2016-2017 高等数学 B1 期末

1、（8 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{n+k}{n^2}}$。

$$\mathrm{f}(x)=\frac{a}{1+x},\ f'(x)=-\frac{a}{(1+x)^2},\ f(x)=a-\frac{a}{(1+\theta x)^2}x$$

$$\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\le\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{n+k}{n^2}}=\frac{k}{n}-\frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\theta\frac{n+k}{n^2}\right)^2}\frac{n+k}{n^2}\le\frac{k}{n}(n\ge 1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{n+k}{n^2}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$$

2、（8 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$。

解：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{(1+\cos\sqrt{x})x\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(1+\cos\sqrt{x})\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{2}。$$

3、求反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$ 的值。

解：$\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$

$B=1, A=-1, C=1$

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

$$\int\frac{1}{x^2(x+1)}dx=-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\ln(x+1)-\frac{1}{x}-\ln x+C$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x}-\ln x\right]_1^{+\infty}=1-\ln 2$$

4、（8 分）求函数 $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的间断点并判断其类型。

解：让 $x^2-4x+3=0$ 解得 $x_1=1, x_2=3$。全部间断点就这两点。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\infty, \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=3$$

$x_1=1$ 是第二类的无穷间断点；$x_2=3$ 是第一类的可去间断点。

5、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$。

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{1+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$。

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}。$$

$$\lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}\right) = \lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x^2} - \lim_{x\to0}\frac{2x^2}{1+x^4}$$

$$= \frac{\pi}{2} = f'(0)$$

$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续。

6、（8 分）设 $f(2+x^4) = \ln\frac{5+2x^4}{x^4-1}$，且 $f(g(x)) = \ln(x+1)$，求积分 $\int g(x)dx$。

解：$f(2+x^4) = \ln\frac{5+2x^4}{x^4-1} = \ln\frac{1+2(2+x^4)}{(2+x^4)-3}$。

$$f(g(x)) = \ln\frac{1+2g(x)}{g(x)-3} = \ln(x+1)$$

$$\frac{1+2g(x)}{g(x)-3} = x+1$$

$$g(x) = \frac{3x+4}{x-1}$$

$$\begin{cases}\frac{3x+4}{x-1} \geq 2 \\ x+1 > 0\end{cases} \Rightarrow x \geq -1$$

$$g(x) = \frac{3x+4}{x-1}(x \geq -1)$$

$$\int g(x)dx = \int\frac{3x+4}{x-1}dx = \int\left(3+\frac{7}{x-1}\right)dx = 3x + 7\ln|x-1| + C(x \geq -1)$$

7、（8 分）求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程。

解：$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ 两边微分得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy = 0$，

$dy = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, k_{切} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1, k_{割} = 1$。

切线方程：$y = -x + \sqrt{2}$；割线方程：$y = x$。

8、（8 分）求解微分方程 $\begin{cases} y'' + y = 2xe^x + 4\sin x \\ y(0) = y'(0) = 0\end{cases}$。

解：特征方程 $t^2 + 1 = 0$ 的根 $\pm i$。

$y'' + y = 0$ 的通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。

$y'' + y = 2xe^x$, $m = 1, \lambda = 1$。$\lambda = 1$ 不是特征方程的解。设 $y_1* = (Ax + B)e^x$。

$y_1*' = (Ax + B + A)e^x$, $y_1*'' = (Ax + B + 2A)e^x$ 。代入 $y'' + y = 2xe^x$ 得

$2Ax + 2B + 2A = 2x$。得 $A = 1, B = -1$。$y_1* = (x - 1)e^x$。

$y'' + y = 4\sin x, \lambda = 0, n = l = 0, \varpi = 1, m = 0$。$\lambda + \varpi i$ 是特征方程的根。设

$y_2* = x(A\cos x + B\sin x)$ 。$y_2*' = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$ ，

$y_2*'' = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x$ 。代入 $y'' + y = 4\sin x$ 得

$2B\cos x - 2A\sin x = 4\sin x, B = 0, A = -2, y_2* = -2x\cos x$。

$y* = (x - 1)e^x - 2x\cos x$。

$y'' + y = 2xe^x + 4\sin x$ 的通解

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x - 1)e^x - 2x\cos x$。

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + (x - 1)e^x + e^x - 2\cos x + 2x\sin x$。

由 $y(0) = y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 2$。方程的特解：

$y = \cos x + 2\sin x + (x - 1)e^x - 2x\cos x$。

9、（10 分）设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(t - x)| dt (0 < x < 1)$，求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y = f(x)$ 的凸凹区间。

解：$(0 < x < 1)$ 时，

$$f(x) = \int_0^1 |t(t - x)| dt = \int_0^x t(x - t)dt + \int_x^1 t(t - x)dt$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$ 。

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

让 $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2} = 0$ 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

$$f'(x)=x^2-\frac{1}{2}\begin{cases}>0, & 1>x>\frac{1}{\sqrt{2}}\\ <0, & 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}。$$

单调增加区间是$[\frac{1}{\sqrt{2}},1)$；单调减少区间是$(0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$。无极大值。极小值

$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$。

$f''(x)=2x>0(0<x<1)$。无上凸区间；下凸区间$[0,1)$。

10、（8 分）设函数$f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求积分$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$。

解：$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)dx$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-x^2+2x}dx=-\frac{1}{3}e\int_0^1(x-1)^3e^{-(x-1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{6}e\int_0^1(x-1)^2e^{-(x-1)^2}d(x-1)^2=\frac{1}{6}e\int_0^1te^{-t}dt$$

$$=-\frac{e}{6}te^{-t}\Big|_0^1-\frac{e}{6}e^{-t}\Big|_0^1=\frac{e}{6}-\frac{1}{3}$$

11、（8 分）把曲线$y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$绕 x 轴旋转得到一个旋转体，它介于$x=0$和$x=\xi$之间的体积记作$V(\xi)$，求a等于何值时，能使$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)$。

解：$V(\xi)=\pi\int_0^\xi\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^\xi=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right)$。

$V(a)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)$，$\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{\pi}{4}$

$a=1$

$a=1$时，能使$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)$。

12、（5 分）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，证明$f(x)$在区间$[a,b]$上有原函数。

证：记$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt(x \in [a, b])$。则

$\Phi'(x) = f(x)\ (x \in (a, b))$
$\Phi'_+(a) = f(a), \Phi'_-(b) = f(b)$。

可见，$f(x)$在区间$[a, b]$上有原函数$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt(x \in [a, b])$。

13、（5 分）设函数$f(x)$在区间$[0, c]$上连续，在$(0, c)$内可导，且$f'(x)$为x的递减函数。若$f(0) = 0$，证明：对于任意a, b满足$0 \le a \le b \le a + b \le c$都有$f(a + b) \le f(a) + f(b)$。

证：对于任意给定的a, b满足$0 \le a \le b \le a + b \le c$，记$F(x) = f(a + x) - f(a) - f(x)\ (c \ge x \ge 0)$。$F(x)$在$[0, c]$上连续，在$(0, c)$内可导。

$F'(x) = f'(a + x) - f'(x) \le 0(c > x > 0)$（$f'(x)$为$x$的递减函数。）$F(x)$在$[0, c]$上单调减少。$F(b) = f(a + b) - f(a) - f(b) \le F(0) = 0(f(0) = 0)$。故，$f(a + b) \le f(a) + f(b)$。