线性代数复习

第一章：行列式

一、 逆序数

1. 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**。
2. 求解：依次查询排列中每个数字前比他大的数字个数，累加起来就是逆序数。

二、 行列式

1. 行列式是一个值，不是一个矩阵。设矩阵为 A，则 det（A）为或|A|行列式。
2. 计算：$D=\sum(-1)^k a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$，k 是 k1,k2,…,kn 排列的逆序数
3. 性质：
   1) $D=D^T$
   2) 互换两行或两列，行列式变为原值的相反数
   3) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
   $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
   4) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变。

三、 代数余子式

1. 在 n 阶行列式中，划去元 aij 所在的第 i 行与第 j 列的元，剩下的元不改变原来的顺序所构成的 n-1 阶行列式称为元 aij 的余子式。数学表示上计作 M_{ij} 。
2. a_{ij} 的代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。
3. 行列式等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数式余子式乘积之和。
   D=ai1Ai1+ai2Ai2+......+ainAin (i=1,2,3,......n)；
   D=a1jA1j+a2jA2j+......+anjAnj (j=1,2,3,......n)。
4. 范德蒙特行列式计算：镶边法

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

第二章：矩阵

一、 矩阵性质

1. 满足分配律和结合律，不满足交换律
2. AB=0，则：
   若 A、B 均为非零矩阵，则 A、B 的行列式均为 0
   若有一个是可逆矩阵，则另一个是 0 矩阵
3. **转置矩阵性质：$(A+B)^T=A^T+B^T$　　$(AB)^T=B^TA^T$**
4. 对称矩阵：$A^T=A$
5. 对 n 阶方阵 A 的行列式：
   $|\lambda A|=\lambda^n A$　　　　$|AB|=|A||B|$　　　$|AB|\neq|BA|$
6. 数量矩阵：对角矩阵的对角线上的元相等

二、 矩阵的秩 R(A)

1. k 阶子式：在一个矩阵或行列式中取 k 行 k 列,交叉处的 k^2 个元素按原顺序构成的行列式
2. 最高阶非零子式：矩阵 A 有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 r+1 阶子式均为 0，则 D 是 A 的最高阶非零子式
3. 矩阵的秩：矩阵最高阶非零子式为 r 阶子式，r 为该矩阵的秩
4. **n 阶方阵等价的定义：**

   满秩矩阵==可逆矩阵==非奇异矩阵==标准型是 E==可表示为有限个初等方阵乘积==行/列向量组线性无关==特征值全不为 0==行列式不为 0

   降秩矩阵==不可逆矩阵==奇异矩阵==行/列向量组线性相关==特征值有 0==行列式为 0
5. **矩阵的秩的大小关系**
   R(AB)<=min{R(A),R(B)}<=max{R(A),R(B)}<=R(A|B)<=R(A+B) <= R(A)+R(B)
   其中，A|B 是 A 和 B 横向拼接

三、 矩阵变换

1. 矩阵的初等变换
   1) 某一行（列），乘以一个非零倍数。
   2) 某一行（列），乘以一个非零倍数，加到另一行（列）。
   3) 某两行（列），互换。
2. **矩阵等价**
   A 与 B 等价（A∽B）：A 经过有限次初等变换变为 B。**R(A)=R(B),|A|不一定等于|B|。**
3. **最简形矩阵**：矩阵满足（1）是阶梯形矩阵；（2）所有的非零行的第一个非零元素均为 1，且其所在列中的其他元素都是零。
   任何一个非零矩阵总可以经过有限次初等变换为阶梯形矩阵和最简阶梯形矩阵，**非零行行数为矩阵的秩。**
4. **标准形矩阵：矩阵的左上角是单位矩阵，其余三部分可以没有或者是 0**
   变换方法：先变为行最简形再变为列最简形
5. **逆矩阵：AB=BA=E，A 和 B 互为逆矩阵**

6. **逆矩阵性质：$(\lambda A)^{-1}=1/\lambda*A^{-1}$ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$**

7. **伴随矩阵 A^{*}：A 中各元的代数余子式转置后组成的矩阵**

   性质：

   1) **$A^{*}=|A|A^{-1}$(基本性质)**
   2) **$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$**
   3) **$|A^{*}|=|A|^{n-1}$**
   4) **$(A^{T})^{*}=(A^{*})^{T}$ $(A^{-1})^{*}=(A^{*})^{-1}$**
   5) **$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$**
   6) **$(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A$**
   7) **$R(A)=n$,则 $R(A^{*})=n$**
      $R(A)=n-1$,则 $R(A^{*})=1$
      $R(A)<n-1$,则 $R(A^{*})=0$

8. **正交矩阵：$AA^{T}=A^{T}A=E$**

   正交矩阵 A 的性质：

   1) **A^{*}正交**
   2) **$|A|=\pm1$**
   3) **A 可逆且 $A^{-1}=A^{T}$**

9. **求解矩阵（左行右列）**

   1) **$AX=B$: $(A\quad B)\longrightarrow(E\quad X)$**
   2) **$XA=B$: $(A\quad B)^{T}\longrightarrow(E\quad X)^{T}$**

10. 增广矩阵：系数矩阵 A|等号右侧常数项 B

    R(A)<R(A|B)：方程组无解

第三章：线性方程组

一、 齐次线性方程组

1. 定义：Ax=0 向量，A 是系数矩阵，x 是（列）解向量
2. 解的性质（方程组有 n 个变量）：
   1) R(A)<n：存在非零解
   2) R(A)=n：只有零解
3. 基础解系：齐次线性方程组的 k 个解向量满足向量组线性无关，解空间中其他向量都可以用这 k 个向量线性表示，则这 k 个解向量构成基础解系。

二、 非齐次线性方程组

1. 定义：Ax=b（非零向量）
2. 相容：方程组有解，即：系数矩阵和增广矩阵的秩相等；否则不相容
3. 相容方程组的解的性质（方程组有 n 个变量）：
   1) R(A)<n：存在无穷多解
   2) R(A)=n：唯一解

第四章：向量空间

一、 **向量（列向量）**

1. 向量 a,b 的内积(a,b)=a·b=a1b1+a2b2+……+anbn，是数值。
   向量内积为 0 则两向量正交
2. 向量 a 的模||a||=a 各方向分量的平方和开根
3. 柯西施瓦茨不等式：$(a,b)^2<=(a,a)(b,b)$

二、 **线性相关**

1. **对于 m 个 n 维向量 a1,a2,···,am，若存在一组不全为零的常数 b1,b2,···bm，使得 a1b1+a2b2+···+anbn=零向量，则这组向量线性相关，否则线性无关。**
2. 上述表达于向量组中至少一个向量可以用其余的向量线性表示。
3. **最大/极大线性无关组和秩：**
   向量组 T 中选取其中 r 个向量，若这些向量线性无关而加上其他任一向量都线性相关，则这 r 个向量是 T 的一个最大线性无关组，r 是 T 的秩。

三、 **正交向量组**

1. **正交向量组：不含 0 向量的向量组中任两个向量正交**
   标准正交向量组：向量均为单位向量的正交向量组
   正交向量组线性无关
2. **方阵 A 是正交矩阵==A 的行/列向量组是标准正交向量组**
3. **施密特标准正交化**
   1) **作用：将线性无关的向量组变为其等价的标准正交向量组**
   2) **步骤：**
      1. **正交化**

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$

$$\cdots$$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{\langle\alpha_m,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_m,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\cdots-\frac{\langle\alpha_m,\beta_{m-1}\rangle}{\langle\beta_{m-1},\beta_{m-1}\rangle}\beta_{m-1}$$

      2. **标准化**

$$e_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}(i=1,2,\cdots,m)$$

四、 向量空间

1. 定义：n 维向量构成的非空集合，定义的加法和数乘满足封闭性，且满足八条定律（如交换律、结合律、分配率等）
2. 向量空间的基和维数：

   义1 设 V 是一向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in V$ 且满足

   (1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性无关；

   (2) $\forall\beta\in V$，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性表出.

   则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基底(基)，而 r 称为向量空间 V 的维数，记为 $\dim V=r$

   其中，若这个向量组构成的是单位矩阵，则称其为自然基。
3. 过渡矩阵：可逆，右乘过渡矩阵可以进行基变换。

第五章：矩阵的相似对角化

一、 特征值

1. 对方阵 A 满足：$Ax=\lambda x$ 或$(A-\lambda E)x=0$ 向量，其中 x 为非零向量，则：
   x 为特征向量，λ为特征值。非方阵没有特征值和特征向量。
2. 特征值性质
   1) 特征值个数等于方阵 A 的阶数，但可能有重根或复数根
   2) AB 的特征值与 BA 相同，A 和其转置矩阵的特征值相同，但特征矩阵不一定相同
   3) 一个特征值对应无穷多的特征向量，但一个特征向量只对应一个特征值
   4) 所有特征值（包括重复的）的乘积=|A|
   5) 所有特征值（包括重复的）的和=方阵 A 对角线元素和（矩阵的迹）
   6) 若λ是可逆方阵 A 的特征值，则 1/λ是 A^{-1} 的特征值，特征向量不变
   7) 若λ是方阵 A 的特征值，则λ^k 是 A^k 的特征值（k 为正整数），特征向量不变
   8) 若特征值各不相等，则对应的特征向量线性无关
3. 特征值和特征向量计算
   1) $|A-\lambda E|=0$（特征多项式），解得对应的所有λ即所有的特征值
   2) 回代各λ进$(A-\lambda E)x=0$，解特征向量 x
4. 特征值和特征向量的意义
   1) 如果矩阵对某一个向量或某些向量只发生**伸缩变换**，不对这些向量产生旋转的效果，那么**这些向量就称为这个矩阵的特征向量，伸缩的比例就是特征值。**
   2) 求特征向量，**就是把矩阵 A 所代表的空间进行正交分解**，使得 A 的向量集合可以表示为每个向量 a 在各个特征向量上的投影长度。我们通常求特征值和特征向量即为求出这个矩阵能使哪些向量只发生拉伸，而方向不发生变化，观察其发生拉伸的程度。这样做的意义在于，**看清一个矩阵在哪些方面能产生最大的分散度（scatter），减少重叠，意味着更多的信息被保留下来。（PCA）**

二、 相似矩阵

1. 设 A，B 为 n 阶矩阵，如果有 n 阶可逆矩阵 P 存在，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 与 B 相似，记为 A~B，P 为把 A 变成 B 的相似变换矩阵。
2. 相似矩阵的性质：
   1) 特征值相同，行列式相同
   2) 相似矩阵是等价矩阵的真子集
   3) N 个特征值互不相等，则 A 与对角矩阵相似；
      有相等的特征值，A 不一定能相似对角化

三、 矩阵的相似对角化

1. 目的：相似对角化后，对角线的值就是矩阵的 A 的 n 个特征值
2. 只有实对称矩阵能正交相似对角化：
   设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有**正交矩阵 P**，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$，其中Λ是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵。
3. 求实对称矩阵 A 的正交相似对角化矩阵 B 步骤：
   1) 求 A 的 n 个（全部）特征值
   2) 对每个特征值求解其特征向量并将其正交化、标准化
   3) 这 N 个列向量按序拼接成对应的变换矩阵 P，通过 $P^{-1}AP$ 求得正交对角矩阵 B

四、 n 阶方阵的等价叙述：

n 个特征值互不相等(不一定可逆)→n 个特征向量线性无关==矩阵 A 能相似对角化

第六章：二次型及其标准形

一、　二次型与标准型

1. **二次型：下侧的二次齐次函数**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

2. **二次型的矩阵：实对称矩阵**

其中 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$.

称 $f(x)=X^TAX$ 为**二次型的矩阵形式**. 其中实对称矩阵 A 称为该二次型的矩阵.二次型 f 称为实对称矩阵 A 的二次型. 实对称矩阵 A 的秩称为二次型的秩. 于是，二次型 f 与其实对称矩阵 A 之间有一一对应关系.

3. **标准形（法式）：只含平方项的二次型，各项系数是各个特征值**
4. 规范形：标准形中的系数只含±1 和 0
5. **矩阵合同：设 A,B 是两个 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 C，使得$C^TAC=B$，则称方阵 A 与 B 合同，记作 A≃B。**
6. **合同矩阵性质：**
   1) **合同矩阵是等价矩阵，他们的秩相同**
   2) **合同矩阵的正负惯性系数相同（充要条件）**

二、　二次型化为其标准形

1. **特征值法**
   1) **写出二次型矩阵 A**
   2) **将 A 相似对角化，求得正交的变换矩阵 C**
   3) **按定义，$C^TAC=B$，B 为变换后的标准型**
2. **拉格朗日配方法**
3. **初等变换法**
4. **特点：变换后的二次型不唯一，但含的项数（二次型的秩）确定**
5. 惯性定理：二次型化为标准型时系数为正的平方项个数（正惯性指数）p 和系数为负的平方项个数（负惯性指数）q 固定不变，p+q=二次型的秩，p-q=符号差

三、　**正定矩阵**

1. 定义：设对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，若对 $\forall x\in R^n$ 且 x 不全为 0 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型，对称矩阵 A 为正定矩阵。
2. **N 阶实对称矩阵 A 是正定矩阵的充要条件：**
   1) **$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$化成的标准型正惯性指数为 n。**
   2) **A 的特征值全为正。**
   3) **A 与单位矩阵 E 合同。**
   4) **A 的各阶顺序主子式均为正。**

3. 方阵 A 的 K 阶顺序主子式：A 左上角处的 k 阶方阵。

四、 负定矩阵

1. 定义：正定矩阵>0 的条件改为<0
2. N 阶实对称矩阵 A 是正定矩阵的充要条件：
   1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$化成的标准型负惯性指数为 n。
   2) A 的特征值全为负。
   3) A 的偶数阶顺序主子式均为正，奇数阶顺序主子式均为负。

五、 半正/负定矩阵

1. 定义：正/负定矩阵>0/<0 的条件改为>=0/<=0。
2. N 阶实对称矩阵 A 是半正/负定矩阵的充要条件：

   $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$化成的标准型正/负惯性指数为 R(A)。

六、 不定矩阵

1. 定义：非半正/负定矩阵
2. N 阶实对称矩阵 A 是不定矩阵的充要条件：

   $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$化成的标准型正、负惯性指数都大于 0。

总结

一、 两组等价表述

1. 满秩矩阵==可逆矩阵==非奇异矩阵==标准型是 E==可表示为有限个初等方阵乘积==行/列向量组线性无关==特征值全不为 0==行列式不为 0；
   降秩矩阵==不可逆矩阵==奇异矩阵==行/列向量组线性相关==特征值有 0==行列式为 0
2. n 个特征值互不相等（不一定可逆）→n 个特征向量线性无关==矩阵 A 能相似对角化

二、 矩阵的关系

1. 等价：A 经过有限次初等变换变为 B。R(A)=R(B),|A|不一定等于|B|。
2. 相似：设 A，B 为 n 阶矩阵，有 n 阶可逆矩阵 P 存在，使得 $P^{-1}AP=B$。
3. 合同：设 A，B 为 n 阶矩阵，有 n 阶可逆矩阵 P 存在，使得 $P^TAP=B$。
4. 可见：
   1) 相似矩阵和合同矩阵都属于等价矩阵
   2) 若可逆矩阵 P 是正交的（$P^{-1}=P^T$），则 A 和 B 既是相似矩阵又是合同矩阵，常见于实对称矩阵的正交相似对角化

三、 特殊矩阵

1. 对角矩阵：只有对角线上有元素，**各元素是各个特征值**
2. **最简形矩阵**：矩阵满足（1）是阶梯形矩阵；（2）所有的非零行的第一个非零元素均为

1，且其所在列中的其他元素都是零。

3. **标准形矩阵：矩阵的左上角是单位矩阵，其余三部分可以没有或者是 0**
4. **二次型的标准形：只含平方项的二次形，各项系数是各个特征值**
5. **二次型的**规范形：标准形中的系数只含±1 和 0
6. **逆矩阵 A^{-1}：AB=BA=E，A 和 B 互为逆矩阵**
7. **伴随矩阵 A^*：A 中各元的代数余子式转置后组成的矩阵，$A^*=|A|A^{-1}$**
8. **正交矩阵：$A^{-1}=A^T$，$AA^T=A^TA=E$**
9. **增广矩阵：系数矩阵 A|等号右侧常数项 B**
10. 相容矩阵：增广矩阵的方程组有解
11. **线性相关矩阵：对于 m 个 n 维向量 a1,a2,⋯,am，若存在一组不全为零的常数 b1,b2,⋯bm，使得 a1b1+a2b2+⋯+anbn=零向量，则这组向量线性相关，否则线性无关。**
12. 过渡矩阵：可逆，右乘过渡矩阵可以进行基变换。
13. **（半）正定/负定矩阵：见第六章**

四、 常见算法步骤

1. **求非零矩阵的标准形：先变为行最简形再变为列最简形**
2. **求解矩阵（左行右列）**
   1) **AX=B: (A B)—>(E X)**
   2) **XA=B: $(A\ \ B)^T$—>$(E\ \ X)^T$**
3. **求逆矩阵：$A^*=|A|A^{-1}$或参照 $AA^{-1}=E$**
4. **求可逆矩阵/向量组的标准正交矩阵/向量组（按列）**
   1) **正交化**

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$
$$\cdots$$
$$\beta_m=\alpha_m-\frac{\langle\alpha_m,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_m,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\cdots--\frac{\langle\alpha_m,\beta_{m-1}\rangle}{\langle\beta_{m-1},\beta_{m-1}\rangle}\beta_{m-1}$$

   2) **标准化**

$$e_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}(i=1,2,\cdots,m)$$

5. **求特征值和特征向量**
   1) **|A-λE|=0（特征多项式），解得对应的所有λ即所有的特征值**
   2) **回代各λ进(A-λE)x=0，解特征向量 x**
6. **求实对称矩阵 A 的正交相似对角化矩阵 B**
   1) **求 A 的 n 个（全部）特征值（上 5）**
   2) **对每个特征值求解其特征向量并将其正交化、标准化（上 4、5）**
   3) **这 N 个列向量按序拼接成对应的变换矩阵 P，通过 $P^{-1}AP$ 求得正交对角矩阵 B**
7. **二次型化为其标准形**
   1) **写出二次型矩阵 A**
   2) **将 A 相似对角化，求得正交的变换矩阵 C（上 6）**
   3) **按定义，$C^TAC=B$，B 为变换后的标准型**