目录

1 作业

1.1 第四次作业

1 5 男 6 女中取 3 男 4 女的方法数

即 $\binom{5}{3}\binom{6}{4} = 150$ 种.

2 考虑含有充分多个蓝, 绿, 黄, 白色石子的罐子 (认为石子除颜色不可分辨), 从罐子中取三个石子的组合数量.

即 $e_1 + \cdots + e_4 = 3$ 的非负整数解的个数, 即 $\binom{4+3-1}{3} = 20$.

3 重排单词 MATHEMATICS, 使得排列中最后一个元音为 I 的方法数.

单词长 11, 有辅音字母 2 个 M,2 个 T,1 个 H,1 个 C 和 1 个 S; 元音字母 2 个 A,1 个 E 和 1 个 I. 首先从 11 个位置中选择 4 个放元音字母, 即 $\binom{11}{4} = 330$ 种可能; 再排列元音字母使 I 为最后一个, 即排列 A,A,E, 有 $3!/2! = 3$ 种可能. 最后在剩下 7 个位置放辅音字母, 它们有 $\dfrac{7!}{2!2!} = 1260$ 种排列. 因此答案是 $330 \cdot 3 \cdot 1260 = 1247400$.

4 证明恒等式:

$$(1)\quad \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}; \qquad (2)\quad \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

(1) 注意到

$$\binom{n+1}{r+1}-\binom{n}{r} = \binom{n}{r+1}, \binom{n+1}{r+1}-\left(\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}\right) = \binom{n-1}{r+1}, \cdots, \binom{n+1}{r+1}-\sum_{k=r+1}^{n}\binom{k}{r} = \binom{r+1}{r+1} = \binom{r}{r}$$

从而得证.(2) 考虑生成函数 $f(x)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\binom{m+n}{r}x^r=(1+x)^{m+n}$, 我们有

$$f(x)=(1+x)^m(1+x)^n=\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)=\sum_{r=0}^{m+n}\sum_{i+j=r,i,j\geq 0}\binom{m}{i}\binom{n}{j}x^r$$

比较系数可得 $\sum\limits_{i+j=r}\binom{m}{i}\binom{n}{j}=\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$.

1.2 第五次作业

1 给出下式中 x^{18} 的系数.

$$(1)\quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k}\right)^6 \qquad (2)\quad (1-4x)^{-5} \qquad (3)\quad \frac{x-3x^3}{(1-x)^4}$$

证明. (1) 原式 $=(1-x^3)^{-6}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^{3k}$, 其中 x^{18} 的系数即 $k=6$, $\binom{11}{6}=462$.

(2)$(1-4x)^{-5}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-n}{k}4^kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}4^kx^k$, 其中 x^{18} 的系数即 $k=18$, $\binom{22}{4}4^{18}$.

(3) 考虑 $(1-x)^{-4}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, 即求 $a_{17}-3a_{15}$, 注意到 $a_k=\binom{k+3}{k}$, 故求得 $a_{17}-3a_{15}=-1308$. □

2 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\binom{n+k-1}{k}=2^n.$$

证明.

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\binom{n+k-1}{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\binom{-n}{k}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-n}=2^n$$

□

3 从 4 个孩子和 6 个大人中收 24 元, 每人至少给出 1 元, 但每个孩子至多给 4 元, 每个大人至多给 7 元. 问收钱的方法数.

证明. 生成函数为 $\left(\sum\limits_{k=1}^{4}x^k\right)^4\left(\sum\limits_{k=1}^{7}x^k\right)^6=x^4\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^4x^6\left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^6=x^{10}\frac{(1-x^4)^4(1-x^7)^6}{(1-x)^{10}}$, 取其中 x^{24} 次项为 $a_{24}=414143$. □

4 用便士 (pennies), 镍币 (nickels), 角币 (dimes) 和 25 分硬币 (quarters) 组成 r-排列, 其中至少有一个便士和奇数个 25 分硬币, 给出排列方法数.

证明. 硬币的面值实际上没有任何意义, 只需要当作四种不同种类的硬币 A,B,C,D 即可. 用指数生成函数方法计算, 其生成函数分别对应为 $\mathrm{e}^x-1,\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x,\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, 从而整体生成函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x-1)\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{4x}}{2}$$

其中 x^n 的系数为 $\frac{n!}{2}(4^n-3^n-2^n+1)$, 从而方法数是 $\frac{4^n-3^n-2^n+1}{2}$. □

5 安置 20 人于 3 个帐篷中, 第一个帐篷中至少有一人, 给出安置方法数.

证明. 若人是可区分的, 则注意到无限制的安置方法有 3^{20} 种, 而把所有人安置在除第一个帐篷外的帐篷中有 2^{20} 种方法, 故总体方法为 $3^{20}-2^{20}=3485735825$.

若不可区分, 即 $x_1+x_2+x_3=20, x_1\geq 1, x_2, x_3\geq 0$ 的整数解, 其等价于 $y_1+y_2+y_3=19, y_i\geq 0$ 的整数解数, 即 $\binom{19+3-1}{19}=\binom{21}{2}=210$. □

1.3 第六次作业

1 在 700 个家庭中有 150 个没有孩子,180 个仅有一个男孩,200 个仅有一个女孩, 有多少家庭有男孩 (们) 和女孩 (们)?

证明. $700-150-180-200=170$. □

2 把 6 本不同的书给 4 个孩子, 使得每个孩子拿到至少一本书有多少种方法?

证明. 记 X 为所有分配方法,A_k 为第 k 个学生没拿到书的所有方法, 即求 $A_\varnothing$, 显然 $A_\varnothing=X-\bigcup\limits_{k=1}^{4}A_k$. 而 $|X|=4^6, |A_k|=3^6, |A_i\cap A_j|=2^6, |A_i\cap A_j\cap A_k|=1^6=1, \left|\bigcap\limits_{k=1}^{4}A_k\right|=0^6=0$. 由容斥原理考虑:

$$\begin{aligned}|A_\varnothing|&=\sum_{I\subset[4]}(-1)^{|I|}|A_I|=|X|-\sum_{|I|=1}|A_I|+\sum_{|I|=2}|A_I|-\sum_{|I|=3}|A_I|+\sum_{|I|=4}|A_I|\\&=4^6-\binom{4}{1}3^6+\binom{4}{2}2^6-\binom{4}{3}1^6+\binom{4}{4}0^6\\&=4096-4\cdot 729+6\cdot 64-4\cdot 1+1\cdot 0=1560\end{aligned}$$

故有 1560 种方法. 另可用第二类 Stirling 数计算:$S(6,4)=65$, 而孩子可区分, 从而共有 $4!S(6,4)=1560$ 种方法. □

3 有多少种方法可以发出一手 6 张牌, 其中至少有一张 J, 至少有一张 8 且至少有一张 2?

证明. 记不出现 J,8,2 的一手 6 张牌的方法分别为 A_1, A_2, A_3,X 为所有可能方法. 注意到 $|X|=\binom{52}{6}, |A_i|=\binom{48}{6}, |A_i\cap A_j|=\binom{44}{6}, \left|\bigcap\limits_{k=1}^{3}A_k\right|=\binom{40}{6}$. 从而由容斥原理有

$$\begin{aligned}|A_\varnothing|&=\sum_{I\subset[3]}(-1)^{|I|}|A_I|=|X|-\sum_{|I|=1}|A_I|+\sum_{|I|=2}|A_I|-\sum_{|I|=3}|A_I|\\&=\binom{52}{6}-\binom{3}{1}\binom{48}{6}+\binom{3}{2}\binom{44}{6}-\binom{3}{3}\binom{40}{6}\\&=20358520-3\cdot 12271512+3\cdot 7153630-3838380=1166212\end{aligned}$$

故有 1166212 种方法. □

4 有多少个数位出现了 2,4,8 的十进制 m 位数?

证明. 记不出现 2,4,8 的 m 位数构成集合 A_1, A_2, A_3,X 为所有十进制 m 位数. 注意到 $|X| = 9\cdot 10^{m-1}, |A_i| = 8\cdot 9^{m-1}, |A_i\cap A_j| = 7\cdot 8^{m-1}, \left|\bigcap_{k=1}^{3} A_k\right| = 6\cdot 7^{m-1}$. 从而由容斥原理有

$$|A_\varnothing| = \sum_{I\subset[3]}(-1)^{|I|}|A_I| = |X| - \sum_{|I|=1}|A_I| + \sum_{|I|=2}|A_I| - \sum_{|I|=3}|A_I| = 9\cdot 10^{m-1} - 24\cdot 9^{m-1} + 21\cdot 8^{m-1} - 6\cdot 7^{m-1}$$

□

5 在如下条件下 $x_1+x_2+x_3+x_4 = 28$ 有多少个整数解? (1)$0\le x_i\le 12$. (2)$x_i\ge 0, x_1\le 6, x_2\le 10, x_3\le 15, x_4\le 21$?

证明. (1) 记满足 $x_i\ge 13$ 的整数解构成集合 A_i, 则 $|X| = \binom{28+4-1}{28} = \binom{31}{3}, |A_i| = \binom{28-13+4-1}{28-13} = \binom{18}{3}, |A_i\cap A_j| = \binom{28-13-13+4-1}{4-1} = \binom{5}{3}$, 更高阶均为 0. 由容斥定理知

$$|A_\varnothing| = \binom{31}{3} - \binom{4}{1}\binom{18}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{3} = 4495 - 4\cdot 816 + 6\cdot 10 = 1291$$

(2) 记满足 $x_1\ge 7, x_2\ge 11, x_3\ge 16, x_4\ge 22$ 的整数解构成集合 A_1, A_2, A_3, A_4, 我们有:

$$|X| = \binom{31}{3}, |A_1| = \binom{24}{3}, |A_2| = \binom{20}{3}, |A_3| = \binom{15}{3}, |A_4| = \binom{9}{3}, |A_1\cap A_2| = \binom{13}{3}, |A_1\cap A_3| = \binom{8}{3}$$

$$|A_2\cap A_3| = \binom{4}{3}, |A_1\cap A_4| = |A_2\cap A_4| = |A_3\cap A_4| = |A_i\cap A_j\cap A_k| = \left|\bigcap_{k=1}^{4} A_k\right| = 0$$

因此由容斥定理得

$$\begin{aligned}|A_\varnothing| &= |X| - (|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|) + (|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3|)\\ &= \binom{31}{3} - \left(\binom{24}{3}+\binom{20}{3}+\binom{15}{3}+\binom{9}{3}\right) + \left(\binom{13}{3}+\binom{8}{3}+\binom{4}{3}\right)\\ &= 4495 - 3703 + 346 = 1138\end{aligned}$$

□

2 第六章基础内容

2.1 生成函数模型

数列 $\{a_r\}_{r=0}^{\infty}$ 的生成函数即 $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$.[1]从简单情形开始, 考虑 $a_r = \binom{n}{r}$ 的生成函数

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r = (1+x)^n$$

在通过分配律计算 $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\text{个}}$ 的展开式时, 我们首先是从 n 个 $(1+x)$ 中的每个 $(1+x)$ 中取出 1 或 x, 将其相乘, 最后对所有取法累加得到结果. 如取 $n=3$ 时

$$(1+x)^3 = (1+x)(1+x)(1+x) = \underbrace{111}_{x^0} + \underbrace{11x+1x1+x11}_{x^1} + \underbrace{1xx+x1x+xx1}_{x^2} + \underbrace{xxx}_{x^3} = 1+3x+3x^2+x^3$$

[1] 生成函数即 (一般) 无限项 x^n 的线性累加, 实际上即形式幂级数, 因为我们实际上不考虑其收敛性.

然而, 注意到所谓的"在 $(1+x)$ 中取出 1 或 x", 实质上即在集合 $\{1,x\}$ 中取出一个元素, 而"在 n 个 $(1+x)$ 中的每个 $(1+x)$ 中取出 1 或 x", 实质上是在

$$\{1,x\}^n = \underbrace{\{1,x\}\times\{1,x\}\times\cdots\times\{1,x\}}_{n\text{个}} = \{(x^{e_1},x^{e_2},\cdots,x^{e_n})|x^{e_i}\in\{1,x\}\}$$

中取一个元素 $(x^{e_1},x^{e_2},\cdots,x^{e_n})$, 此即分量 x^{e_i} 在 $\{1,x\}$ 中取的一个长度为 n 的 (可重复) 排列. 而"所有取法"即该集合的所有子集. 因此我们可以将上式重写为:

$$(1+x)^n = \sum_{(x^{e_1},\cdots,x^{e_n})\in\{1,x\}^n} x^{e_1}\cdots x^{e_n} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_n=k\\0\le e_i\le 1}} x^k$$

因此通过对系数的比较, 我们有:

$$\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_n=k\\0\le e_i\le 1}} 1 = \#\left\{(e_1,\cdots,e_n)|\sum_{k=0}^{n} e_i = k, e_i=0,1\right\} = \binom{n}{k}$$

注意到 $e_i=0,1$ 实际就是"是否选择第 i 个对象", 换言之, 左端即从 n 元取 k 个的方法数, 因此上式从组合角度来看是显然的.

但生成函数的重要意义在于能考虑更广泛的组合问题, 哪怕仅考虑多项式的幂次积形式. 我们考虑稍微复杂一些的情形.

例 1. *$f(x)=(1+x+x^2)^4$ 的展开, 其理应对应到一个数列 $\{a_k\}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. 同上考虑, 我们有*

$$(1+x+x^2)^4 = \sum_{(x^{e_1},\cdots,x^{e_4})\in\{1,x,x^2\}^4} x^{e_1+\cdots+e_4} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_4=k\\e_i=0,1,2}} x^k$$

$$\#\left\{(e_1,\cdots,e_4)|\sum_{i=1}^{4} e_i = k, e_i=0,1,2\right\} = a_k$$

注 1. *下式左端的组合意义是: 考虑 4 个种类的球, 每种各 2 个球, 从这些球中拿出 k 个球的方法数.*

从而我们可以发现, 这个组合问题的解实际上就等价于生成函数 $f(x)$ 的展开式系数. 换言之, 我们得到了对应关系

$$\text{生成函数} \leftrightarrow \text{数列} \leftrightarrow \text{组合问题}$$

当然我们也可以从组合问题推出生成函数. 考虑组合问题: 我们有 n 个种类的对象, 其中第 i 种含有 n_i 个同种类 (可视作重复) 的对象, 要从这全部中取出 r 个对象, 问取法有多少.

这个问题实际上等价于, 方程 $\sum_{k=1}^{n} e_i = r, 0\le e_i\le m_i$ 的整数解 $(e_1,\cdots,e_n)$ 的个数 a_r. 我们考虑生成函数 $f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, 则有

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\#\left\{(e_1,\cdots,e_n)|\sum_{k=1}^{n} e_i = r, 0\le e_i\le m_i\right\}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_n=r\\e_i=0,1,\cdots,m_i}} x^{e_1+\cdots+e_n}$$

注意到多项式乘法 (也即用分配律计算) 有:

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{t=0}^{m+n}\sum_{\substack{i+j=t\\0\le i\le m,0\le j\le n}} a_i b_j x^t$$

我们有

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_n=r\\ e_i=0,1,\cdots,m_i}} x^{e_1+\cdots+e_n}=\left(\sum_{e_1=0}^{m_1}x^{e_1}\right)\cdots\left(\sum_{e_1=0}^{m_n}x^{e_n}\right)$$

此即该类组合问题的生成函数. 注意到问题中第 i 种对象可以取 $e_i=0,1,\cdots,m_i$ 个对应于生成函数中的 $\sum\limits_{e_i=0}^{m_i}$ 项, 而有多种对象即该形式的项相乘. 此即生成函数的直观理解.

2.2 常用的多项式展开

$$\sum_{k=0}^{m}x^k=\frac{1-x^{m+1}}{1-x},\quad \sum_{k=0}^{\infty}x^k=(1-x)^{-1},\quad (1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\quad (1-x^m)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{km},$$

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}b_\ell x^\ell\right)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i+j=t}a_ib_jx^t$$

2.3 分拆

将正整数 n 分为若干个 $\le n$ 的正整数之和 (不计次序) 的方式即为 n 的分划数 $p(n)$. 我们考虑 n 可以由 e_i 个正整数 i 累加得到, 即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}e_i=n, e_i\ge 0$. 通过与上面相同的推理, 我们可以得到生成函数

$$f(x)=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{2e_2}\right)\cdots=(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$$

遗憾的是, 这个函数从各种意义上来说都是不初等的 (其与 q-Pochhammer 函数相关), 我们没有简单的方法给出分划数. 与如果仅考虑以不同正整数之和构造 n, 同上推理我们可以得到生成函数

$$g(x)=\left(\sum_{e_1=0}^{1}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{1}x^{2e_2}\right)\cdots=(1+x^1)(1+x^2)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

这也是非初等的.

如果我们不直接考虑所有正整数 n, 而仅固定一个 $n\in\mathbb{N}$ 考虑其分划数, 是比较简单的. 因为参与 n 的分划的正整数仅含有 $\le n$ 的数, 因此可以有:

$$f_n(x)=\left(\sum_{e_1=0}^{n}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\lfloor n/2\rfloor}x^{2e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_n=0}^{1}x^{ne_n}\right)$$

其中 x^n 项系数即 n 的分划数 $p(n)$.

3 第六章例题

3.1 Lecture 19

例 2. 计算 $(1+x+x^2)^4$ 中 x^3 的系数.

可以暴力展开计算,PPT 上的过程细致的将展开过程写下来了: 从 4 个集合 $\{1, x, x^2\}$ 中各取一个元素相乘并对所有取法累加, 因此 x^3 的系数等价于方程 $\sum_{i=1}^{4} e_i = 3, 0 \le e_i \le 2$ 的整数解的个数. 给出整数解的个数实际上是一个组合问题, 我们可以将该题等价于: 从 4 个种类的球, 每种各 2 个球中取出 3 个球的方法数.

由第五章中可重复选取的组合方法数知, 方程 $\sum_{i=1}^{4} e_i = 3$ 的非负整数解个数为 $\binom{3+4-1}{3}$, 但该题中不可能取出 3 个同种类的, 因此需要去掉这种可能, 即去掉 4 组解 $(e_1, \cdots, e_4) = (3,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), (0,0,0,3)$, 因此最终答案是 $\binom{3+4-1}{3} - 4$.

例 3. *从 3 种对象中选取 6 个, 每种最多能选 4 个/每种能选无上限个, 求方法数和生成函数.*

三种对象中每种最多能选 4 个, 生成函数即

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4) = (1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$

同理, 三种对象中每种可选无上限个时, 生成函数即 $g(x) = (1+x+x^2+\cdots)^3 = (1-x)^{-3}$. 实际上生成函数的 x^k 次项系数即 "从中选 k 个的方法数", 如 $k=6$ 时的方法数分别为 $a_6 = \binom{6+3-1}{6} - 3 - 2\binom{3}{2} = 19, b_6 = \binom{6+3-1}{6} = 28$.

例 4. *将 12 个便士硬币放在 4 个 (不同) 杯子中, 每个杯子中至少有一个硬币, 求方法数.*

类似前文, 生成函数即 $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)^4 = x^4(1-x)^{-4}$, 方法数即 a_{12}. 即计算 $g(x) = (1-x)^{-4}$ 中 x^8 的系数 $b_8 = \binom{8+4-1}{8}$.

例 5. *r 个相同对象放在五个不同盒子中, 前两个盒子中只能放不超过 10 的偶数个, 后三个盒子只能放 3 到 5 个.*

前两个盒子对应的生成函数是 $1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^10$, 后三个对应的是 $x^3+x^4+x^5$, 因此总的生成函数是 $(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^10)^2(x^3+x^4+x^5)^3$.

例 6. *用若干个便士 (1 分), 镍币 (5 分), 角币 (10 分) 和 25 分硬币换 1 元 (100 分) 零钱的方法数.*

能取无上限个便士 (1 分) 即对应于生成函数 $1+x+x^2+\cdots = (1-x)^{-1}$, 同理对其他三种硬币也有 $(1-x^5)^{-1}, (1-x^{10})^{-1}, (1-x^{25})^{-1}$, 因此最终的生成函数是 $g(x) = (1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}$, 答案即取其 x^{100} 项系数 a_{100}.

事实上该问题等价于方程组 $e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = 100$ 的非负整数解数, 其中 e_i 是第 i 种硬币选取的数量. 如果考虑生成函数, 即对方程组 $e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = k$ 的解数乘上 x^k 再求和, 有:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \#\{(e_1, \cdots, e_4) | e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = k, e_i \in \mathbb{N}\} x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{e_1+5e_2+10e_3+25e_4=k} x^k \\
&= \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{5e_2}\right)\left(\sum_{e_3=0}^{\infty} x^{10e_3}\right)\left(\sum_{e_4=0}^{\infty} x^{25e_4}\right) = g(x)
\end{aligned}$$

此即上述生成函数, 因此自然可得结果为 a_{100}.

例 7. *n 个 6 面骰子结果之和为 r 的可能方法数 a_r 的生成函数.*

因为每个骰子的可能结果仅有 1 到 6, 因此对应于 $x + x^2 + \cdots + x^6$, 从而 n 个即 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^n = x^n(1 + x + \cdots + x^5)^n$.

当然我们也可以认为 $a_r=\#\left\{(e_1,\cdots,e_n)|\sum_{k=1}^{n}e_i=r,1\le e_i\le 6\right\}$, 则

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^r=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1+\cdots e_n=r\\e_i=1,2,3,4,5,6}}x^r=\left(\sum_{e_1=1}^{6}x^{e_1}\right)\cdots\left(\sum_{e_n=1}^{6}x^{e_n}\right)=\left(\sum_{k=1}^{6}x^k\right)^n$$

例 8. *从 5 个巧克力味,5 个草莓味,3 个柠檬味,3 个樱桃味甜甜圈种取 r 个的方法数 a_r 的生成函数. 以及要求所取 r 个中每个味道都有的方法数 b_r 及其生成函数.*

记第 i 个味道甜甜圈取 e_i 个, 则 a_r 即 $\sum_{i=1}^{4}e_i=r,0\le e_1,e_2\le 5,0\le e_3,e_4\le 3$ 的整数解数量. 因此

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^r=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_4=r\\0\le e_1,e_2\le 5,0\le e_3,e_4\le 3}}x^r=\left(\sum_{e_1=0}^{5}x^{e_1}\right)\cdots\left(\sum_{e_4=0}^{3}x^{e_4}\right)=(1+x+\cdots+x^5)^2(1+x+x^2+x^3)^2$$

此即生成函数. 对 b_r 有完全类似的推理. 可以注意到生成函数中 $\sum_{k=0}^{5}x^k$ 的部分即对应于可以取 $0,1,\cdots,5$ 个甜甜圈的味道,$\sum_{k=0}^{3}x^k$ 即可取三个甜甜圈的味道, 将其相乘即可得到生成函数.

3.2 Lecture 20

例 9. *从 3 种 (plain, pepperoni, or vegetable) 披萨中点 10 个, 求点单方法数. 要求 (1) 每种至少有两个;(2) 最多 2 个红肠 (pepperoni) 披萨;(3) 蔬菜披萨有偶数个;(4) 有偶数个蔬菜披萨和奇数个红肠披萨.*

(1) 生成函数为 $(x^2+x^3+\cdots)^3=x^6(1-x)^{-3}$,$x^{10}$ 系数即 $\binom{4+3-1}{3}$. (2) 生成函数为 $(1-x)^{-2}(1+x+x^2)$,x^{10} 系数即 $\binom{10+2-1}{10}+\binom{9+2-1}{9}+\binom{8+2-1}{8}=30$. (3) 生成函数为 $(1-x)^{-2}(1-x^2)^{-1}$,x^{10} 系数即 $\sum_{k=0}^{5}\binom{(10-2k)+2-1}{10-2k}=36$. (4) 生成函数为 $(1-x)^{-1}\cdot(1-x^2)^{-1}\cdot x(1-x^2)^{-1}=x(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}$, 其 x^{10} 系数即 $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}$ 中 x^9 系数, 注意到 $(1-x^2)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k}$, 故 x^9 系数为 $\sum_{i+2j=9}1\cdot(j+1)=\sum_{j=0}^{4}(j+1)=15$.

3.3 Lecture 21

例 10. *给出 5 的分划数, 以及用不同正整数之和给出 5 的方法数.*

如上用生成函数的方法计算:

$$f_5(x)=\left(1+x+\cdots+x^5\right)\left(1+x^2+x^4\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^5\right),g_5(x)=\prod_{k=1}^{5}(1+x^5)$$

其系数分别为 $a_5=7,b_5=3$. 实际上这样算和直接手动验算 5 的分划是本质一样的.

例 11. *证明任意正整数 n 可以被唯一写成 2 的不同幂之和.*

证明. 正整数 n 可以被写成 2 的不同幂之和的方法数为 a_n, 其生成函数为

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$$

即证 $a_n=1,f(x)=(1-x)^{-1}$. 注意到

$$(1-x)f(x)=(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots=(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots=\cdots=(1-x^{2^k})(1+x^{2^k})\cdots=1$$

因此得证. □

例 12. *(1) 将五个相同的硬币分组的方法数 (每组至少有一个);(2) 将五个相同的硬币放入三个可分/不可分的杯子中. 每个杯子中***至少有一个***硬币.*

(1) 即计算 5 的分划数, 因为这些组是不可分/不计次序的.(2) 若杯子可分, 则化作上一节的问题. 若不可分, 则需要考虑 Young 图.(我不确定会不会要求现场构造.)

3.4 Lecture 22

3.5 Lecture 23

3.6 Lecture 24