# 微分几何读书笔记

章小明

2025 年 1 月 2 日

## 目录



## 1 曲线论

**预备知识**

- $\boldsymbol{a}$ 恒长 $\iff \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}\equiv 0$.
- $\boldsymbol{a}$ 恒向 $\iff \boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{a}\equiv 0$.
- $\boldsymbol{a}$ 恒垂直于某向 $\implies (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'')\equiv 0$. 反向需要 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{a}\not\equiv 0$

曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长 $s=\displaystyle\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$, 弧长参数 $s(t)=\displaystyle\int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$, 弧长元素 $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$.

**Frenet 公式**

## 2 标架与曲面论基本定理

对于曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 一般取其自然标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$. 而更一般地可以选取其上的活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$, 这需要这三个向量场处处线性无关. 一般需要保证这是正定向且单位正交的标架.

一般通过伸缩和旋转变换 (即一个正交变换), 可以把自然标架变为任一单位正交标架. 事实上对于任一 $\mathbb{R}^3$ 中曲线, 都可以作正交变换使其成为一个 Frenet 标架.

**自然标架的运动方程** 记 $g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\beta, b_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{n}_\beta, g=\det(g_{\alpha\beta}), b=\det(b_{\alpha\beta})$. 另外,$(g^{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta})^{-1}, g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma$. 我们略去麻烦的推导过程, 得到:

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n},\qquad \boldsymbol{n}_\alpha=-b^\beta_\alpha\boldsymbol{r}_\beta.$$

换言之我们得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{11}\\ \boldsymbol{r}_{12}\\ \boldsymbol{r}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} & b_{11}\\ \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} & b_{12}\\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_1\\ \boldsymbol{n}_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}b^1_1 & b^2_1\\ b^1_2 & b^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix}$$

其中 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 为曲面的 Christoffel 符号, 且有如下定义

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{g^{\gamma\xi}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right),\qquad \Gamma_{\xi\alpha\beta}=g_{\gamma\xi}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right),\qquad b^\beta_\alpha=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}.$$

仅需记住对曲面的第二类 Christoffel 符号 $\Gamma_{\xi\alpha\beta}$ 有加减顺序 "123+132-231". 更换符号, 我们得到

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{G\partial_u E + F\partial_v E - 2F\partial_u F}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{G\partial_v E - F\partial_u G}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2G\partial_v F - G\partial_u G - F\partial_v G}{2(EG-F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2E\partial_u F - F\partial_u E - E\partial_v E}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{E\partial_u G - F\partial_v E}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{F\partial_u G + E\partial_v G - 2F\partial_v F}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

若 $F=0$, 即在正交参数网下有:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial_u \ln E}{2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial_v \ln E}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial_u G}{2E}, \\
\Gamma_{11}^2 &= -\frac{\partial_v E}{2G}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial_u \ln G}{2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial_v \ln G}{2}.
\end{aligned}$$

**Gauss-Codazzi 方程**

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\xi + b_{\alpha\gamma} b_\beta^\xi = 0, \qquad \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi b_{\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi b_{\xi\beta} = 0.$$

定义 Riemann 记号

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi\right)$$

有 Gauss 方程 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}$. 根据 Riemann 记号的对称性 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}$ 可知仅有一个独立方程

$$R_{1212} = g_{1\xi}\left(\frac{\partial \Gamma_{21}^\xi}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^\xi}{\partial u^1} + \Gamma_{21}^\eta \Gamma_{\eta 2}^\xi - \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\eta 1}^\xi\right) = -b.$$

另一方面 Codazzi 方程在 $\beta=\gamma$ 时平凡, 因此仅有 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2)$ 或 $(2,1,2)$ 两个独立方程.

最后, 若 $F=0$, 即在正交参数网下 Gauss-Codazzi 方程为:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\partial_v\left(\frac{\partial_v\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right) + \partial_u\left(\frac{\partial_u\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)\right) &= \frac{LN-M^2}{EG} = K \\
\partial_v \frac{L}{\sqrt{E}} - \partial_u \frac{M}{\sqrt{E}} - N\frac{\partial_v\sqrt{E}}{G} - M\frac{\partial_u\sqrt{G}}{\sqrt{EG}} &= 0 \\
\partial_u \frac{N}{\sqrt{G}} - \partial_v \frac{M}{\sqrt{G}} - L\frac{\partial_u\sqrt{G}}{E} - M\frac{\partial_v\sqrt{E}}{\sqrt{EG}} &= 0
\end{aligned}$$

而 $F=M=0$ 时 Codazzi 方程变为

$$\partial_v L = H\partial_v E, \qquad \partial_u N = H\partial_u G$$

其中 $H = \dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{E}+\dfrac{N}{G}\right)$ 是平均曲率,$K = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = LN - M^2EG$ 是 Gauss 曲率.

**曲面的存在唯一性定理**

1. 定义在同一参数域的曲面若在每一对应点有相同的两个基本形式, 则有一个刚体运动将一个曲面变为另一个.
2. 若参数域上对称正定阵 $g_{\alpha\beta}$ 和对称阵 $b_{\alpha\beta}$ 得到的 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 和 $b^{\alpha\beta}$ 满足 Gauss-Codazzi 方程, 则在参数域任意点有邻域可定义曲面, 使 $g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$ 和 $b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$ 为其两个基本形式.

**正交活动标架**　对正交活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}\}$, 有 $(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)^T$. 令 $(\omega_1,\omega_2)^T = \boldsymbol{A}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)^T$, 因此 $\mathrm{d}r = (\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)^T = (\omega_1,\omega_2)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)^T$. 其中 $\omega_1,\omega_2$ 均为一次微分形式.

对 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 作微分, 得到

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & 0\\ 0 & \omega_{12} & \omega_{13}\\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix}0 & \omega_{12} & \omega_{13}\\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix}$$

容易得到 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\omega_1^2+\omega_2^2,\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$. 另外 $\mathrm{I}=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)^T,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$. 我们有

3. I 与正交标架选取无关,II 与同法向正交标架的选取无关.(考虑旋转 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)^T$ 得到的 I 和 II.)

接着考虑 $(\omega_{13},\omega_{23})=(\omega_1,\omega_2)\boldsymbol{B}$, 有 $\mathrm{II}=(\omega_1,\omega_2)\boldsymbol{B}(\omega_1,\omega_2)^T=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)^T$,

有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{B}$ 的特征值即为曲面的主曲率, 且 $K=\det\boldsymbol{B},H=\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}}{2}$. 实际上 Weingarten 变换在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下的系数矩阵即为 $\boldsymbol{B}$, 而在自然基下的变换矩阵为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

**曲面的结构方程 (外微分法)** 我们先给出 $\mathbb{R}^3$ 中外微分的运算法则:

1. 零次外微分形式 $\mathrm{d}f=\partial_u f\mathrm{d}u+\partial_v f\mathrm{d}v$, 一阶外微分形式 $\theta=f\mathrm{d}u+g\mathrm{d}v$, 二阶外微分形式 $\varphi=f\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.
2. $\wedge$ 是线性且反交换的, 其对一阶外微分形式起作用.
3. 对一阶外微分形式 $\theta=f\mathrm{d}u+g\mathrm{d}v,\mathrm{d}\theta=(\partial_u g-\partial_v f)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$. 对二阶外微分形式 $\varphi$,$\mathrm{d}\varphi=0$.
4. 对函数 $f,g$ 和一阶外微分形式 $\varphi$,$\mathrm{d}(fg)=f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f$,$\mathrm{d}(f\varphi)=\mathrm{d}f\wedge\varphi+f\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}(\varphi f)=f\mathrm{d}\varphi-\varphi\wedge\mathrm{d}f$,$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$.

讨论上节正交活动标架. 首先,$\omega_1\wedge\omega_2=(\det\boldsymbol{A})\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

考虑正交活动标架的运动方程. 首先在 $\mathrm{d}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\omega_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\right)=0$ 中考虑 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的系数, 得到

$$\mathrm{d}\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_{12},\qquad \mathrm{d}\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12},\qquad \omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}=0.$$

前两式代入最后一式, 可知其等价于 $\boldsymbol{B}$ 是对称的.

同理考虑 $\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{3}\omega_{\alpha i}\boldsymbol{e}_i\right)=0$, 得到

$$\mathrm{d}\omega_{12}=-\omega_{13}\wedge\omega_{23}=-K\omega_1\wedge\omega_2,\qquad \mathrm{d}\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23},\qquad \mathrm{d}\omega_{23}=-\omega_{12}\wedge\omega_{13}.$$

其中前一式为 Guass 方程, 后二式为 Codazzi 方程, 其统称正交标架的结构方程式.

在正交活动标架的语言下, 曲面的各个基本量可表为:

1. $\mathrm{I}=\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2,\mathrm{II}=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23},\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3=\omega_{13}\omega_{13}+\omega_{23}\omega_{23}$.
2. 面元 $\mathrm{d}A=\omega_1\wedge\omega_2$,Gauss 映射的面元 $\mathrm{d}\sigma=\omega_{13}\omega_{23}=K\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.
3. Hopf 不变式 $\psi=\omega_1\omega_{23}-\omega_2\omega_{13}$.

上述基本量均在不同的 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$(即对其旋转 $\theta$) 下不变. 但需要注意的是,$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+\mathrm{d}\theta$, 这与其他微分形式不同.

# 3 曲面的内蕴几何学

**等距变换与保角变换** 等距变换 $\sigma$ 是曲面 $S$ 到曲面 $\tilde{S}$ 的一个双射, 且使 $S$ 上任一曲线 $C$ 与其在 $\tilde{S}$ 上的像曲线 $\sigma(C)$ 的长度相等.

等距变换有如下等价条件:

1. 保持两曲面的第一基本形式不变. 若 $\sigma:(u,v)\mapsto(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v))$, 则 $\mathrm{I}(u,v)=\mathrm{I}(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v))$.
   比方说 $\mathrm{I}(u,v)=\mathrm{d}u^2+(1+u^2)\mathrm{d}v^2,\mathrm{I}(\tilde{u},\tilde{v})=\dfrac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2-1}\mathrm{d}\tilde{u}^2+\tilde{u}^2\mathrm{d}\tilde{v}^2$. 则可以选取 $(u,v)\mapsto(\sqrt{1+u^2},v)$, 有 $\mathrm{d}\tilde{u}=\dfrac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}},\mathrm{d}\tilde{v}=\mathrm{d}v$. 因此 $\mathrm{I}(u,v)=\mathrm{I}(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v))$.

2. 在变换下有 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} J_\sigma^T$, 其中 $J_\sigma$ 是 $\sigma$ 的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} \partial_u \tilde{u} & \partial_u \tilde{v} \\ \partial_v \tilde{u} & \partial_v \tilde{v} \end{pmatrix}$.
3. 可以在 $S$ 和 $\tilde{S}$ 上选取适当的正交标架, 使得在对应点有 $\omega_1 = \tilde{\omega}_1, \omega_2 = \tilde{\omega}_2$.

接着我们定义, 在变换 $\sigma$ 下两个对应点的切平面之间的切映射 $\sigma_* : T_P S \to T_{\sigma(P)} \tilde{S}, \boldsymbol{v} \mapsto \tilde{\boldsymbol{v}}$. 这是一个线性映射, 且有

$$\begin{pmatrix} \sigma_*(\boldsymbol{r}_u) \\ \sigma_*(\boldsymbol{r}_v) \end{pmatrix} = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_{\tilde{v}} \end{pmatrix}$$

因此可以得到

4. $S$ 的任二切向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 有 $\langle \sigma_*(\boldsymbol{v}), \sigma_*(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$.

对于保角映射, 我们没有太多性质可叙述, 但我们有如下等价条件

1. 有正函数 $\lambda(u,v)$ 在对应点有 $\lambda^2 \mathrm{I}(u,v) = \mathrm{I}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$.(认为 $\lambda = |\sigma_*(\boldsymbol{e}_1)|$, 考虑正交标架下的分解 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_2$.)

另外, 任意曲面上每点有邻域可以和 $E^2$ 上一区域建立保角变换.

**曲面的协变微分** 我们先定义一阶微分形式 $\omega_{12}$ 为曲面关于某一标架的联络形式.

首先, 联络形式 $\omega_{12}$ 被运动方程 $\mathrm{d}\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \mathrm{d}\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1$ 唯一确定. 但另一方面, 联络形式依赖于标架的选取, 这是由于上面提到过的 $\tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + \mathrm{d}\theta$.

其次, 由于 $\mathrm{d}\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 中 $\mathrm{d}\omega_{12}$ 和 $\omega_1, \omega_2$ 仅依赖于第一基本形式,(由上述运动方程注意到 $\omega_{12}$ 仅依赖于 $\omega_1, \omega_2$.) 故 Gauss 曲率 $K$ 仅依赖于第一基本形式. 也因此在等距变换下,Gauss 曲率不变. 这就是 Gauss 绝妙定理.

实际上根据 Gauss 方程, 已经有完全用 $E$ 和 $G$ 表示 $K$ 的方式. 如果考虑等温参数系 $\mathrm{I} = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$, 仅有 $K = -\dfrac{\Delta \ln \lambda}{\lambda^2}$.

接下来我们讨论标架的协变微分. 定义切向量的协变微分 $D\boldsymbol{v} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2$. 这实际上就是切向量的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 在切平面内的部分. 其中,$D\boldsymbol{e}_1 = \omega_{12}\boldsymbol{e}_2, D\boldsymbol{e}_2 = \omega_{21}\boldsymbol{e}_1, D(f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2) = (\mathrm{d}f_1 + f_2\omega_{21})\boldsymbol{e}_1 + (\mathrm{d}f_2 + f_1\omega_{12})\boldsymbol{e}_2$. 协变微分是线性的, 且有 $D(f\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\mathrm{d}f + fD\boldsymbol{v}, D\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle D\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, D\boldsymbol{w} \rangle$.

在曲面上可以像欧式几何中一样平移向量. 我们定义连接两点的曲线 $\gamma(t)$ 上的切向量场 $\boldsymbol{v}(t)$ 在 Levi-Civita 意义下平行, 若 $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$. 因此我们可以认为此切向量在两点之间均平行. 事实上, 可以在曲线上任给两平行切向量场, 其内积 (即夹角) 在曲线上不变.

**测地曲率与测地线** 根据曲面上的弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 上取曲面的正交标架, 使得 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}', \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$. 此时我们定义此曲线上一点的测地向量为 $\boldsymbol{\kappa}_g = \dfrac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}$, 测地曲率即其长度, 即 $\kappa_g = |\boldsymbol{\kappa}_g| = \left\langle \dfrac{D\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle$.

考虑曲面上曲线的曲率向量 $\boldsymbol{r}''$ 和曲率 $\kappa = |\boldsymbol{r}''|$, 将前者在曲面的切向和法向上分解, 得到 $\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{\kappa}_g + \kappa_n \boldsymbol{e}_3$, 其中 $\kappa_n$ 是曲线的法曲率. 这也说明了测地曲率即曲率在切平面上的部分. 另外也有 $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

通过考虑测地向量在自然标架下的表现, 计算曲线 $\boldsymbol{r}''$ 的二阶导, 可以得到 $\boldsymbol{\kappa}_g = \left( \dfrac{\mathrm{d}^2 u^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \dfrac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s} \right) \boldsymbol{r}_\alpha$. 在正交参数 $(F = 0)$ 下, 我们可以通过重整化此式, 也可以通过直接计算正交标架和曲线的正交标架, 以及正交参数下 $\omega_{12} = -\dfrac{\partial_v \sqrt{E}}{\sqrt{G}} \mathrm{d}u + \dfrac{\partial_u \sqrt{G}}{\sqrt{E}} \mathrm{d}v$, 得到 Liouville 公式:

1. 具有正交参数 $(u,v)$ 的曲面上的弧长参数曲线 $C$ 与 $u$ 线的夹角为 $\theta$, 则 $C$ 的测地曲率

$$\kappa_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial_v \ln E}{2\sqrt{G}} \cos\theta + \frac{\partial_u \ln G}{\sqrt{E}} \sin\theta.$$

我们定义曲面上测地曲率 $\kappa_g \equiv 0$ 的曲线为曲面的测地线. 由自然标架下的测地向量表达可得到测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^1}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = 0,$$

其解即为测地线.

我们给出测地线的所有性质. 最后一项 (短程性) 需要用到变分法.

2. 对曲面上任一点上任一切向量, 都有测地线过该点并切于该切向量.
3. 仅有测地线的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 总平行.
4. 在曲面上连接两点的曲线中, 测地线最短.