第 11 章　曲线积分与曲面积分

第 1 节　对弧长的曲线积分

1.1　对弧长的曲线积分的概念与性质

背景例子。

【例 1.1】　设有一平面物质曲线 L，其线密度为 $f(x,y)$，求 L 的质量 M .

解　我们象以前处理类似问题一样采取下面四个步骤计算。

(1) 分割：在 L 上插入分点 $A=M_0, M_1, \cdots M_i, \cdots M_n=B$（如图 1.1）

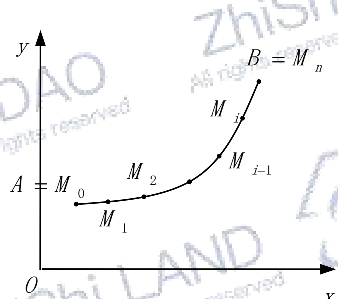

图 1.1

(2) 近似：记 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i，质量为 ΔM_i（ΔM_i 是无法算得的）。在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，把 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上的线密度近似看作常数 $f(\xi_i,\eta_i)$，则 $\Delta M_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，$(i=1,2,\cdots n)$；

(3) 求和：L 的质量 $M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(4) 取极限：记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$。当 $\lambda\to 0$ 时，每段 $\Delta s_i \to 0$，误差趋于 0。因此，$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

用这样方法计算的例子还有千千万万。为了一次性讲完千千万万个这样的例子，我们给出下面的定义。

定义 1.1　设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 为 xOy 平面上的曲线，$f(x,y)$ 为在 L 上有定义的有界函数。

(1) 分割：在 L 上插入分点 $A=M_0, M_1, \cdots M_i, \cdots M_n=B$ 。

(2) “近似”：记 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i。在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，计算 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，$(i=1,2,\cdots n)$；

(3) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(4) 取极限：记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$（当 $\lambda\to 0$ 时，每段 $\Delta s_i\to 0$）。

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \begin{cases}\text{不存在，则说 } f(x,y) \text{ 在 } L \text{ 上对弧长不可积；}\\ = A \text{ 存在，则称 } A \text{ 为 } f(x,y) \text{ 在 } L \text{ 上对弧长的曲线积分, 记为}\end{cases}$$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \overset{\text{定义}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}s$ 称为积分表达式，x,y 称为积分变量，$\mathrm{d}s$ 称为弧长元素（或弧长微分），L 称为积分曲线。

积分变量总在积分曲线 L 上变化。

对弧长的曲线积分也称为第一类曲线积分。

这样，例 1.1 中的质量 $M=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 $f(x,y)$ 是线密度函数．当 $f(x,y)$ 有各种各样实际意义的时候，$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 也相应地有各种各样的实际意义。一次性讲完了千千万万个例子。

$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 简单地表示 L 是闭曲线。

对弧长的曲线积分的几何意义：设 L 是 xOy 平面上的曲线。在空间中有一个以 L 为底，母线平行于 z 轴，高度函数为 $f(x,y)$ 的曲顶梯形柱面。如果 $f(x,y)\ge 0$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 就是此曲顶梯形柱面的面积；如果 $f(x,y)\le 0$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 就是此曲顶梯形柱面的负面积；如果 $f(x,y)$ 有时正有时负，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 是正、负面积的代数和。

关于积分的存在性，有如下结论：

若 $f(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续，则积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在.

类似地，可定义 $\boldsymbol{R}^3$ 中对弧长的曲线积分如下。

定义 1.1' 设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 为空间中曲线，$f(x,y,z)$ 为在 L 上有定义的有界函数。

(1) 分割：在 L 上插入分点 $A=M_0,M_1,\cdots M_i,\cdots M_n=B$。

(2) “近似”：记 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i。在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，计算 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$，$(i=1,2,\cdots n)$；

(3) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$；

(4) 取极限：记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$（当 $\lambda\to 0$ 时，每段 $\Delta s_i\to 0$）。

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\begin{cases}\text{不存在，则说 } f(x,y,z) \text{ 在 } L \text{ 上对弧长不可积；}\\ =A \text{ 存在，则称 } A \text{ 为 } f(x,y,z) \text{ 在 } L \text{ 上对弧长的曲线积分，记为}\end{cases}$$

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s\overset{\text{定义}}{=}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

容易得到 $\int_L ds=\int_L ds=s$，$\int_L 0ds=0$。其中 s 是积分曲线 L 的弧长.

与定积分类似，对弧长的曲线积分有如下性质（以平面的为例，下面出现的积分都假设存在）：

(1) **线性性**：若 a 为常数，则

$$\int_L af(x,y)\mathrm{d}s=a\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

$$\int_L [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\pm\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

常数因子可提出来。

(2) **积分区域可加性**：若分段光滑曲线 L 由两段曲线 L_1,L_2 拼成，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

(3) **单调性**：若在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\le\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

(4) **绝对可积性**：若 $f(x,y)$ 可积，则 $|f(x,y)|$ 可积，且有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\le\int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s$$

(5) **积分中值定理**：若 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in L$，使得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=f(\xi,\eta)s \quad (\text{这里 } s \text{ 为 } L \text{ 的弧长})$$

1.2　对弧长的曲线积分的计算法

对弧长的曲线积分可化为定积分计算，方法如下面定理。(要复习上学期的弧长微分和弧长计算!)

定理 1.1　设 xOy 平面上的曲线 $\overset{\frown}{AB}=L$ 的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[a,b],\tag{1.1}$$

其中 $x'(t),y'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，$f(x,y)$ 在 L 上连续，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在且有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\tag{1.2}$$

证　不妨设 $(x(a),y(a))=A,(x(b),y(b))=B$。对 $[a,b]$ 作任一分割：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，记 $M_i=(x(t_i),y(t_i))(i=0,1,\cdots,n)$，$L$ 上有分割：$A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B$。由积分中值定理，$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\Delta t_i,\ \tau_i\in[t_{i-1},t_i].$$

(1.2) 左右两边都可积，计算时可特殊分割和特殊取点。在每段弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上取点 $(\xi_i,\eta_i)=(x(\tau_i),y(\tau_i))$。记 $\lambda=\max\{\Delta s_i\,|\,i=0,1,\cdots,n\},\lambda'=\max\{\Delta t_i\,|\,i=0,1,\cdots,n\}$，由于连续性，$\lambda\to 0\Leftrightarrow\lambda'\to 0$。则

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\\&=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\Delta t_i\\&=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记住：把 $x=x(t),y=y(t)$ 和平面弧长微分 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ 代入，且上下限分别为曲线两端点的参数值 a,b（下限 $a\leq$ 上限 b）。

小技巧： 如果 $L:y=f(x)(a\leq x\leq b)$，则 $L:\begin{cases}x=x\\ y=f(x)\end{cases}(a\leq x\leq b)$ 用 x 作参数。（如果 $L:x=f(y)(c\leq y\leq b)$ 呢？）

定理 1.1′　设空间曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (t \in [a,b]) \\ z = z(t) \end{cases}, \tag{1.1'}$$

其中 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t) \neq 0$，$f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 存在且有

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.2'}$$

证　与定理 1.1 的证明类似。

记住：把 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 和空间弧长微分 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ 代入，且上下限分别为曲线两端点的参数值 a,b（下限 $a \le$ 上限 b）。

(信)小技巧： 如果 $L:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases} (a \le x \le b)$，则 $L:\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \; (a \le x \le b) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 用 x 作参数。（如果 $L:\begin{cases} x=\varphi(y) \\ z=\psi(y) \end{cases} (a \le y \le b)$ 或 $L:\begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z) \end{cases} (a \le z \le b)$ 呢？）

注意： 我们只用曲线的参数方程计算曲线积分。

思考一下： 平面（第一类曲线积分）是空间（第一类曲线积分）的特例。

【例 1.2】　设曲线 L 为 $\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta, \end{cases}$ $0 \le \theta \le \pi$，求 $I=\int_L yx^2\,\mathrm{d}s$.

解　$x' = -R\sin\theta, y' = R\cos\theta, ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta = R\,d\theta$。

$$I = \int_0^{\pi} R\sin\theta (R\cos\theta)^2\sqrt{R^2(-\sin\theta)^2+R^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi} R^4\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -R^4\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}R^4.$$

【例 1.3】 求 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t, z=bt$，$0\le t\le 2\pi, a,b>0$.

解 $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b, ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt$。

$$I=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt=\frac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2}\,(3\pi a^2+4b^2\pi^3)\right).$$

【例 1.4】 求 $I=\int_L xy^2\mathrm{d}s$，L 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 为顶点的三角形边界.

解 由于积分曲线有表示式不一样的三段，如图 1.2，积分分成三段积。

$\overline{OA}$ 的方程为 $\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases}$，$0\le x\le 1$，$x$ 作参数；

$\overline{AB}$ 的方程为 $\begin{cases}x=1\\ y=y\end{cases}$，$0\le y\le 1$，$y$ 作参数；

$\overline{BO}$ 的方程为 $\begin{cases}x=x\\ y=x\end{cases}$，$0\le x\le 1$，$x$ 作参数。

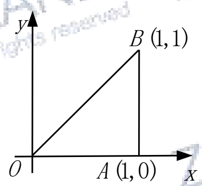

图 1.2

故

$$I=\int_{\overline{OA}}xy^2\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}}xy^2\mathrm{d}s+\int_{\overline{BO}}xy^2\mathrm{d}s$$

$$=0+\int_0^1 y^2\sqrt{1}\,\mathrm{d}y+\int_0^1 x\times x^2\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

方法总结：曲线表示式不一致时，分段积。

【例 1.5】 求 $I=\int_{\Gamma}\sqrt{2-2xy}\,\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1\end{cases}$.

解 Γ 是一个椭圆，先写出 Γ 的参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=1-\cos\theta-\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le 2\pi$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

故

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(2-2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

【例 1.6】 求 $I=\int_{\Gamma}x\,\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ z=x^2,\end{cases}$.

解 因 $f(x,y)=x$ 为奇函数，Γ 关于 yOz 面对称，在对称点处被积函数 x 反号，对称点处的弧微分都 $\mathrm{d}s>0$，所以对称点处 $x\mathrm{d}s$ 相互抵消，故 $I=0$.

思考题：

1. 当 $f(x,y,z)$ 关于 y（或 z）为奇函数，Γ 满足什么条件时 $\int_{\Gamma}f(x,y,z)ds=0$？为什么？（$\Gamma$ 关于 xOz（或 xOy）平面对称。）

第 2 节　对坐标的曲线积分

设 A,B 是曲线 L 的两个端点。曲线有两个方向 $A \to B$（始点 A 终点 B）或 $B \to A$。我们选定其中一个方向，这样 L 就是一个有向曲线。对坐标的曲线积分都是在有向曲线上积分。而以前对弧长的曲线积分是无方向的积分曲线。

2.1　对坐标的曲线积分的概念和性质

背景实例。

【例 2.1】　设质点在点 $M(x,y,z)$ 处受变力

$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 作用从点 A 沿光滑曲线 L 移动到点 B，求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功（如图 2.1）.

质点运动的路径是有方向 $A \to B$ 的曲线 L。我们仍然采用以下四个步骤计算:

(1) 分割：依次从始点 A 到终点 B 插入分点

$$A=M_0,M_1,\ldots,M_n=B,$$

将 $\overset{\frown}{AB}$ 分为 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，（$i=1,2,\cdots,n$）.

(2) 近似：记小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长记为 Δs_i，力在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上做的功为 ΔW_i（ΔW_i 是无法算得的）。在弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，把 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上的力近似视为常力 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，又用点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处的切向位移 $\Delta \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_L(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$（这里 $\boldsymbol{e}_L(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 为曲线 L 上点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处的与 L 方向一致的单位切向量）近似代替实际位移曲线弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，则

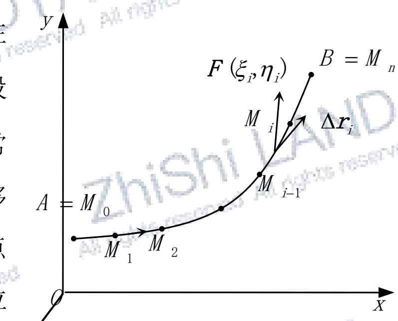

图 2.1

$\Delta W_i \approx \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_L(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ $(i=1,2,\cdots n)$。

(3) 求和：总功

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_L(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

(4) 取极限：记 $\lambda=\max\{\Delta s_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$（当 $\lambda\to 0$ 时每个 $\Delta s_i\to 0$）。变力沿 $\overset{\frown}{AB}$ 所作的功应为（误差趋于 0）

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta \boldsymbol{r}_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_L(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

上式右端正好是数量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{e}_L(x,y)$ 在曲线 L 上的第一类曲线积分，即

$$W=\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s\,. \qquad (*)$$

其中 $\boldsymbol{e}_L(x,y,z)$ 是 L 在 (x,y,z) 点与 L 方向一致的单位切向量。

通过上面四个步骤我们得到

$$W=\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s$$

其中$\boldsymbol{e}_L(x,y,z)$是L在点(x,y,z)与L方向一致的单位切向量。

用这同样方法计算的实际例子还有很多很多。为了系统地研究这很多很多的实际规律，我们除去实际内容保留计算方法引进新的数学概念——第二类曲线积分。

定义 **2.1** 空间中给定有方向的曲线L和三元向量函数$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，$\vec{F}(x,y,z)$在$L$上的第二类曲线积分

$$\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}\overset{\text{定义}}{=}\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s$$

其中$\boldsymbol{e}_L(x,y,z)$是L在点(x,y,z)与L方向一致的单位切向量。$\boldsymbol{F}(x,y,z)$称为被积向量函数，x,y,z称为积分变量，有向曲线L称为积分曲线，向量$d\vec{r}$称为向径微元（向径微分）。

又将第二类曲线积分称为对坐标的曲线积分。

在实际问题中，$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$是要求量微元，而$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$是要求的量。比如说，$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$是力$\boldsymbol{F}$与位移元素$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$的数量积，它表示功微元$\mathrm{d}W$．而$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$是力做的功。

当$\boldsymbol{F}(x,y,z)$有各种各样实际意义时，$\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}$就跟着有各种各样实际意义。

第二类曲线积分的四种写法

比较 $\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} \overset{定义}{=} \int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的左右两边你会发现

$$d\vec{r} = \boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s$$

$\boldsymbol{e}_L(x,y,z)$ 有方向余弦

$$\boldsymbol{e}_L(x,y,z) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

其中 α,β,γ 都是 (x,y,z) 的函数。看右图你会发现 $\cos\alpha ds = dx$。类似地 $\cos\beta ds = dy, \cos\gamma ds = dz$

$d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$。因此有四种写法

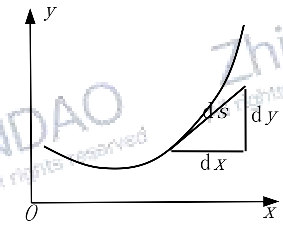

图 2.2

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} &= \int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s\\ &= \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\\ &= \int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dz\end{aligned}$$

由于 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 可正可负，所以 $dx = \cos\alpha ds, dy = \cos\beta ds, dz = \cos\gamma ds$ 都是可正可负的。

由于 $\int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dz$ 分别是对坐标 x,y,z 的积分，所以第二类的曲线积分又称为对坐标的积分。

第二类曲线积分的相互转化

利用 $dx=\cos\alpha ds, dy=\cos\beta ds, dz=\cos\gamma ds$，$\int_L P(x,y,z)dx$, $\int_L Q(x,y,z)dy$, $\int_L R(x,y,z)dz$ 可以相互转化

$$\int_L P(x,y,z)dx=\int_L P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}dy=\int_L P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dz$$

$$\int_L Q(x,y,z)dy=\int_L Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dx=\int_L Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dz$$

$$\int_L R(x,y,z)dz=\int_L R(x,y,z)\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}dy=\int_L R(x,y,z)\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}dx$$

注意：其中 α,β,γ 都是 (x,y,z) 的函数！

在平面上

平面可以放在空间中！

定义 2.1’　xy 平面上给定有方向的曲线 L 和二元向量函数 $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$（z 坐标 0 不写），$\vec{F}(x,y)$ 在 L 上的第二类曲线积分

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}\overset{\text{定义}}{=}\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y)\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{e}_L(x,y)$ 是 L 在点 (x,y) 与 L 方向一致的单位切向量。$\vec{F}(x,y)$ 称为被积向量函数，x,y 称为积分变量，有向曲线 L 称为积分曲线，向量 $d\vec{r}$ 称为向径微元（向径微分）。

积分变量在积分曲线上变。

第二类曲线积分也有与定积分类似的性质：

性质 1（方向性） $\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$，其中 L^- 表示 L 的相反方向.（$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_{L^-}(x,y)\mathrm{d}s$
$= -\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y)\mathrm{d}s = -\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$）

性质 2（线性性） 设 a, b 为常数，则

$$\int_L a\boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = a\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

$$\int_L (\boldsymbol{F}(x,y) \pm \boldsymbol{G}(x,y))\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \pm \int_L \boldsymbol{G}(x,y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

性质 3(积分可加性) 设 $L = L_1 \cup L_2$（L_1 与 L_2 至多端点相交，L, L_1, L_2 方向一致)，有

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

$$\left(\begin{aligned} \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y)\mathrm{d}s \\ &= \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y)\mathrm{d}s \\ &= \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_{L_1}(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_{L_2}(x,y)\mathrm{d}s \\ &= \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} \end{aligned}\right)$$

当 L 与 x 轴垂直时 $\int_L f(x,y,z)dx = 0$（因为 $dx = 0$）；当 L 与 y 轴垂直时 $\int_L f(x,y,z)dy = 0$；当 L 与 z 轴垂直时 $\int_L f(x,y,z)dz = 0$。

2.2　对坐标的曲线积分的计算法

我们用 $t:a\to b$ 表示参数 $t=a$ 对应曲线的始点，参数 $t=b$ 对应曲线的终对点。

引理　设曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，则 L 在点 $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ 的切向量 $\vec{T}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$ 总是指向参数 t 增加的方向。

证：（1）当 $\Delta t>0$ 时

$$\{x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)\}=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t))}$$

始点的参数小终点的参数大，它指向参数 t 增加的方向。

$$\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right\}=\frac{1}{\Delta t}\{x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)\}$$

也指向参数 t 增加的方向。

（2）当 $\Delta t<0$ 时

$$\{x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)\}=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t))}$$

始点的参数大终点的参数小，它指向参数 t 增加的反方向。由于 $\frac{1}{\Delta t}<0$，

$$\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right\}=\frac{1}{\Delta t}\{x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)\}$$

指向参数 t 增加的方向。

$\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right\}$ 永远指向参数 t 增加的方向。故

$\vec{T}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right\}$ 总是指向参数 t 增加的方向。

对坐标曲线积分的计算也可归结为定积分的计算：

定理 2.1　设有向曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\ (t:a\to b)\\ z=z(t)\end{cases}$，$x'(t),y'(t),z'(t)$ 连续且 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $Q(x,y,z)$ 在 L 上连续，则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_a^b[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.2}$$

证　（1）　当 $a\le b$ 时

L 与 $\vec{T}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$ 同方向（都指向参数 t 增加的方向）。所以

$$\boldsymbol{e}_L(x(t),y(t),z(t))=\frac{1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$$

又由于 $ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$，第一类曲线积分转化为定积分

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

（2）　当 $a\ge b$ 时

L 与 $-\vec{T} = -\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ 同方向（都指向参数 t 减少的方向）。所以

$$e_L(x(t),y(t),z(t)) = \frac{-1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$$

又由于 $ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$，第一类曲线积分转化为定积分（并注意到第一类曲线积分转化为定积分总是是上限大于下限）

$$\begin{aligned}
&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\
&=\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_L(x,y,z)\mathrm{d}s\\
&=-\int_b^a\big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b\big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

（2.2）总是对的。证毕。

计算对坐标曲线积分的方法步骤：

（1）做准备：把积分曲线写成参数方程并用参数的方向表示曲线的方向 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}(t:a\to b)$，求出 $\begin{cases}dx=x'(t)\mathrm{d}t\\dy=y'(t)\mathrm{d}t\\dz=z'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$；

（2）把上面的准备代入第二类曲线积分：（i）$t:a\to b$ 代 L；（ii）$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 代所有的 (x,y,z)；（iii）代入 $\begin{cases}dx=x'(t)\mathrm{d}t\\dy=y'(t)\mathrm{d}t\\dz=z'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$ 并提出共因子 dt。就变成了定积分

$$\begin{aligned}
&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\
&=\int_a^b\big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

下限是始点参数 a，上限是终点参数 b（不管 a,b 哪个大哪个小）。

小技巧： 如果 $L:y=f(x)\,(x:a\to b)$，则 $L:\begin{cases}x=x\\y=f(x)\end{cases}(x:a\to b)$ 用 x 作参数。（如果 $L:x=f(y)\,(y:c\to b)$ 呢？）

类似地，对空间曲线 L：$x=x(t),y=y(t),z=z(t),t:a\to b$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\
&=\int_a^b[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

当 $Q(x,y,z)=R(x,y,z)\equiv 0$ 时我们有

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

当 $P(x,y,z)=R(x,y,z)\equiv 0$ 时我们有

$$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

当 $P(x,y,z)=Q(x,y,z)\equiv 0$ 时我们有

$$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法总结：把 $x=x(t),y=y(t),z=z(t),dx=x'(t)dt,dy=y'(t)dt,dz=z'(t)dt$ 代入，下限是始点参数 a，上限是终点参数 b（不管 a,b 哪个大哪个小）。

小技巧：如果 $L:\begin{cases}y=f(x)\\z=g(x)\end{cases}(x:a\to b)$，则 $L:\begin{cases}x=x\\y=f(x)\\z=g(x)\end{cases}(x:a\to b)$ 用 x 作参数。（如果 $L:\begin{cases}x=f(y)\\z=g(y)\end{cases}(y:a\to b)$ 呢？等）

注意：我们只用曲线的参数方程计算曲线积分。

注意：

第一类曲线积分是没有方向的，变成定积分总是大的上限而小的下限；

第二类曲线积分的曲线是有方向的，变成定积分时，总是下限为始点参数上限为终点参数（不管上下限哪个大哪个小）。

平面上的曲线积分放在空间中考虑，完全类似。

【例 2.2】 计算 $I=\int_L x^2\mathrm{d}y$，L 如图 2.3：

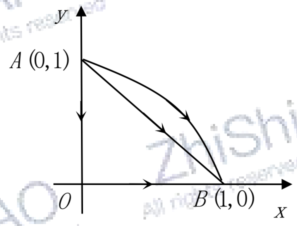

图 2.3

(1) 直线 $\overline{AB}$；

(2) 圆弧 $\overset{\frown}{AB}$；

(3) 折线 $\overline{AOB}$.

解 (1) $\overline{AB}$ 为：$x+y=1$，即 $\begin{cases}x=x\\ y=1-x\end{cases}$，$x:0\to 1$，$dy=-dx$，有

$$I=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}.$$

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 为：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$ $\theta:\frac{\pi}{2}\to 0$，$dx=-\sin\theta d\theta, dy=\cos\theta d\theta$，有

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\cos\theta d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=\left[\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}.$$

(3) $\overline{AO}:\begin{cases}x=0\\ y=y\end{cases}, y:1\to 0; dy=dy$；$\overline{OB}:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases}, x:0\to 1; dy=0dx$，

$$I=\int_{AO}x^2\mathrm{d}y+\int_{OB}x^2\mathrm{d}y=\int_1^0 0\,\mathrm{d}y+\int_0^1 x^2\cdot 0\,\mathrm{d}x=0.$$

注意：此例中三条路径起点与终点相同，路径不一样，曲线积分值不相等．一般地，曲线积分的结果与路径有关。

【例 2.3】 计算 $I=\int_L x^2\mathrm{d}y+2xydx$，$L$ 与上例相同．

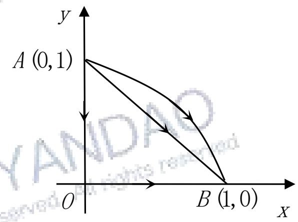

图 2.3

(1) 直线 $\overline{AB}$；

(2) 圆弧 $\overset{\frown}{AB}$；

(3) 折线 $\overline{AOB}$.

解 各曲线的参数方程见上例。

(1) $\overline{AB}$ 为：$\begin{cases}x=x\\ y=1-x\end{cases}$，$x:0\to 1$，$dy=-dx$，有

$$I=\int_0^1 x^2(-1)\mathrm{d}x+2x(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-3x^2)\,\mathrm{d}x=0.$$

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 为：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$ $\theta:\frac{\pi}{2}\to 0$，$dx=-\sin\theta d\theta, dy=\cos\theta d\theta$，有

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\cos\theta d\theta+2\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^3\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=0.$$

(3) $\overline{AO}:\begin{cases}x=0\\ y=y\end{cases}, y:1\to 0; dy=dy$；$\overline{OB}:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases}, x:0\to 1; dy=0dx$，

$$I=\left(\int_{AO}+\int_{OB}\right)x^2\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}x=0+0=0.$$

注意：由例 2.3 可见，尽管沿不同的积分路径，曲线积分值却相等．在特殊条件下，对坐标

的曲线积分只与始终点有关，与路径无关。

【例 2.4】 求 $I=\int_{\Gamma} zy\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$，$\Gamma:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=x. \end{cases}$ 从 $A(0,0,0)$ 到 $B(1,1,2)$.

解 $\Gamma:\begin{cases} x=x \\ y=x \\ z=2x^2 \end{cases}$，$x:0\to 1$，$dy=dx, dz=4xdx$ 从而有

$$I=\int_0^1 (2x^3+2x^3+x^2\cdot 4x)\,\mathrm{d}x=8\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=2 .$$

思考题：

1．什么条件下当 $f(x,y)\le g(x,y)$，$\forall (x,y)\in L$，时有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x \le \int_L g(x,y)\,\mathrm{d}x .$$

（L 与 x 轴方向一致。）

2．$\int_L \mathrm{d}x=L$ 的弧长是否正确?为什么？（不对。因为 dx 不是弧长微分。）

3．积分 $I=\oint_L x\,\mathrm{d}y$，$L:x^2+y^2=1$ 取逆时针方向，因为 x 为奇函数，L 关于 y 轴对称，所以 $I=0$，是否正确？为什么？（不对。不只是 x 带符号，dy 也带符号。）

习题 11－2

A 类

1．设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\,\mathrm{d}x\,.$$

2．计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（取逆时针方向）；

*(2) $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

*(3) $\oint_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为螺旋线段:

$$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt,\ a>0,b>0\ ,\quad t:0\to 2\pi\,;$$

(4) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A,B,C 依次为点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$；

(5) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧；

(6) $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向圆周 $x^2+y^2=9$．

3．计算下列线积分：

(1) $\oint_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限部分的边界曲线，方向与球面在第一卦限的外法线方向构成右手系；

(2) $\oint_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$C(-2,0)$，$D(0,-2)$ 为顶点的正方形闭路取逆时针方向．

解 (2) $\overrightarrow{AB}:\begin{cases}x=x\\ y=2-x\end{cases}, x:2\to 0$，$dy=-dx$，

$$\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_2^0\left(\frac12-\frac12\right)dx=0$$

$\overrightarrow{BC}:\begin{cases}x=x\\ y=2+x\end{cases}, x:0\to -2$，$dy=dx$，

$$\int_{\overrightarrow{BC}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_0^{-2}\left(\frac12+\frac12\right)dx=-2$$

$\overrightarrow{CD}:\begin{cases}x=x\\ y=-2-x\end{cases}, x:-2\to 0$，$dy=-dx$，

$$\int_{\overrightarrow{CD}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_{-2}^0\left(\frac12-\frac12\right)dx=0$$

$\overrightarrow{DA}:\begin{cases}x=x\\ y=-2+x\end{cases}, x:0\to 2$，$dy=dx$，

$$\int_{\overrightarrow{DA}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_0^2\left(\frac12+\frac12\right)dx=2$$

$$\oint_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}+\int_{\overrightarrow{BC}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}+\int_{\overrightarrow{CD}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}+\int_{\overrightarrow{DA}}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=0$$

4．计算 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是：

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；

*(2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段；

(3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线；

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

5．计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向看 Γ 是顺时针方向.

6．在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\ (a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

*7．设力 $\boldsymbol{F}=\{y-x^2,z-y^2,x-z^2\}$，今有一质点沿曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3,0\le t\le 1$ 从点 $A(0,0,0)$ 移动到点 $B(1,1,1)$，求 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

解 $L: x=t,y=t^2,z=t^3,t:0\to 1$。

$$
\begin{aligned}
W&=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_L\{y-x^2,z-y^2,x-z^2\}\cdot\{dx,dy,dz\}\\
&=\int_L\left(y-x^2\right)dx+\left(z-y^2\right)dy+\left(x-z^2\right)dz\\
&=\int_0^1\left[\left(t^2-t^2\right)+\left(t^3-t^4\right)2t+\left(t-t^6\right)3t^2\right]dt\\
&=\int_0^1\left[2t^4-2t^5+3t^3-3t^8\right]dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{3}t^6+\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{3}t^9\right]_0^1=\frac{29}{60}
\end{aligned}
$$

8．设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所作的功.

9．把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为：

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

解 (3) $L:\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}, t:\pi\to\dfrac{\pi}{2}$，$\begin{aligned}&\vec{T}_L=-\{x_t',y_t'\}=\{\sin t,-\cos t\}=\{y,1-x\}\\&\{dx,dy\}=\vec{e}_L ds=\{y,1-x\}ds\end{aligned}$。所以

$$
\begin{aligned}
\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y&=\int_L\{P(x,y),Q(x,y)\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}\\
&=\int_L\{P(x,y),Q(x,y)\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}ds\\
&=\int_L\{P(x,y),Q(x,y)\}\cdot\{y,1-x\}ds=\int_L\left[P(x,y)y+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

*10．设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧．把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

B类

1．证明曲线积分的估计式：$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant sM$，其中 s 为积分路径 L 的弧长，M 为函数 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 在 L 上的最大值.

证 $\begin{aligned}\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|&=\left|\int_L\{P,Q\}\cdot\vec{\tau}_L ds\right|\le\int_L\left|\{P,Q\}\cdot\vec{\tau}_L\right|ds=\int_L|\cos\theta|\left|\{P,Q\}\right|ds\\&\le\int_L\sqrt{P^2+Q^2}ds\le M\int_L ds=s\cdot M\end{aligned}$。

2．设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 到 M 之间的距离)，质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.

第 3 节　格林公式

3.1　格林公式

若观察者沿闭区域 D 的边界 ∂D 移动，在其附近的区域 D 总位于观察者左手边，则称观察者移动的方向为 ∂D 关于 D 的正向．∂D 带正向称为 D 的正向边界，记为 ∂D^{+} 。

格林公式给出了对坐标的曲线积分与二重积分的关系。请看下面定理。

定理 3.1　设平面有界闭区域 D 的正向边界 ∂D^{+} 为分段光滑曲线，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，则有

$$\oint_{\partial D^{+}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

称(3.1)式为格林(Green)公式．

格林公式的意义：一般来说，右边的偏导函数比左边的原函数简单。

（黑板解析格林公式的记法。）

注　上述定理对单连通与复连通区域均成立．

注意：$P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数时，我们说 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 D 上没有奇点。没有奇点时格林公式才成立。

【例 3.1】 计算 $\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$，$L$ 为以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形边界取逆时针方向.

解 由格林公式，有

$$\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \iint_D (1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

【例 3.2】 计算 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x$, L：半圆 $x^2+y^2=1, y\geq 0$, 方向为从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$（图 3.1）.

解 因 L 不封闭，为了用格林公式，作辅助有向线段 $\overrightarrow{BA}$，则 $L\cup\overrightarrow{BA}$ 为封闭曲线，由(3.1)得

$$\oint_{L\cup\overrightarrow{BA}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4},$$

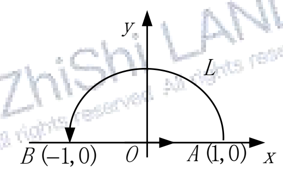

图 3.1

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \int_{\overrightarrow{BA}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

方法总结：当曲线不封闭时，为了应用格林格式，应补一段简单曲线使之封闭。

下面给出格林公式的证明，先证：

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

假设 $D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\}$ 为 X 型区域，如图 3.2，有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_a^b[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))]\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

$$\oint_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x=\left(\int_{AB}+\int_{BE}+\int_{EF}+\int_{FA}\right)P\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x+0+\int_b^a P(x,y_2(x))\mathrm{d}x+0$$

$$=\int_a^b[-P(x,y_2(x))+P(x,y_1(x))]\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

比较(3.3)，(3.4)式知(3.2)式成立.

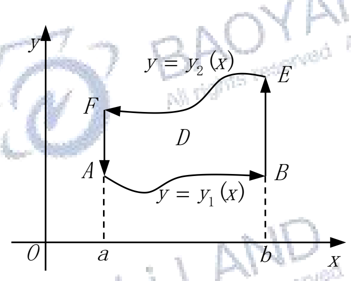

图 3.2

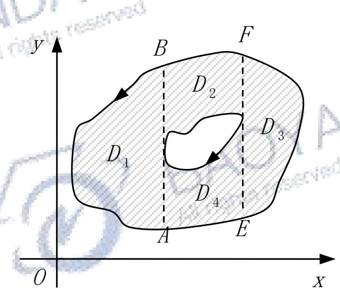

图 3.3

若 D 为一般区域，此时总可作适当分割(如图 3.3，将 D 可分割为 D_1,D_2,D_3,D_4 部分)，使每一部分区域 D_i ($i=1,2,3,4$)都是 X 型区域的形式，所以在 D_i 上格林公式成立，即

$$-\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D_i^+}P\,\mathrm{d}x\quad(i=1,2,3,4).$$

所以有：

$$\sum_{i=1}^{4}\left(-\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\sum_{i=1}^{4}\oint_{\partial D_i^+}P\,\mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

注意右端积分在线段 AB 与 EF 上各分别正反方向经过两次，互相抵消，所以(3.5)式仍化为：
$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}P\,\mathrm{d}x$.

同理可证对一般区域 D 有：

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}Q\,\mathrm{d}y, \tag{3.6}$$

由(3.2)，(3.6)式知对一般区域 D 都有格林公式

$$\oint_{\partial D^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

成立．证毕.

在格林公式中若令 $Q=x$， $P=-y$，则有

$$2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x,$$

从而得区域 D 的面积 A 为：

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^{+}} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x .$$

当右边曲线积分好积时，可用它来计算 D 的面积。

【例 3.3】 计算椭圆区域 $D:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 的面积 A .

解 区域的边界为 $\partial D^{+}: x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ ，$\theta: 0\to 2\pi$ ，由上面公式，有

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^{+}} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[a\cos\theta\cdot b\cos\theta-b\sin\theta\cdot a(-\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta=\pi ab .$$

【例 3.4】 计算 $I=\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$，$L$ 为不经过原点的任意闭曲线取逆时针方向.

解 令 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(1) 若 L 不包围原点，则在 L 所包围的区域上格林公式条件满足，故有：

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D 0\,dx\,dy=0.$$

(2) 若 L 包围原点，原点是奇点，格林公式不成立。在 L 内作一半径为 r（很小）的顺时针方向圆 $C: x^2+y^2=r^2$（顺时针才是 D 的正向！如图 3.4）. 则在以有向曲线 C，L 为边界的区域 D 上格林公式成立。从而由格林公式得：

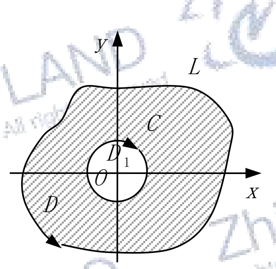

图 3.4

$$\oint_{L+C}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

即

$$\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=-\oint_C\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\oint_{C^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{C^-}x\,dy-y\,dx\overset{\text{格林}}{=}\frac{1}{r^2}\iint_{D_1}(1+1)\,dx\,dy=2\pi.$$

（积分变量在积分曲线上变！）

方法总结：当曲线包围奇点时，为了应用格林公式，应该先用一条简单的封闭曲线把奇点围出去。（注意正向关系）。在上(2)中，如果要做积分 $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$，应该用小椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$ 围奇点。（为什么？）

思考题：

1．计算 $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{2x^2+y^2}$，$L: x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 取逆时针方向.

解 $\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{2x^2+y^2}=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx\overset{\text{格林}}{=}\frac{1}{2}\iint_D 2\,dx\,dy=\pi\cdot\sqrt{2}=\pi\sqrt{2}$。（积分变量在积分曲线上变！）

3.2 平面上的曲线积分与路径无关的条件

在计算对坐标的曲线积分时，我们发现有些积分与路径有关，有些积分与路径无关。如果要计算的对坐标曲线积分与路径无关，我们就可以选一条简单路径计算它（与路径无关的好处！）。

要问：在什么条件下对坐标的曲线积分与路径无关？

下面将给出积分与路径无关的判别方法：

若闭区域 D 上任一闭曲线所围平面部分都被包含于 D，则称 D 为单连通区域，否则称为复连通区域. 直观地说，单连通区域是不包围洞的区域。

定理 3.2 设 D 为平面单连通区域，$P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数（没有奇点），则以下命题等价：

(1) 对 D 内任一闭曲线 L，有 $\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$；

(2) 对任一全部含在 D 内的曲线 $\overset{\frown}{AB}$，积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}}P\,dx+Q\,dy$ 仅与起点 A 和终点 B 有关，*而与曲线形状（路径）无关；*

(3) D 内存在可微函数 u，使 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$；

(4) 在 D 内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

证　证明推理一周：(1) $\Rightarrow$ (2)　(3) $\Rightarrow$ (4)　(1)．

(1) $\Rightarrow$ (2)：如图 3.5，设 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{ACB}$ 是 D 内任意两条始点 A、终点 B 的曲线，成封闭曲线 $\overset{\frown}{ABCA}$。由(1)得

$$\left(\int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BCA}}\right) P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{\overset{\frown}{ABCA}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$$

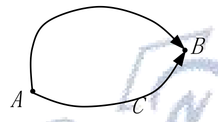

图 3.5

从而

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\int_{\overset{\frown}{BCA}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{ACB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

即(2)成立.

(2) $\Rightarrow$ (3)：若(2)成立，固定 D 内一点 (x_0, y_0)，而 (x, y) 在 D 内变动，作函数 $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，由于积分和路径无关，所以是 (x,y) 的函数．对任意点 (x,y)，利用积分与路径无关，可以取如图 3.6 所示路径，则

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = \frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y}{\Delta x}$$

$$= \frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y}{\Delta x}$$

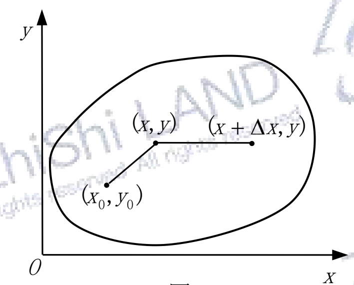

图 3.6

$$= \frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y}{\Delta x}$$

$$= \frac{\int_x^{x+\Delta x} P(X, y)\mathrm{d}X}{\Delta x} \overset{\text{中值定理}}{=} \frac{P(\xi, y)\Delta x}{\Delta x},$$

（$\begin{cases} X = X \\ Y = y \end{cases}$ $X: x \to x+\Delta x$）这里 ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y)；$$

同理可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$；

由条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ 在 D 内连续，故 $u(x,y)$ 可微且 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$．

(3) $\Rightarrow$ (4)：由 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 得 $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$，从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内连续，求导次序无关，有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$，即 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内成立.

(4) $\Rightarrow$ (1)：由(4)，在 D 内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以对任一全含在 D 内的闭路 L，记 σ 为 L 所围成的区域，由单连通性 $\sigma \subset D$，由格林公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

即(1)成立．证毕．

在定理 3.2 中，（2）（3）是实用命题，（4）是用来检证的，而（1）主要起到帮助证明的作用。

知识总结：如果在 D 内没有奇点且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，即此 $u(x,y)$ 是 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数。（固定简单的 (x_0,y_0)）

下面举例说明本定理的一些简单应用：

【例 3.5】 求曲线积分 $I=\int_{\overset{\frown}{ABO}}(x^2+y)\,\mathrm{d}x+(x+y^2\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y$，其中 $\overset{\frown}{ABO}$ 是上半圆周 $(x-1)^2+y^2=1,y\geq 0$, 沿逆时针方向(如图 3.7)．

解 这里 $P=x^2+y,Q=x+y^2\mathrm{e}^y$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv 1\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$，且它们在全平面连续。所以积分在全平面上与路径无关，故可选取简单路径 $\overline{AO}:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases},x:2\to 0$，积分得：

$$I=\int_{\overline{AO}}(x^2+y)\,\mathrm{d}x+(x+y^2\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=\int_2^0 x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{8}{3}.$$

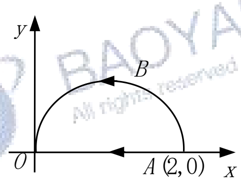

图 3.7

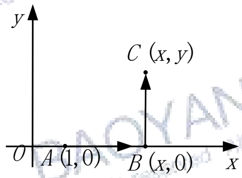

图 3.8

【例 3.6】 验证 $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面($x>0$)内存在原函数，并求一个原函数．

解 设 $P=-\dfrac{y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$。右半平面，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，所以原函数存在。$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 是 $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 的原函数。取积分路径如图 3.8 所示 $\overrightarrow{ABC}$ 折线，有

$$u(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{\overrightarrow{BC}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=0+\int_0^y\frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^y=\arctan\frac{y}{x}.$$

方法总结：当积分与路径无关时，一般选平行于坐标轴的折线作路径简单。

【例 3.7】 验证：在整个 xOy 平面内 $\sin y\,dx+x\cos y\,dy$ 存在原函数，并求该原函数.

解 1 $P=\sin y, Q=x\cos y$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故存在原函数.

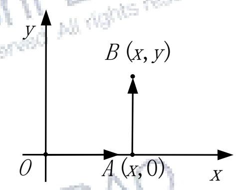

图 3.9

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\sin y\,dx+x\cos y\,dy$$

$$=\left(\int_{OA}+\int_{AB}\right)\sin y\,dx+x\cos y\,dy$$

$$=0+\int_0^y x\cos y\,dy$$

$$=x\sin y\Big|_{y=0}^{y=y}=x\sin y.$$

解 2 设 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\sin y\,dx+x\cos y\,dy$，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y \tag{3.8}$$

由(3.7)得 $u=\int\sin y\,dx=x\sin y+C(y)$，故由(3.8)得 $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y+C'(y)=x\cos y$，从而 $C'(y)=0$，$C(y)=C$ 为常数，得 $u=x\sin y+C$.

思考题：

2. 验证：$-y^2\sin x\,dx+2y\cos x\,dy$ 在 R^2 内存在原函数，求该原函数.

命题 设 $f(x,y)$ 处处可微且 $f_x(x,y) = f_y(x,y) \equiv 0$，则 $f(x,y)$ 为常数函数。

证 因为 $f_x(x,y) \equiv 0$，所以 $f(x,y) = C(y)$。又 $C'(y) = f_y(x,y) \equiv 0$，所以 $f(x,y) = C(y)$ 是常数函数。

推论 3.1 设 D 为 R^2 中的单连通区域，u 为 $P\,dx + Q\,dy$ 的原函数，则

$$\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P\,dx + Q\,dy = u\Big|_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} = u(x,y) - u(x_0,y_0), \tag{3.9}$$

$A, B \in D$.

证 在 D 内。由于 $P\,dx + Q\,dy$ 有原函数 u，根据定理 3.2，$U(x,y) = \int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P\,dx + Q\,dy$ 也是 $P\,dx + Q\,dy$ 的原函数。记 $F(x,y) = U(x,y) - u(x,y)$。则

$$dF(x,y) = dU(x,y) - du(x,y) = (P\,dx + Q\,dy) - (P\,dx + Q\,dy) = 0dx + 0dy$$

$$F_x(x,y) = F_y(x,y) \equiv 0$$

根据上面命题，存在常数 c 使得 $U(x,y) - u(x,y) \equiv c$。$c = U(x_0,y_0) - u(x_0,y_0) = -u(x_0,y_0)$。故

$$\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P\,dx + Q\,dy = u\Big|_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} = u(x,y) - u(x_0,y_0)$$

【例 3.8】 求 $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$，$A(1,2)$，$B(2,1)$，$\overset{\frown}{AB}$ 为上半平面($y > 0$)内从 A 到 B 的任意光滑的曲线.

解 $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$，故

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{x}{y}\Big|_A^B = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3.3 全微分方程

如果一阶微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{3.10}$$

的左端恰好是某一个函数 $u=u(x,y)$ 的全微分：

$$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,,$$

则方程(3.10)就称作全微分方程．此时微分方程的隐式通解为：

$$u(x,y)=C \tag{3.11}$$

由定理 3.2(3)可知，若 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续的偏导数时，方程(3.10)是全微分方程的充分必要条件是：在 D 内

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.12}$$

当此条件满足时，方程(3.10)的通解为：$u(x,y)=C$ 。其中

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{3.13}$$

或

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}Q(x,y)\,\mathrm{d}x$$

其中 $M_0(x_0,y_0)$ 是在区域 D 内适当选定的点．

两种路径得 $u(x,y)$ 的两个表示：

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y\\
&=\int_{\overline{(x_0,y_0)(x,y_0)}}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y+\int_{\overline{(x,y_0)(x,y)}}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y\\
&=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y\\
&=\int_{\overline{(x_0,y_0)(x_0,y)}}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y+\int_{\overline{(x_0,y)(x,y)}}P(X,Y)\,\mathrm{d}X+Q(X,Y)\,\mathrm{d}Y\\
&=\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}Q(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

【例 3.9】 求解 $(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$.

解 $P=5x^4+3xy^2-y^3, Q=3x^2y-3xy^2+y^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以这是全微分方程. 可取 $x_0=0, y_0=0$，据公式(3.13)，有

$$u(x,y)=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$

所以，方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y=C$.

习题 11－3

A 类

1．利用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$，$L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 取逆时针方向；

*(2) $\oint_L xy^2\,\mathrm{d}x-x^2y\,\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正向；

(3) $\oint_L \dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心，R 为半径的圆周（$R>1$），取逆时针方向．

(4) $\oint_L (x+y)^2\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形正向；

*(5) $\int_L e^x[\cos y\,\mathrm{d}x+(y-\sin y)\,\mathrm{d}y]$，$L:y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段；

(6) $\int_{AB}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 m 为常数，AB 为由 $A(a,0)$ 经过圆 $x^2+y^2=ax$ 上半部的路线到 $B(0,0)$（其中 a 为正数）．

解（5）补上 $OA:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases},x:0\to\pi$。则 $L^-\cup OA$ 封闭。

$P=e^x\cos y,Q=e^x(y-\sin y),\dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x(y-\sin y)$。根据格林公式，

$$\oint_{L^-\cup OA}e^x\cos y\,\mathrm{d}x+e^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left[e^x(y-\sin y)+e^x\sin y\right]dxdy=\iint_D e^xydxdy$$

$$=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}e^xydy=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2xdx=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^\pi-1-\int_0^\pi e^x\cos 2xdx\right)$$

$$\int_0^\pi e^x\cos 2xdx=\left.e^x\cos 2x\right|_0^\pi+2\int_0^\pi e^x\sin 2xdx$$

$$=e^\pi-1+2\left.e^x\sin 2x\right|_0^\pi-4\int_0^\pi e^x\cos 2xdx=\frac{1}{5}\left(e^\pi-1\right)$$

$$\oint_{L^-\cup OA}e^x[\cos y\,\mathrm{d}x+(y-\sin y)\,\mathrm{d}y]=\frac{e^\pi-1}{5}$$

$$\int_L e^x[\cos y\,\mathrm{d}x+(y-\sin y)\,\mathrm{d}y]=\int_{OA}e^x[\cos y\,\mathrm{d}x+(y-\sin y)\,\mathrm{d}y]-\frac{e^\pi-1}{5}$$

$$=\int_0^\pi e^xdx-\frac{e^\pi-1}{5}=e^\pi-1-\frac{e^\pi-1}{5}=\frac{4}{5}\left(e^\pi-1\right)$$

2．利用曲线积分，求下列曲线所围成图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$;

*(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3．(信)证明：若 L 为平面上分段光滑的简单闭曲线，l 为任意固定的方向，则

$$\oint_L\cos(\widehat{l,n})\,\mathrm{d}s=0,$$

式中 n 为 L 的法向量，方向朝外．

证：题中没有直角坐标系，可以随方便建立直角坐标系。为简单，以 l 的方向为 x 轴的方向建立平面直角坐标系。$\cos(\widehat{l,n})=\cos(\widehat{x,n})=\cos\alpha_n$，其中 $\cos\alpha_n$ 是法向量 n 的方向余弦。设 D 是 L 包围的区域。选定 L 的方向使得 L 成为 D 的正向边界。设 n 的方向余弦为 $\cos\alpha_n,\cos\beta_n$，则 L 的切向量 $\vec{T}$ 的方向余弦为 $\{\cos\alpha_T,\cos\beta_T\}=\pm\{-\cos\beta_n,\cos\alpha_n\}$（$\vec{T}\cdot\vec{n}=0$！），适当选择 $\pm$ 使得 $\vec{T}$ 与 L 的方向一致。

$$\oint_L\cos(\widehat{l,n})\,\mathrm{d}s=\oint_L\cos\alpha_nds=\mp\oint_L\cos\beta_Tds$$

$$=\mp\oint_Ldy\overset{\text{格林公式}}{=}\mp\iint_D 0dxdy=0$$

4．证明下列曲线积分与路径无关，并计算积分值：

*(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y$；

*(2) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\,\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\,\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2}$沿在右半平面的路径；

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路径．

5．验证下列$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在整个$xOy$平面内是某一函数的全微分，并求这样的一个$u(x,y)$：

*(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$；

(2) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$．

6．为使$\int_L F(x,y)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$与积分路径无关，可微函数$F(x,y)$应满足怎样的条件？

解 $P=F(x,y)y, Q=F(x,y)x$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=F(x,y)+F_y(x,y)y, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=F(x,y)+F_x(x,y)x$。应满足$F_y(x,y)y\equiv F_x(x,y)x$。

7．下列方程是否为全微分方程？若是，请求其通解：

*(1) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$　　*(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$

(3) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$　　(4) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$

*(5) $(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$　　(6) $y(x-2y)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$

(7) $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}r+2r\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0$　　*(8) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$

B类

1．设函数$Q(x,y)$在xOy平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$与路径无关，并且对任意$t$恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y，$$

求$Q(x,y)$．

解 积分与路径无关。$P=2xy, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$。$Q=x^2+C(y)$（？）。

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 Q(t,y)\,\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1 C(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^t Q(1,y)\,\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\,\mathrm{d}y$$

条件为

$$t^2+\int_0^1 C(y)\,\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\,\mathrm{d}y$$

两边对t求导得

$$C(t)=2t-1$$

$$Q(x,y)=x^2+2y-1$$

注意：这是一个典型的求未知函数的题目。请熟悉其中使用的方法。

2．求$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$，其中$a,b$为正常数，$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧．

3．设函数$f(u)$有一阶连续导数，证明对任何光滑闭曲线L，有

$$\oint_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=0．$$

*4．试利用格林公式证明：

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}[P\cos(x,\boldsymbol{n})+Q\sin(x,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s,$$

其中$(x,\boldsymbol{n})$为x轴正向到∂D的外法线向量$\boldsymbol{n}$的转角.

*5. 设$u(x,y),v(x,y)$是具有二阶连续偏导数的函数，并设$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 证明：

(1) $\iint_D \Delta u\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$；

(2) $\iint_D (u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}s=-\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$，

其中$\frac{\partial u}{\partial n},\frac{\partial v}{\partial n}$分别表示$u$和$v$沿$\partial D$的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数.

6*（1）。

第 4 节　对面积的曲面积分

4.1　对面积的曲面积分的概念与性质

背景例子。

设有物质曲面，其面密度为连续函数 $f(x,y,z)$，求其质量 M．

类似于求曲线质量，仍分四步计算。

(1) 分割：将曲面 S 分割为 n 小块：$\Delta S_1, \Delta S_2 \cdots \Delta S_n$（每小块面积也用相同的记号表示）(如图 4.1)；

(2) 近似：在每块小曲面 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 得 ΔS_i 的质量近似值为

$$\Delta M_i \approx f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i ,\ (i = 1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和：S 的质量

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i ,$$

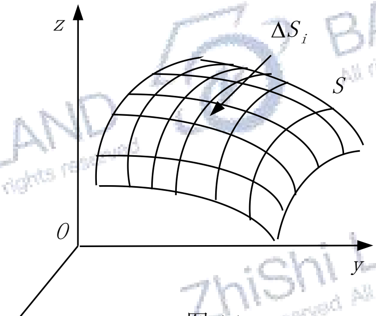

图 4.1

(4) 取极限：记 λ_i 为 ΔS_i 两点间最大距离，$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\lambda_i\}$。当 $\lambda \to 0$ 时，每个 $\lambda_i \to 0$，误差趋于 0。所以

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i .$$

由此引出以下定义：

定义 4.1　设空间有界曲面 S，$f(x,y,z)$ 是在 S 上有定义的有界函数。

(1) 分割：将曲面 S 分割为 n 小块：$\Delta S_1, \Delta S_2 \cdots \Delta S_n$（每小块面积也用相同的记号表示）(如图 4.1)；

(2) "近似"：在每块小曲面 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 计算

$$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i ,\ (i = 1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$，

(4) 取极限：记 λ_i 为 ΔS_i 两点间最大距离，$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\lambda_i\}$（当 $\lambda \to 0$ 时，每个 $\lambda_i \to 0$）。

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i \begin{cases} \text{不存在，} f(x,y,z)\text{在}S\text{上对面积不可积；} \\ = A\text{存在，则称A为}f(x,y,z)\text{在}S\text{上对面积的曲面积分，记为} \end{cases}$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \overset{\text{定义}}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，x,y,z 称为积分变量，S 称为积分曲面，$\mathrm{d}S$ 称为面积元素（或面积微分）.

积分变量 x,y,z 总在 S 上变化。

当 $f(x,y,z)$ 是面密度函数时，曲面的质量为

$$M = \iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S .$$

对面积的曲面积分又称为第一类曲面积分。

关于第一类曲面积分的存在性，有结论：

若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 上连续，则 $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在.

思考题：

1. $\iint\limits_S \mathrm{d}S$ 等于多少?为什么?

$$\iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_S 1\mathrm{d}S = S \text{（曲面}S\text{的面积）。}$$

第一类曲面积分有与定积分类似的性质：

(1) **线性性**：对任意实数 a,b，有

$$\iint\limits_S a f(x,y,z)\mathrm{d}S = a\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \,.$$

$$\iint\limits_S \big(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\big)\mathrm{d}S = \iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \pm \iint\limits_S g(x,y,z)\mathrm{d}S \,.$$

取 $b=0$ 时，$\iint\limits_S a f(x,y,z)\mathrm{d}S = a\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 。常数因子可以提出来。

(2) **积分区域可加性**：设 $S = S_1 \cup S_2$，其中曲面 S_1,S_2 至多边界相交，则有：

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S \,.$$

(3) **单调性**：设 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \le \iint\limits_S g(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(4) **积分中值定理**：设 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则 $\exists (\xi,\eta,\zeta) \in S$,使得下式成立：

$$\iint\limits_S f(x,y,x)\mathrm{d}S = f(\xi,\eta,\zeta)\times S \text{，(右端}S\text{表示曲面}S\text{的面积).}$$

4.2　曲面面积、对面积的曲面积分的计算

为计算对面积的曲面积分，我们先讨论曲面面积的计算问题.

设空间中矩形 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n}$ 与向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为 γ，AB 平行于 x 轴，$A'B'C'D'$ 是 $ABCD$ 在 xOy 平面上的投影。则

$$A'B' = AB, B'C' = BC\cos\gamma$$

$$S' = S\cos\gamma$$

其中，S', S 分别是 $A'B'C'D'$ 和 $ABCD$ 的面积。

一般地，若空间中面积为 S 平块 S 的法向量 $\vec{n}$ 与向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为 γ，S 在 xOy 平面上的投影 S' 面积为 S'，仍然有关系

$$S' = S\cos\gamma$$

定理 4.1 设 S 为光滑曲面，其方程为 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，则其面积

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma.$$

证 仍然用四步计算面积 S。

(1) 分割：将曲面 S 分割为 n 小块：$\Delta S_1,\Delta S_2\cdots\Delta S_n$（每小块面积也用相同的记号表示）(如图 4.2)；

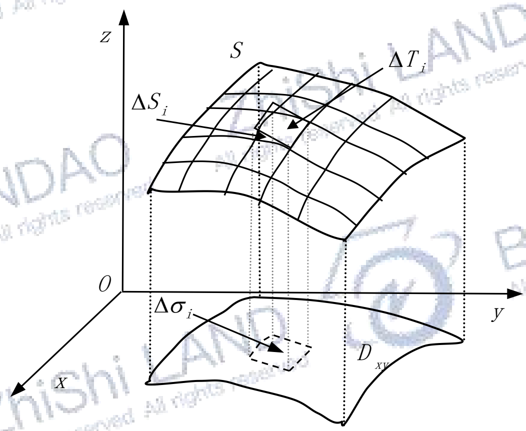

图 4.2

(2) 近似：在每块小曲面 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作该点的切平面 T_i，在切平面 T_i 上与 ΔS_i 对应的一小块切平面 ΔT_i（ΔT_i 的面积也用 ΔT_i 表示），使 ΔT_i 与 ΔS_i 在 xOy 坐标平面上有相同的投影 $\Delta\sigma_i$，则面积有近似公式：$\Delta S_i\approx\Delta T_i=\dfrac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中 γ_i 是 T_i 的法向量 $n_i=\{-z_x(\xi_i,\eta_i),-z_y(\xi_i,\eta_i),1\}$ 与向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角。$|\cos\gamma_i|=\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$。所以

$$\Delta S_i\approx\Delta T_i=\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\,\Delta\sigma_i$$

(3) 求和：$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\,\Delta\sigma_i$；

(4) 取极限：记 λ_i 为 $\Delta\sigma_i$ 两点间最大距离，$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}$。当 $\lambda\to0$ 时，每个 $\lambda_i\to0$，误差趋于0。所以

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\,\Delta\sigma_i$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma.$$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$ 称为曲面面积元素（或面积微分）.

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

【例 4.1】 求抛物面 $z=x^2+y^2, z\le 1$ 的面积.

解 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$， $S: z=x^2+y^2, x^2+y^2\le 1$。

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

思考题:

1. 求半径为 a 的球的表面积.

下面定理给出了第一类曲面积分的计算公式:

定理 4.2 设曲面 S 的方程为: $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$， D_{xy} 为曲面 S 在 xOy 面上的投影， $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续可导，则有计算公式:

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4.1}$$

方法： 将 $z=z(x,y), dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 代入，积分区域 D_{xy} 为曲面 S 在 xOy 面上的投影。

思考题:

2. 如果 S 的方程为 $y=y(x,z)$ 或 $x=x(y,z)$ 则有怎样类似的公式?

上式右端是二重积分，即曲面 S 上的曲面积分是将其转化为 S 在坐标面上的投影区域 D_{xy} 上的二重积分来计算的. 我们先通过一个例子熟悉该定理的应用.

【例 4.3】 求 $I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$， S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$.

解 投影 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le a^2\right\}$。

上半球面的方程为 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，因此有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故 $I=\iint_{x^2+y^2\le a^2} a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a^3$.

下面给出定理 4.2 的证明(如图 4.3):

由对面积的曲面积分的定义，有

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

设 ΔS_i 在 xOy 面的投影为 Δs_i，则 ΔS_i 的面积为

$$\Delta S_i=\iint_{\Delta s_i}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由积分中值定理，有

$$\Delta S_i=\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta s_i$$

其中 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，取 $\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$，则 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$

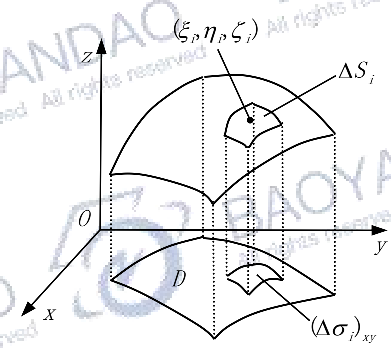

图 4.3

则有

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$= \lim_{\lambda' \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\sqrt{1+z_x^2(\xi_i, \eta_i)+z_y^2(\xi_i, \eta_i)}\Delta s_i$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

这里 λ_i' 为 Δs_i 两点间最大距离，$\lambda' = \max_{1\le i\le n}\{\lambda_i'\}$。证毕.

计算第一类曲面积分（对面积的曲面积分）$\iint_S f(x,y,z)dS$ 的方法步骤：

1、做准备

（1）把 S 往 xy 平面投影得到投影区域 D_{xy}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$；

（3）计算出 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$。

2、把做好的准备代入 $\iint_S f(x,y,z)dS$，D_{xy} 代 S、$z = z(x,y)$ 代入 $f(x,y,z)$、$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 代 dS，就化为了二重积分

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

完全类似地下面两个方法：

1、做准备

（1）把 S 往 yz 平面投影得到投影区域 D_{yz}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$；

（3）计算出 $dS = \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$。

2、把做好的准备代入 $\iint_S f(x,y,z)dS$，D_{yz} 代 S、$x = x(y,z)$ 代入 $f(x,y,z)$、$\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$ 代 dS，就化为了二重积分

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

1、做准备

（1）把 S 往 xz 平面投影得到投影区域 D_{xz}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$；

（3）计算出 $dS = \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dzdx$。

2、把做好的准备代入 $\iint_S f(x,y,z)dS$，D_{xz} 代 S、$y = y(x,z)$ 代入 $f(x,y,z)$、$\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dzdx$

代 dS，就化为了二重积分

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dzdx$$

如果三种方法都可以做，则三种方法算出来的结果是一样的。

【例 4.4】 求 $I=\iint_S (x^3+z^2)\,\mathrm{d}S$， $S: x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 因 x^3 为奇函数，S 关于 yOz 面对称，故 $\iint_S x^3\mathrm{d}S=0$.

又因 z^2 关于 z 为偶函数，S 关于 xOy 对称，故 $I=\iint_S z^2\mathrm{d}S=2\iint_{S_1} z^2\mathrm{d}S$，$S_1$ 为 S 的上半部分．投影 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$，上半球面的方程为 $S_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$。$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。而

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z^2\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^4.\end{aligned}$$

故 $I=\dfrac{4}{3}\pi a^4$.

注 $\iint_S z^2\mathrm{d}S$ 可用对称性计算：因 $\iint_S x^2\mathrm{d}S=\iint_S y^2\mathrm{d}S=\iint_S z^2\mathrm{d}S$，故

$$\iint_S z^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_S a^2\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

一般地，若积分 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 中将某两个变量互换，积分值不变，则说该积分关于这两个变量具有对称性．一个常用结论是:当被积函数与积分区域关于某两个变量具有对称性，则积分有同样的对称性．如 $f(x,y,z)=f(y,x,z)$，且 x 与 y 交换后，积分区域 S 的表达式不变，则 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S f(y,x,z)\mathrm{d}S$，对于其他类型的积分也有同样的结论．

习题 11－4

A 类

1．求下列曲面的面积:

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分；

(2) 两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面；

*(3) 曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分；

*(4)*曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, (0\le u\le 1, 0\le v\le \pi)$.

2．计算曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 S：$z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

*(1) $f(x,y,z)=1$；　　(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$.

*3．计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面.

4．计算下列曲面积分:

*(1) $\iint\limits_S (2x+\frac{4}{3}y+z)\mathrm{d}S$，其中 S 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分；

*(2) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geq h$ $(0<h<a)$ 的部分；

(3) $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截的有限部分；

(4) $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{r^2}$，$S: x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间部分，r 为 S 上的点到原点的距离；

*(5) $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$，$S$ 为四面体 $x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的边界曲面.

(6) $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$ 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

*5．求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), (0\leq z\leq 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\rho=z$．

B 类

1．求平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第一卦限部分的面积．

*2．设半径为 R 的球面 S 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 上，问当 R 为何值时，球面 S 在定球面内部那部分的面积最大?

解 设 $S: x^2+y^2+(z-a)^2=R^2\,(0<R<2a)$。$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \end{cases}$ 解得 $z=\frac{2a^2-R^2}{2a}$。代入第一个方程 $x^2+y^2+\left(\frac{2a^2-R^2}{2a}\right)^2=a^2$，化简 $x^2+y^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}$。$S$ 在定球面内部那部分 $S': z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leq R^2-\frac{R^4}{4a^2}$。

$z_x=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$ S'的面积

$$A(R)=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2-\frac{R^4}{4a^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}r\,dr$$

$$=R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}d\theta=R\int_0^{2\pi}\left(R-\frac{R^2}{2a}\right)d\theta$$

$$=2\pi\left(R^2-\frac{R^3}{2a}\right)(0\leq R\leq 2a)$$

让 $A'(R)=2\pi\left(2R-\frac{3R^2}{2a}\right)=0$ 得唯一解 $R=\frac{4}{3}a$。根据问题的实际，$R=\frac{4}{3}a$ 就是所要求。

*3．设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$．

*4．计算曲面积分 $\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}S$，$S$ 为圆锥面的一部分：

$$x=r\cos\varphi\sin\alpha, y=r\sin\varphi\sin\alpha, z=r\cos\alpha，(0\leq r\leq a; 0\leq\varphi\leq 2\pi)，$$

α 为常数 $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$．

第 5 节　对坐标的曲面积分

这一节是全书的最难，请给力攻破。

5.1　对坐标的曲面积分概念和性质

对坐标曲线积分的积分曲线是有向的。类似地，对坐标曲面积分的积分曲面也是有向的，即选定侧方向的。

1　定向曲面

如图 5.1 所示，长方形纸带 ABCD 显然有正反两侧，让其中一侧涂上红色，另一侧涂上蓝色。让 AB 端不动，而将 CD 端扭转 180°，再将 B 与 D，A 与 C 粘合起来，AB 与 CD 上的点也对应粘合起来，结果红侧和蓝侧就在同一侧了。因此这样得到的曲面（称为麦比乌斯(Möbius)带）只有一侧，它是单侧曲面.

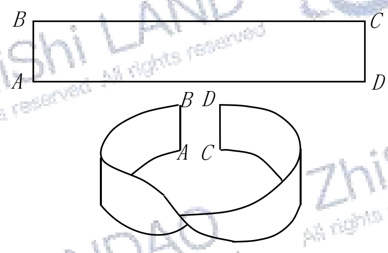

图 5.1

结论：有的曲面只有一侧，称为单侧曲面；有的曲面有两侧，称为双侧曲面。

假设我们以后遇到的曲面都是双侧的。

说双侧曲面 S 是有向曲面，就是选定了 S 的一侧. 通常我们用曲面上的法向量的方向说明规定的侧即曲面的方向（侧向）. 如取封闭曲面的法向量指向外表示该曲面取外侧，又如取曲面: $z = x^2 + y^2$ 的每点法向量指向上(法向量与 z 轴成锐角)表示取曲面上侧.

2　对坐标曲面积分的概念

背景实例。

【例 5.1】　假设一河流中每点处水的流速与时间无关，只与点的位置有关，在点 $M(x,y,z)$ 处的流速为向量 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，在河中放一双侧曲面 S，并选定 S 的一侧，求单位时间内水流向 S 指定一侧的质量(称为水流量，设水的密度为 1)Φ．

①先看一种特殊情况：设 $\boldsymbol{v}$ 为常向量，S 为有向平面 π（其方向如单位法向量 $\boldsymbol{e}_n$ 所指）上的一块，如图 5.2，从图上直观可看出，单位时间内流过 S 的质量就是以 S 为底，$|\boldsymbol{v}|$ 为斜高的代数体积(即可取负值)：

$$\Phi=S|\boldsymbol{v}|\cos\varphi=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_nS=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}$$

其中，向量 $\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{e}_n$ 称为曲面 S 的面积向量。当 Φ 为正时，此时 φ 为锐角，说明水的流向与 S 的指定侧一致，Φ 为负时，说明水的流向与 S 的指定侧方向相反．

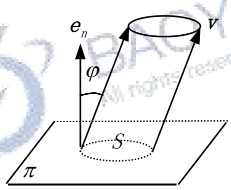

图 5.2

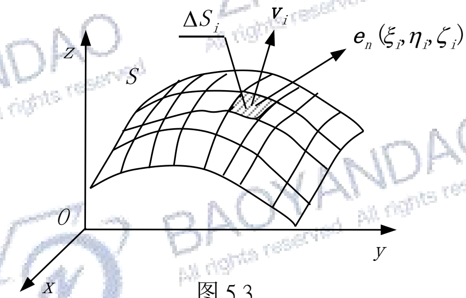

图 5.3

②一般情况：我们仍然用四步计算 Φ 。

（1）分割：将 S 任意分成 n 个小块 $\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，如图 5.3；

（2）近似：在每个小块 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，将 ΔS_i 近似视为平的，又将 ΔS_i 上的流速近似视为常向量 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，则流过 ΔS_i 的流量

$$\Delta\Phi_i\approx\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$

其中 $\boldsymbol{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 为曲面 S 在点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处的单位法向量。$(i=1,2,\cdots,n)$。

（3）求和：

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$

（4）取极限：记 ΔS_i 上最大两点距离为 λ_i，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}$。当 $\lambda\to0$ 时，每个 $\lambda_i\to0$，误差趋于 0。所以

$$\Phi=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\text{，}\quad(5.1)$$

(5.1)式右端恰为数量函数 $\vec{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_n(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一类曲面积分，即

$$\Phi=\iint_S\vec{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S\text{．}\quad(5.2)$$

通过上面四个步骤我们得到

$$\Phi=\iint_S\vec{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{e}_n(x,y,z)$ 是 S 在点 (x,y,z) 与 S 方向一致的单位法向量。

用这同样方法计算的实际例子还有很多很多。为了系统地研究这很多很多的实际规律，我们除去实际内容保留计算方法引进新的数学概念——第二类曲面积分。

定义 2.1　空间中给定有方向的曲面 S 和三元向量函数 $\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，$\vec{F}(x,y,z)$ 在 S 上的第二类曲面积分

$$\oiint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} \overset{\text{定义}}{=} \oiint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_n(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{e}_n(x,y,z)$ 是 S 在点 (x,y,z) 与 S 方向一致的单位法向量。$\vec{F}(x,y,z)$ 称为被积向量函数，x,y,z 称为积分变量，有向曲面 S 称为积分曲面，向量 $d\vec{S}$ 称为面积向量元素（微分）。

又将第二类曲线积分称为对坐标的曲面积分。

在实际问题中，$\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 是要求量微元，而 $\oiint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 是要求的量。比如说，$\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 是速度 $\boldsymbol{F}$ 与面积向量元素 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的数量积，它表示流量微元 $\mathrm{d}W$ 。而 $\mathrm{F}=\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 是单位时间的流量。

当 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 有各种各样实际意义时，$\oiint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 就跟着有各种各样实际意义。

第二类曲面积分的四种写法

比较 $\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} \overset{定义}{=} \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的左右两边你会发现

$$d\vec{S} = \vec{e}_n(x,y,z)dS$$

$\boldsymbol{e}_n(x,y,z)$ 有方向余弦

$$\boldsymbol{e}_n(x,y,z) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

其中 α,β,γ 都是 (x,y,z) 的函数。我们容易明白，$dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$ 是面积元素 dS 分别在 yz、zx 和 xy 平面上的投影。$d\vec{S} = \vec{e}_n(x,y,z)dS = \{dydz, dzdx, dxdy\}$。

因此有四种写法

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} \overset{定义}{=} \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S \\
&= \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \\
&= \iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy
\end{aligned}$$

由于 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 可正可负，所以 $dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$ 都是可正可负的。

由于 $\iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy$ 都是对坐标的积分，所以第二类的曲面积分又称为对坐标的曲面积分。

第二类曲面积分的相互转化

利用 $dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$，$\iint_S P(x,y,z)dydz, \iint_S Q(x,y,z)dzdx, \iint_S R(x,y,z)dxdy$ 可以相互转化

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_S P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy = \iint_S P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}dzdx$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \iint_S Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy = \iint_S Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dydz$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}dydz = \iint_S R(x,y,z)\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}dzdx$$

注意：其中法向量的方向角 α,β,γ 都是 (x,y,z) 的函数！

（如何看顺、记住这些式子？）

例 5.1 中的流量可表为:

$$\Phi = \iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

关于可积性，有结论：

由定义知，对坐标的曲面积分有如下性质：

(1) **方向性**：用 S^- 表示与 S 取相反侧，则

$$\iint_{S^-} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \ .$$

（这因为 S^-, S 上的单位法向量方向相反。

$$\iint_{S^-} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S^-} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_{S^-}(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= -\iint_{S^-} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_S(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= -\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_S(x,y,z)\mathrm{d}S = -\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

）

(2) **线性性**：对任意实数 a, b，有

$$\iint_S a\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = a\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\iint_S [\boldsymbol{F}(x,y,z) \pm \boldsymbol{G}(x,y,z)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \pm \iint_S \boldsymbol{G}(x,y,z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \ .$$

$b=0$ 时 $\iint_S a\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = a\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 。常数因子可提出来。

(3) **积分曲面可加性**：设 $S = S_1 \cup S_2$，且 S_1 与 S_2 至多仅边界相交，S, S_1, S_2 方向一致。则

$$\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \ .$$

5.2　对坐标的曲面积分的计算

首先，由于

$$\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,\mathrm{d}S$$

所以第二类曲面积分的计算可归结为第一类曲面积分的计算，当然得先算出 S 在 (x,y,z) 点法向量的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$.

我们引进三个符号：

$$\operatorname{sgn}_z(S)=\begin{cases}1, & S\text{与z轴同方向}\\ -1, & S\text{与z轴反方向}\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}_x(S)=\begin{cases}1, & S\text{与x轴同方向}\\ -1, & S\text{与x轴反方向}\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}_y(S)=\begin{cases}1, & S\text{与y轴同方向}\\ -1, & S\text{与y轴反方向}\end{cases}$$

（如何看顺、记住这些符号？（S 与所参考的标坐标轴方向一致取 1，反之取-1。））

定理 5.1　设有向曲面 S 的方程是 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，D_{xy} 为 S 在 xOy 面上的投影，$R(x,y,z)$ 在 S 上连续，$z_x(x,y),z_y(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续，则有计算公式：

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5.3}$$

证　记 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{0,0,R(x,y,z)\}$。

S 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\operatorname{sgn}_z(S)\{-z_x,-z_y,1\}$，所以单位法向量

$$\boldsymbol{e}_n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\operatorname{sgn}_z(S)\frac{1}{\sqrt{1+(-z_x)^2+(-z_y)^2}}\{-z_x,-z_y,1\}$$

而 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(-z_x)^2+(-z_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\vec{e}_n dS=\operatorname{sgn}_z(S)\{-z_x,-z_y,1\}dxdy$ 。将这些代入便得

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}_n(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}}\left[0\cdot(-z_x)+0\cdot(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\cdot 1\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第二类曲面积分

$dxdy$ 的积分，往 xy 平面投影得 D_{xy}，$S:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，$\operatorname{sgn}_z(S)$ 用 z 轴参考。

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

类似的，

$dzdx$ 的积分，往 zx 平面投影得 D_{zx}，$S:y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$，$\operatorname{sgn}_y(S)$ 用 y 轴参考。

$$\iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\operatorname{sgn}_y(S)\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$dydz$ 的积分，往 yz 平面投影得 D_{yz}，$S:x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，$\operatorname{sgn}_x(S)$ 用 x 轴参考。

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \operatorname{sgn}_x(S)\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ = \operatorname{sgn}_x(S)\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \operatorname{sgn}_y(S)\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ + \operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.6}$$

用公式(5.3)、(5.4)、(5.5)、(5.6)计算第二类曲面积分称为分面投影法。分面投影法的优点：公式简单；缺点：(5.6)中 S 要投影三次写三次函数。

利用关系 $dydz=\cos\alpha\, dS, dzdx=\cos\beta\, dS, dxdy=\cos\gamma\, dS$，三个积分可以互相转化，

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\iint_S P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy+Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\iint_S\left[P(x,y,z)(-z_x)+Q(x,y,z)(-z_y)+R(x,y,z)\right]dxdy$$
$$=\operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\right]dxdy$$

即

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\operatorname{sgn}_z S\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\right]dxdy \quad (5.7)$$

用公式(5.7)计算第二类曲面积分称为合一投影法。合一投影法的优点：S 只写一次函数只投影一次；缺点：公式复杂。

为了避免缺点，利用关系 $dydz=\cos\alpha\, dS, dzdx=\cos\beta\, dS, dxdy=\cos\gamma\, dS$ 把 $dydz, dzdx, dxdy$ 互相转化。但要记住：$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 S 法向量的方向余弦。

第二类曲面积分的计算

我们引进三个符号：

$$\operatorname{sgn}_z(S)=\begin{cases}1, & S\text{取上侧}\\ -1, & S\text{取下侧}\end{cases}$$
$$\operatorname{sgn}_x(S)=\begin{cases}1, & S\text{取前侧}\\ -1, & S\text{取后侧}\end{cases}$$
$$\operatorname{sgn}_y(S)=\begin{cases}1, & S\text{取右侧}\\ -1, & S\text{取左侧}\end{cases}$$

（S 与所参考的坐标轴方向一致取 1，反之取-1。）

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}\overset{\text{定义}}{=}\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n(x,y,z)dS$$
$$=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\iint_S P(x,y,z)dydz+\iint_S Q(x,y,z)dzdx+\iint_S R(x,y,z)dxdy$$

可以三个积分分别计算再加起来。

1、做准备

（1）对 $dxdy$ 积分时，把 S 往 xy 平面投影得到投影区域 D_{xy}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: z=z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$；

2、把上面做好的准备代入要计算的积分，并配符号，D_{xy} 代 S、$z=z(x,y)$ 代入 $R(x,y,z)$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=Sgn_z(S)\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$$

1、做准备

（1）对 $dydz$ 积分时，把 S 往 yz 平面投影得到投影区域 D_{yz}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: x=x(y,z), (y,z)\in D_{yz}$；

2、把上面做好的准备代入要计算的积分，并配符号，D_{yz} 代 S 、 $x=x(y,z)$ 代入 $P(x,y,z)$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = Sgn_x(S)\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} \overset{\text{定义}}{=} \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy$$
$$= Sgn_x(S)\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$
$$+ Sgn_y(S)\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx$$
$$+ Sgn_z(S)\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

也可以转化再计算。比如说

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_S P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy + Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy + R(x,y,z)dxdy$$ 。

1、做准备

（1）对 $dxdy$ 积分时，把 S 往 xy 平面投影得到投影区域 D_{xy}；

（2）把 S 的方程写成二元函数 $S: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$；

（3）$\vec{n}=\pm\{z_x,z_y,-1\}$（适当选定符号使得与 S 方向一致）。$\cos\alpha=\dfrac{\pm z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，

$\cos\beta=\dfrac{\pm z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$， $\cos\gamma=\dfrac{\mp 1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$， $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}=-z_y, \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=-z_x$。

2、把上面做好的准备代入要计算的积分，并配符号，D_{xy} 代 S 、 $z=z(x,y)$ 代入 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_S P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy + Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy + R(x,y,z)dxdy$$
$$= Sgn_z(S)\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\right]dxdy$$

类似地，也可以转化为 $dydz$ 或 $dzdx$ 的积分再计算。

如何看顺、记住这些公式？

$$\begin{cases}\vec{e}_n(x,y,z)=\mathrm{sgn}_z(S)\dfrac{1}{\sqrt{1+(-z_x)^2+(-z_y)^2}}\{-z_x,-z_y,1\}\\ dS=\sqrt{1+(-z_x)^2+(-z_y)^2}\,dxdy\end{cases}$$

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \operatorname{sgn}_z(S)\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【例 5.2】 计算 $I=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧在第一卦限部分.

解 从被积表达式 $z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可看出，将 S 向 xOy 面投影计算较方便，所以写出 S 的显式方程为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}，\quad (x,y)\in D_{xy}\quad \{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$$

S 在第一卦限外侧即上侧，$\operatorname{sgn}_z(S)=1$。由(5.4)得

$$I=\iint_{D_{xy}}(R^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R(R^2r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}R^4.$$

注 若向其它坐标面如 yOz 面投影，将 S 表为：$x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$，由(5.7)得

$$I=\iint_{D_{yz}}z^2(-x_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\frac{z^3}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z，$$

显然该二重积分求解要困难一些，所以在将曲面积分化为二重积分时，选择好投影面对简化计算是重要的. 选择时既要考虑 S 的方程又要考虑被积函数.

【例 5.3】 计算 $I=\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S: x=y^2+z^2, 0\le x\le 1$，取后侧.

解 由 S 的方程可看出，向 yOz 面投影计算更方便。S 取后侧 $\operatorname{sgn}_x(S)=-1$。由(5.7)得：

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{yz}}z(-x_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{D_{yz}}r^2\sin^2\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

（$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$）

注 读者不妨用(5.4)计算上例，并比较两种方法的繁简程度.

若曲面S与xOy面垂直，$f(x,y,z)$在S上连续，因$\cos\gamma=0$，故

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S=0.$$

若曲面S与yOz面垂直，$f(x,y,z)$在S上连续，因$\cos\alpha=0$，故

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S=0.$$

若曲面S与zOx面垂直，$f(x,y,z)$在S上连续，因$\cos\beta=0$，故

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_S f(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S=0.$$

【例 5.4】 计算 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 部分.

解 向 xOy 面投影。如图 5.4，S 写成 (x,y) 的函数时有两个表示式，所以将 S 分为两部分 $S_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取下侧，$S_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取上侧，投影都是 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$。$\mathrm{sgn}_z(S_2)=1, \mathrm{sgn}_z(S_1)=-1$。

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}\right)xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

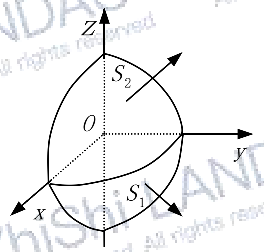

图 5.4

故

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}r^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r^2=\frac{2}{15}.$$

$\left(\int_0^1\frac{1}{2}r^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r^2=\int_0^1\frac{1}{2}t\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t\overset{\sqrt{1-t}=x}{=}\int_1^0\frac{1}{2}(1-x^2)x(-2x)\mathrm{d}x\right)$

【例 5.5】 求 $I=\iint_S yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上侧.

解 用合一投影法。向 xOy 面投影得 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$。$S$ 取上侧，$\mathrm{sgn}_z(S)=1$。将 S 的方程代入得

$$I=\iint_{D_{xy}}\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}(-z_y)+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}\left(-\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)+x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(y^2+x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(r^2\sin^2\theta+r\cos\theta\sqrt{R^2-r^2}\right)r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi R^4.$$

$$\left[\begin{array}{l}\int_0^R\left(r^2\sin^2\theta+r\cos\theta\sqrt{R^2-r^2}\right)r\,\mathrm{d}r=\sin^2\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r+\cos\theta\int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r\\ \int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r\overset{r=R\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\sin^2 t\,R\cos t\,R\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{R^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right]$$

思考题：

1．试用分面投影法重解此例.

【例 5.6】 计算 $I=\iint_S (1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是由三个坐标面与 $x+y+z=1$ 所围四面体的外侧.

解 此题我们用分面投影法来求，如图 5.5，

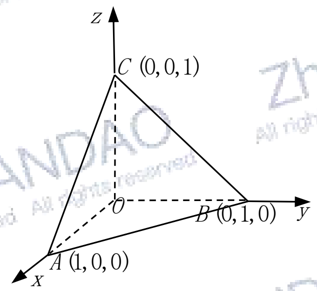

图 5.5

$$I=\iint_S (1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因

$$\iint_S (1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{OAB}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{OBC}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{OCA}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{ABC}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=0+\iint_{OBC}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0+\iint_{ABC}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{yz}}[1+(1-y-z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{yz}}(1-y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{6},$$

$$\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{OAB}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{OBC}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{OCA}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{ABC}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=0+0+\iint_{OCA}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{ABC}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-\iint_{D_{zx}}0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{D_{zx}}(1-x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6},$$

$$\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{OAB}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{OBC}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{OCA}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{ABC}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{OAB}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0+0+\iint_{ABC}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $I=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{3}$.

思考题：

2．“$\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=S$ 的面积” 是否正确？为什么？（不对。$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不是面积微分）

3．设 S 是半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(y\ge 0)$ 的外侧，由于 z 是奇函数，S 关于 xOy 坐标面对称，所以 $\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 对吗？为什么？（不对。不但 z 有符号，S 的方向也产生符号。）

4．在什么条件下，当 $f(x,y,z)\ \mathrm{N}\ g(x,y,z),\ (x,y,z)\in S$ 时，有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint_S g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（S 取上侧。）

习题 11－5

A 类

1．计算下列对坐标的曲面积分：

(1) 蜊$_S$ $x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧.

(2) 蜊$_S$ $z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

(3) 蜊$_S$ $xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

*(4) 蜊$_S$ $(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是以原点为中心，边长为 2 的正立方体表面外侧.

*(5) 蜊$_S$ $yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分外侧.

(6) 蜊$_S$ $x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 取 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外侧.

解：记 $V:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$，则 $S=\partial V^+$。用高斯公式

$$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_V(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2}dxdy\int_{c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}^{c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}(x+y+z)dz$$

$$=2\int_{a-R}^{a+R}dx\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}dy\int_{c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}^{c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}(x+y+z)dz$$

$$\overset{\substack{z-c=w\\ y-b=v\\ x-a=u}}{=}2\int_{-R}^{R}du\int_{\sqrt{R^2-u^2}}^{\sqrt{R^2-u^2}}dv\int_{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}^{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}(u+v+w+a+b+c)dw$$

$$=2\iiint_{u^2+v^2+w^2\le R^2}(u+v+w+a+b+c)dudvdw$$

$$=2\iiint_{u^2+v^2+w^2\le R^2}(u+v+w)dudvdw+2\iiint_{u^2+v^2+w^2\le R^2}(a+b+c)dudvdw$$

$$=2(a+b+c)\iiint_{u^2+v^2+w^2\le R^2}dudvdw=\frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$$

*(7) 蜊$_S$ $x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

*(8) 蜊$_S$ $(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 取 $x^2+y^2=z^2$ (0 # z h) 外侧.

*(9) 蜊$_S$ $\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R,z=-R\,(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

*(10) 蜊$_S$ $(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2$ (0 # z 1)，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

*(8) 蜊$_S$ $(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 取 $x^2+y^2=z^2$ (0 # z h) 外侧.

解 （8）用合面投影法。$S: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\le h^2)$ 下侧，$D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$，$\operatorname{sgn}_z(S)=-1$。

$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left[(y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+(\sqrt{x^2+y^2}-x)\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\left[r(\sin\theta-1)\cos\theta+r(1-\cos\theta)\sin\theta+r(\sin\theta-\cos\theta)\right]rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}2(\sin\theta-\cos\theta)d\theta\int_0^h r^2dr=0$$

*(9) $\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R\ (R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

（9）把 S 分割成

$S_1: z=-R, x^2+y^2\le R^2$ 下侧，

$S_2: z=R, x^2+y^2\le R^2$ 上侧，

$S_3: x=\sqrt{R^2-y^2}, -R\le z\le R$ 前侧，

$S_4: x=-\sqrt{R^2-y^2}, -R\le z\le R$ 后侧，

$$\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_S\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{S_3}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_4}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$ （为什么？）

$$\iint_{S_1}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$ （为什么？）

$$\iint_{S_1}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{S_2}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$ （为什么？）

$$\iint_{S_3}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\substack{-R\le y\le R\\-R\le z\le R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2-y^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_{S_4}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint_{\substack{-R\le y\le R\\-R\le z\le R}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2-y^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\substack{-R\le y\le R\\-R\le z\le R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2-y^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_{\substack{-R\le y\le R\\-R\le z\le R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}dy\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dz=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{1}{R^2+z^2}dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R\cos tR\cos tdt\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}d\frac{z}{R}=\left[\arctan\frac{z}{R}\right]_{-R}^{R}\frac{R^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{R^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2R^2}{4}$$

$\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_S\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\substack{-R\le y\le R\\-R\le z\le R}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2-y^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi^2R^2}{2}$ 2. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中：

(1) S 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第卦限的部分的上侧；

*(2) S 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (2) $z_x=-2x, z_y=-2y, \vec{e}_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\{2x,2y,1\}$。

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\left[\frac{P(x,y,z)2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\frac{Q(x,y,z)2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\frac{R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S\frac{P(x,y,z)2x+Q(x,y,z)2y+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$$

B类

*1. 计算面积分 $\oiint_S z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

*解 把 S 分割成

$$S_1: z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \text{ 上侧,}$$

$$S_2: z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \text{ 下侧}$$

在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$。

$$\oiint_S z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2c\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2c\int_{-a}^{a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{x=au,y=bv}{=}2c\int_{-1}^{1}a\,du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1-u^2-v^2}\,b\,\mathrm{d}v=2abc\iint_{u^2+v^2\le 1}\sqrt{1-u^2-v^2}\,dudv$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r=2abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}d\theta=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$\overset{r^2=t}{=}2\pi abc\int_0^1\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t\overset{\sqrt{1-t}=w}{=}2\pi abc\int_1^0 w(-2w)\,\mathrm{d}w=2\pi abc$$

*2. 计算 $I=\oiint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是平行六面体 $(0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的表面外侧，$f(x),g(y),h(z)$ 为 S 上的连续函数.

第 6 节　高斯公式

6.1　高斯公式

类似于格林公式，高斯公式给出第二类曲面积分与三重积分情形的关系.

设V 是有界闭区域，V 的边界取外侧称为V 的正向边界，记为∂V^{+} 。

定理6.1　设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在有界闭区域$V$ 上连续，且有连续偏导数P_x,Q_y,R_z（没有奇点），则有公式

$$\oiint_{\partial V^{+}} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (6.1)$$

公式(6.1)称为高斯(Gauss)公式.（怎样记住？）

高斯公式的意义：一般地，右边的偏导函数比左边的原函数简单。

下面先给一些高斯公式的应用实例，然后再证明该公式.

【例 6.1】　试利用高斯公式计算上一节例 5.6.

【例 5.6】　计算$I=\oiint_{S}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$是由三个坐标面与$x+y+z=1$所围四面体的外侧.

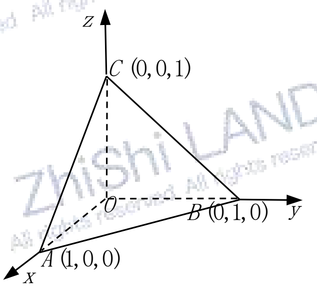

图 5.5

解　用高斯公式得：

$$I=\oiint_{S}(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{V}(1+1+0)\mathrm{d}v=2\iiint_{V}\mathrm{d}v$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}S_{\Delta AOB}\cdot h=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{3}.$$

思考题：

1．比较直接计算与用高斯公式计算两种办法的繁简程度.

高斯公式的证明：先证

$$\oiint_{\partial V^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{6.2}$$

(1) 设 $V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y);(x,y)\in D_{xy}\}$，如图 6.1 所示，$V$ 由 S_1,S_2,S_3 所围成，S_1 的方程为 $z=z_1(x,y)$，S_2 的方程为 $z=z_2(x,y)$，S_3 为与 z 轴平行的柱面，D_{xy} 为 V 在 xOy 面上的投影区域，则直接计算有：

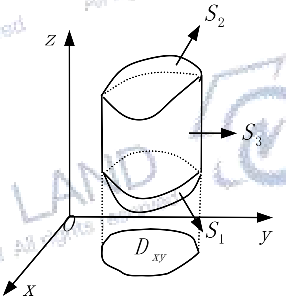

图 6.1

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.3}$$

$$\oiint_{\partial V^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_3} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0 \tag{6.4}$$

由(6.3),(6.4)式得(6.2)式成立．

(2) 对一般区域 V，我们可将它进行分割，使分割后的每一小块为 1)中区域的形状，然后对每小块用公式(6.2)，再将各小块的公式(6.2)相加，注意在相邻小块的分界面上两次积分曲面方向相反相抵消，同样可得在 V 上公式(6.2)成立．

同理可证得：

$$\oiint_{\partial V^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{6.5}$$

$$\oiint_{\partial V^+} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{6.6}$$

(6.2)，(6.5)，(6.6)式相加，即得高斯公式，证毕．

【例 6.2】 计算积分 $I=\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 在 S 上添加圆盘 $S_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ 方向向下如图 6.2 所示，在封闭曲面 $S\cup S_1$ 所围区域 V 上用高斯公式得:

$$\oiint_{S\cup S_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi R^5.$$

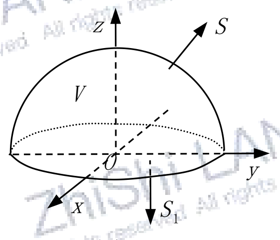

图 6.2

$$I=\left(\oiint_{S\cup S_1}-\iint_{S_1}\right)x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{5}\pi R^5+\iint_{S_1^-} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{5}\pi R^5+0=\frac{6}{5}\pi R^5$$

（为什么 $\iint_{S_1^-} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$？）

方法总结： 当曲面不封闭时，为了应用高斯公式，补上简单曲面使封闭（注意方向）。

【例 6.3】 求 $I=\oiint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S$，$S$ 为不经过原点的闭曲面的外侧.

解 $I=\oiint\limits_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

则有：$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$，

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

(1) 若 S 不包含原点，则由高斯公式得：

$$I=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V=0.$$

(2) 若 S 所围区域 V 含原点，则在 V 上高斯公式条件不满足（原点是奇点），为使用高斯公式，将原点“挖掉”，在 V 中作一圆心在原点半径为 r 的小球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=r^2$ 向里（为什么？），如图 6.3，V_1 为 S 与 S_1 所围区域，V_2 为小球面 S_1 所围成的区域，曲面的方向如图 6.3 所示，则由高斯公式得：

$$\oiint\limits_{S\cup S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{V_1}0\mathrm{d}V=0,$$

故将 S_1 的方程代入得

$$I=\oiint\limits_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\oiint\limits_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint\limits_{S_1^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{r^3}\oiint\limits_{S_1^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

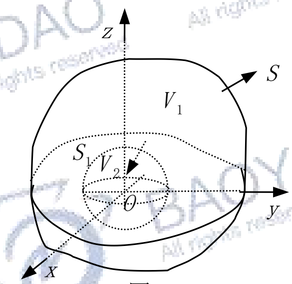

图 6.3

再次由高斯公式，有

$$I=\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{V_2}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{r^3}\times\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi.$$

方法总结：当曲面围有奇点时，为了应用高斯公式，先用一简单曲面把奇点围出去（注意方向）。如果要算 $\oiint\limits_S\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$，则用小椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=r^2$ 围出原点（为什么用椭球面？）。

下面是用高斯公式导出的体积的计算公式：

【例 6.4】 试证空间区域 V 的体积

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\partial V^+}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 $V=\iiint\limits_V dxdydz$，故由高斯公式，有

$$\frac{1}{3}\oiint\limits_{\partial V^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{3}\iiint\limits_V(1+1+1)dxdydz=\iiint\limits_V dxdydz=V.$$

思考题：

2. 计算 $\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解 由高斯公式，

$$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_V dxdydz=4\pi R^3$$。

6.2* 曲面积分与曲面形状无关(只与曲面边界有关)的条件

和曲线积分与路径无关相类似的问题是，什么条件下曲面积分与曲面形状无关而仅与曲面边界有关，有如下定理.

定理 6.2 设 G 是空间二维单连通区域，三元函数 P,Q,R 在 G 内有一阶连续偏导数，则以下条件等价:

(1) 沿 G 内任意闭曲面 S 积分 $\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$；

(2) $\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 在 G 内与曲面 S 形状无关，仅由 S 的边界唯一确定；

(3) 在 G 内任意点 (x,y,z) 有:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

证 (1)，(2)的等价性易证，下面只证(1)，(3)的等价性.

(3)$\Rightarrow$(1)：若(3)成立，由高斯公式得:

$$\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V 0dxdydz=0.$$

(1)$\Rightarrow$(3)：用反证法，设在 G 内有一点 M_0 使得：$\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]_{M_0}\neq 0$，不妨设 $\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]_{M_0}=h>0$，由 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 的连续性知，存在 M_0 的闭邻域 $\overline{U(M_0,r)}$，使得 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>\frac{h}{2}$，$\forall (x,y,z)\in\overline{U(M_0,r)}$，于是由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\partial U(M_0,r)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\overline{U(M_0,r)}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz>\frac{h}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3>0$$

与(1)矛盾．定理证毕．

习题 11－6

A 类

1．利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oiint\limits_S x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy$，其中 S 为立体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面外侧；

*(2) $\oiint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

*(3) $\oiint\limits_S xz^2\,dydz+(x^2y-z^3)\,dzdx+(2xy+y^2z)\,dxdy$，其中 S 为上半球体 $x^2+y^2\le a^2$，$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧；

(4) $\oiint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，$S$ 为锥体 $x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le h$ 的表面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面外法线（外侧）方向余弦；

*(5) $\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧；

*(6) $\iint\limits_S yz\,dzdx+2\,dxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\ge 0$ 的部分．

*(7) $\iint\limits_S (x^3+az^2)\,dydz+(y^3+ax^2)\,dzdx+(z^3+ay^2)\,dxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧．

(8) $\oiint\limits_S 2xz\,dydz+yz\,dzdx-z^2\,dxdy$，其中 S 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧．

*(9) $\iint\limits_S \dfrac{ax\,dydz+(z+a)^2\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数．

*(7) $\iint\limits_S (x^3+az^2)\,dydz+(y^3+ax^2)\,dzdx+(z^3+ay^2)\,dxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧．

解 （7）补 $S_1: x^2+y^2\le a^2$ 下侧。用高斯公式

$$\oiint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\,dydz+(y^3+ax^2)\,dzdx+(z^3+ay^2)\,dxdy=\iiint\limits_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi\,dr=\frac{6}{5}\pi a^5$$

$$\iint\limits_S (x^3+az^2)\,dydz+(y^3+ax^2)\,dzdx+(z^3+ay^2)\,dxdy$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5-\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\,dydz+(y^3+ax^2)\,dzdx+(z^3+ay^2)\,dxdy$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\,dxdy=\frac{12}{5}\pi a^5+\frac{a}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{a^5}{4}\pi=\frac{29}{20}\pi a^5$$

2．计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x(8y+1)\,dydz+2(1-y^2)\,dzdx-4yz\,dxdy$，其中 S 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\ x=0, 1\le y\le 3\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面，其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$．

B 类

*1．证明:若 S 为封闭曲面，l 为任何固定方向，则

$$\oiint\limits_S\cos(n,l)\,dS=0,$$

其中$\boldsymbol{n}$为曲面S的外法线方向；

*2．证明:公式

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \frac{1}{2}\oiint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中S是包围V的曲面，$\boldsymbol{n}$为S的外法线方向，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$．

*3．设$u(x,y,z)$是三维调和函数，即u有连续二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，又设$S$为光滑闭曲面取向侧，$S$所围区域为$V$，证明:

(1) $\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}V$，其中$\frac{\partial u}{\partial n}$为$u$沿$S$的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数；

(2)若$u(x,y,z)$在S上恒为零，则$u(x,y,z)$在区域V上也恒为零．

第 7 节　斯托克斯公式

7.1　斯托克斯公式

斯托克斯公式是格林公式的推广，这一公式给出了在曲面块上的第二类曲面积分与其边界曲线上的第二类曲线积分之间的关系.

有向曲面 S 的正向边界 ∂S^+：伸出右手，大拇指指向 S 的方向，剩下四个手指的方向就是 ∂S^+ 的方向（图 7.1）。

给定向量函数 $\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$（在相应的地方没有奇点）。

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\text{（按第一行展开）}$$

$$=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

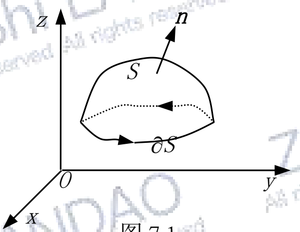

图 7.1

称为 $\vec{F}(x,y,z)$ 的旋度。

斯托克斯(Stokes)公式：：

$$\oint_{\partial S^+}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\overrightarrow{rot}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S^+}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_{\partial S^+}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\text{(按第一行展开)}$$

三个等式都是同一个斯托克斯(Stokes)公式，记哪个都可以，第三个好记一些。

固定了边界 ∂S^+ 后，曲面 S 有无数多张，不管哪张 S，斯托克斯(Stokes)公式都是对的。当然你就可以选一张简单的 S 来应用斯托克斯(Stokes)公式。

我们先给两例说明它的应用.

【例 7.1】　利用斯托克斯公式计算曲线积分 $I=\oint_\Gamma z\,dx+x\,dy+y\,dz$，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截的三角形边界，它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手螺旋法则(如图 7.2).

解　由斯托克斯公式有

$$I=\iint_S(1-0)dydz+(1-0)dzdx+(1-0)dxdy$$

$$=\iint_S dydz+dzdx+dxdy$$

由被积函数（都为 1）转化得

$$I=3\iint_S dxdy=3\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{3}{2}.$$

其中 D_{xy} 为 S 在 $x0y$ 面上的投影.

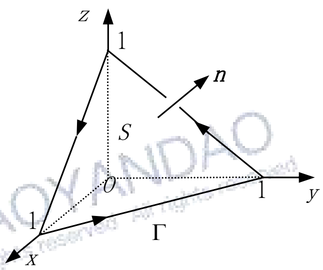

图 7.2

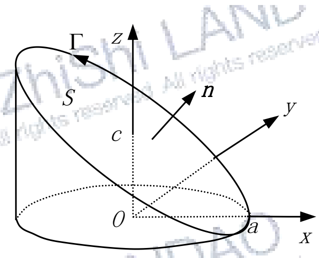

图 7.3

【例 7.2】 计算 $I=\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,(a,c>0)$ 的交线，方向为从 z 轴正向看去为逆时针方向(如图 7.3 所示).

解 平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{\frac{1}{a},0,\frac{1}{c}\}$，$\boldsymbol{e}_n=\{\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\}$，有

$$I=\iint_S (-1-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-1-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_S (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S \quad （这里 \boldsymbol{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)）$$

$$=-2\iint_S \frac{c+a}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathrm{d}S=-2\frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(-\frac{c}{a})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}\times a^2\pi=-2\pi a(a+c)$$

*定理 7.1 的证明：首先证明

$$\oint_{\partial S^+} P\mathrm{d}x=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (7.2)$$

证明的思路是等式两边化为同一个二重积分.

如图 7.4，不妨设与 xOy 面垂直的直线与 S 至多交于一点，S 取上侧，S 在 xOy 面上的投影为 D_{xy}，设 S 的方程为: $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，因为 ∂S^+ 在 S 上，所以 ∂S^+ 的方程可设为:

$$x=x(t),y=y(t),z=z(x(t),y(t)),$$

∂S^+ 的方向对应 t 从 a 到 b，则 ∂D_{xy} 的方程为: $x=x(t),y=y(t)$，t 从 a 变到 b，由格林公式，有

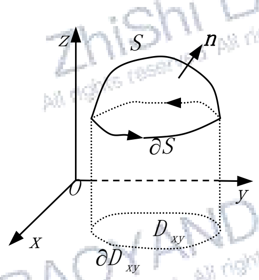

图 7.4

$$\oint_{\partial S^+} P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_a^b P[x(t),y(t),z(x(t),y(t))]x'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\oint_{\partial D_{xy}} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}[\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (7.3)$$

另一方面，由第二类曲面积分的计算方法，有

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}(-\frac{\partial z}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{XY}} \left(\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial z}\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.4}$$

由(7.3)(7.4)式得(7.2)式成立．

若 S 与垂直于 xOy 的平面的直线的交点多于一个时，可通过分割的方法，将 S 分成几部分，使每一部分与垂直于 xOy 的平面的直线的交点至多一个，则在每一片上，(7.2)式成立．各片上的(7.2)式相加，可得在 S 上(7.2)式仍成立．

用类似的方法可证得：

$$\oint_{\Gamma^+} Q\,\mathrm{d}y = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{7.5}$$

$$\oint_{\Gamma^+} R\,\mathrm{d}z = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x \tag{7.6}$$

将(7.2)，(7.5)，(7.6)相加即得斯托克斯公式(7.1)成立．证毕．

*7.2 空间曲线积分与路径无关的条件

与平面曲线积分与路径无关的相关结论类似，有

定理 7.2 设 V 为空间一维单连通区域，若函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1)对于 V 内任一分段光滑的封闭曲线 Γ 有 $\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$．

(2)对于 V 内任一分段光滑的曲线 Γ，曲线积分 $\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 与路径无关．

(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 在 V 内是某一函数的全微分，即存在 $u(x,y,z)$，使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 在 V 内每一点成立．

(4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ 在 V 内每点成立．

定理的证明与平面的情形相仿，不再重复．

【例 7.3】 验证积分

$$\oint_\Gamma (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$$

与路径无关，并求被积函数的原函数 $u(x,y,z)$．

解 $P = y+z$，$Q = z+x$，$R = x+y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 1.$$

所以积分与路径无关．取积分路径如图 7.5 所示，有

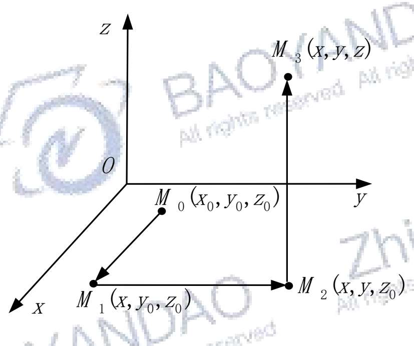

图 7.5

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_{M_0}^{M} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{M_0}^{M_1} + \int_{M_1}^{M_2} + \int_{M_2}^{M} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{x_0}^{x} (y_0 + z_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} (z_0 + x)\mathrm{d}y + \int_{z_0}^{z} (x+y)\mathrm{d}z \\ &= (y_0 + z_0)(x - x_0) + (z_0 + x)(y - y_0) + (x+y)(z - z_0) \end{aligned}$$

习题 11－7

A类

1．利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，若从$x$轴正向看去，$\Gamma$取逆时针方向；

*(2) $\oint_{L}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中$L$为$x+y+z=1$与三坐标面的交线，它的方向与法向量$\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$符合右手螺旋法则；

*(3) $\oint_{L}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$，其中$L$为以$A(a,0,0), B(0,a,0), C(0,0,a)$为顶点的三角形沿ABCA的方向．

*2．利用斯托克斯公式把曲面积分$\iint_{\Sigma}(-y\cos\alpha+(z-1)\cos\beta-\cos\gamma)\mathrm{d}S$化为曲线积分，并计算积分值，$\Sigma$为立方体$\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2, 0\leq z\leq 2\}$的表面外侧去掉$xOy$面上的那个底面，$\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是$\Sigma$的单位法向量．

B类

*1．若L是平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$上的闭曲线，它所包围区域的面积为$S$，求

$$\oint_{L}\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

其中L依正向进行．

第 9 节　多元函数积分的物理应用

本节简要介绍重积分、第一类线面积分、二类线面积分在物理上的应用，包括质量、质心、转动惯量、引力、梯度、散度、旋度等.

9.1　重积分、第一类线面积分的物理应用

1　质量

质量记为M。

1．当 $f(x,y)$ 是平面区域D 的面密度时，$M=\iint_D f(x,y)ds$；

2．当 $f(x,y,z)$ 是空间区域V 的体密度时，$M=\iiint_V f(x,y,z)dv$；

3．当 f 是曲线L 的线密度函数时，$M=\int_L fds$；

4．当 $f(x,y,z)$ 是曲面S 的面密度时，$M=\iint_S f(x,y,z)dS$。

2　质心

在物理学中我们知道，在水平面上，如果质点 m 离转轴 l 的距离为 r，则重力矩是 gmr。重力矩与 g 有关即与环境有关。为了与环境无关，定义 m 对 l 静矩为 $J_l = mr$。

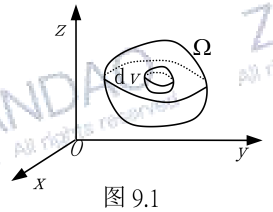

图 9.1

设 Ω 的体密度为 $\rho(x,y,z)$。Ω 的微元 dv（图 9.1）的质量 $dm = \rho(x,y,z)dv$，对 xOy 平面的静矩 $dJ_{xy} = z\rho(x,y,z)dv$。因此

$$J_{xy} = \iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dv$$

类似地，

$$J_{yz} = \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dv, J_{zx} = \iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dv$$

如果把 Ω 捏到一点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 后对各坐标平面的静矩与原来等效，则 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 称为 Ω 的质心。因此

$$\bar{x} = \frac{J_{yz}}{M}, \bar{y} = \frac{J_{zx}}{M}, \bar{z} = \frac{J_{xy}}{M}$$

类似地，在平面上，

$$J_x = \iint_D y\rho(x,y)d\sigma, J_y = \iint_D x\rho(x,y)d\sigma, \bar{x} = \frac{J_y}{M}, \bar{y} = \frac{J_x}{M}$$

平面曲线

$$J_x = \int_L y\rho(x,y)ds, J_y = \int_L x\rho(x,y)ds, \bar{x} = \frac{J_y}{M}, \bar{y} = \frac{J_x}{M}$$

空间曲线

$$J_{xy} = \int_L z\rho(x,y,z)ds, J_{yz} = \int_L x\rho(x,y,z)ds, J_{zx} = \int_L y\rho(x,y,z)ds$$

$$\bar{x} = \frac{J_{yz}}{M}, \bar{y} = \frac{J_{zx}}{M}, \bar{z} = \frac{J_{xy}}{M}$$

曲面

$$J_{xy} = \iint_S z\rho(x,y,z)dS, J_{yz} = \iint_S x\rho(x,y,z)dS, J_{zx} = \iint_S y\rho(x,y,z)dS$$

$$\bar{x} = \frac{J_{yz}}{M}, \bar{y} = \frac{J_{zx}}{M}, \bar{z} = \frac{J_{xy}}{M}$$

【例 9.1】 求均匀的球顶锥体(如图 9.2)的质心，设该球的球心在原点，半径为 R，锥体的顶点在原点，对称轴为 z 轴，锥面与 z 轴交角为 $\alpha\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

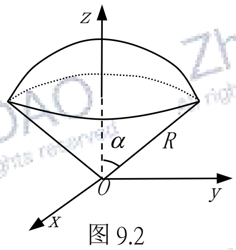

图 9.2

解 **均匀即密度 ρ 为常数**（此时质心又称形心）。由对称性知，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$,

$$\bar{z}=\frac{\rho\iiint_V z\,\mathrm{d}V}{\rho\iiint_V \mathrm{d}V},$$

而

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}V=\iiint_V r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi R^4(1-\cos^2\alpha),$$

$$\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha),$$

故

$$\bar{z}=\frac{\iiint_V z\,\mathrm{d}V}{\iiint_V \mathrm{d}V}=\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)R.$$

所以质心坐标为 $\left(0,0,\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)R\right)$.

【例 9.2】 求质量均匀分布的半球面 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心.

解 由对称性知，$\bar{x}=0, \bar{y}=0$, 根据(9.1)式得

$$\bar{z}=\frac{\iint_S z\rho \mathrm{d}S}{\iint_S \rho \mathrm{d}S}=\frac{\iint_S z \mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S},$$

而

$$\begin{aligned}\iint_S z \mathrm{d}S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= a\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^3. \qquad (D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2)\end{aligned}$$

$\iint_S \mathrm{d}S = 2\pi a^2$，故

$$\bar{z}=\frac{\iint_S z \mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所以质心为 $(0,0,\frac{a}{2})$.

3　转动惯量

我们知道，空间中一质量为m 的质点对转轴l的转动惯量为r^2m ，r为质点到l的距离.

设Ω 为一个物质几何体，密度$\rho(x,y,z)$连续，在Ω 中任取一小块$\mathrm{d}v$(其度量也用相同记号)，在$\mathrm{d}v$中任取一点M ，则小块$\mathrm{d}v$的质量近似为$\rho(M)\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}v$关于x轴,y轴,z轴的转动惯量分别为$dI_x = \left(y^2+z^2\right)\rho(M)\mathrm{d}v$，$dI_y = \left(x^2+z^2\right)\rho(M)\mathrm{d}v$，$dI_z = \left(x^2+y^2\right)\rho(M)\mathrm{d}v$。所以$\Omega$ 关于x轴,y轴,z轴的转动惯量分别为：

$$I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho\mathrm{d}v, I_y = \iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\rho\mathrm{d}v, I_z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}v .$$

平面区域、曲线时类似思考。

【例 9.3】　求半径为R 的均匀半圆薄片(面密度为常数μ)对于其直径边的转动惯量.

解　建立如图 9.3 所示坐标系，关于x轴的转动惯量为：

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \mu\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\mu R^4\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}MR^2. \end{aligned}$$

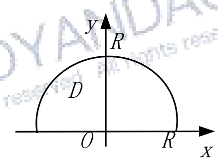

图 9.3

其中$M = \frac{1}{2}\pi R^2\mu$为半圆薄片的质量.

【例 9.4】　求螺旋线Γ：$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$　$(0 \le t \le 2\pi)$对z轴的转动惯量，曲线的密度ρ为常数.

解　$$I_z = \int_{\Gamma}(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}s = \rho\int_0^{2\pi}a^2\sqrt{a^2\sin^2t + a^2\cos^2t + b^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\rho a^2\sqrt{a^2+b^2} .$$

4　引力

设有一几何体Ω，密度$\rho(M)$连续，Ω外有一质量为m的质点记为$m\ (x_0,y_0,z_0)$，求Ω对m的引力$\boldsymbol{F}$.

根据万有引力公式$f=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$(其中r是质点m_1,m_2之间的距离，G为引力常数)，如图9.4，在Ω中任取一小块$\mathrm{d}v$(其度量用相同的符号)，则质量元素为$\rho(M)\mathrm{d}v$，将质量元素看成M点处质量为$\rho(M)\mathrm{d}v$的质点，则质量元素对质点m的引力大小为：

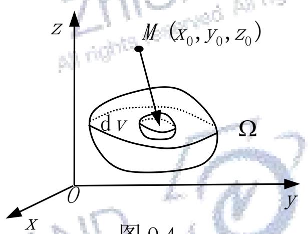

图 9.4

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{F}|=G\frac{m\rho(M)\mathrm{d}v}{r^2},\quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

引力元素沿与坐标轴平行方向的各分量为：

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{m\rho(M)\mathrm{d}v}{r^2}\times\frac{x-x_0}{r}=G\frac{m\rho(M)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

同理：

$$\mathrm{d}F_y=G\frac{m\rho(M)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v;\quad \mathrm{d}F_z=G\frac{m\rho(M)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

所以

$\boldsymbol{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$

$$=\left\{G\iiint_\Omega\frac{m\rho(M)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v,\ G\iiint_\Omega\frac{m\rho(M)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v,\ G\iiint_\Omega\frac{m\rho(M)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v\right\}.$$

【例 9.5】　设半径为R的匀质球体，占有空间闭区域$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2\}$，求它对位于$M_0(0,0,a)\ (a>R)$处的单位质量的质点的引力.

解　设球体密度为常数μ，由对称性知引力分量$F_x=F_y=0$，对F_z，有

$$F_z=\iiint_V G\mu\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac32}}\mathrm{d}V$$

$$=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac32}}$$

$$=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac32}}$$

$$=2\pi G\mu\left(-2R+2R-\frac{2R^3}{3a^2}\right)=-\frac{4\pi G\mu R^3}{3a^2}.$$

$$\vec{F}=\left\{0,0,-\frac{4\pi G\mu R^3}{3a^2}\right\}$$

9.2 场论初步

1 场

(1) **场**：设Ω是一个空间区域。Ω上的一个数量场就是Ω上定义的一个数量函数$f(x,y,z)$；Ω上的一个向量场就是Ω上定义的一个向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)$。例如温度场、密度场、电位场是数量场；而力场、速度场是向量场．若该场中物理量在各点处的值不随时间变化，则称该场为稳定场，否则称为不稳定场．本节只讨论稳定场．

(2) **等值面**：给定了数量场$f(x,y,z)$，则$f(x,y,z)=c$是空间一张曲面，在该曲面上$f(x,y,z)$保持常值c，称该曲面为等值面．

等量面只能粗略地刻画数量场的分布规律，下面将引进梯度、散度、旋度的概念来更深刻地刻画数量场与向量场的属性．

2 数量场的方向导数与梯度

函数f在点(x_0,y_0,z_0)处沿方向$\vec{l}$的方向导数为：

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \vec{l}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t},$$

其中$\vec{l}$所对应的单位向量为$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$．

定义 9.1 数量场f在点$M(x,y,z)$的梯度为向量$\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\{f_x,f_y,f_z\}$，是等值面指向$f$增加方向的法向量。

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_P=\left|\mathbf{grad}\,f(P)\right|\cos\theta=\begin{cases}\left|\mathbf{grad}\,f(P)\right|(\text{最大}), & \vec{l}\text{与}\mathbf{grad}\,f(P)\text{同方向}\\ 0, & \vec{l}\perp\mathbf{grad}\,f(P)\\ -\left|\mathbf{grad}\,f(P)\right|(\text{最小}), & \vec{l}\text{与}\mathbf{grad}\,f(P)\text{反方向}\end{cases}$$

其中θ为向量$\mathbf{grad}\,f(P)$与向量$\vec{l}$间的夹角。

3 向量场的通量与散度

(1) 通量

设$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$为向量场，$S$为有向曲面，则称曲面积分

$$\Phi=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

为向量场$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$穿过曲面$S$的通量．若$\boldsymbol{v}(x,y,z)$为流速场，则$\Phi=\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$的物理意义为在单位时间内流体通过曲面$S$的体积即流量．

(2) 散度

设$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$为向量场，在场中一点$M$的某个邻域内作一包含$M$点在内的任一闭曲面$\Delta S$(方向取外侧)，设其包含的空间区域为$\Delta V$(体积也用相同记号)，则$\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$为往外流的通量。有东西流出来意味着里面有泉。$\dfrac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$为$\Delta V$中的平均泉强度。极限

$$\lim_{\Delta V\to M}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

为M点的泉强度，称为向量场$\boldsymbol{A}$在点M处的散度（对于一点来说，“泉”和“散”是同义

词)，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ ，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}.$$

散度就是泉强度。散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 为一数量．若 $\boldsymbol{v}$ 是流体的流速， $\mathrm{div}\boldsymbol{v}>0$，则在 M 点有泉；若 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}<0$，则在 M 点漏走流体；若在 M 点 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ 表示该点无泉无漏．称 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}\equiv 0$ 的向量场 $\boldsymbol{A}$ 为无源场．散度是一个由向量场 $\boldsymbol{A}$ 所产生的数量值函数，称作散度场．

散度有如下计算公式:

定理 9.1 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在空间某区域有一阶连续偏导数，向量场 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$，则在定义域内

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

证 取包含 M 点的小区域 V ，其边界曲面为 S，则由高斯公式和积分中值定理得

$$\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{\Delta V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{M'}\cdot\Delta V,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A}&=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}\\&=\lim_{M'\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{M'}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{M}.\end{aligned}$$

用通量与散度的记号，高斯公式可表示为

$$\oiint_{\partial V^+}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,dxdydz.$$

此说明高斯公式的物理意义为：穿出封闭曲面 ∂V 的通量，等于 ∂V 所围的区域 V 上的散度的“总和”即散度在 V 上的三重积分.

4 向量场的环量与旋度

(1) 环流量

设Γ为封闭曲线，$\boldsymbol{A}(x,y,z)$为向量场，我们知道，将$\boldsymbol{A}$理解为力$\boldsymbol{F}$时，则$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$为力$\boldsymbol{F}$沿曲线$\Gamma$所作的功．下面我们将$\boldsymbol{A}$看作流速场$\boldsymbol{v}$，看看$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$的物理意义．设装有叶片的轮子，平放到有旋涡的河面上，轮子就会旋转，旋转快慢显然与流速$\boldsymbol{v}$在叶片上每点的切向分量$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\tau}$有关(如图 9.5)，可以用

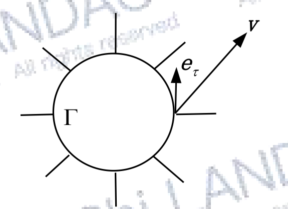

图 9.5

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\tau}\,ds=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$$

来刻画环形流动的强弱，称它为$\boldsymbol{v}$沿曲线Γ的环流量(简称环量).

定义 9.2 设Γ是空间任一封闭曲线，取定方向，则称$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$为向量$\boldsymbol{A}$沿$\Gamma$的环量.

环量仅仅刻画Γ所围区域S的旋涡强弱，Γ一定时，环量越大Γ所围区域旋转越强．进一步我们要研究各点旋涡的强弱，即研究环量对面积的变化率.

设M为向量场$\boldsymbol{A}$中一点，在M处取定一个方向$\boldsymbol{n}$，再过M点任作一微小曲面ΔS(其面积也用相同记号)，以$\boldsymbol{n}$为其在M点处的法向量，ΔS的周界$\Delta\Gamma$的正向取作与$\boldsymbol{n}$构成右手螺旋关系，如图 9.6,则

$$\frac{\oint_{\Delta\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}}{\Delta S}$$

表示流体绕$\boldsymbol{n}$轴旋转的环流量关于面积的平均变化率．若极限

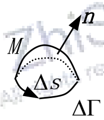

图 9.6

$$\mu_n=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_{\Delta\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}}{\Delta S}$$

存在，称其为向量场$\boldsymbol{A}$在点M处沿方向$\boldsymbol{n}$的环量面密度(即环量关于面积的变化率).

由定义知，环量面密度μ_n越大，流体在M点处绕轴$\boldsymbol{n}$旋转的速度越快．对同一点M当转轴的方向$\boldsymbol{n}$改变时，环量面密度μ_n也随之改变，但总有一方向$\boldsymbol{n}$使得μ_n取最大值，这就是下面要介绍的旋度概念.

(2) 旋度

定义 9.3 设$\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$为向量场。向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)$在点$M(x,y,z)$处的旋度为向量

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{\boldsymbol{A}}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

旋度反映了向量场在该点的旋转强度。

用旋度记号，Stokes 公式可写为:

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{S}\mathrm{rot}\overrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot d\boldsymbol{S}\ .$$

【例 9.6】 求向量场$\boldsymbol{A}=xy^2z^2\boldsymbol{i}+z^2\sin y\,\boldsymbol{j}+x^2e^y\boldsymbol{k}$的旋度.

解 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & z^2\sin y & x^2\mathrm{e}^y \end{vmatrix}$

$=(x^2\mathrm{e}^y-2z\sin y)\boldsymbol{i}+2x(y^2z-\mathrm{e}^y)\boldsymbol{j}-2xyz^2\boldsymbol{k}$.

5 有势场、无源场、调和场

(1) 有势场

定义 9.4 设有向量场 $\boldsymbol{A}$ ，若存在数值函数 $u=u(x,y,z)$，使得 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,u$，则称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，并称 $v=-u$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数，即

$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v.$$

假设 z 轴与地面垂直,方向向上，我们知道质量为 m 的物体的重力场为 $\boldsymbol{A}=\{0,0,-mg\}$，在高为 z 处的势能为 $v(x,y,z)=mgz$， 而 $-\mathbf{grad}\,v=-\{v_x,v_y,v_z\}=-\{0,0,mg\}=\boldsymbol{A}$ ，故重力场是有势场，其势能为重力场的势函数.

*由空间曲线与路径无关的相关结论知，空间向量场 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$ 在一维单连通区域 V 中，下述命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是有势场；

(2) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ ；

(3) 对于 V 中任意闭路 Γ，都有 $\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$；

(4) $\int_{\overset{\frown}{M_0M}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与路径无关；

(5) 存在数值函数 $u(M)$，使得 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$.

(2) 无源场

若向量场 $\boldsymbol{A}$ 在任一点的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ ，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无源场.

(3) 无旋场

若向量场 $\boldsymbol{A}$ 在任一点的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场.

(4) 调和场

若向量场 $\boldsymbol{A}$ 既是无源场又是无旋场，即 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$， $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为调和场.

6 向量微分算子

(1) 哈米尔顿算子

称向量微分算子 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 为哈米尔顿（Hamilton）算子. ∇ 读作“纳普拉（Nabla）”. ∇ 算子本身只是一种微分运算符号，同时又被看作是向量，即 ∇ 是以 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ 为分量的向量，所以它在运算中具有向量和微分的双重性质，其运算规则是:

$$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\,, \tag{9.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{9.3}$$

特别地，有 $\nabla\cdot\nabla u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，将此式右端记为 $\nabla^2 u$，也记为 Δu，即 $\nabla^2=\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，称此为拉普拉斯（Laplace）算子.

$$\nabla\times A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{9.4}$$

故 $\mathrm{grad}\,u=\nabla u$；$\mathrm{div}A=\nabla\cdot A$；$\mathrm{rot}A=\nabla\times A$.

这样就将梯度、散度、旋度的运算问题转化为算子 ∇ 的运算，而 ∇ 所服从的微分运算法则和向量运算法则是我们所熟悉的. 这就是引进 ∇ 算子的原因.

②利用 ∇ 算子，高斯公式与斯托克斯公式可分别写为：

$$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot F\,\mathrm{d}v=\oiint_S F\cdot\mathrm{d}S;\qquad \iint_S(\nabla\times F)\cdot\mathrm{d}S=\oint_{\partial S^+}F\cdot\mathrm{d}r.$$

根据 ∇ 的微分和向量运算法则可证得以下梯度、散度、旋度的基本性质.

(2) 梯度基本性质

(1) $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$.

(2) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

(3) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

(4) $\nabla u\cdot\mathrm{d}s=\mathrm{d}u$（这里 $\mathrm{d}s=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$）.

(3) 散度基本性质

(1) $\nabla\cdot(A+B)=\nabla\cdot A+\nabla\cdot B$.

(2) $\nabla\cdot(uA)=u\nabla\cdot A+A\cdot\nabla u$.

(3) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$.

(4) $\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$.

【例 9.7】 已知 $\varphi=e^{xyz}$，$r=xi+yj+zk$，求 $\mathrm{div}(\varphi r)$.

解 $\mathrm{div}(\varphi r)=\nabla\cdot(\varphi r)=\varphi\nabla\cdot r+\nabla\varphi\cdot r$，

$\nabla\cdot r=\nabla\cdot(xi+yj+zk)=3$，

$\nabla\varphi=\nabla e^{xyz}=e^{xyz}\nabla(xyz)=e^{xyz}(yz\,i+xz\,j+xy\,k)$，

故 $\mathrm{div}(\varphi r)=3(1+xyz)e^{xyz}$.

(4) 旋度基本性质

(1) $\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$.

(2) $\nabla\times(uA)=u(\nabla\times A)+\nabla u\times A$.

(3) $\nabla\times\nabla u=0$.

【例 9.8】 证明：$\mathrm{div}(A\times B)=\mathrm{rot}A\cdot B-A\cdot\mathrm{rot}B$.

证 $\mathrm{div}(A\times B)=\nabla\cdot(A\times B)$

$=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)=B\cdot\mathrm{rot}A-A\cdot\mathrm{rot}B$.

注意：此例是散度基本性质中的(3)式，由此题证明过程知，只要充分利用 ∇ 的向量与微分的二重性质，就不难推出梯度、散度与旋度的一些基本性质.

习题 11－9

A 类

1．求由下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标：

(1) $ay=x^2, x+y=2a\ (a>0)$；

(2) $r=a\cos\theta, r=b\cos\theta\ (0<a<b)$；

*(3) $r=a(1+\cos\varphi)\ (a>0)$；

*2．求下列均匀曲线弧的质心坐标：

(1)半径为 a，中心角为 2α 的圆弧；

(2)心脏线 $r=a(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le 2\pi$．

3．求边界为下列曲面的均匀物体的质心：

(1) $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}, z=0\ (a>0, b>0, c>0)$；

*(2) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0$．

4．设一物质曲线 Γ 在点 (x,y,z) 处它的线密度为 $\mu(x,y,z)$，用第一类曲线积分分别表示：

*(1) 该物质曲线关于 x 轴与 y 轴的转动惯量；

(2) 该物质曲线对位于线外点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位质点的引力．

*5．设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt\ (0\le t\le 2\pi)$，它的线密度 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z；　　(2) 它的质心．

*6．设面密度为常数 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)\mid R_1\le\sqrt{x^2+y^2}\le R_2, x\ge 0\}$，求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$．

7．设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>h)$ 处的单位质量的质点的引力．

*8．设一物质曲面 S，其面密度为 $\mu(x,y,z)$，试用第一类曲面积分表示：

*(1) 曲面对三个坐标轴的转动惯量；

(2) 曲面对位于 S 外一点 (x_0,y_0,z_0) 处的单位质点的引力．

*9．求密度为常数 μ 的均匀半球壳 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心坐标及对于 z 轴的转动惯量．

10．设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}\, f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\, f(1,1,1)$．

*11．设 $u(x,y), v(x,y)$ 都有连续偏导数，证明

(1) $\nabla(au+bv)=a\nabla u+b\nabla v$，其中 a,b 为常数；

(2) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$；

(3) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$；

(4) $\nabla(u^n)=nu^{n-1}\nabla u$，其中 n 是正整数．

12．求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=xy\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz)\boldsymbol{k}$；

*(2) $\boldsymbol{A}=\nabla r$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

13．求下列向量场$\boldsymbol{A}$ 沿定向闭曲线Γ 的环流量：

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$（$c$为常数），$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=0$ ，从z轴正向看去，Γ 取逆时针方向；

*(2) $\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}-xz\boldsymbol{j}+yz^2\boldsymbol{k}$ ，Γ 为圆周 $x^2+y^2=4, z=1$,从z轴正向看去，Γ 取逆时针方向.

14．求下列向量场$\boldsymbol{A}$ 的旋度：

$\boldsymbol{A}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin z\boldsymbol{j}+z^2\sin x\boldsymbol{k}$.

B 类

1．在某设计中要在半圆形的直边上添上一个边与直径等长的矩形，使整个平面图形的质心落在圆心上，试求矩形的另一边长.

*2．求质量均匀分布，半径为R 的球面对距球心a($a>R$)处的单位质量的质点的引力.

*3．证明等式：$I_l=I_L+Md^2$，其中I_l为物体对l轴的转动惯量，I_L 为物体对通过其质心且与l轴平行的L 轴的转动惯量，d 为两轴间的距离，M 是物体的质量.

*4．利用 Stokes 公式把曲面积分 $\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}=(y-x)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$ ，S 为立方体$\{(x,y,z)|0\le x\le 2,0\le y\le 2,0\le z\le 2\}$的表面外侧去掉$xOy$面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是S 的单位法向量.

总 习 题 十 一

1．填空题

(1) 设 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的部分，则 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx=$ ________.

*(2) 设 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧，则 $\int_L (x^2-y^2)\,dx=$ ________.

(3) 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$，则 $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$ ________.

*(4) 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\iint_S x^2\,dydz=$ ________.

(5) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)\,ds=$ ________.

*(6) 密度为 1 的旋转抛物体：$x^2+y^2\leq z\leq 1$（记为 Ω）绕 z 轴的转动惯量 $I=$ ____.

(7) 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}=$ ____.

(8) 数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$ ____.

*(9) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ ____.

2. 选择题：

(1) L 为从点 $A(0,0)$ 到点 $B(4,3)$ 的直线，则 $\int_L (x-y)\,ds=$ ______.

A. $\int_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\,dx$　　B. $\int_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx$

C. $\int_0^3 (\frac{4}{3}y-y)\,dy$　　D. $\int_0^3 (\frac{4}{3}y-y)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dy$

*(2) 对于格林公式，$\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$，下列说法正确的是______.

A. ∂D 取逆时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 上存在一阶偏导数且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$；

B. ∂D 取顺时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 上存在一阶偏导数且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$；

C. ∂D 取逆时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 上存在连续的一阶偏导数；

D. ∂D 取顺时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 上存在连续一阶偏导数.

(3) 设 $I=\iint_S (x+y)\,dydz+(y+z)\,dzdx+(z+x)\,dxdy$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2\ (0\leq z\leq 1)$ 的下侧，则 I 之值为______.

A. $\frac{\pi}{2}$；　B. $\frac{\pi}{3}$；　C. $\frac{\pi}{4}$；　D. $\frac{\pi}{5}$.

*(4) 设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有______.

A. $\iint_S x\,dS=4\iint_{S_1} x\,dS$；　　B. $\iint_S y\,dS=4\iint_{S_1} x\,dS$；

C. $\iint_S z\,dS=4\iint_{S_1} x\,dS$；　　D. $\iint_S xyz\,dS=4\iint_{S_1} xyz\,dS$

(5) 已知 $\frac{(x+ay)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于______.

A. -1；　B.0；　C.1；　D.2.

3.求 $\oint_L \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中

(1) L 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；

*(2) L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向；

*4.设曲线积分 $\int_L xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导函数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$ 的值.

解 先求 $\varphi(x)$。

$$P=xy^2,Q=y\varphi(x),\frac{\partial P}{\partial y}=2xy,\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$$

令 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 即 $y\varphi'(x)=2xy$，解得 $\varphi(x)=x^2+c$。由 $\varphi(0)=0$ 得 $c=0$。$\varphi(x)=x^2$。

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy&=\int_{(0,0)}^{(1,0)} xy^2\,dx+yx^2\,dy+\int_{(1,0)}^{(1,1)} xy^2\,dx+yx^2\,dy\\&=0+0+\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

（注意：这是一个典型的求未知函数的题目。）

5.求 $I=\iint_S yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\ge 0$ 的部分.

*6.设空间区域 V 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成，其中 a 为正常数，记 V 的表面外侧为 ∂V，V 的体积仍为 V，试证 $\oiint_{\partial V} x^2yz^2\,dy\,dz-xy^2z^2\,dz\,dx+z(1+xyz)\,dx\,dy=V$.

*7.求 $I=\oint_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$，其中 L 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}$ $(R>0,z\ge 0)$ 从 x 轴的正方向看去取逆时针方向.

8.求证 $\iint_S |x+y+z-3a|\,dS\le 4\sqrt{3}\pi a^3$，其中 S 的方程为

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2\ (a>0).$$

*9. 设位于点(0，1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 k/r^2 ($k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离)，质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，求在此过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

*10. 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一挂限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大?并求出 W 的最大值.

解 $\overrightarrow{OM}:\begin{cases}x=\xi t\\y=\eta t,t:0\to 1\\z=\zeta t\end{cases}$。

$$W(M)=\int_{\overrightarrow{OM}}\boldsymbol{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\overrightarrow{OM}} yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\,dt=\xi\eta\zeta$$

$$\begin{cases}W=xyz\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

$$L = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\ L_z = yx + \dfrac{2\lambda}{c^2}z = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

由前三方程得$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$，再由第四方程得$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$。根据问题的实际，这就是$W$ 的最大值点。W 的最大值是$\frac{abc}{3\sqrt{3}}$。