f_0$

若速度方向靠近麦克风, 则为最大频率  $f_{\max} = \frac{v}{v-v_s} f_0$



### 2.1 理论计算

观察者 (Observer) 的观测频率  $f$  和发射源 (Source) 的发射频率  $f_0$  关系为

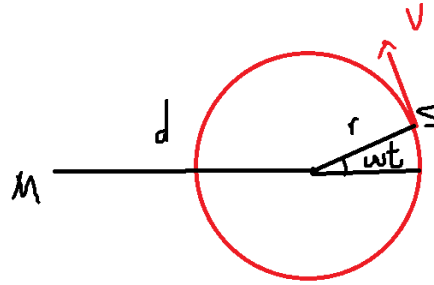
$$f = \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} f_0$$

其中  $v$  为波在传播介质中的传播速率;  $v_o$  为观察者相对传播介质沿二者连线的运动速率, 向源移动时符号取正;  $v_s$  为发射源相对传播介质沿二者连线的运动速率, 远离观察者时符

号取正

由  $f_{\max} = \frac{v}{v-v_s} f_0$ ,  $f_{\min} = \frac{v}{v+v_s} f_0$ , 若已知  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$  可联立解得  $v_s = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{f_{\max}+f_{\min}} v$ ,  $f_0 = \frac{2f_{\max}f_{\min}}{f_{\max}+f_{\min}}$ 。

由半径  $r = \frac{v_s T}{2\pi}$ , 角速度  $\omega = \frac{v_s}{r}$ , 若已知运动的周期时间  $T$ , 则可解出  $r, \omega$ , 不妨设运动起始点如下



则有

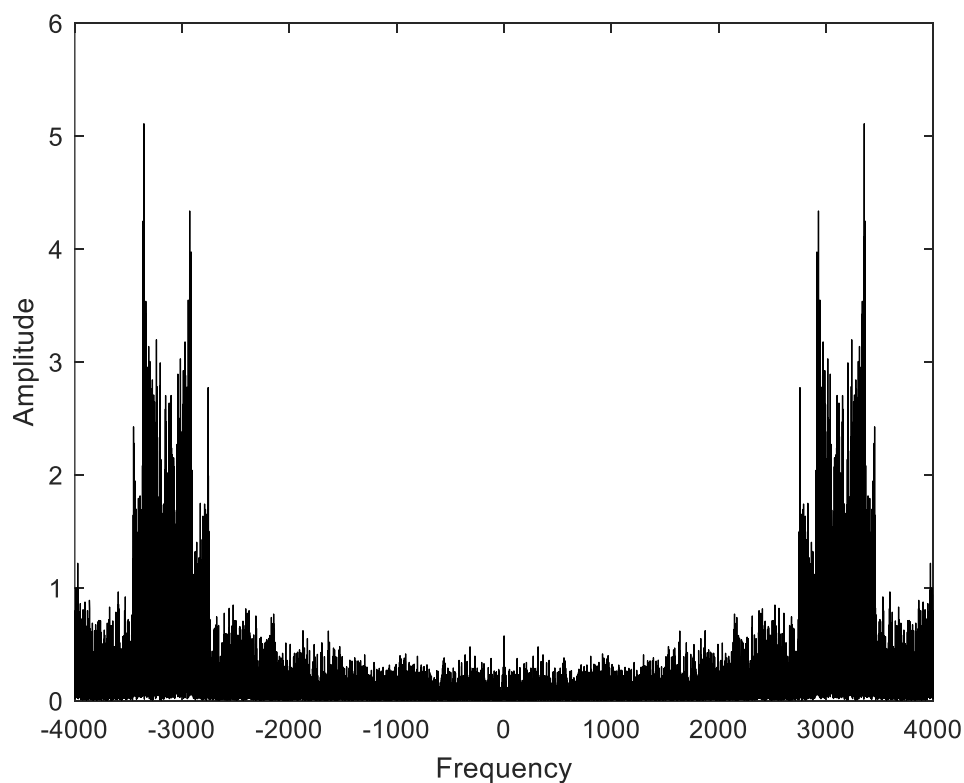
$$f = \frac{v}{v - \frac{v_s d \sin \omega t}{\sqrt{r^2 + 2dr \cos \omega t + d^2}}}$$

当  $f = f_{\max}$  或  $f = f_{\min}$  时, 有  $\frac{d \sin \omega t}{\sqrt{r^2 + 2dr \cos \omega t + d^2}} = \pm 1$  即  $\cos \omega t = -\frac{2dr}{2d^2} = -\frac{r}{d} < 0$ , 对应的时间差

$$\Delta t = \frac{2\pi - 2\arccos(-\frac{r}{d})}{\omega} = \frac{2\arccos(\frac{r}{d})}{\omega}, \text{若已知 } \Delta t, \text{ 可求出 } d = \frac{r}{\cos \frac{\omega \Delta t}{2}}$$

## 2.2 程序说明及数据处理

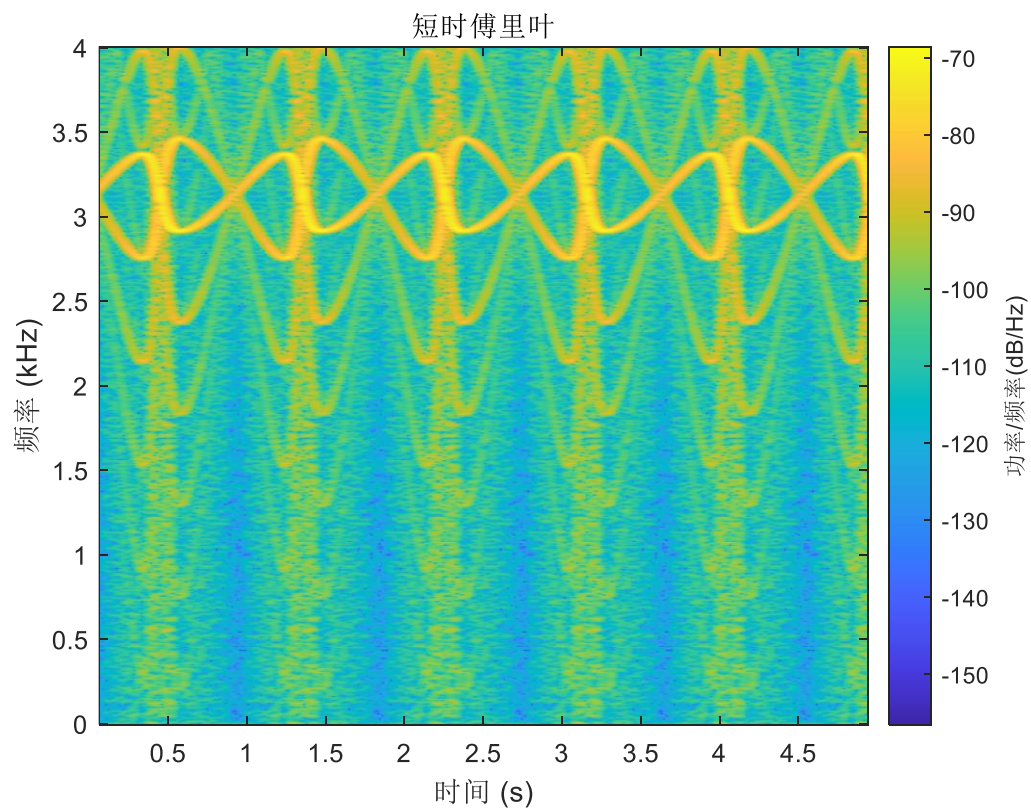
用 audioread 读取音频和采样率, 对音频信号作 fft 并把零频移到中心 (由 nyquist 准则频率需小于采样率的一半才有效)。得到频谱图如下, 可知频率主要集中在 2800-3500 左右, 其他均为噪声分量



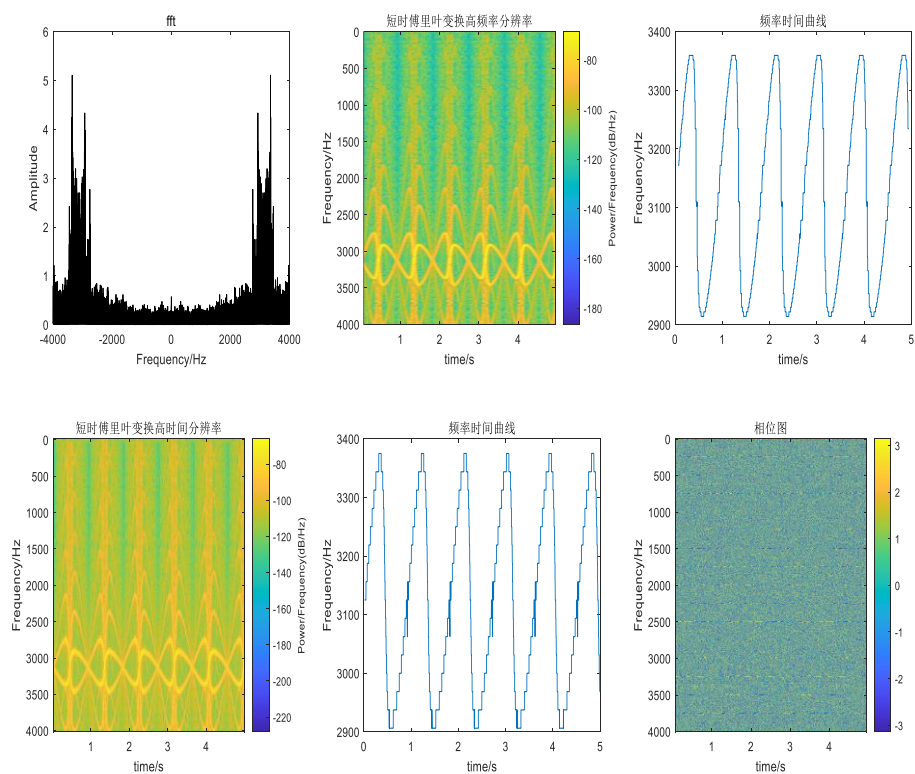
通过频谱图仅能得到最大最小频率，即算出  $v_s$  和  $f_0$ ，为得到运动周期  $T$  和最大最小频率的时间差  $\Delta t$ ，进而得到  $r$  和  $d$ ，还需得到频率随时间的变化关系。可通过短时傅里叶变换求得，在 matlab 中有专门的函数 `[S1,F1,T1,P1]`

`=spectrogram(x>window,noverlap,nfft,fs)`。其中  $x$  为音频信号， $window$  为加的窗的窗长，窗口越长时间分辨率越差，频率分辨率越好。反之时间分辨率好，频率分辨率差。本次实验为求得最大最小频率可先用较大的窗长 1024 确保频率分辨率，再用较小的窗长 256 得到较大的时间分辨率，进而提高  $T$  和  $\Delta t$  的准确度。

$Noverlap = window - wstep$ ;  $wstep$  为每次平移的步长，最小为 1。越小图像时间精度越好，但计算量大。本次数据量较小，可选择 1 确保时间精度。 $Nfft$  为短时傅里叶点数，一般等于  $window$ 。短时傅里叶图如下，发现每个时间点对应的幅度较大的频率有多个，我认为应选择幅度最大的频率作为这个时间点的频率，可通过查找输出  $P$  来实现。



最终得到的结果和图像如下



求得  $f_{\max}=3359.4\text{Hz}$ ;  $f_{\min}=2914.1\text{Hz}$ ;  $v_s = 24.1345\text{m/s}$ ;  $f_0=3120.9\text{Hz}$ ;  
 $r=3.457\text{m}$ ;  $w=6.9813\text{rad/s}$ ;  $\Delta t=0.222\text{s}$ ;  $d=4.8386\text{m}$

### 3.1 设计方案及理论证明

首先用 4 个扬声器一定能实现

建立二维直角坐标系，已知扬声器位置为  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ 、 $(x_4, y_4)$ ，发射频率均为  $f_0$ （若工程上难区分可用 4 个差别较大的发射频率，则在短时傅里叶变换的频率-时间谱上某时刻有差别明显的 4 条频率谱线），麦克风接收到的频移为  $\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3, \Delta f_4$ ；声波速度为  $v$ 。要求的是其某时刻位置为  $(x, y)$ ，速度矢量为  $(v_x, v_y)$ ，

由多普勒频移公式，有

$$\frac{\Delta f_i v}{f_0} = \frac{v_x(x - x_i) + v_y(y - y_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, (i = 1, 2, 3, 4)$$

由 4 个方程可联立解出 4 个未知数  $v_x, v_y, x, y$ ，即在四维空间  $(x, y, v_x, v_y)$  中通过 4 个超平面可唯一确定一点  $(x, y, v_x, v_y)$

Matlab 具体实现方法和 (2) 类似，先对一段音频信号进行 fft 分析，确定主频率，滤除噪声分量，再用 `spectrogram` 函数进行短时傅里叶分析，得到频率-时间图，对每个时间点有 4 个多普勒频率，从而计算出频移  $\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3, \Delta f_4$

### 3.2 设计方案及理论证明

然后我开始思考能否减少扬声器的数量到 3 个。考虑到实际采样率高，时间间隔

$\Delta t$  很小时，麦克风可看做匀速直线运动。设扬声器位置为  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ ，发射频率为  $f_0$ ，声波速度为  $v$ 。 $t_1$  时刻麦克风位置为  $(x, y)$ ，速度矢量为  $(v_x, v_y)$ 。麦克风接收到的频移为  $\Delta f_{11}, \Delta f_{21}, \Delta f_{31}$ ，则有

$$k_{i1} = \frac{\Delta f_{i1} v}{f_0} = \frac{v_x(x - x_i) + v_y(y - y_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, (i = 1, 2, 3)$$

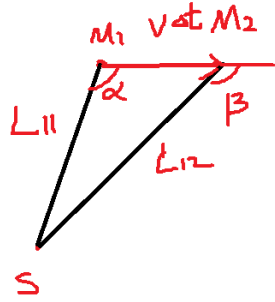
其中  $L_{i1} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  为  $t_1$  时刻麦克风和各扬声器的距离

$t_1 + \Delta t$  时刻(即下一个采样点)因可看做匀速直线运动，速度矢量仍为  $(v_x, v_y)$ ，位置为

$(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t)$ ，麦克风接收到的频移为  $\Delta f_{12}, \Delta f_{22}, \Delta f_{32}$ ，则有

$$k_{i2} = \frac{\Delta f_{i2} v}{f_0} = \frac{v_x(x + v_x \Delta t - x_i) + v_y(y + v_y \Delta t - y_i)}{\sqrt{(x + v_x \Delta t - x_i)^2 + (y + v_y \Delta t - y_i)^2}}, (i = 1, 2, 3)$$

其中  $L_{i2} = \sqrt{(x + v_x \Delta t - x_i)^2 + (y + v_y \Delta t - y_i)^2}$  为  $t_1 + \Delta t$  时刻麦克风和各扬声器的距离。如下图所示，



则有  $L_{i2} \approx L_{i1} + v\Delta t \approx L_{i1}$ , 所以

$$\Delta k_i = k_{i2} - k_{i1} = \frac{(\Delta f_{i2} - \Delta f_{i1})v}{f_0} \approx \frac{v_x(x + v_x\Delta t - x_i) + v_y(y + v_y\Delta t - y_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} - \frac{v_x(x - x_i) + v_y(y - y_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)\Delta t}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = \frac{v^2\Delta t}{L_{i1}}$$

即  $\frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{\Delta k_1}{\Delta k_2}$  可确定一条二维曲线,  $\frac{L_{31}}{L_{11}} = \frac{\Delta k_1}{\Delta k_3}$  可确定另一条二维曲线, 利用曲线交点即可确定  $t_1$  时刻的麦克风位置坐标, 确定位置坐标, 形成多于两点的轨迹后, 再通过不同时刻点的轨迹确定速度大小和方向。因为在各种定位方法中, 位置精度一般远低于速度精度。

### 3.3 设计方案及理论证明

还可以利用差分多普勒原理来进一步提高位置坐标的精度。假设二维麦克风 T 位置为  $(x, y)$ , 以一个扬声器为原点 O 建立二维直角坐标系, 另外两个扬声器 S1, S2 坐标

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 向量 OT 的方向余弦为  $(\cos\alpha, \cos\beta)$ , 则  $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;

设麦克风运动速度为  $v = (v_x \cos\theta, v_y \cos\varphi)$ , 则其方向余弦为  $(\cos\theta, \cos\varphi)$ 。类似地, 在  $\Delta t$  时间内, 可认为其做匀速直线运动。向量 OT 与  $v$  的夹角  $\gamma$  的余弦  $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\theta + \cos\beta \cos\varphi$ ;

对扬声器  $S_i$ , 向量  $OS_i = (x_i, y_i)$ ,  $S_i T = (x - x_i, y - y_i)$ . 则  $S_i T$  的方向余弦

$$(\cos\alpha_i, \cos\beta_i) \text{ 为 } \cos\alpha_i = \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, \cos\beta_i = \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}},$$

向量  $S_i T$  与速度  $v$  的夹角  $\gamma_i$  的余弦为  $\cos\gamma_i = \cos\alpha_i \cos\theta + \cos\beta_i \cos\varphi$

设发射频率  $f$ , 声速为  $v_{\text{声}}$ , 则麦克风接收到 O 的频率为  $f_0 = f + \frac{v \cos\gamma}{v_{\text{声}}} f$ , 多普勒频移  $\Delta f_0 =$

$$\frac{v \cos\gamma}{v_{\text{声}}} f, \text{ 同理, 对扬声器 } S_i, f_i = f + \frac{v \cos\gamma_i}{v_{\text{声}}} f, \text{ 多普勒频移 } \Delta f_i = \frac{v \cos\gamma_i}{v_{\text{声}}} f$$

所以 O 和  $S_i$  的多普勒频差为  $\Delta f_{0i} = \Delta f_0 - \Delta f_i = \frac{v}{v_{\text{声}}} f [(\cos\alpha - \cos\alpha_i) \cos\theta + (\cos\beta - \cos\beta_i) \cos\varphi], (i = 1, 2)$ 。

即通过三个扬声器，根据差分多普勒定位原理，若麦克风同时接收到可分辨的三个扬声器发出的信号，即可得到两个多普勒频差，即可在二维平面上确定两条曲线，曲线的交点即为麦克风的位置解。从上式可看出，该方程组为非线性，所以存在多解，还需结合实际情况和辅助因素（如初值，测向），即可得到麦克风真实位置解。

以上分析是先假定了麦克风的运动方向为已知值，而题目中麦克风运动速度是未知的需要求解的，可以在预处理时先通过测向定位或时差定位法获得麦克风相邻两点位置，从而计算出速度大小和方向。因为在定位中位置精度一般远小于速度精度，所以上述粗略的估计速度方向精度基本可满足差分多普勒定位要求，形成多于两点的轨迹后，再用差分多普勒定位法重新计算更精确的速度大小和方向，修正初始条件，可不断迭代以增进精度。

Matlab 实现与上述方案基本相同，在此不赘述。

## 二、总结

这一次的课程设计让我自己动手，实现了数字信号处理这门课的知识在卫星多普勒定位技术的具体应用和实践。之前我对 FFT、窗函数、FIR 滤波器、傅里叶变换等都只是停留在理论方面的公式硬算，但是经过这次大作业，对于其中一些步骤和为什么要应用它，怎么具体用 matlab 实现都有了更清楚的了解，而且也真切地体会到了 dsp 在生活中的无处不在，令我受益匪浅。

## 三、文件清单

文件名称	说明
e1.m	对问题 2 的具体实现
Sound.wav	输入音频文件