第 9 章　多元函数微分法及其应用

本章讨论多元函数的微分学．多元函数的基本概念、理论和方法与一元函数中的概念、理论、方法有很多相似之处．只是由于自变量的增加，而使问题变得多样和复杂些．

我们将着重以二元函数为例讨论多元函数．其理由有二：（1）从一元函数到二元函数，在内容和方法上会有一些实质性的差别和变化，而从二元函数到三元函数乃至一般的 n 元函数，只是形式上的不同，没有本质的区别，掌握了二元函数的相关理论和方法后，很容易将其推广到一般的多元函数中去；（2）二元函数有直观几何帮助思考，而多于二元的函数再也没有直观几何。

我们必须时时注意多元函数与一元函数有哪些相似之处和哪些本质差别。

熟练二元，推广到 n 元。

本章必需上册一元函数的极限、连续与间断、导数、微分基础知识和求导方法．请同学们务必认真复习。

第 1 节　多元函数的基本概念

1.1　点集

我们知道，数轴上的点与实数一一对应，直角坐标系下，平面上的点与二元坐标(x,y)一一对应，空间中的点与三元坐标(x,y,z)一一对应。数轴是R，称为 1 维空间；平面是$R^2=\left\{(x,y)\middle|x\in R,y\in R\right\}$，称为 2 维空间；空间是$R^3=\left\{(x,y,z)\middle|x\in R,y\in R,z\in R\right\}$，称为 3 维空间．$R^n$表示全体$n$元坐标的集合，即

$$R^n=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|x_1\in R,x_2\in R,\cdots,x_n\in R,\right\},$$

称为n维空间，其中每个n元坐标都称为一个（n维）点．

我们把n维向量$\vec{a}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$也写为$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$表示$n$维点还是$n$维向量，要看上下文。

两个n维向量相加（减）还是对应坐标相加（减）；数乘n维向量还是乘遍每个坐标。

n维空间的两点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离为

$$d=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

称$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$为$n$维向量的模．

1.2　邻域

设 $P_0(x_0,y_0)\in \boldsymbol{R}^2,\ \delta>0$。

点集

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为 P_0 点的 δ- 圆邻域。$U(P_0,\delta)$ 是以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，δ 为半径，去掉圆周的圆盘.

点集 $\mathring{U}(P_0,\delta)=U(P_0,\delta)\setminus\{P_0\}=\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$ 称为 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心 δ- 圆邻域.

点集 $\left\{(x,y)\middle||x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\right\}$ 称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ- 方邻域．点集 $\left\{(x,y)\middle||x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,(x_0,y_0)\neq(x,y)\right\}$ 称为 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ- 去心方邻域.

推广到 n 维空间：

设 $P_0(a_1,\cdots,a_n)\in \boldsymbol{R}^n,\ \delta>0$。

P_0 点的 δ- 圆邻域 $U(P_0,\delta)=\left\{x\in R^n\middle|\|x-P_0\|<\delta\right\}$；$P_0$ 的去心 δ- 圆邻域：

$\mathring{U}(P_0,\delta)=U(P_0,\delta)\setminus\{P_0\}=\left\{x\in R^n\middle|0<\|x-P_0\|<\delta\right\}$；$P_0$ 的 δ- 圆邻域：

$\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n\middle||x_1-a_1|<\delta,\cdots,|x_n-a_n|<\delta\right\}$；$P_0$ 的 δ- 方邻域：

$\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n\middle||x_1-a_1|<\delta,\cdots,|x_n-a_n|<\delta\right\}\setminus\{P_0\}$ δ- 去心方邻域.

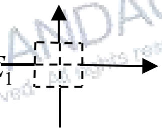
容易看出，点 $P_0(x_0,y_0)$ 的任一圆邻域一定包含某个方邻域；反之，任一个方邻域也一定包含一个圆邻域．通常说邻域是指 P_0 的 δ- 圆邻域.

思考题：

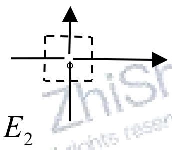
1. 集合 $E_1=\{(x,y)|0<|x-0|<\delta,0<|y-0|<\delta\}$ 与

$E_2=\{(x,y)||x-0|<\delta,|y-0|<\delta,(x,y)\neq(0,0)\}$，是否相同？

（$E_1\neq E_2$ 见右图。）

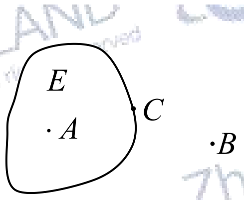


E_1



E_2

1.3　内点、外点、边界点、聚点



我们来考察点与点集的关系.

设 $E \subset R^2$。

观察右图，看看点 A,B,C 有什么不同的本质。

1. A 点：若存在点 A 的某 δ- 邻域 $U(A,\delta)$ 使 $U(A,\delta) \subset E$ 。这样的点称为点集 E 的内点. E 的全部内点构成的集合记为 E° 或 $\mathrm{int}E$.

2. B 点：存在点 B 的某 δ- 邻域 $U(B,\delta)$ 使 $U(B,\delta) \cap E = \varnothing$ 。这样的点称为点集 E 的外点.

3. C 点：在点 C 的任一邻域内，既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，即：$\forall \delta > 0, U(C,\delta) \cap E \neq \varnothing, U(C,\delta) \setminus E \neq \varnothing$ 。这样的点称为点集 E 的边界点.

点集 E 的全体边界点的集合称为 E 的边界，记为 ∂E .

4. 聚点：若 P 的任一去心邻域内，总含有属于集合 E 的点，即 $\forall \delta > 0$，$\mathring{U}(P,\delta) \cap E \neq \varnothing$ ，则称点 P 为点集 E 的聚点. E 的全部聚点记为 E'.

5. 孤立点：若 $P(x,y) \in E$ ，且不是 E 的聚点，即存在 P 的某 δ- 邻域，使 $U(P,\delta) \cap E = \{P\}$，则称点 P 为 E 的孤立点.

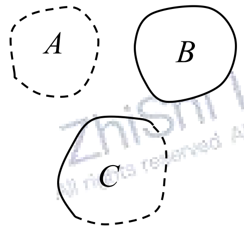
显然有：$R^2 = E^\circ \cup \partial E \cup (E\text{的外点集})$；$R^2 = E' \cup (E\text{的孤立点集}) \cup (\text{E的外点集})$，且右端三个集合互不相交.

集合 E 的内点必是聚点，外点一定不是聚点；而边界点可能是聚点，也可能不是聚点；孤立点一定是边界点，非孤立点的边界点一定是聚点.

例如，$E = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 4\} \cup \{(5,5)\}$ 。若 $P(x,y) \in \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}$，则 P 为 E 的内点；若 $P(x,y) \in \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ 或 $P(x,y) = (0,0)$，则 P 为 E 的边界点，也是聚点；但 $(5,5)$ 为 E 的孤立点、边界点，不是聚点.

以上全部内容都可推广到 n 维空间。

1.4　区域、闭区域



观察右图，看看点集 A,B,C 有什么不同的本质。

1．点集 A ：A 的点都是 A 的内点。这样的点集称为开集.

2．点集 B ：B 的余集（$B^c = R^2 \setminus B$）是（R^2 中的）**开集**。即 B 包含自己的全部聚点。这样的点集称为闭集。

称集合 $\bar{E} = E \cup \{E$ 的全部聚点$\}$为集合 E 的闭包

3．点集 C ：不开不闭.

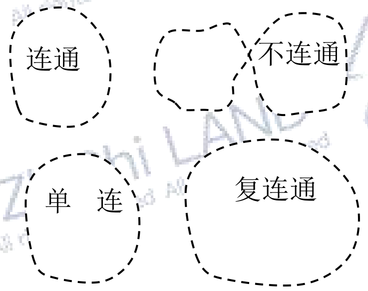
例如：$\{(x,y)\,|\,0 \le x^2+y^2 \le 4\}$ 为 R^2 中闭集，$\{(x,y)\,|\,0 < x^2+y^2 < 2\}$ 为 R^2 中开集，$\{(x,y)\,|\,0 < x^2+y^2 \le 4\}$ 既不是 R^2 中开集，也不是 R^2 中闭集.

关于开集和闭集，有如下结论.

定理 1.1　(1) 空集 $\varnothing$ 与全集 R^2 是开集；任意多个开集之并为开集；有限多个开集之交为开集.

(2) 空集 $\varnothing$ 与全集 R^2 是闭集；有限多个闭集之并为闭集；任意多个闭集之交为闭集.

4．有界集：设 $E \subset R^2$。若存在一定点 $P_0(x_0,y_0) \in R^2$ 又存在 $M > 0$，使得 $\forall P(x,y) \in E$，有 $|P_0P| \le k$，则称 E 是有界集，否则称 E 是无界集．有界集可以包含在某个大圆盘内，无界集则不可以。



5. 区域：设 D 是中的一个开集，如果对 D 中的任意两点 P1,P2，都可用 D 内的一条折线（由有限条直线段连接起来的连续曲线）将 P1 与 P2 连接起来，则称 D 是一个连通的开集．连通的开集称为开区域，简称为区域.

如果区域 D 中的任一条闭曲线所包围的点都属于 D，则称区域 D 为单连通区域，否则称 D 为复连通区域.

6．闭区域：区域与它的边界一起所构成的集合，称为闭区域.

如：$D_1 = \{(x,y)\,|\,0 \le x^2+y^2 \le 4\}$ 是闭区域；

$D_2 = \{(x,y)\,|\,x^2 > y\}$ 是开区域；$E_1 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 = 4\}$ 是闭集，但不是闭区域；

$E_2 = \{(x,y)\,|\,xy > 0\}$ 是开集，但不是开区域.

思考题：

2．无限多个开集之交是否一定为开集；无限多个闭集之并是否一定为闭集．

（不一定。例如 $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$，$\bigcup_{n=3}^{+\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1)$。）

3．设 $G=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\middle| m,n\in N^{+}\right\}$，试指出其边界点及聚点．

（边界 $G=\{(0,0)\}\cup\left\{\left(0,\frac{1}{m}\right)\middle| m\in N^{+}\right\}\cup\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\middle| n\in N^{+}\right\}$；聚点集 $\{(0,0)\}\cup\left\{\left(0,\frac{1}{m}\right)\middle| m\in N^{+}\right\}\cup\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\middle| n\in N^{+}\right\}$。）

以上全部内容都可推广到 n 维空间。

1.5* 平面点列的极限

一列无穷无尽的平面点

$$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_n(x_n,y_n),\cdots \tag{1.1}$$

称为平面上的一个点列，记为 $\{M_n(x_n,y_n)\}$。

定义 设 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 是平面上的点列，定点 $A(x_0,y_0)\in R^2$。如果

对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\|M_n-A\|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

则称点 $A(x_0,y_0)$ 为点列 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty}M_n=A \quad 或 \quad M_n\to A(n\to\infty)，或 \lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0).$$

上面定义的意思是：$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}=0$。

定理 1.2　平面点列 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $A(x_0,y_0)$ 的充分必要条件是：对应的坐标数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 分别收敛于 x_0,y_0．即

$$\lim_{n\to\infty}M_n=A\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=x_0 且 \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

证　必要性．设 $\lim_{n\to\infty}M_n=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0\in Z^+$，当 $n>N_0$ 时，有

$$|x_n-x_0|\le\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

$$|y_n-y_0|\le\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

于是 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$．

充分性．设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$．则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in Z^+$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$；$\exists N_2\in Z^+$，当 $n>N_2$ 时，有 $|y_n-y_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$．取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，$\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$，故 $\lim_{n\to\infty}M_n=A$．

以上全部内容都可推广到 n 维空间。

根据定理 1.2，点列的极限可以转化为若干数列的极限。点列的极限再没有新的内容。

∗定理 1.3(**柯西收敛定理**)　平面点列 $\{M_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对 ″$e>0$，\$$N_0$ Î Z^+，当 $n,m>N_0$ 时，有

$$|M_nM_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}<e.$$

证明略去.

【例 1.1】　证明：P_0 是 E 的聚点的充分必要条件是：存在 P_n 刮 P_0 (n　N^+) 的点列 $\{P_n\}$ Ì E，$\lim\limits_{n} P_n=P_0$.

证　充分性. 若存在 $\{P_n\}$ Ì E，P_n ¹ P_0，$\lim\limits_{n} P_n=P_0$. 则对 ″$e>0$，\$$N_0$ Î Z^+，当 $n>N_0$ 时，P_n Î $\overset{o}{U}(P_0,e)$，又 P_n Î E，故在 P_0 的任一去心邻域 $\overset{o}{U}(P_0,e)$ 中都含有 E 中的点，所以 P_0 是 E 的聚点.

必要性. 若 P_0 是 E 的聚点，则对 ″$e>0$，\$$P$ Î $\overset{o}{U}(P_0,e)$ I E. 令 $e_1=1$，则存在 P_1 Î $\overset{o}{U}(P_0,e_1)$ I E，令 $e_2=\min\left\{\frac{1}{2},|P_1-P_0|\right\}$，则存在 P_2 Î $\overset{0}{U}(P_0,e_2)$ I E；且显然 P_2 ¹ P_1，如此下去，令 $e_n=\min\left\{\frac{1}{n},|P_{n-1}-P_0|\right\}$，则存在 P_n Î $\overset{o}{U}(P_0,e_n)$ I E，……。我们得到了点列 $\{P_n\}$ Ì E，P_n ¹ P_0，$\|P_n-P_0\|<\frac{1}{n}$(n Î N^+). 因此 $\lim\limits_{n} P_n=P_0$

1.6　多元函数

一元函数是实数集到实数集的映射。类似地，多元函数是多维空间中点集到实数集的映射。下面我们以二元函数为例，讨论其性质.所有内容和结果都可以推广到二元以上的函数中去.

定义 1.1　设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个非空子集。从 D 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 D 上的一个二元函数，记作

$$f: D \to \boldsymbol{R} \quad 或 \quad (x,y) \mapsto z = f(x,y),\ (x,y) \in D.$$

定义 1.1′　设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个非空子集，$\boldsymbol{R}$ 为实数集，f 是 D 与 $\boldsymbol{R}$ 之间的对应法则。如果对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$，按照对应法则 f，在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一一个实数 z 与 $P(x,y)$ 对应，则称在 D 上定义了一个二元函数 f，记作：$z = f(x,y)$，$(x,y) \in D$．$z = f(x,y)$ 称为函数 f 在 $P(x,y)$ 点的值。其中 x,y 称为函数 f 的自变量，z 称为函数 f 的因变量，D 称为 f 的定义域.

类似地，

定义 1.2　设 V 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个非空子集。从 V 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 V 上的一个三元函数，记作

$$f: V \to \boldsymbol{R} \quad 或 \quad (x,y,z) \mapsto u = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in V.$$

定义 1.2′　设 V 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个非空子集，$\boldsymbol{R}$ 为实数集，f 是 V 与 $\boldsymbol{R}$ 之间的对应法则。如果对于 V 中的每一个点 $P(x,y,z)$，按照对应法则 f，在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一一个实数 u 与 $P(x,y,z)$ 对应，则称在 V 上定义了一个三元函数 f，记作：$u = f(x,y,z)$，$(x,y,z) \in V$．$u = f(x,y,z)$ 称为函数 f 在 $P(x,y,z)$ 点的值。其中 x,y,z 称为函数 f 的自变量，u 称为函数 f 的因变量，V 称为 f 的定义域.

以上全部内容都可推广到 n 元。

定义 1.n　设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个非空子集。从 Ω 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 Ω 上的一个 n 元函数，记作

$$f:\Omega \to \boldsymbol{R} \quad 或 \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega.$$

定义 1.n′　设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个非空子集，$\boldsymbol{R}$ 为实数集，f 是 Ω 与 $\boldsymbol{R}$ 之间的对应法则。如果对于 Ω 中的每一个点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，按照对应法则 f，在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一一个实数 y 与 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应，则称在 Ω 上定义了一个 n 元函数 f，记作：$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$ 或 $y=f(P),P\in\Omega$．$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为函数 f 在 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 点的值。其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为函数 f 的自变量，y 称为函数 f 的因变量，Ω 称为 f 的定义域.

二元函数的图像为 3 维空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的点集：$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$，它表示的是三维空间中的一张曲面。曲面在 $(x,y)\in D$ 点的高正好是 $f(x,y)$，曲面在 xOy 面上的投影正好是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D．可见，二元函数有几何直观帮助思考。

二元以上的函数称为多元函数。

与一元函数类似，多元函数也有三种表示方法。由某个解析式表示的多元函数的（自然）定义域是所有使算式有意义的自变量的点所构成的集合.

例如：函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$；

函数 $u=\sqrt{z-x^2-y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\}$.

与一元函数类似，多元函数也可进行四则运算，也有复合函数。

多元基本初等函数：各种各样自变量的一元基本初等函数。例如，$a^x,\sin y,\tan z,\ln x_3$ 等等。

多元初等函数：基本初等函数进行有限次四则运算或复合的结果函数。

多元函数的复合函数有多种情形。例如，

（1）如果 $z=f(x,y),x=\varphi(t),y=\psi(t)$，则有结果是一元的复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$。

（2）如果 $z=f(x),x=\varphi(s,t)$，则有结果是二元的复合函数 $z=f(\varphi(s,t))$。

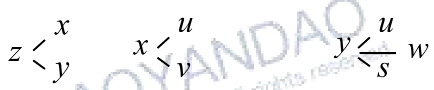
（3）如果 $z=f(x,u),u=\varphi(x,y)$，则有复合函数 $z=f(x,\varphi(x,y))$。

（4）如果 $z=f(x,y),x=\varphi(u,v),y=\psi(u,w,s)$，则有结果是四元的复合函数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,w,s))$。

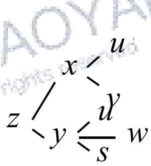
等等。

设 $z=f(x,y), x=j(u,v), y=y(u,w,s)$， $z=f(j(u,v),y(u,w,s))$

z 是 x,y 的函数时， x 是 u,v 的函数时， y 是 u,w,s 的函数时我们分别画图：



结果复合函数 $z=f(j(u,v),y(u,w,s))$ 的图如下：



根据函数结构画出来的这种图称为函数图（一棵横放的树）。上图中，函数 z 称为函数图的根；有五个叶子 u,v,u,w,s；从一个叶子到根的路线称为一条路径（上函数图中共有五条路径：$z-x-u, z-x-v, z-y-u, z-y-w, z-y-s$）。

思考题：

4．设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，试问 $f(a,y)$（a 为常数）能否写为 $f(y)$？

（不能。）

5． $z=f(x,y)$ 与 $z=f(xy)$ 是否相等？

（不等。）

6． $z=\ln[x(x-y)]$ 与 $z=\ln x+\ln(x-y)$ 是否表示同一函数？为什么？

（不同。定义域不一样。）

7．设 $I_1=\int_0^1(a+bx)^2\,dx$； $I_2=\int_a^b(1+x^2)\,dx$．问它们是否为 a,b 的二元函数？

（是。）

习题 9-1

A 类

*1．设集合 $E=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$，问点 $(1,2)$，$(2,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，$(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{2}})$ 分别为集合的什么点？

*2．求下列集合的内点，外点，边界点．

(1) $E_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$；　　(2) $E_2=\{(x,y)|x^2\le y\}$；

(3) $E_3=\{(x,y)|1\le y^2\le x^2+1\}$．

3．判断下列集合中，哪些是开集，闭集，有界集及区域．并指出其聚点和边界点．

(1) $E_1=\{(x,y)|1\le x\le 2, x\le y\le 3\}$；　　(2) $E_2=\left\{(x,y)|1\le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}<5\right\}$；

(3) $E_3=\{(x,y)|x^3<y^2, 0<x\}$；　　(4) $E_4=\{(x,y)|xy\ne 0\}$；

*(5) $E_5=\{(x,y)|xy=0\}$．

4．求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{x}\ln\sqrt{x+y}$；　　(2) $z=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$；

(3) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；　　(4) $u=\arcsin\frac{z}{x^2+y^2}$．

5．求解下列各题．

(1) 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$．

(2) 设 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\arctan\frac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$．

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，若 $y\ne 0$，求 $f(1,\frac{x}{y})$．

6．设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$．若当 $y=1$ 时，$z=x$．求函数 f 和 z．

7．设 $F(x,y)=\frac{1}{2x}f(x-y)$，$F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5$，求 $F(x,y)$．

B 类

*1．证明：闭区域必为闭集．举例说明反之不成立．

*2．试仿照 R^2 中点的邻域的定义，写出 R^n 中点的邻域的定义．

*3．给 n 维空间 R^n 的每一个元 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 赋予范数 $\|X\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 后，称 R^n 为欧几里得(Euclid)空间，其范数 $\|X\|$ 称为向量 X 的欧几里得长度．试证，范数有下列性质：

(1) $\|X\|\ge 0$；

(2) $\|\lambda X\|=|\lambda|\|X\|$，$\forall \lambda\in R$；

(3) $\|X+Y\|\le\|X\|+\|y\|$，$\forall x,y\in R^n$．(三角不等式)

第 2 节　多元函数的极限及连续性

2.1　多元函数的极限

下面我们以二元函数为例，给出多元函数的极限的概念.

定义 2.1　设 $z=f(x,y)$ 是定义在 $D\subset R^2$ 上的一个二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，A 是固定的常数。如果

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$，

就保证 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，也记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$.

注意：

$$P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D\qquad\left(0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{且} P(x,y)\in D\right)$$

称此极限为二重极限.

注　① 二重极限的定义也可表示为：

$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$（或当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$）时，$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

② 对于多元函数的极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$，由于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域是一个平面点集，点 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，可沿邻域内的任意曲线。因此，二重极限存在的充分必要条件是：当点 $P(x,y)$ 在邻域内以任何方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都以常数 A 为极限. 如果找到点 $P(x,y)$ 在邻域中以两种不同的方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋近于不同的常数，则便可断定 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.（证明极限不存在的方法!）

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 的意义有二：(1) 左边极限存在；(2) 等号成立。

④ 一元函数的极限运算法则可平行地推广到二元函数的极限运算上来.

定义 2.n　设 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是定义在 $V\subset R^n$ 上的一个 n 元函数，$P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 是 V 的聚点，A 是固定的常数。如果

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $P(x_1,\cdots,x_n)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap V$，

就保证 $\left|f(x_1,\cdots,x_n)-A\right|<\varepsilon$.

则称 A 为函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 当点 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 趋于 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x_1,\cdots,x_n)=A$ 或 $\lim\limits_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_1^0,\cdots,x_n^0)}f(x_1,\cdots,x_n)=A$，也记为 $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}}f(x_1,\cdots,x_n)=A$.

注意：

$$P(x_1,\cdots,x_n)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D\qquad(0<\|P-P_0\|<\delta\text{且}P(x_1,\cdots,x_n)\in D)$$

思考题：

1. 二元函数极限的定义对于 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数定义域的边界点的情形是否适用？（是。）

2. 对于二元函数 $f(x,y)$ 来说，当 $P(x,y)$ 沿任意直线趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，极限值都存在且相等，问 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$ 是否存在？（不一定。）

3. 运算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=0$ 正确吗？

（不对。$(x,y)\to(0,0)$ 时 $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ 可能是异号的无穷大。当 $y=-x+kx^2\,(k\neq0)$（不一定非得 $y=kx$）时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\dfrac{1}{k}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在。）

4. 因为 $\lim\limits_{x\to0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，对吗？

（不对。$(x,y)\to(0,0)$ 时，$x+y$ 是无穷小而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}=0$ 存在。）

（泥潭！）2.2 二次极限

如果对于任意的 $y\neq y_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$，进一步，若 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 存在，则称它为先 $x\to x_0$，后 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的二次极限（也称为累次极限），记为 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))$.

同样可定义先 $y\to y_0$，后 $x\to x_0$ 时 $f(x,y)$ 的二次极限：

如果对于任意的 $x\neq x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$，进一步，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$ 存在，则称它为先 $y\to y_0$，后 $x\to x_0$ 时 $f(x,y)$ 的累次极限．记为 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$.

二次极限与二重极限的关系：

1. 二次极限与二重极限是完全不同的极限概念，二重极限的存在，不能保证二次极限存在；两个二次极限都存在，也不能保证二重极限存在．

2. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，且对任意 $y\neq y_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$．即 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))=A$.

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，且对任意 $x\neq x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$．即 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=A$.

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))=A$.

3．若两个二次极限存在，但不相等，则二重极限不存在．

【例 2.4】 讨论函数下列函数在 $(0,0)$ 点处的二重极限与二次极限．

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$； (2) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；

(3) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$； (4) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

解 (1) 因 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2})=0$； $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2})=1$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在．

(2) 显然 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在， $\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 也不存在，即两个二次极限不存在，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 也不存在．

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在；因为 $\lim\limits_{y\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}y\sin\dfrac{1}{x})=0$．且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\sin\dfrac{1}{x}=0$．

(4) 显然 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$， 而 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right)$ 不存在；同理 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right)$ 不存在．

因 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\le|x+y|$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$．

【例 2.5】 证明：对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，有：

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))=\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y))=0$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在．

证 因 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0$，

同理 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2})=0$．

另一方面，若令 $y=x$， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$．

若令 $y=2x$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}=0$，故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在

2.3　多元函数的连续性

让自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，引起函数 $z = f(x,y)$ 有全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

容易看出

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

我们给二元函数在一点连续的定义如下.

定义 2.2　设 $z = f(x,y)$ 是定义在 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且 $P_0(x_0,y_0) \in D$，如果 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，$P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的连续点；否则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 是间断的，$P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

函数在一点的连续性也可用“$\varepsilon - \delta$”语言描述：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in U(P_0, \delta), \ |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 内的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续，或称 $f(x,y)$ 为 D 中的连续函数.

若区域 D_1 是闭区域，则当 $f(x,y)$ 在 D_1 内的每一点都连续，且对于边界上的点 P_0 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in U(P_0, \delta) \cap D_1, \ |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x,y)$ 在闭区域 D_1 上是连续的.

定义 2.2′　设 $z = f(x,y)$ 是定义在 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且 $P_0(x_0,y_0) \in D$．若在 $P_0(x_0,y_0)$ 处，自变量各自取得增量 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = y - y_0$，则相应的函数取得增量，若

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0,$$

则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的连续点.

定义 2.n　设 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 是定义在 $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上的 n 元函数，$P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 是 D 的聚点且 $P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0) \in D$，$(P(x_1, \cdots, x_n))$ 如果 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1^0, \cdots, x_n^0)$，则称函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 连续，$P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 称为函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的连续点；否则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 是间断的，$P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 称为函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的间断点.

函数在一点的连续性也可用“$\varepsilon - \delta$”语言描述：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in U(P_0, \delta), \ |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

如果函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 D 内的每一点都连续，则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 D 内连续，或称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 D 中的连续函数.

若区域 D_1 是闭区域，则当 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 D_1 内的每一点都连续，且对于边界上的点 P_0 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in U(P_0, \delta) \cap D_1, \ |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在闭区域 D_1 上是连续的.

对于多元函数，除可能存在间断点外，还可能存在间断线，间断面等。

多元连续函数的运算法则及多元函数的连续性与一元函数相同：

多元连续函数的和、差、积、商（分母函数不为零处）仍是连续函数，多元连续函数的复合函数也仍是连续函数.

多元初等函数在其定义域内是连续的.

（**题目**（考点）：给定 $f(x,y),(x_0,y_0)$，证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续。

方法总结：凑一个函数 $y=\varphi(k,x)$ （比如说 $y=y_0+k(x-x_0)$ ），如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(k,x)=y_0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\varphi(k,x))=A(k)$ 与 k 有关，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续。）

下面我们不加证明地给出有界闭区域上的多元连续函数的几个性质，其分别与有界闭区间上的一元连续函数的性质相对应：闭区域上是

定理 2.1(**有界性**) 有界闭区域上的多元连续函数在此有界的.

定理 2.2(**最大值最小值定理**) 有界闭区域上的多元连续函数在此区域上必存在最大值和最小值.

定理 2.3(**介值定理**) 有界闭区域上的多元连续函数，对于介于其最大值 M 和最小值 m 之间的任意值 m，必存在闭区域上的一点 $P_0(x_0,y_0)$，使得 $f(x_0,y_0)=m$.

【例 2.6】 讨论 $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$ 的连续性.

解 显然，当 $x^2+y^2\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$(k=0,1,2,\cdots)$ 时，$f(x,y)$ 连续. 故 $f(x,y)$ 的所有间断点是一系列以 $r=\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ 为半径的同心圆上的点的集合.

思考题：

5．如果一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续，$f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，那么二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否必然连续？（否。例如 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点）。反之是否成立？（是）

*定义 2.3　设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义．如果对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，若 $\forall P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，当 $|P_1P_2|<\delta$ 时，总有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $z=f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

即　$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_1,y_1)\in D$，当

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta\ （或 |x_1-x_2|<\delta，|y_1-y_2|<\delta）$$

时，都有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$，则称 $z=f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

*定理 2.4(**一致连续性**)　设 $D\in R^2$ 为有界闭区域，若 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

习题 9-2

A 类

1．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{\ln(1+x)}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}$； (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解 （5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\frac{xy\sin x}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin x}{x^2+y^2}}$

$0\le\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\sin x\right|\le|\sin x|$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|\sin x|=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{xy\sin x}{x^2+y^2}\right|=0$，从而

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\sin x}{x^2+y^2}=0$。 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}=e^0=1$。

2．证明下列极限不存在．

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

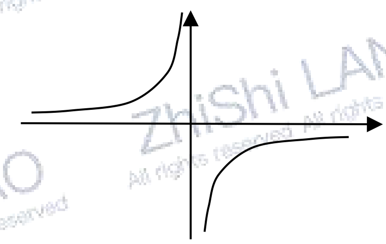
证 （2）当 $y=-x+kx^2(k\neq0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to0}(1-x^2+kx^3)^{\frac{1}{-x^2+kx^3}\cdot\frac{-x^2+kx^3}{kx^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2+kx^3}{kx^2}}=e^{-\frac{1}{k}}$$

与 k 有关。故，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在．

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq0\\ y, & x=0\end{cases}$，求出函数的定义域，并讨论函数的连续性。

解 函数的定义域：$\{(x,y)\,|\,1+xy>0\}$。



（1）在点 $(0,0)$ 处，由于 $\dfrac{\ln(1+xy)}{x}=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}y, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{cases}$，又

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}=0$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y=0$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

（2）在 $(0,y_0)(y_0\neq0)$ 点。由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}y=y_0$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}f(x,y)=y_0=f(0,y_0)$。$f(x,y)$ 在 $(0,y_0)$ 点连续。

（3） $f(x,y)$ 在 $\left(x_0,-\dfrac{1}{x_0}\right)$ 点无定义，是不连续的。

根据初等函数的连续性，$f(x,y)$ 在定义域内的其他点都是连续的。$f(x,y)$ 在其定义域内都是连续的。

B 类

1. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域内有定义且 $f(x,y)>0$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$，证明 $A\geq 0$.（提示：用局部保号性反证。）

2．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$ 的连续性.

3．证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 沿过此点的每一条射线 $x=t\cos\theta, y=t\sin\theta$（$0\leq t<+\infty$）连续，即 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=f(0,0)$．但函数在 $(0,0)$ 点不连续.

证 如果 $\sin\theta\neq 0$，

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^4\cos^4\theta+t^2\sin^2\theta}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0=f(0,0)\text{ 。}$$

如果 $\sin\theta=0$，$\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\lim\limits_{t\to 0}0=0=f(0,0)$ 。

当 $y=kx^2\ (k\neq 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{kx^4}{(1+k^2)x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 有关，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

*4．设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续，又存在常数 $L>0$，使得对于任意两点 (x,y_1)，(x,y_2)，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$，证明函数 $f(x,y)$ 连续.

第 3 节　偏导数与全微分

请同学们认真复习一元函数导数、微分基础知识。加一个作业：默写求导基本及全部法则公式，默写求微分公式。

3.1　偏导数的定义

我们讨论多元函数的偏导数.

定义 3.1'　设函数 $z=f(x,y)$ 在定点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义.

(1)固定 $y=y_0$ 只让 x 变化，得一个一元函数

$$\varphi(x)=f(x,y_0),$$

如果 $\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导，就说函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 不可偏导；如果 $\varphi(x)$ 在 x_0 处可导，就说函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 可偏导，此时称 $\varphi'(x_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 的偏导数．记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$ 等，即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\varphi'(x_0)$ 等.

(2)固定 $x=x_0$ 只让 y 变化，得一个一元函数

$$\psi(y)=f(x_0,y),$$

如果 $\psi(y)$ 在 y_0 处不可导，就说函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 不可偏导；如果 $\psi(y)$ 在 y_0 处可导，就说函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 可偏导，此时称 $\psi'(y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 y 的偏导数．记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$ 等，即 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\psi'(y_0)$ 等.

定义 3.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在定点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义．当固定 $y=y_0$，而 x 在 x_0 处取得增量时，函数相应地取得增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

称其为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏增量.

若极限

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{3.1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 的偏导数．记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$ 等.

类似地，若固定 $x=x_0$，函数相应于变量 y 的偏增量为 $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\tag{3.2}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 y 的偏导数．记作：$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$ 等.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x,y 的偏导数都存在，则称函数在 (x_0,y_0) 处可偏导.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中的每一点 (x,y) 都是可偏导的，则称函数在 D 中可偏导．这些偏导数仍是 x,y 的函数，称它们为 $f(x,y)$ 的偏导函数，简称偏导数．记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$；$z_x(x,y),z_y(x,y)$；$f_x(x,y),f_y(x,y)$ 等.

定理 3.0 定义 3.1 和定义 3.1’是等价的。

证 根据定义 3.1’和一元函数导数概念的定义，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

（关于 y 完全类似）故定义 3.1 和定义 3.1’是等价的。

（看情况，有时用定义 3.1 而有时用定义 3.1’。）

定义 3.n’ 设函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在定点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的某领域内有定义．固定 $x_j=x_j^0(1\le j\le n,j\ne k)$ 只让 x_k 变化，得一个一元函数

$$g_k(x_k)=f(x_1^0,\cdots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\cdots,x_n^0)，$$

如果 $g_k(x_k)$ 在 x_k^0 处不可导，就说函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处关于 x_k 不可偏导；如果 $g_k(x_k)$ 在 x_k^0 处可导，就说函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处关于 x_k 可偏导，此时称 $g_k'(x_k^0)$ 为函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处关于变量 x_k 的偏导数．记作 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_k}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}$，$y_{x_k}(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 或 $f_{x_k}(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 等，即 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_k}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}=g_k'(x_k^0)$ 等.（$k=1,2,\cdots,n$）

定义 3.n 设函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在定点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的某领域内有定义．当固定 $x_j=x_j^0(1\le j\le n,j\ne k)$，而 x_k 在 x_k^0 处取得增量时，函数相应地取得增量

$$\Delta_{x_k}y=f(x_1^0,\cdots,x_{k-1}^0,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)，$$

称其为函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处关于 x_k 的偏增量.

若极限

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}y}{\Delta x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_{k-1}^0,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_k}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 的偏导数．记作 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_k}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}$，$y_{x_k}(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 或 $f_{x_k}(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 等.（$k=1,2,\cdots,n$）

定理 3.n 定义 3.n 和定义 3.n’是等价的。

证 与定理 3.0 的证明类似。

类似地，可讨论 n 元函数在 n 维区域中是否可偏导，有时也有偏导函数，简称偏导数.

从定义中可看到，在讨论多元函数的偏导数时，我们只是让一个自变量变化，而固定其余的变量．换句话说，即将多元函数视为某一个变量的一元函数，再考虑其求导数的问题．因此，计算多元函数的偏导数并不需要新的计算公式和方法，只需要注意在计算过程中函数是视为哪个变

量的一元函数就行了.（不熟练一元函数求导的同学要注意复习了!!）

（加一个作业：默写全部求导公式（包括求导法则公式），默写求微分公式。）

思考题:

1．计算偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 时，能否先将 $y=y_0$ 代入 $f(x,y)$，再对 x 求导？（可以。）

2．二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是几元函数，它的自变量是什么？（二元函数，自变量也是 (x,y)。）

【例 3.1】 求 $z=x^2y+2y^2\ln x$ 在点(1,1)处的偏导数.

解 (如果按照定义 3.1’，

$$\varphi(x)=x^2+2\ln x,\ \varphi'(x)=2x+\frac{2}{x},\ \varphi'(1)=4,\ z_x(1,1)=\varphi'(1)=4$$

$$\psi(y)=y,\ \psi'(y)=1,\ \psi'(1)=1,\ z_y(1,1)=\psi'(1)=1\ )$$

将 y 视为常量，对 x 求导，得 $z_x=2xy+\frac{2y^2}{x}$；将 x 视为常量，对 y 求导，得 $z_y=x^2+4y\ln x$；所以 $z_x(1,1)=4$；$z_y(1,1)=1$.

【例 3.2】 设 $u=\sqrt[z]{\frac{y}{x}}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 视 y,z 为常数，对 x 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)$；

视 x,z 为常数，对 y 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\times\frac{1}{x}$；

视 x,y 为常数，对 z 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)$

【例 3.3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，由偏导数的定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot\Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0;$$

（如果按照定义 3.1′，

$$\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(y)\equiv 0,\ f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,\ f_y(0,0)=\psi'(0)=0\ ）$$

所以 $f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

注意：由例 2.3 知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续．由此例可知，对于多元函数来说，函数在某点处可偏导不能保证它在此点处是连续的，这与一元函数中关于函数的可导性与连续性之间的关系是不同的.

思考题：

3．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，为什么不能推出 $f(x,y)$ 在该点连续？

（因为 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 只与某两线段 $\{(x,y_0)\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$, $\{(x_0,y)\,\big|\,|y-y_0|<\delta\}$ 有关，与 (x_0,y_0) 附近的四块都无关。而连续必须全面保证。）

4．考查函数 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$ 在原点处的连续性与可导性.

（$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0, \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$，$f(x,y)$ 在原点处不连续。

原点处，$\varphi(x)\equiv 1, \psi(y)\equiv 1, f_x(0,0)=\varphi'(0)=0, f_y(0,0)=\psi'(0)=0$ 都存在。）

【例 3.4】 设不为零的变量 x,y,z 满足方程 $xy=Rz$（$R\neq 0$ 常数），证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}=-1$.

证　求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，把 z 当作函数，x 和 y 是自变量。将方程变形为 $z=\dfrac{xy}{R}$，则有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{R}$；同理，求 $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ 时，把 y 当作函数，x 和 z 是自变量。将方程变形为 $y=\dfrac{Rz}{x}$，则有 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{R}{x}$；求 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 时，把 x 当作函数，y 和 z 是自变量。将方程变形 $x=\dfrac{Rz}{y}$，得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{Rz}{y^2}$；所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{R}\cdot\frac{R}{x}\cdot\left(-\frac{Rz}{y^2}\right)=-\frac{Rz}{xy}=-1.$$

（魔术：把已证明的等式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}=-1$ 约简得 $1=-1$。问题在哪里？偏导数记号与一元函数的导数记号间的一个本质区别：对于一元函数而言，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看作是两个微分 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$ 之商，而多元函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 是一个整体的记号，不能当作分数！）

3.2　偏导数的几何意义

设 $z=f(x,y)$ 表示空间中的一个曲面，若固定 $y=y_0$，则 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 表示平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线，此交线位于平面 $y=y_0$ 上，$M(x_0,y_0,z_0)$（$z_0=f(x_0,y_0)$）为曲面上的点．由偏导数的定义知，$f_x(x_0,y_0)$ 等于一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数．由一元函数中导数的几何意义知，$f_x(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率．

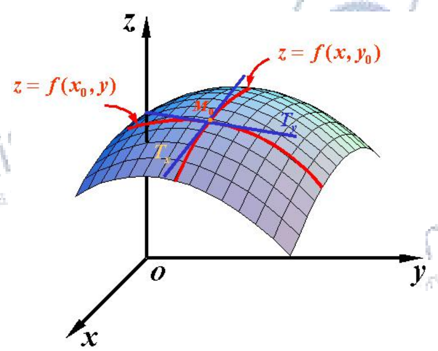


图 3.1

同理，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率．

3.3 全微分

先看一个例子．

设二元函数为 $z=f(x,y)=x^2y$．自变量在点 (x_0,y_0) 处有改变量 $(\Delta x,\Delta y)$ 时，引起函数的全增量为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y)-x_0^2y_0$$

$$\Delta z=2x_0y_0\Delta x+x_0^2\Delta y$$
$$+2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y$$
$$\Delta z=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$$

其中记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A(x_0,y_0)=2x_0y_0, B(x_0,y_0)=x_0^2$ 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数．

$$\left|\frac{2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\frac{2x_0\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\frac{y_0(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$$
$$\le\left(|x_0|+|y_0|+|\Delta y|\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

所以，

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y}{\rho}=0, 2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y=o(\rho)$ 对于一般的二元函数 $z=f(x,y)$，(x_0,y_0)．我们要问：是否存在与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数 $A(x_0,y_0),B(x_0,y_0)$ 使得

$$\Delta z=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)?$$

定义 3.2 设 $z=f(x,y)$ 是二元函数，(x_0,y_0) 是其定义域的内点。如果存在与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数 $A(x_0,y_0),B(x_0,y_0)$ 使得

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是可微分的，称 $A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，记作：$dz=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y$．

全微分 dz 是全增量 Δz 的线性主要部分，它们只相差 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小．（与一元函数的微分比较。）

定理 3.1(可微的必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导，且 $f_x(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)=B(x_0,y_0)$．$dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

证 (1) 因 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，即有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),$$

故 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=\lim\limits_{\rho\to 0}(A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho))=0$，亦即 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ $=f(x_0,y_0)$ $\left(\rho\to 0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}\right)$，故 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(2) 由函数在 (x_0,y_0) 可微,得（不管怎样的 $\Delta x,\Delta y$）

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)。$$

让 $\Delta y=0$，则 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+o(|\Delta x|)$，此时有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A(x_0,y_0)$．故 $f_x(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)$ 存在.

同理，让 $\Delta x=0$，也得 $f_y(x_0,y_0)=B(x_0,y_0)$ 存在. 证毕.

类似于一元函数中的情形，我们约定自变量的增量等于自变量的微分，即 $\Delta x=dx$，$\Delta y=dy$，则函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的全微分可写为：

$$dz\big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 内处处可微时，称它为 D 内的可微函数．则其在任意点 $(x,y)\in D$ 的全微分为

$$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy\text{；或}\quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，可类似地给出可微和全微分的概念.

定义 3.2’　设 $u=f(x,y,z)$ 是三元函数，(x_0,y_0,z_0) 是其定义域的内点。如果存在与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关的常数 $A(x_0,y_0,z_0),B(x_0,y_0,z_0),C(x_0,y_0,z_0)$ 使得

$$\begin{aligned}\Delta u&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)\\&=A(x_0,y_0,z_0)\Delta x+B(x_0,y_0,z_0)\Delta y+C(x_0,y_0,z_0)\Delta z+o(r)\end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$。则称函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处是可微分的，称 $A(x_0,y_0,z_0)\Delta x+B(x_0,y_0,z_0)\Delta y+C(x_0,y_0,z_0)\Delta z$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的全微分，记作：$du=A(x_0,y_0,z_0)\Delta x+B(x_0,y_0,z_0)\Delta y+C(x_0,y_0,z_0)\Delta z$.

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，也有类似的定理 3.1，在一点 (x_0,y_0,z_0) 处的全微分可写为：

$$\mathrm{d}u\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0,z_0)\mathrm{d}y+f_z(x_0,y_0,z_0)\mathrm{d}z$$

当函数 $u=f(x,y,z)$ 在某区域 D 内处处可微时，称它为 D 内的可微函数．则其在任意点 $(x,y,z)\in D$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u=f_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f_z(x,y,z)\mathrm{d}z\text{；或}\quad \mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

定义 3.n　设 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数，$\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 是其定义域的内点。如果存在与 $\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n$ 无关的常数 $A_1\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right),\cdots,A_n\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 使得

$$\begin{aligned}\Delta y&=f\left(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\\&=A_1\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_1+\cdots+A_n\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_n+o(r)\end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\cdots+(\Delta x_n)^2}$。则称函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 处是可微分的，称 $A_1\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_1+\cdots+A_n\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_n$ 为函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 的全微分，记作：$dy=A_1\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_1+\cdots+A_n\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\Delta x_n$.

定理 3.n(**可微的必要条件**)　若函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 可微，则

(1)　$f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 处连续.

(2) $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 处可偏导，且

$f_{x_j}\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)=A_j\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)(j=1,\cdots,n)$.

证　与定理 3.1 的证明类似。

函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在一点 $\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)$ 处的全微分可写为：

$$\mathrm{d}y\Big|_{\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)}=f_{x_1}\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\mathrm{d}x_1+\cdots+f_{x_n}\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right)\mathrm{d}x_n$$

当函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在某区域 D 内处处可微时，称它为 D 内的可微函数．则其在任意点 $(x_1,\cdots,x_n)\in D$ 的全微分为

$$\mathrm{d}y=f_{x_1}(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1+\cdots+f_{x_n}(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n\text{；或}\quad \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

定理 3.n 说在一点可微保证可偏导且连续。需要注意的是，此定理的逆命题不成立，即在一点函数连续或可偏导不能保证可微．与一元函数时不同，对于多元函数，“在一点处可微”与“在该点可偏导”是不等价的．熟悉下面一些典型例子。

【例 3.5】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论函数在 $(0,0)$ 点处的连续性，可偏导性，可微性.

解 (1) 因 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le |x|\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le |x|$，$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在 $(0,0)$ 点处连续.

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x\times 0}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x}=0$，类似地有 $f_y(0,0)=0$，即函数在 $(0,0)$ 可偏导.

(3) 函数在 $(0,0)$ 处的全增量为

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

应为 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小，但

$$\lim_{r\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\mathrm{d}x+f_y(0,0)\mathrm{d}y]}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在（例 2.3），所以假设不成立，函数在 $(0,0)$ 不可微.

（**方法总结：**（1）证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，就是证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$；（2）证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导，就是（比如说用定义）证明在 (x_0,y_0) 每个偏导数都存在；（3）当 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导时，证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，就是证明 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$；证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不可微，就是证明 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在（前面已有方法）或 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$。如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点某个偏导数不存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 肯定不可微。）

思考题：

5. 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数都存在，是否 $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ 就是 $z=f(x,y)$ 的全微分？（不一定。）

那么，函数需要满足什么条件，才能保证其在一点处一定可微呢？下面的定理给出了函数在一点处可微的充分条件.

定理 3.2(**可微的充分条件**)　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内处处可偏导，且 $f_x(x,y)$， $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

证　设 $\Delta x,\Delta y$ 充分小，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为 (x_0,y_0) 的邻域内任意一点，则

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值定理，有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\\&\qquad=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x\quad(0<\theta_1<1),\\&f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta_2<1),\end{aligned}$$

又因为 $f_x(x,y)$， $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，故

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\beta,$$

其中，$\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\left[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)\right]=0$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\beta=\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\left[f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)-f_y(x_0,y_0)\right]=0$。

所以

$$\begin{aligned}\Delta z&=[f_x(x_0,y_0)+\alpha]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\beta]\Delta y\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\end{aligned}$$

而

$$0\le\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\alpha\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\beta\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$$

$$\le|\alpha|+|\beta|\to 0\qquad\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\right)$$

因此 $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，由定义可知，$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

【例 3.6】 求下列函数的全微分：

(1) $z=2x^2y+\arctan\dfrac{y}{x}$； (2) $u=\cos(x^2+y^2)+\mathrm{e}^{xyz}$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy+\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=4xy-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2+\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x^2+\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

两个偏导数在除 $x=0$ 外均连续，故

$$\mathrm{d}z=\left(4xy-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x+\left(2x^2+\frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\ .$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin(x^2+y^2)\times 2x+yz\mathrm{e}^{xyz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\sin(x^2+y^2)\times 2y+xz\mathrm{e}^{xyz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy\mathrm{e}^{xyz}$，故

$$\mathrm{d}u=\left[yz\mathrm{e}^{xyz}-2x\sin(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x+\left[xz\mathrm{e}^{xyz}-2y\sin(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}y+xy\mathrm{e}^{xyz}\mathrm{d}z\ .$$

【例 3.7】 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论函数在 $(0,0)$ 点处的连续性、可偏导性、*可微性*及偏导函数的连续性.

解 (1) 连续性：因

$$0<\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|<x^2+y^2\to 0\ (x\to 0,y\to 0),$$

故有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0),$$

函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

(2) 可偏导性：因

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y}=0,$$

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 可微性：由上面已知，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$，因（把 Δx 写成 x，Δy 写成 y）

$$f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

而

$$\lim_{r\to 0}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(4)当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\times\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

因 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f_x(x,y)$ 不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

同理可得

$$f_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

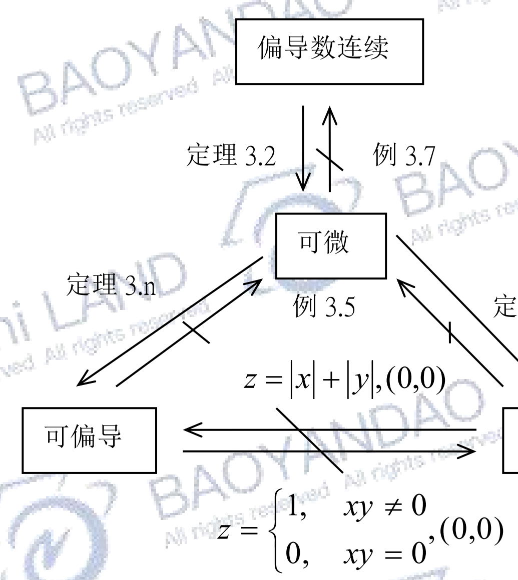
在 $(0,0)$ 处不连续.

由此例可看到，偏导函数连续只是函数可微的充分条件，而不是必要条件.

（**方法总结：**讨论偏导（函）数的连续性，首先得把偏导函数计算出来（分段点的导数用定

义计算）。）

多元函数在一点处的连续性，可偏导性，可微性及偏导函数的连续性之间的关系如下：



下面简要说明微分的几何意义及其在近似计算中的应用.

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，记 $x=x_0+\Delta x$， $y=y_0+\Delta y$，则

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)\ ,$$

即

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho) \tag{3.4}$$

利用此式可得二元函数近似值的计算表达式

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\ .$$

若记

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\ , \tag{3.5}$$

此式表示空间过点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 且以 $\left\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\right\}$ 为法向量的平面. (3.4)式表明，如果函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则曲面在 (x_0,y_0) 附近的小部分可用一个平面来近似代替，这种近似代替体现了“以直代曲”的思想，此平面为曲面在 (x_0,y_0) 处的切平面(图 3.2). 关于切平面的有关内容，将在第 8 节中进一步的讨论.

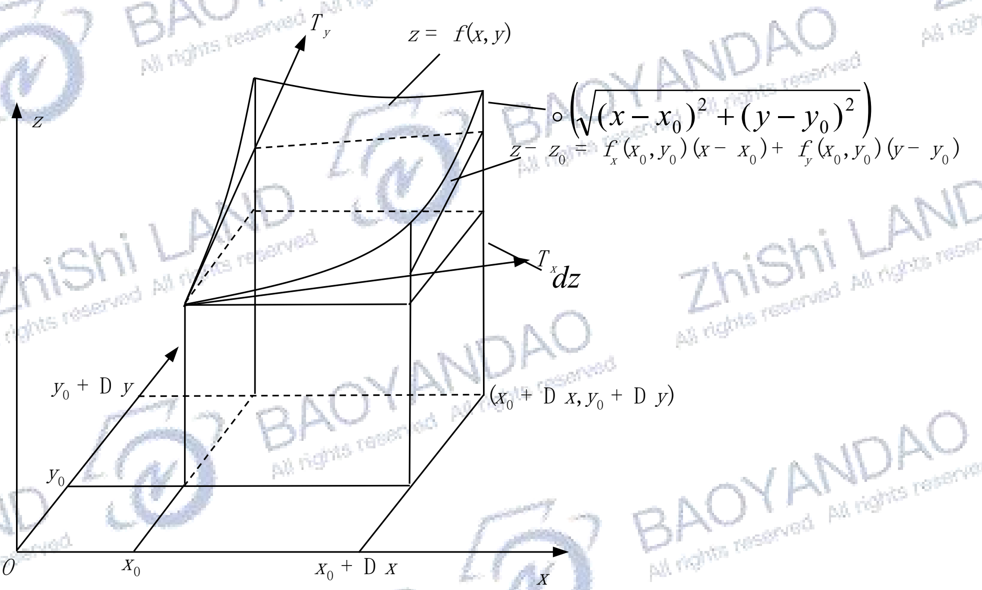


图 3.2

】 计算 $\sin 29^\circ\times\tan 46^\circ$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=\sin x\tan y$， 取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ ，$y_0=\dfrac{\pi}{4}$ ，$\Delta x=-\dfrac{\pi}{180}$ ，$\Delta y=\dfrac{\pi}{180}$， 因 $f(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{\pi}{6}\times\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$； $f_x(x,y)=\cos x\times\tan y$， $f_y(x,y)=\sin x\times\sec^2 y$， $f_x(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $f_y(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=1$，故

$$\begin{aligned}\sin 29^\circ\tan 46^\circ &\approx f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})+f_x(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})\Delta x+f_y(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})\Delta y\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{\pi}{180})+\frac{\pi}{180}\approx 0.5023\ .\end{aligned}$$

习题 9-3

A 类

1．求下列函数的偏导数．

(1) $z=e^{xy}\sin(x^2+y^2)$；　　(2) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=(1+xy)^y$；　　(4) $z=\ln(x^2+\sqrt{x^2+y^2})$；

(5) $u=\sin\dfrac{xy^2}{1+z}$；　　(6) $u=(xy)^z$．

2．求下列函数在指定点处的偏导数值．

*(1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(1,2)$ 处；　　(2) $z=y\sin(x+y)$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处；

*(3) $z=x^2e^y+\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处；　　(4) $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(1,1,1)$ 处．

3．求函数的全微分．

*(1) $z=x^2y+\dfrac{y}{2x}$；　　(2) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$；

(3) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(4) $u=e^{xyz}$；

*(5) $u=x^{yz}$；

4．求曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2) \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 的切线关于 x 轴的倾角．

5．证明：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但偏导数不存在．

6．设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$．

7．设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论其在 $(0,0)$ 点处的偏导数及全微分是否存在．

解　$\varphi(x)=f(x,0)\equiv 0,\ \psi(y)=f(0,y)\equiv 0$。所以两个偏导数 $f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,\ f_y(0,0)=\psi'(0)=0$ 都存在。

如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的全微分存在，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

但是，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2y}{x^4+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在（$y=kx^2\ (k\neq 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\frac{x^2y}{x^4+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{k}{1+k^2}}{\sqrt{x^2+k^2x^4}}=\infty$）。

8．利用全微分近似计算

(1) $\sqrt[3]{(2.02)^2+(1.97)^2}$；　　*(2) $1.04^{2.02}$．

B 类

1．设 $u=z^{y^x}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$．

2．设 $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

3．证明函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续，且偏导数存在，但在该点处不可微．

4．证明：若函数 $z=f(x,y)$ 满足不等式 $|f(x,y)|\le x^2+y^2$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是可微的．

5．设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内连续．试问

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在？

(2) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微？

解　（1）$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}$ 存在的充要条件是 $\varphi(0,0)=0$；

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|y|\varphi(0,y)}{y}$ 存在的充要条件也是 $\varphi(0,0)=0$。

（2）当 $\varphi(0,0)\ne 0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不可偏导也就不可微。

设 $\varphi(0,0)=0$。$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\left(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（$\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$）。$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微。

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微的充要条件也是 $\varphi(0,0)=0$。

*6．扇形中心角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，半径 $R=20\text{cm}$．若将中心角增加 $\dfrac{\pi}{180}$，为使扇形面积不变，应将半径缩短多少？

第 4 节　多元函数复合函数的求导法则

本节讨论多元复合函数的求导法则及一阶全微分形式不变性．

4.1　多元复合函数的求导法则

首先要注意到多元函数复合的多样性．

我们直接给出多元复合函数的求导法，然后用后面的有证明的定理 4.1、4.2 验证我们的做法是对的（这样当然不算总方法的证明）。

题目（必考）：求给定复合函数的导数。

解法步骤：

（0）弄清复合结构，引进中间变量；

（1）画出函数图；（用上课讲的而不是课本上讲的方法画函数图）

（2）根据函数图写出求导公式（比如对 x 求导）

（i）函数图中有多少个叶子是 x，公式中就有多少项：每个 x 叶子所在的路径对应一项；

（ii）路径中的每个相邻函数关系都求导（一元函数的就求导，多元函数的就求偏导），把这些导数乘起来，就得到该路径对应的项；

（3）用上面写出的求导公式求出（偏）导数，要消除中间变量。

请同学们务必理解、记熟、练熟上面的**解法步骤。**

1　一个自变量的情形

定理 4.1　设 $z=f(u,v)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$．如果 $u=u(t)$，$v=v(t)$ 在点 t 处可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(t),v(t)]$ 在点 t 处可导，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} \tag{4.1}$$

（函数图：

$$\begin{array}{lll} & u & —— t \\ z & & \\ & v & —— t \end{array}$$

求导公式：（共有两条路径的叶子是 t，公式有两项）

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

与（4.1）一致。）

证　设自变量 t 有一个改变量 Δt，相应地函数 $u=u(t)$，$v=v(t)$ 也有改变量 Δu，Δv，因为函数 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处有连续偏导数，则（可微）有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)，\quad \rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}，$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

因为 u，v 在 t 处可导，故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta u=0$，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta v=0$，所以有 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\rho=0$，又由

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\times\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\times\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\,sng(\Delta t)=0$$

且 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{du}{dt}$，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$，得 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$，即有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

存在．

上式中的 $\frac{dz}{dt}$ 称为 z 对 t 的全导数．

2　多个自变量的情形

如果函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，有下面的结论：

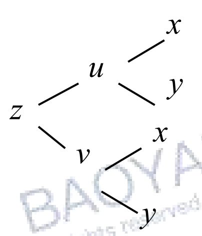
定理 4.2　设函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.2}$$

证略（与定理 4.1 的证明类似）．

（函数图：



求导公式：（共有两条路径的叶子是 x，公式有两项）

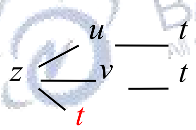
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（共有两条路径的叶子是 y，公式有两项）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

与（4.2）一致。））

要注意在求偏导过程中变量所在的位置．如：$z=f(u,v,t)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$．函数图：



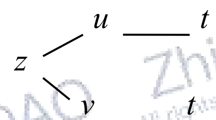
公式：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}.$$

注意上式中的两个记号 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\frac{\partial z}{\partial t}$ 各自的含义．等式左边的 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 是复合结果一元函数 z 对复合结果自变量 t 的导数（函数图中 3 个 t 的）；等式右边的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 是复合前三元函数 $z=f(u,v,t)$ 对复合前变量 t 的偏导数（函数图中 1 个 t 的），此时 u,v 看作常数．

【例 4.1】 设函数 $z=2u^2v^2+ue^v$，$u=\ln t$，$v=\sin t$，求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$．

解 函数图：



求导公式：（共有两条路径的叶子是 t，公式有两项）

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

因 $\frac{\partial z}{\partial u}=4uv^2+e^v$，$\frac{\partial z}{\partial v}=4u^2v+ue^v$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\cos t$，故

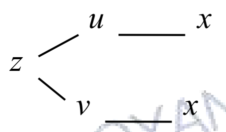
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(4uv^2+e^v)\frac{1}{t}+(4u^2v+ue^v)\cos t$$

$$=(4\ln t\sin^2 t+e^{\sin t})\frac{1}{t}+(4\ln^2 t\sin t+e^{\sin t}\ln t)\cos t.$$

【例 4.2】 设 $z=f\left(x^2,\frac{\sin^2 x}{x}\right)$，$f$ 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．

解 令 $u=x^2$，$v=\frac{\sin^2 x}{x}$，则有 $z=f(u,v)$。

函数图：



求导公式：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

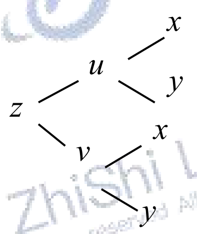
$$=2x\cdot f_u\left(x^2,\frac{\sin^2 x}{x}\right)+\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}\cdot f_v\left(x^2,\frac{\sin^2 x}{x}\right).$$

注 有时为了方便和不引起混淆，将 $f_u(u,v)$ 简记为 f_1， $f_v(u,v)$ 简记为 f_2．即用 f_i 表示函数 f 对第 i 个中间变量的偏导数．借用此记号，上式可简写为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2xf_1+\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}\cdot f_2.$$

【例 4.3】 设 $z=u^2\mathrm{e}^v$， $u=4xy$， $v=3x^2-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 函数图：



求导公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$\frac{\partial z}{\partial u}=2u\,\mathrm{e}^v$， $\frac{\partial z}{\partial v}=u^2\mathrm{e}^v$， $\frac{\partial u}{\partial x}=4y$， $\frac{\partial u}{\partial y}=4x$， $\frac{\partial v}{\partial x}=6x$， $\frac{\partial v}{\partial y}=-2$，

故

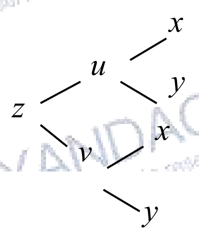
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\,\mathrm{e}^v\cdot 4y+u^2\mathrm{e}^v\cdot 6x=(32xy^2+96x^3y^2)\mathrm{e}^{3x^2-2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\,\mathrm{e}^v\cdot 4x+u^2\mathrm{e}^v\cdot(-2)=32x^2y(1-y)\mathrm{e}^{3x^2-2y}.$$

【例 4.4】 设 $z=f(xy,\frac{x^2}{y})$， f 有一阶连续偏导，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $u=xy$， $v=\frac{x^2}{y}$，则 $z=f(u,v)$。

函数图：



求导公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=yf_1+\frac{2x}{y}f_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1-\frac{x^2}{y^2}f_2.$$

【例 4.5】 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 为可微函数．证明：

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}=-\dfrac{y\dfrac{\partial}{\partial x}f(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{f(x^2-y^2)}=\frac{f(x^2-y^2)-y\dfrac{\partial}{\partial y}f(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}。$$

设 $u=x^2-y^2$。函数图：

$$f - u \begin{matrix} \nearrow x \\ \searrow y \end{matrix}$$

求导公式： $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x^2-y^2)=\dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)$，

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x^2-y^2)=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)。$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\dfrac{\partial}{\partial x}f(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}=-\frac{2xyf'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)+2y^2f'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}+\frac{f(x^2-y^2)}{yf(x^2-y^2)^2}+\frac{2yf'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)^2}$$

$$=\frac{f(x^2-y^2)}{yf(x^2-y^2)^2}=\frac{y}{y^2f(x^2-y^2)}=\frac{z}{y^2}$$

【例 4.8】 设 $u = f(x,y,z)$，$y = \varphi(x,t)$，$t = \psi(x,z)$，f,φ,ψ 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 函数图如图 4.6 所示，求导公式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

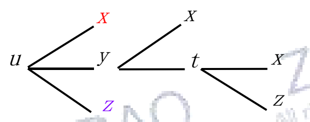


图 4.6

注意：公式左边 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和右边 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 的区别：$\frac{\partial u}{\partial x}$ 是三个叶子 x 的，而 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 是一个叶子 x 的（所以用小括号以示区别）。在 $u = f(x,y,z)$ 中求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 时 y 和 z 是常数。类似地，$\frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ 的区别。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + \frac{\partial y}{\partial x} f_2' + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} f_2',$$

4.2　一阶全微分形式不变性

我们知道，一元函数的一阶微分具有微分形式不变性，即

$$dy = f'(x)dx$$

不管 x 是自变量还是复合函数的中间变量都是对的。

设 $z=f(x,y), x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$，$f,\varphi,\psi$ 有一阶连续偏导数。我们来求复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 的微分。由复合函数求导的链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

不管 x,y 是自变量还是复合函数的中间变量都是对的。这就是二元函数的一阶全微分形式不变性。一般地，多元函数同样具有一阶全微分形式不变性。利用一阶全微分形式不变性，我们很方便地计算多元复合函数的微分和（偏）导数。

【例 4.7】　设 $z=\sin(2x+y)$，求 dz.

解　$dz=d(\sin(2x+y))=\cos(2x+y)d(2x+y)=\cos(2x+y)(2dx+dy)$

$\quad = 2\cos(2x+y)dx+\cos(2x+y)dy$.

顺便，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\cos(2x+y), \dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos(2x+y)$ 。

【例 4.8】　$z=f(x-y^2,xy)$，f 有一阶连续偏导数，求 $dz,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$dz=df(x-y^2,xy)=f_1d(x-y^2)+f_2d(xy)$

$\quad = f_1\times(dx-2ydy)+f_2\times(ydx+xdy)=(f_1+yf_2)dx+(xf_2-2yf_1)dy$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_2-2yf_1$

【例 **4.9**】 $z=f(x,u,v)$，$u=g(x,y)$，$v=h(x,y,u)$， f，g，h 均可微，求 $\frac{\P z}{\P x}$，$\frac{\P z}{\P y}$.

解 $dz=df(x,u,v)=f_1dx+f_2du+f_3dv$

$$=f_1dx+f_2(g_1dx+g_2dy)+f_3(h_1dx+h_2dy+h_3du)$$

$$=f_1dx+f_2(g_1dx+g_2dy)+f_3(h_1dx+h_2dy+h_3(g_1dx+g_2dy))$$

$$=(f_1+f_2g_1+f_3h_1+f_3h_3g_1)dx+(f_2g_2+f_3h_2+f_3h_2g_2)dy$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+f_2g_1+f_3h_1+f_3h_3g_1,\frac{\partial z}{\partial y}=f_2g_2+f_3h_2+f_3h_2g_2.$$

从上面两个例子可看到，利用一阶全微分形式不变性求复合函数的偏导数，运算的层次较明确，不易出错，且计算相对较简单.

习题 9-4

A 类

1．求下列函数的一阶全导数或一阶偏导数，其中 f 有一阶连续的偏导数．

(1) $z=e^{x^2-2y}$，$x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$；

*(2) $z=\sqrt{u}+\sin v$，$u=\ln x$，$v=x^2$，求 $\dfrac{dz}{dx}$；

(3) $z=u^2v-v^2u$，$u=x\cos y$，$v=y\sin x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(4) $z=x^2-y^2+t$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，求 $\dfrac{dz}{dt}$；

(5) $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

*(6) $u=f(x^2+y^2-z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$；

(7) $u=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z})$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$；

(8) $z=x^3f(2x+y,y\ln x)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

(5) $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

解 （5）

$$dz=df(x^2-y^2,e^{xy})=f_1d(x^2-y^2)+f_2d(e^{xy})=f_1(2xdx-2ydy)+f_2e^{xy}d(xy)$$
$$=f_1(2xdx-2ydy)+f_2e^{xy}(xdy+ydx)$$
$$=\left(2xf_1+ye^{xy}f_2\right)dx+\left(xe^{xy}f_2-2yf_1\right)dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}f_2-2yf_1$$

2．求下列函数的全微分，其中 f，φ 有一阶连续偏导数．

*(1) $u=\ln(e^{x+y}+e^{xy})$；　(2) $u=e^{2x}(y^2+\tan z)$；　(3) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $z=\arctan\dfrac{x}{x^2+y^2}$；　*(5) $z=f(\sin x^2,x+y^2)$；　(6) $u=f(x,xy,xyz)$．

解 （1）

$$du=d\ln(e^{x+y}+e^{xy})=\frac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}d(e^{x+y}+e^{xy})=\frac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}d(x+y)+e^{xy}d(xy)\right)$$
$$=\frac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}(dx+dy)+e^{xy}(xdy+ydx)\right)$$
$$=\frac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}+ye^{xy}\right)dx+\frac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}+xe^{xy}\right)dy$$

顺便，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}+ye^{xy}\right),\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{e^{x+y}+e^{xy}}\left(e^{x+y}+xe^{xy}\right)$

3．引入新的变量 u，v，设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，变换方程式

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0\ .$$

4．设 $z=xy\varphi(u)$，$u=\sin\dfrac{y}{x}$，$\varphi(u)$ 可导．证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy\varphi(u)$．

证
$$dz=d\left(xy\varphi(u)\right)$$
$$=y\varphi(u)dx+x\varphi(u)dy+xyd\varphi(u)=y\varphi(u)dx+x\varphi(u)dy+xy\varphi'(u)du$$

$$= y\varphi(u)dx + x\varphi(u)dy + xy\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}\,d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= y\varphi(u)dx + x\varphi(u)dy + xy\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right)$$

$$= \left(y\varphi(u) - \frac{y^2}{x}\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(x\varphi(u) + y\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi(u) - \frac{y^2}{x}\varphi'(u)\cos\frac{y}{x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi(u) + y\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy\varphi(u) - y^2\varphi'(u)\cos\frac{y}{x} + xy\varphi(u) + y^2\varphi'(u)\cos\frac{y}{x} = 2xy\varphi(u)$$

5．设 $z = e^{-x} - f(x-2y)$，$f(u)$ 可导，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

*6．设 $z=\sin y + f(\sin x - \sin y)$，求 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x} + \sec y\frac{\partial z}{\partial y}$.

7．设 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$，求 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y}$.

B类

1．设 $z=f(x^2-y^2,\cos xy)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求 $\frac{\partial z}{\partial r}$，$\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

*2．验证函数 $u(x,y)=x^n f(\frac{y}{x^2})$ 满足方程 $x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=nu$.

3．设 $u=f(x,y,t)$，$x=\sin(s^2+t^2)$，$y=e^{\frac{x}{s}}$，其中 f 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$.

*4．设 f 有一阶连续偏导数，且 $f(x,x^2)=1$，$f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$.

5．设 $z=x^2 f\left(\ \right)+\varphi(\frac{x}{y})$，$f$，$\varphi$ 有一阶连续偏导数，求 dz.

6．设 $u=f(x,y)$ 是可微函数，

(1) 如果 $u=f(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$，试证 f 在极坐标系中只与 θ 有关；

*(2) 如果 $u=f(x,y)$ 满足方程 $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}$，试证 f 在极坐标系中只是 r 的函数.

*7．若函数 $f(x,y,z)$ 对任意实数 t 满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数．设 $f(x,y,z)$ 可微，试证：$f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

8．设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点处可微，且 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=3$，$\varphi=f[x,f(x,x)]$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$

第 5 节　多元函数的高阶偏导数

对于一元函数，一阶导函数的导数称为原来函数的二阶导数；$n-1$ 阶导函数的导数称为原来函数的 n 阶导数。对于多元函数，也可类似地定义高阶偏导数.

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可偏导，其偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ 仍是 x,y 的二元函数，仍可以考虑求它们的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y)$$

称为原来函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 分别记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y)，或 f_{xx}，z_{xx}；$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)，或 f_{xy}，z_{xy}；$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)，或 f_{yx}，z_{yx}；$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y)，或 f_{yy}，z_{yy}.$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 也称为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x,y 的二阶混合偏导数.（符号游戏）

一般地，$n-1$ 阶偏导函数的（偏）导数称为原来函数的 n 阶（偏）导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

思考题：

1. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 是否相同？ $\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 是否相同？（完全不一样！）

【例 5.1】 设 $z=x^2y+2x\sin y$，求 z 的所有二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+2\sin y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2x\cos y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+2\sin y)=2y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy+2\sin y)=2x+2\cos y$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2x\cos y)=2x+2\cos y$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2x\cos y)=-2x\sin y$.

（请注意：此题中 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$）

【例 5.2】 设 $z=f(x+ay)+g(x-ay)$. 证明：$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. f,g 均二阶可导,a 为常数.

解 令 $u=x+ay$， $v=x-ay$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x+ay)+\frac{\partial}{\partial x}g(x-ay)=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}=f'(u)+g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)+g''(v),$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=af'(u)-ag'(v)$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2f''(u)+a^2g''(v)$，

从而有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【例 5.3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$．

解 $x^2+y^2\neq 0$时，有

$$f_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$x^2+y^2=0$时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{2\cdot 0\cdot y^3}{(0^2+y^2)^2}}{y}=0.$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4-x^2\cdot 0}{(x^2+0^2)^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

在例 5.1 中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，在例 5.3 中 $f_{xy}(0,0)=0$，$f_{yx}(0,0)$不存在，这说明，在某些情况下，混合偏导与求导次序无关，而在某些情况下，混合偏导与求导次序有关．那么在什么情况下，二阶混合偏导与求导次序无关呢？

定理 5.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导函数 $f_{xy}(x,y)$ ，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

证　令

$$F=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$$

设 $g(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$ ，$h(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$，则有

$$F=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)，或 F=h(y_0+\Delta y)-h(y_0)，$$

由一元函数的中值定理及 f 关于 x 的偏导函数存在，得

$$F=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)=g'(x_0+\theta_1\Delta x)\times\Delta x$$

$$=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x\quad 0<\theta_1<1$$

又 f_x 关于 y 的偏导数存在，则由中值定理得，

$$F=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x，\quad 0<\theta_2<1$$

同理，$F=h(y_0+\Delta y)-h(y_0)=h'(y_0+\theta_3\Delta y)\times\Delta y$

$$=[f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y$$

$$=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y\quad 0<\theta_3<1，\ 0<\theta_4<1$$

即有　$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)$，

因为　$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是连续，故

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{xy}(x_0,y_0)，$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

所以，$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

如果相应的高阶混合偏导数连续，则与求导次序无关. 该结论可以推广到一般多元函数的高阶混合偏导数.

定理 5.n　如果函数 $z=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的相应混合偏导函数在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处连续，则在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处的混合偏导数与求导次序无关.

（如果求导次序无关，我们就不用计较求导次序了。）

【例 5.4】 设 $u = x^y + y^2 \ln x \cdot \sin z$，求 u 的二阶偏导数.

解 $u_x = yx^{y-1} + \dfrac{y^2}{x}\sin z$，$u_y = x^y \ln x + 2y \ln x \cdot \sin z$，$u_z = y^2 \ln x \cdot \cos z$，

$$u_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - \frac{y^2}{x^2}\sin z，\quad u_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x + \frac{2y}{x}\sin z，$$

$$u_{xz} = \frac{y^2}{x}\cos z，\quad u_{yy} = x^y(\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \sin z，$$

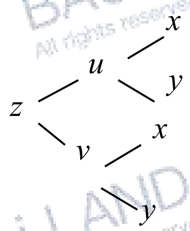
$$u_{yz} = 2y \ln x \cdot \cos z，\quad u_{zz} = -y^2 \ln x \cdot \sin z .$$

$$u_{yx} = u_{xy},\ u_{zx} = u_{xz},\ u_{zy} = u_{yz} .$$

复合函数求高阶偏导数：先求有关较低阶偏导函数，再对较低阶偏导函数求导得到较高阶偏导数。遇到低阶偏导函数求导时也要先画出它的函数图。幸好，各阶偏导函数的复合结构与原来函数的复合结构是一样的，因此，各阶偏导函数的函数图与原来函数的函数图是一样的。例如，在 z 的函数图中把 z 换成 $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 就得到 $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 的函数图。

【例 5.5】 设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，f，φ，ψ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$．

解 函数图



$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot u_y+f_v\cdot v_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x)=\frac{\partial}{\partial x}(f_u\cdot u_x)+\frac{\partial}{\partial x}(f_v\cdot v_x)$$

$$=\frac{\partial f_u}{\partial x}\cdot u_x+f_u\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\cdot v_x+f_v\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

$$=\frac{\partial f_u}{\partial x}\cdot u_x+f_u u_{xx}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\cdot v_x+f_v\cdot v_{xx}$$

注意此时 $f_u(u,v), f_v(u,v)$ 仍是二元复合函数，仍然有函数图

$$\frac{\partial f_u}{\partial x}=f_{uu}\cdot u_x+f_{uv}\cdot v_x,\quad \frac{\partial f_v}{\partial x}=f_{vu}\cdot u_x+f_{vv}\cdot v_x,$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{uu}\cdot u_x+f_{uv}\cdot v_x)u_x+f_u\frac{\partial u_x}{\partial x}+(f_{vu}\cdot u_x+f_{vv}\cdot v_x)v_x+f_v\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$=(u_x)^2 f_{uu}+f_{uv}\cdot u_x\cdot v_x+f_{vu}\cdot u_x\cdot v_x+f_{vv}\cdot(v_x)^2+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

引用前面给出的记号，$f_u=f_1$，$f_v=f_2$，$f_{uu}=f_{11}$，$f_{uv}=f_{12}$，$f_{vv}=f_{22}$，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(u_x)^2 f_{11}+f_{12}\cdot u_x\cdot v_x+f_{21}\cdot u_x\cdot v_x+f_{22}\cdot(v_x)^2+f_1\cdot u_{xx}+f_2\cdot v_{xx}$$

$$=(u_x)^2 f_{11}+2f_{12}\cdot u_x\cdot v_x+f_{22}\cdot(v_x)^2+f_1\cdot u_{xx}+f_2\cdot v_{xx}.$$

（注意到 $f_{vu}\equiv f_{uv}$，求导次序无关。）

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(u_x f_1+v_x f_2)=u_x\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_1\frac{\partial u_x}{\partial y}+v_x\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_2\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

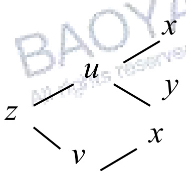
$$=u_x(f_{11}\cdot u_y+f_{12}\cdot v_y)+u_{xy}f_1+v_x(f_{21}\cdot u_y+f_{22}\cdot v_y)+v_{xy}f_2$$

$$=u_x u_y f_{11}+(u_x v_y+v_x u_y)f_{12}+v_x v_y f_{22}+u_{xy}f_1+v_{xy}f_2,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(u_y f_1 + v_y f_2) = u_y \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial u_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
&= u_y (f_{11} \cdot u_y + f_{12} \cdot v_y) + u_{yy} f_1 + v_y (f_{21} \cdot u_y + f_{22} \cdot v_y) + v_{yy} f_2 \\
&= (u_y)^2 f_{11} + 2 u_x v_y f_{12} + (v_y)^2 f_{22} + u_{yy} f_1 + v_{yy} f_2 .
\end{aligned}
$$

【例 5.6】 设 $z=f\left(\frac{x}{y},\cos 2x\right)$，$f$ 有二阶连续偏导数，求 z 的二阶偏导数.

解 令 $u=\frac{x}{y}$， $v=\cos 2x$，则 $z=f(u,v)$。函数图

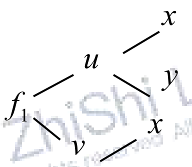


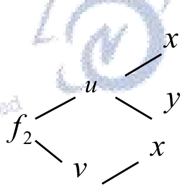
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x=\frac{1}{y}\cdot f_1-2\sin 2x\cdot f_2\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot u_y=-\frac{x}{y^2}\cdot f_1\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot f_1-2\sin 2x\cdot f_2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot f_1\right)-\frac{\partial}{\partial x}(2\sin 2x\cdot f_2)$$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}-2\sin 2x\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}-4\cos 2x\cdot f_2$$

f_1,f_2 的函数图





$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=f_{1u}\cdot u_x+f_{1v}\cdot v_x=\frac{1}{y}\cdot f_{11}-2\sin 2x\cdot f_{12}\text{，}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=f_{2u}\cdot u_x+f_{2v}\cdot v_x=\frac{1}{y}\cdot f_{21}-2\sin 2x\cdot f_{22}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}f_{11}-2\sin 2x\cdot f_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f_1-2\sin 2x\left(\frac{1}{y}f_{21}-2\sin 2x\cdot f_{22}\right)-4\cos 2x\cdot f_2$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_{11}-\frac{4}{y}\sin 2x\cdot f_{12}+4\sin^2 2x\cdot f_{22}-\frac{1}{y^2}f_1-4\cos 2x\cdot f_2\text{，}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=f_{1u}\cdot u_y=-\frac{x}{y^2}\cdot f_{11},\quad\frac{\partial f_2}{\partial y}=f_{2u}\cdot u_y=-\frac{x}{y^2}\cdot f_{21}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}f_1-2\sin 2x\cdot f_2\right)=\frac{1}{y}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_1-2\sin 2x\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)f_{11}-2\sin 2x\left(-\frac{x}{y^2}\right)f_{21}-\frac{1}{y^2}f_1$$

$$=-\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{2x\sin 2x}{y^2}\cdot f_{21}-\frac{1}{y^2}f_1\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f_1\right)=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{2x}{y^3}f_1$$

$$=-\frac{x}{y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)f_{11}+\frac{2x}{y^3}f_1=\frac{x^2}{y^4}f_{11}+\frac{2x}{y^3}f_1\text{.}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

思考题：

2．设 $z = f(x,u), u = xy$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial u}，\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}，$$

此解法是否正确？（第二式不对。应该是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + yf_2，\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f_1 + yf_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{11} + yf_{12} + y(f_{21} + yf_{22})）$$

习题 9-5

A 类

1．求下列函数的二阶偏导数．

(1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(2) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$；　(3) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

(4) $z=x^3y^2+\dfrac{x^2}{2y}$；　(5) $z=x\ln(xy^2)$；　(6) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$．

2．设 f 具有连续的二阶偏导数，求下列函数的高阶偏导数．

(1) $z=f\left(\ln\dfrac{x}{y},xy\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

*(2) $z=f(x^2+y^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$；

(3) $z=yf(x+y,x^2y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(4) $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(5) $z=f(\sin x,\cos y^2,e^{x+y})$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

*(6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$．

(3) $z=yf(x+y,x^2y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

解 (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf(x+y,x^2y)\right)=f(x+y,x^2y)+y\frac{\partial}{\partial y}f(x+y,x^2y)\\&=f(x+y,x^2y)+y\left(f_1(x+y,x^2y)+x^2f_2(x+y,x^2y)\right)\\&=f(x+y,x^2y)+yf_1(x+y,x^2y)+x^2yf_2(x+y,x^2y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}f(x+y,x^2y)+y\frac{\partial}{\partial x}f_1(x+y,x^2y)+2xyf_2(x+y,x^2y)+x^2y\frac{\partial}{\partial x}f_2(x+y,x^2y)\\&=f_1+2xyf_2+yf_{11}+2xy^2f_{12}+2xyf_2+x^2yf_{21}+2x^3y^2f_{22}\\&=f_1+2xyf_2+yf_{11}+(2xy^2+x^2y)f_{12}+2xyf_2+2x^3y^2f_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}f(x+y,x^2y)+f_1+y\frac{\partial}{\partial y}f_1(x+y,x^2y)+x^2f_2+x^2y\frac{\partial}{\partial y}f_2(x+y,x^2y)\\&=f_1+x^2f_2+f_1+yf_{11}+x^2yf_{12}+x^2f_2+x^2yf_{21}+x^4yf_{22}\\&=2f_1+2x^2f_2+yf_{11}+2x^2yf_{12}+x^4yf_{22}\end{aligned}$$

3．设 $u=\sin x\cosh y$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$．

*4．设函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，证明 u 满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$．

5．设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$ 可将方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求实数 a．

6．设 $z=\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，其中 φ，ψ 有连续的二阶偏导数．试证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

B 类

1．设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\,dt$，求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数．

*2．证明：函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ 满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

*3．证明：若函数 $u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程，则函数 $F=u(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ 也满足拉普拉斯方程．

4．设 $u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}f(z)\,\mathrm{d}z$，其中 φ 有二阶连续偏导数，f 有一阶连续偏导数．试证：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-at}^{x+at}f(z)\,\mathrm{d}z$

$=\frac{1}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2a}f(x+at)-\frac{1}{2a}f(x-at)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[\varphi''(x+at)-\varphi''(x-at)]+\frac{1}{2a}f'(x+at)-\frac{1}{2a}f'(x-at)$

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at}f(z)\,\mathrm{d}z$

$=\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2}f(x-at)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[\varphi''(x+at)-\varphi''(x-at)]+\frac{a}{2}f'(x+at)-\frac{a}{2}f'(x-at)$

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

*5．求方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 满足条件 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$．

6．设 $z=xf(\frac{y}{x})+2y\varphi(\frac{x}{y})$，$f$，$\varphi$ 有二阶连续偏导数，a，b 为常数，

(1)求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　*(2)当 $f=\varphi$，且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$．

7．引入新的函数 $v(x,y)=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，选择适当的 a，b，化简方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0．$$

第 6 节　隐函数的求导法则

在中学我们知道，一个方程解出一个未知数，两、三个方程分别解出两、三个未知数。因此，一个方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 解出一个隐函数 $y=y(x_1,\cdots,x_n)$，m 个方程 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 解出 m 个隐函数 $y_1=y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m=y_m(x_1,\cdots,x_n)$。

这一节我们讨论：

(1)在什么条件下，方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 或 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 能确定一个或 m 个连续、可导、可微的隐函数？

(2)怎样求 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 或 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 确定的隐函数的导数？

第（1）个问题我们不太在意。我们的重点在第（2）个问题（考点）。

对于方程组情形，课本使用了雅可比行列式。我们勿略困难、易错的雅可比行列式，只学方法。

设 $y=y(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 确定的隐函数；$y_1=y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m=y_m(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 确定的隐函数，则 $F(x_1,\cdots,x_n,y(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0$，$\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0\end{cases}$。恒等式当然可以两边求导。

求隐函数一阶导数方法：

（1）把 y 看作隐函数 $y(x_1,\cdots,x_n)$，则 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 是恒等式；

（2）恒等式 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 两边对 x_i（i 固定）求导（注意：y 中有 x_i）得恒等式 $F_i(x_1,\cdots,x_n,y)+F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=0$；

（3）从恒等式 $F_i(x_1,\cdots,x_n,y)+F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=0$ 解出 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_i(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)}$。

以上 3 步骤 $i=1,\cdots,n$ 做 n 遍就得到 n 个偏导数。求 F_1 时 $x_2,\cdots,x_n,y$ 都是常数，其它类似，以下类似。

（1）$y_1,\cdots,y_m$ 看作隐函数 $y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n)$，则 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 是 m 个恒等式；

（2）m 个恒等式 $\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}$ 两边对 x_i（i 固定）求导（注意：$y_1,\cdots,y_m$ 中都有 x_i）得恒等式 $\begin{cases}F_{1i}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m}F_{1\,n+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\dfrac{\partial y_t}{\partial x_i}=0\\ \cdots\\ F_{mi}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m}F_{m\,n+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\dfrac{\partial y_t}{\partial x_i}=0\end{cases}$；

（3）把 $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{y_m}{x_i}$ 当作未知解方程组 $\begin{cases}F_{1i}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m}F_{1\,n+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\dfrac{\partial y_t}{\partial x_i}=0\\ \cdots\\ F_{mi}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m}F_{m\,n+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\dfrac{\partial y_t}{\partial x_i}=0\end{cases}$ 即得到要求的 $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{y_m}{x_i}$。

以上 3 步骤 $i=1,\cdots,n$ 做 n 遍就得到 $m\times n$ 个偏导数。

求隐函数高阶导数方法有： $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$

（1）求一阶导数时的恒等式 $F_i(x_1,\cdots,x_n,y)+F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=0$ 两边对 x_j 求导得含 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i\partial x_j}$ 的恒等式，再把 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i\partial x_j}$ 解出且 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_i(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)}$ 代入；

（2）由 $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_i(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)}$，$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{F_i(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)}$，再把 $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_i(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)}$ 等代入即得 $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$。

（1）求一阶导数时的恒等式
$$\begin{cases} F_{1i}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m} F_{1n+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\frac{\partial y_t}{\partial x_i}=0 \\ \cdots \\ F_{mi}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum\limits_{t=1}^{m} F_{mn+t}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\frac{\partial y_t}{\partial x_i}=0 \end{cases}$$
两边对 x_j 求导得含 $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j},\cdots,\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j}$ 的恒等式，再把 $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j},\cdots,\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j}$ 解出且 $\frac{\partial y_1}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ 代入；

（2）由 $\frac{\partial y_1}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ 再对 x_j 求导即得 $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j},\cdots,\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j}$（$\frac{\partial y_1}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ 等代入）。

更高阶的导数类似。

我们应当反复练熟这套方法。

6.1 一个方程的情形

定理 6.1(**一元隐函数存在定理**) 设二元函数 $F(x,y)$ 满足条件：$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，且在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续偏导数，则方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足 $y_0=f(x_0)$ 及 $F[x,f(x)]\equiv 0$，且
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{6.1}$$

②定理的结论只是在满足条件的点 (x_0,y_0) 的某邻域内成立.

例如：方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$（黑板解释）.

【例 6.1】 验证方程 $F(x,y)=xy^2-x^2y-2=0$ 在点 $(1,-1)$ 的某邻域内能唯一地确定一个连续可导函数 $y=y(x)$，并求 $y'(1)$.

解 把 y 当作 x 的隐函数，$xy^2-x^2y-2=0$ 是恒等式。$xy^2-x^2y-2=0$ 两边对 x 求导（y 中有 x！）得恒等式 $y^2+2xy\frac{dy}{dx}-2xy-x^2\frac{dy}{dx}=0$。解出
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^2-2xy}{2xy-x^2}=\frac{y(2x-y)}{x(2y-x)},\quad y'(1)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}}=\frac{-1\times(2+1)}{-2-1}=1\ .$$

【例 6.2】 求由方程 $xy+2^x+2^y=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 复合函数求导法．注意 y 是 x 的函数，方程 $xy+2^x+2^y=0$ 两边关于 x 求导，由复合函数地求导法则，得 $y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2^x\ln 2+2^y\ln 2\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}$.

解 3 利用全微分形式不变性．方程 $xy+2^x+2^y=0$ 两边微分，有 $d(xy+2^x+2^y)=0$，即
$$y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+2^x\ln 2\,\mathrm{d}x+2^y\ln 2\,\mathrm{d}y=0,$$
$$dy=-\frac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}dx$$

于是有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}$.

上述隐函数存在定理可以推广到三元及三元以上方程的情形：

定理 6.2(**多元隐函数存在定理**) 设三元函数 $F(x,y,z)$ 满足条件：$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，且在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内，F_x，F_y，F_z 存在且连续，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内唯一确定一个连续且有连续偏导数的二元隐函数 $z=f(x,y)$，满足 $F(x,y,z(x,y))=0$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$，其偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{6.2}$$

【例 6.3】 求由方程 $xz-y^2-xy+xe^{xyz}=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数.

解 复合函数求导法．注意到 z 是 X,y 的函数，方程两边关于 x 求偏导数，

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z - y + e^{xyz} + xe^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y-z-e^{xyz}(1+xyz)}{x+x^2ye^{xyz}}$；

方程两边关于 y 求偏导数，得

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - 2y - x + x^2ye^{xyz}\frac{\partial z}{\partial y} + x^2ze^{xyz} = 0,$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+2y-x^2ze^{xyz}}{x+x^2ye^{xyz}}$.

解 3 利用全微分形式不变性．对方程 $xz-y^2-xy+xe^{xyz}=0$ 两边微分，有

$$\mathrm{d}(xz-y^2-xy+xe^{xyz})=0,$$

即

$$z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z - 2y\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + e^{xyz}\mathrm{d}x + xe^{xyz}(yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z) = 0,$$

$$\mathrm{d}z = -\frac{z+e^{xyz}-y+xyze^{xyz}}{x+x^2ye^{xyz}}\mathrm{d}x + \frac{2y+x-x^2ze^{xyz}}{x+x^2ye^{xyz}}\mathrm{d}y$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y-z-e^{xyz}(1+xyz)}{x+x^2ye^{xyz}}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+2y-x^2ze^{xyz}}{x+x^2ye^{xyz}}$.

思考题：

1．求隐函数的导数或偏导数的方法有哪些？

【例 6.4】 求方程 $xy+\sin z+y=2z$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的二阶导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 复合函数求导法．注意到 z 是 x,y 的函数，方程 $xy+\sin z+y=2z$ 两边对 x 求偏导数，得

$$y+\cos z\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{6.3}$$

(6.3)式两边再对 x 求偏导数，得

$$-\sin z\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \cos z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{6.5}$$

(6.3)式两边对 y 求偏导数，得

$$1-\sin z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \cos z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \tag{6.6}$$

由(6.3)式得，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2-\cos z}$；

方程 $xy+\sin z+y=2z$ 两边对 y 求偏导数，得

$$x+\cos z\frac{\partial z}{\partial y}+1=2\frac{\partial z}{\partial y} \tag{6.4}$$

由(6.4)式得，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+1}{2-\cos z}$，分别代入(6.5)，(6.6)，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2\sin z}{(2-\cos z)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(2-\cos z)^2-(x+1)y\sin z}{(2-\cos z)^3}.$$

注　利用公式法和利用复合函数求导法时，必须注意求导过程中变量间的关系.利用公式时，在求 F_x,F_y,F_z 的计算过程中，x,y,z 视为相互独立的变量；而在利用复合函数的求导法则计算时，z 是 x，y 的函数.

6.2　方程组的情形

定理 6.3(**方程组情形下的隐函数存在定理**)　设函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 满足条件：

(1)在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内，$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 具有一阶连续偏导数，

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，

(3)由偏导数组成的行列式（称为雅可比行列式）

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0$$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0,G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内唯一确定了两个具有连续偏导数的二元隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，它满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

下面仅就上述公式作如下推导：

设

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases} \tag{6.7}$$

能唯一地确定一组有连续偏导数的隐函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，对方程组(6.7)中的各方程两边关于 x 求偏导数，得 $\begin{cases}F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0\\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0\end{cases}$，即有

$$\begin{cases}F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x\\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x\end{cases}, \tag{6.8}$$

方程组(6.8)是关于 u_x,v_x 的线性方程组，如果其系数行列式 $J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0$，由解线性方程组的克莱姆法则，有

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix}-F_x & F_v\\ -G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},$$

$$v_x=\frac{\begin{vmatrix}F_u & -F_x\\ G_u & -G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)};$$

同理，将方程组(6.7)中的各方程两边分别关于 y 求偏导数，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

定理 6.3 的结论还可推广到 n 个 $m+n$ 元方程组成的方程组的情形．此结论虽然给出了方程组所确定的隐函数的求导公式，但一般来说，此求导公式用起来并不太方便且容易出错，建议直接从方程组出发，将复合函数的求导法则及解方程组的方法结合起来，求出方程组所确定的隐函数组的偏导数．

【例 6.5】 设有方程组 $xu-yv=x$，$yu+xv=1$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$．

解 方程组中的各方程两边分别关于 x 求偏导数，有

$$\begin{cases}u+xu_x-yv_x=1\\ yu_x+v+xv_x=0\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}xu_x-yv_x=1-u\\ yu_x+xv_x=-v\end{cases},$$

当 $\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$ 时，解出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x(1-u)-yv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-xv-y(1-u)}{x^2+y^2};$$

类似地，用同样方法可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2}.$$

【例 6.6】 设方程组为 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$，验证方程组在点 $(1,-2,1)$ 的某邻域内能唯一地确定有连续导数的函数组 $y=f(x),z=g(x)$，并求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．

解 在方程两边分别对 x 求偏导数，注意到 y,z 均为 x 的函数，有

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases},$$

解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}.$$

也可以通过求微分得到相应的结果．

【例 6.7】 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，求 $\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial \theta}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$．

解 方程两边分别求微分，得 $\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{cases}$，因

$$\begin{vmatrix} \cos q & -r\sin q \\ \sin q & r\cos q \end{vmatrix} = r\cos^2 q + r\sin^2 q = r$$，当 $r ¹ 0$ 时，解出

$$\mathrm{d}r = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & -r\sin q \\ \mathrm{d}y & r\cos q \end{vmatrix} = \cos q\,\mathrm{d}x + \sin q\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}q = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos q & \mathrm{d}x \\ \sin q & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = -\frac{\sin q}{r}\mathrm{d}x + \frac{\cos q}{r}\mathrm{d}y,$$

故 $\frac{¶ r}{¶ x} = \cos q$，$\frac{¶ r}{¶ y} = \sin q$，$\frac{¶ q}{¶ x} = -\frac{\sin q}{r}$，$\frac{¶ q}{¶ y} = \frac{\cos q}{r}$.

【例 6.8】 设函数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$．证明：方程组 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在点 (x,y) 的某一邻域内能唯一地确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，并求反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 对 x,y 的偏导数．

证 (1) 将方程组改写为 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=x-x(u,v)=0\\G(x,y,u,v)=y-y(u,v)=0\end{cases}$，则有

$$\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix},$$

因为在 (u,v) 的某邻域内有 $\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，故由隐函数存在定理 6.3 知，方程组在 (u,v) 的某邻域内能唯一地确定连续且有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$．

(2) $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 各方程两边分别关于 x,y 求偏导数，得

$$\begin{cases}1-\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases},\quad \begin{cases}-\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ 1-\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases},$$

解上述方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y_v}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y_u}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x_v}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x_u}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

（此例告诉我们：反函数可当作隐函数!!）

习题 9-6

A 类

1．求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数．

*(1) $x^3+y^3-3axy=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\ln(x^2+y^2)=x^3y+\sin x$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$；

(3) $x^y=y^x\ (x\neq y)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(4) $x^2+y^2+z^2=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

2．求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数．

*(1) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ 在 $z=2$ 处的导数值；

(2) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

*(3) $\begin{cases} 2xu+y^2v=0 \\ yu+3xv=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(4) $\begin{cases} x=u+v \\ y=u^2+v^2 \\ z=u^3+v^3 \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

*3．设 $\varphi(u,v)$ 为可微函数．证明：由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$．

4．求解下列各题．

(1)设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

*(2)设 $xz-y\sin z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(3)设 $\mathrm{e}^z=xyz$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(4)设 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$．

5．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 有一阶连续偏导数．证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

6．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x^2+z\sin y,y^2+\cos z)=0$ 所确定，其中 f 有一阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$．

7．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$；$\mathrm{e}^x=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$．求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$．

解 把 y,z 当作 x 的函数。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1+\frac{dy}{dx}f_2+\frac{dz}{dx}f_3$$

方程组

$$\begin{cases} e^{xy}-xy=2 \\ e^{x}=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\,dt \end{cases}$$

两边对 x 求导得

$$\begin{cases} e^{xy}\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-y-x\dfrac{dy}{dx}=0 \\ e^{x}=\dfrac{\sin(x-z)}{x-z}\left(1-\dfrac{dz}{dx}\right) \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\left(e^{xy}-1\right)}{x\left(1-e^{xy}\right)}=-\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dz}{dx}=1-\dfrac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dx}=f_1-\frac{y}{x}f_2+\left(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right)f_3$$

B 类

1. $\begin{cases} u=f(ux^2,v+y^2) \\ v=g(2u-x,v^2y) \end{cases}$，其中 f，g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. 设 $u=\dfrac{x+z}{y+z}$，其中 $z=z(x,y)$ 为由方程 $ze^{z}=xe^{x}+ye^{y}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

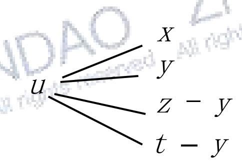
*3. 证明：由方程 $u=y+x\varphi(u)$ 所确定的函数 $u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

4. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解：要学会分析题目如下。

$$\begin{cases} g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{隐}} \begin{cases} z=z(y) \\ t=t(y) \end{cases}$$

代入第一个等式有 $u=f(x,y,z(y),t(y))$ 是二元函数。



$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=f_2+f_3\cdot\frac{dz}{dy}+f_4\cdot\frac{dt}{dy}$$

解方程组 $\begin{cases} g_1+g_2\cdot\dfrac{dz}{dy}+g_3\cdot\dfrac{dt}{dy}=0 \\ h_1\cdot\dfrac{dz}{dy}+h_2\cdot\dfrac{dt}{dy}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dy}=\dfrac{g_1h_2}{g_2h_1-g_1h_2} \\ \dfrac{dt}{dy}=\dfrac{g_1h_1}{g_1h_2-g_2h_1} \end{cases}$。因此，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2+\frac{g_1h_2f_3}{g_2h_1-g_1h_2}+\frac{g_1h_1f_4}{g_1h_2-g_2h_1}$$

*5．设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x，y 的函数，f 与 F 都有一阶连续偏导数．试证：
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}$．

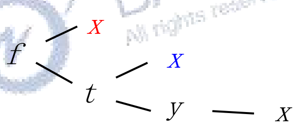
题意分析：

$$F(x,y,t)=0\xrightarrow{\text{隐函数}}t=t(x,y)$$
$$y=f(x,t),\ y=f(x,t(x,y))$$
$$y=f(x,t(x,y))\xrightarrow{\text{隐函数}}y=y(x)$$

求 $\dfrac{dy}{dx}$。

证 把 y 当作 x 的函数，恒等式 $y=f(x,t(x,y))$ 两边对 x 求导。

右边求 $\dfrac{d}{dx}f(x,t(x,y))$ 是复合函数求导 ，画函数图。



$$\frac{d}{dx}f(x,t(x,y))=f_x+f_t\times\frac{\partial t}{\partial x}+f_t\times\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=f_x+f_t\times\frac{\partial t}{\partial x}+f_t\times\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

求 $\dfrac{\partial t}{\partial x}$ 时 y 是常数，隐函数 $F(x,y,t)=0\xrightarrow{\text{隐函数}}t=t(x,y)$ 求导。

把 t 当作 x,y 的函数，恒等式 $F(x,y,t)=0$ 两边对 x 求导得

$$F_x+\frac{\partial t}{\partial x}F_t=0$$

解出

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_t}$$

求 $\dfrac{\partial t}{\partial y}$ 时 x 是常数，隐函数 $F(x,y,t)=0\xrightarrow{\text{隐函数}}t=t(x,y)$ 求导。

$$\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_t}$$

代入 $\dfrac{dy}{dx}=f_x+f_t\times\dfrac{\partial t}{\partial x}+f_t\times\dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$ 解出 $\dfrac{dy}{dx}$ 化简得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_x+\frac{\partial t}{\partial x}f_t}{1-\frac{\partial t}{\partial y}f_t}=\frac{f_x-\frac{F_x}{F_t}f_t}{1+\frac{F_y}{F_t}f_t}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}$$

6．函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$ 确定，证明：

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz\ .$$

7．求解下列各题．

*(1)　$x = u\cos v$，　$y = u\sin v$，　$z = uv$．求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

(2)　$x = u\cos\dfrac{v}{u}$，　$y = u\sin\dfrac{v}{u}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$．

第 7 节　方向导数与梯度

7.1　方向导数

根据偏导数的定义，$f_x(x_0,y_0)$ 只与直线段 $\{(x,y_0)\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$ 上的函数值有关，$f_x(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿 x 轴正方向的变化率。$f_y(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿 y 轴正方向的变化率。它们反映不了 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿其他方向的变化。我们还要考虑函数在 (x_0,y_0) 点处沿其他方向的变化率，这就是所谓的方向导数.

设点 $P_0(x_0,y_0)\in R^2$，$\boldsymbol{l}$ 是平面上的某向量，$\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{e_l}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}$.（见黑板图）

$z=f(x,y)$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的平均变化率

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

其中分子是函数的变化量，分母 t 是自变量在 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化量。所以，

$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

称为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数（如果极限存在），记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$. 如果此极限不存在，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向不可导。由上面定义可以看出，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$ 只与 $\boldsymbol{l}$ 的方向有关，与 $\boldsymbol{l}$ 的大小无关。

特别地，若 $\boldsymbol{e_l}=\boldsymbol{i}=\{1,0\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0};$$

若 $\boldsymbol{e_l}=\boldsymbol{j}=\{0,1\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}.$$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$ 分别表示 $z=f(x,y)$ 沿着 x 轴正向、y 轴正向的方向导数. 所以，方向导数是偏导数的推广.

【例 7.1】　设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4\neq 0,\\ 0, & x^2+y^4\neq 0\end{cases}$，求函数在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e_l}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数.

解　当 $\cos\theta\neq 0$ 时，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

当 $\cos\theta=0$ 时，$f(t\cos\theta,t\sin\theta)=0$，故 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=0$.

此例告诉我们，非初等函数直接用定义求方向导数。

从上例可看到，若 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；若 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 即函数在点 $(0,0)$ 处沿 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 与 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ 的方向导数的绝对值相等但符号相反. 一般地有，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=-\left.\dfrac{\partial f}{\partial(-l)}\right|_{P_0}$，$-l$ 为与 l 方向相反的向量.

方向导数的计算实际上仍是一元函数右导数的计算. 事实上，若令 $\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$，则

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

下面定理告诉我们，当函数可微时，可用偏导数来计算方向导数。

定理 7.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则对于任一单位向量 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\ .$$

证　因 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&\quad=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_x(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})\end{aligned}$$

取 $\Delta x=t\cos\alpha$，$\Delta y=t\cos\beta$，则

$$\begin{aligned}&f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)\\&\quad=f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2})\\&\quad=t[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta]+o(|t|)\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\ .$$

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_{P_0}$ 存在，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$.

当函数可微时，方向导数的计算公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是平面向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦。

思考题：

1. 试考虑从求函数 $\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 的导数出发，导出上述方向导数的计算公式.

【例 7.2】 设 $z=xe^{xy}$，求函数在点 $P_0(1,1)$ 处的沿方向 $l=\{1,1\}$ 的方向导数.

解 l 方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，因 $f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$，$f_y(x,y)=x^2e^{xy}$；$f_x(1,1)=2e$，$f_y(1,1)=e$，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=2e\times\frac{1}{\sqrt{2}}+e\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}e.$$

方向导数的概念还可推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．设 $P_0(x_{1_0},x_{2_0},\cdots,x_{n_0})\in R^n$，$\boldsymbol{e}_l$ 是 R^n 中某单位向量，$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n\}$，若函数在 P_0 处的极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_{1_0}+t\cos\theta_1,x_{2_0}+t\cos\theta_2,\cdots,x_{n_0}+t\cos\theta_n)-f(x_{1_0},x_{2_0},\cdots,x_{n_0})}{t}$$

存在，称此极限为 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 处沿方向 l 的方向导数.

若函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 P_0 处可微，$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_n.$$

如 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

若 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处是可微的，则方向导数的计算公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\cdot\cos\gamma$$

$$=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma.$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是向量 l 的方向余弦。（平面是空间的特例：$f_z(x_0,y_0)=\cos\gamma=0$）

【例 7.3】 设 $u=x^2+y^2+z^2$，求它在 $P_0(1,0,-1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,2,3\}$ 的方向导数.

解 求出 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}},$$

则 $\boldsymbol{e_l}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. 显然函数 u 是可微的，$u_x=2x$，$u_y=2y$，$u_z=2z$，$u_x(P_0)=2$，$u_y(P_0)=0$，$u_z(P_0)=-2$，故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+(-2)\times\frac{3}{\sqrt{14}}=-\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

注意，利用偏导数求方向导数的计算公式仅在函数在 P_0 点可微的条件下成立. 但由方向导数存在并不能保证函数在该点处可微，因此，若函数在该点不可微时，不能用上述公式，只能用方向导数的定义来讨论.

如由例 7.1 知函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 处沿所有方向的方向导数均存在，而由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在（为什么？（$y=k\sqrt{x}$）)，故函数在 $(0,0)$ 点不连续，因此在点 $(0,0)$ 处函数不可微.

思考题：

2．若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 不存在，则方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 也不存在，对吗？（不对。例：$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases}$）

3．若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，且 $\boldsymbol{e_l}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$，则有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$. 对吗？（不对。$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不一定可微。）

4．若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数都存在，能否推出函数在该点处连续？反之，若函数在该点处连续，能否得到函数在该点处沿任意方向的方向导数存在？（都不能。）

7.2　梯度

设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿 $\vec{l}=|\vec{l}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$$
$$=\{f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$
$$=\mathbf{grad}\,f(P_0)\cdot\vec{e}_l$$

其中

$$\mathbf{grad}\,f(P_0)=\{f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)\}.$$

是一个固定的常向量。

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=|\mathbf{grad}\,f(P_0)|\cos\theta=\begin{cases}|\mathbf{grad}\,f(P_0)|\text{(最大)}, & \vec{l}\text{与}\mathbf{grad}\,f(P_0)\text{同方向}\\ 0, & \vec{l}\perp\mathbf{grad}\,f(P_0)\\ -|\mathbf{grad}\,f(P_0)|\text{(最小)}, & \vec{l}\text{与}\mathbf{grad}\,f(P_0)\text{反方向}\end{cases}$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{grad}\,f(P_0)$ 与向量 $\vec{l}$ 间的夹角。

定义 7.2’　设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可偏导，则称向量 $f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度．记作 $\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)$ 或 $\mathbf{grad}\,f(P_0)$，或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$，或 $\nabla f(P_0)$（∇ 是 $Nabla$ 算符，也称这向量微分算子）．即

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}=\nabla f(x_0,y_0,z_0)$$

对于在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可偏导的二元函数 $z=f(x,y)$（二元函数可以看作三元函数），则

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}+0\vec{k}.$$

设 $\vec{e}_l=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+0\vec{k}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l\quad(=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l)$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数等于该点处的梯度与单位向量的数量积．

【例 7.4】 求 $u=2x^3y-3y^2z$ 在点 $P(1,2,-1)$ 沿指向点 $Q(3,-1,5)$ 方向的方向导数，并求出方向导数的最大值及取得最大值的方向.

解 因为函数可微，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3-6yz$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-3y^2$，有

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=12$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=14$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-12$，又

$$\boldsymbol{l}=\overrightarrow{PQ}=\{2,-3,6\}，\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{7}\{2,-3,6\}，故$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=\mathbf{grad}\,u(P)\cdot\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{7}(2\times 12-3\times 14-6\times 12)=-\frac{90}{7}，$$

在该点处方向导数取得最大值的方向为：$\mathbf{grad}\,u(P)=\{12,14,-12\}$.

方向导数的最大值为 $|\mathbf{grad}\,u(P)|=\sqrt{12^2+14^2+(-12)^2}=22$.

根据定义，容易得到梯度的运算法则：（c_1,c_2 为常数，函数 u,v,f 可微）

(1) $\mathbf{grad}\,(c_1u+c_2v)=c_1\,\mathbf{grad}\,u+c_2\,\mathbf{grad}\,v$；

(2) $\mathbf{grad}\,(u\cdot v)=u\,\mathbf{grad}\,v+v\,\mathbf{grad}\,u$；

(3) $\mathbf{grad}\,(\frac{u}{v})=\frac{v\,\mathbf{grad}\,u-u\,\mathbf{grad}\,v}{v^2}$，$v\neq 0$；

(4) $\mathbf{grad}\,f(u)=f'(u)\,\mathbf{grad}\,u$.

7.3　梯度场、等高线、等量面

1　场

称物理量在空间或部分空间上的分布为场．一个场，如果分布的物理量是数量，则该场为数量场；如果分布的物理量是向量，则该场为向量场．例如，温度场，密度场，电位场等就是数量场；而力场，速度场，电场强度场等就是向量场．

如果空间区域Ω（或平面区域）上有一个数量场，则每一点$M \in \Omega$都有一个数量$f(M)$，$f(M)$是Ω上定义的函数；反过来，如果$f(M)$是Ω上定义的函数，则$f(M)$也是Ω上的一个数量场。因此，Ω上的一个数量场就是Ω上定义的一个函数。

如果空间区域Ω（或平面区域）上有一个向量场，则每一点$M \in \Omega$都有一个向量$\boldsymbol{F}(M)$，$\boldsymbol{F}(M)$是Ω上定义的向量函数；反过来，如果$\boldsymbol{F}(M)$是Ω上定义的向量函数，则$\boldsymbol{F}(M)$也是Ω上的一个向量场。因此，Ω上的一个向量场就是Ω上定义的一个向量函数。$\boldsymbol{F}(M)$的坐标一般也是$M(x,y,z)$的函数，即$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，其中$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$是某三个函数。

2　等高线与等量面

如果$z=f(x,y)\,((x,y)\in D)$是 D 上的数量场，令$z=c$（常数），得方程式$f(x,y)=c$．它确定了一个点集，即平面$z=c$与曲面$z=f(x,y)$相交而构成的点集，是平面$z=c$上的一条曲线，将它投影到xOy平面上得到一条曲线$\begin{cases} f(x,y)=c \\ z=0 \end{cases}$，因为该曲线上的任一点到$xOy$面的高度是相等的，称其为数量场$z=f(x,y)$的等高线．

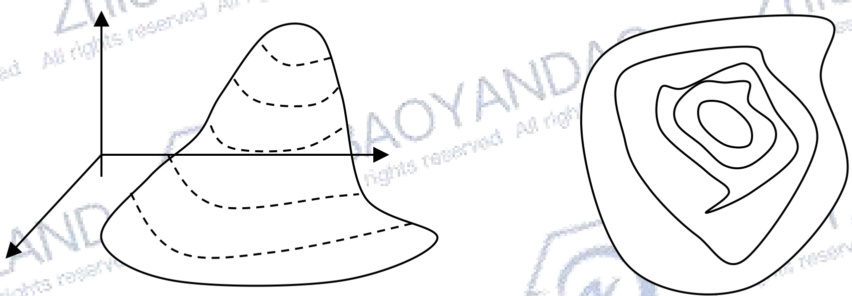


图　7.1

让c在函数的值域中变，我们就得到一族等高线．

同理，若对于三元函数（数量场）$u=f(x,y,z)$，令$u=c$，得等式$f(x,y,z)=c$．它表示的是三维空间中的曲面，称之为函数f的等量面．（如$u=x^2+y^2+z^2$的等量面方程是$x^2+y^2+z^2=c$，它表示的是以$(0,0,0)$为中心，$\sqrt{c}$为半径的球面.）

在同一等量面上具有相同的物理量．如温度场中的等量面就是等温面，电位场中的等量面就是等位面．

3　梯度场

一个由数量值函数$f(M)$产生的向量函数$\mathbf{grad}\,f(M)$称为数量场$f(M)$的梯度场．反之，当一个向量场$\boldsymbol{F}(M)$是某数值函数$f(M)$的梯度场，即$\boldsymbol{F}(M)=\mathbf{grad}\,f(M)$，称向量场$\boldsymbol{F}(M)$为有势场（势场）．

【例 7.5】　设点电荷q位于坐标原点$O(0,0,0)$处，在其周围产生电场，且任一点$M(x,y,z)$的电位与电场强度分别为$u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$，$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中$\varepsilon$为介电系数，$\boldsymbol{r}$为点$M$的向径．求电位函数的梯度．

解　$\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\left(\frac{q}{4pe r}\right) = \frac{q}{4pe}\mathbf{grad}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$= \frac{q}{4pe}\frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}) = -\frac{q}{4pe}\times\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{E}\ .$$

因此，电位梯度的方向与电场强度的方向相反，即沿向径的负方向电位的增长最快.

习题 9－7

A 类

1．求下列函数在指定点处沿指定方向的方向导数．

(1) $u=x^4y^5$ 在点 $A(1,1)$ 处沿方向 $l=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$：

（i）当 $\alpha=\pi$ 时；　*(ii) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时；　(iii) 当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$ 时；

*(2) $z=e^{x+2y}$ 在点 $O(0,0)$ 处沿方向 $l=\{2,3\}$；

(3) $z=x^2+y^2+xy$ 在点 $A(1,1)$ 处沿着从点 $(1,1)$ 到点 $(4,5)$ 的方向；

(4) $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $A(1,2)$ 处沿着与 x 轴成 $135°$ 方向；

*(5) $u=3x^2+z^2-2yz+2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 得沿方向 $l=\{6,3,2\}$；

(6) $u=x\arctan\dfrac{y}{z}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 得沿方向 $l=\{1,1,-1\}$．

解 （3） $z=x^2+y^2+xy$ 到处可微。$\vec{l}=\{3,4\},\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\beta=\dfrac{4}{5}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+x,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=3,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=3$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cos\beta=\frac{21}{5}$$

2．求函数在指定点处的梯度的大小和方向．

*(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $A(1,2)$ 及点 $B(3,0)$；

*(2) $z=x^2y+xy^2$ 在点 $A(2,5)$ 处；

(3) $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $M_1(1,1,1)$ 及点 $M_2(2,1,1)$ 处．

3．试求函数 $z=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})$ 在点 $A(\dfrac{a}{\sqrt2},\dfrac{b}{\sqrt2})$ 处，沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法线方向上的方向导数．

*4．求 $u=x+y+z$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处外法线方向的方向导数．

5．求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 处，沿曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 在点 $t=1$ 处的切线的指向参数 t 增大的方向的方向导数．

6．求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $M_1(1,1,0)$ 与 $M_2(0,1,1)$ 处的梯度间的夹角．

7．当 a，b，c 满足什么条件时，函数 $u=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处的方向导数的最大值在 z 轴的正向取到．

8．在平面上的任一点 (x,y) 处的温度函数为 $T=\dfrac{100}{x^2+y^2+1}$，讨论：

(1) 温度在点 $A(3,2)$ 处增加最大的方向；温度增加最大的方向是否指向原点？

(2) 温度在点 $A(3,2)$ 处减少最快的方向；

(3) 在点 $A(3,2)$ 处求一个方向，使得在这个方向上，温度不增不减．

B 类

*1．求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿与该点的等高线垂直方向的方向导数．

*2．设 $z=x^2+y^2$．证明：如果 $A(a,b)$ 是等高线 $x^2+y^2=9$ 上任一点，则在 $A(a,b)$ 点的梯度必垂直于等高线在此点处的切线．

*3．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x)^2+x^8}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在点 $O(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数存在，但函数在点 $O(0,0)$ 处不连续．

4．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2\neq0,\\ 0, & x^6+y^2=0\end{cases}$，在 $O(0,0)$ 点处的方向导数是否存在，是否可微？

5．设 $f(x,y)$ 可微．已知四个点 $A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(1,7)$，$D(6,15)$．若 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数等于 3，沿 $\overrightarrow{AC}$ 方向的方向导数等于 26，求 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 $\overrightarrow{AD}$ 方向的方向导数．

解 $\vec{l}=\overrightarrow{AD}=\{5,12\},\cos\alpha=\dfrac{5}{13},\cos\beta=\dfrac{12}{13}$。

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{l}}=f_x(A)\cos\alpha+f_y(A)\cos\beta=\frac{5}{13}f_x(A)+\frac{12}{13}f_y(A)$$

$\overrightarrow{AB}=\{2,0\},\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\{1,0\};\overrightarrow{AC}=\{0,4\},\vec{e}_{\overrightarrow{AC}}=\{0,1\}$，由已知条件

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \overrightarrow{AB}}=f_x(A)=3,\frac{\partial f(A)}{\partial \overrightarrow{AC}}=f_y(A)=26$$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{l}}=\frac{5}{13}f_x(A)+\frac{12}{13}f_y(A)=\frac{15}{13}+\frac{312}{13}=\frac{327}{13}$$

第 8 节　多元函数微分学的几何应用（考点）

8.1　空间曲线的切线与法平面

在空间解析几何中，空间曲线一般用两种方式来表示，参数式方程和一般式方程．下面我们分别探求这两种情形时曲线的切线及法平面方程．

1　参数式方程表示的曲线的切线和法平面

设空间曲线 Γ 的方程为：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)\ ,\quad a \le t \le b\ . \tag{8.1}$$

并假定(8.1)式的三个函数都在 $[a,b]$ 上可导．若记 $\boldsymbol{r} = \{x,y,z\}$，则曲线的参数方程可写为：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{8.2}$$

当 $x(t),y(t),z(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续时，曲线 Γ 是一条连续曲线．

给定 $t_0 \in [a,b]$ 下面设 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 存在且不同时为零。

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，$P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ 为曲线 Γ 上对应于参量 t_0，$t_0+\Delta t$ 的两个点（$x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0, z(t_0)=z_0$；$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0), \Delta y = y(t_0+\Delta t) - y(t_0), \Delta z = z(t_0+\Delta t) - z(t_0)$）。

曲线上过 P_0,P_1 割线的方向向量为：

$$\vec{s}_{割} = \frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{P_0P_1} = \left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$$

割线方程

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \tag{8.3}$$

当点 P_1 沿曲线 Γ 趋近于 P_0 时，即当 $\Delta t \to 0$ 时，割线的极限位置是曲线在 P_0 处的切线．故当 $\Delta t \to 0$ 时割线方向向量的极限向量

$$\boldsymbol{T}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{P_0P_1} = \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right\} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$$

是 Γ 在 P_0 点切线的方向向量，称为曲线 Γ 在 P_0 处的切向量，故曲线 Γ 在 P_0 处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{8.4}$$

若 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 中有个别为零，则按空间解析几何中对称式方程的说明来理解．

过点 P_0 且与其切线垂直的平面（过点 P_0 且与 P_0 处的切线垂直的所有直线都在此平面上），称为曲线 Γ 在点 P_0 处的法平面．法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0\ . \tag{8.5}$$

总结：曲线 $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$ 在 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 点的

（1）切向量：$\boldsymbol{T}(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$；

（2）切线：$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$；

（3）法平面：

$$x'(t_0)(x-x(t_0)) + y'(t_0)(y-y(t_0)) + z'(t_0)(z-z(t_0)) = 0\ 。$$

关键是求出切向量。

【例 8.1】 求曲线 $x=t^2+t$，$y=t^2-t$，$z=t^2$ 在点 $(6,2,4)$ 处的切线和法平面.

解 因为 $x'(t)=2t+1$，$y'(t)=2t-1$，$z'(t)=2t$，又由方程知，在点 $(6,2,4)$ 处，对应于 $t=2$，所以切线的方向向量为 $\boldsymbol{T}=\{5,3,4\}$. 故曲线在 $(6,2,4)$ 处的切线方程为：

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{4},$$

法平面方程为：

$$5(x-6)+3(y-2)+4(z-4)=0，即 5x+3y+4z=52.$$

【例 8.2】 若曲线 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 在任一点的法平面都过原点，试证明：此曲线必在以原点为球心的球面上.

证 任取曲线上的点 $P(x(t),y(t),z(t))$，则在点 P 处的法平面方程为

$$x'(t)(X-x(t))+y'(t)(Y-y(t))+z'(t)(Z-z(t))=0.$$

因为原点在法平面上，故有 $x'(t)x(t)+y'(t)y(t)+z'(t)z(t)=0$，此方程等价于方程 $[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)]'_t=0$，故有

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=c,$$

（必 $c\geq 0$，因为 $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)$ 是存在的。）

上述方程表示以原点为球心，$\sqrt{c}$ 为半径的球面，而曲线上的任一点 $P(x(t),y(t),z(t))$ 满足此方程，故曲线在此球面上.

若空间曲线 Γ 的方程为：$\Gamma: y=y(x)$，$z=z(x)$，$a\leq x\leq b$，取 x 为参数，则曲线方程为：$x=x$，$y=y(x)$，$z=z(x)$，$a\leq x\leq b$. 若 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则曲线在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线向量为：$\boldsymbol{T}=\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$，故切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

法平面方程为：$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$.

（如果 $\Gamma: x=x(y), z=z(y)$ 或 $\Gamma: x=x(z), y=y(z)$ 呢？）

【例 8.3】 求曲线 $y=x, z=x^2$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 取 x 为参数，则曲线的参数方程为：$x=x, y=x, z=x^2$. 在 P_0 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,1,2x\}\big|_{P_0}=\{1,1,2\}$，故曲线在 P_0 处的切线方程为：

$$x-1=y-1=\frac{z-1}{2}.$$

法平面方程为：$x-1+y-1+2(z-1)=0$，即 $x+y+2z=4$.

2 一般方程形式表示的曲线的切线和法平面方程

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内，F，G 连续可微，在点 P_0 的某邻域内能惟一地确定隐函数组 $y=y(x)$，$z=z(x)$。则其参数方程为 $\begin{cases}x=x\\y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，因而在 P_0 点处的切向量为 $\vec{T}=\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$，切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

法平面为：$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$。其中，$y'(x_0),z'(x_0)$ 由隐函数的导数即解方程组

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0,z_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0)=0 \\ G_x(x_0,y_0,z_0)+G_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0)+G_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0)=0 \end{cases}$$

得到。

【例 8.4】 求曲线$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$上点$P_0(1,-1,2)$处的切线和法平面方程.

解 把y,z看作x的函数，$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$两边对$x$求导有

$$\begin{cases} 4x+6yy'(x)+2zz'(x)=0 \\ 2zz'(x)=6x+2yy'(x) \end{cases}$$

把$P_0(1,-1,2)$代入得

$$\begin{cases} 4-6y'(1)+4z'(1)=0 \\ 4z'(1)=6-2y'(1) \end{cases}$$

解得

$$y'(1)=\frac{15}{12}, z'(1)=\frac{7}{8}$$

切向量：$\vec{T}=8\left(1,\frac{15}{12},\frac{7}{8}\right)=\{8,10,7\}$；切线：$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$；法平面：$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$

思考题：

1．若曲线上任一点的切线向量为$T=\{a,0,0\}$（a为常数），则此曲线是一条什么曲线？若其任一点的切线向量为$T=\{a,b,0\}$（a,b为常数）呢？

（$\begin{cases} x=at+c \\ y=c_1 \\ z=c_2 \end{cases}$，平行于$x$轴的直线。$\begin{cases} x=at+c_1 \\ y=bt+c_2 \\ z=c \end{cases}$，$z=c$面上的一条直线。）

8.2　曲面的切平面与法线

设 S 为空间的一张曲面，其方程为 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 S 上一点．设 $\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\}\neq\vec{0}$．

在曲面上任意作一条过 P_0 的光滑曲线 Γ（图 8.1），设其参数方程为 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 且 $x_0=x(t_0),y_0=y(t_0),z_0=z(t_0)$。则有 $F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$．此恒等式两边关于 t 求导，并令 $t=t_0$，有

$$F_x(P_0)\cdot x'(t_0)+F_y(P_0)\cdot y'(t_0)+F_z(P_0)\cdot z'(t_0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{n}=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\}\\ \vec{T}(t_0)=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}\end{array}\right\}\text{则有 } \boldsymbol{n}\cdot\vec{T}(t_0)=0\text{，即．}\boldsymbol{n}\perp\vec{T}(t_0)$$

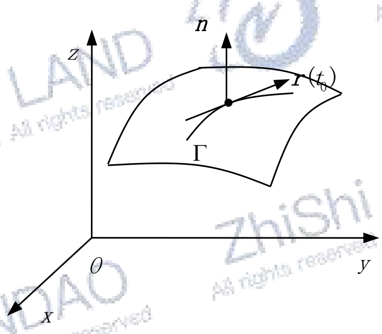


图 8.1

其中 $\boldsymbol{n}$ 是一个固定的常向量，而 $\vec{T}(t_0)$ 是 Γ 在 P_0 点的切向量也即 S 在 P_0 点的切向量。由于 Γ 是任意的，$\vec{T}(t_0)$ 是任意的。

结论： S 在 P_0 点的任意切向量都垂直于固定的常向量 $\boldsymbol{n}$ 。

因此： $\boldsymbol{n}=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\}$ 是 S 在 P_0 点的切平面的法向量。

曲面在点 P_0 处的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

过点 P_0 且以法向量 $\boldsymbol{n}$ 为方向向量的直线称为曲面在 P_0 处的法线，其方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$$

总结： S：$F(x,y,z)=0$ 在 P_0 点的

（1）法向量：$\boldsymbol{n}=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\}$；

（2）切平面：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$；

（3）法线：$\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$。

关键是求出法向量。

当 $F(x,y,z)$ 看作数量场时，$\boldsymbol{n}(P_1)=\left\{F_x(P_1),F_y(P_1),F_z(P_1)\right\}$ 既是 $F(x,y,z)$ 在 P_1 点的梯度同时也是其过 P_1 点的等量面的法向量。因为梯度方向是数量场增加最快的方向，因此 $F(x,y,z)$ 在 P_1 点沿等量面的法向量方向增加最快.

【例 8.5】　求曲面 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1$ 在点 $P_0(1,2,3)$ 处的切平面和法线.

解　设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}-1$，则

$$\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\Big|_{P_0}=\left\{\frac{2x}{3},\frac{y}{6},\frac{2z}{27}\right\}\Big|_{P_0}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9}\right\},$$

故所求切平面方程为：$\frac{2}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y-2)+\frac{2}{9}(z-3)=0$，即

$$6x+3y+2z=18\,.$$

法线方程为：

$$\frac{x-1}{\frac{2}{3}}=\frac{y-2}{\frac{1}{3}}=\frac{z-3}{\frac{2}{9}}，即\quad\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}.$$

若曲面方程为 $z=f(x,y)$，且 f 可微．令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则有 $F_x=f_x$，$F_y=f_y$，$F_z=-1$。故曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left\{f_x(P_0),f_y(P_0),-1\right\}$$

切平面

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0\,,$$

法线：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

如果令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则得向上的法向量 $\left\{-f_x(P_0),-f_y(P_0),1\right\}$，而 $\left\{f_x(P_0),f_y(P_0),-1\right\}$ 是向下的法向量。

【例 8.6】　求曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $P_0(1,1,\frac{p}{4})$ 处的切平面和法线方程.

解　设 $F(x,y,z)=\arctan\frac{y}{x}-z$，　$F_x=f_x=\frac{-y}{x^2+y^2}$，　$F_y=f_y=\frac{x}{x^2+y^2}$，$F_z=-1$，

故曲面在 $P_0(1,1,\frac{p}{4})$ 的法向量为　$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right\}$，

切平面方程为：$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-(z-\frac{p}{4})=0$，即　$x-y+2z=\frac{p}{2}$；

法线方程为：　$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{p}{4}}{2}$。

我们知道，曲面$F(x,y,z)=0$上点P_0处的切平面方程为：

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0\ ,$$

曲面$G(x,y,z)=0$上点P_0处的切平面方程为：

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0\ ,$$

从而若曲线G的方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则G上点$P_0$处的切线实际上是上面两个切平面的交线，即

$$\begin{cases}F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0\\G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0\end{cases}\tag{8.7}$$

请与(8.6)的结果进行比较，并以此方法重解例8.4.

【例 **8.4**】 求曲线G：$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\z^2=3x^2+y^2\end{cases}$上点$P_0(1,-1,2)$处的切线和法平面方程.

解 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9, G(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$ 。

$F_x(P_0)=4x\big|_{P_0}=4, F_y(P_0)=6y\big|_{P_0}=-6, F_z(P_0)=2z\big|_{P_0}=4$

$G_x(P_0)=6x\big|_{P_0}=6, G_y(P_0)=2y\big|_{P_0}=-2, G_z(P_0)=-2z\big|_{P_0}=-4$

切线：$\begin{cases}4(x-1)-6(y+1)+4(z-2)=0\\6(x-1)-2(y+1)-4(z-2)=0\end{cases}$；切向量：

$$\vec{n}=\frac{1}{4}\{4,-6,4\}\times\{6,-2,-4\}=\frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix}-6&4\\-2&-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&4\\-4&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&-6\\6&-2\end{vmatrix}\right\}=\{8,10,7\}$$

法平面：$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$ 。

下面简单介绍由参数方程形式表示的曲面的切平面的求法.

设曲面S 的方程为：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，$(u,v)\in D$（D 为 xOy 平面内的区域）．$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点，$x_0=x(u_0,v_0)$，$y_0=y(u_0,v_0)$，$z_0=z(u_0,v_0)$，x,y,z 在包含 P_0 点的某邻域内有连续的偏导数。

假设由 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，代入 $z=z(u,v)$ 得 $S:z=z(u(x,y),v(x,y)),F(x,y,z)=z(u(x,y),v(x,y))-z=0$。

$F_x=z_x(x,y)=z_uu_x+z_vv_x$，$F_y=z_y(x,y)=z_uu_y+z_vv_y,F_z=-1$。

法向量：$\left\{(z_uu_x)\big|_{(u_0,v_0)}+(z_vv_x)\big|_{(u_0,v_0)},(z_uu_y)\big|_{(u_0,v_0)}+(z_vv_y)\big|_{(u_0,v_0)},-1\right\}$。其中 $u_x\big|_{(u_0,v_0)},v_x\big|_{(u_0,v_0)},u_y\big|_{(u_0,v_0)},v_y\big|_{(u_0,v_0)}$ 由方程组

$$\begin{cases}1=x_u(u_0,v_0)u_x\big|_{(u_0,v_0)}+x_v(u_0,v_0)v_x\big|_{(u_0,v_0)}\\0=y_u(u_0,v_0)u_x\big|_{(u_0,v_0)}+y_v(u_0,v_0)v_x\big|_{(u_0,v_0)}\end{cases}\quad\begin{cases}0=x_u(u_0,v_0)u_y\big|_{(u_0,v_0)}+x_v(u_0,v_0)v_y\big|_{(u_0,v_0)}\\1=y_u(u_0,v_0)u_y\big|_{(u_0,v_0)}+y_v(u_0,v_0)v_y\big|_{(u_0,v_0)}\end{cases}$$

解出。有了法向量就很容易写出切平面和法线的方程。

【例 8.7】 设曲面S 的方程为 $x=u^2+v^2$，$y=u^2-v^2$，$z=2uv$，求在参数 $u=1$，$v=1$ 处，$x=2,y=0,z=2$，曲面的切平面方程及法线方程.

解 $\begin{cases}x=u^2+v^2\\y=u^2-v^2\end{cases}$

易得 $x_u(1,1)=2u\big|_{(1,1)}=2$，$x_v(1,1)=2v\big|_{(1,1)}=2$，$y_u(1,1)=2u\big|_{(1,1)}=2$，$y_v(1,1)=-2v\big|_{(1,1)}=-2$，$z_u(1,1)=2v\big|_{(1,1)}=2$，$z_v(1,1)=2u\big|_{(1,1)}=2$．

解方程组

$$\begin{cases}1=2u_x\big|_{(1,1)}+2v_x\big|_{(1,1)}\\0=2u_x\big|_{(1,1)}-2v_x\big|_{(1,1)}\end{cases}\quad\begin{cases}0=2u_y\big|_{(1,1)}+2v_y\big|_{(1,1)}\\1=2u_y\big|_{(1,1)}-2v_y\big|_{(1,1)}\end{cases}$$

得 $u_x\big|_{(1,1)}=v_x\big|_{(1,1)}=u_y\big|_{(1,1)}=\frac{1}{4},v_y\big|_{(1,1)}=-\frac{1}{4}$。法向量：$\{1,0,-1\}$；切平面：$x-2-(z-2)=0$ 即 $x=z$；法线：$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{-1}$。

习题 9-8

A 类

1．求下列曲线在指定点处的切线与法平面.

(1) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\dfrac{t}{2}$；在点 $M\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处；

*(2) $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$；当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时；

*(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$；在点 $M(1,1,1)$ 处；

(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$；在点 $M(a,a,\sqrt{2}a)$ 处；$(a>0)$；

*(5) $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$；在点 $M(1,1,3)$ 处.

2．求下列曲面在指定点处的切平面和法线.

*(1) $e^z-z+xy=3$，在点 $M(2,1,0)$ 处；

(2) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$，在点 $M(2,2,1)$ 处；

(3) $z=x^2+y^2$，在点 $M(1,2,5)$；

*(4) $z=ye^{\frac{x}{y}}$，在点 $M(1,1,e)$ 处；

(5) $z=y+\ln\dfrac{x}{z}$，在点 $M(1,1,1)$ 处.

3．求曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上一点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 $x+2y+z=4$ 的法向量：$\vec{n}=\{1,2,1\}$。曲线 (t,t^2,t^3) 点的切向量 $\vec{T}=\{1,2t,3t^2\}$。

切线平行于平面 $\Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{T}$。让 $\vec{n}\cdot\vec{T}=1+4t+3t^2=0$ 解得 $t_1=-\dfrac{1}{3}, t_2=-1$。所要求的点是 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$

或 $(-1,1,-1)$。

4．证明曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 上任一点处的切线与 Oz 轴成定角.

5．求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 上的一点，使该点处的切平面平行于平面 $2x-3y+2z=1$.

*6．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上某点处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，求该点坐标.

7．求由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

解 旋转面为 $3x^2+3z^2+2y^2=12$。令 $F(x,y,z)=3x^2+3z^2+2y^2-12$。外侧即 $F(x,y,z)$ 增加的那侧即 $F(x,y,z)$ 的梯度那侧。

$F_x = 6x, F_y = 4y, F_z = 6z$，$F_x(P) = 0, F_y(P) = 4\sqrt{3}, F_z(P) = 6\sqrt{2}$。

$\vec{n} = \{0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\}, |\vec{n}| = \sqrt{48+72} = 2\sqrt{30}$。

所要求的单位法向量：$\vec{e}_{\vec{n}} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \left\{0, \frac{1}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{15}\right\}$。

8．证明：曲面 $xyz = a^3\ (a > 0)$ 上任一点的切平面与三坐标面所围成的四面体的体积为常数.

*9．证明：锥面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 的所有切平面过锥面的顶点.

B 类

1．求曲面 $x = ue^v$，$y = ve^u$，$z = u + v$ 在点 $(u_0, v_0) = (0,0)$ 处的切平面.

2．设直线 $l:\begin{cases}x + y + b = 0\\ x + ay - z - 3 = 0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 相切于点 $P(1,-2,5)$，求 a，b 的值.

解 令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$。$F_x(P) = 2, F_y(P) = -4, F_z(P) = -1$。曲面于点 $P(1,-2,5)$ 的法向量：

$\vec{n} = \{2,-4,-1\}$。

设所给切平面 π 为 $x + ay - z - 3 + \lambda(x + y + b) = 0$ 即 $(1+\lambda)x + (a+\lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0$。其法向量

$\vec{n}_\lambda = \{1+\lambda, a+\lambda, -1\}$。

由 $\vec{n} /\!/ \vec{n}_\lambda$ 有 $1 + \lambda = 2, a + \lambda = -4$，解得 $\lambda = 1, a = -5$。

切平面 π 为 $2x - 4y - z - 3 + b = 0$。把 $P(1,-2,5)$ 代入切平面得 $2 + 8 - 5 - 3 + b = 0$，$b = -2$。

另解 令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$。$F_x(P) = 2, F_y(P) = -4, F_z(P) = -1$。曲面于点 $P(1,-2,5)$ 的法向量：

$\vec{n} = \{2,-4,-1\}$。

$l:\begin{cases}x + y + b = 0\\ x + ay - z - 3 = 0\end{cases}$ 的方向向量：

$$\vec{s} = \{1,1,0\} \times \{1,a,-1\} = \left\{\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}\right\} = \{-1, 1, a-1\}$$

由条件有 $\vec{n} \perp \vec{s}$。解 $\vec{n} \cdot \vec{s} = -2 - 4 + 1 - a = 0$ 得 $a = -5$。

让 $z = 0$ 解 $\begin{cases}x + y + b = 0\\ x - 5y - z - 3 = 0\end{cases}$ 得 $M\left(\frac{3-5b}{6}, -\frac{3+b}{6}, 0\right)$。$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{3+5b}{6}, \frac{b-9}{6}, 5\right)$。

由 $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}$ 解 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{3+5b}{3} - \frac{2b-18}{3} - 5 = 0$ 得 $b = -2$。

*3．求曲面$x^2+y^2+z^2=x$的切平面，使它垂直于平面$x-y-z=2$和$x-y-\frac{1}{2}z=2$．

*4．证明：曲线$x=ae^t\cos t$，$y=ae^t\sin t$，$z=ae^t$与锥面$x^2+y^2=z^2$的各母线相交的角度相同．

*5．设$f(u,v)$为处处可微函数．试证明曲面$f(ax-bz,ay-cz)=0$上任一点的切平面都与一定直线平行．并指出此曲面的特征．

6．求曲面$x=(2-\sin j)\cos q$，$y=(2-\sin j)\sin q$，$z=\cos j$在点$M(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$处的切平面和法线．

第9节　二元函数的泰勒公式

设 $f(x,y)$ 按需要连续可导。固定 k,h，记 $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$。

$\varphi(t)$ 的麦克劳林公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^{m}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

让 $t=1$ 代入

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta)\qquad(*)$$

其中 $0<\theta<1$.

为了写好上面等式（*），要求出 $\varphi^{(m)}(t)\quad(m=1,2,\cdots,n+1)$

用数学归纳法可以证明：

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0+th,y_0+tk)\quad(m=1,2,\cdots,n+1)。$$

代入（*）得到，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

用多项式 $f(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0,y_0)$ 近似代替（逼近）$f(x_0+h,y_0+k)$ 误差是拉格朗日余项 $\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$。

注意：$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0,y_0)$ 是没有意思的，要展开成

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^{i}\left.\frac{\partial^{m}f}{\partial x^{i}\partial y^{m-i}}\right|_{(x_0,y_0)}h^{i}k^{m-i}。$$

下面我们用数学归纳法证明：

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x_0+th,y_0+tk)。$$

（1）当 $m=1$ 时。由复合函数的求导法则，可求得

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}f(x_0+th,y_0+tk)=\left.\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(x_0+th,y_0+tk)}$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+th,y_0+tk)$$

（2）归纳地设公式对于 m 时是对的。当 $m+1$ 时。记

$$g(x,y)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x,y)$$

$$\psi(t)=g(x_0+th,y_0+tk)$$

由（*），

$$\varphi^{(m+1)}(t)=[\varphi^{(m)}(t)]'=\psi'(t)=\frac{d}{dt}g(x_0+th,y_0+tk)=\left(h\frac{\partial g}{\partial x}+k\frac{\partial g}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0+th,y_0+tk)}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x_0+th,y_0+tk)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+th,y_0+tk)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(x_0+th,y_0+tk)$$

$\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+th,y_0+tk)\quad(m=1,2,\cdots,n+1)$ 公式也是对的。

我们有二元函数的泰勒公式：

定理 9.1(二元函数的泰勒公式)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $(n+1)$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内的任一点 (x_0+h,y_0+k)，有

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中 $0<\theta<1$，$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^{m-i}}\Big|_{P_0}h^i k^{m-i}$，此式称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处带拉格朗日型余项的泰勒公式.

若 $n=0$，则得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$
$$=f_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h+f_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k\,,\tag{9.3}$$

称之为二元函数的中值公式.

特别地，若令 $x_0=0,y_0=0$，便得到二元函数的麦克劳林公式：

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(0,0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x,\theta y)\qquad 0<\theta<1.\tag{9.4}$$

【例 9.1】　设 $f(x,y)=x^y$，在点 $(1,4)$ 附近用二次多项式逼近 $f(x,y)$，并用它计算 $(1.08)^{3.96}$ 的近似值.

解　由题意，用 $f(x,y)$ 在 $(1,4)$ 处的二阶泰勒公式去掉余项即可得到所要求的二次多项式.

$$f(1+h,4+k)=f(1,4)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(1,4)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1,4)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h,4+\theta k)$$

让

$$\approx f(1,4)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(1,4)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1,4)$$

$$=f(1,4)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(1,4)}+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk\right)\Big|_{(1,4)}$$

$1+h=x, 4+k=y$ 得

$$f(x,y) \approx f(1,4)+f_x(1,4)(x-1)+f_y(1,4)(y-4)+\frac{1}{2}f_{xx}(1,4)(x-1)^2$$
$$+\frac{1}{2}f_{yy}(1,4)(y-4)^2+f_{xy}(1,4)(x-1)(y-4)$$

$f_x=yx^{y-1}$， $f_y=x^y\ln x$，

$f_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$，$f_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$，$f_{yy}=x^y(\ln x)^2$，$f(1,4)=1$，$f_x(1,4)=4$，$f_y(1,4)=0$，

$f_{xx}(1,4)=12$， $f_{xy}(1,4)=1$， $f_{yy}(1,4)=0$，

于是有，

$$x^y \approx 1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4).$$

令 $x=1.08$， $y=3.96$，故

$$(1.08)^{3.96} \approx 1+4\times 0.08+6\times 0.08^2+0.08\times(-0.04)=1.3552.$$

【例 9.2】 求 $f(x,y)=e^{2x+3y}$ 的 n 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式.

解 令 $2x+3y=u$，则有 $e^{2x+3y}=e^u$，当 $x=y=0$ 时，$u=0$．由一元函数的泰勒公式，有

$$e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+\frac{e^{\theta u}}{(n+1)!}u^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

将 $2x+3y=u$ 代入，得，

$$e^{2x+3y}=1+(2x+3y)+\frac{1}{2!}(2x+3y)^2+\frac{1}{3!}(2x+3y)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(2x+3y)^n$$
$$+\frac{e^{\theta(2x+3y)}}{(n+1)!}(2x+3y)^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

习题 9-9

1．求函数 $z=\sin 2x+\cos y$ 在 $P(0,0)$ 点处的三阶泰勒多项式.

*2．求函数 $z=e^x\ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式.

3．求函数 $z=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在 $A(1,-2)$ 的邻域内的泰勒公式.

4．求函数 e^{x+y} 的 n 阶麦克劳林公式．并写出余项.

5．利用三阶泰勒多项式求 $\sqrt{(3.012)^2+(3.997)^2}$ 的近似值.

第 10 节　多元函数的极值与最值（考点）

下面讨论多元函数的极值问题与最值问题.

10.1　无条件极值与函数的最值

设 f 是 n 元函数，P_0 是固定的 n 维点。

“P_0 是 f 的极大（小）值点，$f(P_0)$ 是 f 的极大（小）值”的意思等同于“在某小邻域 $U(P_0)$ 内，$f(P_0)$ 是 f 的最大（小）函数值”。

$n=1,2,\cdots$ 。

其中 $U(P_0)$ 是某个小小的 n 维开球。$n=1$ 时是开线段；$n=2$ 时是开圆盘；$n=3$ 时是开球。

定义 **10.1**　设存在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$，使得函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(P_0)$ 内有定义且对于任意 $P(x,y)\in U(P_0)$ 都有 $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$（或 $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$），则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值（极大值），点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点（极大值点）.

函数的极小值与极大值统称为极值．极小值点与极大值点统称为极值点．极值点一定是函数定义域的内点．极小值（极大值）是函数在小邻域内的最小值（最大值）。

上述定义可以推广到 n 元函数。

若函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极小值（极大值），则 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值（极大值）；$\psi(y)=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处取得极小值（极大值）．由一元函数取得极值的必要条件，若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导数并取得极值，则必有 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$.

称使 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的驻点（或称为临界点）．由上面分析有：

定理 **10.1(函数取得极值的必要条件)**　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导，则 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$.

类似可得，若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 可偏导且在该点取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\ \ f_z(x_0,y_0,z_0)=0\ .$$

函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 有极值点 $(0,0)$，但在点 $(0,0)$ 处，z_x,z_y 均不存在.

（二元或三元）函数 f 极值点所在的范围：$\begin{cases}1.\ f\text{的某偏导数不存在且存在的导数都是0的点}\\ 2.\ f\text{的所有偏导数都}=0\text{的点}\end{cases}$。

但是，上述两种点不一定是极值点。例如，$z=\sin|x|+\sin|y|+x+y$ 和 $z=xy$ 在 $(0,0)$ 点。

上述两种点是否极值点还需进一步判断。下面定理给出函数取得极值的充分条件：

定理 **10.2(函数取得极值的充分条件)**　设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内存在二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$．记 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则有

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 是极值点：$\begin{cases}A>0\text{时是极小}\\ A<0\text{时是极大}\end{cases}$.

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 不是极值点.

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，本定理无效.

其中 $AC-B^2$ 称为极值判别式。（**注意：**（1）中的判断好像与感觉习惯相反。）

*证　利用二元函数的一阶泰勒公式，因

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

$$=f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1$$

由已知条件，$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，故

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^2+2f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)hk+f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k^2\right].$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续的二阶偏导数，所以，有

$$f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xx}(x_0,y_0)+\alpha=A+\alpha,$$

$$f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xy}(x_0,y_0)+\beta=B+\beta,$$

$$f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{yy}(x_0,y_0)+\gamma=C+\gamma,$$

其中，当 $r=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ 时，$\alpha\to 0,\beta\to 0,\gamma\to 0$，故

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2\right),$$

因为 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$，故在 $U(P_0)$ 内，当 $Ah^2+2Bhk+Ck^2\neq 0$ 时，

$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ 与 $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ 的符号相同.

记 $g=Ah^2+2Bhk+Ck^2$，$\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$，则

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，有 $AC>0$，即 $A\neq 0$，$C\neq 0$，且二者同号．因为 $h^2+k^2\neq 0$，所以

$$Ag=A^2h^2+2ABhk+ACk^2=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2>0,$$

故 Δf 与 A 的符号相同.

当 $A>0$ 时，$\Delta f>0$，即 $f(x_0+qh,y_0+qk)>f(x_0,y_0)$，此时 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值点.

当 $A<0$ 时，$\Delta f<0$，即 $f(x_0+qh,y_0+qk)<f(x_0,y_0)$，此时 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极大值点.

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，

若 $A\neq 0$，则 $Ag=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2$，当 $h\neq 0,k=0$ 时，$Ag>0$；当 $Ah+Bk=0,k\neq 0$ 时，$Ag<0$，即此时 Δf 可正可负；

若 $A=C=0$，$B\neq 0$，则 $g=2Bhk$，当 $hk>0$ 时，$g>0$；当 $hk<0$ 时，$g<0$，此时 Δf 可正可负；

故当 $AC-B^2<0$ 时，Δf 在 $U(P_0)$ 内可正可负，得 $P_0(x_0,y_0)$ 不是函数的极值点.

$f(x,y)$ 极值问题的解法：

(1) （i）求方程组 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ 的全部解：$(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$；

（ii）求 $f_x(x,y)$ 或 $f_y(x,y)$ 不存在的全部点：$(x_{k+1},y_{k+1}),\cdots,(x_{k+l},y_{k+l})$；

(2) （i）用定理 10.2 判断点 (x_j,y_j)，是否极值点，是极大还是极小一定要有明确结论（$j=1,\cdots,k$）；

（ii）用极值定义判断点 (x_{k+j},y_{k+j})，是否极值点，是极大还是极小一定要有明确结论（$j=1,\cdots,l$）；

(3) 必要时将极值点代入函数求出相应的极值.

如果 $f(x,y)$ 到处二阶可导，就没有（1）（ii）和（2）（ii）了。

【例 10.1】 求函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2+3y^3+9y^2-3xy+9y-9x$ 的极值点.

解　所给函数到处任意阶可导。解方程组 $\begin{cases} f_x=x-3y-9=0 \\ f_y=9y^2+18y-3x+9=0 \end{cases}$，得 $(3,-2)$，$(12,1)$ 为函数的两个驻点.

因为 $f_{xx}=1,\ f_{yy}=18y+18,\ f_{xy}=-3$，所以 $f_{xx}\times f_{yy}-f_{xy}^2=18y+9$，在点 $(3,-2)$ 处，$AC-B^2=-36+9=-27<0$，故 $(3,-2)$ 不是极值点．在点 $(12,1)$ 处，$AC-B^2=18+9=27>0$，且 $A=1>0$，故 $(12,1)$ 是极小值点.

思考题：

1．二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，能否得到一元函数 $z=f(x,y_0)$ 及 $z=f(x_0,y)$ 在 (x_0,y_0) 处也取得极值？反之呢？（反之不对。例如马鞍面。）

下面我们讨论最大值最小值问题。

设 $(x_0,y_0)\in D$ 是函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最大（小）值点。则，(x_0,y_0) 在 D 的边界上或者在 D 的内部。如果 (x_0,y_0) 在 D 的内部，则 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的极值点，从而，$f_x(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$ 不存在，或者 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。

$f(x,y)$ **解最值问题的一般方法：**

（1）求出 $f(x,y)$ 在边界 ∂D 上的最大值 $f(a_2,b_2)$，最小值 $f(a_1,b_1)$；

（2）（i）在 D 的内部求方程组 $f_x(x,y)=0,\ \ f_y(x,y)=0$ 的全部解：$(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$；

（ii）在 D 的内部求 $f_x(x,y)$ 或 $f_y(x,y)$ 不存在的全部点：$(x_{k+1},y_{k+1}),\cdots,(x_{k+l},y_{k+l})$；

（3）结论：

$$\begin{matrix} f_{\max\limits_D} \\ f_{\min\limits_D} \end{matrix} = \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}\left\{ f(a_1,b_1), f(a_2,b_2), f(x_1,y_1),\cdots, f(x_k,y_k), f(x_{k+1},y_{k+1}),\cdots, f(x_{k+l},y_{k+l}) \right\} \qquad (4)$$

相应的点就是最大（小）值点。

【例 10.2】 求函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

解　先求出 $f(x,y)$ 的所有驻点及驻点处的函数值.

解 $\begin{cases} f_x=2x+4xy=0 \\ f_y=2x^2+2y=0 \end{cases}$，得驻点为 $(0,0),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$. 且有

$$f(0,0)=0\,,\quad f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\,,\quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\,.$$

再求出边界上函数的最值. 将 $x^2+y^2=1$ 代入函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$（记为 $G(y)$），得

$$G(y)=1-y^2+2(1-y^2)y+y^2=1+2y-2y^3\,,\qquad -1\le y\le 1\,.$$

令 $G'(y)=2-6y^2=0$，得 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 这是边界上的可能极值点. 比较边界点与可能极值点处的函数值，因

$$G(-1)=1\,,\quad G(1)=1\,,\quad G(\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}\,,\quad G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{4}{9}\sqrt{3}\,,$$

故 $G(y)$ 在边界上的最大值为 $G(\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为 $G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

最后将区域内驻点处的函数值与边界上的最值相比较，得函数在闭区域 D 上的最大值为 $f_{\max\limits_D}=G(\frac{1}{\sqrt{3}})=f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为 $f_{\min\limits_D}=f(0,0)=0$.

$f(x,y)$ **解最值问题的特殊方法：** 由问题的实际意义可判断函数 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最值存在，且可以判定最值一定在区域内部取得，那么当 $f(x,y)$ 在 D 的内部只有一个可疑极值点(导数不存在或导数=0 的点)时，函数在此点处的函数值一定就是所要求的最值.

一般方法可解任何最值问题；特殊方法为简便而使用。

【例 10.3】 某厂要做一个体积为$8\mathrm{m}^3$的有盖长方体水箱．问当长、宽、高各为多少时，用料最省？

解　设水箱的长，宽分别为$x\mathrm{m}$，$y\mathrm{m}$，则高为$\dfrac{8}{xy}\mathrm{m}$，水箱的表面积为

$$S=2\left(xy+x\frac{8}{xy}+y\frac{8}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}\right)\qquad x>0,y>0$$

令$S_x=2\left(y-\dfrac{8}{x^2}\right)=0$，$S_y=2\left(x-\dfrac{8}{y^2}\right)=0$，解得$x=2$，$y=2$．

因为最小值一定是在开区域$x>0,y>0$内部取得，而函数在区域内只有惟一的驻点$(2,2)$．故当$x=2,y=2$时，表面积取得最小值．即当水箱的长为$2\mathrm{m}$，宽为$2\mathrm{m}$，高为$\dfrac{8}{2\times 2}=2\mathrm{m}$时所用的材料最省．

思考题：

2．若二元函数$z=f(x,y)$在某区域内连续且有惟一的极值点，则该点就是函数在该区域上的最大值点或最小值点．是否正确？（对。）

10.2　条件极值，拉格朗日乘数法

在上面无条件极值中，函数的自变量各自独立地变化，不受到其它条件的约束．但是在实际问题中，大量的极值问题中的变量都会受到一定的条件约束．这类附有约束条件的极值的问题，称为有约束极值，或条件极值．

下面寻找目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件．问题表述为

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}。$$

只在曲线 $\varphi(x,y)=0$ 上讨论极值问题。总设 $f(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 充分可导。

从 $\varphi(x,y)=0$（理论地）解出 $y=y(x)$。上面条件极值问题变为一元函数 $g(x)=f(x,y(x))$ 的极值问题。

$$g'(x)=f_x(x,y)+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\varphi_x(x,y)+\varphi_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$$

要解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)-\dfrac{f_y(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\varphi_x(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}. \qquad (10.1)$$

然后根据问题的实际对全部解逐点判断。到现在为止条件极值问题已经完全解决。但是，方程组(10.1)不容易记住。下面找个好记的办法代替（10.1）。

如果做函数（拉格朗日函数）$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，模仿拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)$ 的无条件极值问题，让所有偏导数都等于 0 解方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad (10.3)$$

方程组(10.3)关于 (x,y) 的解与方程组(10.1)等价（第二个方程解出 λ 再代入第一个方程）。我们用拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)$ 的方程组(10.3)代替难记的方程组(10.1)。（我们不需要 λ 的值）

上述方程组即为目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件．这种方法称为拉格朗日乘数法，其中引进的参数 λ 称为拉格朗日乘子．

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}。$$

根据上面推导，可以得到用拉格朗日乘数法**求解极值问题的步骤：**

(1) 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$；

(2) 求 $L(x,y,\lambda)$ 的所有可能极值点，即解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0, \\ L_y = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0, \\ L_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

（一般解这样的方程组讲究简便技巧）

(3) 根据问题的实际判断所求出的可能极值点是否为目标函数的极值点，是极大还是极小.

【例 10.4】 设 $f(x,y) = x + y$，且 $x^2 + y^2 = 1$，求 $f(x,y)$ 的最值.

解　构造拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$，有

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

由前两式可得，$x = y$，代入第三个式子，得 $2x^2 - 1 = 0$，故 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$．函数驻点为：$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$．

求函数 $f(x,y) = x + y$ 在约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最值，实际上就是求曲面 $z = x + y$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上的所有点的最高点和最低点的纵坐标．又 $f(x,y) = x + y$ 在闭区域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上是连续的，故必存在最大值和最小值.

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2},\quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2},$$

所以，函数满足条件的最大值为 $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$，最小值为 $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$.

拉格朗日乘数法可推广到二元以上函数以及有多个约束条件的极值问题

$$\begin{cases} y = f(x_1,\cdots,x_n) \\ \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \qquad\cdots \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{cases}。$$

求解步骤：

(1) 构造拉格朗日函数：

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m) = f(x_1,\cdots,x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1,\cdots,x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1,\cdots,x_n);$$

(2) 求 $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 的所有可能极值点，即解方程组：

$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1}(x_1,\cdots,x_n) + \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_{jx_1}(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \qquad\cdots \\ L_{x_n} = f_{x_n}(x_1,\cdots,x_n) + \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_{jx_n}(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \qquad\cdots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{cases}$$

（一般解这样的方程组讲解简便技巧）

(3) 根据问题的实际判断所求出的可能极值点是否为目标函数的极值点，是极大还是极小.

【例 **10.5**】 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ 及 $z = x + y$ 下的最值.

解 构造拉格朗日函数：

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2(x + y - z),$$

分别对变量 $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ 求偏导，得

$$L_x = 2x + \frac{\lambda_1}{2}x + \lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$L_y = 2y + \frac{2\lambda_1}{5}y + \lambda_2 = 0 \tag{2}$$

$$L_z = 2z + \frac{2\lambda_1}{25}z - \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$L_{\lambda_1} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \tag{4}$$

$$L_{\lambda_2} = x + y - z = 0 \tag{5}$$

$(1)\times x + (2)\times y + (3)\times z$，得： $\lambda_1 = -(x^2 + y^2 + z^2) = -u$

由(1)，(2)，(3)式得

$$x=\frac{-2}{4+\lambda_1}\lambda_2,\quad y=\frac{-5}{10+2\lambda_1}\lambda_2,\quad z=\frac{25}{50+2\lambda_1}\lambda_2, \tag{6}$$

所以$\lambda_2 \neq 0$．（若$\lambda_2=0$，则有$x=0,y=0,z=0$，不满足约束条件）．将上述式子代入(5)式，得 $\frac{2}{4+\lambda_1}+\frac{5}{10+2\lambda_1}+\frac{25}{50+2\lambda_1}=0$，整理可得，$17\lambda_1^2+245\lambda_1+750=0$．即$(17\lambda_1+75)(\lambda_1+10)=0$，故$\lambda_1=-10$，$\lambda_1=-\frac{75}{17}$．由$u=-\lambda_1$，$u_1=10$，$u_2=\frac{75}{17}$．

因为$x^2+y^2+z^2$表示坐标原点$(0,0,0)$到点(x,y,z)的距离的平方，故所求的最值问题等价于求原点到曲线$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1\\ x+y-z=0\end{cases}$上的最近和最远距离．显然该问题存在有解，故函数的最大值为$u_1=10$，最小值为$u_2=\frac{75}{17}$．

事实上，例 10.3 也可用拉格朗日乘数法求解．

思考题：

3．二元函数的极值与条件极值的几何意义是什么？若二元函数没有极值，是否一定没有条件极值？（不一定。）

习题 9—10

A 类

1．求下列函数的极值．

(1) $z = x^3 - 3x - y^2$； *(2) $z = (x+y)(xy+1)$；

(3) $z = e^{x^2-y}(5-2x+y)$； *(4) $z = e^{2x}(x+y^2+2y)$；

(5) $z = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$，$\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$．

2．求下列函数在指定的区域上的最大值与最小值．

(1) $z = xy$ 在 $D = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}$ 上；

*(2) $z = x^2 + y^2$ 在 $D = \left\{(x,y) \middle| (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \le 9\right\}$ 上；

(3) $z = 1 + xy - x - y$ 在曲线 $y = x^2$ 与 $y = 4$ 所围的闭区域上；

*(4) $z = e^{-xy}$ 在 $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + 4y^2 \le 1\right\}$ 上．

3．求下列方程所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的极值．

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$；

(2) $z^2 + xyz - x^2 - xy^2 - 9 = 0$．

解 (1) 把 z 看作隐函数 $z = z(x,y)$，恒等式 $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$ 对 x 求导得

$$2x + 2zz_x - z - xz_x - yz_x + 2 + 2z_x = 0$$

$$z_x = \frac{2x - z + 2}{x + y - 2z - 2}$$

由对称性

$$z_y = \frac{2y - z + 2}{x + y - 2z - 2}$$

解方程组

$$\begin{cases} z_x = \dfrac{2x - z + 2}{x + y - 2z - 2} = 0 \\ z_y = \dfrac{2y - z + 2}{x + y - 2z - 2} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

由前两方程得 $x = y$。解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{2x - z + 2}{2x - 2z - 2} = 0 \\ 2x^2 + z^2 - 2xz + 4x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + (2x+2)^2 - 2x(2x+2) + 4x + 2(2x+2) - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$y_1 = x_1 = -3+\sqrt{6}, z_1 = -4+2\sqrt{6}, y_2 = x_2 = -3-\sqrt{6}, z_2 = -4-2\sqrt{6}$$

$(-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6},-4+2\sqrt{6}),(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6},-4-2\sqrt{6})$

$2x+2zz_x-z-xz_x-yz_x+2+2z_x=0$ 对 x,y 求导得

$$\begin{cases} 2+2(z_x)^2+2zz_{xx}-2z_x-xz_{xx}-yz_{xx}+2z_{xx}=0 \\ 2z_yz_x+2zz_{xy}-z_y-xz_{xy}-z_x-yz_{xy}+2z_{xy}=0 \end{cases}$$

令 $y=x=-3+\sqrt{6}, z=-4+2\sqrt{6}, z_x=z_y=0$ 得

$$\begin{cases} 2+2\left(-4+2\sqrt{6}\right)z_{xx}-\left(-3+\sqrt{6}\right)z_{xx}-\left(-3+\sqrt{6}\right)z_{xx}+2z_{xx}=0 \\ 2\left(-4+2\sqrt{6}\right)z_{xy}-\left(-3+\sqrt{6}\right)z_{xx}-\left(-3+\sqrt{6}\right)z_{xy}+2z_{xy}=0 \end{cases}$$

解得

$$z_{xx}=-\frac{\sqrt{6}}{6}, z_{xy}=0$$

由对称性，$z_{yy}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$。$AC-B^2=\frac{1}{6}>0, A=-\frac{\sqrt{6}}{6}<0$，$z=-4+2\sqrt{6}$ 是极大值。

类似地，$z=-4-2\sqrt{6}$ 是极小值。

（当 $x+y-2z-2=0$ 时函数不可导，略。）

*4．证明：函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，而无极小值．

5．已知矩形的周长为 $2p$，将它绕其一边旋转而得一旋转体．问边长各为多少时，旋转体的体积最大？

6．求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离．

7．在圆锥 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ $(R>0,h>0)$ 和平面 $z=h$ 所围成的锥体中内接底面平行于 xOy 面的长方体，求其中体积最大的长方体的体积．

*8．求内接于椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的最大长方体的体积，长方体的各个面平行于坐标面．

*9．直圆柱体加正圆锥为顶构成一立体，圆锥的底面半径与圆柱半径相等．若立体的表面积为 S，试问立体的尺寸如何时，其体积最大．

10．现需制作一个容积为 512m^3 的长方形容器．设制作容器时，其两侧边的成本为 0.2 元/m^2，而上，下底的成本为 0.4元/m^2．试确定容器的尺寸，使制作成本最低．

B 类

1．求方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的隐函数的极值．

*2．求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，$x=0$，$y=0$ 所围成的区域 D 的最大值与最小值．

3．在第一卦限内作曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求出切点的坐标．

解 设切点是 (x,y,z)。令 $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$。$F_x=\frac{2x}{a^2},F_y=\frac{2y}{b^2},F_z=\frac{2z}{c^2}$。切平面

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$$

即

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1$$

坐标轴截距 $\frac{a^2}{x},\frac{b^2}{y},\frac{c^2}{z}$。体积 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}$。极值问题

$$\begin{cases} f=\frac{1}{xyz} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

作 $L=\frac{1}{xyz}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$。

$$\begin{cases} L_x=-\frac{yz}{(xyz)^2}+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ L_y=-\frac{xz}{(xyz)^2}+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ L_z=-\frac{yx}{(xyz)^2}+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

由前三个方程得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$（简单技巧！）。因此，$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$。解得 $x=\frac{a\sqrt{3}}{3},y=\frac{b\sqrt{3}}{3},z=\frac{c\sqrt{3}}{3}$。根据问题的实际，这点就是所述体积最小的点。

4．分解已知正数 a 为 n 个正的因数，使得它们的倒数和为最小．

*5．已知三角形的周长为 $2l$．求出这样的三角形，当它绕自己的一边旋转时，所得的旋转体的体积最大．

*6．函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数沿着过 $M_0(x_0,y_0)$ 点的每一条直线上都有极小值呢？研究例子 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$．

*7．设有一小山，取它的底所在的面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2-xy\le 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$．现欲利用小山开展攀岩活动，则需在山脚寻找一个上山坡度最大的点作为起点．试确定起点的位置．

总 习 题 九

1．填空题

(1)函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是________.

(2)设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，则 $f(1,\dfrac{y}{x})=$ ________.

*(3)设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+,y\to 0^+} f(x,y)=$ ________；$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0} f(x,y)=$ ________.

*(4) $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{e^x\cos y}{1+x+y}=$ ________.

(5)若 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则 $f_x(1,2,0)=$ _____；$f_y(1,2,0)=$ _____；$f_z(1,2,0)=$ _____.

(6)曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在 $(1,2,0)$ 点的处切平面方程为________.

(7)函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为________.

(8)设函数 $z=x^y$，则 z 对 y 的偏增量 $\Delta_y z=$ ________；$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=$ ________.

(9)由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ ________.

(10)设 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ ________.

*(11)已知 $f(x,y,z)=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$，则函数 $f(x,y,z)$ 在第一卦限内的驻点为________.

(12)设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

2．选择题

(1)二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处________

A.连续且偏导数存在；　　B.连续但偏导数不存在；

C.不连续但偏导数存在；　　D.不连续且偏导数不存在.

(2)考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处可微；　④ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示由性质 P 推出性质 Q，则________

A.②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①；　B.③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①；　C.③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①；　D.③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$ ________

A. 3；　B. 6；　C.不存在；　D.∞.

*(4)函数 $f(x,y)=\sin(x^2+y)$ 在 $(0,0)$ 点处________

A.无定义；　B.无极限；　C.有极限但不连续；　D.连续.

(5)函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处间断，则________

A.函数在该点处一定无定义；

B.函数在该点处极限一定不存在；

C.函数在该点处可能有极限，也可能有定义；

D.函数在该点处一定有极限，也一定有定义，但极限值与函数值不相等.

(6)曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上 P 点处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则 P 点为________

A. $(1,-1,2)$； B. $(1,1,2)$； C. $(-1,1,2)$； D. $(-1,-1,2)$.

3．求下列极限；

①$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$； ②$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to +\infty}}\dfrac{xy-1}{y+1}$； *③$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$； *④$\lim\limits_{\substack{x\\ y\to 0}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

4．计算下列各题：

①$z=\sqrt{\ln(xy)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

*②$z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

③$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 φ,f 具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

④设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，令 $u=x-ay,v=x+ay$，变换方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

⑤设函数 $u=f(x,y,z)$ 由方程 $u^2+y^2+z^2-x=0$ 确定，其中 $z=xy^2+y\ln y-y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

③$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 φ,f 具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

解 ③$\dfrac{du}{dx}=f_x(x,y,z)+f_y(x,y,z)\cos x+f_z(x,y,z)z_x+f_z(x,y,z)z_y\cos x$。$\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 对 x 求导得

$$2x\varphi_1(x^2,e^y,z)+\varphi_3(x^2,e^y,z)z_x=0$$

$$z_x=-\frac{2x\varphi_1(x^2,e^y,z)}{\varphi_3(x^2,e^y,z)}$$

$\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 对 y 求导得

$$e^y\varphi_2(x^2,e^y,z)+\varphi_3(x^2,e^y,z)z_y=0$$

$$z_y=-\frac{e^y\varphi_2(x^2,e^y,z)}{\varphi_3(x^2,e^y,z)}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=f_x(x,y,z)+f_y(x,y,z)\cos x-f_z(x,y,z)\frac{2x\varphi_1(x^2,e^y,z)}{\varphi_3(x^2,e^y,z)}-f_z(x,y,z)\frac{e^y\varphi_2(x^2,e^y,z)}{\varphi_3(x^2,e^y,z)}\cos x\\&=f_x(x,\sin x,z)+f_y(x,\sin x,z)\cos x-f_z(x,\sin x,z)\frac{2x\varphi_1(x^2,e^{\sin x},z)+e^{\sin x}\cos x\varphi_2(x^2,e^{\sin x},z)}{\varphi_3(x^2,e^{\sin x},z)}\end{aligned}$$

*5.

*6．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续且偏导数存在，但不可微.

证 当 $0<x^2+y^2<1$ 时，

$$0\le f(x,y)=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\le\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$ 。$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续。

$\varphi(x)=f(x,0)\equiv 0,\ \psi(y)=f(0,y)\equiv 0$，$f_x(0,0)=\varphi'(0)=0,\ f_y(0,0)=\psi'(0)=0$ 都存在。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

当 $y=kx$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4k^2}{\left(x^2+k^2x^2\right)^2}=\dfrac{k^2}{\left(1+k^2\right)^2}$ 与 k 有关，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在。故，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

7．设 $u=xy^2z^3$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定，F 有连续的偏导数，且 $F_2\neq F_3$，求 $\mathrm{d}u$.

8．设方程组 $\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

*9．已知 x,y,z 为实数，且 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$，求证：$\mathrm{e}^xy^2|z|\le 1$.

证 由 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$ 有 $|z|=3-\mathrm{e}^x-y^2,-\sqrt{3}<y<\sqrt{3},x\le\ln 3$ 。令

$$f=\mathrm{e}^xy^2\left(3-\mathrm{e}^x-y^2\right),\left(-\sqrt{3}<y<\sqrt{3},x\le\ln 3\right)$$

当 $x=\ln 3$ 时，$y=z=0$，$f=0$ 。解

$$\begin{cases}f_x=\mathrm{e}^xy^2\left(3-\mathrm{e}^x-y^2\right)-\mathrm{e}^{2x}y^2=0\\ f_y=2\mathrm{e}^xy\left(3-\mathrm{e}^x-y^2\right)-2\mathrm{e}^xy^3=0\end{cases},\left(-\sqrt{3}<y<\sqrt{3},x<\ln 3\right)$$

得 $x=0,y=\pm 1$ 。$f(0,1)=f(0,-1)=1$ 。因此 $f_{\max}=1$ 。故，$\mathrm{e}^xy^2|z|\le 1$ 。

10．一个槽形容器，长为 H，截面是半径为 R 的半圆，横放在水平地面上，其表面积为定值 S_0，求半径 R 与长 H 的值，使其容积最大.

*11．设函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点及其邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的邻域内是否有极值．如果有，是极大值还是极小值．

12．过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求切平面的方程．