线性代数

一、 矩阵及其应用(公式的证明可使用定义式展开)

① 矩阵乘法

$$C_{mn} = A_{ms} \times B_{sn}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

即：乘积矩阵第 i 行第 j 列的元等于左边矩阵第 i 行的各元与右边矩阵第 j 列的对应元乘积之和。

① 一般情况下 AB≠BA：BA 可能无意义；即使有意义，其结果不一定有相同的行数与列数；即使有相同的行数与列数，AB 与 BA 也不一定相等；同理一般$(AB)^k \neq A^kB^k$，规定$A^0 = E$。

② 若 AB=BA，则称 A 与 B 乘法可交换。n 阶单位矩阵 E 与任何 n 阶矩阵乘法可交换。

③ 两个非零矩阵之积可能是零矩阵，即由 AB=O 不能得到 A=O 或 B=O；同理 A≠O，AB=AC 不能推出 B=C (**但 A 可逆时则可以推出 B=C**)。

② 转置矩阵

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

① 对称矩阵A^T=A；反对称矩阵$A^T = -A$（特点：主对角线上元素都是 0）

② 任意 n 阶方阵都可以写成对称矩阵与反对称矩阵之和。

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$$

③ 共轭矩阵

当 A=(a_{ij})为复矩阵时，用$\overline{a_{ij}}$表示a_{ij}的共轭复数，则$\bar{A}$=$(\overline{a_{ij}})$称为 A 的共轭矩阵，共轭矩阵满足：

① $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

② $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$

③ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

④ 可逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB=BA=E$$

则称 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵，记为 B=A^{-1}。

若 A 可逆，则 A 的逆矩阵唯一；单位矩阵的逆矩阵就是其本身。

① 对于二阶矩阵，

若$ad-bc \neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

② $(A^{-1})^{-1}$=A； $(kA)^{-1}$=$k^{-1}A^{-1}$； $(A^T)^{-1}$=$(A^{-1})^T$

③ 若A与B都是n阶可逆矩阵，则AB也是n阶可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。同理有$A^{-m}=(A^{-1})^{m}$，其中m是非负整数

④ 对角矩阵

乘法

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{bmatrix}$$

逆矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$ 当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均不为零。

⑤ 逆矩阵的求法

https://wenku.baidu.com/view/b0525966f5335a8102d22078.html

① 利用定义求逆矩阵（若给出恒等式，想办法凑成AB=E的形式）

设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 AB=BA=E（实际上只需AB=E即可），则称A为可逆矩阵，并称B为A的逆矩阵，记为$B=A^{-1}$。

② 初等变换法

求元素为具体数字的矩阵的逆矩阵，常用初等变换法. 如果A可逆，则A可通过初等变换，化为单位矩阵I，即存在初等矩阵$P_1,P_2\cdots,P_S$使

（1）$p_1p_2\cdots p_s A=I$，用A^{-1}右乘上式两端，得：

（2）$p_1p_2\cdots p_s I=A^{-1}$

比较（1）（2）两式，可以看到当A通过初等变换化为单位矩阵的同时，对单位矩阵I作同样的初等变换，就化为A的逆矩阵A^{-1}.

用矩阵表示（A I）$\xrightarrow{\text{初等行变换}}$为（I A^{-1}），就是求逆矩阵的初等行变换法，它是实际应用中比较简单的一种方法. 需要注意的是，在作初等变换时只允许作行初等变换. 同样，只用列初等变换也可以求逆矩阵.

③ 伴随矩阵法

定理2 矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}，其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.$$

当$|A|=0$时，A称为奇异矩阵；

当$|A|\neq 0$时，A称为非奇异矩阵.

定义：行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A_{ij})^{T}$$

称为矩阵A的伴随矩阵.

性质：$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$

用此方法求逆矩阵，对于小型矩阵，特别是二阶方阵求逆既方便、快阵，又有规律可循.因为二阶可逆矩阵的伴随矩阵，只需要将主对角线元素的位置互换，次对角线的元素变号即可.

若可逆矩阵是三阶或三阶以上矩阵，在求逆矩阵的过程中，需要求9个或9个以上代数余子式，还要计算一个三阶或三阶以上行列式，工作量大且中途难免出现符号及计算的差错.对于求出的逆矩阵是否正确，一般要通过$AA^{-1}=I$来检验.一旦发现错误，必须对每一计算逐一排查.

④ 分块矩阵求逆法(仅给出几种常用简单的矩阵类型)

a.准对角矩阵（分块对角矩阵）

设A_{11}、A_{22}都是非奇异矩阵，且A_{11}为n阶方阵，A_{22}为m阶方阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}{}^{-1} & O \\ O & A_{22}{}^{-1} \end{bmatrix}$$

把上述结论推广到每一个子块都是非奇异矩阵的准对角形状矩阵中去，即：

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & & & \\ & A_2{}^{-1} & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_k{}^{-1} \end{bmatrix}$$

b.准三角形矩阵

设A_{11}、A_{22}都是非奇异矩阵，则有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}{}^{-1} & -A_{11}{}^{-1}A_{12}A_{22}{}^{-1} \\ 0 & A_{22}{}^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}{}^{-1} & 0 \\ -A_{11}{}^{-1}A_{21}A_{22}{}^{-1} & A_{22}{}^{-1} \end{bmatrix}$$

此方法适用于大型且能化成对角子块阵或三角块阵的矩阵. 是特殊方阵求逆的一种方法，并且在求逆矩阵之前，首先要将已给定矩阵进行合理分块后方能使用.

⑤ 利用线性方程组求逆矩阵

A^{-1}的第 i 列是 $AX=E_i$的解，其中

$$E_1 = (1,0,0\ldots,0)^T$$
$$E_2 = (0,1,0\ldots,0)^T$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_n = (0,0,0\ldots,1)^T$$

这种方法特别适用于线性方程组AX=B比较容易求解的情形，也是很多工程类问题的解决方法.

⑥ 分块矩阵

① 分块矩阵的转置，需将子块构成的行顺次改成列，然后，还需将每个子块取转置。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad 则\ A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的转置为先大转置，而后小转置.

② 分块矩阵的乘法$A_{ms}\times B_{sn}$：使 A 的列的分法与 B 的行的分法一致。
(比如，A 在第三行第二列划线，则 B 在第三列第二行划线)

③ 矩阵 AB 的第 j 列是矩阵 A 与 B 的第 j 列的乘积：

C=AB=A$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$=(A$\beta_1$, A$\beta_2$，…, A$\beta_n$)

矩阵 AB 的第 i 行是矩阵 A 的第 i 行与矩阵 B 的乘积：

$$C=AB=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}\alpha_1 B\\ \alpha_2 B\\ \cdots\\ \alpha_m B\end{bmatrix}$$

⑦ 矩阵的初等变换（初等行变换、初等列变换）

①高斯消元法：阶梯型方程组（自上而下未知量个数依次减少）

②矩阵的初等行变换：互换矩阵第 i 行和第 j 行的位置（$r_i\leftrightarrow r_j$）；用一个非零常数 k 乘矩阵的第 i 行（kr_i）；将矩阵的第 j 行所有元的 k 倍加到第 i 行的对应元上（r_i+kr_j）。矩阵 A 经初等变换化为 B，称 A 与 B **等价**。

③行**阶梯型**矩阵：

（1）若有零行，则零行位于非零行的下方；

（2）每个首非零元前面零的个数逐行增加。

首非零元为 1，且首非零元所在列的其它元都为 0 的行阶梯型矩阵称为行**最简形**矩阵

④任意 m×n 矩阵 A 总可以经过初等行变换化成行阶梯型矩阵及行最简形矩阵，其中**行最简形矩阵是唯一的**。

⑤任意 m×n 矩阵 A 总可以经过有限次初等变换化为**等价标准型**

$$N=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$$

此标准型由 m,n,r 完全决定，r 是行阶梯型矩阵中非零行的行数。

⑧ 初等矩阵（均可逆，逆矩阵仍是初等矩阵，可口算）

对单位矩阵 E 施行一次初等变换所得到的矩阵。

定理：对 A 施行初等行变换，其结果等于在 A 左边乘以相应的初等矩阵；

对 A 施行初等列变换，其结果等于在 A 右边乘以相应的初等矩阵；

（可通过分块矩阵证明）

定理：n 阶方阵可逆的充要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积。

⑨ 应用

①信息加密问题：**密钥矩阵**

②人口流动问题：**变化矩阵 A**（表征人口迁移规律），Y=AX

③**图的邻接矩阵**

二、 行列式

1. n 阶行列式的定义：基于**逆序数τ：**如果一个较大的数排在一个较小的数前，就称这两个数构成一个逆序，这个排列中所有逆序的总个数称为逆序数。
   所有取自**不同行不同列**的 n 个元乘积的代数和：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中求和指标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 取遍1,2,…,n所有n阶排列。共有n!项求和。

2. 上三角行列式、下三角行列式、对角行列式其值都等于主对角线上元的乘积。
3. 行列式的性质
   ① $|A|=|A^T|$
   ② 任意互换行列式的两行（列），行列式变号。
   ③ 行列式某行（列）的公因子可以提到行列式符号的外面。e.g. $|kA|=k^n|A|$
   ④ 若行列式的第 i 行（列）的每一个元都可以表示为两个元之和，则该行列式可表示为两个行列式之和。
   ⑤ 把行列式的第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列）的对应元上，行列式的值不变。
   ⑥ 行列式乘积法则：设 AB 都是 n 阶矩阵，则$|AB| = |A||B|$
4. 行列式按行（列）展开

定理 3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

定理：n 阶行列式 D=|A|的任一行（列）各元与另一行（列）对应元的代数余子式乘积之和为 0

关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

5. 常见类型 n 阶行列式及计算方法

6. 行列式的应用

①伴随矩阵与逆矩阵 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$

特点：$|A^{*}|=|A|^{n-1}$；若 A 可逆，则$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

②克拉默法则（利用伴随矩阵证明）

有 n **个方程的** n **元**线性方程组 Ax=b 的**系数行列式 D=$|\boldsymbol{A}|$ ≠0**，则线性方程组有唯一解，且$\boldsymbol{x_j}=\frac{\boldsymbol{D_j}}{\boldsymbol{D}}$, j=1, 2, ⋯， n 其中$D_j$是用常数项$b_1$，$b_2$，⋯，$b_n$替换 D 中第 j 列所成的行列式。

定理：齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式$|A|=0$

注：1. 齐次线性方程组一定有解（零解）

2. 若非齐次线性方程组系数行列式$|A|=0$，则方程组**无解或多解**

三、 矩阵的秩与线性方程组

1. 矩阵秩的概念

在 m×n 阶矩阵 A 中，任意取定 k 行 l 列位于这些行列交叉处的 k×l 个元按原来相对顺序构成的矩阵称为矩阵 A 的 k×l **子矩阵**；当 k=l 时，此子矩阵称为 k 阶方阵，其行列式称为矩阵 A 的一个 **k 阶子式**。

如果在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，而所有 r+1 阶子式（如果存在的话）全为 0，那么 D 称为矩阵 A 的一个最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 R(A)，规定零矩阵的秩为 0. A 的秩 R(A)就是矩阵 A 中不等于 0 的子式的最高阶数。

可逆矩阵又称满秩矩阵，不可逆矩阵又称降秩矩阵。

行阶梯型矩阵的秩等于其非零行的行数。

初等矩阵不改变矩阵的秩。

2. **矩阵秩的性质**（熟记）

1. $0 \le R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \le \min(m,n)$

2. $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^T)$

3. 设 k 是个不为零的数，则$R(k\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A})$

4. 若矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则$R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ})$

5. $\max\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\} \le R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$

6. $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$

7. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times s$ 矩阵，则

$$R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\}$$

8. （西尔维斯特不等式）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times s$ 矩阵，则

$$R(\boldsymbol{AB}) \ge R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times s$ 矩阵，且$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \le n$$

3. 线性方程组解的判定

定理：n 元线性方程组 Ax=b

（1）有解的充要条件是 R(A)=R($\tilde{A}$);

（2）有唯一解的充要条件是 R(A)=R($\tilde{A}$)=n;

（3）有无穷多个解的充要条件是 R(A)=R($\tilde{A}$)<n.

⇒定理：n 元齐次线性方程组 Ax=O 有非零解的充要条件是它的系数矩阵 A 的秩 **R(A)<n.**

⇒推论：n 个方程的 n 元齐次线性方程组 Ax=O 有非零解的充要条件是**|A|=0.**

自由未知量个数=未知数个数－方程个数

4. 分块矩阵的初等变换

5. 应用

①交通流量分析

②化学方程式配平

③电路求解（KCL/KVL）

四、 向量空间

1. n 维向量（本质：**有序数组**）

n 维列向量：n×1 矩阵（常默认）

n 维行向量：1×n 矩阵

含有限个向量的有序向量组与矩阵是**一一对应**的

2. 向量组的线性相关性

① 向量组的线性组合

1。向量组： **定义：** 若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合称为**向量组**.

2。向量组的线性组合与线性表示

定义1 对于向量组α_1，α_2，…，α_m，如果有一组数k_1，k_2，…，k_m，使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则称向量β是向量组α_1，α_2，…，α_m的一个线性组合，或称β可由向量组α_1，α_2，…，α_m线性表示。

定理 n 维向量β可由 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示

则：线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\beta$有解

矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$的秩等于矩阵$\tilde{A}=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta)$的秩

当$R(A)=R(\tilde{A})=m$时，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\beta$有唯一解，因而有

推论 n 维向量β可由 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示，且表示式唯一的充要条件是$R(A)=R(\tilde{A})=m$

② 向量组的线性相关性

定义 4.3 设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$都为 n 维向量，若存在一组不完全为零的$k_1,k_2,\cdots k_m$

使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性相关；否则，称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关。

定理 4.2 向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性相关的充要条件是它构成矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$的秩小于向量的个数 m；向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关的充要条件是$R(A)=m$

推论 1 m 个 m 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的充要条件是它构成矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$的行列式$|A|=0$；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是$|A|\neq0$。

推论 2 设 A 为m×n矩阵，则

（1）矩阵 A 的列向量线性相关（无关）的充要条件是 R(A)<n（R(A)=n）

（2）矩阵 A 的行向量线性相关（无关）的充要条件是 R(A)<m（R(A)=m）

性质 1 如果一个向量组的某个部分组线性相关，则其任一部分组也线性相关。若向量组线性无关，则其部分组也线性无关。

性质 2 当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$一定线性相关

性质 3 设有两个向量组

$$T_1:\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj}\right)^T\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

$$T_2:\beta_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1,j},\cdots,a_{nj}\right)^T\ (j=1,2,\cdots,m)$$

若向量组 T_1 线性无关，则向量组 T_2 也线性无关；反之，若向量组 T_2 线性相关，则向量组 T_1 也线性相关.

注意性质 3 与性质 1 的区别，T_1并非T_2的部分组。

③ 线性相关、无关与线性表示的关系

定理 4.3 向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$（$m\geq2$）线性相关的充要条件为其中至少有一个向量可以由其余 m-1 个向量线性表示。

定理 4.4 若向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关，而向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示，而且表示式是唯一的。

注意：定理 4.4 中唯一性的证明（**证明唯一性通常假设不唯一，再证明相等**）

3. 向量组的秩

① 等价向量组（反身性、对称性、传递性）

设有两个向量组T_1：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$；$T_2$：$\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots,\beta_n$，若向量组$T_1$中的每一个向量都可由向量组$T_2$线性表示，则称**向量组$T_1$可由向量组$T_2$线性表示**。又若向量组$T_1$和向量组$T_2$可以相互线性表示，则称向量组$T_1$和向量组$T_2$等价。

讨论：若 A=BC，则 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示，表示式的系数矩阵为 C；A 的行向量组可由 C 的行向量组线性表示，表示式的系数矩阵为B^T。

定理 4.5 若向量组$T_1:\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$可由向量组$T_2:\beta_1,\ \beta_2\cdots\beta_n$线性表示，且$m>n$，则向量组$T_1$线性相关

推论 1 若向量组$T_1:\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$可由向量组$T_2:\beta_1,\ \beta_2\cdots\beta_n$线性表示，且向量组$T_1:\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性无关，则$m\leq n$

推论 2 若两个线性无关向量组等价，则他们所含的向量个数相等

定理 4.6 矩阵 A 经初等行变换化成 B，则

（1）矩阵 A 与 B 任何对应的列向量构成的列向量组有相同的线性组合关系；

（2）矩阵 A 的行向量与 B 的行向量等价

证明要点：矩阵 A 经初等行变换化成 B⇔B=PA，P 为可逆矩阵

② 向量组的极大线性无关组及秩

定义 4.5 设向量组 T 的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 满足：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性无关

（2）向量组 T 中每一个向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性表示

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 是向量组 T 的一个极大线性无关组，简称极大无关组

极大性：向量组的极大线性无关组是该向量组的所有线性无关部分组中含向量最多的向量组

极小性：向量组的极大线性无关组是所有与该向量组等价的部分组中含向量最少的向量组

定义 4.6 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 的极大线性无关组所含的向量个数称为该向量组的秩，记作

$$R（\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m）$$

定理 4.7 矩阵的秩等于它列向量组的秩，也等于它行向量组的秩

定理 4.8 若向量组 T_1 可由向量组 T_2 线性表示，则向量组 T_1 的秩不超过向量组 T_2 的秩

推论 等价向量组的秩相等

4. n 维向量空间

① 向量空间的概念

定义 4.7 设 V 是 n 维向量构成的非空集合且满足：

（1）对于任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta\in V$；

（2）对任意 $\alpha\in$ V 及任意数 k，有 $k\alpha\in v$；

则称集合 V 为 n 维向量空间.（即：一个非空 n 维向量的集合 V 要构成一个向量空间，必须满足加法和数乘运算的封闭性.）

定义 4.8 设有向量空间 V_1 与 V_2，若 $V_1\subset V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间.

② 向量空间的基与维数

定义 4.9 如果向量空间 V 中的 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 满足：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

（2）V 中的任一向量 α 都可 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为向量空间 V 的一个基，向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 分别称为基向量，基向量的个数 m 称为向量空间 V 的维数，记为 dimV，并称 V 是 m 维向量空间.(若 V 没有基，则其维数为 0，即零空间没有基，它的维数是 0.）

另： 1）m 维向量空间 V 中任意一个 $m+1$ 个向量一定线性相关，因而 m 维向量空间 V 中任意 m 个线性无关的向量都是向量空间 V 的基；

2）任何由 n 维向量构成的向量空间的维数都不超过 n.

定义 4.10 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 维向量空间 V 的一个基，对 $\beta\in V$，有

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$$

组合系数构成向量（$x_1+x_2,\cdots,x_m$）^{T} 称为 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 下的坐标.

含义：向量空间 V 是其基所生成的向量空间，若把向量空间 V 看做向量组，向量空间 V 的基就是向量组 V 的极大线性无关组，向量空间 V 的维数就是向量组 V 的秩。

③ 基变换与坐标变换

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$及$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$是$n$维线性空间$V$的两组基，且

$$\begin{cases}\varepsilon_1'=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\ \varepsilon_2'=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n'=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\end{cases},$$

即 $\boxed{(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,}$ 基变换公式

其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$. 过渡矩阵（可逆）

设V中的元素α在基两组下的坐标分别为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\ (x_1',x_2',\cdots,x_n')^T,$$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

$\boxed{(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A}$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix},$$

由基向量的线性无关性，得坐标变换公式

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=A\ (x_1',x_2',\cdots,x_n')^T,$$

$$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T=A^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T.$$

5. 向量的内积与正交矩阵

定义4.11 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$是任意两个$n$维向量，称数$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$为向量$\alpha$与$\beta$的内积，记作$\langle\alpha,\beta\rangle$，即$\langle\alpha,\beta\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.且$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$.

附：当α与β都是n维向量时，定义α与β的内积为$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha^T\beta$

内积的运算性质

(1)对称性 $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$;

(2) 线性性 $\langle k\alpha+l\beta,\gamma\rangle=k\langle\alpha,\gamma\rangle+l\langle\beta,\gamma\rangle$;

(3) 非负性 $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$,当且仅当$\alpha=0$时，$\langle\alpha,\alpha\rangle=0$;

(4)柯西—施瓦茨不等式 $\langle\alpha,\beta\rangle^2=\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$

以上α，β，$\gamma\in R^n$,k,l为任意实数.

定义4.12 设有n维向量$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,称数$\sqrt{<\alpha,\alpha>}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$为向量$\alpha$的长度（或范数），记为$\|\alpha\|$.

向量的长度的性质

(1)当 $\alpha \neq 0$ 时，$\|\alpha\| > 0$；当且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\|\alpha\| = 0$；

(2) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$；

(3) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$；

单位向量：长度为1；若 $\alpha \neq 0$，$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是与 α 同方向的单位向量，

称其为 α 的单位化向量.

定义4.13 设 α 和 β 是 n 维非零向量，称

$\theta = \arccos\frac{<\alpha,\beta>}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \theta \in [0,\pi]$ 为 n 维向量 α 和 β 的夹角

如果 $<\alpha,\beta>=0$，称向量 α 和 β 正交（或垂直）.零向量与任何向量正交

定理4.9 若n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

定义4.14 设向量空间V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的正交基.若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是两两正交的单位向量，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 V 的标准正交基（或规范正交基）

施密特正交化方法：把一个线性无关向量组改造成一个与其等价的正交向量组（详见 P118，转换公式及几何意义都要掌握）

定义4.15 如果n阶实方阵A满足 $A^TA=E$，则称A为正交矩阵.

正交矩阵的性质：

(1) 单位矩阵E和矩阵A= $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ 为正交矩阵.

(2) 正交矩阵A一定是可逆矩阵且其逆 $A^{-1}=A^T$.

(3)若 A 为正交矩阵，则其行列式 $|A|=1$ 或-1.

(4)若 A 为正交矩阵，则 A^{-1}, A^T, A^* 也是正交矩阵.

(5)若 A, B 均是 n 阶正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵.

(6) n 阶方阵A是正交矩阵的充要条件是A的列（行）向量组是 R^n 的一组标准正交基.

6. 线性方程组解的结构

一些结论：

（1）若（**A|b**）$\xrightarrow{初等行变换}$（**B|d**），则线性方程组 **Ax=b** 与 **Bx=d** 同解

（2）**Ax=0** 有非零解⇔R(A)＜n，n 为未知量的个数⇔A 的列向量组线性相关

（3）**Ax=b** 有解⇔ R(A)=R($\tilde{A}$). ⇔**b** 可由 **A** 的列向量组线性表示

（4）若 R(A)=R($\tilde{A}$)=r，则当 r=n 时，**Ax=b** 有唯一解；当 r＜n 时，**Ax=b** 有无穷多个解

① 齐次线性方程组解的结构

性质 1 若$\boldsymbol{\xi_1}$，$\boldsymbol{\xi_2}$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意两个解，则$\boldsymbol{\xi_1}+\boldsymbol{\xi_2}$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解.

性质 2 若$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解，$k$ 为任意数，则$k\boldsymbol{\xi}$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解

定义 4.16 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解空间 V 被称为该方程组的基础解系。

的基

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的通解可表示为

$$C_1\boldsymbol{\xi_1}+C_2\boldsymbol{\xi_2}+\cdots+C_{n-r}\boldsymbol{\xi_{n-r}}$$

定理 4.10 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若$R(\boldsymbol{A})=r<n$则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$有基础解系，且每个基础解系都含$n-r$个解向量

② 非齐次线性方程组

性质 3 设$\boldsymbol{\eta_1}$，$\boldsymbol{\eta_2}$为非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任意两个解，则$\boldsymbol{\eta_1}-\boldsymbol{\eta_2}$是齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解

性质 4 设$\boldsymbol{\eta}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\xi}$为齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

定理 4.11 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的**特解**，$\boldsymbol{\xi_1}$，$\boldsymbol{\xi_2}$，…，$\boldsymbol{\xi_{n-r}}$为$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+C_1\boldsymbol{\xi_1}+C_2\boldsymbol{\xi_2}+\cdots+C_{n-r}\boldsymbol{\xi_{n-r}}$$

其中，C_1，C_2，…，C_{n-r}为任意常数

7. 应用

情报检索模型、投入产出模型

五、 相似矩阵

1. 方阵的特征值与特征向量

① 定义

Definition 1 设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 使关系式 $\boxed{Ax=\lambda x}$ （1）

成立，则称 λ 为 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

② 特征方程与特征多项式

由（1）式可知，若λ是矩阵 A 的特征值，α为属于λ的特征向量，则α是齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$的非零解。$\Rightarrow |\lambda E-A|=0$，称$|\lambda E-A|$为矩阵 A 的**特征多项式**，方程$|\lambda E-A|=0$为矩阵 A 关于$\lambda$的**特征方程**。A 的特征值就是 A 的特征方程的根。

代数基本定理：一元 n 次方程在复数范围内恰有 N 个根，所以 **n 阶矩阵 A 有 n 个特征根**。

通常把齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$的解空间称为矩阵 A 对应于特征值λ的**特征子空间**。其维数称为特征值λ的**几何重数**，它就是**属于特征值λ的线性无关特征向量的最大个数**。

③ 特征值与特征向量求解步骤

- 计算 n 阶矩阵 A 的特征多项式$|\lambda E-A|$；
- 求**特征方程**$|\lambda E-A|=0$的所有根λ_1，λ_2，…，λ_n，即矩阵 A 的全部特征值。对于每个特征值λ_i，求齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)x=0$的一个**基础解系x_1，x_2，…，x_t**，于是 A 的属于特征值λ_i的全部特征向量为 $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_tx_t$，其中$k_1$，$k_2$，…，$k_t$是不全为 0 的数

④ 特征值的性质

- 设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，则

  （1）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$；

  （2）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$.

  推论：设 A 为 n 阶方阵，则|A|=0 的充要条件是数 0 为矩阵 A 的特征值；n 阶方阵 A 可逆的充要条件是每一个特征值都不为 0.

- 设λ是方阵 A 的一个特征值，x 是 A 的对应于特征值λ的特征向量，则有

  （3）当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值；

  （4）当 A 可逆时，$\frac{|A|}{\lambda}$是A^*的特征值;

  （5）f(x)是 x 的一个一元多项式，则 $f(\lambda)$是 f(A)的一个特征值，并且 x 仍是矩阵A^{-1}，A^*，f(A)分别对应于特征值$\frac{1}{\lambda}$，$\frac{|A|}{\lambda}$，$f(\lambda)$ 的特征向量

- 设λ_1，λ_2，…，λ_m是方阵 A 的 m 个互不相同的特征值，x_1，x_2，…，x_m依次为与之对应的特征向量，则x_1，x_2，…，x_m线性无关。

  推广：矩阵 A 的 m 个互不相同特征值所对应的 m 组各自线性无关的特征向量并在一起仍是线性无关的。

- 设λ是 n 阶方阵 A 的一个 k 重特征值（λ为特征方程的 k 重根），对应于λ的线性无关的特征向量的最大个数为l，则 k≥l，即特征值λ的**代数重数不小于几何重数**。

2. 相似矩阵

① 定义：设 A,B 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶方阵 P，使

$$P^{-1}AP = B$$

则称 A 相似于 B，记作 A~B；**可逆矩阵 P** 称为把 A 变到 B 的**相似变换矩阵**。

相似矩阵性质：

- 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值；
- 秩相等，行列式相同，迹相同；
- 若 A 与 B 均可逆，则A^{-1}与B^{-1}也相似；
- kA 与 kB，A^{m}与B^{m}相似，k 为任意常数，m 为任意非负整数；
- 若 f(x)是任意多项式，则矩阵 f(A)与 f(B)相似。

② 如果 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵Λ，则称 A **可对角化**。

定理：n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 由 n 个线性无关的特征向量。

- 推论 1：如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 必可对角化；
- 推论 2：n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 的每个 r 重特征值恰有 r 个线性无关的特征向量。

3. 实对称矩阵的相似矩阵

① 定理：实对称矩阵 A 的任一特征值都是实数。

② 定理：A 为实对称矩阵，则 A 的属于不同特征值的特征向量必正交。

③ 定理：设 A 为 n 阶实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q，

使$\boldsymbol{Q^T A Q = Q^{-1} A Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{\lambda_n} \end{bmatrix}$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$为 A 的特征值。

推论：设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ是 A 的 r 重特征值，则 A 必有对应于特征值λ的线性无关向量。

④ 对于实对称矩阵，求正交矩阵使$Q^{-1}AQ$为对角矩阵步骤：

（1）求 A 的全部不同的特征值λ_1，λ_2，…，λ_m，其重数分别为r_1，r_2，…，r_m；

（2）对每个特征值λ_i（i=1,2,⋯,m），求出齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$的一个基础解系，将其正交化，得 A 的r_i个属于特征值λ_i的正交特征向量，共求出 A 的$r_1 + r_2 + +r_m$=n 个两两正交的特征向量；

（3）将以上 n 各正交的特征向量单位化，由所得的正交单位特征向量作为列构成正交矩阵 Q，则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_n)$$

4. 若尔当标准型简介

5. 应用

利用矩阵相似对角化简化A^n的计算$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$：

① 环境保护与工业发展问题

② 差分方程的求解

利用$P^{-1}AP = \Lambda$和**线性变换**，用矩阵方法解方程：

③ 线性常系数常微分方程组

六、 二次型

1. 二次型及其矩阵表示

① 定义

含n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{nn}x_n^2 \qquad (*)$$

称为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一个n元二次型。

仅含平方项的二次型称为标准形式的二次型，简称**标准型**。

若令 $\boxed{a_{ij}=a_{ji} \quad (i<j)}$

则(*)可改写为如下形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (**)$$

为了更有效地研究二次型，可将(**)用如下矩阵形式表示。

二次型的矩阵表示：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$
$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+$$
$$x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

所以有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, A=(a_{ij})_{n\times n}$,

二次型的矩阵表达式：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$,

实对称矩阵A(a_{ij}为实数，即$\overline{a}_{ij}=a_{ij}$，且$a_{ij}=a_{ji}$)为二次型f 的矩阵，二次型f为实对称矩阵 A 的二次型。

矩阵 A 的秩称为二次型 f(**x**)的秩，二次型的矩阵一定是**对称矩阵**。

② 合同矩阵

2．2．1 **合同矩阵定义** 设A,B均为n阶方阵，若存在可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$，则称矩阵A与B合同，记$A\simeq B$

合同是矩阵之间的另一种关系，它满足

（1）反身性，即$A=E^TAE$；

（2）对称性，即若$B=C^TAC$，则有$A=\left(C^{-1}\right)^TBC^{-1}$；

（3）传递性，若$A_1=C_1^TAC_1$和$A_2=C_2^TA_1C_2$，则有$A_2=\left(C_1C_2\right)^TA\left(C_1C_2\right)$

因此，经过非退化的线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的.

在数域 P 中要使两个二次型等价，充分必要条件就是它们的矩阵合同.

2.2.2 合同矩阵的性质

性质1 合同的两矩阵有相同的二次型标准型.

性质2 在数域 P 上，任一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

性质3 矩阵合同与数域有关.

定理：若 A 与 B 合同且 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵，且 R(A)=R(B)

2. 化二次型为标准型

① 正交变换法

性质：正交变换保持向量的**内积、范数、夹角**不变。

定理6.1 对任意n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，必存在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，使

$$\boxed{f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2}$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值；$\boldsymbol{Q}$ 的n个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的 n个单位正交特征向量。

正交变换法可以将任何二次型通过正交变换化为标准形。正交变换是相似的(保持特征值不变)，也是保形的(正交变换保持几何形状不变)。

② 配方法

定理6.2 对任意 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，都可用配方法找到非退化线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$，使二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为标准形。

P174 通过**实例掌握**配方法。

③ 初等变换法

求可逆矩阵 C，使得 C^TAC=Λ

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{E}P_2 \ldots P_m]{P_m{}^T \ldots P_2{}^T P_1{}^T A P_1 P_2 \ldots P_m} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

P176 通过**实例掌握**

3. 正定二次型

① 惯性定理

定理1 一个 n 元二次型 $f = X^{T}AX$ 经过不同的满秩线性变换化为标准形后，标准形中正平方项的项数 p 和负平方项的项数 q 都是由原二次型唯一确定的，且 $p+q=r(A)$，其中 $r(A)$ 为矩阵 A 的秩.

其中 p 称为二次型 f 的正惯性指数，q 称为二次型 f 的负惯性指数，它们的差 p-q 称为二次型 f 的符号差。

定义1 称二次型 f 的标准形中正平方项的项数 p 为二次型 f 的正惯性指数，负平方项的项数 q 为负惯性指数. 若二次型 f 的标准形为如下形式

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

则称为**规范标准形**，简称**规范形**. 其中 r 为二次型的秩.（规范形是唯一的）

二次型的**标准型是不唯一的，而规范型是唯一的**。

定理：任何实对称矩阵必合同于形如下式的对角矩阵。

$$\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{bmatrix}$$

② 正定二次型

定义 6.5 设有 n 元实二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.如果对任何非零向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$，都有 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为正定二次型，并称对称矩阵 A 为正定矩阵。如果对任何非零向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$，都有$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$，则称$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为负定二次型，并称对称矩阵 A 为负定矩阵。

定理 6.6 可逆线性变换不改变二次型的正定性。

推论 与正定矩阵合同的实对称矩阵也是正定矩阵。

定理 6.7 设$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是 n 元实二次型，则下列命题等价：

（1）$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是正定二次型，即 A 是正定矩阵；

（2）A 的特征值都为正数；

（3）$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$正惯性指数为 n；

（4）A 与单位矩阵 E 合同；

（5）存在可逆矩阵 B，使得 A=B^TB.

推论 设 A=(a_{ij})是 n 阶正定矩阵，则

（1）矩阵 A 的主对角元a_{ii}＞0；

（2）|A|＞0.

定义 6.6 设 A=(a_{ij})是 n 阶方阵，依次取 A 的前 k 行和前 k 列所构成的子式，称为矩阵 A 的 k 阶顺序主子式Δ_k，k=1,2,⋯,n

定理 6.8 n 元实二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$正定的充要条件是 A 的 n 个顺序主子式全大于 0.

定理 6.9 设$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是 n 元实二次型，则下列命题等价：
（1）$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是负定二次型；
（2）f的负惯性指数为 n；
（3）A 的特征值都为负数；
（4）A 合同于$-$E；
（5）存在可逆矩阵 B，使得 A=$-B^TB$;
（6）A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正，即$(-1)^k\Delta_k>0$

定义 6.7 设$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是 n 元实二次型，对任意非零向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in\boldsymbol{R}^n$.
（1）如果都有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$，则称$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为半正定二次型，并称矩阵 A 为半正定矩阵;
（2）如果都有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0$，则称$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为半负定二次型，并称矩阵 A 为半负定矩阵;
（3）如果二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$既不是半正定的，又不是半负定的，则称$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为不定的，并称矩阵 A 为不定矩阵.

定理 6.10 设$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是 n 元实二次型，则下列命题等价：
（1）$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为半正定二次型;
（2）$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$正惯性指数等于$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$的秩;
（3）实对称矩阵 A 的特征值都大于或等于 0;
（4）实对称矩阵 A 的各阶主子式都大于或等于 0;（不是顺序主子式）
（5）存在 n 阶实矩阵 P，使得 A=P^TP.

4. 应用

① 多元函数的极值问题（正定、负定二次型）

② 二次曲面的分类（正交变换）

（有多的时间可以研究一下各种定理公式的证明）

七、 常见面试题

1. 矩阵的秩的含义？

基本概念：

矩阵的秩就是矩阵中不等于 0 的子式的最高阶数。

行阶梯型矩阵的秩等于其非零行的行数。

与向量组的关系：

矩阵的秩等于它列向量组的秩，也等于它行向量组的秩。

向量组的秩定义为向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

与向量空间的关系（几何意义）：

任何矩阵的行空间的维数等于矩阵的列空间的维数等于矩阵的秩。

与线性方程组解的关系：

定理 4.10 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若$R(A)=r<n$则齐次线性方程组

$Ax=0$有基础解系，且每个基础解系都含$n-r$个解向量

与线性变换的关系：

所谓一个线性变换的秩，无非就是变换后，还能保持非零体积的几何形状的最大维度。

有时候，虽然 A 并不能保持把空间一组最大数目矢量的线性无关性，但它能保证一组更少数目矢量的线性无关性。这个数目往往少于 A 的维度（或者说，线性空间的维度），这个数目就叫做线性变换 A 的**秩**。

例如，一个秩为 2 的三乘三矩阵 A。因为秩小于 3，那么任何一个 3 维六面体经过他的变换后，体积都为零（退化一个面）；但存在一个面积不为零的面，在变换之后还可以是一个非零面积的面。

2. 线性相关的含义？

公式定义：

定义 4.3 设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$都为 n 维向量，若存在一组不完全为零的 $k_1,k_2,\cdots k_m$

使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性相关；否则，称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关。

几何意义：

一组矢量的线性相关性本质上，是描述他们所张成的广义平行四边形体积是否为零。**N 个向量线性无关 ⇔ 他们所张成的 N 维体体积不为零**。于是有：线性无关矢量组成的矩阵的行列式不为零；线性相关矢量组成的矩阵的行列式必为零。

我们仍然从最简单的 2 维空间出发。如果两个 2 维空间的向量是线性相关的，那么就是说，其中一个与另外一个共线，也就是说，他们所张成的四边形，面积是零。反之，如果线性无关，则不共线，则面积不为零。

同理，如果三个三维空间的向量是线性无关的，那么他们三者就不共面。因此他们所张成的平行六面体，体积不是零。

更进一步地，我们知道，二维空间如果给定三个向量，他们必定共面（二维空间内不可能存在一个"体积"），因此他们必定线性相关。**推而广之，我们不难理解，为什么一个维度为N 的空间内，任意一组M 个向量（M>N）必定线性相关了：因为维度大于空间维度的超平形四边体不存在。**

3. 行列式的含义？

基本概念：

所有取自**不同行不同列**的 n 个元乘积的代数和：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中求和指标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 取遍**1,2,…,n**所有**n**阶排列。共有**n!**项求和。

本质含义（几何意义）：

行列式就是在给定一组基下，N 个向量张成的一个 N 维广义四边形的体积。2 阶行列式代表的是平面内的面积；3 阶行列式自然而然就是 3 维空间内的体积；4 阶行列式是 4 维空间里的超体积。

与线性映射的关系：

A 的行列式如果不为零，则代表这个变换后，N 维体的体积不是 NULL。又结合线性无关与体积的性质，我们可以说：

如果 A 的行列式不为零，那么A 可以把一组线性无关的矢量，映射成一组新的，线性无关的矢量；A 是可逆的（一对一的映射，保真映射，KERNEL 是{0}）

如果 A 的行列式为零，那么A 就会把一组线性无关的矢量，映射成一组线性相关的矢量；A 就不是可逆的（非保真映射，KERNEL 不是{0}。我们可以研究他的陪集）

如果 A 的行列式为负数，那么A 将会改变原 N 维体体积的朝向。

从线性无关到线性相关，其中丢失了部分信息，因此这个变换显然就是不可逆的. 线性是否无关和所张成N 维体的体积有直接关系，这个体积值又与A 的行列式有关。因此我们就建立了 A 的行列式与其是否可逆的几何关系。

举例说明，我们假设 A 是一个 3 维的矩阵。如果映射前，有一组三个线性无关的矢量，我们知道它们张成的体积不是 0；经过映射后，他们对应的新矢量也能张成一个平行六面体，那么这个平行六面体的体积就是原体积乘以 A 的行列式。

显然，如果 A 的行列式是 0，那么变换后的新"平行六面体"的体积将不可避免的也是 0。根据上文的结论，我们有：变换后的这一组新矢量 **线性相关**。

结论：

线性变换 A 的行列式是否为零，就代表了其映射的保真性，也即，能不能把一组线性无关的矢量变换成另一组保持无关性的矢量。

4. 矩阵的特征值与特征向量有什么关系？

① 一个特征值可能对应多个特征向量，一个特征向量只能属于一个特征值；

② 属于不同特征值的特征向量一定线性无关；

③ 设λ是 n 阶方阵 A 的一个 k 重特征值（λ为特征方程的 k 重根），对应于λ的线性无关的特征向量的最大个数为l，则 k≥l，即特征值λ的**代数重数不小于几何重数**。