高数上册复习考试

第一章 函数与极限

一、函数

1．认识一些常用函数和初等函数.

2．求函数的自然定义域。

二、极限

1．极限的计算

（1）善于恒等化简和极限的四则运算法则
（2）常用的计算方法
（a）常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(n)}\right]^{f(n)}=e$

（$f(n)\to\infty$），$\lim\limits_{n\to\infty}[1+g(n)]^{\frac{1}{g(n)}}=e$（$g(n)\to 0$），$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin f(n)}{f(n)}=1$（$f(n)\to 0$）。

（b）一些常用的处理方法
(i)分子分母都除以 n 的最高次幂。

例如：$\frac{2n^6+4n^3+7n^2}{n^6+6n^5-n^3}=\frac{2+4\frac{1}{n^3}+7\frac{1}{n^4}}{1+6\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}$，$\frac{2n^4+4n^3+7n^2}{n^6+6n^5-n^3}=\frac{2\frac{1}{n^2}+4\frac{1}{n^3}+7\frac{1}{n^4}}{1+6\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}$

$$\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^4+5n^3}}=\frac{\sqrt{1+3\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+5\frac{1}{n}}}$$

(ii)根号差的消除。

例如：$\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$，$\frac{h(n)}{\sqrt{f(n)}-\sqrt[3]{g(n)}}=$

$$\frac{h(n)\left[\left(\sqrt{f(n)}\right)^5+\left(\sqrt{f(n)}\right)^4\sqrt[3]{g(n)}+\left(\sqrt{f(n)}\right)^3\left(\sqrt[3]{g(n)}\right)^2+\left(\sqrt{f(n)}\right)^2\left(\sqrt[3]{g(n)}\right)^3+\sqrt{f(n)}\left(\sqrt[3]{g(n)}\right)^4+\left(\sqrt[3]{g(n)}\right)^5\right]}{[f(n)]^3-[g(n)]^2}$$

(iii)指数函数的极限。

$$\lim_{n\to\infty} u(n)^{v(n)} = \left[\lim_{n\to\infty} u(n)\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} v(n)}$$ （$\lim\limits_{n\to\infty} u(n) > 0, \lim\limits_{n\to\infty} v(n)$都存在）。

(iv)利用指数函数的极限。

当$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$时，

$$\lim_{n\to\infty}[f(n)]^{g(n)} = \lim_{n\to\infty}[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}[f(n)-1]g(n)} = \lim_{n\to\infty}\left\{[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}}\right\}^{[f(n)-1]g(n)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-1]g(n)}$$

(v)转化为函数的极限可以用洛必达法则。

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(vi)利用两边夹原理。

把$f(n)$分别缩小、扩大一点点得简单的$g(n)$、$h(n)$，$g(n) \le f(n) \le h(n)$，

使容易求得$\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(n) = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$。

（c）当x_n用递归式给出时

（i）用数学归纳法证明$\{x_n\}$是单调有界的，从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$存在；

（ii）对x_n的递归式两边取极限得关于A的方程，再解出A。

（d）记得一些等价关系

当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ 时，

$\sin f(n) \sim f(n)$，$\tan f(n) \sim f(n)$，$\arcsin f(n) \sim f(n)$，$\arctan f(n) \sim f(n)$

$1-\cos f(n) \sim \frac{1}{2}[f(n)]^2$，$[1+f(n)]^a \sim a[f(n)]$，$e^{f(n)}-1 \sim f(n)$，

$\ln[1+f(n)] \sim f(n)$

（3）函数极限的计算

（a）（2）中常用的计算方法对函数的六种极限都仍然适用。

（b）如果已知$f(x)$在x_0点连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

（c）记得一些等价关系。（lim 表示六种极限之一）

当 $\lim f(x) = 0$ 时，

$\sin f(x) \sim f(x)$，$\tan f(x) \sim f(x)$，$\arcsin f(x) \sim f(x)$，$\arctan f(x) \sim f(x)$

$1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$，$[1+f(x)]^a \sim a[f(x)]$，$e^{f(x)}-1 \sim f(x)$，

$\ln[1+f(x)]\sim f(x)$

（d）（lim 表示六种极限之一）

当 $\lim f(x)=1$ 时，

$$\lim[f(x)]^{g(x)} = \lim[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]g(x)} = \lim\left\{[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)} = e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$

（e）利用两边夹原理。

把 $f(x)$ 分别缩小、扩大一点点得简单的 $g(x)$、$h(x)$，$g(x)\le f(x)\le h(x)$，

使容易求得 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$。

（f）不定式的极限（lim 表示六种极限之一）

(i)当极限是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式时，可用洛必达法则：

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

（洛必达法则可以反复应用，但每次应用都要先检查类型。）

(ii)对于 0∞ 型的不定式，先变形，再用洛必达法则。

$$\lim f(x)g(x)= \lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim\frac{[g(x)]'}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'} = \lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\frac{[f(x)]'}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}$$

(iii)对于 0^0、1^∞、∞^0 型的不定式。

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim\frac{[\ln f(x)]'}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}}$$

(iv)对于 $\infty-\infty$ 型的不定式，先计算成一个式子再计算。

（g）如果 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0$，则 $\lim g(x)=0\Leftrightarrow \lim f(x)=0$。

2．极限的证明

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\mathrm{A}$ 的格式

证．$\forall\varepsilon>0$，

（打草稿从不等式 $|f(n)-A|<\varepsilon$ 解出 $n>N(\varepsilon)$（必要时将 $|f(n)-A|$ 放大一点点得一个简单的 $g(n)>|f(n)-A|$，再从 $g(n)<\varepsilon$ 解出 $n>N(\varepsilon)$））　　（*）

取 $N=N(\varepsilon)$。当 $n>N$ 时，

（由 $n>N$ 正确推出 $|f(n)-A|<\varepsilon$（一般是（*）的倒推））

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\mathrm{A}$。

证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ 的格式

证．$\forall\varepsilon>0$，

（打草稿从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 解出 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$（必要时将 $|f(x)-A|$ 放大一点点得一个简单的 $g(x)>|f(x)-A|$，再从 $g(x)<\varepsilon$ 解出 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$）） （*）

取 $\delta=\delta(\varepsilon)$。当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

（由 $|x-x_0|<\delta$ 正确推出 $|f(x)-A|<\varepsilon$（一般是（*）的倒推））

故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$。

（其它类型极限的证明格式完全类似。）

（2）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在但不管它是什么。

用数学归纳法证明 $f(n)$ 单调并且有界，再根据单调有界原理得出结论。

三、连续性和间断点

1．$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x_0)=f(x_0)$

要证明 $f(x)$ 在 x_0 点连续就是要证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；如果 x_0 是分段点，则要证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x_0)=f(x_0)$。

2．间断点。

（1）找间断点

如果 $f(x)$ 在 x_0 的两边都有定义但 $f(x_0)$ 没有定义，则 x_0 是 $f(x)$ 的间断点；分段函数的分段点可能是它的间断点。

（2）间断点分类

（a）如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点并且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在，则 x_0 是第一类间断点。

（b）如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在，则 x_0 是第二类间断点。

（c）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在（即$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x_0)$都存在），但$f(x_0)$没有定义或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，则$x_0$是可除间断点。重新定义$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$可使$x_0$变成连续点。

3．闭区间上连续函数的性质

（1）零点存在定理。（2）介值定理。（3）最值定理。

第二章 导数与微分

一、导数的计算

1. 用定义计算导数

当要求导的函数不是初等函数时，比如分段函数的分段点或函数没有具体表示式时，直接用定义计算它在x_0点的导数。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. 用求导公式计算导数

当要求导的函数是初等函数时，用求导公式和复合函数求导法求导数。要记熟用熟相关公式。

3. 复合函数求导

（1）一次复合

如果$y=f(u),u=\varphi(x),y=f(\varphi(x))$，则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\left[f(\varphi(x))\right]'=\frac{d}{dx}f(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

（2）多次复合

如果$y=f(u),u=\varphi(x),x=\psi(t),y=f(\varphi(\psi(t)))$，则

$$\frac{dy}{dt}=\left[f(\varphi(\psi(t)))\right]'=\frac{d}{dx}f(\varphi(\psi(t)))=f'(\varphi(\psi(t)))\varphi'(\psi(t))\psi'(t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

更多层次的复合函数的求导方法类推。

4. 隐函数求导

（1）一阶导数的求导步骤：

（a）把y看成x的函数时，$F(x,y)=0$是一个恒等式；

（b）用复合函数求导方法对恒等式$F(x,y)=0$两边对x求导（求导时记得y中有x）得新的恒等式$G(x,y,y')=0$；

（c）从 $G(x,y,y')=0$ 解出 $y'=D(x,y)$。

（2）要求二阶导数时，有两种方法：

（a）用复合函数求导方法恒等式 $G(x,y,y')=0$ 两边对 x 求导（求导时记得 y 和 y' 中都有 x）得新的恒等式 $H(x,y,y',y'')=0$，再从 $H(x,y,y',y'')=0$ 解出 $y''=E(x,y,y')$，最后代入 $y'=D(x,y)$ 得 $y''=E(x,y,D(x,y))$。

（b）用复合函数求导方法恒等式 $y'=D(x,y)$ 两边对 x 求导（求导时记得 y 中有 x）得 $y''=F(x,y,y')$，最后代入 $y'=D(x,y)$ 得 $y''=F(x,y,D(x,y))$。

更高阶导数的求导方法类推。

5．参数表示的函数求导

（1）$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 表示的函数 $y=y(x)$ 在 t 点的一阶导数

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

（2）要求二阶导数时，可对 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ p=y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$ 表示的函数 $p=p(x)$ 再次求导：

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}y'=\frac{dp}{dx}=\frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'_t}{\varphi'(t)}$$

更高阶导数的求导方法类推。

6．对数求导法

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]' \text{（复合函数求导法）}$$

二、高阶导数

1．常用函数的高阶导数

$$[p_n(x)]^{(m)} = \begin{cases} m!a_m + (m+1)\cdots 2a_{m+1}x + \cdots + n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n x^{n-m}, & m < n \\ n!a_n, & m = n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

其中 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$。

$$\left(e^x\right)^{(m)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(m)} = \sin(x + \frac{m\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(m)} = \cos(x + \frac{m\pi}{2})$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}$$

$$[\ln(1+x)]^{(m)} = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

2．莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

与二项式公式完全类似。

特别注意：当 u 是低次多项式时，公式中的项数很少，非常简单。

三、微分的计算

1．函数 $y = f(x)$ 在 x 点的微分

$$dy = f'(x)dx$$

2．当 $y = f(x), x = \varphi(t)$ 复合函数时，微分公式也是

$$dy = f'(x)dx$$

3．$\Delta y = dy + \circ(\Delta x) = f'(x)dx + \circ(dx)$，否则不可微。

四、可导、可微、连续的关系

可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续

但连续的函数不一定可导、可微。例如：y=|x|，x=0 点。

第三章 微分中值定理与导数的应用

一、导数的意义

$f'(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 点切线的斜率；如果 $s(t)$ 是路程函数，则 $s'(t)$ 是在时间 t 时的速度；如果 $v(t)$ 是速度函数，则 $v'(t)$ 是在时间 t 时的加速度。

二、中值定理

1．费马定理

如果 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，并且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$，即 x_0 是驻点。

费马定理是中值定理的基础。

2．罗尔定理

条件：$\begin{cases} f(x)\text{在闭区间}[\mathrm{a},\mathrm{b}]\text{上连续；} \\ f(x)\text{在开区间}(\mathrm{a},\mathrm{b})\text{内可导；} \\ f(a)=f(b) \end{cases}$

结论：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

罗尔定理的三个条件，如果缺少一个，结论就得不到保证。例如：

$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$； $f(x)=|x|,(|x|\le 1)$； $f(x)=x,(0\le x\le 1)$。

3．拉格朗日中值定理

条件：$\begin{cases} f(x)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续;} \\ f(x)\text{在开区间}(a,b)\text{内可导} \end{cases}$

结论：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

拉格朗日中值定理的两个条件，如果缺少一个，结论就得不到保证。例如：

$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$； $f(x)=|x|,(|x|\le 1)$。

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$x_0,x_0+\Delta x\in(a,b)$，则存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

其中 $\theta=\dfrac{\xi-x_0}{\Delta x}$ 是 ξ 的分比。这就是有限增量公式。

4． 柯西中值定理

条件：$\begin{cases} f(x)\text{和}F(x)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续；} \\ f(x)\text{和}F(x)\text{在开区间}(a,b)\text{内可导；} \\ \quad\text{在开区间}(a,b)\text{中}F'(x)\neq 0 \end{cases}$

结论：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$。

5． 中值定理的证明题。

方法是凑一个函数应用相应的中值定理。注意到：

$$\left[e^{f(x)}g(x)\right]'=e^{f(x)}g'(x)+e^{f(x)}f'(x)g(x)$$

$$\left[e^{\lambda x}g(x)\right]'=e^{\lambda x}g'(x)+\lambda e^{\lambda x}g(x)$$

$$\left[x^{\lambda}g(x)\right]'=x^{\lambda}g'(x)+\lambda x^{\lambda-1}g(x)$$

中有一项多一部分 $f'(x)$。

三、泰勒公式

1． 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项 $R_n(x)$ 的主要形式有

（1） 拉格朗日余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{，（}\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间）}$$

（2） 皮亚若余项

$$R_n(x)=\circ\left((x-x_0)^n\right)\text{。}$$

如果 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$，则，用 n 次泰勒多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

近似代替 $f(x)$ 产生的误差估计为

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

2．为备用，熟记一些常用函数的麦克劳琳公式（$x_0=0$ 的泰勒公式）

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+\frac{\sin\left[\theta x+\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$

3．用间接法写函数的泰勒公式

（1） 作变换 $t=x-x_0$： $f(x)=f(x_0+t)$；

（2） 写出 $f(x_0+t)$ 关于 t 的麦克劳琳公式：

（a） 适当恒等化简，把某组东西看成一个整体，使函数变成麦克劳琳公式已知的函数；

（b） 利用已知写出麦克劳琳公式；

（c） 整理。

（3） 代回变量 $t=x-x_0$。

4.用函数的泰勒公式求极限.

四、求极值、最值

1．极值问题

（1） 极值点的范围

根据费马定理， $f(x)$ 极值点的范围：全部导数不存在的点和 $f'(x)=0$ 的全部解。

（2） 求极值的步骤

（a） 求出 $f'(x)$ 不存在的全部点：$t_1,t_2,\cdots,t_n$；

求出 $f'(x)=0$ 的全部解：$x_1,x_2,\cdots,x_m$。

（b） 逐点用 $f'(x)$ 或 $f''(x_i)$ 判断 x_i 是否极值点，是极大值点还是极小值点；逐点用 $f'(x)$ 或定义判断 t_i 是否极值点，是极大值点还是极小值点。一定要有明确的结论。

用 $f'(x)$ 判断：

$$\begin{cases} \text{设}f(x)\text{在}x_i\text{点连续，在}x_i\text{的某去心领域内可导。} \\ \text{(i)若在}x_i\text{的左边附近}f'(x)>0\text{，在}x_i\text{的右边附近}f'(x)<0\text{，则}x_i\text{是}f(x)\text{的极大值点。} \\ \text{(ii)若在}x_i\text{的左边附近}f'(x)<0\text{，在}x_i\text{的右边附近}f'(x)>0\text{，则}x_i\text{是}f(x)\text{的极小值点。} \\ \text{(iii)若}f'(x)\text{在}x_i\text{的左右附近同号，则}x_i\text{不是}f(x)\text{的极值点。} \end{cases}$$

用 $f''(x_i)$ 判断：$\begin{cases} \text{设}f''(x_i)\text{存在且}f'(x_i)=0\text{。} \\ \text{(i)如果}f''(x_i)<0\text{，则}x_i\text{是}f(x)\text{的极大值点。} \\ \text{(ii)如果}f''(x_i)>0\text{，则}x_i\text{是}f(x)\text{的极小值点。} \end{cases}$

（c） 必要时求出极值。

2． 求最值

（1）一般情况

（a）最值点的范围

$f(x)$ 最值点的范围：全部导数不存在的点和 $f'(x)=0$ 的全部解以及端点。

（b）在 $[a,b]$ 上求最值的步骤

（i）求出 $f'(x)$ 不存在的全部点：$x_1,x_2,\cdots,x_m$；

求出 $f'(x)=0$ 的全部解：$t_1,t_2,\cdots,t_n$。

（ii） $f_{\max}=\max\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_m),f(t_1),\cdots,f(t_n)\}$

$f_{\min}=\min\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_m),f(t_1),\cdots,f(t_n)\}$

相应的点为相应的最值点。（如果求最值的区间是 $[a,b)$、$(a,b]$ 或 (a,b)，则没有的端点就不在考虑之内。）

（2）特殊情况

如果

（i）根据问题的实际能判断得知 $f(x)$ 的最大（小）值肯定在 (a,b) 内取得；

（ii）在 (a,b) 内 $f'(x)$ 不存在或 $f'(x)=0$ 只有一个点 x_0。

则 x_0 就是 $f(x)$ 的最大（小）值点。

五、单调区间，凸性、拐点，渐近线

1．单调区间

求单调区间的步骤：

（1）求出 $f'(x)$ 不存在和 $f'(x)=0$ 的全部点：$x_1,x_2,\cdots,x_m$。以 x_1、x_2、$\cdots$、x_m 为分点分成 $m+1$ 个小区间；

（2）$f(x)$ 在 $f'(x)\geq(>)0$ 的小区间中（严格）单调上升；在 $f'(x)\leq(<)0$ 的小区间中（严格）单调下降。

2．凸性、拐点

求凸性区间、拐点的步骤：

（1）求出 $f''(x)$ 不存在和 $f''(x)=0$ 的全部点：$x_1,x_2,\cdots,x_m$。以 x_1、x_2、$\cdots$、x_m 为分点分成 $m+1$ 个小区间；

（2）用 $f''(x)$ 判断每个小区间的凸性：

$$\begin{cases}\text{在}f''(x)>0\text{的小区间，}f(x)\text{(的图形）是下凸的。}\\ \text{在}f''(x)<0\text{的小区间，}f(x)\text{(的图形）是上凸的。}\end{cases}$$

（3）如果 x_i 左右两边的凸性相反，则 $(x_i,f(x_i))$ 是拐点；如果 x_i 左右两边的凸性相同，则 $(x_i,f(x_i))$ 不是拐点。

3．渐近线

（1）垂直渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的垂直渐近线。（可能不只一条。）

（2）斜渐近线（包括水平渐近线）

如果

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$$

则 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的渐近线。

4．曲率和曲率半径

$$K=\frac{|f''(x)|}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}，\ R=\frac{1}{K}$$

第四章 不定积分

1. 原函数

如果$F'(x)\equiv f(x)$，则$F(x)$称为$f(x)$的一个原函数。

2. 不定积分的概念

固定$f(x)$的随便一个原函数$F(x)$，$f(x)$的全部原函数$F(x)+C$称为$f(x)$的不定积分

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

其中C是任意常数，称为积分常数。因此

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),\ d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x)+C$$

3. 不定积分的计算

（1） 概说

计算$\int f(x)dx$就是要找到$f(x)$的随便一个原函数$F(x)$，然后就得

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

（2） 初等函数不定积分的计算

（a）首先要记熟用熟基本积分表和常用的积分表。

（b）千方百计地把要做的积分化为积分表中的积分。

（i）利用线性性计算不定积分

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C,\ \int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C$$

（ii）第一换元法

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)} + C$$

快速的第一换元法就是凑微分法：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

（iii）第二换元法

找一个适当的变换$x=\varphi(t)$，则

$$\int f(x)dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} + C$$

换元法的意义在于右边的积分比左边的积分简单。第二换元法主要用来解决一些积分困难。比如根号等。

困难	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sqrt{x^2-a^2}$	$\sqrt{x^2+a^2}$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$\sqrt{x},\sqrt[3]{x}$	分母x指数大
变换	$x=a\sin t$	$x=a\sec t$	$x=a\tan t$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$	$x=t^6$	$x=\frac{1}{t}$

什么难住你，就用换元法除掉它！

（iv）分步积分法

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \quad \left(\int \mathrm{udv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{vdu}\right)$$

原则：$u \xrightarrow{\text{变简单}} u', v' \xrightarrow{\text{不变复杂}} v$。$\frac{\text{反、对、幂、三、指}}{\text{u} \quad \text{v}'}$。

如果经几次分步积分又出现左边的积分，就用代数方法解出。

（v）当有ax^2+bx+c时

ⓐ如果$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$有实根，则拆开成两项

$$\int \frac{f(x)}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a(\alpha-\beta)}\int\left(\frac{f(x)}{x-\alpha}-\frac{f(x)}{x-\beta}\right)dx$$

ⓑ如果ax^2+bx+c没有实根，则先配方

$$\int \frac{f(x)}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{f\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)+\frac{b}{2a}\right]}{a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}d\left(x-\frac{b}{2a}\right)$$

（vi）有理函数的积分

ⓐ假分式（$m \ge n$）

先用多项式除法

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int h_{m-n}(x)dx + \int \frac{r_u(x)}{Q_n(x)}dx$$

其中$h_{m-n}(x)$是多项式，$u<n$。

ⓑ真分式（$m<n$）

①分解因式（设$Q_n(x)$的最高次系数是 1）

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_s)^{l_s}(x+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x+p_tx+q_t)^{k_t}$$

②待定系数分解

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\underbrace{\frac{A_1^1}{(x-a_1)}+\cdots+\frac{A_{l_1}^1}{(x-a_1)^{l_1}}}_{(x-a_1)^{l_1}}+\cdots+\underbrace{\frac{A_1^s}{(x-a_s)}+\cdots+\frac{A_{l_s}^s}{(x-a_s)^{l_s}}}_{(x-a_s)^{l_s}}+\cdots+$$

$$\underbrace{\frac{M_1^1x+N_1^1}{(x+p_1x+q_1)}+\cdots+\frac{M_{k_1}^1x+N_{k_1}^1}{(x+p_tx+q_t)^{k_1}}}_{(x+p_tx+q_t)^{k_1}}+\cdots+\underbrace{\frac{M_1^tx+N_1^t}{(x+p_tx+q_t)}+\cdots+\frac{M_{k_t}^tx+N_{k_t}^t}{(x+p_tx+q_t)^{k_t}}}_{(x+p_tx+q_t)^{k_t}}$$

③把上式右边形式地加起来，比较两边系数得一个方程组，解此方程组得待定系数的值，代回上式即分解成功。

④ $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ 变成几个简单积分

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+C$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^l}dx=\int\frac{A}{(x-a)^l}d(x-a)=(-lA)\frac{1}{(x-a)^{l-1}}+C\quad(1>1)$$

$$\int\frac{N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}d\left(x+\frac{p}{2}\right)=\frac{A}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1}d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

$$=\frac{A}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+C$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{1}{x^2+px+q}d\left(x^2+px+q\right)+\frac{M}{2}\int\frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx$$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{1}{(x^2+px+q)^k}d\left(x^2+px+q\right)+\frac{M}{2}\int\frac{\frac{2N}{M}-p}{(x^2+px+q)^k}dx$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^k}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^k}du=\frac{1}{a^2}\int \frac{u^2+a^2-u^2}{\left(u^2+a^2\right)^k}du=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}du-\frac{1}{2a^2}\int \frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^k}d\left(u^2+a^2\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}du+\frac{u}{2a^2(k-1)\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2a^2(k-1)}\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}du$$

$$=\frac{u}{2a^2(k-1)\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2(k-1)}\right)\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}du$$

然后递推。

有理函数的积分总可以积出来。但比较麻烦，应用作最后一招。

（vii）万能变换

$$u=\tan\frac{x}{2}，\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}，\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}，\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

其中 R 是有理式。由于麻烦，万能变换应用作最后一招。

（viii）$\int \sin^n x\cos^m xdx$ 的计算

a) 当 m 是奇数时，$\int \sin^n x\cos^m xdx=\int \sin^n x(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}d\sin x$；当 n 是奇数时，$\int \sin^n x\cos^m xdx=-\int \cos^m x(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}d\cos x$；

b) 当 n,m 都是偶数时，$\int \sin^n x\cos^m xdx=\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{m}{2}}dx$。

不定积分技巧性强，方法灵活。要一切方法综合运用，一切通过试！

第五章 定积分

一、定积分的概念

1．定积分定义的四步

（1） 分割：$a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$。$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|$。

（2） “近似”：$\forall \xi_i \in \Delta x_i$，$f(\xi_i)\Delta x_i$。

（3） 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

（4） 取极限：$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \begin{cases} = A\text{极限存在，}\int_a^b f(x)dx = A\text{，积分存在可积} \\ \text{极限不存在，积分不存在不可积} \end{cases}$

补充定义 $\int_a^a f(x)dx = 0, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2．定积分的几何意义

（1） 当 $f(x)\ge 0, a<b$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ ＝ 由“$y=0, y=f(x), x=a, x=b$”围成曲边梯形的面积。

（2） 当 $f(x)\le 0, a<b$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ ＝ 由“$y=0, y=f(x), x=a, x=b$”围成曲边梯形的面积的负值。

（3） 当 $f(x)$ 可正可负，$a<b$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ ＝ 由“$y=0, y=f(x), x=a, x=b$”围成曲边梯形面积的代数和。

（4） 当 $f(t)$ 是速度函数时，$\int_a^b f(t)dt$ ＝ 物体从时间 a 到时间 b 的运动路程。

二、定积分的性质

1．线性性

$$\int_a^b [kf(x) \pm l\, g(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx \pm l\int_a^b g(x)dx$$

2．可加性

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

a,b,c 不管哪个大哪个小，积分能做就行。

3．单调性

$$\begin{cases} f(x) \overset{\geq}{\underset{\leq}{}} 0 \\ a \leq b \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \overset{\geq}{\underset{\leq}{}} 0 , \quad \begin{cases} f(x) \overset{\geq}{\underset{\leq}{}} g(x) \\ a \leq b \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \overset{\geq}{\underset{\leq}{}} \int_a^b g(x)dx$$

4．积分估计

$$\begin{cases} m \leq f(x) \leq M \\ a \leq b \end{cases} \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5．积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (\text{其中}\xi \in [a,b])$$

其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

三、上限的函数

上限的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^b f(t)dt = -f(\psi(x))\psi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

四、定积分的计算

1．牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的随便一个原函数。因此，先用不定积分算出 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，再用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$。

2．换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

其中 $x=\varphi(t)$ 是适当选好的变换，上下限跟踪 $b=\varphi(\beta), a=\varphi(\alpha)$。左右相等，哪个容易计算就计算哪个。定积分换元法也可解决一些积分困难。

3．分步积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

$$\left(\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x)\right)$$

原则：$u \xrightarrow{\text{变简单}} u'$，$v' \xrightarrow{\text{不变复杂}} v$。$\dfrac{\text{反、对、幂、三、指}}{\text{u} \quad \text{v}'}$。

如果经几次分步积分又出现左边的积分，就用代数方法解出。

4．当 $f(x)$ 是奇函数时

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

五、反常积分

1．无穷限积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\tau\to-\infty}\int_\tau^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)dx + \lim_{\tau\to-\infty}\int_\tau^c f(x)dx$$

极限（都）存在时积分收敛；否则积分发散。t 和 τ 完全没有关系。c 可以是 0。

2．无界函数积分

无界函数按通常意义积分都是发散的。

如果 $f(x)$ 在 x_0 附近无界，则 x_0 称为 $f(x)$ 的一个瑕玷。

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\tau\to0^+}\int_a^{c-\tau} f(x)dx,\quad \int_c^a f(x)dx = \lim_{\tau\to0^+}\int_{c+\tau}^a f(x)dx$$

其中 c 是 $f(x)$ 在积分区间上唯一的瑕玷，上限大于下限。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to0^+}\int_{a+t}^c f(x)dx + \lim_{\tau\to0^+}\int_c^{b-\tau} f(x)dx$$

其中 a 和 b 是 $f(x)$ 在积分区间上仅有的瑕玷，$a<c<b$。

极限（都）存在时积分收敛；否则积分发散。t和τ完全没有关系。$a<c<b$。

当积分区间中有几个瑕玷时，以这些瑕玷为分点，分成几个小区间的积分。

3．反常积分也可换元或分部积分。

4． $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty & p\le 1\end{cases}$，$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1\\ +\infty & p\ge 1\end{cases}$。

5．反常积分审敛。

（1）如果$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$必收敛，称为绝对收敛。

以下设$f(x),g(x)$为非负函数。

（2）$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,+\infty)$有界。

（3）如果在$[a,+\infty)$恒有$f(x)\le g(x)$，则

（i）$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛；

（ii）$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散则$\int_a^{+\infty}g(x)dx$也发散。

（4）设$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$，则

（i）如果$0<k<+\infty$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$和$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同敛散；

（ii）如果$k=0$且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛；

（iii）如果$k=+\infty$且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也发散。

（5）在（3）、（4）中使用$g(x)=\frac{1}{x^p}$并注意到 4.。

（6）无界函数的审敛与（1）--（5）类似。在（5）中用$\frac{1}{(x-b)^p}$代替$\frac{1}{x^p}$。

第六章 定积分的应用

1．微元法

定积分的应用就是用定积分计算某个量U

$$U=\int_a^b f(x)dx$$

其中$[a,b]$是U的分布区间。微元法的步骤是：

（1）找出U的分布区间$x\in[a,b]$。在$[a,b]$上任给x和它的增量dx。U在$[a,x]$分布的部分量是x的函数$U(x)$。

（2）计算出U在$[x,x+dx]$上的分布量

$$\Delta U(x)=f(x)dx+\circ(dx)$$

所以微元$dU(x)=f(x)dx$与$\Delta U(x)$相差$\circ(dx)$。

（3）对$dU(x)=f(x)dx$两边积分

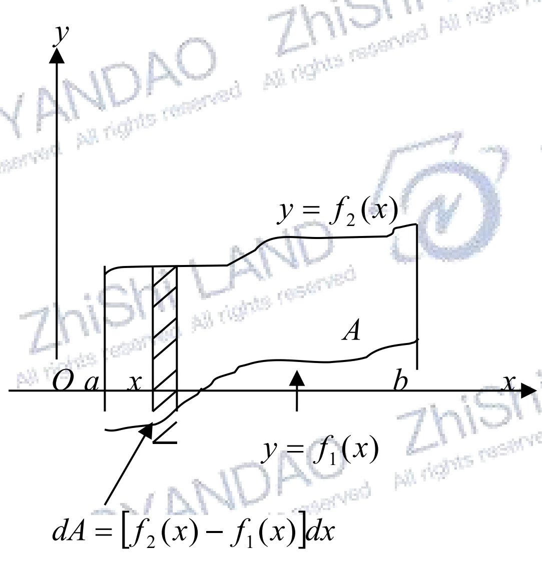
$$U=U(b)-U(a)=\int_a^b f(x)dx$$

2．面积的计算

（1）两曲线间曲边梯形的面积

如下图，$f_1(x)\le f_2(x)$。面积

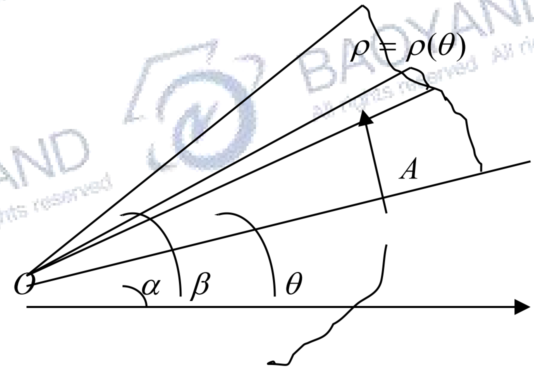
$$A=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$



（2）极坐标情形

如下图，“$\theta=\alpha,\theta=\beta,\rho=\rho(\theta)$”围得图形的面积

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$$



$$dA = \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$$

如果图形由

“$\theta = \alpha, \theta = \beta, \rho = \rho_1(\theta) \le \rho = \rho_2(\theta)$”

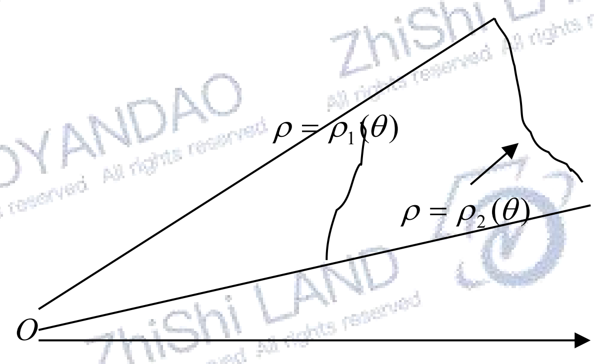
围成，则

$$A = A_2 - A_1$$

其中 A_2 是“$\theta = \alpha, \theta = \beta, \rho = \rho_2(\theta)$”

的面积；A_1 是“$\theta = \alpha, \theta = \beta, \rho = \rho_1(\theta)$”

的面积。如右图。



由直角坐标方程写极坐标方程的方法：

把 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 代入曲线的直角坐标方程 $F(x, y) = 0$ 得 $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 0$，

再从后式解出 $\rho = \rho(\theta)$ 即是曲线的极坐标方程。

3．体积的计算

（1）旋转体的体积

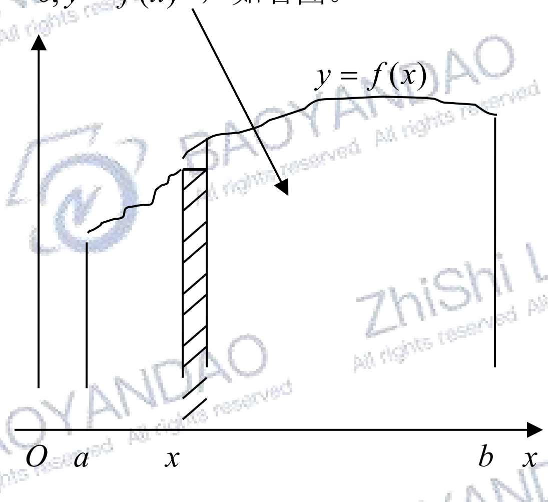
设旋转的曲边梯形为“$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$”，如右图。

（a）绕 x 轴旋转

$[x, x+dx]$ 所在长方形转出的是一个半径为 $|f(x)|$ 高为 dx 的圆柱体。所以

$$dV_x = \pi[f(x)]^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$



（b）绕 y 轴旋转

$[x, x+dx]$ 所在长方形转出的是一

y

个内径为 x 外径为 $x+dx$ 高为 $f(x)$ 的空心圆柱壳。所以

$$dV_y = 2\pi x f(x) dx$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x f(x) dx$$

（2）截面面积可计算的几何体的体积

设几何体分布在 x 轴的 $[a,b]$ 之间，x 点处垂直于 x 轴的截面面积 $A(x)$ 都可计算，则几何体的体积

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

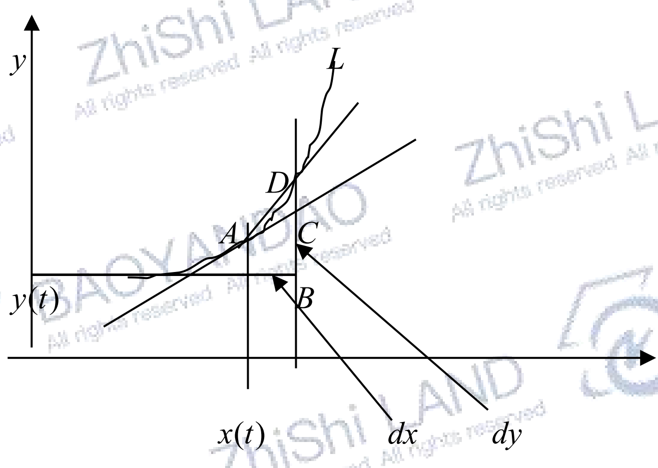
其中 $A(x)$ 要首先计算出来。

4．曲线弧长的计算

（1）设曲线(右图)方程为参数方程

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

$a=x(\alpha),b=x(\beta)$。



$\because\quad AC\le AD\le$ 弧 $AD\le AC+CD$

$\therefore 0\le$ 弧 $AD-AC\le CD=\circ(dx)=\circ(dt)$

因此，弧长元素或说弧长微分

$$ds=AC=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \qquad (*)$$

（2）设曲线方程为 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$，则它的参数方程（x 为参数）为

$$\begin{cases}x=x\\ y=f(x)\end{cases}\quad(a\le x\le b)$$

因此弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

（3）设曲线方程为极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$，则它的参数方程为

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$$

代入（*）得弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,dx$$

5．定积分的物理应用

（1） 设曲线 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 在 $(x(t), y(t))$ 点的线密度为 $\rho(t)$，则曲线的质量 $m = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$。

（2） 设物体从 a 运动到 b，受到外力 $F(x)$，则外力做的功 $w = \int_a^b F(x)dx$。

（3） 当长度为 $[a,b]$（液面为 0）的面垂直放在液体中时，液体对面的压力 $F = \int_a^b \rho g x l(x) dx$，其中 $l(x)$ 为面在 x 点的宽度，ρ 为液体的密度。

（4） 质量 M 的线段 $[a,b]$ 对放在原点质量 m 的引力为 $F = \int_a^b \frac{GmM}{(b-a)x^2}dx$。

（5） 设曲线 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 在 $(x(t), y(t))$ 点的线密度为 $\rho(t)$，则曲线的静力矩

$$J_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt, J_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

质心坐标 $\bar{x} = \frac{J_y}{m}, \bar{y} = \frac{J_x}{m}$。

（6） 设曲线 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 在 $(x(t), y(t))$ 点的线密度为 $\rho(t)$，则曲线的转动惯量

$$J_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)y^2(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt, J_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)x^2(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

交流电 $I_m \sin wt$ 的有效值 $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$。函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的平均值 $\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，均方根值 $\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx}$。

第七章　微分方程

一、微分方程及有关概念

1．微分方程

含有未知函数一阶或高阶导数的等式称为微分方程。其中未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶。n阶微分方程的一般形式为

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (*)$$

2．微分方程的解

一个函数$y=f(x)$，如果代入（*）成为恒等式

$$F\left(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)\right)\equiv 0$$

则$y=f(x)$称为（*）的解。如果（*）的解$y=f(x)$不含有任意常数，则称它为（*）的一个特解。如果n阶（*）的解$y=f\left(x,C_1,\cdots,C_n\right)$含有$n$个不可减少的任意常数，则称$y=f\left(x,C_1,\cdots,C_n\right)$为（*）的通解。通解一定是微分方程的解，但不一定是全部解。

3．微分方程的核心问题：

（1）求微分方程的通解，称为通解问题；（2）求微分方程满足一定条件（称为初值条件）的解，称为初值问题。

单独一个微分方程提出通解问题；初值问题的提法是

$$\begin{cases} F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \\ y|_{x=x_0}=y_0 \\ y'|_{x=x_0}=y_1 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1} \end{cases} \qquad (**)$$

(后n个等式是初值条件)。

求微分方程的解（通解或特解）称为解微分方程。

1．初值问题的解法

（1）求出微分方程的通解$y=f\left(x,C_1,\cdots,C_n\right)$；（2）用$n$个初值条件确定$n$个任意常数的值，即解关于$C_1,\cdots,C_n$的方程组

$$\begin{cases} f\left(x_0,C_1,\cdots,C_n\right)=y_0 \\ f'\left(x_0,C_1,\cdots,C_n\right)=y_1 \\ \cdots \\ f^{(n-1)}\left(x_0,C_1,\cdots,C_n\right)=y_{n-1} \end{cases}$$

把这些$C_1,\cdots,C_n$的值代回$y=f\left(x,C_1,\cdots,C_n\right)$即得满足初值条件的解（这步是代数问题）。

可见，不管是解通解问题还是解特解问题，都要求微分方程的通解。

记住：一般地说，解微分方程是世界难题。只有几种特殊类型的微分方程已有简单可行的解法。并且，不同类型的微分方程有自己独有的解法。我们的任务是：（1）辨认各种方程的类型；（2）熟练各种类型方程独有的解法。

二、辨认类型，熟练解法

1．已分离变量的微分方程

$$y^{(n)}=f(x)$$

称为已分离变量的微分方程。

解法：(注意：不定积分的结果有任意常数)

$$\begin{gathered}y^{(n-1)}=\int f(x)dx\\ \cdots\\ y^{(k-1)}=\int y^{(k)}dx\\ \cdots\\ y=\int y'dx\end{gathered}$$

2．可分离变量的微分方程

如果一阶微分方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (*1)$$

能通过恒等变形化为

$$g(y)dy=f(x)dx \qquad (*2)$$

则称为可分离变量的微分方程。

解法：（1）分离变量（从（*1）到（*2）称为分离变量）；（2）隐式通解

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C$$

其中积分的任意常数已单独写出。

记住：分离变量解微分方程的方法是微分方程解法的总根。

2．齐次方程

如果方程能恒等地变为

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (*3)$$

则称为齐次方程。

解法：作函数变换$u=\dfrac{y}{x}$，则

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

代入（*3）得方程

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$$

分离变量再两边积分得

$$\Phi(u)=\ln|x|+C$$

其中$\Phi(u)=\int\dfrac{du}{\varphi(u)-u}$，常数统一写在右边。代回$u=\dfrac{y}{x}$得隐式通解

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$$

3．一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

称为一阶线性微分方程。

解法：通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

其中的不定积分不再写任意常数。

注意：有的方程把y看成x的函数时不是线性方程，但把x看成y的函数时就成了线性方程。

6．贝努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$$

称为贝努利方程。

解法：（1）变形

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

（2）作变换$u=y^{1-n}$，$\dfrac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，变为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

则

$$u=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right]$$

即

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right]$$

7．不含 y 的二阶方程

$$y''=f(x,y')$$

解法：（1）作变换 $p=y'$， $y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}$，变为一阶方程

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

（2）用一阶方程的解法解得

$$F(x,p,C_1)=0$$

（3）再用一阶方程的解法解

$$F(x,y',C_1)=0$$

8．不含 x 的二阶方程

$$y''=f(y,y')$$

解法：（1）作变换 $p=y'$，用 y 作新的自变量，$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，

变为一阶方程

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

（2）用一阶方程的解法解得

$$F(y,p,C_1)=0$$

（3）再用一阶方程的解法解

$$F(y,y',C_1)=0$$

10．二阶常系数线性方程

$$y''+py'+qy=0$$

解法：（1）求出特征方程

$$r^2+pr+q=0$$

的两个根r_1, r_2；（2）根据下表确定通解

r_1, r_2 的情况	通解
$r_1 \neq r_2$ 都是实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$ 是实根	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_1 = \alpha + i\beta$ 是复根	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

常系数线性方程有往高阶的推广。

11．常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x) \qquad (*4)$$

其中$P_m(x)$是m次多项式。

解法：（1）确定解的形式：$y = x^k Q_m(x)$，其中$Q_m(x)$是m次多项式，λ是特征多项式

$$r^2 + pr + q = 0$$

的k重根，$k = 0(\lambda\text{不是根}),1,2$；（2）待定系数地设

$$Q_m(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$$

把$y = x^k Q_m(x)$代入（*4）并比较两边x同次幂的系数得关于$A_0, A_1, \cdots, A_m$方程组，解出$A_0, A_1, \cdots, A_m$就得（*4）的一个解$y^* = x^k Q_m(x)$；（3）求出

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解$Y(,x,C_1,C_2)$；（4）（*4）的通解为

$$y = Y(x, C_1, C_2) + x^k Q_m(x)$$

12．常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x) \cos \omega x \qquad (*5)$$

$$y'' + py' + qy = ie^{\lambda x} P_m(x) \sin \omega x \qquad (*6)$$

解法：（1）利用欧拉公式，（*5）和（*6）的右边相加得（*4）型的方程

$$y'' + py' + qy = e^{(\lambda + i\omega)x} P_m(x) \qquad (*7)$$

（2）用 11 法解之得（*7）的复通解

$$y = F(x, C_1, C_2) + iG(x, C_1, C_2)$$

其中 $F(x, C_1, C_2)$ 和 $G(x, C_1, C_2)$ 都是实函数；（3） $y = F(x, C_1, C_2)$ 是（*5）的通解，$y = G(x, C_1, C_2)$ 是 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x) \sin \omega x$ 的通解。

13．欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

解法：作变换 $t = \ln|x|$。

三、线性微分方程解的结构

1．线性微分方程解的结构

设 $y_1(x), y_2(x)$ 都是齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*8)$$

的解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是（*8）的解；如果 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 不是常数，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是（*8）的通解。

如果 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是（*8）的通解并且 $y^*(x)$ 是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (*9)$$

的随便一个特解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$ 是（*9）的通解。

2．叠加原理

（1）如果 $y = y_i(x)$ 是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

的解，$i = 1,2$，则 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解。把一个复杂的方程化为两个简单的方程。

（2）如果 $y = y_1(x) + iy_2(x)$ 是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + if_2(x)$$

的解，则 $y = y_j(x)$ 是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

的解，j=1,2。把两个不会解的方程化为一个会解的方程。

四、常数变异法

1、设已知齐次方程（*8）的一个不恒为 0 的解 $y_1(x)$。令 $y = y_1(x)u(x)$ 以求非齐次方程（*9）的通解。

2、设已知齐次方程（*8）的两个线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$。令 $y^* = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$，解

$$\begin{cases} u_1'y_1(x) + u_2'y_2(x) = 0 \\ u_1'y_1'(x) + u_2'y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

以求非齐次方程（*9）的特解 $y^* = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$。

五、**相关题目**

1．根据题目的内容列出微分方程(和初始值条件)；

2．求二中各种类型微分方程的通解；

3．求二中各种类型微分方程的初值问题的解；

4．用三中的叠加原理把方程化为几个简单方程，再求总方程的一个特解；

5．用三中线性微分方程解的结构组成（*9）型方程的通解。

6．利用常数变异法求方程的特解。

结束语

拿出高考的干劲，100 分没问题。

祝你考得 100 分！