高等代数作业答案 (编纂中)

章亦流 A24201011

2025 年 3 月 9 日

目录

5 第五章多项式

5.1 一元多项式

5.1.1 $f, g \in \mathbb{F}[x]$, 证明 $fg = 0 \iff f$ 和 g 中至少一个是 0.

证明一. $\impliedby$ 显然. $\implies$: 若 f, g 均非零, 则两者的首项系数之积非零, 从而 $fg \neq 0$. □

证明二. $\implies$: 按逐项系数递推, 记

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, f(x)g(x) = \sum_{t=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=t} a_i b_j \right) x^t = 0$$

从而 $c_t = \sum_{i+j=t} a_i b_j = 0, \forall t = 0, \cdots, m+n$. 若 $f = 0$ 则命题得证; 若 $f \neq 0$, 则 $a_m \neq 0$, 而 $c_{m+n} = a_m b_n = 0, b_n = 0$.

下证明 $b_{n-r} = 0, r = 0, \cdots, n$. 对 r 归纳, $r = 0$ 时已证. 若 $< r$ 的情形已证, 即

$$b_{n-0} = b_{n-1} = \cdots = b_{n-r+1} = 0$$

则

$$c_{m+n-r} = a_m b_{n-r} + a_{m-1} b_{n-r+1} + \cdots + a_{m-r} b_n = a_m b_{n-r} = 0$$

从而 $b_{n-r} = 0$, 得证. □

5.1.2 $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$, 若 $f \neq 0$, 则 $fg = fh \iff g = h$.

证明. $fg = fh \iff f(g-h) = 0$, 而 $f \neq 0$, 由上题知 $g - h = 0, g = h$. □

5.1.3 对于 $f \in \mathbb{R}[x], f \neq 0$ 满足 $f(x^2) = f^2(x)$, 求多项式 $f(x)$.

证明一. 记 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. 取 $m = \max\{k \mid a_k \neq 0, k = 0, \cdots, n-1\}$, 即除 $a_n x^n$ 外最高非零项的次数, 则

$$f(x^2) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} = a_n x^{2n} + a_m x^{2m} + \cdots, f^2(x) = \sum_{t=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=t} a_i a_j \right) x^t = a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_m x^{n+m} + \cdots$$

比较系数,$a_n = a_n^2, a_n = 1$. 而 $n + m > 2m$, 故 x^{n+m} 项系数 $2a_n a_m = 0, a_m = 0$. 这与 m 定义矛盾, 故 m 不存在, 即 $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0, f(x) = x^n$. □

证明二. 同上记号且易证 $a_n = 1$. 对 $f(x^2), f^2(x)$ 展开有:

$$f(x^2) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}, f^2(x) = \sum_{t=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=t} a_i a_j \right) x^t$$

逐项比较系数, 可得:

$$a_k = \sum_{i+j=2k} a_i a_j, \qquad 0 = \sum_{i+j=2k+1} a_i a_j, \qquad \forall k = 0, \cdots, n$$

从而 $0 = 2a_n a_{n-1}, a_{n-1} = 0$. 下证 $a_{n-r} = 0, r = 1, \cdots, n$. 对 r 归纳, $r = 1$ 时已证. 假设 $< r$ 的情形已证, 即 $a_{n-1} = \cdots = a_{n-r+1} = 0$ 时: 若 r 为偶数, 则

$$0 = a_{n-r/2} = \sum_{i+j=2n-r} a_i a_j = 2a_n a_{n-r}$$

若 r 为奇数, 则取 $k = n - (r+1)/2$,

$$0 = \sum_{i+j=2n-r} a_i a_j = 2a_n a_{n-r}$$

可知总有 $a_{n-r} = 0$, 从而得证, 即 $f(x) = x^n$. □

5.1.4 $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$, 证明若 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$, 则 $f = g = h = 0$.

证明一. 若 $f \neq 0$ 则 $\deg f^2 = 2\deg f$ 为偶数, 且此时 $g^2 + h^2 \neq 0$. 由于 g^2 与 h^2 的首项系数均为正数, 故两者和也为正数, 故 $\deg(g^2 + h^2) = \max(\deg g^2, \deg h^2)$, 从而有

$$2\deg f = \deg f^2 = \deg\big(xg^2(x) + xh^2(x)\big) = 2\max(\deg g, \deg h) + 1$$

左端为偶数, 右端为奇数, 矛盾, 从而 $f = 0, g^2 + h^2 = 0, g = h = 0$. □

证明二. 若 g, h 中至少有一个非零, 取 $g \neq 0$, 则 $\exists c \in \mathbb{R}, g(c) \neq 0$, 故 $g^2(c) + h^2(c) > 0, g^2 + h^2 \neq 0$. 而 $\deg f^2$ 为偶数,$\deg\big(xg^2(x) + xh^2(x)\big)$ 为奇数, 矛盾. 故 $g = h = 0, f = 0$. □

5.1.5 在 $\mathbb{C}[x]$ 中找一组不全为 0 的多项式 f, g, h 使得 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$.

证明. $f(x) = 0, g(x) = \mathrm{i}, h(x) = 1$. □

通解. 由于 $x \mid f^2(x)$, 则 $x \mid f(x)$. 记 $f(x) = xq(x)$, 有

$$xq^2(x) = g^2(x) + h^2(x) = (g(x) + \mathrm{i}h(x))(g(x) - \mathrm{i}h(x))$$

不失一般性地认为 g,h 互素, 因为上式等价于

$$x\left(\frac{q(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2=\left(\frac{g(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2+\left(\frac{h(x)}{(g(x),h(x))}\right)^2$$

另一方面,$x\mid(g(x)+\mathrm{i}h(x))(g(x)-\mathrm{i}h(x))$, 不失一般性地认为 $x\mid g(x)+\mathrm{i}h(x)$.

将 $q(x)$ 分解为不可约多项式的乘积, 即 $q=p_1p_2\cdots p_m$, 则

$$g(x)+\mathrm{i}h(x)=xp_1^2(x)\cdots p_s^2(x)p_{s+1}(x)\cdots p_t(x),g(x)-\mathrm{i}h(x)=p_{s+1}(x)\cdots p_t(x)p_{t+1}^2(x)\cdots p_m^2(x)$$

记

$$a(x)=p_1(x)\cdots p_s(x),b(x)=p_{t+1}(x)\cdots p_m(x),d(x)=p_{s+1}(x)\cdots p_t(x)$$

则 $q=abd,g+\mathrm{i}h=xa^2d,g-\mathrm{i}h=db^2,(g+\mathrm{i}h,g-\mathrm{i}h)=d(a,b)^2$. 而 $(g+\mathrm{i}h,g-\mathrm{i}h)=(g+\mathrm{i}h,2g)=(g,h)=1$, 因此 $d=(a,b)=1,g+\mathrm{i}h=xa^2,g-\mathrm{i}h=b^2$, 解得:

$$f=xq=xab,g=\frac{xa^2+b^2}{2},h=\frac{xa^2-b^2}{2\mathrm{i}}$$

最后回代 g,h 不互素的情况, 得到通解: 对于 $\forall a,b\in\mathbb{C}[x]$, 上式为通解. $\square$

5.2 整除

5.2.1 求下列 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1. $f(x)=5x^4+3x^3+2x^2+x-1, g(x)=x^2+2x-2$;
2. $f(x)=6x+3x^4-4x^3, g(x)=x+2$.

证明. 1. $q(x)=5x^2-7x+26, r(x)=-65x+51$.

2. $q(x)=3x^3-10x^2+20x-34, r(x)=68$.

□

5.2.2 求 $f(x)$ 按 $x-c$ 幂的展开式, 即写成 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-c)^k$ 的形式:

1. $f(x)=x^5, c=1$;
2. $f(x)=x^3-10x^2+13, c=-2$.

证明. 1. $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$.

2. $(x+2)^3-16(x+2)^2+52(x+2)-35$.

□

5.2.3 问参数 m,n,p 满足什么条件时有

1. $x^2-2x+1 \mid x^4-5x^3+11x^2+mx+n$;
2. $x^2-2mx+2 \mid x^4+3x^2+mx+n$;
3. $x^2+m-1 \mid x^3+nx+p$;
4. $x^2+mx+1 \mid x^4+nx^2+p$.

证明. 1. 要求除法余式 $r(x)=(m+11)x+(n-4)=0$, 即 $m=-11, n=4$.

2. 要求除法余式 $r(x)=(8m^3-m)x-8m^2+n-2=0$, 解得 $m=0, n=2$ 或 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}, n=3$.
3. 要求除法余式 $r(x)=(1-m+n)x+p=0$, 即 $m=n+1, p=0$.
4. 要求除法余式 $r(x)=(-m^3-mn+2m)x-m^2-n+p+1=0$, 解得 $m=0, n=p+1$ 或 $m^2+n=2, p=1$.

□

5.2.4 求 $u(x),v(x)$ 使得 $uf+vg=(f,g)$.

1. $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3, g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$;
2. $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$;
3. $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

证明. 1. $u(x)=\dfrac{3}{5}x-1, v(x)=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{2}{5}x$.

2. $u(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{8}x+\dfrac{1}{2}, v(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x+\dfrac{1}{2}$.
3. $u(x)=-x-1, v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

(答案均不唯一.)

□

5.2.5 设 $f(x)=x^3+(t+1)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式为二次多项式, 求 t,u.

证明. 考虑带余除法 $f=qg+r$, 比较次数与系数可知 $q(x)=1$, 故 $r(x)=f(x)-g(x)=x^2+2x+u$. 继续辗转相除得到 $g=q_1r+r_1$, 其中 $\deg r_1<\deg r=2$, 而 $(f,g)\mid r_1$, 因此 $r_1=0,g=q_1r$. 比较系数知 q_1 为首项系数为 1 的一次多项式 $(x-a)$, 因此有

$$g(x)=x^3+tx^2+u=(x-a)(x^2+2x+u)=x^3+(2-a)x^2+(u-2a)x-au$$

比较系数可得

$$t=2-a,\quad 0=u-2a,\quad u=-au$$

解得 $t=2,u=0,a=0$ 或 $t=3,u=-2,a=-1$. □

5.2.6 对于多项式 f,g,d, 若 $d\mid f,d\mid g$ 且存在多项式 u,v 使得 $d=uf+vg$, 证明 $d=(f,g)$.

证明. 由 $d\mid f,d\mid g$ 知 $d\mid (f,g)$, 而 $(f,g)\mid uf+vg=d$, 因此 d 与 (f,g) 间差一个非零常数, 即 d 是 f,g 的一个最大公因数. □

5.2.7 设 $f,g\in\mathbb{F}[x]$, 证明:

1. 若 $a,b,c,d\in\mathbb{F}$ 满足 $ad-bc\neq 0$, 则 $(af+bg,cf+dg)=(f,g)$;
2. $(f^2,g^2)=(f,g)^2$;
3. $(f,f+g)=1\iff (f,g)=1$.

证明. 首先证明引理: 对于任意多项式 $q\in\mathbb{F}[x],(f,g)=(f+qg,g)$. 证: 由于 (f,g) 整除 $f+qg$ 和 g, 因此 $(f,g)\mid(f+qg,g)$, 同理 $(f+qg,g)\mid(f+qg-qg,g)=(f,g)$, 从而两者相等.

1.
$$(af+bg,cf+dg)=\left(af+bg,cf+dg-\frac{c}{a}(af+bg)\right)=\left(af+bg,\frac{ad-bc}{a}g\right)=(f,g)$$

2. 记 $d=(f,g)$, 有 $f=df_1,g=dg_1,(f_1,g_1)=1,(f^2,g^2)=d^2(f_1^2,g_1^2)$. 而 $(f_1,g_1)=1\iff(f_1^2,g_1^2)=1$(书上推论 5.2.12, 或由 Bézout 定理), 从而得证.

3. 由 1 或引理显然. □

5.2.8 $f,g\in\mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 且 $uf+vg=(f,g)$, 证明 $(u,v)=1$.

证明. 记 $f=(f,g)f_1,g=(f,g)g_1$, 其中 $(f_1,g_1)=1$. 从而有 $(f,g)=uf+vg=(f,g)(uf_1+vg_1)$, 因此 $uf_1+vg_1=1$, 这等价于 $(u,v)=1$. □

5.2.9 设 $f_1,\cdots,f_m,g_1,\cdots,g_n\in\mathbb{F}[x]$ 且 $(f_i,g_j)=1(\forall i\in[m],j\in[n])$, 证明 $(f_1\cdots f_m,g_1\cdots,g_n)=1$.

证明. 首先证明 $n=1$ 的情形, 即 $\forall i=1,\cdots,m,(f_i,g)=1$ 则有 $(f_1\cdots f_m,g)=1$. 对 m 归纳,$m=1$ 时已证, 下设 $<m$ 的情形已得证, 而 $(f_1\cdots f_{m-1},g)=(f_m,g)=1\iff(f_1\cdots f_m,g)=1$(书上推论 5.2.12), 从而得证.

再对原命题考虑, 记 $f=f_1\cdots f_m$, 由上知 $(f,g_1)=\cdots=(f,g_n)=1$, 从而又有 $(f,g_1\cdots g_n)=1$. □

5.2.10 证明定理 5.2.16

定理 5.2.16 设 $f_1, \cdots, f_k \in \mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 则 $(f_1, \cdots, f_k)$ 唯一存在, 且

$$(f_1, \cdots, f_k) = ((f_1, \cdots, f_{k-1}), f_k)$$

从而 $\exists u_i \in \mathbb{F}[x], i \in [k]$ 使得

$$(f_1, \cdots, f_k) = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i$$

证明. 对 k 归纳,$k = 2$ 时已得证. 下设 $k \geq 3, < k$ 的情形已证. 设 $d_1 = (f_1, \cdots, f_{k-1})$, 由归纳假设知其唯一确定, 且有 $v_1 f_1 + \cdots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1$.

首先证明 $d = (d_1, f_k)$ 为 $f_1, \cdots, f_k$ 的最大公因式, 从而证明存在性. 显然 $d \mid d_1 \mid f_i (i = 1, \cdots, k-1)$ 且 $d \mid f_k$. 又对于 $f_1, \cdots, f_k$ 的任意公因式 g, 均有 (由归纳假设)

$$g \mid v_1 f_1 + \cdots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1, g \mid f_k$$

从而 $g \mid (d_1, f_k) = d$, 即 d 为最大公因式.

再证明唯一性: 若有多项式 d, d' 均为 $f_1, \cdots, f_k$ 的最大公因式, 则 $d' \mid d, d \mid d'$, 从而相同 (差一个非零常数而首项系数均为 1).

最后, 由归纳假设有 $v_1 f_1 + \cdots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1$, 又有 $u d_1 + v f_k = d$, 从而

$$u(v_1 f_1 + \cdots + v_{k-1} f_{k-1}) + v f_k = u v_1 f_1 + \cdots + u v_{k-1} f_{k-1} + v f_k = d$$

综上得证. □

5.2.11 称多项式 $m(x)$ 为多项式 $f(x), g(x)$ 的最小公倍式, 若 $f \mid m, g \mid m$ 且 f, g 的任意公倍式是 m 的倍式. 记 $m = [f, g]$, 证明若 f, g 首项系数为 1, 则 $[f, g] = \dfrac{fg}{(f, g)}$.

证明. 记 $d = (f, g), m = fg/d, f = df_1, g = dg_1, (f_1, g_1) = 1$. 从而 $m = f_1 g = f g_1$, 故 $f \mid m, g \mid m$.

再设 f, g 的任意公倍式 $h = h_1 f = h_2 g$, 有 $h = d h_1 f_1 = d h_2 g_1$, 从而 $h_1 f_1 = h_2 g_1$. 而 $(f_1, g_1) = 1$, 因此 $f_1 \mid h_2, m = d f_1 g_1 \mid d h_2 g_1 = h$. 综上,$m$ 满足最小公倍式的所有条件, 即 $m = [f, g]$. □

思考题 1 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, h(x) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i$, 若有 $f(x) = g(x)h(x)$, 显式表达出 c_i.

证明. 考虑 $g(x)$ 的最低非零次数 $r = \min\{i | b_i \neq 0, i = 0, 1, \cdots, n\}$, 则 $g(x) = \sum_{i=r}^{n} b_i x^i$. 又由 $a_k = \sum_{i+j=k} b_i c_j$ 有:

$$a_{r+k} = \sum_{i+j=r+k} b_i c_j = b_r c_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i, (k = 0, \cdots, m-r)$$

因此有

$$c_k = \frac{1}{b_r}\left(a_{r+k} - \sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i\right)$$

其在 $r = 0$, 即 $b_0 \neq 0$ 时化为

$$c_k = \frac{1}{b_0}\left(a_k - \sum_{i=0}^{k-1} b_{k-i} c_i\right)$$

□

5.3 因式分解定理

5.3.1 x^2+1 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 由于 x^2+1 在 $\mathbb{R}$ 上的唯一分解式为 $(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$, 故其不能被分解为 $\mathbb{Q}[x]$ 中的一次多项式之积, 故在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

5.3.2 判别下列多项式是否有重因式:

1. $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$,
2. $f(x)=x^6-3x^5+6x^3-3x^2-3x+2$.

证明. 1. 辗转相除可得 $(f,f')=1$ 从而无重因式. 但辗转相除太过麻烦, 有其他方法:

- 注意到 $(f,g)=(f+qg,g),\forall q\in\mathbb{F}[x]$, 故对第一小问有

$$\begin{aligned}(f,f')&=(x^4+x^3+2x^2+x+1,4x^3+3x^2+4x+1)=\big(x^3+4x^2+3x+4,4x^3+3x^2+4x+1\big)\\&=\big(x^3+4x^2+3x+4,13x^2+8x+15\big)=\big(11x^2+6x+13,13x^2+8x+15\big)\\&=\big(11x^2+6x+13,10x-4\big)=(4x+5,10x-4)=1\end{aligned}$$

  但该方法对第二小问太麻烦.
- 由于该题为四次多项式, 故可设

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

  展开后比较系数可得

$$a+c=1,\quad ac+b+d=2,\quad ad+bc=1,\quad bd=1$$

  尝试带入 $b=d=\pm1$ 发现 $b=d=1,a=0,c=1$ 时方程成立, 即

$$f(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$$

  从而无重因式.
- 注意到方程系数 $(1,1,2,1,1)$ 是对称的, 因此可令 $z=x+1/x$ 换元, 即

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\left(x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=(x^2+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

  从而无重因式.

2. 辗转相除可得 $(f,f')=x^3-x^2-x+1$ 从而有重因式. 也可直接试根: 注意到 $f(x)$ 的有理根 $x_0=r/s$ 总有 $r\mid 2,s\mid 1$, 故 x_0 仅可能为 $\pm1,\pm2$, 故带入验算发现 $1,-1,2$ 均为根, 相除得到

$$\frac{f(x)}{(x-2)(x-1)(x+1)}=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

从而 $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-2)$, 其有重根.

□

5.3.3 求 A, B 使得 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$.

证明一. 设 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$, 由题知 $(x-1) \mid f'(x)=4Ax^3+2Bx$, 从而 $f(1)=f'(1)=0$, 即 $A+B+1=4A+2B=0$, 解得 $A=1, B=-2$. □

证明二. 设 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$, 注意到 $(x-1) \mid (f, f')=(Ax^4+Bx^2+1, 4Ax^3+2Bx)=(Bx^2/2+1, 4Ax^3+2Bx)$, 而 $(x-1) \mid \dfrac{B}{2}x^2+1$ 要求 $B=-2$, 以及 $(x-1) \mid x(4Ax^2-4)$ 要求 $A=1$. □

5.3.4 设 $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$, 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中求一个没有重因式的多项式 g, 使其与 f 有完全相同的不可约多项式 (不计重数).

证明. 观察多项式系数可知其有理根仅可能有 ± 1, 验算可知均为根, 从而有

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x+1)}=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$

从而取 $g(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$ 即可. □

5.3.5 证明多项式 $f(x)=x^4+2x^3-15x^2+4x+20$ 有重根, 并求其所有根.

证明. 辗转相除可得 $(f, f')=x-2$, 从而知 $(x-2)^2 \mid f(x)$,

$$\frac{f(x)}{(x-2)^2}=x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$$

从而 $2, -1, -5$ 为其所有根. □

5.3.6 证明: 不可约多项式 p 是多项式 f 的 k 重因式 $\iff p \mid f, p \mid f', \cdots, p \mid f^{(k-1)}$ 但 $p \nmid f^{(k)}$.

证明一. 容易看出, 该命题等价于: $p^k \mid f \iff p$ 整除 $f, f', \cdots, f^{(k-1)}$. 下对 k 归纳,$k=1$ 时显然, 下设 $k \geq 2, <k$ 时命题成立.

$\Longrightarrow$: 显然 $p^{k-1} \mid f$, 故由归纳假设,p 整除 $f, f', \cdots, f^{(k-2)}$, 下证 $p \mid f^{(k-1)}$. 由于有 $f=p^k g$, 即 $f'=p^{k-1}(kp'g+pg')$, 故 $p^{(k-1)} \mid f'$. 从而由归纳假设,$p \mid (f')^{(k-2)}=f^{(k-1)}$.

$\Longleftarrow$: 由于 p 整除 $f', (f')', \cdots, (f')^{(k-2)}$, 故由归纳假设知 $p^{k-1} \mid f'$, 其等价于 $p^k \mid f$. □

证明二. $k=1$ 时已证,$k>1$ 时: p 是 f 的 k 重因式 $\iff p$ 是 f' 的 $k-1$ 重因式 $\iff \cdots \iff p$ 是 $f^{(k-1)}$ 的 2 重因式 $\Longrightarrow p$ 是 $f^{(k-2)}$ 的 1 重因式 $\iff p \nmid (f^{(k-1)}, f^{(k)})$, 故 $p \nmid f^{(k)}$.

另一方面,$p \nmid f^{(k)}, p \mid f^{(k-1)}$, 故 p 不为 $f^{(k-1)}$ 的重因式; 而 p 整除 $f^{(k-1)}, f^{(k-2)}$, 故 p 是 $f^{(k-2)}$ 的重因式. 综上,p 是 $f^{(k-1)}$ 的 2 重因式, 其余同上, 从而得证. □

注 1. 该结果只对 $\operatorname{char}\mathbb{F}>k$ 或 $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$ 的数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式成立.

5.3.7 举例否定 "若 α 是 f' 的 m 重根, 则 α 是 f 的 $m+1$ 重根".

证明. 取 $f(x)=x^{m+1}+1, f'(x)=(m+1)x^m, 0$ 为 f' 的 m 重根但不是 f 的 $m+1$ 重根. □

注 2. 该命题若加上条件 "α 是 f 的根" 即正确.

证明: 由题知 $(x-\alpha) \mid f, (x-\alpha)^m \mid f', (x-\alpha)^{m+1} \nmid f'$. 由 5.3.6 知 $(x-\alpha)$ 整除 $f', f'', \cdots, (f')^{(m-1)}=f^{(m)}$ 但 $(x-\alpha) \nmid f^{(m+1)}$, 加上题设 $(x-\alpha) \mid f$ 再由 5.3.6 知 $(x-\alpha)$ 是 f 的 $m+1$ 重因式.

5.3.8 证明: 若 $(x-1) \mid f(x^n)$ 则 $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

证明一. 显然 $f(1)=0$, 故 $(x-1) \mid f(x), f(x)=(x-1)g(x)$, 从而 $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n), (x^n-1) \mid f(x^n)$. □

证明二. 显然 $f(1)=0$. 考虑 1 的任意 n 次单位根 $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$, 有 $f(\omega_k^n)=f(1)=0$, 故 $(x-\omega_k) \mid f(x^n)$, 从而

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)=(x^n-1) \mid f(x^n).$$

□

5.3.9 $p \in \mathbb{F}[x], \deg p>0$. 若对于 $\forall f \in \mathbb{F}[x]$ 均有 $p \mid f$ 或 $(p,f)=1$, 则 p 在 $\mathbb{F}$ 中不可约.

证明. 若 p 可被分解为次数小于 $\deg p$ 的多项式 q,r 之积, 则必有其中一个多项式次数非零, 设其为 q. 从而取 $f=q,(p,f) \neq 1, p \nmid f$, 矛盾. □

5.3.10 $p \in \mathbb{F}[x], \deg p>0$. 若对于 $\forall f,g \in \mathbb{F}[x], p \mid fg \implies p \mid f$ 或 $p \mid g$, 则 p 在 $\mathbb{F}$ 中不可约.

证明. 若 p 可被分解为次数小于 $\deg p$ 的多项式 q,r 之积, 则 $p \mid qr=p$ 但 $p \nmid q, p \nmid r$, 矛盾. □

思考题 2 x^2-2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约而在 $\mathbb{R}$ 上可约.

证明一. 在 $\mathbb{R}$ 上有 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 从而可约. 而该多项式在 $\mathbb{Q}$ 上若有根 $a=p/q$, 则 $q \mid 1, p \mid (-2)$, 即 a 仅可能为 $\pm 1, \pm 2$, 而这些均不为根, 从而无根, 即不可约. □

证明二. 若在 $\mathbb{Q}$ 上有唯一分解 $x^2-2=(x-a)(x-b)$, 即 $a+b=0, ab=-2$, 即 $a^2=2$. 对 $\sqrt{2}$ 的无理性证明导出 x^2-2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

证明三. 书上例 5.3.1. □

思考题 3 设 $f=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}, g=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$, 其中 p_i 均为不可约多项式. 证明 $(f,g)=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_s^{\gamma_s}$, 其中 $\gamma_i=\min(\alpha_i,\beta_i), i=1,\cdots,s$.

证明. 设 $d=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_s^{\gamma_s}$, 显然 $d \mid f, d \mid g$. 若有 f,g 的公因式 $d'=p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_s^{\delta_s}$, 则 $\forall i=1,2,\cdots,s, \delta_i \leq \alpha_i$ 且 $\delta_i \leq \beta_i$, 故 $\delta_i \leq \gamma_i$, 从而 $d' \mid d$, 故 $d=(f,g)$. □

思考题 4 $f_1,\cdots,f_s \in \mathbb{F}[x]$ 之间两两互素, 记 $f=f_1\cdots f_s, g_i=f/f_i$, 证明 $(g_1,g_2,\cdots,g_s)=1$.

证明. 对 s 归纳,$s=2$ 时 $(g_1,g_2)=(f_2,f_1)=1$ 从而成立. 设 $<s$ 时命题成立, 考虑两两互素的多项式 $f_1,f_2,\cdots,f_s$, 如上定义 f,g_i, 则有

$$d=(g_1,g_2,\cdots,g_s)=((g_1,g_2,\cdots,g_{s-1}),g_s)$$

而

$$(g_1,g_2,\cdots,g_{s-1})=\left(\frac{f_1\cdots f_s}{f_1},\frac{f_1\cdots f_s}{f_2},\cdots,\frac{f_1\cdots f_s}{f_{s-1}}\right)=f_s\left(\frac{f_1\cdots f_{s-1}}{f_1},\frac{f_1\cdots f_{s-1}}{f_2},\cdots,\frac{f_1\cdots f_{s-1}}{f_{s-1}}\right)$$

由归纳假设知右端项为 f_s, 从而 $d=(f_s,f_1\cdots f_{s-1})=1$, 从而得证. □

5.4 复系数与实系数多项式的因式分解

5.4.1 求多项式 x^5-1 在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的因式分解.

证明. 在 $\mathbb{C}$ 上显然有

$$x^5-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$$

其中 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}=\cos\dfrac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{5}$. 而由于复数根成对, 故在 $\mathbb{R}$ 上有

$$\begin{aligned}x^5-1&=(x-1)\left[(x-\omega)(x-\omega^4)\right]\left[(x-\omega^2)(x-\omega^3)\right]\\&=(x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1\right)\\&=(x-1)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\end{aligned}$$

□

5.4.2 $f\in\mathbb{R}[x],\deg f=n$ 且 f 有 ℓ 个实根 (计重数), 证明 $n-\ell$ 是偶数.

证明. 将 f 分解为不可约多项式的乘积, 即

$$f=ap_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}$$

其中 p_i 均为一次多项式,q_i 均为二次多项式, 则

$$n=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}2\beta_i,\qquad \ell=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i,\qquad n-\ell=2\sum_{i=1}^{t}\beta_i$$

从而 $n-\ell$ 显然为偶数. □

5.4.3 求 x^4+1 在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的标准分解.

证明. 在 $\mathbb{C}$ 上 x^4+1 有根 $(-1)^{1/4}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}},(-1)^{3/4}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}},(-1)^{5/4}=\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}},(-1)^{7/4}=\mathrm{e}^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{4}}$, 因此有

$$\begin{aligned}x^4+1&=(x-\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}})(x-\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}})(x-\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}})(x-\mathrm{e}^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{4}})\\&=\left[(x-\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}})(x-\mathrm{e}^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{4}})\right]\left[(x-\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}})(x-\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}})\right]\\&=\left(x^2-2\cos\frac{\pi}{4}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{3\pi}{4}x+1\right)\\&=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\end{aligned}$$

□

5.4.4 $f\in\mathbb{R}[x]$ 的首项系数 $a_n>0$, 若 f 无实根, 则存在 $g,h\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $f=g^2+h^2$.

证明. 由于实系数多项式 f 无实根, 故其不可约分解中均为二次不可约多项式, 即在 $\mathbb{C}$ 中有分解

$$f(x)=q_1(x)\cdots q_m(x)=\prod_{i=1}^{m}\left[(x-\lambda_i)(x-\bar{\lambda}_i)\right]=\left(\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{m}(x-\bar{\lambda}_i)\right)=p(x)q(x)$$

其中 $q_i(x)=(x-\lambda_i)(x-\bar{\lambda}_i)$ 均为在 $\mathbb{R}$ 上不可约的二次多项式,$\lambda_i\in\mathbb{C}$. 将 $p(x)$ 按系数的实部和虚部分为两个实系数多项式, 即

$$p(x)=g(x)+\mathrm{i}h(x),\qquad g,h\in\mathbb{R}[x]$$

再对 $p(x)$ 的系数取共轭, 有

$$g(x)-\mathrm{i}h(x)=\bar{p}(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\bar{\lambda}_i)=q(x)$$

从而 $f=(g+\mathrm{i}h)(g-\mathrm{i}h)=g^2+h^2$. $\square$

5.4.5 设 $p,f\in\mathbb{R}[x]$ 且 p 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 证明: 若 $\exists\alpha\in\mathbb{C},p(\alpha)=f(\alpha)=0$ 则 $p\mid f$.

证明. 显然 $\deg p=1$ 或 2. 若 $\deg p=1$ 则 $\alpha\in\mathbb{R},p(x)=a(x-\alpha)\mid f(x)$. 若 $\deg p=2$ 则 $\alpha\notin\mathbb{R},p(x)=a(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, 而 $f(\alpha)=f(\bar{\alpha})=0$, 从而 $p(x)=a(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\mid f(x)$. $\square$

5.5 有理系数多项式

5.5.1 求下列多项式的有理根:

1. $2x^4 - x^3 + 2x - 3$;
2. $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$;
3. $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$.

证明. (1)1; (2)$-1/2$ (2 重); (3)$-2, -3$. □

5.5.2 判别下列多项式在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约:

1. $x^6 + x^3 + 1$;
2. $x^p + px + 1, p$ 是奇素数;
3. $x^4 + 4$;
4. $x^4 + 4kx + 1, k \in \mathbb{Z}$.

证明. 1. 代换 $x = t + 1$, 故原式 $= (t+1)^6 + (t+1)^3 + 1 = t^6 + 6t^5 + 15t^4 + 21t^3 + 18t^2 + 9t + 3$. 用 Einstein 判别法 (取 $p = 3$) 知其在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

2. 令 $x = t - 1$, 则原式 $= (t-1)^p + pt + 1 - p = t^p + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^k t^k + 2pt + p$, 从而由 Einstein 判别法知其在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
3. $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, 故可约.
4. 若原式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则也在 $\mathbb{Z}$ 上可约. 显然 $f(x)$ 的有理根仅可能有 ± 1, 但 $f(\pm 1) \neq 0, \pm 1$ 均不是根, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上没有一次 (和三次) 因式. 若原式在 $\mathbb{Z}$ 上有二次因式, 即设

$$x^4 + 4kx + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

比较系数可得 $a + c = 0, ac + b + d = 0, ad + bc = 4k, bd = 1$, 从而 $b = d = \pm 1$,$ac = -a^2 = \mp 2$, 矛盾于 $a \in \mathbb{Z}$, 故原式在 $\mathbb{Z}$ 上也没有二次因式, 故在 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

□

5.5.3 p 为素数, 证明 $f(x) = x^p - px + (2p - 1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 令 $x = t + 1$, 则

$$f(t+1) = (t+1)^p - p(t+1) + (2p-1) = t^p + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} t^k + p$$

从而由 Einstein 判别法知其在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

5.5.4 设 $p_i (i = 1, 2, \ldots, t)$ 为 t 个互异素数, 证明 $f(x) = x^n - p_1 \cdots p_t$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 取素数 p 为任一 p_i, 由 Einstein 判别法知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

5.5.5 f 是首一整系数多项式, 若 $f(0)$ 和 $f(1)$ 均为奇数, 则 f 没有有理根.

证明一. 设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 若其有有理根 r/s 则 $s \mid a_n=1, r \mid a_0=f(0)$, 从而有理根仅可能为 $c \in \mathbb{Z}, c \mid f(0)$. 而 $f(0)$ 为奇数, 故 c 为奇数. 由于 $f(c)=0$, 故

$$-f(1)=f(c)-f(1)=\sum_{k=0}^{n} a_k(c^k-1)$$

而对 $\forall k \in \mathbb{N}, c^k-1$ 为偶数, 故等式右端为偶数, 但左端为奇数, 矛盾, 从而 f 无有理根. □

证明二. 若 f 有有理根 r/s, 则 $s \mid a_n=1, r \mid a_0=f(0)$, 即 $s=\pm 1, r$ 为奇数. 而 $(r-ms) \mid f(m)$, 故 $(r \pm 1) \mid f(1)$, 但 $r \pm 1$ 为偶数,$f(1)$ 为奇数, 矛盾, 故无有理根. □

注 3. 若无首一条件, 可取 $f(x)=2x-1, f(0)=1, f(1)=3$ 但有有理根 $1/2$.

注 4. 命题可作简单推广:f 是首一整系数多项式, p 是素数, 若 $f(0) \not\equiv 0, f(1) \not\equiv 0 \pmod p$, 则 f 没有有理根.