

2022 年安徽大学数学竞赛试题（数学类）

2022.9.24

1. 有直线

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}; \quad l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$$

(1) l_1 与 l_2 是否异面; (2) 求两直线任一点连线线段的中点轨迹的一般方程.(10 分)

2. $A \in M_4(\mathbb{C})$, $\text{tr}(A^k) = k(k=1, 2, 3, 4)$, 求 $\det A$.(15 分)

3. $f, g \in \mathbb{F}[x]$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$. 设 $M \in M_n(\mathbb{F})$, $A = f(M)$, $B = g(M)$.

证明: $ABX = 0$ 的任一解能被表为 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 解的和.(10 分)

4. 有半正定矩阵 $A \neq O$ 与正定矩阵 B .

证明: (1) 存在可逆矩阵 P 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵且 $P^T B P$ 为单位矩阵; (2) $\det A + B \geq \det B$.(15 分)

5. 证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)!^{\frac{1}{n+1}} - n!^{\frac{1}{n}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^{\sqrt{n}} x dx$. (每小题 5 分, 共 10 分)

6. $(a, +\infty)$ 上一致连续函数 f 的值域 $R_f \subset (A, +\infty)$, 以及 $(A, +\infty)$ 上一致连续函数 g . 求证 $g \circ f$ 是 $(a, +\infty)$ 上一致连续函数.(10 分)

7. 求证 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n \ln n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛, 但不一致收敛.(10 分)

8. f 在 $[0, +\infty)$ 上单调增且二阶可导, F 在 \mathbb{R} 上非负, $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ 发散, 且在 $[0, +\infty)$ 上恒成立 $f''(x) + F(f(x)) \leq 0$.
证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.(10 分)

9. f, g 是在 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, h 是在 $[0, 1]^2$ 上的非负连续函数, 且在 $[0, 1]$ 上恒成立

$$g(x) = \int_0^1 h(x, y) f(y) dy \quad f(x) = \int_0^1 h(x, y) g(y) dy$$

证明: (1) $\forall x \in [0, 1] \exists \xi \in [0, 1]: \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(\xi)}{f(\xi)}$; (2) $f(x) \equiv g(x)$.(10 分)