

# 投入产出技术基础与扩展学习笔记

张欣洋\*

2021 年 7 月 30 日

相关问题实现的 matlab 代码

```
1 clear;clc;
2 %% 进口剔除
3 format short
4 Z=[350 0 0;50 250 150;200 150 550]; %给定的投入产出经济，交易矩阵
5 x=[1000;500;1000]; %总产出向量
6 f=x-Z*ones(size(Z,1),1); %最终需求向量
7 u=Z*ones(size(A,1),1); %中间产出合计向量
8 A=Z*diag(x)^(-1); %技术矩阵
9 v=(x'-ones(size(Z,1),1)*Z)'; %增加值向量
10 L=(eye(size(A,1))-A)^(-1); %列昂惕夫逆
11 disp(L);
12
13 M=[100 0 0;25 50 30;25 50 100]; %假设经济体中的进口矩阵
14 D=Z-M; %国内交易矩阵
15 m=M*ones(size(M,1),1); %进口向量，表示负的最终需求
16 g=f+m; %除进口以外的其他最终需求向量
17 x=D*ones(size(D,1),1)+g; %判断进口剔除之后的行平衡公式是否成立
18
19 %%当m已知M未知的时候，M的两种估计方法
20 % 第一种估计方法
21 B=diag(u)^(-1)*Z; %中间产出分配比例
22 M_tilde=diag(m)*B; %进口在产业间产出的分配
23 D_tilde=Z-M_tilde; %估计后的国内交易矩阵
24 x=D_tilde*ones(size(D_tilde,1),1)+g; %判断利用估计结果计算进口剔除后的行平衡公式是否成立
25 v_tilde=(x'-ones(size(D_tilde,1),1)*D_tilde)'; %计算进口剔除后的增加值向量
26 m_tilde=(v_tilde'-v')'; %比较进口剔除后的增加值向量与原增加值向量的差额，总额还是等于进口
27 %第二种估计方法
28 r=m./(u+f); %调整因子
29 D_bar=Z-diag(r)*Z; %计算调整后的国内交易矩阵
30 M_bar=diag(r)*Z; %产业间进口矩阵的估计
31 h=diag(r)*f; %最终需求所直接消耗的进口向量
32 g_bar=g-h; %不含产业间进口以及最终需求直接消费的进口的最终需求向量
33 v_bar=(x'-ones(size(D_bar,1),1)*D_bar)'; %新的总增加值向量
34 m_tilde=v_bar'-v'; %中间品增加值的增加量
35
36 %% 双缩减
37 Z_t=[10 20 30; 5 25 12; 22 3 7]; %已知t时期的中间品交易矩阵
38 pi_t=[2/7;2/6;3/5]; %价格缩减因子
39 f_t=[65;40;104]; %t时期的最终需求向量
40 x_t=[125;82;136]; %t时期的总产出
```

\*参考书目为 Ronald E. Miller 和 Peter D. Blair 写的《Input-Output Analysis》

```

41 v_t=[88 34 87]; %t时期的增加值
42 Z_b=diag(pi_t)*Z_t; %基年价格下的交易矩阵
43 f_b=diag(pi_t)*f_t; %基年价格下的最终需求
44 x_b=diag(pi_t)*x_t; %基年价格下的总产出
45 v_b=(x_b'-ones(size(Z_b,1),1)*Z_b)'; %基于基年价格所必须的增加值
46 r_t_hat=diag(v_b)*(diag(v_t))^( -1); %计算增加值缩减因子
47
48 %%部门加总
49 Z = [26.5 75 46 53; 34 5 68 68; 41.5 38 52 83; 33.5 6 53 67]; %已知经济交易矩阵
50 f = [659.5; 1835; 2515.5; 1560.5]; %最终需求向量
51 x = sum(Z,2)+f; %总产出向量
52 A = Z*diag(x)^( -1); %技术系数矩阵
53 S_1 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 1]; %部门加总矩阵1
54 S_2 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 1 0 0 1]; %部门加总矩阵2
55 f_1star = S_1*f; %以第1种方案加总部门后的最终需求向量
56 Z_1star = S_1*Z*S_1'; %以第1种方案加总部门后的中间品交易矩阵
57 x_1star = Z_1star*ones(size(Z_1star,1),1)+f_1star; %以第1种方案加总部门后的总产出
58 f_2star = S_2*f; %以第2种方案加总部门后的最终需求向量
59 Z_2star = S_2*Z*S_2'; %以第2种方案加总部门后的中间品交易矩阵
60 x_2star = Z_2star*ones(size(Z_2star,1),1)+f_2star; %以第2种方案加总部门后的总产出
61 A_1star = Z_1star*(diag(x_1star))^( -1); %方案1下的技术矩阵
62 B_1star = (eye(size(A_1star,1))-A_1star)^( -1); %方案1下的列昂惕夫逆
63 A_2star = Z_2star*(diag(x_2star))^( -1); %方案2下的技术矩阵
64 B_2star = (eye(size(A_2star,1))-A_2star)^( -1); %方案2下的列昂惕夫逆
65 f_tilde = [10; 10; 10; 10]; %经济中给定的新的需求
66 f_tilde_1star = S_1*f_tilde; %应用方案1进行部门加总后得到的最终需求
67 f_tilde_2star = S_2*f_tilde; %应用方案2进行部门加总后得到的最终需求
68 x_tilde_1star = (eye(size(A_1star,1))-A_1star)^( -1)*f_tilde_1star; %方案1加总后的总产出向量
69 x_tilde_2star = (eye(size(A_2star,1))-A_2star)^( -1)*f_tilde_2star; %方案2加总后的总产出向量
70 x_tilde = (eye(size(A,1))-A)^( -1)*f_tilde; %未进行加总模在新最终需求下的总产出向量
71 S_1*x_tilde; S_2*x_tilde; %两种加总方式产生的误差比较

```

### 例：进口剔除

假设一个投入产出经济为

$$Z = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 \\ 50 & 250 & 150 \\ 200 & 150 & 550 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

根据  $Z$  和  $x$  可以计算出

$$\text{最终需求: } f = x - Zi = \begin{bmatrix} 650 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \text{总中间产出: } u = Zi = \begin{bmatrix} 350 \\ 450 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\text{交易系数矩阵: } A = Z\hat{x}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.5 & 0.15 \\ 0.2 & 0.3 & 0.55 \end{bmatrix} \quad \text{增加值: } v' = x' - i'Z = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\text{完全消耗系数矩阵: } L = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5385 & 0 & 0 \\ 0.4487 & 2.5000 & 0.8333 \\ 0.9829 & 1.6667 & 2.7778 \end{bmatrix}$$

假设交易矩阵包含竞争性进口，则有  $Z = M + D$  且  $f = g - m$ 。另假设题目已知进口中间投入矩阵为：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 25 & 20 & 30 \\ 25 & 50 & 100 \end{bmatrix}$$

则国内中间投入矩阵为

$$\mathbf{D} = \mathbf{Z} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 25 & 200 & 120 \\ 175 & 100 & 450 \end{bmatrix}$$

各个行业总进口向量

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 100 \\ 105 \\ 75 \end{bmatrix}$$

除进口其外的其他最终需求向量

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 750 \\ 155 \\ 275 \end{bmatrix}$$

同时，平衡方程  $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{i} + \mathbf{g}$  成立

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{i} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 25 & 200 & 120 \\ 175 & 100 & 450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 750 \\ 155 \\ 275 \end{bmatrix}$$

那么新的总增加值向量为

$$\tilde{\mathbf{v}}' = \tilde{\mathbf{m}}' + \mathbf{v}' = \mathbf{x}' - \mathbf{i}'\mathbf{D} = [550 \quad 200 \quad 430]$$

与原来的增加值向量  $\mathbf{v}' = [400 \quad 100 \quad 300]$  相比,每个产业增加了所有进口的总价值  $\tilde{\mathbf{m}}' = [150 \quad 100 \quad 130]$ 。

当  $\mathbf{m}$  已知, 而  $\mathbf{M}$  未知时, 可以利用两种方法来近似估计国内交易矩阵和产业间进口。

**近似方法 1:**

采用与中间产出分配相同的比例来分配  $\mathbf{m}$  近似。首先找出中间产出的比例

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.1111 & 0.5556 & 0.3333 \\ 0.2222 & 0.1667 & 0.6111 \end{bmatrix}$$

并用它对  $\mathbf{m}$  在产业间产出中进行分配:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{m}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 100.0000 & 0 & 0 \\ 11.6667 & 58.3333 & 35.0000 \\ 38.8889 & 29.1667 & 106.9444 \end{bmatrix}$$

在这种方法中  $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{i} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{i}$ 。此时可以计算

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 250.0000 & 0 & 0 \\ 38.3333 & 191.6667 & 115.0000 \\ 161.1111 & 120.8333 & 443.0556 \end{bmatrix}$$

此时的平衡方程  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{i} + \mathbf{g}$  成立:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{i} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 250.0000 & 0 & 0 \\ 38.3333 & 191.6667 & 115.0000 \\ 161.1111 & 120.8333 & 443.0556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 750 \\ 155 \\ 275 \end{bmatrix}$$

此时，新的总增加值向量为  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{x}' - \mathbf{i}'\tilde{\mathbf{D}}' = [550.5556 \quad 187.5000 \quad 441.9444]$ 。与原来的增加值向量  $\tilde{\mathbf{v}}' = [550 \quad 200 \quad 430]$  比，每个产业增加了所有进口的总价值  $\tilde{\mathbf{m}}' = [150.5556 \quad 87.5000 \quad 141.9444]$ 。此种近似估计方法，假设最终需求不直接消耗进口。

### 近似方法 2

计算调整因子

$$r_i = \frac{m_i}{u_i + f_i} \quad \text{带入数据得出: } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.1000 \\ 0.2100 \\ 0.1750 \end{bmatrix}$$

此时产业间交易矩阵的估计为

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{r}}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 315.0000 & 0 & 0 \\ 39.5000 & 197.5000 & 118.5000 \\ 165.0000 & 123.7500 & 453.7500 \end{bmatrix}$$

产业间进口矩阵的估计为

$$\bar{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 35.0000 & 0 & 0 \\ 10.5000 & 52.5000 & 31.5000 \\ 35.0000 & 26.2500 & 96.2500 \end{bmatrix}$$

最终需求所直接消耗的进口向量

$$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 65.0000 \\ 10.5000 \\ 17.5000 \end{bmatrix}$$

所以不含产业间进口以及最终需求直接消费的进口的最终需求向量为：

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 685.0000 \\ 144.5000 \\ 257.5000 \end{bmatrix}$$

此时的调整后的行平衡公式  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{i} + \bar{\mathbf{g}}$  仍然成立：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{i} + \bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 315.0000 & 0 & 0 \\ 39.5000 & 197.5000 & 118.5000 \\ 165.0000 & 123.7500 & 453.7500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 685.0000 \\ 144.5000 \\ 257.5000 \end{bmatrix}$$

该平衡方程  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{i} + \bar{\mathbf{g}}$  只解释国内交易，对于产业间进口则重新分配给增加值。新的总增加值向量为  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{x}' - \mathbf{i}'\bar{\mathbf{D}} = [480.5 \quad 178.75 \quad 427.75]$ ，与原来的总增加值向量  $\tilde{\mathbf{v}}' = [550 \quad 200 \quad 430]$  比，对每个产业增加了所以产业间进口，即  $\tilde{\mathbf{m}}' = [80.5 \quad 78.75 \quad 127.75]$  不含最终需求中直接消耗的进口价值。

### 例：双缩减

如表格中有一个 2 年度的三部门经济，有两个不同的产业价格，年度 1 和年度 2。为表示年度 1 价格下的交易、最终需求和总产出。需要先计算出

$$\boldsymbol{\pi}^t = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/6 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

据此可以计算出  $\mathbf{Z}^b = \hat{\boldsymbol{\pi}}^t \mathbf{Z}^t$ ,  $\mathbf{f}^b = \hat{\boldsymbol{\pi}}^t \mathbf{f}^t$ ,  $\mathbf{x}^b = \hat{\boldsymbol{\pi}}^t \mathbf{x}^t$  如下：

$$\mathbf{Z}^b = \hat{\boldsymbol{\pi}}^t \mathbf{Z}^t = \begin{bmatrix} 2.8571 & 5.7143 & 8.5714 \\ 1.6667 & 8.3333 & 4.0000 \\ 13.2000 & 1.8000 & 4.2000 \end{bmatrix}$$

表 1: 双缩减

	产业间交易			最终需求	总产出	价格	
	1	2	3			年度 1	年度 2
1	10	20	30	65	125	2	7
2	5	25	12	40	82	2	6
3	22	3	7	104	136	3	5
增加值	88	34	87	209			

$$\mathbf{f}^b = \hat{\pi}^t \mathbf{Z}^t = \begin{bmatrix} 18.5714 \\ 13.3333 \\ 62.4000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^b = \hat{\pi}^t \mathbf{x}^t = \begin{bmatrix} 35.7143 \\ 27.3333 \\ 81.6000 \end{bmatrix}$$

根据表格1, 可以知道原始的增加值为  $(\mathbf{v}^t)' = [88 \quad 34 \quad 87]$ 。为了确保总投入仍然等于总产出, 此时必须有的增加值为:

$$(\mathbf{v}^b)' = (\mathbf{x}^b)' - \mathbf{i}' \mathbf{Z}^b = [17.9905 \quad 11.4857 \quad 64.8286]$$

此时可以得到增加值缩减因子为:

$$\hat{\mathbf{r}}^t = \hat{\mathbf{x}}^b (\hat{\mathbf{v}}^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2044 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3378 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7452 \end{bmatrix}$$

#### 例: 部门加总

已知四个部门的投入产出模型如下:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 26.5000 & 75.0000 & 46.0000 & 53.0000 \\ 34.0000 & 5.0000 & 68.0000 & 68.0000 \\ 41.5000 & 38.0000 & 52.0000 & 83.0000 \\ 33.5000 & 6.0000 & 53.0000 & 67.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 659.5 \\ 1835 \\ 2515.5 \\ 1560.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 860 \\ 2010 \\ 2730 \\ 1720 \end{bmatrix}$$

考虑两种部门加总方式, 其加总矩阵分别为

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

加总矩阵  $\mathbf{S}_1$  表示将四部门模型中的模型 3 和模型 4 合并, 加总矩阵  $\mathbf{S}_2$  表示将四部门模型中的部门 1 和部门 4 合并为三部门模型中的部门 3, 同时将四部门模型中的模型 2 和模型 3 分别改变为三部门模型中的部门 1 和部门 2。

接下来计算两种部门加总方案中相应的  $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{x}$  部门加总后的值。对于  $\mathbf{S}_1$  方案有:

$$\mathbf{f}_1^* = \mathbf{S}_1 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 659.5 \\ 1835 \\ 4076 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_1^* = \mathbf{S}_1 \mathbf{Z} \mathbf{S}_1' = \begin{bmatrix} 26.5000 & 75.0000 & 99.0000 \\ 34.0000 & 5.0000 & 136.0000 \\ 75.0000 & 44.0000 & 255.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1^* = \mathbf{Z}_1^* \mathbf{i} + \mathbf{f}_1^* = \begin{bmatrix} 860 \\ 2010 \\ 4450 \end{bmatrix}$$

同样的方法, 对于  $\mathbf{S}_2$  加总方案, 有:

$$\mathbf{f}_2^* = \mathbf{S}_2 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1835 \\ 2515.5 \\ 2220 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_2^* = \mathbf{S}_2 \mathbf{Z} \mathbf{S}_2' = \begin{bmatrix} 5.0000 & 68.0000 & 102.0000 \\ 38.0000 & 52.0000 & 124.5000 \\ 81.0000 & 99.0000 & 180.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2^* = \mathbf{Z}_2^* \mathbf{i} + \mathbf{f}_2^* = \begin{bmatrix} 2010 \\ 2730 \\ 2580 \end{bmatrix}$$

接下来分别计算两种部门加总方式的技术系数矩阵和列昂惕夫逆，首先对于  $S_1$  方法，有：

$$\mathbf{A}_1^* = \mathbf{Z}_1^*(\hat{\mathbf{x}}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0308 & 0.0373 & 0.0222 \\ 0.0395 & 0.0025 & 0.0306 \\ 0.0872 & 0.0219 & 0.0573 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0357 & 0.0393 & 0.0257 \\ 0.0440 & 1.0049 & 0.0336 \\ 0.0968 & 0.0270 & 1.0639 \end{bmatrix}$$

同样，对于  $S_2$  方法，有：

$$\mathbf{A}_2^* = \mathbf{Z}_2^*(\hat{\mathbf{x}}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0249 & 0.0395 \\ 0.0189 & 0.0190 & 0.0483 \\ 0.0403 & 0.0363 & 0.0698 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0048 & 0.0271 & 0.0441 \\ 0.0215 & 1.0220 & 0.0539 \\ 0.0444 & 0.0410 & 1.0790 \end{bmatrix}$$

假设给定经济一个新的最终需求  $\tilde{\mathbf{f}}$ ：

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

那么应用两种部门加总方案所得到的最终需求分别为：

$$\tilde{\mathbf{f}}_1^* = \mathbf{S}_1 \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}}_2^* = \mathbf{S}_2 \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

对应的总产出向量分别为

$$\tilde{\mathbf{x}}_1^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1^*)^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_1^* = \begin{bmatrix} 11.2645 \\ 11.1613 \\ 22.5170 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2^*)^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_2^* = \begin{bmatrix} 11.2016 \\ 11.5137 \\ 22.4341 \end{bmatrix}$$

在影响分析中，最初的未加总过的模型中的总产出向量为

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 11.3033 \\ 11.2016 \\ 11.5137 \\ 11.1308 \end{bmatrix}$$

现在利用两种部门加总方案对总产出向量  $\tilde{\mathbf{x}}$  进行部门加总，可以得到

$$\mathbf{S}_1 \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 11.3033 \\ 11.2016 \\ 22.6445 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 11.2016 \\ 11.5137 \\ 22.4341 \end{bmatrix}$$

观察上述结果发现  $\tilde{\mathbf{x}}_1^* \neq \mathbf{S}_1 \tilde{\mathbf{x}}$  以及  $\tilde{\mathbf{x}}_2^* = \mathbf{S}_2 \tilde{\mathbf{x}}$ ，此处说明了第二种方案进行部门加总后不存在误差，第二种方案是将部门 1 和部门 4 合并，此处我们观察技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z} \hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0308 & 0.0373 & 0.0168 & 0.0308 \\ 0.0395 & 0.0025 & 0.0249 & 0.0395 \\ 0.0483 & 0.0189 & 0.0190 & 0.0483 \\ 0.0390 & 0.0030 & 0.0194 & 0.0390 \end{bmatrix}$$

发现，该经济技术系数矩阵的第一列和第四列的是相等的，说明两个产业具有相同的生产特征，也就是相当地于是同一个产业额，所以加总不会产生误差。