高等代数第五章章节测验

学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	总分
满分	10	20	40	30	100
得分					

一、填空题 (本题共 2 小题, 每题 5 分, 共 10 分)

1. 多项式 $x^3-6x^2+15x-14$ 的有理根是________.

解答 2 □

2. 若 $(x-2)^2 \mid Ax^4+Bx^2+16$, 则 $4A+B=$________.

解答 -4 □

二、辨析题 (本题共 4 小题, 每题 5 分, 其中判断正误 2 分, 给出理由 3 分, 共 20 分)

3. 对于多项式 $f(x)$, 若 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根, 则 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根.

解答 错误. 取 $f(x)=x^{m+1}+1, f'(x)=(m+1)x^m, 0$ 为 f' 的 m 重根但不是 f 的 $m+1$ 重根. □

4. x^2+1 在有理数域上可约.

解答 错误. 若 x^2+1 在 $\mathbb{Q}$ 上可约则仅能分解为一次因式的积, 且其有理根仅可能为 ±1. 代入计算发现均不是根, 从而不可约. □

5. $x^4-8x^3+12x^2+2$ 在有理数域上可约.

解答 错误. 取 $p=2$ 用 Eisenstein 判别法,$2\mid -8, 2\mid 12, 2\mid 2, 2^2\nmid 2$, 从而知其不可约. □

6. x^6+x^3+1 在有理数域上可约.

解答 错误. 代换 $x=t+1$, 故原式 $=(t+1)^6+(t+1)^3+1=t^6+6t^5+15t^4+21t^3+18t^2+9t+3$. 用 Eisenstein 判别法 (取 $p=3$) 知其在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

三、计算题 (本题共 4 小题, 每题 10 分, 共 40 分)

7. 把 x^5 表示为 $x-1$ 的方幂和形式, 即表示为 $c_0+c_1(x-1)+\cdots$ 的形式.

解答

$$(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$$

□

8. 求多项式 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ 与 $g(x)=x^3+x^2-x-1$ 的最大公因式.

解答

$$r(x)=f(x)-xg(x)=-2x^2-3x-1,$$

$$r_1(x)=g(x)-\frac{1-2x}{4}r(x)=-\frac{3}{4}(x-1),$$

$$r_2(x)=r(x)-\frac{8x+4}{3}r_1(x)=0$$

从而 $(f(x),g(x))=x-1$. □

9. 求使得多项式 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根的 t 值.

解答 $f'(x)=3x^2-6x+t$, 从而

$$r(x)=f(x)-\frac{x-1}{3}f'(x)=\frac{t-3}{3}(2x+1),$$

因此 $t=3$ 时 $r(x)=0, f'(x)\mid f(x)$, 从而 $f(x)$ 有重根. 若否, 则取

$$r_1(x)=f'(x)-\frac{6x-15}{4}(2x+1)=t+\frac{15}{4},$$

从而仅当 $t=-15/4$ 时 $r_1(x)=0, (f(x),f'(x))=2x+1$, 从而 $f(x)$ 有重根. 因此答案为 $t=3$ 或 $t=-15/4$. □

10. 求多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有重根的条件.

解答 $p=q=0$ 时 $f(x)=x^3$ 显然有重根; $p=0,q\neq 0$ 时 $f(x)=x^3+q$ 没有重根; $p\neq 0,q=0$ 时 $f(x)=x(x^2+p)$ 没有重根, 因此下设 $p\neq 0,q\neq 0$.

由于 $f'(x)=3x^2+p$, 因此作带余除法

$$r(x)=f(x)-\frac{x}{3}f'(x)=\frac{2p}{3}\left(x+\frac{3q}{2p}\right),r_1(x)=f'(x)-\left(3x-\frac{9q}{2p}\right)\left(x+\frac{3q}{2p}\right)=\frac{27q^2}{4p^2}+p,$$

从而 $r_1(x)=0$, 即 $4p^3+27q^2=0$ 时 $(f(x),f'(x))\neq 1$, 即 $f(x)$ 有重根. 而 $p=q=0$ 时同样满足该式, 因此 $4p^3+27q^2=0$ 时 $f(x)$ 有重根. □

四、证明题 (本题共 3 小题, 每题 10 分, 共 30 分)

11. $p(x)$ 是次数大于 0 的多项式, 若对于任意多项式 $f(x),g(x),p(x)\mid f(x)g(x)$ 可推出 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$, 证明 $p(x)$ 是不可约多项式.

解答 若 p 可被分解为次数小于 $\deg p$ 的多项式 q,r 之积, 则 $p\mid qr=p$ 但 $p\nmid q,p\nmid r$, 矛盾. □

12. 对于多项式 $f_1,\cdots,f_m,g_1,\cdots,g_n$, 若 $(f_i,g_j)=1(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$, 证明 $(f_1\cdots f_m,g_1\cdots g_n)=1$.

解答 首先证明 $n=1$ 的情形, 即 $\forall i=1,\cdots,m,(f_i,g)=1$ 则有 $(f_1\cdots f_m,g)=1$. 对 m 归纳,$m=1$ 时已证, 下设 $<m$ 的情形已得证, 而 $(f_1\cdots f_{m-1},g)=(f_m,g)=1 \iff (f_1\cdots f_m,g)=1$(书上推论 5.2.12), 从而得证.

再对原命题考虑, 记 $f=f_1\cdots f_m$, 由上知 $(f,g_1)=\cdots=(f,g_n)=1$, 从而又有 $(f,g_1\cdots g_n)=1$. □

13. 证明多项式 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ 没有重根.

解答 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$, 因此

$$(f(x),f'(x))=(f(x),f(x)-f'(x))=(f(x),x^n/n!)=(f(x),x^n)$$

而 $f(0)=1\neq 0$, 因此 $x\nmid f(x)$, 从而 $(f(x),x^n)=(f(x),f'(x))=1$, 即 $f(x)$ 没有重根. □