

目录

1 作业

1.1 第四次作业

1.2 第五次作业

1.3 第六次作业

2 第六章基础内容

2.1 生成函数模型

2.2 常用的多项式展开

2.3 分拆

3 第六章例题

3.1 Lecture 19

3.2 Lecture 20

3.3 Lecture 21

3.4 Lecture 22

3.5 Lecture 23

3.6 Lecture 24

1 作业

1.1 第四次作业

1 5 男 6 女中取 3 男 4 女的方法数

即 $\binom{5}{3}\binom{6}{4} = 150$ 种.

2 考虑含有充分多个蓝, 绿, 黄, 白色石子的罐子 (认为石子除颜色不可分辨), 从罐子中取三个石子的组合数量.

即 $e_1 + \cdots + e_4 = 3$ 的非负整数解的个数, 即 $\binom{4+3-1}{3} = 20$.

3 重排单词 MATHEMATICS, 使得排列中最后一个元音为 I 的方法数.

单词长 11, 有辅音字母 2 个 M, 2 个 T, 1 个 H, 1 个 C 和 1 个 S; 元音字母 2 个 A, 1 个 E 和 1 个 I. 首先从 11 个位置中选择 4 个放元音字母, 即 $\binom{11}{4} = 330$ 种可能; 再排列元音字母使 I 为最后一个, 即排列 A, A, E, 有 $3!/2! = 3$ 种可能. 最后在剩下 7 个位置放辅音字母, 它们有 $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ 种排列. 因此答案是 $330 \cdot 3 \cdot 1260 = 1247400$.

4 证明恒等式:

$$(1) \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1};$$

(1) 注意到

$$\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} = \binom{n}{r+1}, \binom{n+1}{r+1} - \left(\binom{n}{r+1} + \binom{n-1}{r+1} \right) = \binom{n-1}{r+1}, \cdots, \binom{n+1}{r+1} - \sum_{k=r+1}^n \binom{k}{r+1} = \binom{r+1}{r+1} = \binom{r}{r}$$

$$(2) \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

1

从而得证.(2) 考虑生成函数 $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m+n}{r} x^r = (1+x)^{m+n}$, 我们有

$$f(x) = (1+x)^m (1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{r=0}^{m+n} \sum_{i+j=r, i,j \geq 0} \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^r$$

比较系数可得 $\sum_{i+j=r} \binom{m}{i} \binom{n}{j} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.

1.2 第五次作业

1 给出下式中 x^{18} 的系数.

$$(1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} \right)^6 \quad (2) (1-4x)^{-5} \quad (3) \frac{x-3x^3}{(1-x)^4}$$

证明. (1) 原式 $= (1-x^3)^{-6} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{k} x^{3k}$, 其中 x^{18} 的系数即 $k=6$, $\binom{11}{6} = 462$.

(2) $(1-4x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} 4^k x^k$, 其中 x^{18} 的系数即 $k=18$, $\binom{22}{4} 4^{18}$.

(3) 考虑 $(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 即求 $a_{17} - 3a_{15}$, 注意到 $a_k = \binom{k+3}{k}$, 故求得 $a_{17} - 3a_{15} = -1308$. \square

2 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \binom{n+k-1}{k} = 2^n.$$

证明.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \binom{n+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{-n}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} = 2^n$$

\square

3 从 4 个孩子和 6 个大人中收 24 元, 每人至少给出 1 元, 但每个孩子至多给 4 元, 每个大人至多给 7 元. 问收钱的方法数.

证明. 生成函数为 $\left(\sum_{k=1}^4 x^k\right)^4 \left(\sum_{k=1}^7 x^k\right)^6 = x^4 \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^4 x^6 \left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^6 = x^{10} \frac{(1-x^4)^4 (1-x^7)^6}{(1-x)^{10}}$, 取其中 x^{24} 次项为 $a_{24} = 414143$. \square

4 用便士 (pennies), 镍币 (nickels), 角币 (dimes) 和 25 分硬币 (quarters) 组成 r -排列, 其中至少有一个便士和奇数个 25 分硬币, 给出排列方法数.

证明. 硬币的面值实际上没有任何意义, 只需要当作四种不同种类的硬币 A,B,C,D 即可. 用指数生成函数方法计算, 其生成函数分别对应为 $e^x - 1, e^x, e^x, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 从而整体生成函数

$$f(x) = e^{2x} (e^x - 1) \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{2x} - e^{3x} + e^{4x}}{2}$$

其中 x^n 的系数为 $\frac{n!}{2} (4^n - 3^n - 2^n + 1)$, 从而方法数是 $\frac{4^n - 3^n - 2^n + 1}{2}$. \square

5 安置 20 人于 3 个帐篷中, 第一个帐篷中至少有一人, 给出安置方法数.

证明. 若人是可区分的, 则注意到无限制的安置方法有 3^{20} 种, 而把所有安置在除第一个帐篷外的帐篷中有 2^{20} 种方法, 故总体方法为 $3^{20} - 2^{20} = 3485735825$.

若不可区分, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 20, x_1 \geq 1, x_2, x_3 \geq 0$ 的整数解, 其等价于 $y_1 + y_2 + y_3 = 19, y_i \geq 0$ 的整数解数, 即 $\binom{19+3-1}{19} = \binom{21}{2} = 210$. \square

1.3 第六次作业

1 在 700 个家庭中有 150 个没有孩子, 180 个仅有一个男孩, 200 个仅有一个女孩, 有多少家庭有男孩 (们) 和女孩 (们)?

证明. $700 - 150 - 180 - 200 = 170$. \square

2 把 6 本不同的书给 4 个孩子, 使得每个孩子拿到至少一本书有多少种方法?

证明. 记 X 为所有分配方法, A_k 为第 k 个学生没拿到书的所有方法, 即求 A_\emptyset , 显然 $A_\emptyset = X - \bigcup_{k=1}^4 A_k$. 而 $|X| = 4^6, |A_k| = 3^6, |A_i \cap A_j| = 2^6, |A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^6 = 1, \left| \bigcap_{k=1}^4 A_k \right| = 0^6 = 0$. 由容斥原理考虑:

$$\begin{aligned} |A_\emptyset| &= \sum_{I \subset [4]} (-1)^{|I|} |A_I| = |X| - \sum_{|I|=1} |A_I| + \sum_{|I|=2} |A_I| - \sum_{|I|=3} |A_I| + \sum_{|I|=4} |A_I| \\ &= 4^6 - \binom{4}{1} 3^6 + \binom{4}{2} 2^6 - \binom{4}{3} 1^6 + \binom{4}{4} 0^6 \\ &= 4096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1560 \end{aligned}$$

故有 1560 种方法. 另可用第二类 Stirling 数计算: $S(6, 4) = 65$, 而孩子可区分, 从而共有 $4!S(6, 4) = 1560$ 种方法. \square

3 有多少种方法可以发出一手 6 张牌, 其中至少有一张 J, 至少有一张 8 且至少有一张 2?

证明. 记不出现 J, 8, 2 的一手 6 张牌的方法分别为 A_1, A_2, A_3, X 为所有可能方法. 注意到 $|X| = \binom{52}{6}, |A_i| = \binom{48}{6}, |A_i \cap A_j| = \binom{44}{6}, \left| \bigcap_{k=1}^3 A_k \right| = \binom{40}{6}$. 从而由容斥原理有

$$\begin{aligned} |A_\emptyset| &= \sum_{I \subset [3]} (-1)^{|I|} |A_I| = |X| - \sum_{|I|=1} |A_I| + \sum_{|I|=2} |A_I| - \sum_{|I|=3} |A_I| \\ &= \binom{52}{6} - \binom{3}{1} \binom{48}{6} + \binom{3}{2} \binom{44}{6} - \binom{3}{3} \binom{40}{6} \\ &= 20358520 - 3 \cdot 12271512 + 3 \cdot 7153630 - 3838380 = 1166212 \end{aligned}$$

故有 1166212 种方法. \square

4 有多少个数位出现了 2,4,8 的十进制 m 位数?

证明. 记不出现 2,4,8 的 m 位数构成集合 A_1, A_2, A_3, X 为所有十进制 m 位数. 注意到 $|X| = 9 \cdot 10^{m-1}, |A_i| = 8 \cdot 9^{m-1}, |A_i \cap A_j| = 7 \cdot 8^{m-1}, \left| \bigcap_{k=1}^3 A_k \right| = 6 \cdot 7^{m-1}$. 从而由容斥原理有

$$|A_\emptyset| = \sum_{I \subset [3]} (-1)^{|I|} |A_I| = |X| - \sum_{|I|=1} |A_I| + \sum_{|I|=2} |A_I| - \sum_{|I|=3} |A_I| = 9 \cdot 10^{m-1} - 24 \cdot 9^{m-1} + 21 \cdot 8^{m-1} - 6 \cdot 7^{m-1}$$

□

5 在如下条件下 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$ 有多少个整数解? (1) $0 \leq x_i \leq 12$. (2) $x_i \geq 0, x_1 \leq 6, x_2 \leq 10, x_3 \leq 15, x_4 \leq 21$?

证明. (1) 记满足 $x_i \geq 13$ 的整数解构成集合 A_i , 则 $|X| = \binom{28+4-1}{28} = \binom{31}{3}, |A_i| = \binom{28-13+4-1}{28-13} = \binom{18}{3}, |A_i \cap A_j| = \binom{28-13-13+4-1}{4-1} = \binom{5}{3}$, 更高阶均为 0. 由容斥定理知

$$|A_\emptyset| = \binom{31}{3} - \binom{4}{1} \binom{18}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} = 4495 - 4 \cdot 816 + 6 \cdot 10 = 1291$$

(2) 记满足 $x_1 \geq 7, x_2 \geq 11, x_3 \geq 16, x_4 \geq 22$ 的整数解构成集合 A_1, A_2, A_3, A_4 , 我们有:

$$|X| = \binom{31}{3}, |A_1| = \binom{24}{3}, |A_2| = \binom{20}{3}, |A_3| = \binom{15}{3}, |A_4| = \binom{9}{3}, |A_1 \cap A_2| = \binom{13}{3}, |A_1 \cap A_3| = \binom{8}{3}, |A_2 \cap A_3| = \binom{4}{3}, |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = |A_i \cap A_j \cap A_k| = \left| \bigcap_{k=1}^4 A_k \right| = 0$$

因此由容斥定理得

$$\begin{aligned} |A_\emptyset| &= |X| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &= \binom{31}{3} - \left(\binom{24}{3} + \binom{20}{3} + \binom{15}{3} + \binom{9}{3} \right) + \left(\binom{13}{3} + \binom{8}{3} + \binom{4}{3} \right) \\ &= 4495 - 3703 + 346 = 1138 \end{aligned}$$

□

2 第六章基础内容

2.1 生成函数模型

数列 $\{a_r\}_{r=0}^\infty$ 的生成函数即 $f(x) = \sum_{r=0}^\infty a_r x^r$.¹ 从简单情形开始, 考虑 $a_r = \binom{n}{r}$ 的生成函数

$$f(x) = \sum_{r=0}^\infty \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n$$

在通过分配律计算 $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x) \cdots (1+x)}_{n \uparrow}$ 的展开式时, 我们首先是从 n 个 $(1+x)$ 中的每个 $(1+x)$

中取出 1 或 x , 将其相乘, 最后对所有取法累加得到结果. 如取 $n=3$ 时

$$(1+x)^3 = (1+x)(1+x)(1+x) = \underbrace{111}_{x^0} + \underbrace{11x + 1x1 + x11}_{x^1} + \underbrace{1xx + x1x + xx1}_{x^2} + \underbrace{xxx}_{x^3} = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

¹生成函数即 (一般) 无限项 x^n 的线性累加, 实际上即形式幂级数, 因为我们实际上不考虑其收敛性.

然而, 注意到所谓的“在 $(1+x)$ 中取出 1 或 x ”, 实质上即在集合 $\{1, x\}$ 中取出一个元素, 而“在 n 个 $(1+x)$ 中的每个 $(1+x)$ 中取出 1 或 x ”, 实质上是在

$$\{1, x\}^n = \underbrace{\{1, x\} \times \{1, x\} \times \cdots \times \{1, x\}}_{n \uparrow} = \{(x^{e_1}, x^{e_2}, \dots, x^{e_n}) | x^{e_i} \in \{1, x\}\}$$

中取一个元素 $(x^{e_1}, x^{e_2}, \dots, x^{e_n})$, 此即分量 x^{e_i} 在 $\{1, x\}$ 中取的一个长度为 n 的 (可重复) 排列. 而“所有取法”即该集合的所有子集. 因此我们可以将上式重写为:

$$(1+x)^n = \sum_{(x^{e_1}, \dots, x^{e_n}) \in \{1, x\}^n} x^{e_1} \cdots x^{e_n} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{e_1 + \dots + e_n = k \\ 0 \leq e_i \leq 1}} x^k$$

因此通过对系数的比较, 我们有:

$$\sum_{\substack{e_1 + \dots + e_n = k \\ 0 \leq e_i \leq 1}} 1 = \# \left\{ (e_1, \dots, e_n) \mid \sum_{k=0}^n e_i = k, e_i = 0, 1 \right\} = \binom{n}{k}$$

注意到 $e_i = 0, 1$ 实际就是“是否选择第 i 个对象”, 换言之, 左端即从 n 元取 k 个的方法数, 因此上式从组合角度来看是显然的.

但生成函数的重要意义在于能考虑更广泛的组合问题, 哪怕仅考虑多项式的幂次积形式. 我们考虑稍微复杂一些的情形.

例 1. $f(x) = (1+x+x^2)^4$ 的展开, 其理应对应到一个数列 $\{a_k\}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. 同上考虑, 我们有

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^4 &= \sum_{(x^{e_1}, \dots, x^{e_4}) \in \{1, x, x^2\}^4} x^{e_1 + \dots + e_4} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1 + \dots + e_4 = k \\ e_i = 0, 1, 2}} x^k \\ &= \# \left\{ (e_1, \dots, e_4) \mid \sum_{i=1}^4 e_i = k, e_i = 0, 1, 2 \right\} = a_k \end{aligned}$$

注 1. 下式左端的组合意义是: 考虑 4 个种类的球, 每种各 2 个球, 从这些球中拿出 k 个球的方法数.

从而我们可以发现, 这个组合问题的解实际上就等价于生成函数 $f(x)$ 的展开式系数. 换言之, 我们得到了对应关系

生成函数 \leftrightarrow 数列 \leftrightarrow 组合问题

当然我们也可以从组合问题推出生成函数. 考虑组合问题: 我们有 n 个种类的对象, 其中第 i 种含有 n_i 个同种类 (可视作重复) 的对象, 要从这全部中取出 r 个对象, 问取法有多少.

这个问题实际上等价于, 方程 $\sum_{k=1}^n e_i = r, 0 \leq e_i \leq m_i$ 的整数解 (e_1, \dots, e_n) 的个数 a_r . 我们考虑生成函数

$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, 则有

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \# \left\{ (e_1, \dots, e_n) \mid \sum_{k=1}^n e_i = r, 0 \leq e_i \leq m_i \right\} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1 + \dots + e_n = r \\ e_i = 0, 1, \dots, m_i}} x^{e_1 + \dots + e_n}$$

注意到多项式乘法 (也即用分配律计算) 有:

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} x^{\ell} \right) = \sum_{t=0}^{m+n} \sum_{\substack{i+j=t \\ 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}} a_i b_j x^t$$

我们有

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1+\dots+e_n=r \\ e_i=0,1,\dots,m_i}} x^{e_1+\dots+e_n} = \left(\sum_{e_1=0}^{m_1} x^{e_1} \right) \cdots \left(\sum_{e_n=0}^{m_n} x^{e_n} \right)$$

此即该类组合问题的生成函数. 注意到问题中第 i 种对象可以取 $e_i = 0, 1, \dots, m_i$ 个对应于生成函数中的 $\sum_{e_i=0}^{m_i}$ 项, 而有多种对象即该形式的项相乘. 此即生成函数的直观理解.

2.2 常用的多项式展开

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m x^k &= \frac{1-x^{m+1}}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (1-x^m)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{km}, \\ (1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} x^{\ell} \right) &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i+j=t} a_i b_j x^t \end{aligned}$$

2.3 分拆

将正整数 n 分为若干个 $\leq n$ 的正整数之和 (不计次序) 的方式即为 n 的分划数 $p(n)$. 我们考虑 n 可以由 e_i 个正整数 i 累加得到, 即 $\sum_{i=1}^{\infty} e_i = n, e_i \geq 0$. 通过与上面相同的推理, 我们可以得到生成函数

$$f(x) = \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1} \right) \left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{2e_2} \right) \cdots = (1-x)^{-1} (1-x^2)^{-1} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}$$

遗憾的是, 这个函数从各种意义上来说都是不初等的 (其与 q -Pochhammer 函数相关), 我们没有简单的方法给出分划数. 与如果仅考虑以不同正整数之和构造 n , 同上推理我们可以得到生成函数

$$g(x) = \left(\sum_{e_1=0}^1 x^{e_1} \right) \left(\sum_{e_2=0}^1 x^{2e_2} \right) \cdots = (1+x^1)(1+x^2) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k)$$

这也是非初等的.

如果我们不直接考虑所有正整数 n , 而仅固定一个 $n \in \mathbb{N}$ 考虑其分划数, 是比较简单的. 因为参与 n 的分划的正整数仅含有 $\leq n$ 的数, 因此可以有:

$$f_n(x) = \left(\sum_{e_1=0}^n x^{e_1} \right) \left(\sum_{e_2=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} x^{2e_2} \right) \cdots \left(\sum_{e_n=0}^1 x^{ne_n} \right)$$

其中 x^n 项系数即 n 的分划数 $p(n)$.

3 第六章例题

3.1 Lecture 19

例 2. 计算 $(1+x+x^2)^4$ 中 x^3 的系数.

可以暴力展开计算, PPT 上的过程细致的将展开过程写下来了: 从 4 个集合 $\{1, x, x^2\}$ 中各取一个元素相乘并对所有取法累加, 因此 x^3 的系数等价于方程 $\sum_{i=1}^4 e_i = 3, 0 \leq e_i \leq 2$ 的整数解的个数. 给出整数解的个数实际上是一个组合问题, 我们可以将该题等价于: 从 4 个种类的球, 每种各 2 个球中取出 3 个球的方法数.

由第五章中可重复选取的组合方法数知, 方程 $\sum_{i=1}^4 e_i = 3$ 的非负整数解个数为 $\binom{3+4-1}{3}$, 但题中不可能取出 3 个同种类的, 因此需要去掉这种可能, 即去掉 4 组解 $(e_1, \dots, e_4) = (3, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (0, 0, 0, 3)$, 因此最终答案是 $\binom{3+4-1}{3} - 4$.

例 3. 从 3 种对象中选取 6 个, 每种最多能选 4 个/每种能选无上限个, 求方法数和生成函数.

三种对象中每种最多能选 4 个, 生成函数即

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3$$

同理, 三种对象中每种可选无上限个时, 生成函数即 $g(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^3 = (1 - x)^{-3}$. 实际上生成函数的 x^k 次项系数即“从中选 k 个的方法数”, 如 $k = 6$ 时的方法数分别为 $a_6 = \binom{6+3-1}{6} - 3 - 2\binom{3}{2} = 19, b_6 = \binom{6+3-1}{6} = 28$.

例 4. 将 12 个便士硬币放在 4 个 (不同) 杯子中, 每个杯子中至少有一个硬币, 求方法数.

类似前文, 生成函数即 $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)^4 = x^4(1 - x)^{-4}$, 方法数即 a_{12} . 即计算 $g(x) = (1 - x)^{-4}$ 中 x^8 的系数 $b_8 = \binom{8+4-1}{8}$.

例 5. r 个相同对象放在五个不同盒子中, 前两个盒子中只能放不超过 10 的偶数个, 后三个盒子只能放 3 到 5 个.

前两个盒子对应的生成函数是 $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$, 后三个对应的是 $x^3 + x^4 + x^5$, 因此总的生成函数是 $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^2(x^3 + x^4 + x^5)^3$.

例 6. 用若干个便士 (1 分), 镍币 (5 分), 角币 (10 分) 和 25 分硬币换 1 元 (100 分) 零钱的方法数.

能取无上限个便士 (1 分) 即对应于生成函数 $1 + x + x^2 + \dots = (1 - x)^{-1}$, 同理对其他三种硬币也有 $(1 - x^5)^{-1}, (1 - x^{10})^{-1}, (1 - x^{25})^{-1}$, 因此最终的生成函数是 $g(x) = (1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1}(1 - x^{25})^{-1}$, 答案即取其 x^{100} 项系数 a_{100} .

事实上该问题等价于方程组 $e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = 100$ 的非负整数解数, 其中 e_i 是第 i 种硬币选取的数量. 如果考虑生成函数, 即对方程组 $e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = k$ 的解数乘上 x^k 再求和, 有:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \# \{(e_1, \dots, e_4) | e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 25e_4 = k, e_i \in \mathbb{N}\} x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{e_1+5e_2+10e_3+25e_4=k} x^k \\ &= \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right) \left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{5e_2}\right) \left(\sum_{e_3=0}^{\infty} x^{10e_3}\right) \left(\sum_{e_4=0}^{\infty} x^{25e_4}\right) = g(x) \end{aligned}$$

此即上述生成函数, 因此自然可得结果为 a_{100} .

例 7. n 个 6 面骰子结果之和为 r 的可能方法数 a_r 的生成函数.

因为每个骰子的可能结果仅有 1 到 6, 因此对应于 $x + x^2 + \dots + x^6$, 从而 n 个即 $(x + x^2 + \dots + x^6)^n = x^n(1 + x + \dots + x^5)^n$.

当然我们也可以认为 $a_r = \# \left\{ (e_1, \dots, e_n) \mid \sum_{k=1}^n e_k = r, 1 \leq e_k \leq 6 \right\}$, 则

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1+\dots+e_n=r \\ e_i=1,2,3,4,5,6}} x^r = \left(\sum_{e_1=1}^6 x^{e_1} \right) \cdots \left(\sum_{e_n=1}^6 x^{e_n} \right) = \left(\sum_{k=1}^6 x^k \right)^n$$

例 8. 从 5 个巧克力味, 5 个草莓味, 3 个柠檬味, 3 个樱桃味甜甜圈种取 r 个的方法数 a_r 的生成函数. 以及要求所取 r 个中每个味道都有的方法数 b_r 及其生成函数.

记第 i 个味道甜甜圈取 e_i 个, 则 a_r 即 $\sum_{i=1}^4 e_i = r, 0 \leq e_1, e_2 \leq 5, 0 \leq e_3, e_4 \leq 3$ 的整数解数量. 因此

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1+\dots+e_4=r \\ 0 \leq e_1, e_2 \leq 5, 0 \leq e_3, e_4 \leq 3}} x^r = \left(\sum_{e_1=0}^5 x^{e_1} \right) \cdots \left(\sum_{e_4=0}^3 x^{e_4} \right) = (1+x+\dots+x^5)^2 (1+x+x^2+x^3)^2$$

此即生成函数. 对 b_r 有完全类似的推理. 可以注意到生成函数中 $\sum_{k=0}^5 x^k$ 的部分即对应于可以取 $0, 1, \dots, 5$ 个甜甜圈的味道, $\sum_{k=0}^3 x^k$ 即可取三个甜甜圈的味道, 将其相乘即可得到生成函数.

3.2 Lecture 20

例 9. 从 3 种 (*plain*, *pepperoni*, or *vegetable*) 披萨中点 10 个, 求点单方法数. 要求 (1) 每种至少有两个; (2) 最多 2 个红肠 (*pepperoni*) 披萨; (3) 蔬菜披萨有偶数个; (4) 有偶数个蔬菜披萨和奇数个红肠披萨.

(1) 生成函数为 $(x^2 + x^3 + \dots)^3 = x^6(1-x)^{-3}$, x^{10} 系数即 $\binom{4+3-1}{3}$. (2) 生成函数为 $(1-x)^{-2}(1+x+x^2)$, x^{10} 系数即 $\binom{10+2-1}{10} + \binom{9+2-1}{9} + \binom{8+2-1}{8} = 30$. (3) 生成函数为 $(1-x)^{-2}(1-x^2)^{-1}$, x^{10} 系数即 $\sum_{k=0}^5 \binom{(10-2k)+2-1}{10-2k} = 36$. (4) 生成函数为 $(1-x)^{-1} \cdot (1-x^2)^{-1} \cdot x(1-x^2)^{-1} = x(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}$, 其 x^{10} 系数即 $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}$ 中 x^9 系数, 注意到 $(1-x^2)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{2k}$, 故 x^9 系数为 $\sum_{i+2j=9} 1 \cdot (j+1) = \sum_{j=0}^4 (j+1) = 15$.

3.3 Lecture 21

例 10. 给出 5 的分划数, 以及用不同正整数之和给出 5 的方法数.

如上用生成函数的方法计算:

$$f_5(x) = (1+x+\dots+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5), g_5(x) = \prod_{k=1}^5 (1+x^k)$$

其系数分别为 $a_5 = 7, b_5 = 3$. 实际上这样算和直接手动验算 5 的分划是本质一样的.

例 11. 证明任意正整数 n 可以被唯一写成 2 的不同幂之和.

证明. 正整数 n 可以被写成 2 的不同幂之和的方法数为 a_n , 其生成函数为

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$$

即证 $a_n = 1, f(x) = (1-x)^{-1}$. 注意到

$$(1-x)f(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots = (1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^k})\cdots = \cdots = (1-x^{2^k})(1+x^{2^k})\cdots = 1$$

因此得证. □

例 12. (1) 将五个相同的硬币分组的方法数 (每组至少有一个);(2) 将五个相同的硬币放入三个可分/不可分的杯子中. 每个杯子中至少有一个硬币.

(1) 即计算 5 的分划数, 因为这些组是不可分/不计次序的.(2) 若杯子可分, 则化作上一节的问题. 若不可分, 则需要考虑 Young 图.(我不确定会不会要求现场构造.)

3.4 Lecture 22

3.5 Lecture 23

3.6 Lecture 24