习题

1. 说出下列各微分方程的阶数，并指出哪些是线性微分方程?

(1) $x(y')^2-2yy'+2=0$; (2) $(y'')^3+5(y')^4-y^5+x^7=0$; (3) $xy'''+2y''+x^2y=0$; (4) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$; (5) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) $x(y')^2-2yy'+2=0$. 一阶, 非线性.

(2) $(y'')^3+5(y')^4-y^5+x^7=0$. 二阶, 非线性.

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$. 三阶, 线性.

(4) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$. 一阶, 非线性.

(5) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$. 一阶, 非线性.

2. 验证下列函数 (C 为任意常数)是否为相应方程的解. 若是, 判断是通解还是特解?

(*1) $y'-2y=0, y=\sin x, y=\mathrm{e}^x, y=C\mathrm{e}^{2x}$; (2) $xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0, y^2(1+x^2)=C$; (3) $y''-9y=x+\frac{1}{2}, y=5\cos 3x+\frac{x}{9}+\frac{1}{8}$; (4) $x^2y'''=2y', y=\ln x+x^3$.

解 (*1) 方程为 $y'-2y=0$. $y=\sin x$ 不是方程的解. $y=\mathrm{e}^x$ 不是方程的解. $y=C\mathrm{e}^{2x}$ 是方程的通解 (**由此启发我们对于一阶常系数齐次线性微分方程也可以由其特征方程来求解, 这里特征方程为** $\lambda-2=0$).

(2) 方程为 $xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$. 等式 $y^2(1+x^2)=C$ 两边同时微分得 $2(1+x^2)y\mathrm{d}y+2xy^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$. 因此 $y^2(1+x^2)=C$ 为方程的通解.

(3) 方程为 $y''-9y=x+\frac{1}{2}$. 而 $y=5\cos 3x+\frac{x}{9}+\frac{1}{8}$ 不是方程的解.

(4) 方程为 $x^2y'''=2y'$, 由 $y=\ln x+x^3$ 得 $y'=\frac{1}{x}+3x^2, y''=-\frac{1}{x^2}+6x, y'''=\frac{2}{x^3}+6$. 代入方程知 $y=\ln x+x^3$ 为方程的解, 由于不含任意常数, 从而是特解.

3. 求下列各微分方程的**通解**或在给定初始条件下的特解

(1) $(1+y)\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$; (2) $xy\mathrm{d}x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=0$; (3) $(1+2y)x\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$; (4) $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$; (*5) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$; (*6) $\frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}=0, y|_{x=5}=4$; (*7) $\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\frac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$.

解 (1) $(1+y)\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\frac{\mathrm{d}y}{1+y}\ \ (x\neq 1, y\neq -1)$$

$$\ln|C|-\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x}=\int\frac{\mathrm{d}(1+y)}{1+y}$$

$$\ln|C|-\ln|1-x|=\ln|1+y|$$

$$(1+y)(1-x)=C,\ C\neq 0$$

考虑到 $x=1$ 和 $y=-1$ 是方程的解, 从而得方程的通解

$$(1+y)(1-x)=C,\ C\text{ 为任意常数}.$$

(2) $xy\mathrm{d}x + \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y = 0$. 分离变量得

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad (x \neq \pm 1, y \neq 0)$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$
$$\ln|C| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$
$$\ln|C| + \sqrt{1-x^2} = \ln|y|$$
$$y = C\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}, C \neq 0.$$

考虑到 $y = 0$ 也是方程的解, 所以方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}, C \text{ 为任意常数}.$$

方程的特解 $x = \pm 1$ 不能包含到以上通解中.

(3) $(1+2y)x\mathrm{d}x + (1+x^2)\mathrm{d}y = 0$. 分离变量得

$$-\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}y}{1+2y} \quad (y \neq \frac{1}{2})$$
$$\ln|C| - \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}(1+2y)}{1+2y}$$
$$\ln|C| - \ln(1+x^2) = \ln|1+2y|$$
$$(1+2y)(1+x^2) = C,\ C \neq 0$$

考虑到 $1 + 2y = 0$ 是方程的解, 则方程的通解为

$$(1+2y)(1+x^2) = C,\ C \text{ 为任意常数}.$$

(4) $(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2y)\mathrm{d}y = 0$. 分离变量得

$$-\frac{2x\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{2y\mathrm{d}y}{1+y^2} \quad (x \neq \pm 1)$$
$$\ln|C| + \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{1-x^2} = \int \frac{\mathrm{d}(1+y^2)}{1+y^2}$$
$$\ln|C| + \ln|1-x^2| = \ln(1+y^2)$$
$$1 + y^2 = C(1-x^2),\ C \neq 0$$
$$y^2 = C(1-x^2) - 1,\ C \text{ 为不等于 } 0 \text{ 的任意常数}.$$

这就是方程的通解. 方程的解 $x = \pm 1$ 不能包含在此通解中.

(*5) (**全微分方程**)$y\ln x\mathrm{d}x + x\ln y\mathrm{d}y = 0$.

$$\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x + \frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y = 0$$
$$2\ln x\mathrm{d}\ln x + 2\ln y\mathrm{d}\ln y = 0$$
$$\mathrm{d}(\ln^2 x + \ln^2 y) = 0$$
$$\ln^2 x + \ln^2 y = C,\ C \text{ 为任意非负常数}.$$

(*6) (全微分方程)

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}=0$$
$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$$
$$\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)=0$$
$$x^2+y^2=C$$

由初值条件 $y|_{x=5}=4$ 得 $C=41$. 从而方程的特解为 $x^2+y^2=41$.

(*7) (全微分方程)

$$\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\frac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$$
$$x(1+x)\mathrm{d}x-y(1+y)\mathrm{d}y=0$$
$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}=\frac{C}{6}$$
$$3x^2+2x^3-3y^2-2y^2=C$$

由初值条件 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=-5$. 所以特解为 $3(x^2-y^2)+2(x^3-y^3)=-5$.

4. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(*1) $y'=\frac{y}{y-x}$; (*2) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$; (*3) $xy'-y-\sqrt{x^2+y^2}=0$; (4) $xy^2\mathrm{d}y=(x^3+y^3)\mathrm{d}x$; (5) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y-2xy\mathrm{d}x=0, y|_{x=0}=1$; (6) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0, y|_{x=1}=0$.

解 (*1) $y'=\frac{y}{y-x}$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{y-x}{y}=1-\frac{x}{y}\ \ (y\neq 0)$$

令 $u=\frac{x}{y}$. $x=yu \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$. 从而原方程变为

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=1-u$$
$$\frac{-2\mathrm{d}u}{1-2u}=-2\frac{\mathrm{d}y}{y}$$
$$\frac{\mathrm{d}(1-2u)}{1-2u}=-2\frac{\mathrm{d}y}{y}$$
$$\ln|1-2u|=-2\ln|y|+\ln|C|\ (C\neq 0)$$
$$y^2(1-2u)=C$$
$$y^2-2xy=C,\ C\neq 0$$

考虑到 $y=0$ 是方程的解，从而有方程的通解为 $y^2-2xy=C, C$ 为任意实数.

(*2) (全微分方程)

$$(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$$
$$x\mathrm{d}x+(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)=0$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)=0$$
$$\frac{1}{2}x^2+xy=\frac{C}{2}$$
$$x^2+2xy=C,\ C \text{ 为任意常数.}$$

(*3) 注意需讨论 x 的符号.

$$xy' - y - \sqrt{x^2+y^2} = 0$$
$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \ (x \neq 0, \text{其中 } x>0 \text{ 时取正号}，\ x<0 \text{ 时取负号})$$

令 $u = \frac{y}{x}$ 得 $y = xu$. 从而 $y' = u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$.

1° 当 $x > 0$ 时,

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|$$
$$\ln|u+\sqrt{1+u^2}| = \ln|x| + \ln|C| \ (C \neq 0)$$
$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$
$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2,\ C \text{ 为不等于零的任意常数.}$$

2° 当 $x < 0$ 时,

$$x\frac{du}{dx} = -\sqrt{1+u^2}$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dx}{x} + \ln|C|$$
$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = -\ln|x| + \ln|C| \ (C \neq 0)$$
$$-x(u+\sqrt{1+u^2}) = C$$
$$-y + \sqrt{x^2+y^2} = C,$$
$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = C,$$
$$y + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{C}x^2,\ C \text{ 为不等于零的任意常数.}$$

3° 当 $x = 0$ 时, 直接从原方程可知必有 $y \leq 0$. 但这不是方程的解.

可见，当 $x > 0$ 与 $x < 0$ 时具有相同形式的解. 而 $x = 0$ 的情形可包含在通解形式 $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$ (C 为任意非零常数) 中.

(4) $xy^2dy = (x^3+y^3)dx \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}\ (x \neq 0, y \neq 0)$. 令 $u = \frac{y}{x}$. 从而 $y = xu$. $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2} + u$. 从而得方程

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2}$$
$$u^2du = \frac{dx}{x}$$
$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + C$$
$$y^3 = 3x^3(\ln|x| + C),\ C \text{ 为任意常数.}$$

$x = 0$ 和 $y = 0$ 是方程的两个特解，不能包含到上述通解中.

(5) $(y^2-3x^2)dy - 2xydx = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dx}{dy} = \frac{y^2-3x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{3}{2}\frac{x}{y}\ (x \neq 0, y \neq 0)$. 令 $u = \frac{x}{y}$. 则

$x=yu,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2u}-\frac{3}{2}u.$

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1-5u^2}{2u}$$

$$\frac{-10u\mathrm{d}u}{1-5u^2}=-5\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}(1-5u^2)}{1-5u^2}=-5\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\ln|1-5u^2|=-5\ln|y|+\ln|C|$$

$$y^5(1-5u^2)=C$$

$$y^5-5x^2y^3=C\ (\text{考虑到 } y=0 \text{ 是方程的解, 从而 } C \text{ 可取任意常数}).$$

再由条件 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=1$. $y^5-5x^2y^3=1$ 为方程的特解.

(6)

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ \ (x\neq0,y\neq0).$$

令 $u=\frac{y}{x}$ 得 $y=xu$. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u.$

$$2u\mathrm{d}u=2\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$u^2=\ln x^2+C$$

$$y^2=x^2\left(\ln x^2+C\right)\ \ (x=0 \text{ 是方程的特解，但不能包含到此通解中}).$$

再由条件 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=0$. 所以方程的解为 $y^2=x^2\ln x^2$.

5. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$; (2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{n}{x}y=\mathrm{e}^xx^n$; (3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$; (4) $(x^2+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x^2$; (5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$; (6) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=x^3\mathrm{e}^x$, $y|_{x=1}=0$; (7) $xy'+y=3$, $y|_{x=1}=0$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$. $P(x)=1,Q(x)=\mathrm{e}^{-x}$. $\int[-P(x)]\,\mathrm{d}x=\int(-1)\mathrm{d}x=-x,\int P(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x,\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x$. 所以由公式知非齐次线性方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$, C 为任意常数.

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{n}{x}y=\mathrm{e}^xx^n$. $P(x)=-\frac{n}{x},Q(x)=\mathrm{e}^xx^n$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x=n\ln x,\int P(x)\mathrm{d}x=\int-\frac{n}{x}\mathrm{d}x=-n\ln x,\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^xx^n\cdot x^{-n}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$. 所以方程的通解为 $y=x^n(\mathrm{e}^x+C)$, C 为任意常数.

注：若 n 可取任意非零实数，则题中暗含了 $x>0$.

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. $P(x)=-\frac{2}{x+1},Q(x)=(1+x)^3$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x=\ln(x+1)^2,\int P(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x=\ln(x+1)^{-2},\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int(1+x)^3(1+x)^{-2}\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}x^2$. 所以方程的通解为 $y=(x+1)^2\left(x+\frac{1}{2}x^2+C\right)$, C 为任意常数.

(4) $(x^2+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x^2$. $P(x)=\frac{2x}{1+x^2},Q(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}=-\ln(1+x^2),\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln(1+x^2),\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\frac{4x^2}{x^2+1}\cdot(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3$. 所以方程的通解为 $y=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{4}{3}x^3+C\right)$, C 为任意常数.

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$. $P(x)=-2x,Q(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=\int2x\mathrm{d}x=x^2,\int P(x)\mathrm{d}x=-\int2x\mathrm{d}x=-x^2,\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}(-2x^2)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}$. 所以方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{x^2}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}+C\right)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^2}+C\mathrm{e}^{x^2}$, C 为任意常数.

(6) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=x^3\mathrm{e}^x$. $P(x)=-\frac{2}{x}, Q(x)=x^2\mathrm{e}^x$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x=\ln x^2, \int P(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x=\ln x^{-2}, \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{e}^x\cdot x^{-2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$. 所以方程的通解为 $y=x^2(\mathrm{e}^x+C)$. 由条件 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=-\mathrm{e}$. 方程的解为 $y=x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})$.

(7) $xy'+y=3$. $P(x)=\frac{1}{x}, Q(x)=\frac{3}{x}$. $-\int P(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|^{-1}, \int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|, \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\frac{3}{x}\cdot|x|\mathrm{d}x=3x$. 所以方程的通解为 $y=\frac{1}{x}(3x+C)$. (**根据题设条件，不妨认为 $x>0$.**) 由条件 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=-3$. 所以方程的解为 $y=\frac{3}{x}(x-1)=3\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

6. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x^2$; (2) $y''=\mathrm{e}^{2x}$; (3) $y''-y'=x$; (4) $xy''+y'=0$; (*5) $y\cdot y''-(y')^2-y'=0$; (6) $y''+\sqrt{1-(y')^2}=0$; (*7) $y'''=y''$; (*8) $y''=3\sqrt{y}, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x^2$. $y'=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C_1$, $y=\int\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$. 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) $y''=\mathrm{e}^{2x}$. $y'=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1, y=\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C_1x+C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(*3) $y''-y'=x$. 特征方程为 $\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1$. 设方程具有形如 $y^*=x(A_0+A_1x)$ 的特解. $(y^*)'=A_0+2A_1x, (y^*)''=2A_1$. 代入方程得 $(-A_0-2A_1)x+2A_1=x$. 从而有 $2A_1-A_0=0, -2A_1=1$. 解之得 $A_0=-1, A_1=-\frac{1}{2}$. 所以特解为 $y^*=x(-1-\frac{1}{2}x)=-x-\frac{1}{2}x^2$. 从而方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x-x-\frac{1}{2}x^2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. (**注：也可令 $p=y'$, 从而将方程变为一阶非齐次线性方程求解.**)

(4) $xy''+y'=0$. 令 $p=y'$. 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 原方程变为 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p=0$. 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $(p\neq 0, x\neq 0)$. 解之得 $p=\frac{C_1}{x}$, C_1 为任意常数. 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{x}, \mathrm{d}y=\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x$, $y=\int\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x+C_2=C_1\ln|x|+C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. 由 $p=0$ 得 $y=C_3$ (C_3 是任意常数) 是方程的特解, 不能包含在上述通解中.

(*5) $y\cdot y''-(y')^2-y'=0$. 令 $p=y'$. $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 原方程变为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2-p=0$, $p(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p-1)=0$. 所以有 (i) $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p-1=0$ 或 (ii) $p=0$.

(i) 方程 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p-1=0$ 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{1+p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$ $(p\neq -1, y\neq 0)$, $\ln|1+p|=\ln|y|+\ln|C_1|$, $1+p=C_1y$, $p=C_1y-1$, C_1 为任意不为零的常数. 结合方程的特解 $p=-1$ 得方程的通解为 $p=C_1y-1$, C_1 为任意常数. 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y-1$, $x=\int\frac{\mathrm{d}y}{C_1y-1}+C_2=\frac{1}{C_1}\ln|C_1y-1|+C_2$ $(C_1\neq 0)$ 是方程的通解. 而 $y=-x+C_2$ $(C_1=0)$ 是方程的特解.

(ii) 由方程 $p=0$ 得 $y=C_3$ (C_3 为任意常数) 是方程的特解.

(6) $y''+\sqrt{1-(y')^2}=0$. 令 $p=y'$. $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 从而方程变为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1-p^2}$. 分离变量后得 $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1-p^2}}=-\mathrm{d}x$ $(p\neq\pm 1)$, $\arcsin p=-x+C_1$, $p=\sin(C_1-x)$. 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(C_1-x)$. 从而 $y=\int\sin(C_1-x)\mathrm{d}x+C_2=\cos(C_1-x)+C_2$, 其中 C_1, C_2为任意常数. 由 $p=\pm 1$ 得原方程的两特解 $y=\pm x+C_3$, C_3 为任意常数. (**注：若变量分离后采用形式 $-\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1-p^2}}=\mathrm{d}x$ $(p\neq\pm 1)$, 则积分后得** $\arccos p=x+C_1$)

另解： 令 $p=y'$. $y''=p\frac{dp}{dy}$. 原方程变为 $p\frac{dp}{dy}+\sqrt{1-p^2}=0$. $\frac{-2pdp}{2\sqrt{1-p^2}}=dy$, $\frac{d(1-p^2)}{2\sqrt{1-p^2}}=dy$, $\sqrt{1-p^2}=y-C_1$, $p^2=1-(y-C_1)^2$, $p=\pm\sqrt{1-(y-C_1)^2}$, 即 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1-(y-C_1)^2}$. 解之得 $\arcsin(y-C_1)=\pm x\pm C_2$ 即 $y=C_1\pm\sin(x+C_2)$. (C_1, C_2 为任意常数.)

(*7) (**降阶法**) $y'''=y''$. 令 $p=y''$. 原方程变为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p$. 解之得 $p=C_1\mathrm{e}^x$, C_1 为任意常数. 即 $y''=C_1\mathrm{e}^x$. 解之得 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x+C_3$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(*8) $y''=3\sqrt{y}$. 令 $p=y'$. 方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}$. $p\mathrm{d}p=3\sqrt{y}\mathrm{d}y$ (**全微分方程，只需直接求解**), $\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+C_1$. 再由条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 可得 $C_1=0$. 从而 $p^2=4y^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}y$

(已由初始条件去掉了取负号的情形), $\int y^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}y = 2\int \mathrm{d}x + C_2$, $4y^{\frac{1}{4}} = 2x + C_2$, $y = \left(\frac{C_2}{4} + \frac{x}{2}\right)^4$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C_2 = 4$. 所以方程的解为 $y = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4$.

7. 某林区现有木材 10 万 m^3, 如果在每一瞬时木材的变化率与当时木材数成正比, 假设 10 年内该林区能有木材 20 万 m^3, 试确定木材数 P 与时间 t 的关系.

解 由题意得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP,\ P(0) = 10, P(10) = 20, P > 0.$$

从而有 $\mathrm{d}P = kP\mathrm{d}t$, $P = C\mathrm{e}^{kt}$. 由条件 $P(0) = 10, P(10) = 20$ 可确定 $C = 10, k = \frac{\ln 2}{10}$. 从而 $P = 10 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$.

8. 加热后的物体在空气中冷却的速度与每一瞬时物体温度与空气温度之差成正比, 试确定物体温度与时间 t 的关系.

解 设物体温度及空气温度分别为 T, T_0 且 $T \geq T_0$. 由题意得 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0)$, $k > 0$. 分离变量后得 $\frac{\mathrm{d}T}{T-T_0} = -k\mathrm{d}t$, $\ln(T - T_0) = -kt + \ln|C|$, $T = C\mathrm{e}^{-kt} + T_0$. 其中 C 为某一常数.

9. 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P\ln 3$. 已知该商品的最大需求量为 1200 (即当 $P = 0$ 时, $Q = 1200$), 试求需求量 Q 对价格 P 的函数关系.

解 由题意得 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P}{Q} = -P\ln 3$. 分离变量后得 $\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\ln 3\,\mathrm{d}P$, $\ln Q = -P\ln 3 + \ln C$, $Q = C \cdot 3^{-P}$. 由初始条件 $Q(0) = 1200$ 得 $C = 1200$. 从而解为 $Q = 1200 \cdot 3^{-P}$.

*10. 在某池内养鱼,该池塘最多能养鱼 1000 尾. 在时刻 t, 鱼数 y 是时间 t 的函数 $y = y(t)$, 其变化率与鱼数 y 及 $1000 - y$ 成正比. 已知在池塘内放养鱼 100 尾, 3 个月后池塘内有鱼 250 尾, 求放养 7 个月后池塘内鱼数 $y(t)$ 的公式.

解 由题意得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(1000 - y)$ ($0 < y \leq 1000, k$ 为比例因子), $y(0) = 100, y(3) = 250$. 从而有 $\frac{\mathrm{d}y}{y(1000-y)} = k\mathrm{d}t$, $\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000-y}\right)\mathrm{d}y = k\mathrm{d}t$, $\frac{1}{1000}\left[\ln C + \ln y - \ln(1000 - y)\right] = kt$, $\frac{Cy}{1000-y} = \mathrm{e}^{1000kt}$. 由条件 $y(0) = 100, y(3) = 250$ 得 $C = 9, k = \frac{\ln 3}{3000}$. 从而有 $\frac{9y}{1000-y} = 3^{\frac{t}{3}} \Rightarrow y = \frac{1000\cdot 3^{\frac{t}{3}}}{9+3^{\frac{t}{3}}}$.

11. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $y''-4y'+3y = 0$; (2) $y''-y'-6y = 0$; (3) $y''-4y'+4y = 0$; (4) $y''-6y'-9y = 0$; (5) $y''+4y = 0$; (6) $y'' - 4y' + 13y = 0$; (7) $y'' - 5y' + 6y = 0, y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$; (8) $y'' + y' - 2y = 0, y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$; (9) $y'' - 6y' + 9y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$; (10) $y'' + 3y' + 2y = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$.

解 (1) $y'' - 4y' + 3y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_1 = 3$. 由此知二阶常系数齐次线性方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(2) $y'' - y' - 6y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(3) $y'' - 4y' + 4y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. 从而齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(4) $y'' - 6y' - 9y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{(3+3\sqrt{2})x} + C_2\mathrm{e}^{(3-3\sqrt{2})x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(5) $y'' + 4y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x, C_1, C_2$ 为任意常数.

(6) $y'' - 4y' + 13y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. 从而齐次方程的通解为 $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x), C_1, C_2$ 为任意常数.

(7) $y'' - 5y' + 6y = 0, y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$ 得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 0$. 从而方程的特解为 $y = \frac{1}{2}e^{2x}$.

(8) $y'' + y' - 2y = 0, y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 2$. 从而方程的特解为 $y = 2e^x + e^{-2x}$.

(9) $y'' - 6y' + 9y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$. 从而齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 2$. 从而方程的特解为 $y = 2xe^{3x}$.

(10) $y'' + 3y' + 2y = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $C_1 = 3, C_2 = -2$. 从而方程的特解为 $y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}$.

12. 求下列微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $y'' - 6y' + 13y = 14$; (2) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$; (3) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; (4) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$; (5) $y'' + 4y = 8\sin 2x$; (6) $y'' - 4y = 4, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$; (7) $y'' + 4y = 8x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$; (8) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$.

解 (1) $y'' - 6y' + 13y = 14$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 2i$. 由**观察**可得 $y^* = \frac{14}{13}$ 是方程的特解. 从而方程的通解为 $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{14}{13}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(2) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 设方程的特解为 $y^* = A_0 + A_1x$. $(y^*)' = A_1$. 代入方程解得 $A_0 = \frac{1}{9}, A_1 = -\frac{2}{3}$. 从而方程的通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(3) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$. 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. 设方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$. $(y^*)' = 2Ae^{2x}, (y^*)'' = 4Ae^{2x}$. 代入方程解得 $A = \frac{1}{5}$. 从而方程的通解为 $y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(4) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$. 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. 设方程的特解为 $y^* = Axe^{2x}$. $(y^*)' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = (2x+1)Ae^{2x}, (y^*)'' = 4A(1+x)e^{2x}$. 代入方程解得 $A = \frac{1}{3}$. 从而方程的通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x} = C_1e^{-x} + e^{2x}\left(C_2 + \frac{1}{3}x\right), C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(5) $y'' + 4y = 8\sin 2x$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$. 设方程的特解为 $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. $(y^*)' = (A - 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x, (y^*)'' = -4Ax\cos 2x + (-4A + 4Bx)\sin 2x$. 代入方程解得 $A = -2, B = 0$. 从而方程的通解为 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\cos 2x = (C_1 - 2x)\cos 2x + C_2\sin 2x, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(6) $y'' - 4y = 4, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$. 由**观察**可直接求得方程的特解为 $y^* = -1$. 从而方程的通解为 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 1$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = C_2 = 1$. 从而方程的特解为 $y = e^{2x} + e^{-2x} - 1$.

(7) $y'' + 4y = 8x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$. 由观察可直接求得方程的特解为 $y^* = 2x$. 从而方程的通解为 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x$. 再由条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 从而方程的特解为 $y = \sin 2x + 2x$.

(8) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 方程的特解为 $y^* = Ae^x$. 代入原方程得 $A = 1$. 从而方程的通解为 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x$. 再由

条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 得 $C_1=C_2=0$. 从而方程的特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

13. 方程 $y''+9y=0$ 的一条积分曲线通过点 $(\pi,-1)$, 且在该点和直线 $y+1=x-\pi$ 相切, 求此曲线.

解 方程 $y''+9y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3i$. 通解为 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. 直线 $y+1=x-\pi$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的斜率为 1, 即 $y'|_{x=\pi}=1$. 另由题意得初始条件 $y|_{x=\pi}=-1$. 由此解得 $C_1=1, C_2=-\frac{1}{3}$. 从而方程的解, 即曲线的函数形式为 $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

另解 令 $p=y'$. 方程变为 $p'+9y=0$, 即 $p\mathrm{d}p+9y\mathrm{d}y=0$. 解得 $p^2+9y^2=C_1$. 由初值条件 $x=\pi$ 时, $y=-1, p=1$ 得 $C_1=10$. 故可得参数方程 $\frac{p}{\sqrt{10}}=\cos t, \frac{3y}{\sqrt{10}}=\sin t, t\in[-\pi,\pi]$. (注意此处，在初值条件下有 $p>0, y<0, \sin t=-\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos t=\sqrt{10}, t\in(-\frac{\pi}{2},0)$.) 因此 $\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$. 解得 $x=\frac{1}{3}t-\frac{C_2}{3}$. (在初值条件下有 $-3\pi-\frac{\pi}{2}<C_2<-3\pi$, 从而 $\cos C_2<0, \sin C_2>0$.) 消去参数 t 得 $y=\frac{\sqrt{10}}{3}\sin(3x+C_2)=\frac{\sqrt{10}}{3}(\sin 3x\cos C_2+\cos 3x\sin C_2)$. 代入初值条件得 $\sin C_2=\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos C_2=-\frac{1}{\sqrt{10}}$. 即 $y=\frac{\sqrt{10}}{3}(\sin 3x\cos C_2+\cos 3x\sin C_2)=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

注： 另解中通过 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\sqrt{10-9y^2}$ (其中由初值条件已取 $p>0$)通过变量分离求解可得同样的结果.

14. 设一机器在任意时刻以常数比率贬值. 若机器全新时价值 10000 元, 5 年末价值 6000 元, 求其在出厂 20 年末的价值.

解 设机器的价值为 y 元. 由题意得 $\frac{y'}{y}=-\lambda, \lambda>0$ 为一常数. 解之得 $y=C\mathrm{e}^{-\lambda t}$. 由题意得定解条件为 $y(0)=10000, y(5)=6000$. 因此, $C=10000, \lambda=\ln 0.6^{-\frac{1}{5}}$. 取 $y=10000\cdot(0.6)^{\frac{t}{5}}$. 从而 $y(20)=10000\cdot(0.6)^{\frac{20}{5}}=1296$ 元.

15. 已知需求价格弹性 $\eta(P)=-\frac{1}{Q^2}$, 且当 $Q=0$ 时, $P=100$, 试求价格函数: 将价格 P 表示为需求 Q 的函数.

解 由题意有 $\eta(P)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\frac{P}{Q}=-\frac{1}{Q^2}$. 整理得 $-Q\mathrm{d}Q=\frac{\mathrm{d}P}{P}$. $\ln|C|-\frac{1}{2}Q^2=\ln|P|$, $P=C\mathrm{e}^{-\frac{Q^2}{2}}$. 由 $P(0)=100$ 得 $C=100$, 即 $P=100\mathrm{e}^{-\frac{Q^2}{2}}$.

综合练习十三

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^4 + 3(y'')^3 = 0$ 的阶是 <u>C</u>.

A. 4; B. 3; C. 2; D. 1.

2. 方程 $y' = y\cot x$ 的通解是 <u>B</u>.

A. $y = C\cos x$; B. $y = C\sin x$; C. $y = C\tan x$; D. $y = -\frac{C}{\sin x}$.

解 $y' = y\cot x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow d\ln|y| = \frac{1}{\sin x}d\sin x = d\ln|\sin x| \Rightarrow y = C\sin x$.

3. 下面是可分离变量方程的是 <u>A,B</u>.

A. $y' - xy' = ay^2 + y'$; B. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$; C. $xy' = y\ln\frac{y^2}{x}$; D. $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$.

4. 方程 $e^{x-y}\frac{dy}{dx} = 1$ 通解是 <u>D</u>.

A. $e^x + e^y = C$; B. $e^{-x} + e^{-y} = C$; C. $e^x - e^y = C$; D. $e^{-x} - e^{-y} = C$.

解 $e^{-y}dy = e^{-x}dx \Rightarrow -de^{-y} = -de^{-x} \Rightarrow e^{-x} - e^{-y} = C$.

5. 方程 $y'' = y' + x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$ 的特解是 <u>C</u>.

A. $y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 1$; B. $y = e^x - x^2 - x + 1$; C. $y = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$; D. $y = e^x - x^2 + x - 1$.

解 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$. 故可设特解为 $y^* = x(A_0 + A_1x)$. 代入方程解得 $A_0 = -1, A_1 = -\frac{1}{2}$. 从而方程的通解为 $y = C_1 + C_2e^x - x - \frac{1}{2}x^2$. 再由初始条件得 $C_1 = -1, C_2 = 1$. 从而所求特解为 $y = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

6. 下面为二阶常系数线性齐次方程的是 <u>C</u>.

A. $(y'')^2 + 5y' - 6y = 0$; B. $y'' + 5y' - 6y = x$; C. $y'' - 6y = 0$; D. $y'' - xy = 0$.

7. 方程 $y'' - 2y' = y$ 的特征方程为 <u>D</u>.

A. $\pi^2 - 2\lambda + 1 = 0$; B. $\lambda^2 - 2\lambda = 0$; C. $\lambda^2 + 1 = 0$; D. $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$.

8. 方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解是 <u>B</u>.

A. $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; B. $y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$; C. $y = e^{\sqrt{2}x}[C_1\cos(-x) + C_2\sin(-x)]$; D. $y = e^{-x}\left[C_1\cos(-\sqrt{2}x) + C_2\sin(-\sqrt{2}x)\right]$.

解 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$. 从而方程的通解为 $\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$.

*9. 方程 $y'' - 4y' - 5y = e^{-x} + \sin 5x$ 的特解形式为 <u>D</u>.

A. $y = A_1e^x + B_1\sin 5x$; B. $y = A_1e^{-x} + B_1\cos 5x + B_2\sin 5x$; C. $y = A_1e^x + B_1\cos 5x$; D. $y = A_1xe^{-x} + B_1\cos 5x + B_2\sin 5x$.

解 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$. 对于非齐次项 e^{-x} 有特解 $y_1 = A_1xe^{-x}$, 对非齐次项 $\sin 5x$ 有特解 $y_2 = B_1\cos 5x + B_2\sin 5x$. 再由解的叠加原理就有特解为 $y^* = y_1 + y_2 = A_1xe^{-x} + B_1\cos 5x + B_2\sin 5x$.

*10. 设线性无关函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解为 <u>D</u>.

A. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$; B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$; C. $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$; D. $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

解 由于线性无关函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)$ 的解, 从而 $y_1(x)-y_3(x), y_2(x)-y_3(x)$ 必为相应的齐次线性微分方程的特解, 且**线性无关**(可证明). 所以齐次方程的通解可表示为 $\bar{y} = C_1[y_1(x)-y_3(x)] + C_2[y_2(x)-y_3(x)]$. 非齐次方程的通解则为 $\bar{y} = C_1[y_1(x)-y_3(x)] + C_2[y_2(x)-y_3(x)] + y_3(x)$.

二、填空题

1. 方程 $x^3\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = 0$ 的通解是 $\underline{x^4-2y^2=C}$.

解 $\mathrm{d}\frac{x^4}{4} - \mathrm{d}\frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4}-\frac{y^2}{2} = \frac{C}{4} \Rightarrow x^4-2y^2=C$.

2. 方程 $x\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}x + y\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解是 $\underline{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}=2}$.

解 $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\mathrm{d}(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0, \Rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = C$. 再由初始条件 $y|_{x=0}=0$ 得 $C=2$. 从而特解为 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}=2$.

3. 方程 $y'+2xy-2x\mathrm{e}^{-x^2}=0$ 满足条件 $y|_{x=0}=\mathrm{e}$ 的特解是 $\underline{y=\mathrm{e}^{-x^2}(\mathrm{e}+x^2)}$.

解 $y'+2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$. $y = \mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(C+\int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-x^2}(C+x^2)$. 再由初始条件 $y|_{x=0}=\mathrm{e}$ 得 $C=\mathrm{e}$. 所以特解为 $y=\mathrm{e}^{-x^2}(\mathrm{e}+x^2)$.

4. 方程 $y''+4y'+29y=0$ 满足条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$ 的特解是 $\underline{y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x}$.

解 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+29=0 \Rightarrow \lambda=-2\pm 5i$. 方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$. 再由条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$ 得 $C_1=0, C_2=3$. 从而特解为 $y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$.

*5. 设 $\varphi(x)$ 为连续函数(**改为二阶可导**), 且满足 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$, 则 $\varphi(x) = \underline{\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)}$.

解 方程变为 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ (**注意将积分分成两项方便对 x 求导**). 方程两边同时对 x 求导得 $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$, 再对 x 求导得 $\varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \varphi(x)$. 其特征方程为 $\lambda^2+1=0$. $\lambda=\pm i$. 故可设特解为 $\varphi^*(x) = A\mathrm{e}^x$. 代入方程解得 $\varphi^*(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. 从而方程的通解为 $\varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. 由原积分方程可得初始条件为 $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$. 从而可解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 从而 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)$.

三、求解下列微分方程

*1. 求方程 $xy'+y=y\ln(xy)$ 的通解.

解 令 $u=xy$. 方程变为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy'+y = y\ln(xy) = \frac{u}{x}\ln u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\ln u}{\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \mathrm{d}\ln|\ln u| = \mathrm{d}\ln|x| \Rightarrow \ln u = Cx \Rightarrow \ln(xy) = Cx$.

2. 求方程 $2xy'y''=(y')^2+1$ 的通解.

解 令 $p=y'$. 由此方程变为 $2xpp'=p^2+1 \Rightarrow \frac{2p\mathrm{d}p}{p^2+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(p^2+1)}{p^2+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \mathrm{d}\ln(p^2+1) = \mathrm{d}\ln|x| \Rightarrow C_1x-1=p^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{C_1x-1} \Rightarrow y = \pm\int\sqrt{C_1x-1}\mathrm{d}x + C_2 \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

*3. 求解方程 $\begin{cases} xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}, \ (0<x<+\infty) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 1 \end{cases}$.

解 方程变形为 $y'+\frac{1-x}{x}y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} \Rightarrow y = \mathrm{e}^{\int\frac{x-1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}(C+\mathrm{e}^x)$. 再由

$\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 1$ 得 $C = -1$. 从而方程的解为 $y = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$.

*4. 求方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 - \frac{1}{x^2}$ 的通解.

解 原方程经变形得 $x(xy' + y) = x^2y^2 - 1$. 令 $u = xy$, 则方程进一步变为 $x\frac{du}{dx} = u^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2-1} = \frac{dx}{x}\,(u \neq \pm 1) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln x^2 + \ln|C| \Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = Cx^2 \Rightarrow \frac{xy-1}{xy+1} = Cx^2$ (C 为任意常数时包含解 $xy - 1 = 0$, 但特解 $xy + 1 = 0$ 不能包含在此通解中).

5. 求方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

解 方程变为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$. 令 $z = y^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$. 原方程等号两边同时乘以 $-y^{-2}$ 后再整理得 $-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int(-\frac{1}{x^2})e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right) = Cx + \frac{1}{2x} \Rightarrow y = \frac{2x}{2Cx^2+1}$. 再由初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 得 $C = \frac{1}{2}$. 所以所求特解为 $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

注：亦可由齐次方程求解.

6. 求方程 $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$ 的通解.

解 $y'' - 2y' = 2\cos^2 x = \cos 2x + 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2$. (i) 先讨论方程 $y = y'' - 2y' = 2\cos^2 x = 1$. 其特解为 $y_1^* = Ax$. 代入方程得 $A = -\frac{1}{2}$. 从而特解为 $y_1^* = -\frac{1}{2}x$. (ii) 讨论方程 $y'' - 2y' = cos2x$. 其特解为 $y_2^* = B_1\cos 2x + B_2 \sin 2x$. 代入方程得 $B_1 = B_2 = -\frac{1}{8}$. 从而特解为 $y_2^* = -\frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$. 所以原方程的特解为 $y^* = y_1^* + y_2^* = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$. 从而其通解为 $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x), C_1, C_2$ 为任意常数.

*7. 设 $y = e^x$ 是方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

解 将特解 $y = e^x$ 代入方程 $xy' + p(x)y = x$ 得 $xe^x + p(x)e^x = x \Rightarrow p(x) = x(e^{-x} - 1)$. 所以原方程为 $y' + (e^{-x} - 1)y = 1$.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\int(1-e^{-x})dx}\left(C + \int e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx\right) = e^{x+e^{-x}}\left(C + \int e^{-e^{-x}-x}dx\right)\\
&= e^{x+e^{-x}}\left(C + \int e^{-e^{-x}}de^{-x}\right) = e^{x+e^{-x}}\left(C + e^{-e^{-x}}\right) = Ce^{x+e^{-x}} + e^x
\end{aligned}
$$

由条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 得 $0 = Ce^{\ln 2 + e^{-\ln 2}} + e^{\ln 2} = 2C\sqrt{e} + 2$. 从而 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$. 从而特解为 $y = -e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}} + e^x$.

四、分析题

设函数 $f(x)$ 可微，且满足 $f(x) - 1 = \int_1^x \left[f^2(x)\ln x - \frac{f(x)}{\pi}\right]dx$, 试求 $f(x)$.

提示 积分方程两边同时对 x 求导得 $f'(x) = f^2(x)\ln x - \frac{f(x)}{\pi}$. 显然是 Bernoulli 方程.

五、综合题

当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(x) > 0$, 将曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1, x = a\,(a > 1), y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所产生的立体的体积 $V(a) = \frac{\pi}{3}\left[a^2f(a) - f(1)\right]$, 又曲线过点 $M\left(2, \frac{2}{9}\right)$, 求曲线 $y = f(x)$.

解 $V(a) = \pi\int_1^a f^2(x)dx = \frac{\pi}{3}\left[a^2f(a) - f(1)\right]$. 即 $\pi\int_1^x f^2(x)dx = \frac{\pi}{3}\left[x^2f(x) - f(1)\right]$. 方程两边

同时对 x 求导后得

$$
\begin{aligned}
3y^2 &= 2xy + x^2y' \\
y' + 2x^{-1}y &= 3x^{-2}y^2 \quad \text{(Bernoulli 方程)} \\
-y^{-2}y' - 2x^{-1}y^{-1} &= -3x^{-2} \\
z' - 2x^{-1}z &= -3x^{-2} \quad (z = y^{-1}) \\
z &= \mathrm{e}^{\int 2x^{-1}\mathrm{d}x}\left(C + \int -3x^{-2}\mathrm{e}^{-\int 2x^{-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\
z &= x^2(C + x^{-3}) \\
y &= \frac{x}{Cx^3 + 1}
\end{aligned}
$$

再由曲线过点 $M\left(2, \frac{2}{9}\right)$ 得 $C = 1$. 从而 $y = \frac{x}{x^3+1}$.