# 5 第五章多项式

## 5.1 一元多项式

**5.1.1** $f,g\in\mathbb{F}[x]$, 证明 $fg=0\iff f$ 和 $g$ 中至少一个是 0.

证明一. $\Longleftarrow$ 显然. $\Longrightarrow$: 若 $f,g$ 均非零, 则两者的首项系数之积非零, 从而 $fg\neq 0$. □

证明二. $\Longrightarrow$: 按逐项系数递推, 记

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i,g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j,f(x)g(x)=\sum_{t=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=t}a_ib_j\right)x^t=0$$

从而 $c_t=\sum\limits_{i+j=t}a_ib_j=0,\forall t=0,\cdots,m+n$. 若 $f=0$ 则命题得证; 若 $f\neq 0$, 则 $a_m\neq 0$, 而 $c_{m+n}=a_mb_n=0,b_n=0$.

下证明 $b_{n-r}=0,r=0,\cdots,n$. 对 $r$ 归纳, $r=0$ 时已证. 若 $<r$ 的情形已证, 即

$$b_{n-0}=b_{n-1}=\cdots=b_{n-r+1}=0$$

则

$$c_{m+n-r}=a_mb_{n-r}+a_{m-1}b_{n-r+1}+\cdots+a_{m-r}b_n=a_mb_{n-r}=0$$

从而 $b_{n-r}=0$, 得证. □

**5.1.2** $f,g,h\in\mathbb{F}[x]$, 若 $f\neq 0$, 则 $fg=fh\iff g=h$.

证明. $fg=fh\iff f(g-h)=0$, 而 $f\neq 0$, 由上题知 $g-h=0,g=h$. □

**5.1.3** 对于 $f\in\mathbb{R}[x],f\neq 0$ 满足 $f(x^2)=f^2(x)$, 求多项式 $f(x)$.

证明一. 记 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i,a_i\in\mathbb{R},a_n\neq 0$. 取 $m=\max\{k\mid a_k\neq 0,k=0,\cdots,n-1\}$, 即除 $a_nx^n$ 外最高非零项的次数, 则

$$f(x^2)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{2i}=a_nx^{2n}+a_mx^{2m}+\cdots,f^2(x)=\sum_{t=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=t}a_ia_j\right)x^t=a_n^2x^{2n}+2a_na_mx^{n+m}+\cdots$$

比较系数,$a_n=a_n^2,a_n=1$. 而 $n+m>2m$, 故 $x^{n+m}$ 项系数 $2a_na_m=0,a_m=0$. 这与 $m$ 定义矛盾, 故 $m$ 不存在, 即 $a_0=\cdots=a_{n-1}=0,f(x)=x^n$. □

证明二. 同上记号且易证 $a_n=1$. 对 $f(x^2),f^2(x)$ 展开有:

$$f(x^2)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{2i},f^2(x)=\sum_{t=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=t}a_ia_j\right)x^t$$

逐项比较系数, 可得:

$$a_k=\sum_{i+j=2k}a_ia_j,\qquad 0=\sum_{i+j=2k+1}a_ia_j,\qquad \forall k=0,\cdots,n$$

从而 $0=2a_na_{n-1},a_{n-1}=0$. 下证 $a_{n-r}=0,r=1,\cdots,n$. 对 $r$ 归纳, $r=1$ 时已证. 假设 $<r$ 的情形已证, 即 $a_{n-1}=\cdots=a_{n-r+1}=0$ 时: 若 $r$ 为偶数, 则

$$0=a_{n-r/2}=\sum_{i+j=2n-r}a_ia_j=2a_na_{n-r}$$

若 $r$ 为奇数, 则取 $k=n-(r+1)/2$,

$$0=\sum_{i+j=2n-r}a_ia_j=2a_na_{n-r}$$

可知总有 $a_{n-r}=0$, 从而得证, 即 $f(x)=x^n$. □

**5.1.4** $f,g,h\in\mathbb{R}[x]$, 证明若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$, 则 $f=g=h=0$.

证明一. 若 $f\neq 0$ 则 $\deg f^2=2\deg f$ 为偶数, 且此时 $g^2+h^2\neq 0$. 由于 $g^2$ 与 $h^2$ 的首项系数均为正数, 故两者和也为正数, 故 $\deg(g^2+h^2)=\max(\deg g^2,\deg h^2)$, 从而有

$$2\deg f=\deg f^2=\deg\big(xg^2(x)+xh^2(x)\big)=2\max(\deg g,\deg h)+1$$

左端为偶数, 右端为奇数, 矛盾, 从而 $f=0,g^2+h^2=0,g=h=0$. □

证明二. 若 $g,h$ 中至少有一个非零, 取 $g\neq 0$, 则 $\exists c\in\mathbb{R},g(c)\neq 0$, 故 $g^2(c)+h^2(c)>0,g^2+h^2\neq 0$. 而 $\deg f^2$ 为偶数,$\deg\big(xg^2(x)+xh^2(x)\big)$ 为奇数, 矛盾. 故 $g=h=0,f=0$. □

**5.1.5** 在 $\mathbb{C}[x]$ 中找一组不全为 0 的多项式 $f,g,h$ 使得 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$.

证明. $f(x)=0,g(x)=\mathrm{i},h(x)=1$. □

通解. 由于 $x\mid f^2(x)$, 则 $x\mid f(x)$. 记 $f(x)=xq(x)$, 有

$$xq^2(x)=g^2(x)+h^2(x)=(g(x)+\mathrm{i}h(x))(g(x)-\mathrm{i}h(x))$$

不失一般性地认为 $g,h$ 互素, 因为上式等价于

$$x\left(\frac{q(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2=\left(\frac{g(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2+\left(\frac{h(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2$$

另一方面,$x\mid(g(x)+\mathrm{i}h(x))(g(x)-\mathrm{i}h(x))$, 不失一般性地认为 $x\mid g(x)+\mathrm{i}h(x)$.

将 $q(x)$ 分解为不可约多项式的乘积, 即 $q=p_1p_2\cdots p_m$, 则

$$g(x)+\mathrm{i}h(x)=xp_1^2(x)\cdots p_s^2(x)p_{s+1}(x)\cdots p_t(x),g(x)-\mathrm{i}h(x)=p_{s+1}(x)\cdots p_t(x)p_{t+1}^2(x)\cdots p_m^2(x)$$

记

$$a(x)=p_1(x)\cdots p_s(x),b(x)=p_{t+1}(x)\cdots p_m(x),d(x)=p_{s+1}(x)\cdots p_t(x)$$

则 $q=abd,g+\mathrm{i}h=xa^2d,g-\mathrm{i}h=db^2,(g+\mathrm{i}h,g-\mathrm{i}h)=d(a,b)^2$. 而 $(g+\mathrm{i}h,g-\mathrm{i}h)=(g+\mathrm{i}h,2g)=(g,h)=1$, 因此 $d=(a,b)=1,g+\mathrm{i}h=xa^2,g-\mathrm{i}h=b^2$, 解得:

$$f=xq=xab,g=\frac{xa^2+b^2}{2},h=\frac{xa^2-b^2}{2\mathrm{i}}$$

最后回代 $g,h$ 不互素的情况, 得到通解: 对于 $\forall a,b\in\mathbb{C}[x]$, 上式为通解. □

## 5.2 整除

**5.2.1** 求下列 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1. $f(x)=5x^4+3x^3+2x^2+x-1,g(x)=x^2+2x-2$;
2. $f(x)=6x+3x^4-4x^3,g(x)=x+2$.

证明.
1. $q(x)=5x^2-7x+26,r(x)=-65x+51$.
2. $q(x)=3x^3-10x^2+20x-34,r(x)=68$.

□

**5.2.2** 求 $f(x)$ 按 $x-c$ 幂的展开式, 即写成 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)^k$ 的形式:

1. $f(x)=x^5, c=1$;
2. $f(x)=x^3-10x^2+13, c=-2$.

证明. 1. $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$.

2. $(x+2)^3-16(x+2)^2+52(x+2)-35$.

□

**5.2.3** 问参数 $m,n,p$ 满足什么条件时有

1. $x^2-2x+1 \mid x^4-5x^3+11x^2+mx+n$;
2. $x^2-2mx+2 \mid x^4+3x^2+mx+n$;
3. $x^2+m-1 \mid x^3+nx+p$;
4. $x^2+mx+1 \mid x^4+nx^2+p$.

证明. 1. 要求除法余式 $r(x)=(m+11)x+(n-4)=0$, 即 $m=-11, n=4$.

2. 要求除法余式 $r(x)=4mx^2-mx+(n-2)=0$, 即 $m=0, n=2$.
3. 要求除法余式 $r(x)=(1-m+n)x+p=0$, 即 $m=n+1, p=0$.
4. 要求除法余式 $r(x)=(m+n)x^2+2mx+(p+1)=0$, 即 $m=n=0, p=-1$.

□

**5.2.4** 求 $u(x), v(x)$ 使得 $uf+vg=(f,g)$.

1. $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3, g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$;
2. $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$;
3. $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

证明. 1. $u(x)=\frac{3}{5}x-1, v(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}x$.

2. $u(x)=-\frac{\sqrt{2}}{8}x+\frac{1}{2}, v(x)=\frac{\sqrt{2}}{8}x+\frac{1}{2}$.
3. $u(x)=-x-1, v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

(答案均不唯一.) □

**5.2.5** 设 $f(x)=x^3+(t+1)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式为二次多项式, 求 $t,u$.

证明. 考虑带余除法 $f=qg+r$, 比较次数与系数可知 $q(x)=1$, 故 $r(x)=f(x)-g(x)=x^2+2x+u$. 继续辗转相除得到 $g=q_1r+r_1$, 其中 $\deg r_1<\deg r=2$, 而 $(f,g)\mid r_1$, 因此 $r_1=0, g=q_1r$. 比较系数知 $q_1$ 为首项系数为 1 的一次多项式 $(x-a)$, 因此有

$$g(x)=x^3+tx^2+u=(x-a)(x^2+2x+u)=x^3+(2-a)x^2+(u-2a)x-au$$

比较系数可得

$$t=2-a, \quad 0=u-2a, \quad u=-au$$

解得 $t=2, u=0, a=0$ 或 $t=3, u=-2, a=-1$. □

**5.2.6** 对于多项式 $f,g,d$, 若 $d\mid f, d\mid g$ 且存在多项式 $u,v$ 使得 $d=uf+vg$, 证明 $d=(f,g)$.

证明. 由 $d\mid f, d\mid g$ 知 $d\mid (f,g)$, 而 $(f,g)\mid uf+vg=d$, 因此 $d$ 与 $(f,g)$ 间差一个非零常数, 即 $d$ 是 $f,g$ 的一个最大公因数. □

**5.2.7** 设 $f, g \in \mathbb{F}[x]$, 证明:

1. 若 $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ 满足 $ad - bc \neq 0$, 则 $(af + bg, cf + dg) = (f, g)$;
2. $(f^2, g^2) = (f, g)^2$;
3. $(f, f + g) = 1 \iff (f, g) = 1$.

证明. 首先证明引理: 对于任意多项式 $q \in \mathbb{F}[x], (f, g) = (f + qg, g)$. 证: 由于 $(f, g)$ 整除 $f + qg$ 和 $g$, 因此 $(f, g) \mid (f + qg, g)$, 同理 $(f + qg, g) \mid (f + qg - qg, g) = (f, g)$, 从而两者相等.

1.
$$(af + bg, cf + dg) = \Big(af + bg, cf + dg - \frac{c}{a}(af + bg)\Big) = \Big(af + bg, \frac{ad - bc}{a} g\Big) = (f, g)$$

2. 记 $d = (f, g)$, 有 $f = df_1, g = dg_1, (f_1, g_1) = 1, (f^2, g^2) = d^2(f_1^2, g_1^2)$. 而 $(f_1, g_1) = 1 \iff (f_1^2, g_1^2) = 1$(书上推论 5.2.12, 或由 Bézout 定理), 从而得证.

3. 由 1 或引理显然. □

**5.2.8** $f, g \in \mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 且 $uf + vg = (f, g)$, 证明 $(u, v) = 1$.

证明. 记 $f = (f, g)f_1, g = (f, g)g_1$, 其中 $(f_1, g_1) = 1$. 从而有 $(f, g) = uf + vg = (f, g)(uf_1 + vg_1)$, 因此 $uf_1 + vg_1 = 1$, 这等价于 $(u, v) = 1$. □

**5.2.9** 设 $f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_n \in \mathbb{F}[x]$ 且 $(f_i, g_j) = 1(\forall i \in [m], j \in [n])$, 证明 $(f_1 \cdots f_m, g_1 \cdots, g_n) = 1$.

证明. 首先证明 $n = 1$ 的情形, 即 $\forall i = 1, \cdots, m, (f_i, g) = 1$ 则有 $(f_1 \cdots f_m, g) = 1$. 对 $m$ 归纳,$m = 1$ 时已证, 下设 $< m$ 的情形已得证, 而 $(f_1 \cdots f_{m-1}, g) = (f_m, g) = 1 \iff (f_1 \cdots f_m, g) = 1$(书上推论 5.2.12), 从而得证.

再对原命题考虑, 记 $f = f_1 \cdots f_m$, 由上知 $(f, g_1) = \cdots = (f, g_n) = 1$, 从而又有 $(f, g_1 \cdots g_n) = 1$. □

**5.2.10** 证明定理 5.2.16

> **定理 5.2.16** 设 $f_1, \cdots, f_k \in \mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 则 $(f_1, \cdots, f_k m)$ 唯一存在, 且
> $$(f_1, \cdots, f_k) = ((f_1, \cdots, f_{k-1}), f_k)$$
> 从而 $\exists u_i \in \mathbb{F}[x], i \in [k]$ 使得
> $$(f_1, \cdots, f_k) = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i$$

证明. □

**5.2.11** 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x), g(x)$ 的最小公倍式, 若 $f \mid m, g \mid m$ 且 $f, g$ 的任意倍式是 $m$ 的倍式. 记 $[f, g]$ 为 $f, g$ 的 (首项系数为 1 的) 最大公倍式, 证明若 $f, g$ 首项系数为 1, 则 $[f, g] = \dfrac{fg}{(f, g)}$.

证明. □

**思考题 1** 对于 $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i, h(x)=\sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i$, 若有 $f(x)=g(x)h(x)$, 用 $a_i$ 和 $b_i$ 表示出 $c_i$.

*证明.* 考虑 $g(x)$ 的最低非零次数 $r=\min\{i|b_i\neq 0, i=0,1,\cdots,n\}$, 则 $g(x)=\sum_{i=r}^{n} b_i x^i$. 又由于 $a_k=\sum_{i+j=k} b_i c_j$, 因此实际上即

$$a_{r+k}=\sum_{i+j=r+k} b_i c_j = b_r c_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i, (k=0,\cdots,m-r)$$

因此有

$$c_k=\frac{1}{b_r}\left(a_{r+k}-\sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i\right)$$

其在 $r=0$, 即 $b_0\neq 0$ 时化为

$$c_k=\frac{1}{b_0}\left(a_k-\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-i} c_i\right)$$

$\square$