2015 高等数学 B1 期末

一、（7 分）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$。

解：
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\lim_{x\to1}\frac{1}{x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1}$$
$$=f'(1)\cdot\frac{1}{2015}=\frac{1}{2015}$$。

二、（7 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为正数（$m\ge2$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}$。

解：不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}<a_k=a_{k+2}=\cdots=a_m(1\le k<m)$。

（i）如果 $k=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}=a_m\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=a_m$。

（ii）如果 $k>1$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=a_m\lim_{n\to\infty}(m+1-k)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_m}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_m}\right)^n}{m+1-k}+1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=a_m\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_m}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_m}\right)^n}{m+1-k}+1\right)^{\frac{m+1-k}{\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_m}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_m}\right)^n}}\right]^{\frac{\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_m}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_m}\right)^n}{n(m+1-k)}}$$

$$=a_me^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_m}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_m}\right)^n}{n(m+1-k)}}=a_me^0=a_m$$

可见，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。

三、（7 分）求不定积分 $\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$。

解：$\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$

$$=-\int \arctan x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

四、（7 分）设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程。

解：$x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 两边微分

$$2xdx+2ydy-e^{xy}dy-ye^{xy}(xdy+ydx)=0$$

代入 $(0,2)$

$$4dy-dy-4dx=0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{4}{3}$$

曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程：$y=\frac{4x}{3}+2$。

五、（7 分）设 $a>0$，计算 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3}dx$。

解：$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3}dx=-\ln 3\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx+\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$。

$$\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$是奇函数，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=0$。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3}dx\\
&=-\ln 3\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\\
&\overset{x=a\sin t}{=}-2a^2\ln 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt\\
&=-2a^2\ln 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&=-\frac{a^2\pi\ln 3}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=-\frac{a^2\pi\ln 3}{2}
\end{aligned}
$$

六、（7 分）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x<2,\\ 0, & 0ther\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的表达式。

解：（i） $x<0$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0$。

（ii） $0\le x<1$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$。

（iii） $1\le x<2$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$。

（iv） $x\ge 2$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^2 tdt+\int_2^x 0dt=\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$。

$$
\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}, & 1\le x<2\\ \frac{11}{6}, & x\ge 2\end{cases}
$$

七、（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定，其中 C 是非零常数，f 具有二阶导数，且 $f'(y)\ne 1$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：由 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 有 $x=Ce^{y-f(y)}$。

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dy}=Ce^{y-f(y)}(1-f'(y))\\
&\frac{d^2x}{dy^2}=Ce^{y-f(y)}\left((1-f'(y))^2-f''(y)\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{e^{f(y)-y}}{C(1-f'(y))}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}=C^{-2}\left(f''(y)-(1-f'(y))^2\right)(1-f'(y))^{-3}e^{2(f(y)-y)}$$

八、（7分）设 $f(x)=\begin{cases}6, & x\le 0\\ \dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}6=6$。

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\text{。}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{3ax^2}{x^2}=-6a$$

令 $-6a=6$ 得 $a=-1$。

九、（9分）求初值问题 $\begin{cases}y''+y=x^2+\sin x\\ y(0)=1,y'(0)=-1\end{cases}$ 的解。

解：特征方程 $t^2+y=0$ 的根 $\lambda=\pm i$。齐次方程 $y''+y=0$ 的通解 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

设 $y''+y=x+\sin x$ 的特解 $y^*=u_1\cos x+u_2\sin x$。解方程组

$\begin{cases}\cos xu_1'+\sin xu_2'=0\\ -\sin xu_1'+\cos xu_2'=x^2+\sin x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}u_1'=-x^2\sin x-\sin^2 x\\ u_2'=x^2\cos x+\cos x\sin x\end{cases}$。积分得

$$\begin{cases}u_1=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x+\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{2}x\\ u_2=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x\end{cases}\text{。}$$

$$y^*=x^2\cos^2 x-x\sin(2x)-2\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin(2x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+x^2\sin^2 x+x\sin(2x)-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^3 x$$

$y''+y=x+\sin x$ 的通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2\cos^2 x-x\sin(2x)-2\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin(2x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+x^2\sin^2 x+x\sin(2x)-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^3 x$$

由 $y(0)=1$ 得 $C_1=3$。

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos(2x)-x\sin(2x)-1-\cos(2x)+\frac{1}{8}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+x^2\sin^2 x+x\sin(2x)-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^3 x$$

$$y'=C_1\sin x+C_2\cos x+x+x\cos(2x)-x^2\sin(2x)-\sin(2x)-2x\cos(2x)+2\sin(2x)$$

$$+\frac{3}{8}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$$

$$+2x\sin^2 x+x^2\sin(2x)+\sin(2x)+2x\cos(2x)-2\sin(2x)+\frac{3}{2}\sin^2 x\cos x$$

由 $y'(0)=-1$ 得 $C_2=-1$。要求的特解

$$y=3\cos x-\sin x+x^2\cos^2 x-x\sin(2x)-2\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin(2x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+x^2\sin^2 x+x\sin(2x)-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^3 x$$

十、（9 分）求抛物线 $y^2=4x$ 和 $y^2=8x-4$ 所围图形的面积以及该图形绕 x 轴转一周所得旋转体体积。

解： $y^2=4x$ 和 $y^2=8x-4$ 的交点 $(1,2)$。

$$A_{大}=2\int_0^1 2\sqrt{x}dx=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{8}{3}$$

$$A_{小}=2\int_{\frac{1}{2}}^1 2\sqrt{2x-1}dx=\frac{4}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{4}{3}$$

所围图形的面积 $A=A_{大}-A_{小}=\frac{4}{3}$。

$$V_{大}=\int_0^1 \pi 4xdx=2\pi x^2\Big|_0^1=2\pi$$

$$V_{小}=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 4(2x-1)dx=\pi(2x-1)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\pi$$

旋转体体积 $V=V_{大}-V_{小}=\pi$。

十一、（8 分）判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}dx$ 的敛散性。

解：$\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}\right|\le\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$，又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{2}{3}$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}\right|dx$，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}dx$ 收敛。

十二、（11 分）求函数 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调区间，极值和凹凸区间。

解：$f'(x)=\frac{2(x-3)(x-1)-(x-3)^2}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{4(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}$，

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{4(x-1)^4}=\frac{8}{4(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f′		+	0	−	不存在	−	0	+	
f″		−	−	−	不存在	+	+	+	

$f(x)$ 的单调增加区间有 $(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$，单调减少区间有 $[-1,1)$ 和 $(1,3]$；上凸区间有 $(-\infty,1)$，下凸区间有 $(1,+\infty)$；极大值 $f(-1)=-2$，极小值 $f(3)=0$。

十三、（6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，且 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\tan xdx=0$，证明：在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

证：如果在区间 $(-1,1)$ 内 $f(x)\equiv 0$，则在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

设在区间 $(-1,1)$ 内 $f(x)\not\equiv 0$。

存在 $a\in(-1,1)$ 使得 $f(a)\ne 0$。存在 $b\in(-1,1)$ 使得 $f(a)f(b)<0$，否则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\ne 0$。

同理，存在 $c,d\in(-1,1)$ 使得 $f(c)\tan cf(d)\tan d<0$