极值图论笔记 (编纂中)

授课人: 彭兴, 窦春阳; 编辑: 章亦流

2025 年 3 月 9 日

1 Lecture 1: Turán Theorem and Erdös-Stone-Simonovits Theorem

定义 1 (Turán 数)**.**

定理 1.1 (Mantel, 1902)**.**

证明. □

证明. □

证明. □

定理 1.2 (Turán, 1941)**.**

证明. □

Zykov. □

定理 1.3 (Erdös-Stone-Simonovits)**.**

引理 1.4.

证明. □

定理*1.3*的证明. □

2 Lecture 2: Erdös-Stone-Simonovits Theorem and Szemerédi's Regularity Lemma

定义 2 (边密度)**.** 顶点子集 $A, B \subset V$ 间的边密度 $d(A,B) := \dfrac{e(A,B)}{|A|\,|B|}$.

定义 3 (ε-正则)**.** 对于顶点子集 $A, B \subset V$, 称 (A,B) 是 ε-正则对, 若 $\forall A' \subset A, B' \subset B$, 其中 $\left|A'\right| \geq \varepsilon |A|, \left|B'\right| \geq \varepsilon |B|$, 都有 $\left|d(A',B') - d(A,B)\right| \leq \varepsilon$. 称分划 $P : V = \bigsqcup_{i=0}^{k} V_i$ 是 ε-正则的, 若 $\displaystyle\sum_{(V_i,V_j)\text{不正则}} \frac{|V_i|\,|V_j|}{n^2} \leq \varepsilon$.

称分划 $P : V = \bigsqcup_{i=0}^{k} V_i$ 为 ε-正则的均分, 若 $|V_1| = \cdots = |V_k|, |V_0| \leq \varepsilon n$, 且 $\{(V_i,V_j)|V_i,V_j \in P\}$ 中的非 ε-正则对有 $\leq \varepsilon k^2$ 个.

定理 2.1 (Szemerédi 正则性引理)**.** *$\forall \varepsilon > 0 \forall m \in \mathbb{N}_+ \exists n_0(\varepsilon,m) \exists M \in \mathbb{N}_+$ 使得对于任意顶点数 $n \geq n_0$ 的图 G, 都有分划 $V = \bigsqcup_{i=0}^{k} V_i$, 满足*

(1) $|V_0| \leq \varepsilon n$

(2) $|V_1| = \cdots = |V_k|$

(3) $m \leq k \leq M$, 其中 $M = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} \approx \varepsilon^{-5}$ 个 2.

(4) $\{(V_i,V_j)|V_i,V_j \in P\}$ 中的非 ε-正则对有至少一个, 至多 εk^2 个.

即 P 是一个 ε-正则的均分.

定义 4 (缩略图和爆破图)**.** 给定 $d \in (0,1]$, 对于 ε-正则均分 $V = \bigsqcup_{i=0}^{k} V_i$, 记 $\ell = |V_k|$, 构造图 $R, V(R) = \{v_1, \ldots, v_k\}, E(R) = \{v_iv_j | (V_i,V_j)\varepsilon\text{-正则且} d(V_i,V_j) \geq d\}$, 则称 R 是 G 的参数 ε, ℓ, d 的缩略图.

对于 $s \in \mathbb{N}_+, R$ 的爆破图 $R(s)$ 即 k 部 s 个点 $A_1, \ldots, A_k$, 其中 A_i, A_j 之间完备 $\iff v_iv_j \in E(R)$.

引理 2.2 (图嵌入引理)**.** *$\forall d \in (0,1], \Delta \geq 1, \exists \varepsilon_0(d,\Delta)$ 使得: 若图 G, H 满足 (1)$\Delta(H) \leq \Delta$; (2)G 有参数为 $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \ell \geq 2s\Delta/d$ 和 d 的缩略图 R;(3)$H \subset R(s)$, 则 $H \subset G$.*

定理1.3的另一证明. □

定义 5.

引理 2.3.

引理 2.4.

证明. □

定理2.1的证明. □

定理 2.5.

3 Lecture 3: Embedding Lemma, Counting Lemma and Removal Lemma

引理 3.1. (A,B) 是 ε-正则对, 令 $d=d(A,B)$, 若有 $Y\subset B, |Y|\geq\varepsilon|B|$, 则 A 中有 $>(1-\varepsilon)|A|$ 个顶点都在 Y 中有 $\geq(d-\varepsilon)|Y|$ 个邻点.

证明. 取 $X\subset A, |X|\geq\varepsilon|A|$ 则由 ε-正则知 $|d(X,Y)-d|\leq\varepsilon$, 故 $e(X,Y)\geq(d-\varepsilon)|X||Y|$ □