高等数学公式

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x \qquad\qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(ctgx)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad\qquad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad\qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = tgx + C$$

$$\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + tgx| + C \qquad \int \sec x \cdot tgx\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - ctgx| + C \qquad \int \csc x \cdot ctgx\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int shx\,dx = chx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C \qquad \int chx\,dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C$$

基本积分表：

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

双曲正弦：$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦：$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切：$thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$archx = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$arthx = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

三角函数公式：

·诱导公式：

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

· 和差角公式：   · 和差化积公式：

・**倍角公式：**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

・**半角公式：**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

・**正弦定理：** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ ・**余弦定理：** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

・**反三角函数性质：** $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$ $arctgx = \dfrac{\pi}{2} - arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$F(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$，其中$y' = tg\alpha$

平均曲率：$\overline{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$。$\Delta\alpha$：从M点到M'点，切线斜率的倾角变化量；$\Delta s$：$\overline{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right| = \dfrac{|y''|}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$.

直线：$K = 0$;

半径为a的圆：$K = \dfrac{1}{a}$.

定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{n}[\dfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W = F \cdot s$

水压力：$F = p \cdot A$

引力：$F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$，$k$为引力系数

函数的平均值：$\overline{y} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi, \varphi$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \Pr j\vec{a}_1 + \Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$，是一个数量，

两向量之间的夹角：$\cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta.$ 例：线速度：$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}.$

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\alpha, \alpha$ 为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$，其中 $\vec{n} = \{A, B, C\}, M_0(x_0, y_0, z_0)$

2、一般方程：$Ax + By + Cz + D = 0$

3、截距世方程：$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

空间直线的方程：$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$，其中 $\vec{s} = \{m, n, p\}$；参数方程：$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$
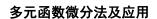
二次曲面：

1、椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

2、抛物面：$\dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q} = z,$（$p, q$ 同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ $\qquad du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z = f[u(t),v(t)]$ $\qquad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}$

$z = f[u(x,y),v(x,y)]$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

当 $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ 时，

$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ $\qquad dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数 $F(x,y) = 0$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$, $\qquad \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{F_x}{F_y}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{F_x}{F_y})\cdot\dfrac{dy}{dx}$

隐函数 $F(x,y,z) = 0$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ $\qquad J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程：$\dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$

在点 M 处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$，则切向量 $\vec{T} = \{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\}$

曲面 $F(x,y,z) = 0$ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n} = \{F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$

3、过此点的法线方程：$\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z = f(x, y)$在一点$p(x, y)$沿任一方向l的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z = f(x, y)$在一点$p(x, y)$的梯度：$\operatorname{grad} f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$，其中$\vec{e} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$，为$l$方向上的

单位向量。

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial l}$是$\operatorname{grad} f(x, y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令：$f_{xx}(x_0, y_0) = A$，$f_{xy}(x_0, y_0) = B$，$f_{yy}(x_0, y_0) = C$

则：
$$
\begin{cases}
AC - B^2 > 0时, & \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0)为极大值 \\ A > 0, (x_0, y_0)为极小值 \end{cases} \\
AC - B^2 < 0时, & \qquad\qquad 无极值 \\
AC - B^2 = 0时, & \qquad\qquad 不确定
\end{cases}
$$

重积分及其应用：

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

曲面$z = f(x, y)$的面积$A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$

平面薄片的重心：$\bar{x} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\iint\limits_{D} x\rho(x, y)\, d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x, y)\, d\sigma}$，$\bar{y} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\iint\limits_{D} y\rho(x, y)\, d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x, y)\, d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x = \iint\limits_{D} y^2 \rho(x, y)\, d\sigma$，对于$y$轴$I_y = \iint\limits_{D} x^2 \rho(x, y)\, d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0, 0, a), (a > 0)$的引力：$F = \{F_x, F_y, F_z\}$，其中：

$$F_x = f\iint\limits_{D} \dfrac{\rho(x, y) x\, d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_y = f\iint\limits_{D} \dfrac{\rho(x, y) y\, d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_z = -fa\iint\limits_{D} \dfrac{\rho(x, y) x\, d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$

其中：$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

球面坐标：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $dv = rd\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi,\theta)} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$

重心：$\bar{x} = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho dv,$ $\bar{y} = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho dv,$ $\bar{z} = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho dv,$ 其中 $M = \bar{x} = \iiint\limits_{\Omega} \rho dv$

转动惯量：$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho dv,$ $I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho dv,$ $I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho dv$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设 $f(x,y)$ 在 L 上连续，L 的参数方程为：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$, 则：

$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta)$ 特殊情况：$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为

L上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$ 格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

当$P = -y, Q = x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$时，得到$D$的面积：$A = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应

减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx + Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$$u(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad 通常设 x_0 = y_0 = 0。$$

曲面积分：

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv = \oiint_{\Sigma}Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义 ——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$，即：单位体积内所产生 的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{v} < 0$,则为消失 …

通量：$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}ds = \iint_{\Sigma}A_n ds = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写 成：$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv = \oiint_{\Sigma}A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{\Gamma}Pdx + Qdy + Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量：$\oint_{\Gamma}Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列：$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列：$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n}$，则 $\begin{cases} \rho < 1时，级数收敛 \\ \rho > 1时，级数发散 \\ \rho = 1时，不确定 \end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则 $\begin{cases} \rho < 1时，级数收敛 \\ \rho > 1时，级数发散 \\ \rho = 1时，不确定 \end{cases}$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ 存在，则收敛；否则发散。

交错级数 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$（或 $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$）的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足 $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0 \end{cases}$，那么级数收敛且其和 $s \leq u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

$(1) u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$，其中 u_n 为任意实数；

$(2) |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数：$\sum \dfrac{1}{n}$ 发散，而 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

级数：$\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛；

p 级数：$\sum \dfrac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1时收敛 \end{cases}$

幂级数：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \begin{cases} |x| < 1时，收敛于\dfrac{1}{1-x} \\ \\ |x| \geq 1时，发散 \end{cases}$$

对于级数$(3)a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全

数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases} |x| < R时收敛 \\ |x| > R时发散， \\ |x| = R时不定 \end{cases}$其中$R$称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n \to \infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases} \rho \neq 0时，R = \dfrac{1}{\rho} \\ \rho = 0时，R = +\infty \\ \rho = +\infty时，R = 0 \end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x) = f(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$

余项：$R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$时即为麦克劳林公式：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

一些函数展开成幂级数：

$(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

欧拉公式：

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 或 $\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$

三角级数：

$f(t) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

其中，$a_0 = aA_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega t = x$。

正交性：$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots \sin nx, \cos nx \cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi, \pi]$

上的积分$=0$。

傅立叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad 周期 = 2\pi$$

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0,1,2\cdots) \\[4mm] b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1,2,3\cdots) \end{cases}$

$1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$ ⟩⟨ $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$（相加）

$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{24}$ ⟩⟨ $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$（相减）

正弦级数：$a_n = 0$，$b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ $n = 1,2,3\cdots$ $f(x) = \sum b_n \sin nx$ 是奇函数

余弦级数：$b_n = 0$，$a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ $n = 0,1,2\cdots$ $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ 是偶函数

周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}), \quad 周期 = 2l$$

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx & (n = 0,1,2\cdots) \\[4mm] b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx & (n = 1,2,3\cdots) \end{cases}$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y' = f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式，解法：

$\displaystyle\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得：$G(y) = F(x) + C$ 称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = \varphi(x,y)$，即写成 $\dfrac{y}{x}$ 的函数，解法：

设 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，$u + \dfrac{du}{dx} = \varphi(u)$，$\therefore \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\varphi(u)-u}$ 分离变量，积分后将 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u，

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$\begin{cases} 当 Q(x) = 0 时，为齐次方程，\ y = Ce^{-\int P(x)dx} \\[3mm] 当 Q(x) \neq 0 时，为非齐次方程，\ y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$

2、贝努力方程：$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0,1)$

全微分方程：

如果 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，其中：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$\therefore u(x,y) = C$ 应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + P(x)\dfrac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0 时为齐次 \\ f(x) \neq 0 时为非齐次 \end{cases}$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*) y'' + py' + qy = 0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程$:(\Delta) r^2 + pr + q = 0$，其中$r^2$，$r$的系数及常数项恰好是$(*)$式中$y'', y', y$的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1, r_2

3、根据r_1, r_2的不同情况，按下表写出$(*)$式的通解：

r_1，r_2的形式	$(*)$式的通解
两个不相等实根（$p^2 - 4q > 0$）	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根（$p^2 - 4q = 0$）	$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根（$p^2 - 4q < 0$） $r_1 = \alpha + i\beta$，$r_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\dfrac{p}{2}$，$\beta = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$，p,q为常数

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$型，$\lambda$为常数；

$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$型