2017-2018 高数 B2 期中

一、（7 分）已知三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，又$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$，求$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。

解：因为$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，所以$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角$\theta=0$或$\pi$。

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\pm3\sqrt{3}$$

二、（7 分）判断点$A(2,-1,1)$与原点是在平面$\pi: 5x+3y+z-18=0$的同侧还是异侧，并求A关于此平面π的对称点。

解：记$f(x,y,z)=5x+3y+z-18$。$f(0,0,0)=-18, f(2,-1,1)=-10$，所以$A(2,-1,1)$与原点是在平面$\pi: 5x+3y+z-18=0$的同侧。

过$A(2,-1,1)$点平面π的垂线是

$$\begin{cases}x=2+5t\\ y=-1+3t\\ z=1+t\end{cases}$$

$A(2,-1,1)$点到平面π的距离是$d=\frac{10}{\sqrt{35}}$。

设A点关于π对称的点是$(2+5t,-1+3t,1+t)$，则

$$\frac{|5(2+5t)+3(-1+3t)+1+t-18|}{\sqrt{35}}=\frac{10}{\sqrt{35}}$$

$35t-10=\pm10$，$t=0$或$\frac{4}{7}$。

$t=0$对应A点。$t=\frac{4}{7}$对应A关于π的对称点$\left(\frac{34}{7},\frac{5}{7},\frac{11}{7}\right)$。

三、（6 分）求过点$M(1,-2,3)$的平面，使它与平面$\pi: x+y-z-3=0$垂直，且与直线$L: x=y=z$平行。

解：$\pi: x+y-z-3=0$ 的法向量 $\vec{n}=(1,1,-1)$；$L: x=y=z$ 的 $\vec{s}=(1,1,1)$。

设所求平面的法向量为 $\vec{n}_1=\{A,B,C\}$。根据已知条件，$\begin{cases}A+B+C=0\\A+B-C=0\end{cases}$。解得

$\begin{cases}B=-A\\C=0\end{cases}$。$\vec{n}_1=\{1,-1,0\}$。所求平面是 $x-y-3=0$。

四、(9 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点，(1) 是否连续？(2) 偏导数是否存在？(3) 是否可微？(需证明)

解：$0\le \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$。$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=0$。所以，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f(0,0)$。故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$ 存在。

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$ 存在。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

当 $y=kx$ 时 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$ 与 k 有关，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在。故，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

五、(8 分) 设 $u=f(x+y,xyz)$ 具有一阶连续偏导数，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 所确定，求 $\overrightarrow{gradu}$ 以及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解：$x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 两边微分

$$2xdx + 2e^{y^2}dz + 4yze^{y^2}dy = \cos zdz$$

$$dz = \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}}dx + \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}$$

$$du = f_1(dx + dy) + f_2(yzdx + xzdy + xydz)$$

$$= (f_1 + yzf_2)dx + (f_1 + xzf_2)dy + xyf_2dz$$

$$= \left(f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)dx + \left(f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}$$

$$\overrightarrow{gradu} = \left\{f_1 + yzf_2 + \frac{2x^2yf_2}{\cos z - 2e^{y^2}}, f_1 + xzf_2 + \frac{4xy^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{12} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{13} + zf_2 + yf_2\frac{\partial z}{\partial y} + yz\left(f_{12} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{22}\right)$$

$$+ \frac{\left(2x^2f_2 + 2x^2y\left(f_{21} + \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_{22}\right)\right)\left(\cos z - 2e^{y^2}\right) + 2x^2yf_2\left(\sin z\frac{\partial z}{\partial y} + 4ye^{y^2}\right)}{\left(\cos z - 2e^{y^2}\right)^2}$$

$$= f_{12} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{13} + zf_2 + \frac{4y^2ze^{y^2}f_2}{\cos z - 2e^{y^2}} + yz\left(f_{12} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{22}\right)$$

$$+ \frac{\left(2x^2f_2 + 2x^2y\left(f_{21} + \left(xz + \frac{4xy^2ze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}}\right)f_{22}\right)\right)\left(\cos z - 2e^{y^2}\right) + 2x^2yf_2\left(\frac{4yze^{y^2}\sin z}{\cos z - 2e^{y^2}} + 4ye^{y^2}\right)}{\left(\cos z - 2e^{y^2}\right)^2}$$

六、（8 分）试在曲面 $S: 2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点，使得函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值。

解：$\overrightarrow{AB} = \{1,-1,0\}$。

$$\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{AB}}f(x, y, z) = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = \sqrt{2}(x - y)$$

$$\begin{cases} u = x - y \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L = x - y + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 1 + 4\lambda x = 0 \\ L_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由前二方程知道 $\lambda \neq 0$。$z = 0$。前两方程相加得 $y = -2x$。再由最后方程有 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$。所要求的点是 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$。

七、(8 分)设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$，计算三重积分 $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$。

解：$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy = \frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2 dxdy + \frac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2 dxdy$。

由对称性，

$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\pi R^4$$

$$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy = \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

八、(8 分)计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy$，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$。

解：$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$，$D_2 = \{(x, y) | 1 \geq y \geq x, 0 \leq x \leq 1\}$。

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{y^2} dxdy$$

$$\iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_0^x dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{y^2} dxdy = \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = e-1$$

九、（7 分）设 $z = z(x,y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数，求 $z = z(x,y)$ 的极值点和极值。

解：$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 分别对 x, y 求导

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

在上面方程组中让 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 得

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -6x + 20y - 2z = 0 \end{cases}$$

解得 $x = 3y, z = y$，代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 得

$9y^2 - 18y^2 + 10y^2 - 2y^2 - y^2 + 18 = 0$。解得 $y = \pm 3, x = \pm 9, z = \pm 3$。

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$ 再分别对 x,y 求导并让 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$1 - y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, 10 - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, -6 - 2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y+z}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{10}{y+z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{3}{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = \frac{1}{(y+z)^2} > 0$$

$(3,9)$ 是极小值点，3 是极小值；$(-3,-9)$ 是极大值点，-3 是极大值。

十、（8 分）求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 2 \end{cases}$ 在点 $(2,1,\sqrt{3})$ 处的切线方程和法平面方程。

解：$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 2 \end{cases}$ 的两方程相加得 $x^2 + y^2 - 2x = 1$。

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$x=1+\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta, z=\sqrt{1+2\sqrt{2}\cos\theta}$$

点$(2,1,\sqrt{3})$对应$\theta=\frac{\pi}{4}$。

$$x'=-\sqrt{2}\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}=-1, y'=\sqrt{2}\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}=1, z'=\frac{-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{1+2\sqrt{2}\cos\theta}}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{T}=\left\{-1,1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

切线方程：$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\sqrt{3}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$，

法平面方程：$-x+y-\sqrt{3}z+4=0$。

十一、（8 分）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$绕 z 轴转一周所成的曲面与平面$z=8$所围成的区域。

解：由对称性$\iiint\limits_{\Omega}xdv=0$。旋转面的方程$x^2+y^2=2z$。

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^8 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=2\pi\int_0^8 z^2dz$$

$$=\frac{8^3 2\pi}{3}$$

十二、（8 分）求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在条件$a_1x+a_2y+a_3z=1(a_i>0, i=1,2,3)$下的最小值。

解：$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(a_1x+a_2y+a_3z-1)$，解方程组

$$\begin{cases}L_x=2x+\lambda a_1=0\\L_y=2y+\lambda a_2=0\\L_z=2z+\lambda a_3=0\\L_\lambda=a_1x+a_2y+a_3z-1=0\end{cases}$$

如果$\lambda=0$则$x=y=z=0$，不满足最后一个方程。所以$\lambda\neq 0$。

由前三方程 $x=-\frac{\lambda a_1}{2}$，$y=-\frac{\lambda a_2}{2}$，$z=-\frac{\lambda a_3}{2}$。代入最后一个方程得

$$\lambda=-\frac{2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

$$x=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ y=\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ z=\frac{a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

上面方程组只有这个解，根据问题的实际，这就是所给函数的最小值点。代入 $f(x,y,z)$ 得到最小值 $\frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。

十四、(附加题 3 分) 设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续，又存在常数 $L>0$，使得对于任意两点 $(x,y_1),(x,y_2)$，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$，证明 $f(x,y)$ 连续。

证：任意给定点 (x_0,y_0)。$\forall\varepsilon>0$。

因为函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续，所以存在 $\sigma_1>0$ 使得当 $|\Delta x|<\sigma_1$ 时有

$$|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $\sigma=\min\left\{\sigma_1,\frac{\varepsilon}{2L}\right\}$。当 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\sigma$ 时，

$$|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$
$$\le|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)|+|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$<L|\Delta y|+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。故，$f(x,y)$ 连续。