微积分 III 课程笔记

王良龙授课　　章亦流整理

2020 年 11 月 22 日

目录

第 1 讲　实数理论

第 2 讲　极限面面观—以数列极限为例

第3讲 函数的一致连续性 (uniformly continuous)

定义 1. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**一致连续**, 否则为非一致连续.

注 1. 一致连续 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 连续

证明. $\forall x_0\in I\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0\ \forall x\in I:|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
由于 $f\in C(I)$ 在一致连续, 因此 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 必成立. 取 $x_1=x,x_2=x_0$, 可知 $f(x)$ 在 $\forall x_0\in I$ 处连续. □

注 2. $f(x)$ 在区间 I 上一致连续是整体概念 $(x_1,x_2,|x_1-x_2|$ 充分小), 而 $f(x)$ 在区间 I 上连续是局部概念 (在某点上).

注 3. 利用逻辑对偶:

$$
\begin{aligned}
&f(x)\text{在区间上非一致连续}\\
\iff&\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon\\
\iff&\exists\varepsilon>0\forall n\in\mathbb{N}^+(\delta=\frac{1}{n})\exists x_1^n,x_2^n:|x_1^n-x_2^n|<\delta=\frac{1}{n} \implies |f(x_1^n)-f(x_2^n)|\geq\varepsilon
\end{aligned}
$$

最后命题即点列中两个点无限靠近, 但函数值仍 $\geq\varepsilon$.

实战中瞄准 "非一致连续" 小区间:$\{x_1^n\}_{n=0}^{\infty}\quad\{x_2^n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $x\implies\infty$ 时 $x_1^n\implies x_0,x_2^n\implies x_0$, 从而 $|x_1^n-x_2^n|<\delta=1/n$ 就可以满足, 但 $(f(x_1^n)-f(x_2^n))\not\Longrightarrow 0(n\implies\infty)$

例 1. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续, 但在 $\forall a>0:(a,+\infty)$ 上一致连续.

证明. 使 $x_1^n=\dfrac{1}{n},x_2^n=\dfrac{1}{n+1}:\qquad 0<x_1^n\implies 0\quad 0<x_2^n\implies 0\quad(n\implies\infty)$ 但 $|f(x_1^n)-f(x_2^n)|=1\not\Longrightarrow 0(n\implies\infty)$, 得证.

$\forall a>0:|f(x_1)-f(x_2)|=|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}|=\dfrac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}$, 使 $x_2>x_1,\dfrac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\leq\dfrac{|x_1-x_2|}{x_1^2}\leq\dfrac{|x_1-x_2|}{a^2}\leq\varepsilon\implies |x_1-x_2|<a^2\varepsilon$ □

注 4. $f(x)$ 在闭区间 I 上一致连续 $\iff$
$f\in C(I)\implies\forall x_0\in I\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0\forall x\in I:|x-x_0|<\delta\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

其中 $\delta=\delta(\varepsilon)=\sup\{\delta(x_0,\varepsilon):x_0\in I\}$, 这说明一致连续与点无关.

实际上,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}|<\varepsilon$, 假设 $x>x_0\implies\dfrac{x-x_0}{x_0x}<\varepsilon<\dfrac{x-x_0}{x_0^2}<\varepsilon\implies x-x_0<x_0^2\varepsilon$.

证明. 求证 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

$\varepsilon>0\ \exists\delta=\varepsilon\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\wedge|x_1-x_2|<\delta$: 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin x_1-\sin x_2|=|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}|\leq|2\sin\frac{x_1-x_2}{2}|\leq 2\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2}<\delta=\varepsilon$$

因此 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. □

这个例子中 $f(x)$ 都被 $|x|$ 控制, 增长速度小于 x.

例 2. 求证 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证明. $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon^2 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge |x_1 - x_2| < \delta$, 使得 $x_1 > x_2$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}} < \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 - x_2}} = \sqrt{x_1 - x_2} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

□

例 3. 求证 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

证明. 取 $x_1^n = \sqrt{n}, x_2 = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$: $\quad x_1^n \implies \infty, x_2^n \implies \infty \quad (n \implies \infty)$, 但 $\forall n \in \mathbb{N}^+ : |f(x_1^n) - f(x_2^n)| = |n - (n + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4n})| = |\frac{1}{4n} + 1| > 1$, 因此 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续. □

注 5. 证明非一致连续时一定要弄清非一致连续发生的区域.
如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, a)$ 上非一致连续, 主要问题在 $x \implies 0^-$ 上. 而 $f(x) = x^2$ 在 $(0, \infty)$ 上非一致连续的主要问题在 $x \implies +\infty$ 上.

注 6. 感觉 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续与下列估计式有关:

$$\exists a \geq 0, b \geq 0 : \qquad |f(x)|a|x| + b$$

换句话说,$f(x)$ 的增长速度没有 $a|x| + b$ 快. 一致连续增长速度不能太快, 不能用 $|x|$ 压缩.

例 4. $f(x)$ 在 I 上满足 *Lipschitz* 条件 $\implies f(x)$ 在 I 上一致连续.

证明. $\forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < \varepsilon \implies |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{L}$. 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L+1}$ 即可. □

定理 3.1 (Cantor 定理)**.** $f(x)$ 在闭区间 I 上连续 $\implies f(x)$ 在 I 一致连续.
$\Big(f(x)$ 在有界开区间 I 上连续 $\implies f(x)$ 在 I 一致连续$\Big) \iff \lim\limits_{x \implies a^+} f(x), \lim\limits_{x \implies b^-} f(x)$ 均存在

证明. 前者我们在前面证明过了, 现在我们先证明必要性 ($\Longleftarrow$).

取 $\lim\limits_{x \implies a^+} f(x) = A, \lim\limits_{x \implies b^-} f(x) = B$, 构造函数 $F(x) = \begin{cases} A & x = a \\ f(x) & x \in (a, b) \\ B & x = b \end{cases}$

显然,$F(a^+) = \lim\limits_{x \implies a^+} F(x) = \lim\limits_{x \implies a^+} f(x) = A = F(a), F(b^-) = \lim\limits_{x \implies b^-} F(x) = \lim\limits_{x \implies b^-} f(x) = B = F(b)$, 因此 $F \in C(a, b), F(x)$ 在 $x = a$ 右连续,$x = b$ 左连续, 故 $F \in C[a, b]$, 因此由前命题,$F(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续.

再证充分性 ($\implies$). 由一致连续定义

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_1, x_2 \in (a, b) : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

可知

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_1, x_2 \in (a + a\delta) \cap (a, b) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

由函数极限判别 Cauchy 法则得 $\lim\limits_{x \implies a^+} f(x) = A$ 存在, 同理可证另一端. □

值得注意的是:

1. (a, b) 为有界开区间即 $a, b \in \mathbb{R}$ 为有限数
2. 反之不成立, 如 $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续但 $\lim\limits_{x \implies +\infty} \sin x$ 不存在
3. 对 $< a, b >$ 类型的区间要求 $a, b \in \mathbb{R}$ 是有限数

定理 3.2. 若 $f \in C(a, +\infty)$ 且 $\lim\limits_{x \implies a^+} f(x) = A, \lim\limits_{x \implies +\infty} f(x) = B$, 则 $f(x)$ 在 (a, ∞) 上一致连续.

证明. 由 a 有限且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处右连续, 可知 $f \in C[a, +\infty]$.

由 $\lim\limits_{x \implies +\infty} = B$ 存在及 Cauchy 准则,$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x > M : |f(x) - B| < \varepsilon/2 \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \varepsilon \delta > 0 \forall x_1, x_2 > M : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - B| + |f(x_2) - B| \leq \varepsilon$$

因此,$f(x)$ □

第 4 讲　度量空间 (metric space)

第 5 讲　导数的惊人性质

5.1　左右导数, 导数的左右极限

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\Longrightarrow x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad f'_{+}(x_0)=\lim_{x\Longrightarrow x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad f'(x_0)=\lim_{x\Longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

令 $f'(x_0)=A\iff f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)=A$.

$f(x)$ 在 x_0 的邻域上可导,

命题 5.1.

$$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=A\iff\lim_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)=A$$

因此我们问:$f'_{-}(x_0),f'_{+}(x_0),f'(x_0),f'(x_0^-),f'(x_0^+),\lim_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)$ 的关系如何.

例 5. $f(x)=\lfloor x\rfloor,x_0=0$ 时求 $f'_{-}(x_0),f'_{+}(x_0),f'(x_0),f'(x_0^-),f'(x_0^+),\lim_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)$.

证明. 在 $U(0,\delta)$ 上有 $f(x)=\begin{cases}-1 & ,\delta<0\\ 0 & ,x\geq 0\end{cases}$.

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\Longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty,f'_{+}(x_0)=0\implies f'(x_0)\text{不存在}$$

因此 $f'(x)=0(x\in(-1,1)\setminus\{0\}),f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=\lim_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)=0.$ □

5.2　广义 Rolle 定理

定理 5.2 (Rolle 定理)**.** $f\in C[a,b],f\in C^{(1)}(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=A$, 则 $\exists\xi\in(a,b):f(\xi)=0.$

其中每个条件缺一不可:(1) 若不连续:$f(x)=1/x\ (x\in(0,1))$;(2) 若不可导:$f(x)=|x|$;
(3) 若不相等:$f(x)=x$

那么自然提问, 能否 (1) 从有限开区间 (a,b) 推广到 $\mathbb{R}$ 上?(2) 左右端点函数值推广到区间左右极限 $\lim_{x\Longrightarrow a^+}f(x)=\lim_{x\Longrightarrow b^-}f(x)=A$

定理 5.3 (广义 Rolle 定理)**.** 对任意区间 (a,b) 有 $f\in C[a,b],f\in C^{(1)}(a,b)$ 且 $\lim_{x\Longrightarrow a^+}f(x)=\lim_{x\Longrightarrow b^-}f(x)=A$, 则 $\exists\xi\in(a,b):f(\xi)=0.$

证明. 此处取 $a,b,A\in\mathbb{R}$, 其他情况类似证明.

若 $f(x)$ 为常函数, 则定理显然成立. 若否, 则 $\exists x_0\in(a,b):f(x_0)\neq A$. 不失一般性, 设 $f(x_0)>A$. 由 $\lim_{x\Longrightarrow a^+}f(x)=\lim_{x\Longrightarrow b^-}f(x)=A$ 且 $f\in C(a,b)$, 有

$$\forall M\in(A,f(x_0))\exists x_1\in(a,x_0)\exists x_2\in(x_0,b):f(x_1)=f(x_2)=M.$$

在 $[x_1,x_2]$ 上应用 Rolle 定理,$\exists\xi\in[x_1,x_2]:f(\xi)=0.$ □

例 6. $f\in C[0,+\infty)$ 且 $0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{1+x^2},x\in[0,+\times)$, 则 $\exists\xi\in(0,+\infty):f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$

证明. 由夹逼定理:

$$\lim_{x\Longrightarrow+\infty}0=\lim_{x\Longrightarrow 0^+}0=0,\lim_{x\Longrightarrow+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\Longrightarrow 0^+}\frac{x}{1+x^2}=0\Longrightarrow\lim_{x\Longrightarrow+\infty}f(x)=\lim_{x\Longrightarrow 0^+}f(x)=0$$

由 $f\in C^{(1)}[0,+\infty)$, 应用广义 Rolle 定理有 $\exists\xi\in(0,+\infty):f'(\xi)=0$.

注意到 $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 构造 $F(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-f(x),x\in(0,+\infty)$.
易知 $\lim\limits_{x\Longrightarrow+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\Longrightarrow 0^+}F(x)=0$, 对 $F(x)$ 用广义 Rolle 定理, 可知

$$\exists\eta\in(0,+\infty):F'(\eta)=0\Longrightarrow f'(\eta)=\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}$$

□

实际上题中 $\dfrac{x}{1+x^2},\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 可被在该区间上闭连续开可导的任意函数 $g(x),g'(x)$ 替代.

例 7. $f\in\mathbb{F}[x]$ 且 $f(x)\geq x,f(x)\geq 1-x(x\in\mathbb{R})$. 求证 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$

证明. 由 $f(x)>x$ 有 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geq\dfrac{1}{2}$, 只需证 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq\dfrac{1}{2}$.

- 对于 $\forall x>\dfrac{1}{2}$, 有 $\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}\geq\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=1$, 故 $f'_+\left(\dfrac{1}{2}\right)\geq 1$.
- 对于 $\forall x<\dfrac{1}{2}$, 有 $\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{1-x-\frac{1}{2}}\geq\dfrac{-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=-1$, 故 $f'_-\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq -1$.

故 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处不可导, 与题设矛盾. 故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq\dfrac{1}{2}$, 故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$. □

5.3 导数的介值定理和导数无第一类间断点

对于 $x_0\in(a,b)$, 若 $f(x)$ 定义在 $(a,b)\setminus\{x_0\}$, 有:

1. $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0}f(x)\neq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**.
2. $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^-}f(x)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.
3. $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^+}$ 或 $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^-}f(x)=\infty$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.
4. $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^+}$ 或 $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^-}f(x)\neq\infty$ 且不存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

其中前两者被称为**第一类间断点**, 后两者被称为**第二类间断点**.

例 8. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. 当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. 当 $x=0$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\Longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\Longrightarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\Longrightarrow 0}\frac{1/x}{\mathrm{e}^{1/x^2}}\xlongequal{L'Hospital}\lim_{x\Longrightarrow 0}\frac{x}{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}=0$$

因此 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. 而 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}f'(x)=\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{2x^{-3}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{L'Hospital}\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{-6x^{-4}}{-2x^{-3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{3/x}{\mathrm{e}^{1/x^2}}$
$\xlongequal{L'Hospital}3\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{-x^{-2}}{-2x^{-3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=0=f'(0)$

因此 $f'\in C(\mathbb{R})$.

例 9. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. 由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界, 因此 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0),f\in C(\mathbb{R})$.

而 $f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$. 其显然在 $x=0$ 处无极限, 也无定义.

例 10. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. 类似的, 可知 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,$f\in C(\mathbb{R})$.

而 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, 这是因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

虽然 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 但 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\Longrightarrow 0^-}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在, 因此 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的第二类间断点.

定理 5.4. $f\in C^{(1)}(a,b)$, 则 $f'(x)$ 在 (a,b) 中无第一类间断点.

证明. 由 $f\in C^{(1)}(a,b)$, 有 $\forall x\in(a,b):f'(x_0)$ 存在, 且

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\Longrightarrow x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{Lagrange 定理}}\lim_{x\Longrightarrow x_0^+}\frac{f'(\xi)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\Longrightarrow x_0^+}f'(\xi)$$

(此处认为 $f'_+(x_0),f'_-(x_0)$ 存在)

因此 $x\Longrightarrow x_0^+$ 时 $\xi\Longrightarrow x_0^+$, 故 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^+}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\Longrightarrow x_0^+}f'(\xi)$.

同理,$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^-}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\Longrightarrow x_0^-}f'(\xi)$.(注意: 此处都只在单侧极限成立)

设 $x=x_0$ 为 $f'(x)$ 的间断点, 即 $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0^-}f'(x)\neq f(x_0)$. 但此处 $f(x)$ 有定义, 若 $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)$ 存在, 即

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0^+)=f'(x_0^-)\lim_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)$$

. 这和 $x=x_0$ 为 $f'(x)$ 的间断点矛盾.

因此 $\lim\limits_{x\Longrightarrow x_0}f'(x)$ 不存在, 即 $\lim\limits_{\xi\Longrightarrow x_0^-}f'(\xi)$ 和 $\lim\limits_{\xi\Longrightarrow x_0^+}f'(\xi)$ 至少有一个不存在, 因此 x_0 为 $f'(x)$ 的第二类间断点. □

定理 5.5 (Darboux 定理)**.** $f\in C^{(1)}[a,b]$: $f'(a)<f'(b)\implies\forall M\in(f'(a),f'(b))\exists\xi\in(a,b):f'(\xi)=M$
此即 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上取遍 $(f'(a),f'(b))$

证明一. 取 $g(x)=f(x)-Mx,g\in C^{(1)}[a,b],g'(x)=f'(x)-M$, 因此 $g'(a)=f'(a)-M<0$,
$g'(b)>f'(b)-M>0$. 由于

$$g'(a)=g'_+(a)=\lim_{x\Longrightarrow a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0\qquad g'(b)=g'_-(b)=\lim_{x\Longrightarrow b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0$$

因此存在区间 $(a,a+\delta_1)$ 使 $g(x)<g(a)$, 存在区间 $(b-\delta_2,b)$ 使 $g(x)<g(b)$. 因此 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值不是 $g(a)$ 和 $g(b)$.

取 $\xi\in(a,b):g(\xi)=\min\limits_{x\in[a,b]}g(x)$, 由 Fermat 定理可知 $g'(\xi)=0,f'(\xi)=M$, 命题得证. □

证明二. 取 $g(x)=f(x)-Mx,g\in C^{(1)}[a,b],g'(x)=f'(x)-M$.

若 $g(a)=g(b)$, 则由 Rolle 定理可知必 $\exists\xi\in(a,b):g'(\xi)=0,f'(\xi)=M$.

若否, 不妨认为 $g(a)<g(b)$. 而 $g'(a)<0$, 由保号性可知 $\exists\zeta\in(a,b):g(\zeta)<g(a)<g(b)$.
由介值定理可知 $\exists\delta\in(\zeta,b):g(\delta)=g(b)$. 最后由 Rolle 定理可知 $\exists\xi\in(\zeta,\delta):g'(\xi)=0,f'(\xi)=M$.

类似可以证明 $g(a)>g(b)$ 的情况. 定理得证. □

尽管 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定连续, 但 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 “介值性”.

例 11. $f\in C^{(1)}[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]:f'(\xi)=\dfrac{f'(a)+f'(b)}{2}$

例 12. $f\in C[a,b],f\in C^{(1)}(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证:$\forall\alpha\in\mathbb{R}\exists\xi\in(a,b):\alpha f(\xi)=f'(\xi)$

证明. 考虑到 Rolle 定理:$g(a)=g(b)=0\implies\exists\xi\in(a,b):g(\xi)=0$, 我们可以构造一个函数 $g(x)$ 使得 $g(a)=g(b)=0$ 且 $g'(\xi)=0\iff\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.

我们可以取 $g(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x),g'(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x}(f'(x)-\alpha f(x))$. 显然 $g(a)=g(b)=0$, 因此命题马上得证. □

例 13. $f\in C[a,b], f\in C^{(1)}(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证:$\forall\alpha\in\mathbb{R}\exists\xi\in(a,b):\alpha f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明. 取 $g(x)=x^{\alpha}f(x)$, 其他同上. □

例 14. 求证 $\forall a>0\forall b>a\exists\xi\in(a,b):\qquad a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(a-b)$

证明. 取 $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, x\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$, 有 $f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. 由 Lagrange 定理有:

$$f\left(\frac{1}{b}\right)-f\left(\frac{1}{a}\right)=f'\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\implies\frac{\mathrm{e}^b}{b}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}=(1-\xi)\,\mathrm{e}^{\xi}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\implies\text{上式}$$

□

例 15. $f,g\in C[a,b]; f,g\in C^{(1)}(a,b)$ 且 $\forall x\in(a,b):g'(x)\neq 0$. 求证 $\exists\xi\in(a,b):\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$

证明. 取 $F(x)=\big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(x)\big)$, 有 $F'(x)=f'(x)\big(g(b)-g(x)\big)-g'(x)\big(f(x)-f(a)\big)$.
由 $F(a)=F(b)=0$, 有 $\exists\xi\in(a,b):F'(\xi)=0, f'(\xi)\big(g(b)-g(\xi)\big)-g'(\xi)\big(f(\xi)-f(a)\big)=0$, 化简即可得到上式, 得证. □

例 16. $f\in C[a,b], f\in C^{(2)}(a,b)$. 求证 $\exists c\in(a,b):f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$

证明. 取 $g(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x), x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$. 由 Lagrange 定理:

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\left(f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)=g'(\xi)\frac{b-a}{2}$$

其中 $\xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$.

$$g'(\xi)=f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi)=f''(c)\frac{b-a}{2}$$

其中 $c\in\left(\xi,\xi+\frac{b-a}{2}\right)$. 因此有:$\exists c\in(a,b):f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$, 得证. □

例 17. $f\in C^{(2)}[0,a]$ 且 $|f''(x)|\leq M$, 且 $f(x)$ 在 $x\in(0,a)$ 中可取到最大值. 求证 $|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma$.

证明. 由于 $f(x)$ 在 $x\in(0,a)$ 中可取到最大值, 故 $f'(0)f'(a)<0$.
若 $f'(0)>0$, 则 $|f'(0)|+|f'(a)|=|f'(0)-f'(a)|=|-a\cdot f''(\xi)|\leq Ma$.
若 $f'(0)<0$, 则 $|f'(0)|+|f'(a)|=|f'(a)-f'(0)|=|a\cdot f''(\xi)|\leq Ma$. □

第6讲　微积分的巅峰—Taylor 公式

函数及其导数之间有何联系?

定理 6.1 (Fermat 定理)**.** $f \in C^{(1)}\{x_0\}$ 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$

定理 6.3 (Rolle 定理)**.** $f \in C[a,b], f \in C^{(1)}(a,b)$ 且 $f(a) = f(b) = A$, 则 $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$.

定理 6.8 (Lagrange 定理)**.** $f \in C[a,b], f \in C^{(1)}(a,b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

定理 6.9 (Cauchy 定理)**.** $f, g \in C[a,b], f, g \in C^{(1)}(a,b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b) : g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)$.

定理 6.10 (Taylor 定理)**.** 若 $f \in C^{(n)}\{x_0\}$, 则

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x) \\ =& f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + r_n(x_0;x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Peano 型} \quad & r_n(x_0;x) = o\left((x-x_0)^n\right) \\ \text{Lagrange 型} \quad & r_n(x_0;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ \text{积分余项型} \quad & r_n(x_0;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

例 18. $f \in C[0,1], f \in C^{(1)}(0,1)$ 且 $f(0) = f(1) = 0, |f'(x)| < 1$. 求证 $\forall x_1 \in [0,1] \forall x_2 \in [0,1] : |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{1}{2}$.

证明. $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$.

若 $|x_1 - x_2| \le \dfrac{1}{2}$, 则 $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| \le \dfrac{1}{2}$.

若 $|x_1 - x_2| > \dfrac{1}{2}$, 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)|$$

取 $f(x_0) = f(0) = f(1)$, 有:

$$|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(0)| + |f(1) - f(x_2)| = |f'(\xi_1)|x_1 + |f'(\xi_2)|(1-x_2) < x_1 + 1 - x_2 < \frac{1}{2}$$

命题得证. □

例 19. 求证 $\forall b > a > \mathrm{e} : a^b > b^a$

证明. 即证 $b\ln a > a\ln b$. 取 $f(x) = x\ln a - a\ln x, x \in [a,b]$, 有 $f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > \ln \mathrm{e} - \dfrac{a}{x} \ge \ln \mathrm{e} - \dfrac{a}{a} = 0$.

由于 $f(x)$ 单调递增, 则 $0 < f(a) < f(b) < b\ln a - a\ln b$, 得证. □

例 20. 求数列 $a_n = \sqrt[n]{n}$ 中的最大项.

证明. 取 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$.

$f'(x) = 0 \implies x = \mathrm{e}$, 而离 e 最近的自然数即为 3, 故最大项为 $\sqrt[3]{3}$. □

例 21. 求证 $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) : \sin x > \dfrac{2}{\pi}x$

证明. □

例 22. 求证:$\forall a \forall b \in \left(\frac{a}{4}, a\right) \forall x \geq 0 : f(x) = 2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx + ab^2 > 0$.

证明. $f'(x) = 6x^2 - 6(a+b)x + 6ab = 6(x-a)(x-b), f'(x) = 0 \implies x = a \vee x = b$. □

例 23. 求证 $\forall k \in (\ln 2 - 1, +\infty) \forall x \in (0,1) \cup (1, +\infty) : \quad (x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) > 0$

证明. $f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1, f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2k}{x}$ □

例 24. $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}), f''(x) > 0$ 且 $\lim\limits_{x \Longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求证恒有 $f(x) \geq x$.

证明. 由于 $\lim\limits_{x \Longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 故 $f(0) = \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} x \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} x \cdot \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \cdot 1 = 0$.

而 $f'(0) = \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \Longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. 因此 $f(x) {=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$
$= 0 + x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \geq x$. □

例 25. $f \in C[0, +\infty), f \in C^{(2)}(0, +\infty)$ 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$.

求证 $\forall x_1 {>} 0 \forall x_2 {>} 0 : f(x_1 + x_2) {<} f(x_1) + f(x_2)$.

证明. 令 $g(x) = f(x + x_2) - f(x) - f(x_2), g(0) = f(0) = 0, g'(x) = f'(x + x_2) - f'(x) < 0$, 因此 $g(x)$ 单调递减,$0 > g(0) > g(x) = f(x + x_2) - f(x) - f(x_2), f(x + x_2) < f(x) + f(x_2)$, 得证. □

例 26. $f \in C^{(2)}[0,1], |f(x)| \leq a$ 且 $|f''(x)| \leq b$, 求证 $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

证明. 对于 $\forall x_0 \in [0,1] \forall x \in [0,1]$, 有 $f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - x)^2$ □

例 27. $f \in C[0,1]$ 且 $f(x) \geq 0, f(0) = f(1) = 0$, 求证 $\forall a \in (0,1) \exists \xi \in [0,1) : f(\xi) = f(\xi + a)$.[

证明. 设 $F(x) = f(x+a) - f(x), F(0) = f(a) - f(0) = f(a) \geq 0, F(1-a) = f(1) - f(1-a) = -f(1-a) \leq 0$, 因此 $\exists \xi \in (0, 1-a) : F(\xi) = f(\xi + a) - f(\xi) = 0$. □

零点问题

第 7 讲　曲线和曲面积分

例 28. $f(x,y)$ 连续,L 为封闭光滑曲线

$$U(x,y) := \oint_L f(x,y) \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \mathrm{d}s$$

试证:

$$\lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} U(x,y) = 0 \iff \oint_L f(x,y) \mathrm{d}s = 0$$

证明.

$$U(x,y) + \ln\sqrt{x^2+y^2} \oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\mathrm{d}s$$

而

$$\lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} \oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\mathrm{d}s = 0 \implies \lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} U(x,y) + \ln\sqrt{x^2+y^2}\oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = 0$$

另一方面:

$$\lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} U(x,y) = 0 \implies \lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} \ln\sqrt{x^2+y^2}\oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = 0 \implies \oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = 0$$

$$\oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = 0 \implies \lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} U(x,y) = 0$$

由 L 紧且 $f(x,y)$ 连续, 则 $f(\xi,\eta)$ 连续且有界, 即有 $\forall(\xi,\eta)\in L, \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$|f(x,y)\ln\frac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}| \le M\ln\frac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$$

运用二维极坐标变换 $(\xi,\eta) \implies (\gamma,\theta), (x,y) \implies (\rho,\phi)$, 有

$$\ln\frac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} = -\ln\left(1+\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^2 - \frac{\gamma}{\rho}\cos(\theta-\phi)\right)$$

记 $\gamma_0 = \max\gamma(\theta) > 0, (x,y) \implies (\infty,\infty)$ 时 $\rho \implies +\infty$, 此时

$$\Big|\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^2 - \frac{\gamma}{\rho}\cos(\theta-\phi)\Big| \le \left(\frac{\gamma_0}{\rho}\right)^2 - \frac{\gamma_0}{\rho} \implies 0$$

因此此时也有 $\ln\dfrac{x^2+y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} \Rrightarrow 0$. 故

$$\lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} U(x,y) = \oint_L f(\xi,\eta) \lim_{\substack{x \rightrightarrows \infty \\ y \rightrightarrows \infty}} \ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\mathrm{d}s = \oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s = 0$$

□

实际只是控制收敛 $\ln\dfrac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \implies 0$. 或者说, 将 $\oint_L f(x,y)\ln\dfrac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\mathrm{d}s$ 拟合到 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 附近.

例 29. 计算 $I = \int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中 $L: x^{2n+1}+y^{2n+1} = ax^ny^n (a,x,y\ge 0)$

证明. 设 $y = tx$, 有

$$L : \begin{cases} x = \dfrac{at^n}{t^{2n+1}+1} \\ y = \dfrac{at^{n+1}}{t^{2n+1}+1} \end{cases}, t \geq 0$$

而 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x\mathrm{d}(tx) - tx\mathrm{d}x = x^2\mathrm{d}t$, 因此

$$I = \int_L x^2\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{a^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t = -\frac{a^2}{(1+t^{2n+1})(2n+1)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{2n+1}$$

□

例 30. 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在长 l 的光滑曲线 L 上连续, 记

$$M = \max\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\Big|(x,y,z) \in L\} > 0$$

试证

$$\Big|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\Big| \leq Ml$$

证明.

$$\begin{aligned}\Big|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\Big| &= \Big|\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}l\Big| \\ &\leq \int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\mathrm{d}l \leq Ml\end{aligned}$$

□

例 31. 计算 $I = \oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中 $L : (x-1)^2 + y^2 = R^2 (R \neq 1)$, 方向逆时针.

证明. $(x,y) \neq (0,0)$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$$

当 $R < 1$ 时应用 Green 公式:

$$I = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

当 $R > 1$ 时作曲线 $L_0^- : \dfrac{x^2}{(\varepsilon/2)^2} + \dfrac{y^2}{\varepsilon^2} = 1 (\forall \varepsilon > 0)$, 可以对 $L + L_0^-$ 应用 Green 公式:

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} + \int_{L_0^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_{L+L_0^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \iint_{D'} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

因此 $I = -\displaystyle\int_{L_0^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_{L_0} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}$ □

例 32. 计算

$$I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{((\alpha x+\beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2)^a}$$

其中 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ 且 $L : (\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ 的逆时针.

证明. 由 L 为封闭简单光滑曲线, 且沿逆时针, 因此有

$$I \xlongequal{(x,y)\in L} \oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \xlongequal{\text{Green 公式}} \iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal[\xi=\alpha x+\beta y]{\eta=\gamma x+\delta y} 1 \iint ? \cdot J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

其中 $J = \left(\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}$. 因此有

$$I = \frac{2}{|\alpha\delta-\beta\gamma|} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2=1} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \frac{2\pi}{|\alpha\delta-\beta\gamma|}$$

□

例 33. 计算

$$I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint\limits_{x^2+y^2=1}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y$$

证明. 首先可知:$\forall(x,y)\neq(0,0):\partial_xQ=\partial_yP=\dfrac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left((y+1)\cos x+x\sin x-\dfrac{2y}{x^2+y^2}(y\cos x+x\sin x)\right)$.

再作曲线 $L_r:x^2+y^2=r^2$, 其中正数 r 足够小以使 L_r 在 L 内部. 因此有

$$\begin{aligned}
&\oint_{L+L_r^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\\
\implies &I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_r}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\
&\xlongequal[y=r\cos t]{x=r\sin t}\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\sin t}\Big(\big(r\cos t\sin(r\cos t)+r\sin t\cos(r\cos t)\big)(-r\sin t)\\
&\qquad+\big(r\sin t\sin(r\cos t)-r\cos t\cos(r\cos t)\big)(r\cos t)\Big)\mathrm{d}t\\
&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\sin t}\cos(r\cos t)\mathrm{d}t=\lim_{r\implies 0^+}\left(-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\sin t}\cos(r\cos t)\mathrm{d}t\right)\\
&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^0\cos 0\mathrm{d}t=-2\pi
\end{aligned}$$

□

例 34. 计算

$$\oint_L\left(x\cos(n,x)+y\cos(n,y)\right)\mathrm{d}s$$

其中 $(n,x),(n,y)$ 分别为 x,y 轴正向与 L 外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角,L 为任意封闭曲线.

证明. 由于 L 是逆时针方向的, 因此 $\boldsymbol{n}$ 逆时针旋转 $\pi/2$ 就和切向量 $\boldsymbol{\tau}$, 因此有

$$\begin{cases}(n,x)=(\tau,y)\\(n,y)=\pi-(\tau,x)\end{cases}\implies\begin{cases}\cos(n,x)\mathrm{d}s=\cos(\tau,y)\mathrm{d}s&=\mathrm{d}y\\\cos(n,y)\mathrm{d}s=-\cos(\tau,x)\mathrm{d}s&=-\mathrm{d}x\end{cases}$$

因此 $I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2m(L)$. □

例 35. $L=\partial D$ 为逐段光滑闭曲线,$U\in C^{(2)}(\bar{D})$. 求证:

$$\oint_L\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\nabla^2U(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

证明.

$$\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{n}}=\partial_xf\cdot\cos(n,x)+\partial_yf\cdot\cos(n,y)=$$

□