

高等代数作业答案 (编纂中)

章亦流 A24201011

2025 年 4 月 13 日

目录

4	第四章 线性映射	1
4.4	线性变换及其矩阵	1
4.5	不变子空间	4
5	第五章 多项式	6
5.1	一元多项式	6
5.2	整除	7
5.3	因式分解定理	10
5.4	复系数与实系数多项式的因式分解	13
5.5	有理系数多项式	14
6	第六章 相似标准形	17
6.1	特征值与特征向量	17
6.2	特征子空间与根子空间	19
6.3	对角化	21
6.4	λ -矩阵	23
6.5	行列式因子、不变因子与初等因子	24
6.6	Jordan 标准形	25
6.7	复习题 6	26

4 第四章 线性映射

4.4 线性变换及其矩阵

4.4.1 判断下列变换是否为线性变换:

1. 线性空间 V 中 $\mathcal{A}\xi = \xi + \alpha, \alpha \in V$ 是一固定向量.
2. 线性空间 V 中 $\mathcal{A}\xi = \alpha, \alpha \in V$ 是一固定向量.
3. $M_n(\mathbb{F})$ 中 $\mathcal{A}X = BXC, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ 是两个固定矩阵.

证明. 1. 不是; 2. 不是; 3. 是. □

4.4.2 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, 证明 $\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = k\mathcal{A}^{k-1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

证明. 对 k 归纳, $k=1$ 时已证 ($\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$). 假设 $< k$ 时等式均成立, 则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k &= \mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{B}) - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = \mathcal{A}((k-1)\mathcal{A}^{k-2} + \mathcal{B}\mathcal{A}^{k-1}) - \mathcal{B}\mathcal{A}^k \\ &= (k-1)\mathcal{A}^{k-1} + (\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{A}^{k-1} = (k-1)\mathcal{A}^{k-1} + \mathcal{A}^{k-1} = k\mathcal{A}^{k-1}\end{aligned}$$

从而得证. \square

注 1. 需要注意的是, 满足 $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ 的线性变换在有限维线性空间中并不存在, 因为 $\text{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) = 0 \neq n = \text{tr} I_n$, 但可以在无限维线性空间中存在, 如在 $C^\infty(\mathbb{R})$ 中取 $\mathcal{A}: f(x) \mapsto f'(x), \mathcal{B}: f(x) \mapsto xf(x)$. 这两个线性变换实际上即量子力学中的位置算符与动量算符 (差一个常数), 而 $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ 即两个算符的对易关系.

从数学上来说, 我们能在大量广泛的结构中定义 Lie 代数和 Lie 括号, 在向量空间中通常定义 Lie 括号为线性变换的交换子 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$, 导子 $\text{ad}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = [\mathcal{B}, \mathcal{X}]$. 而该命题即 (通过修改符号): 若 $\text{ad}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$, 则 $\text{ad}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^k) = k\mathcal{A}^{k-1}$. 这与微分中的 $\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$ 具有形式上的相似性, 这也暗示了 Lie 代数中的导子与微积分乃至微分流形中的微分有联系.

4.4.3 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为线性空间 V 中的线性变换, 且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$, 证明:

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$.
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{O}, \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$.
3. 若 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 则 $(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B})^2 = \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B}$.

证明. 1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2 = \mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

2.(证法一) 由 (1) 知 \iff 显然. \implies : 对于幂等变换 \mathcal{A} 的像中元素 $v \in \text{im } \mathcal{A}, \exists w \in V, \mathcal{A}w = v$, 因此 $\mathcal{A}v = \mathcal{A}^2w = \mathcal{A}w = v$, 即 $\forall v \in \text{im } \mathcal{A}, \mathcal{A}v = v$. 取 $\forall v \in \text{im } \mathcal{A}, \mathcal{A}\mathcal{B}v = -\mathcal{B}\mathcal{A}v = -\mathcal{B}v$, 而 $\mathcal{B}v \in \text{im } \mathcal{A}$, 因此 $\mathcal{A}\mathcal{B}v = \mathcal{B}v$, 综上知 $\mathcal{B}v = 0$. 故 $\forall x \in V, \mathcal{B}\mathcal{A}x = 0, \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$, 从而由 (1) 知 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{O}$.

2.(证法二) 由 $\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$ 知 $\mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$ 和 $(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$, 故 $\mathcal{B}\mathcal{A} = -\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$, 从而 $2\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{O}, \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 - 2\mathcal{A}^2\mathcal{B} + \mathcal{A}^2 - 2\mathcal{A}\mathcal{B}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2 = \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B}$. \square

4.4.4 取 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{F})$, 令 $\mathcal{A}(X) = AXB + CX + XD$, 证明: 若 \mathcal{A} 是 $M_n(\mathbb{F})$ 中的线性变换, 且 $C = D = \mathcal{O}$ 时, \mathcal{A} 可逆 $\iff \det AB \neq 0$.

证明. \implies : \mathcal{A} 可逆即有 $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(Y) = A\mathcal{A}^{-1}(Y)B = Y, A\mathcal{A}^{-1}(I_n)B = I_n$, 故 A, B 均满秩, 即 $\det AB \neq 0$.

\impliedby : AB 可逆则 A, B 可逆, 取 $\mathcal{A}^{-1}(Y) = A^{-1}YB^{-1}$ 即为 \mathcal{A} 的逆. \square

4.4.5 \mathbb{R}^3 上的线性变换 \mathcal{A} 将下列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 变换为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 求 \mathcal{A} 在 \mathbb{R}^3 中标准基下的矩阵 A :

1. $\alpha_1 = (2, 3, 5), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (1, 0, 0), \beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 1, -1), \beta_3 = (2, 1, 2);$
2. $\alpha_1 = (2, 0, 3), \alpha_2 = (4, 1, 5), \alpha_3 = (3, 1, 2), \beta_1 = (1, 2, -1), \beta_2 = (4, 5, -2), \beta_3 = (1, 1, 0).$

证明. 设 \mathcal{A} 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 A , 则有 $\mathcal{A}(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)A$, 从而有

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathcal{A}(e_1, e_2, e_3)(\alpha_1^\top, \alpha_2^\top, \alpha_3^\top) = (e_1, e_2, e_3)A(\alpha_1^\top, \alpha_2^\top, \alpha_3^\top)$$

又因 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_1, e_2, e_3)(\beta_1^\top, \beta_2^\top, \beta_3^\top)$, 故 $A = (\beta_1^\top, \beta_2^\top, \beta_3^\top)(\alpha_1^\top, \alpha_2^\top, \alpha_3^\top)^{-1}$.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7/3 & -1/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ 1 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11/3 & 5/3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

4.4.6 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

求其在 \mathcal{A} 在下列基下的矩阵:

1. $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_1$;
2. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

证明. 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到如上两组基的过渡矩阵分别为

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 \mathcal{A} 在两组基下的矩阵分别为

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

□

4.4.7 V 为 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, 证明: 与 V 上全体线性变换可交换的线性变换有且仅有数乘变换 $c\mathcal{I}, c \in \mathbb{F}$.

证明. 在 V 中任取一基, 设线性变换 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为 A . 若 \mathcal{A} 与 V 的任意线性变换可交换, 即 A 与任意 n 阶方阵可交换. 取 $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$, 由 $AD = DA$ 知乘积的第 (i, j) 元为 $ja_{ij} = ia_{ij}$, 故 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$, $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. 再对任意 $i, j = 1, 2, \dots, n (i \neq j)$ 取矩阵 $P_{ij} = I_n + E_{ij}$. 由 $AP_{ij} = P_{ij}A$ 知 $a_iE_{ij} = a_jE_{ij}$, 故 $a_i = a_j$, 再由 i, j 任意性知 $a_1 = \dots = a_n = c, A = cI_n, c \in \mathbb{F}$. □

4.4.8 \mathcal{A} 为 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 证明: 若 \mathcal{A} 在任意基下的矩阵相同, 则 \mathcal{A} 为数乘变换.

证明. 在 V 中任取一基, 设线性变换 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为 A . 若 \mathcal{A} 在任意基下的矩阵相同, 即等价于对任意可逆矩阵 P 有 $P^{-1}AP = A$, 即 $AP = PA$. 同上证法即得证. □

4.4.9 \mathbb{F} 上的线性空间 V 有基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 由 $\mathcal{A}\alpha_i = \alpha_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1), \mathcal{A}\alpha_n = 0$ 定义了线性变换 \mathcal{A} .

1. 求 \mathcal{A} 在该基下的矩阵.
2. 证明 $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}, \mathcal{A}^{n-1} \neq \mathcal{O}$.
3. 若 V 上线性变换 \mathcal{B} 同样满足 $\mathcal{B}^n = \mathcal{O}, \mathcal{B}^{n-1} \neq \mathcal{O}$, 则存在 V 中的基使 \mathcal{B} 在该基下的矩阵与 (1) 中 \mathcal{A} 的矩阵相同.
4. 证明: $M, N \in M_n(\mathbb{F})$ 若满足 $M^n = N^n = \mathcal{O}, M^{n-1} \neq \mathcal{O}, N^{n-1} \neq \mathcal{O}$, 则 M 与 N 相似.

证明. 容易看出

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} & O_{n-1} \\ 1 & 0_{1 \times n-1} \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}, A^n = \mathcal{O}$$

而对于 V 上线性变换 \mathcal{B} , 若有 $\mathcal{B}^n = \mathcal{O}, \mathcal{B}^{n-1} \neq \mathcal{O}$, 取 $\alpha \in V$ 使 $\mathcal{B}^{n-1}\alpha \neq 0$, 下证 $\alpha, \mathcal{B}\alpha, \dots, \mathcal{B}^{n-1}\alpha$ 是 V 的一组基. 设有 $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\alpha' = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{B}^{i-1}\alpha = 0$, 则 $\mathcal{B}^{n-1}\alpha' = k_1 \mathcal{B}^{n-1}\alpha = 0, k_1 = 0$, 故 $\mathcal{B}^{n-2}\alpha' = k_2 \mathcal{B}^{n-1}\alpha = 0, k_2 = 0$, 以此类推. 从而 $k_1 = \dots = k_n = 0$, 即 $\alpha, \mathcal{B}\alpha, \dots, \mathcal{B}^{n-1}\alpha$ 线性无关, 是一组基, 且有 $\mathcal{B}(\mathcal{B}^i\alpha) = \mathcal{B}^{i+1}\alpha (i = 0, 1, \dots, n-1), \mathcal{B}(\mathcal{B}^{n-1}\alpha) = 0$, 从而由 (1) 知 \mathcal{B} 在该基下的矩阵也为 A .

最后, 由上知 M, N 均相似于 A , 即 M 与 N 相似. \square

4.5 不变子空间

4.5.1 \mathbb{F}^4 中的线性变换 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

令 $W = \text{span}(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)$, 证明 W 是 \mathcal{A} -子空间.

证明. 由于

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha_1 + 2\alpha_2) &= (\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4) + 2(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) = \alpha_1 + 2\alpha_2 \in W, \\ \mathcal{A}(\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) &= (\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) + (2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_4) + 2(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) \\ &= \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \in W \end{aligned}$$

故 W 是 \mathcal{A} -子空间. \square

4.5.2 线性空间 V 有子空间 $W = \text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, 证明 W 是 \mathcal{A} -子空间 $\iff \mathcal{A}\alpha_i \in W (i = 1, 2, \dots, k)$.

证明. \implies 显然, \impliedby : 由于 W 中任意向量 α 可看作 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 的线性组合 $\alpha = \sum_{i=1}^k k_i \alpha_i$, 则 $\mathcal{A}\alpha = \sum_{i=1}^k k_i \mathcal{A}\alpha_i \in W$, 故 W 是 \mathcal{A} 的不变子空间. \square

4.5.3 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为线性空间 V 上的线性变换, U 为 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的不变子空间, 证明 U 是 $\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}$ 的不变子空间. 若 \mathcal{A} 可逆, 则 U 也是 \mathcal{A}^{-1} 的不变子空间.

证明. 由于 $\forall \alpha \in U, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{B}\alpha \in U$, 故 $\mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}\alpha \in U, \mathcal{A}\mathcal{B}\alpha \in U$, 即 U 是 $\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}$ 的不变子空间. 而 \mathcal{A} 可逆时, $\dim \mathcal{A}U \leq \dim U = \dim(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}U) \leq \dim \mathcal{A}U$, 由 $\mathcal{A}U \subset U$ 知 $\mathcal{A}U = U$, 故 $\mathcal{A}^{-1}U = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}U = U$, 从而 U 是 \mathcal{A}^{-1} 的不变子空间. \square

4.5.4 n 维线性空间 V 上的线性变换 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

1. 若 α_n 在 \mathcal{A} 的不变子空间 U 中, 则 $U = V$;
2. α_1 属于 \mathcal{A} 的任意非零不变子空间中.
3. V 不能被分解为两个非平凡 \mathcal{A} -子空间的直和.

证明. 1. 由于 $\mathcal{A}\alpha_1 = \lambda_0\alpha_1, \mathcal{A}\alpha_k = \alpha_{k-1} + \lambda_0\alpha_k (k = 2, \dots, n)$, 因此若 $\alpha_n \in U$ 则 $\alpha_{n-1} = \mathcal{A}\alpha_n - \lambda_0\alpha_n \in U, \dots, \alpha_1 = \mathcal{A}\alpha_2 - \lambda_0\alpha_2 \in U$, 即 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in U, V = \text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset U$, 从而 $U = V$.

2. 任取 \mathcal{A} 的非零不变子空间 U , 易知 U 也在 $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$ 下不变, 且 $\mathcal{B}\alpha_1 = 0, \mathcal{B}\alpha_k = \alpha_{k-1} (k = 2, \dots, n)$. 因此任取 U 中非零向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^m k_i\alpha_i$, 其中 $k_{m+1} = \dots = k_n = 0, k_m \neq 0$, 从而有

$$\mathcal{B}\alpha = \sum_{i=2}^m k_i\alpha_{i-1} \in U, \mathcal{B}^2\alpha = \sum_{i=3}^m k_i\alpha_{i-2} \in U, \dots, \mathcal{B}^{m-1}\alpha = k_m\alpha_1 \in U$$

故 $\alpha_1 \in U$.

3. 由于 α_1 在任意非平凡 \mathcal{A} -子空间中, 故非平凡 \mathcal{A} -子空间之间必有交, 从而无法作直和. \square

4.5.5 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^2 上的线性变换, 其在基 α_1, α_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. 求 \mathcal{A} 的所有不变子空间.

证明. \mathcal{A} 有平凡不变子空间 \mathbb{R}^2 和零空间, \mathcal{A} 的非平凡子空间 U 仅能 $\dim U = 1$, 从而 $\forall \alpha \in U, \mathcal{A}\alpha \in U$. 设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 即有方程 $k_1(-\alpha_1 + 3\alpha_2) + k_2(2\alpha_1 - 6\alpha_2) = (-k_1 + 2k_2)\alpha_1 + (3k_1 - 6k_2)\alpha_2 = \lambda(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$. 解得 $k_1/k_2 = 3$ 或 $-1/2$, 从而可取 $U_1 = \text{span}(3\alpha_1 + \alpha_2)$ 和 $U_2 = \text{span}(\alpha_1 - 2\alpha_2)$, 它们和两个平凡不变子空间构成 \mathcal{A} 的所有不变子空间. \square

5 第五章 多项式

5.1 一元多项式

5.1.1 $f, g \in \mathbb{F}[x]$, 证明 $fg = 0 \iff f$ 和 g 中至少一个是 0.

证明一. \Leftarrow 显然. \Rightarrow : 若 f, g 均非零, 则两者的首项系数之积非零, 从而 $fg \neq 0$. □

证明二. \Rightarrow : 按逐项系数递推, 记

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j, f(x)g(x) = \sum_{t=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=t} a_i b_j \right) x^t = 0$$

从而 $c_t = \sum_{i+j=t} a_i b_j = 0, \forall t = 0, \dots, m+n$. 若 $f = 0$ 则命题得证; 若 $f \neq 0$, 则 $a_m \neq 0$, 而 $c_{m+n} = a_m b_n = 0, b_n = 0$.

下证明 $b_{n-r} = 0, r = 0, \dots, n$. 对 r 归纳, $r = 0$ 时已证. 若 $< r$ 的情形已证, 即

$$b_{n-0} = b_{n-1} = \dots = b_{n-r+1} = 0$$

则

$$c_{m+n-r} = a_m b_{n-r} + a_{m-1} b_{n-r+1} + \dots + a_{m-r} b_n = a_m b_{n-r} = 0$$

从而 $b_{n-r} = 0$, 得证. □

5.1.2 $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$, 若 $f \neq 0$, 则 $fg = fh \iff g = h$.

证明. $fg = fh \iff f(g-h) = 0$, 而 $f \neq 0$, 由上题知 $g-h = 0, g = h$. □

5.1.3 对于 $f \in \mathbb{R}[x], f \neq 0$ 满足 $f(x^2) = f^2(x)$, 求多项式 $f(x)$.

证明一. 记 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. 取 $m = \max \{k \mid a_k \neq 0, k = 0, \dots, n-1\}$, 即除 $a_n x^n$ 外最高非零项的次数, 则

$$f(x^2) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i} = a_n x^{2n} + a_m x^{2m} + \dots, f^2(x) = \sum_{t=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=t} a_i a_j \right) x^t = a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_m x^{n+m} + \dots$$

比较系数, $a_n = a_n^2, a_n = 1$. 而 $n+m > 2m$, 故 x^{n+m} 项系数 $2a_n a_m = 0, a_m = 0$. 这与 m 定义矛盾, 故 m 不存在, 即 $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0, f(x) = x^n$. □

证明二. 同上记号且易证 $a_n = 1$. 对 $f(x^2), f^2(x)$ 展开有:

$$f(x^2) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i}, f^2(x) = \sum_{t=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=t} a_i a_j \right) x^t$$

逐项比较系数, 可得:

$$a_k = \sum_{i+j=2k} a_i a_j, \quad 0 = \sum_{i+j=2k+1} a_i a_j, \quad \forall k = 0, \dots, n$$

从而 $0 = 2a_n a_{n-1}, a_{n-1} = 0$. 下证 $a_{n-r} = 0, r = 1, \dots, n$. 对 r 归纳, $r = 1$ 时已证. 假设 $< r$ 的情形已证, 即 $a_{n-1} = \dots = a_{n-r+1} = 0$ 时: 若 r 为偶数, 则

$$0 = a_{n-r/2} = \sum_{i+j=2n-r} a_i a_j = 2a_n a_{n-r}$$

若 r 为奇数, 则取 $k = n - (r + 1)/2$,

$$0 = \sum_{i+j=2n-r} a_i a_j = 2a_n a_{n-r}$$

可知总有 $a_{n-r} = 0$, 从而得证, 即 $f(x) = x^n$. □

5.1.4 $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$, 证明若 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$, 则 $f = g = h = 0$.

证明一. 若 $f \neq 0$ 则 $\deg f^2 = 2 \deg f$ 为偶数, 且此时 $g^2 + h^2 \neq 0$. 由于 g^2 与 h^2 的首项系数均为正数, 故两者和也为正数, 故 $\deg(g^2 + h^2) = \max(\deg g^2, \deg h^2)$, 从而有

$$2 \deg f = \deg f^2 = \deg(xg^2(x) + xh^2(x)) = 2 \max(\deg g, \deg h) + 1$$

左端为偶数, 右端为奇数, 矛盾, 从而 $f = 0, g^2 + h^2 = 0, g = h = 0$. □

证明二. 若 g, h 中至少有一个非零, 取 $g \neq 0$, 则 $\exists c \in \mathbb{R}, g(c) \neq 0$, 故 $g^2(c) + h^2(c) > 0, g^2 + h^2 \neq 0$. 而 $\deg f^2$ 为偶数, $\deg(xg^2(x) + xh^2(x))$ 为奇数, 矛盾. 故 $g = h = 0, f = 0$. □

5.1.5 在 $\mathbb{C}[x]$ 中找一组不全为 0 的多项式 f, g, h 使得 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$.

证明. $f(x) = 0, g(x) = i, h(x) = 1$. □

通解. 由于 $x \mid f^2(x)$, 则 $x \mid f(x)$. 记 $f(x) = xq(x)$, 有

$$xq^2(x) = g^2(x) + h^2(x) = (g(x) + ih(x))(g(x) - ih(x))$$

不失一般性地认为 g, h 互素, 因为上式等价于

$$x \left(\frac{q(x)}{(g(x), h(x))} \right)^2 = \left(\frac{g(x)}{(g(x), h(x))} \right)^2 + \left(\frac{h(x)}{(g(x), h(x))} \right)^2$$

另一方面, $x \mid (g(x) + ih(x))(g(x) - ih(x))$, 不失一般性地认为 $x \mid g(x) + ih(x)$.

将 $q(x)$ 分解为不可约多项式的乘积, 即 $q = p_1 p_2 \dots p_m$, 则

$$g(x) + ih(x) = x p_1^2(x) \dots p_s^2(x) p_{s+1}(x) \dots p_t(x), g(x) - ih(x) = p_{s+1}(x) \dots p_t(x) p_{t+1}^2(x) \dots p_m^2(x)$$

记

$$a(x) = p_1(x) \dots p_s(x), b(x) = p_{t+1}(x) \dots p_m(x), d(x) = p_{s+1}(x) \dots p_t(x)$$

则 $q = abd, g + ih = xa^2d, g - ih = db^2, (g + ih, g - ih) = d(a, b)^2$. 而 $(g + ih, g - ih) = (g + ih, 2g) = (g, h) = 1$, 因此 $d = (a, b) = 1, g + ih = xa^2, g - ih = b^2$, 解得:

$$f = xq = xab, g = \frac{xa^2 + b^2}{2}, h = \frac{xa^2 - b^2}{2i}$$

最后回代 g, h 不互素的情况, 得到通解: 对于 $\forall a, b \in \mathbb{C}[x]$, 上式为通解. □

5.2 整除

5.2.1 求下列 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1. $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1, g(x) = x^2 + 2x - 2$;
2. $f(x) = 6x + 3x^4 - 4x^3, g(x) = x + 2$.

证明. 1. $q(x) = 5x^2 - 7x + 26, r(x) = -65x + 51$.

2. $q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 20x - 34, r(x) = 68$.

□

5.2.2 求 $f(x)$ 按 $x-c$ 幂的展开式, 即写成 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k$ 的形式:

1. $f(x) = x^5, c = 1$;
2. $f(x) = x^3 - 10x^2 + 13, c = -2$.

证明. 1. $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$.
2. $(x+2)^3 - 16(x+2)^2 + 52(x+2) - 35$.

□

5.2.3 问参数 m, n, p 满足什么条件时有

1. $x^2 - 2x + 1 \mid x^4 - 5x^3 + 11x^2 + mx + n$;
2. $x^2 - 2mx + 2 \mid x^4 + 3x^2 + mx + n$;
3. $x^2 + m - 1 \mid x^3 + nx + p$;
4. $x^2 + mx + 1 \mid x^4 + nx^2 + p$.

证明. 1. 要求除法余式 $r(x) = (m+11)x + (n-4) = 0$, 即 $m = -11, n = 4$.

2. 要求除法余式 $r(x) = (8m^3 - m)x - 8m^2 + n - 2 = 0$, 解得 $m = 0, n = 2$ 或 $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, n = 3$.

3. 要求除法余式 $r(x) = (1 - m + n)x + p = 0$, 即 $m = n + 1, p = 0$.

4. 要求除法余式 $r(x) = (-m^3 - mn + 2m)x - m^2 - n + p + 1 = 0$, 解得 $m = 0, n = p + 1$ 或 $m^2 + n = 2, p = 1$.

□

5.2.4 求 $u(x), v(x)$ 使得 $uf + vg = (f, g)$.

1. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$;
2. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;
3. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, g(x) = x^2 - x - 1$.

证明. 1. $u(x) = \frac{3}{5}x - 1, v(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$.

2. $u(x) = -\frac{\sqrt{2}}{8}x + \frac{1}{2}, v(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}x + \frac{1}{2}$.

3. $u(x) = -x - 1, v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$.

(答案均不唯一.)

□

5.2.5 设 $f(x) = x^3 + (t+1)x^2 + 2x + 2u$ 与 $g(x) = x^3 + tx^2 + u$ 的最大公因式为二次多项式, 求 t, u .

证明. 考虑带余除法 $f = qg + r$, 比较次数与系数可知 $q(x) = 1$, 故 $r(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + u$. 继续辗转相除得到 $g = q_1r + r_1$, 其中 $\deg r_1 < \deg r = 2$, 而 $(f, g) \mid r_1$, 因此 $r_1 = 0, g = q_1r$. 比较系数知 q_1 为首项系数为 1 的一次多项式 $(x-a)$, 因此有

$$g(x) = x^3 + tx^2 + u = (x-a)(x^2 + 2x + u) = x^3 + (2-a)x^2 + (u-2a)x - au$$

比较系数可得

$$t = 2 - a, \quad 0 = u - 2a, \quad u = -au$$

解得 $t = 2, u = 0, a = 0$ 或 $t = 3, u = -2, a = -1$.

□

5.2.6 对于多项式 f, g, d , 若 $d \mid f, d \mid g$ 且存在多项式 u, v 使得 $d = uf + vg$, 证明 $d = (f, g)$.

证明. 由 $d \mid f, d \mid g$ 知 $d \mid (f, g)$, 而 $(f, g) \mid uf + vg = d$, 因此 d 与 (f, g) 间差一个非零常数, 即 d 是 f, g 的一个最大公因数.

□

5.2.7 设 $f, g \in \mathbb{F}[x]$, 证明:

1. 若 $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ 满足 $ad - bc \neq 0$, 则 $(af + bg, cf + dg) = (f, g)$;
2. $(f^2, g^2) = (f, g)^2$;
3. $(f, f + g) = 1 \iff (f, g) = 1$.

证明. 首先证明引理: 对于任意多项式 $q \in \mathbb{F}[x]$, $(f, g) = (f + qg, g)$. 证: 由于 (f, g) 整除 $f + qg$ 和 g , 因此 $(f, g) \mid (f + qg, g)$, 同理 $(f + qg, g) \mid (f + qg - qg, g) = (f, g)$, 从而两者相等.

1.

$$(af + bg, cf + dg) = \left(af + bg, cf + dg - \frac{c}{a}(af + bg) \right) = \left(af + bg, \frac{ad - bc}{a}g \right) = (f, g)$$

2. 记 $d = (f, g)$, 有 $f = df_1, g = dg_1, (f_1, g_1) = 1, (f^2, g^2) = d^2(f_1^2, g_1^2)$. 而 $(f_1, g_1) = 1 \iff (f_1^2, g_1^2) = 1$ (书上推论 5.2.12, 或由 Bézout 定理), 从而得证.

3. 由 1 或引理显然. □

5.2.8 $f, g \in \mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 且 $uf + vg = (f, g)$, 证明 $(u, v) = 1$.

证明. 记 $f = (f, g)f_1, g = (f, g)g_1$, 其中 $(f_1, g_1) = 1$. 从而有 $(f, g) = uf + vg = (f, g)(uf_1 + vg_1)$, 因此 $uf_1 + vg_1 = 1$, 这等价于 $(u, v) = 1$. □

5.2.9 设 $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n \in \mathbb{F}[x]$ 且 $(f_i, g_j) = 1 (\forall i \in [m], j \in [n])$, 证明 $(f_1 \dots f_m, g_1 \dots g_n) = 1$.

证明. 首先证明 $n = 1$ 的情形, 即 $\forall i = 1, \dots, m, (f_i, g) = 1$ 则有 $(f_1 \dots f_m, g) = 1$. 对 m 归纳, $m = 1$ 时已证, 下设 $< m$ 的情形已得证, 而 $(f_1 \dots f_{m-1}, g) = (f_m, g) = 1 \iff (f_1 \dots f_m, g) = 1$ (书上推论 5.2.12), 从而得证.

再对原命题考虑, 记 $f = f_1 \dots f_m$, 由上知 $(f, g_1) = \dots = (f, g_n) = 1$, 从而又有 $(f, g_1 \dots g_n) = 1$. □

5.2.10 证明定理 5.2.16

定理 5.2.16 设 $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{F}[x]$ 不全为 0, 则 (f_1, \dots, f_k) 唯一存在, 且

$$(f_1, \dots, f_k) = ((f_1, \dots, f_{k-1}), f_k)$$

从而 $\exists u_i \in \mathbb{F}[x], i \in [k]$ 使得

$$(f_1, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k u_i f_i$$

证明. 对 k 归纳, $k = 2$ 时已得证. 下设 $k \geq 3, < k$ 的情形已证. 设 $d_1 = (f_1, \dots, f_{k-1})$, 由归纳假设知其唯一确定, 且有 $v_1 f_1 + \dots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1$.

首先证明 $d = (d_1, f_k)$ 为 f_1, \dots, f_k 的最大公因式, 从而证明存在性. 显然 $d \mid d_1 \mid f_i (i = 1, \dots, k-1)$ 且 $d \mid f_k$. 又对于 f_1, \dots, f_k 的任意公因式 g , 均有 (由归纳假设)

$$g \mid v_1 f_1 + \dots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1, g \mid f_k$$

从而 $g \mid (d_1, f_k) = d$, 即 d 为最大公因式.

再证明唯一性: 若有多项式 d, d' 均为 f_1, \dots, f_k 的最大公因式, 则 $d' \mid d, d \mid d'$, 从而相同 (差一个非零常数而首项系数均为 1).

最后, 由归纳假设有 $v_1 f_1 + \dots + v_{k-1} f_{k-1} = d_1$, 又有 $ud_1 + vf_k = d$, 从而

$$u(v_1 f_1 + \dots + v_{k-1} f_{k-1}) + vf_k = uv_1 f_1 + \dots + uv_{k-1} f_{k-1} + vf_k = d$$

综上得证. □

5.2.11 称多项式 $m(x)$ 为多项式 $f(x), g(x)$ 的最小公倍式, 若 $f \mid m, g \mid m$ 且 f, g 的任意公倍式是 m 的倍式. 记 $m = [f, g]$, 证明若 f, g 首项系数为 1, 则 $[f, g] = \frac{fg}{(f, g)}$.

证明. 记 $d = (f, g), m = fg/d, f = df_1, g = dg_1, (f_1, g_1) = 1$. 从而 $m = f_1g = fg_1$, 故 $f \mid m, g \mid m$.

再设 f, g 的任意公倍式 $h = h_1f = h_2g$, 有 $h = dh_1f_1 = dh_2g_1$, 从而 $h_1f_1 = h_2g_1$. 而 $(f_1, g_1) = 1$, 因此 $f_1 \mid h_2, m = df_1g_1 \mid dh_2g_1 = h$. 综上, m 满足最小公倍式的所有条件, 即 $m = [f, g]$. \square

思考题 1 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, h(x) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i$, 若有 $f(x) = g(x)h(x)$, 显式表达出 c_i .

证明. 考虑 $g(x)$ 的最低非零次数 $r = \min \{i \mid b_i \neq 0, i = 0, 1, \dots, n\}$, 则 $g(x) = \sum_{i=r}^n b_i x^i$. 又由 $a_k = \sum_{i+j=k} b_i c_j$ 有:

$$a_{r+k} = \sum_{i+j=r+k} b_i c_j = b_r c_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i, (k = 0, \dots, m-r)$$

因此有

$$c_k = \frac{1}{b_r} \left(a_{r+k} - \sum_{i=0}^{k-1} b_{r+k-i} c_i \right)$$

其在 $r = 0$, 即 $b_0 \neq 0$ 时化为

$$c_k = \frac{1}{b_0} \left(a_k - \sum_{i=0}^{k-1} b_{k-i} c_i \right)$$

\square

5.3 因式分解定理

5.3.1 $x^2 + 1$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明. 由于 $x^2 + 1$ 在 \mathbb{R} 上的唯一分解式为 $(x-i)(x+i)$, 故其不能被分解为 $\mathbb{Q}[x]$ 中的一次多项式之积, 故在 \mathbb{Q} 上不可约. \square

5.3.2 判别下列多项式是否有重因式:

1. $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$,
2. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

证明. 1. 辗转相除可得 $(f, f') = 1$ 从而无重因式. 但辗转相除太过麻烦, 有其他方法:

- 注意到 $(f, g) = (f + qg, g), \forall q \in \mathbb{F}[x]$, 故对第一小问有

$$\begin{aligned} (f, f') &= (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 4, 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1) \\ &= (x^3 + 4x^2 + 3x + 4, 13x^2 + 8x + 15) = (11x^2 + 6x + 13, 13x^2 + 8x + 15) \\ &= (11x^2 + 6x + 13, 10x - 4) = (4x + 5, 10x - 4) = 1 \end{aligned}$$

但该方法对第二小问太麻烦.

- 由于该题为四次多项式, 故可设

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

展开后比较系数可得

$$a + c = 1, \quad ac + b + d = 2, \quad ad + bc = 1, \quad bd = 1$$

尝试带入 $b = d = \pm 1$ 发现 $b = d = 1, a = 0, c = 1$ 时方程成立, 即

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

从而无重因式.

- 注意到方程系数 $(1, 1, 2, 1, 1)$ 是对称的, 因此可令 $z = x + 1/x$ 换元, 即

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

从而无重因式.

2. 辗转相除可得 $(f, f') = x^3 - x^2 - x + 1$ 从而有重因式. 也可直接试根: 注意到 $f(x)$ 的有理根 $x_0 = r/s$ 总有 $r \mid 2, s \mid 1$, 故 x_0 仅可能为 $\pm 1, \pm 2$, 故带入验算发现 $1, -1, 2$ 均为根, 相除得到

$$\frac{f(x)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$$

从而 $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-2)$, 其有重根.

□

5.3.3 求 A, B 使得 $(x-1)^2 \mid Ax^4 + Bx^2 + 1$.

证明一. 设 $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 1$, 由题知 $(x-1) \mid f'(x) = 4Ax^3 + 2Bx$, 从而 $f(1) = f'(1) = 0$, 即 $A + B + 1 = 4A + 2B = 0$, 解得 $A = 1, B = -2$. □

证明二. 设 $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 1$, 注意到 $(x-1) \mid (f, f') = (Ax^4 + Bx^2 + 1, 4Ax^3 + 2Bx) = (Bx^2/2 + 1, 4Ax^3 + 2Bx)$, 而 $(x-1) \mid \frac{B}{2}x^2 + 1$ 要求 $B = -2$, 以及 $(x-1) \mid x(4Ax^2 - 4)$ 要求 $A = 1$. □

5.3.4 设 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中求一个没有重因式的多项式 g , 使其与 f 有完全相同的不可约多项式 (不计重数).

证明. 观察多项式系数可知其有理根仅可能有 ± 1 , 验算可知均为根, 从而有

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x+1)} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

从而取 $g(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$ 即可. □

5.3.5 证明多项式 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 4x + 20$ 有重根, 并求其所有根.

证明. 辗转相除可得 $(f, f') = x - 2$, 从而知 $(x-2)^2 \mid f(x)$,

$$\frac{f(x)}{(x-2)^2} = x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$$

从而 $2, -1, -5$ 为其所有根. □

5.3.6 证明: 不可约多项式 p 是多项式 f 的 k 重因式 $\iff p \mid f, p \mid f', \dots, p \mid f^{(k-1)}$ 但 $p \nmid f^{(k)}$.

证明一. 容易看出, 该命题等价于: $p^k \mid f \iff p$ 整除 $f, f', \dots, f^{(k-1)}$. 下对 k 归纳, $k=1$ 时显然, 下设 $k \geq 2, < k$ 时命题成立.

\implies : 显然 $p^{k-1} \mid f$, 故由归纳假设, p 整除 $f, f', \dots, f^{(k-2)}$, 下证 $p \mid f^{(k-1)}$. 由于有 $f = p^k g$, 即 $f' = p^{k-1}(kp'g + pg')$, 故 $p^{(k-1)} \mid f'$. 从而由归纳假设, $p \mid (f')^{(k-2)} = f^{(k-1)}$.

\impliedby : 由于 p 整除 $f', (f')', \dots, (f')^{(k-2)}$, 故由归纳假设知 $p^{k-1} \mid f'$, 其等价于 $p^k \mid f$. \square

证明二. $k=1$ 时已证, $k > 1$ 时: p 是 f 的 k 重因式 $\iff p$ 是 f' 的 $k-1$ 重因式 $\iff \dots \iff p$ 是 $f^{(k-1)}$ 的 2 重因式 $\implies p$ 是 $f^{(k-2)}$ 的 1 重因式 $\iff p \nmid (f^{(k-1)}, f^{(k)})$, 故 $p \nmid f^{(k)}$.

另一方面, $p \nmid f^{(k)}, p \mid f^{(k-1)}$, 故 p 不为 $f^{(k-1)}$ 的重因式; 而 p 整除 $f^{(k-1)}, f^{(k-2)}$, 故 p 是 $f^{(k-2)}$ 的重因式. 综上, p 是 $f^{(k-1)}$ 的 2 重因式, 其余同上, 从而得证. \square

注 2. 该结果只对 $\text{char } \mathbb{F} > k$ 或 $\text{char } \mathbb{F} = 0$ 的数域 \mathbb{F} 上的多项式成立.

5.3.7 举例否定“若 α 是 f' 的 m 重根, 则 α 是 f 的 $m+1$ 重根”.

证明. 取 $f(x) = x^{m+1} + 1, f'(x) = (m+1)x^m, 0$ 为 f' 的 m 重根但不是 f 的 $m+1$ 重根. \square

注 3. 该命题若加上条件“ α 是 f 的根”即正确.

证明: 由题知 $(x-\alpha) \mid f, (x-\alpha)^m \mid f', (x-\alpha)^{m+1} \nmid f'$. 由 5.3.6 知 $(x-\alpha)$ 整除 $f', f'', \dots, (f')^{(m-1)} = f^{(m)}$ 但 $(x-\alpha) \nmid f^{(m+1)}$, 加上题设 $(x-\alpha) \mid f$ 再由 5.3.6 知 $(x-\alpha)$ 是 f 的 $m+1$ 重因式.

5.3.8 证明: 若 $(x-1) \mid f(x^n)$ 则 $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

证明一. 显然 $f(1) = 0$, 故 $(x-1) \mid f(x), f(x) = (x-1)g(x)$, 从而 $f(x^n) = (x^n-1)g(x^n), (x^n-1) \mid f(x^n)$. \square

证明二. 显然 $f(1) = 0$. 考虑 1 的任意 n 次单位根 $\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, 有 $f(\omega_k^n) = f(1) = 0$, 故 $(x-\omega_k) \mid f(x^n)$, 从而

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x-\omega_k) = (x^n-1) \mid f(x^n).$$

\square

5.3.9 $p \in \mathbb{F}[x], \deg p > 0$. 若对于 $\forall f \in \mathbb{F}[x]$ 均有 $p \mid f$ 或 $(p, f) = 1$, 则 p 在 \mathbb{F} 中不可约.

证明. 若 p 可被分解为次数小于 $\deg p$ 的多项式 q, r 之积, 则必有其中一个多项式次数非零, 设其为 q . 从而取 $f = q, (p, f) \neq 1, p \nmid f$, 矛盾. \square

5.3.10 $p \in \mathbb{F}[x], \deg p > 0$. 若对于 $\forall f, g \in \mathbb{F}[x], p \mid fg \implies p \mid f$ 或 $p \mid g$, 则 p 在 \mathbb{F} 中不可约.

证明. 若 p 可被分解为次数小于 $\deg p$ 的多项式 q, r 之积, 则 $p \mid qr = p$ 但 $p \nmid q, p \nmid r$, 矛盾. \square

思考题 2 $x^2 - 2$ 在 \mathbb{Q} 上不可约而在 \mathbb{R} 上可约.

证明一. 在 \mathbb{R} 上有 $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ 从而可约. 而该多项式在 \mathbb{Q} 上若有根 $a = p/q$, 则 $q \mid 1, p \mid (-2)$, 即 a 仅可能为 $\pm 1, \pm 2$, 而这些均不为根, 从而无根, 即不可约. \square

证明二. 若在 \mathbb{Q} 上有唯一分解 $x^2 - 2 = (x-a)(x-b)$, 即 $a+b=0, ab=-2$, 即 $a^2=2$. 对 $\sqrt{2}$ 的无理性证明导出 $x^2 - 2$ 在 \mathbb{Q} 上不可约. \square

证明三. 书上例 5.3.1. \square

思考题 3 设 $f = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}, g = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$, 其中 p_i 均为不可约多项式. 证明 $(f, g) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}$, 其中 $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, s$.

证明. 设 $d = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}$, 显然 $d \mid f, d \mid g$. 若有 f, g 的公因式 $d' = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$, 则 $\forall i = 1, 2, \dots, s, \delta_i \leq \alpha_i$ 且 $\delta_i \leq \beta_i$, 故 $\delta_i \leq \gamma_i$, 从而 $d' \mid d$, 故 $d = (f, g)$. \square

思考题 4 $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{F}[x]$ 之间两两互素, 记 $f = f_1 \dots f_s, g_i = f/f_i$, 证明 $(g_1, g_2, \dots, g_s) = 1$.

证明. 对 s 归纳, $s = 2$ 时 $(g_1, g_2) = (f_2, f_1) = 1$ 从而成立. 设 $< s$ 时命题成立, 考虑两两互素的多项式 f_1, f_2, \dots, f_s , 如上定义 f, g_i , 则有

$$d = (g_1, g_2, \dots, g_s) = ((g_1, g_2, \dots, g_{s-1}), g_s)$$

而

$$(g_1, g_2, \dots, g_{s-1}) = \left(\frac{f_1 \dots f_s}{f_1}, \frac{f_1 \dots f_s}{f_2}, \dots, \frac{f_1 \dots f_s}{f_{s-1}} \right) = f_s \left(\frac{f_1 \dots f_{s-1}}{f_1}, \frac{f_1 \dots f_{s-1}}{f_2}, \dots, \frac{f_1 \dots f_{s-1}}{f_{s-1}} \right)$$

由归纳假设知右端项为 f_s , 从而 $d = (f_s, f_1 \dots f_{s-1}) = 1$, 从而得证. \square

5.4 复系数与实系数多项式的因式分解

5.4.1 求多项式 $x^5 - 1$ 在 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} 上的因式分解.

证明. 在 \mathbb{C} 上显然有

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3)(x - \omega^4)$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. 而由于复数根成对, 故在 \mathbb{R} 上有

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x - 1) [(x - \omega)(x - \omega^4)] [(x - \omega^2)(x - \omega^3)] \\ &= (x - 1) \left(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1 \right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} x + 1 \right) \\ &= (x - 1) \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x + 1 \right) \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x + 1 \right) \end{aligned}$$

\square

5.4.2 $f \in \mathbb{R}[x], \deg f = n$ 且 f 有 ℓ 个实根 (计重数), 证明 $n - \ell$ 是偶数.

证明. 将 f 分解为不可约多项式的乘积, 即

$$f = ap_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} q_1^{\beta_1} \dots q_t^{\beta_t}$$

其中 p_i 均为一次多项式, q_i 均为二次多项式, 则

$$n = \sum_{i=1}^s \alpha_i + \sum_{i=1}^t 2\beta_i, \quad \ell = \sum_{i=1}^s \alpha_i, \quad n - \ell = 2 \sum_{i=1}^t \beta_i$$

从而 $n - \ell$ 显然为偶数. \square

5.4.3 求 $x^4 + 1$ 在 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} 上的标准分解.

证明. 在 \mathbb{C} 上 $x^4 + 1$ 有根 $(-1)^{1/4} = e^{\frac{\pi i}{4}}, (-1)^{3/4} = e^{\frac{3\pi i}{4}}, (-1)^{5/4} = e^{\frac{5\pi i}{4}}, (-1)^{7/4} = e^{\frac{7\pi i}{4}}$, 因此有

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - e^{\frac{\pi i}{4}})(x - e^{\frac{3\pi i}{4}})(x - e^{\frac{5\pi i}{4}})(x - e^{\frac{7\pi i}{4}}) \\ &= \left[(x - e^{\frac{\pi i}{4}})(x - e^{\frac{7\pi i}{4}}) \right] \left[(x - e^{\frac{3\pi i}{4}})(x - e^{\frac{5\pi i}{4}}) \right] \\ &= \left(x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{4} x + 1 \right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{3\pi}{4} x + 1 \right) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

□

5.4.4 $f \in \mathbb{R}[x]$ 的首项系数 $a_n > 0$, 若 f 无实根, 则存在 $g, h \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $f = g^2 + h^2$.

证明. 由于实系数多项式 f 无实根, 故其不可约分解中均为二次不可约多项式, 即在 \mathbb{C} 中有分解

$$f(x) = q_1(x) \cdots q_m(x) = \prod_{i=1}^m [(x - \lambda_i)(x - \bar{\lambda}_i)] = \left(\prod_{i=1}^m (x - \lambda_i) \right) \left(\prod_{i=1}^m (x - \bar{\lambda}_i) \right) = p(x)q(x)$$

其中 $q_i(x) = (x - \lambda_i)(x - \bar{\lambda}_i)$ 均为在 \mathbb{R} 上不可约的二次多项式, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. 将 $p(x)$ 按系数的实部和虚部分为两个实系数多项式, 即

$$p(x) = g(x) + ih(x), \quad g, h \in \mathbb{R}[x]$$

再对 $p(x)$ 的系数取共轭, 有

$$g(x) - ih(x) = \bar{p}(x) = \prod_{i=1}^m (x - \bar{\lambda}_i) = q(x)$$

从而 $f = (g + ih)(g - ih) = g^2 + h^2$.

□

5.4.5 设 $p, f \in \mathbb{R}[x]$ 且 p 在 \mathbb{R} 上不可约, 证明: 若 $\exists \alpha \in \mathbb{C}, p(\alpha) = f(\alpha) = 0$ 则 $p \mid f$.

证明. 显然 $\deg p = 1$ 或 2 . 若 $\deg p = 1$ 则 $\alpha \in \mathbb{R}, p(x) = a(x - \alpha) \mid f(x)$. 若 $\deg p = 2$ 则 $\alpha \notin \mathbb{R}, p(x) = a(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$, 而 $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 0$, 从而 $p(x) = a(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) \mid f(x)$.

□

思考题 5 找出 $x^n - 1$ 在 \mathbb{C} 上的所有 n 次本原单位根.

证明. 取任一 n 次本原单位根 $\omega = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, 则其幂次 $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ 遍历所有 n 次单位根. 设 $d = \gcd(n, k)$, 即 $n = dm, k = d\ell$, 则 $\omega^m = e^{\frac{2mk\pi i}{n}} = e^{\frac{2\ell n\pi i}{n}} = 1$, 仅在 $m = n, d = 1$ 时能遍历所有 n 次单位根, 故所有 n 次本原单位根即 $e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \gcd(n, k) = 1$.

□

5.5 有理系数多项式

5.5.1 求下列多项式的有理根:

1. $2x^4 - x^3 + 2x - 3$;
2. $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$;
3. $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$.

证明. (1)1; (2)-1/2 (2重); (3)-2, -3.

□

5.5.2 判别下列多项式在 \mathbb{Q} 上是否可约:

1. $x^6 + x^3 + 1$;
2. $x^p + px + 1, p$ 是奇素数;
3. $x^4 + 4$;
4. $x^4 + 4kx + 1, k \in \mathbb{Z}$.

证明. 1. 代换 $x = t + 1$, 故原式 $= (t + 1)^6 + (t + 1)^3 + 1 = t^6 + 6t^5 + 15t^4 + 21t^3 + 18t^2 + 9t + 3$. 用 Eisenstein 判别法 (取 $p = 3$) 知其在 \mathbb{Q} 上不可约.

2. 令 $x = t - 1$, 则原式 $= (t - 1)^p + pt + 1 - p = t^p + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^k t^k + 2pt + p$, 从而由 Eisenstein 判别法知其
在 \mathbb{Q} 上不可约.

3. $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, 故可约.

4. 若原式 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上可约, 则也在 \mathbb{Z} 上可约. 显然 $f(x)$ 的有理根仅可能有 ± 1 , 但 $f(\pm 1) \neq 0, \pm 1$ 均不是根, 从而 $f(x)$ 在 \mathbb{Z} 上没有一次 (和三次) 因式. 若原式在 \mathbb{Z} 上有二次因式, 即设

$$x^4 + 4kx + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

比较系数可得 $a + c = 0, ac + b + d = 0, ad + bc = 4k, bd = 1$, 从而 $b = d = \pm 1, ac = -a^2 = \mp 2$, 矛盾于 $a \in \mathbb{Z}$, 故原式在 \mathbb{Z} 上也没有二次因式, 故在 \mathbb{Z} 和 \mathbb{Q} 上不可约. □

5.5.3 p 为素数, 证明 $f(x) = x^p - px + (2p - 1)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明. 令 $x = t + 1$, 则

$$f(t + 1) = (t + 1)^p - p(t + 1) + (2p - 1) = t^p + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} t^k + p$$

从而由 Eisenstein 判别法知其在 \mathbb{Q} 上不可约. □

5.5.4 设 $p_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 为 t 个互异素数, 证明 $f(x) = x^n - p_1 \dots p_t$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明. 取素数 p 为任一 p_i , 由 Eisenstein 判别法知 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约. □

5.5.5 f 是首一整系数多项式, 若 $f(0)$ 和 $f(1)$ 均为奇数, 则 f 没有有理根.

证明一. 设 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, 若其有有理根 r/s 则 $s \mid a_n = 1, r \mid a_0 = f(0)$, 从而有理根仅可能为 $c \in \mathbb{Z}, c \mid f(0)$. 而 $f(0)$ 为奇数, 故 c 为奇数. 由于 $f(c) = 0$, 故

$$-f(1) = f(c) - f(1) = \sum_{k=0}^n a_k (c^k - 1)$$

而对 $\forall k \in \mathbb{N}, c^k - 1$ 为偶数, 故等式右端为偶数, 但左端为奇数, 矛盾, 从而 f 无有理根. □

证明二. 若 f 有有理根 r/s , 则 $s \mid a_n = 1, r \mid a_0 = f(0)$, 即 $s = \pm 1, r$ 为奇数. 而 $(r - ms) \mid f(m)$, 故 $(r \pm 1) \mid f(1)$, 但 $r \pm 1$ 为偶数, $f(1)$ 为奇数, 矛盾, 故无有理根. □

证明三. 若 f 有有理根 c , 同上知 c 为奇数, 从而有 $f(x) = (x - c)g(x), g \in \mathbb{Z}[x]$. 分别代入 $0, 1$ 知 $f(0) = -cg(0), f(1) = (1 - c)g(1)$, 由 $f(0), f(1)$ 均为奇数知 $-c, 1 - c$ 均为奇数, 矛盾. □

注 4. 若无首一条件, 可取 $f(x) = 2x - 1, f(0) = 1, f(1) = 3$ 但有有理根 $1/2$.

注 5. 命题可作简单推广: f 是首一整系数多项式, p 是素数, 若 $f(0) \not\equiv 0, f(1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则 f 没有有理根.

思考题 6 设 a_1, \dots, a_n 是互不相同的整数, 证明 $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) - 1$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明. 若 f 在 \mathbb{Q} 上可约, 则在 \mathbb{Z} 上可约, 设 $f(x) = g(x)h(x)$, $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, 则 $\forall i = 1, \dots, n, f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1$, 从而 $g(a_i) = \pm 1, h(a_i) = \mp 1$, 故 $g(a_i) + h(a_i) = 0$, 即多项式 $g(x) + h(x)$ 有 n 个不同的根. 但 $\deg(g + h) \leq \max(\deg g, \deg h) < \deg f = n$, 从而由代数基本定理得到矛盾. \square

6 第六章 相似标准形

6.1 特征值与特征向量

6.1.1 求下列矩阵的特征值与特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明. (1) $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 12\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$, 从而特征值为 2 (1 重) 和 -4 (2 重). 可解得 2 对应的特征向量为 $(1, 0, 1)^\top, (2, -1, 0)^\top$; -4 对应的特征向量为 $(1, -2, 3)^\top$.

(2) $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, 从而特征值为 1 (2 重) 和 -1 (1 重). 可解得 1 对应的特征向量为 $(1, 0, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top$; -1 对应的特征向量为 $(1, 0, -1)^\top$. \square

6.1.2 若 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y .

证明. A 的特征多项式为 $\phi_A(\lambda) = \lambda^3 + (-x+1)\lambda^2 + (-x-4)\lambda + (2x-4)$, B 的特征多项式为 $\phi_B(\lambda) = \lambda^3 + (-y-1)\lambda^2 + (y-2)\lambda + 2y$. 对比系数可得方程组

$$1 - x = -y - 1, -x - 4 = y - 2, 2y = 2x - 4$$

解得 $x = 0, y = -2$. \square

6.1.3 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 求 $A - I$ 的特征值.

证明. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)^3 - 3(\lambda - a) - 2 = (\lambda - a - 1)^2(\lambda - a + 2)$, 因此 A 的特征值为 $a + 1$ (2 重) 和 $a - 2$ (1 重), 从而 $A - I$ 的特征值为 a (2 重) 和 $a - 3$ (1 重), $\det(A - I) = a^2(a - 3)$. \square

6.1.4 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}_+$, 求 A^k 的特征值与特征向量.

证明. A 的特征多项式 $\phi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)(\lambda^2 + \lambda - 3)$, 因此特征值为

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

其分别对应特征向量

$$x_1 = (2, 1, 2)^\top, x_2 = (3 + \sqrt{13}, -4, -1 - \sqrt{13})^\top, x_3 = (3 - \sqrt{13}, -4, -1 + \sqrt{13})^\top$$

\square

6.1.5 线性空间 V 上的线性变换 \mathcal{A} 有特征值 λ_0 , 证明: (1) 对任意 $k \in \mathbb{N}$, λ_0^k 为 \mathcal{A}^k 的特征值. (2) 若 \mathcal{A} 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$ 且 λ_0^{-1} 为 \mathcal{A}^{-1} 的特征值.

证明. (1) 取对应于 λ_0 的特征向量 x , 有 $\mathcal{A}x = \lambda_0 x$, 因此 $\mathcal{A}^2 x = \lambda_0 \mathcal{A}x = \lambda_0^2 x, \dots, \mathcal{A}^k x = \lambda_0^k x$, 从而 λ_0^k 为 \mathcal{A}^k 的特征值.

(2) 若 \mathcal{A} 可逆, 则其行列式非零, 而行列式为全体特征值之积, 故 \mathcal{A} 的所有特征值均非零. 取对应于 λ_0 的特征向量 x , 有 $\mathcal{A}x = \lambda_0 x$, 故 $x = \lambda_0 \mathcal{A}^{-1}x$, 即 $\mathcal{A}^{-1}x = \lambda_0^{-1}x$, 即 λ_0^{-1} 是 \mathcal{A}^{-1} 的特征值. \square

6.1.6 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 若 $A^2 = A$, 则 A 的特征值仅能为 0 或 1.

证明. 对 A 的任意特征值 λ 及其对应的特征向量 x , $\lambda x = Ax = A^2 x = \lambda^2 x$, 从而 $\lambda = \lambda^2$, 即 $\lambda = 0$ 或 1. \square

6.1.7 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 证明 AB 与 BA 的特征多项式相等.

证明一. 由于 $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F}), \det(I - AB) = \det(I - BA)$, 因此 $\lambda \neq 0$ 时有 $\phi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I - AB) = \lambda^n \det(I - AB/\lambda) = \lambda^n \det(I - BA/\lambda) = \det(\lambda I - BA) = \phi_{BA}(\lambda)$, 而 $\lambda = 0$ 时自然有 $\phi_{AB}(0) = \det(AB) = \det(BA) = \phi_{BA}(0)$, 从而两特征多项式相等. \square

证明二. 对于 AB 的任意特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及其特征向量 $x \in \mathbb{F}^n$, 有 $BABx = B(\lambda x) = \lambda Bx$, 从而 λ 是 BA 的特征值. 同理知 BA 的特征值也是 AB 的特征值, 因此 AB 与 BA 的特征值相同, 故两者的特征多项式相同. \square

6.1.8 $A \in M_n(\mathbb{F}), M \in M_m(\mathbb{F}), P \in \mathbb{F}^{n \times m}$ 是列满秩方阵. 若 $AP = PM$, 证明 M 的特征值也是 A 的特征值.

证明. 对 M 的任一特征值 λ 及其对应的特征向量 $x \in \mathbb{F}^m$, 有 $APx = PMx = \lambda Px$. 由于 P 列满秩, 故由 Sylvester 不等式知 $\text{rank}(Px) \geq \text{rank } P + \text{rank } x - m = 1$, 因此 Px 不为零向量, 从而 λ 为 A 的特征值, 其特征向量为 Px .

也可设 $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), x = (x_1, \dots, x_m)^T$, 从而 $Px = x_1 \alpha_1 + \dots + x_m \alpha_m$, 由 P 列满秩知 α_i 之间线性无关, 故 $Px \neq 0$. \square

6.1.9 求如下方阵的极小多项式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明. (1) 特征多项式 $\phi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$, 因此其极小多项式 $m(\lambda)$ 仅能为 $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ 或 $\phi_A(\lambda)$. 取前者可得

$$m(A) = (A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq O$$

因此其极小多项式 $m(\lambda) = \phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

(2) 特征多项式 $\phi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$, 因此其极小多项式 $m(\lambda) = \lambda^i(\lambda - 1)^j (i, j = 1, 2)$. 分别计算:

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A^2(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

均不为 O , 因此 $m(\lambda) = \phi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$. \square

6.1.10 设 $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ 为准对角方阵, 若 A_1, A_2 的极小多项式分别为 $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$, 则 A 的极小多项式 $m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda)]$.

证明. 对于 A 的任一零化多项式 f , 都有 $f(A) = \text{diag}(f(A_1), f(A_2)) = O$, 即 $f(A_1) = O, f(A_2) = O$, 因此 $m_1 \mid f, m_2 \mid f$, 故 $[m_1, m_2] \mid f$, 特别地 $[m_1, m_2] \mid m$. 易知 $[m_1, m_2]$ 也是 A 的零化多项式, 因此 A 的极小多项式 $m \mid [m_1, m_2]$. 综上 $m = [m_1, m_2]$. \square

6.2 特征子空间与根子空间

6.2.1 V 是 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, V 上有线性变换 \mathcal{A}, \mathcal{B} , 其满足 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明: (1) 若 λ_0 是 \mathcal{A} 的特征值, 则 V_{λ_0} 是 \mathcal{B} 的不变子空间; (2) \mathcal{A}, \mathcal{B} 至少有一个公共特征向量.

证明. (1) $\forall x \in V_{\lambda_0}, \mathcal{A}(\mathcal{B}x) = \mathcal{B}\mathcal{A}x = \lambda_0 \mathcal{B}x$, 因此 $\mathcal{B}x \in V_{\lambda_0}$, 从而 V_{λ_0} 是 \mathcal{B} 的不变子空间.

(2) 取限制映射 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_0}}$, 则其在 V_{λ_0} 上有特征值 μ 及特征向量 $v \in V_{\lambda_0}$, 满足 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_0}} v = \mathcal{B}v = \mu v$. 而 $v \in V_{\lambda_0}$ 可知 v 也是 \mathcal{A} 的特征向量, 从而得证. \square

6.2.2 V 是 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, V 上的线性变换 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A , 求 \mathcal{A} 的所有特征子空间和根子空间.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

证明. (1) $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$, 从而有特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ (2重). 计算得 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$, 对于 $\lambda_2 = -1$, 有

$$-I - A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}, (-I - A)^2 = 16 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

从而 $(-I - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T, (-I - A)^2 x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2, \alpha_3 = (1, 0, -1)^T$, 从而 $V_3 = \text{span}(\alpha_1), W_{-1} = \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$.

(2) $\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3(\lambda + 1)$, 从而有特征值 $\lambda_1 = 2$ (3重) 和 $\lambda_2 = -1$. 对于 $\lambda_1 = 2$, 有

$$2I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, (2I - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, (2I - A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

从而 $(2I - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, (2I - A)^2 x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, (2I - A)^3 x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T$, 因此 $W_2 = \text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 对于 $\lambda_2 = -1$, 可解得其特征向量为 $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)^T$, 即 $V_{-1} = \text{span}(\alpha_4)$. \square

6.2.3 V 是 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, V 上的线性变换 \mathcal{A} 的极小多项式 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 互不相同. 证明根子空间 $W_{\lambda_i} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}, i = 1, \dots, s$.

证明. 显然 $\ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{J})^{m_i} \subset W_{\lambda_i}$. 由于有准素分解 $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$, 从而仅需证明

$$V = \ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{J})^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{J})^{m_s}.$$

设 $f_i(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, 则显然 $(f_1, \dots, f_s) = 1$, 即有多项式 u_1, \dots, u_s 满足

$$u_1 f_1 + \cdots + u_s f_s = 1$$

从而 $\forall v \in V$,

$$u_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})v + \cdots + u_s(\mathcal{A})f_s(\mathcal{A})v = v$$

记 $v_i = u_i(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})v$, $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{J})^{m_i} v_i = u_i(\mathcal{A})m(\mathcal{A})v = 0$, 从而 $v_i \in \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{J})^{m_i}$, 从而得到

$$V = \ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{J})^{m_1} + \cdots + \ker(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{J})^{m_s}.$$

而由 W_{λ_i} 的和为直和得到上式的和为直和, 从而得证. □

6.2.4 线性空间 V 上的线性变换 \mathcal{A} 有至少两个不同的特征值, 证明 \mathcal{A} 的全体特征向量并上零向量不构成 V 的子空间.

证明. 设 $U = \{v \in V | \exists \lambda \in \mathbb{F}, \mathcal{A}v = \lambda v\}$. 若其为线性子空间, 由于 \mathcal{A} 有两个不同的特征值 λ_1, λ_2 , 分别对应两个特征向量 $v_1, v_2 \in U$, 则 $\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$, 即 $(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 = 0$. 由于 v_1, v_2 线性无关, 则该式仅有零解, 即 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 矛盾. 从而 U 不是线性子空间. □

6.2.5 V 是 \mathbb{F} 上的线性空间, V 上的线性变换 \mathcal{A} 有零化多项式 $f \in \mathbb{F}[\lambda]$. 设 $f = f_1 \cdots f_k$, 其中 f_1, \dots, f_k 之间两两互素. 证明 $V = \ker f_1(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus \ker f_k(\mathcal{A})$.

证明. 先证 $V = \ker f_1(\mathcal{A}) + \cdots + \ker f_k(\mathcal{A})$. 设 $g_i = f/f_i$, 则 $(g_1, g_2, \dots, g_k) = 1$ (思考题 5.4), 从而有多项式 u_1, \dots, u_k 满足 $u_1 g_1 + \cdots + u_k g_k = 1$, 因此

$$u_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A}) + \cdots + u_k(\mathcal{A})g_k(\mathcal{A}) = \mathcal{I},$$

从而 $\forall v \in V$,

$$u_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A})v + \cdots + u_k(\mathcal{A})g_k(\mathcal{A})v = v.$$

设 $v_i = u_i(\mathcal{A})g_i(\mathcal{A})v$, 则 $f_i(\mathcal{A})v_i = u_i(\mathcal{A})f(\mathcal{A})v = 0$, 即 $v_i \in \ker f_i(\mathcal{A})$, 且有

$$v = v_1 + \cdots + v_k,$$

从而得证.

再证直和, 即证

$$\widehat{W}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) \cap \sum_{j \neq i} \ker f_j(\mathcal{A}) = \{0\}$$

任取 $w \in \widehat{W}_i$, 则 w 可写成 $w_j \in \ker f_j(\mathcal{A}) (j \neq i)$ 的和的形式. 而 $f_i(\mathcal{A})w = 0$, 因此 $g_j(\mathcal{A})w = 0 (j \neq i)$, 从而

$$w = \sum_{j \neq i} w_j = \sum_{j \neq i} u_j(\mathcal{A})g_j(\mathcal{A})w = 0$$

从而得证. □

6.2.6 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性变换, W 是 \mathcal{A} 的不变子空间, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 \mathcal{A} 互不相同的特征值, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 分别是 \mathcal{A} 属于 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 的根向量. 若 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \in W$, 证明 $\alpha_i \in W, i = 1, \dots, k$.

证明. 由准素分解知 $\alpha \in \bigoplus_{i=1}^k W_{\lambda_i}$, 因此 $\alpha \in \left(\bigoplus_{i=1}^k W_{\lambda_i} \right) \cap W = \bigoplus_{i=1}^k (W_{\lambda_i} \cap W)$. 由于 $\alpha_i \in W_{\lambda_i}$, 因此 $\alpha_i \in W_{\lambda_i} \cap W$, 从而得证. \square

6.2.7 证明推论 6.2.10.

推论 6.2.10. λ_0 是线性变换 \mathcal{A} 的特征值, 其代数重数为 r_0 , W_{λ_0} 为 \mathcal{A} 属于特征值 λ_0 的根子空间, 则 $W_{\lambda_0} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{J})^{r_0}$ 且 $\dim W_{\lambda_0} = r_0$.

证明. 由推论 6.2.9 知 $\mathcal{A}|_{W_{\lambda_0}}$ 的特征多项式为 $(\lambda - \lambda_0)^{r_0}$, 因此 $\dim W_{\lambda_0} = r_0$ 且 $(\mathcal{A}|_{W_{\lambda_0}} - \lambda_0 \mathcal{J}_{W_{\lambda_0}})^{r_0} = 0$, 从而 $\forall \alpha \in W_{\lambda_0}, (\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{J})^{r_0} \alpha = 0$, 即 $W_{\lambda_0} \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{J})^{r_0}$. 反之显然 $W_{\lambda_0} \supset \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{J})^{r_0}$, 从而得证. \square

6.3 对角化

6.3.1 设下列的 A 为复矩阵, 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

证明.

$$(1) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 1, 1). \quad (2) P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \text{diag}(2, 2, 1, 1)$$

\square

6.3.2 V 是数域 \mathbb{F} 上的 4 维向量空间, 线性变换 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 V 的一个基, 使 \mathcal{A} 在其下的矩阵为对角矩阵, 并写出该对角阵.

证明. 可取可逆矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$. 从而可知在基 $\varepsilon_4, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3, \varepsilon_2$ 下 \mathcal{A} 的矩阵为对角矩阵. \square

6.3.3 若线性变换 \mathcal{A} 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$, 证明 \mathcal{A} 可对角化.

证明. \mathcal{A} 的零化多项式 $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ 无重根, 从而极小多项式无重根, 因此可知 \mathcal{A} 可对角化. \square

6.3.4 若存在 $m \in \mathbb{N}_+$ 使 n 阶矩阵 A 满足 $A^m = I_n$, 证明 A 可对角化.

证明. \mathcal{A} 的零化多项式 $\lambda^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} (\lambda - e^{\frac{2k\pi i}{m}})$ 无重根, 从而极小多项式无重根, 因此可知 \mathcal{A} 可对角化. \square

6.3.5 \mathcal{A} 为 \mathbb{C} 上线性空间 V 上的线性变换, 证明 \mathcal{A} 可对角化 \iff 对 \mathcal{A} 的任一不变子空间 V_1 都存在另一不变子空间 V_2 , 使得 $V = V_1 \oplus V_2$.

证明. \implies : 由于 \mathcal{A} 可对角化, 故其极小多项式 $m(\lambda)$ 无重根. 而 $m(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 的零化多项式, 从而 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 的极小多项式无重根, 即 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 可对角化. 因此可在 V_1 中取一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 使每个基向量都是 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 的特征向量, 从而也是 \mathcal{A} 的特征向量. 因此可将其扩充为 V 上的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$, 其中每个基向量是 \mathcal{A} 的特征向量. 因此取 $V_2 = \text{span}(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ 即可.

\impliedby : 任取 \mathcal{A} 的特征值 λ , 取特征子空间 V_λ , 由题设有不变子空间 V_2 使得 $V = V_\lambda \oplus V_2$. 从而根子空间 W_λ 与 V_2 的交 $W_\lambda \cap V_2$ 也是不变子空间. 任取 $v \in W_\lambda \cap V_2, v \neq 0$, 有 $k \in \mathbb{N}_+$ 使得 $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^k v = 0, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{k-1} v \neq 0$, 故 $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{k-1} v \in V_\lambda$, 但该向量也在 V_2 中, 故也在 $V_2 \cap V_\lambda = \{0\}$ 中, 矛盾, 从而 $W_\lambda \cap V_2 = \{0\}, W_\lambda = V_\lambda$. 由 λ 的任意性可知, $V = \bigoplus_{i=1}^k W_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 \mathcal{A} 的全体互不相同特征值, 从而可知 \mathcal{A} 可对角化.

(证明二) \impliedby : 记 \mathcal{A} 的全体特征子空间的直和为 V_1 . 若 \mathcal{A} 不可对角化, 则 $V_1 \subsetneq V$, 从而有不变子空间 $V_2, V = V_1 \oplus V_2$. 但 $\mathcal{A}|_{V_2}$ 在 \mathbb{C} 上必然有特征向量 $v \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 矛盾. \square

6.3.6 设 A 为数域 \mathbb{F} 上的幂零矩阵, 若 A 可对角化, 证明 $A = O$.

证明. A 可对角化即存在可逆矩阵 P 使得 $PAP^{-1} = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 而 A 幂零即存在 $m \in \mathbb{N}_+$ 使 $A^m = O$, 从而 $D^m = PA^mP^{-1} = O$, 即 $\lambda_i^m = 0, \lambda_i = 0$, 故 $D = O, A = O$. \square

6.3.7 n 阶矩阵 A 有 k 个不同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 证明: 若 A 可对角化, 则存在 n 阶矩阵 A_1, \dots, A_k 使得

$$(1) A_i A_j = \delta_{ij} A_i, (2) \sum_{i=1}^k A_i = I_n, (3) A = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$$

证明. A 可对角化即存在可逆矩阵 P 使得 $PAP^{-1} = D = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \dots, \lambda_k I_{r_k})$, 其中 r_i 为 λ_i 的重数. 设 $D_i = \text{diag}(O_{r_1}, \dots, I_{r_i}, \dots, O_{r_k})$, 记 $A_i = P^{-1} D_i P$, 下证 A_1, \dots, A_k 满足题设三条性质.

1. $A_i A_j = P^{-1} D_i D_j P$, 若 $i \neq j$ 则 $D_i D_j = O, A_i A_j = O$; 若 $i = j$ 则 $D_i D_j = D_i, A_i A_j = P^{-1} D_i P = A_i$.
2. $\sum_{i=1}^k A_i = P^{-1} \left(\sum_{i=1}^k D_i \right) P = P^{-1} I_n P = I_n$.
3. $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i = P^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i D_i \right) P = P^{-1} D P = A$.

从而得证. \square

6.3.8 设 \mathcal{A} 的所有互不相同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, V_{\lambda_i}, W_{\lambda_i}$ 分别为对应于 λ_i 的特征子空间和根子空间, 证明 \mathcal{A} 可对角化 $\iff V_{\lambda_i} = W_{\lambda_i}, i = 1, \dots, s$.

证明. \mathcal{A} 可对角化 \iff 每个特征值 λ_i 的几何重数和代数重数相等 $\iff \dim V_{\lambda_i} = \dim W_{\lambda_i} \iff V_{\lambda_i} = W_{\lambda_i}$. 最后一个等价关系是由 $V_{\lambda_i} \subset W_{\lambda_i}$ 得到的. \square

6.4 λ -矩阵

6.4.1 判断下列 λ -矩阵是否可逆, 若可逆则求其逆矩阵.

$$(1)A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-2\lambda^2 & \lambda^2-\lambda & -\lambda \\ \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-1 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

证明. (1) $\det A(\lambda) = -1 \in \mathbb{C}$, 因此可逆, 且

$$A(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 + \lambda \\ -\lambda & \lambda^2 - 1 & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \\ -\lambda^2 - \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda & -\lambda^4 - 2\lambda^3 + 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\det A(\lambda) = -\lambda^6 - 3\lambda^5 - 2\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, 因此不可逆. 事实上 $\det A(0) = 0$, 因此 $\det A(\lambda)$ 不为非零常数, 从而不可逆. \square

6.4.2 求下列 λ -矩阵的标准型.

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

证明. (1) $\text{diag}(\lambda, \lambda(\lambda^2 - 10\lambda - 3))$, (2) $\text{diag}(1, \lambda, \lambda(\lambda + 1))$. \square

6.4.3 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 $\iff \forall c \in \mathbb{C}, A(c)$ 可逆.

证明. $A(\lambda)$ 可逆 $\iff \det A(\lambda) = a \neq 0, a \in \mathbb{F} \iff \forall c \in \mathbb{C}, \det A(c) = a \neq 0, a \in \mathbb{F} \iff \forall c \in \mathbb{C}, A(c)$ 可逆. \square

6.4.4 数域 \mathbb{F} 任一 $m \times n$ 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都可以写成 $A(\lambda) = \lambda^k A_k + \cdots + \lambda A_1 + A_0$ 的形式, 其中 $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{F}^{m \times n}, k \in \mathbb{N}$.

证明. $A(\lambda)$ 的每个元素都是 \mathbb{F} 上的多项式, 记 $A(\lambda)$ 的第 (i, j) 元 $a_{ij}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^k a_{ij\ell} \lambda^\ell$, 其中 $k = \max_{i,j} \deg a_{ij}(\lambda)$. 再

对 $\ell = 0, 1, \dots, k$ 取矩阵 $A_\ell = (a_{ij\ell})_{i,j} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $A(\lambda) = \sum_{\ell=0}^k A_\ell \lambda^\ell$. \square

6.4.5 证明: 任意满秩 λ -方阵 $A(\lambda)$ 都可以写成 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 的乘积, 其中 $P(\lambda)$ 为可逆 λ -方阵, $Q(\lambda)$ 是上三角方阵, 其对角元均为首一多项式, 对角线以上的元素的次数都小于同列对角元的次数.

证明. 命题等价于证明通过初等行变换将任意满秩 λ -方阵 $A(\lambda)$ 变换为上三角方阵 $Q(\lambda)$, 且 $Q(\lambda)$ 的元素满足 $\deg q_{ij}(\lambda) < \deg q_{jj}(\lambda), 1 \leq i < j$. 下设 $a_{11}(\lambda)$ 为第一列次数最低的非零多项式, 因为总能用初等行变换做到这一点.

首先证明, 通过初等行变换能将 $A(\lambda)$ 变换为

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \cdots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \cdots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

的形式. 若 $a_{11}(\lambda) \mid a_{i1}(\lambda) (2 \leq i \leq n)$ 则结论显然成立, 否则对 $\deg a_{11}(\lambda)$ 归纳.

$\deg a_{11}(\lambda) = 0$ 时总有 $a_{11}(\lambda) \mid a_{i1}(\lambda)$, 从而结论成立, 下设 $\deg a_{11}(\lambda) \leq k-1$ 时结论成立. 若 $\deg a_{11}(\lambda) = k$, 对每个 $2 \leq i \leq n$ 作带余除法 $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{i1}(\lambda)$, 有 $\deg r_{i1}(\lambda) < \deg a_{11}(\lambda) = k$, 因此可作初等行变换将第 $(i, 1)$ 元变为 $r_{i1}(\lambda)$. 最后将次数最小的非零 $r_{i1}(\lambda)$ 通过行变换换到第 $(1, 1)$ 元, 其满足归纳假设, 结论成立.

依次对 $B(\lambda)$ 的右下角子矩阵作上述操作, 从而可变为

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda) & \cdots & c_{1n}(\lambda) \\ & c_{22}(\lambda) & \cdots & c_{2n}(\lambda) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

再将对角线上元素用同列对角元除, 可得到余式, 因此可依次作初等行变换使得对角线上元素变为余式, 其次数总小于同列对角元, 从而可得到 $Q(\lambda)$. \square

6.5 行列式因子、不变因子与初等因子

6.5.1 求下列 λ -矩阵的不变因子和初等因子.

$$(1) \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda-4 & -10 & 19 & -4 \\ -1 & \lambda-6 & 8 & -3 \\ -1 & -4 & \lambda+6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

证明. (1) 不变因子为 $1, \lambda, \lambda(\lambda+1)$, 故初等因子为 $\lambda; \lambda, \lambda+1$.

(2) 不变因子为 $1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, 故初等因子为 $(\lambda-1)^2; (\lambda-1)^2$. \square

6.5.2 $f, g \in \mathbb{F}[\lambda], (f, g) = 1$, 证明下列 λ -矩阵等价:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

证明. 通过互换行列容易看出前两个矩阵等价, 下证明第一个矩阵与第三个矩阵等价. 由 $(f, g) = 1$ 知存在多项式 u, v 使得 $uf + vg = 1$, 故作如下初等变换:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f & uf \\ 0 & g \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f & uf+vg \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 1 \\ 0 & g \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & f \\ g & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & -fg \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & fg \end{pmatrix}$$

从而三个矩阵等价. \square

6.5.3 $A(\lambda)$ 为满秩 12 阶 λ -矩阵, 若其初等因子为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1), (\lambda+1), (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$, 求 $A(\lambda)$ 的不变因子和行列式因子.

证明. 将初等因子排序为:

$$\begin{array}{cccc} (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & (\lambda-i)^2 & (\lambda+i)^2 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & & \\ (\lambda-1)^2 & & & \end{array}$$

从而不变因子为 $d_{12} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2, d_{11} = (\lambda-1)^2(\lambda+1), d_{10} = (\lambda-1)^2, d_9 = \cdots = d_1 = 1$. 行列式因子为 $D_1 = \cdots = D_9 = 1, D_{10} = (\lambda-1)^2, D_{11} = (\lambda+1)(\lambda-1)^4, D_{12} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2$. \square

6.5.4 证明

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子为 $1, \dots, 1, f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

证明. 由于 $\det A(\lambda) = f(\lambda)$, 且 $A(\lambda)$ 的第 $2, 3, \dots, n$ 行与第 $1, 2, \dots, n-1$ 列构成的子式 $= (-1)^{n-1}$, 从而由行列式因子的定义知 $D_{n-1} = \cdots = D_1 = 1, D_n = f(\lambda)$, 从而可得不变因子为 $1, \dots, 1, f(\lambda)$. \square

6.5.5 $A(\lambda)$ 为 n 阶 λ -矩阵, 证明 $A(\lambda)$ 与 $A^T(\lambda)$ 等价.

证明. 由于 $A(\lambda)$ 与 $A^T(\lambda)$ 的行列式因子等价, 因此两者的不变因子等价, 即两者等价. \square

6.6 Jordan 标准形

6.6.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

求其 Jordan 标准型 J 及可逆方阵 P , 使 $P^{-1}AP = J$.

证明.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

\square

6.6.2 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 证明 A 与 A^T 相似.

证明. 由题 6.5.5 知 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - A^T = (\lambda I - A)^T$ 等价, 因此 A 与 A^T 相似. \square

6.6.3 设方阵 A 的非常数不变因子为 $(\lambda - 1), (\lambda - 1)(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$, 求 A 的 Jordan 标准型 J .

证明. 其初等因子为 $\lambda - 1; \lambda - 1, \lambda + 1; (\lambda - 1)^2, (\lambda + 1)^2$, 故可得 $J = \text{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -1, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. \square

6.6.4 证明方阵 A 可对角化 \iff 对于任意 A 的特征值 λ 都有 $\text{rank}(\lambda I - A)^2 = \text{rank}(\lambda I - A)$.

证明一. 该等式即等价于

$$\dim V_\lambda = n - \text{rank}(\lambda I - A) = n - \text{rank}(\lambda I - A)^2 = \dim \ker(\lambda I - A)^2 = \dim W_\lambda^{(2)}$$

又由 $V_\lambda \subset W_\lambda^{(2)}$ 知 $V_\lambda = W_\lambda^{(2)}$. 若 A 可对角化, 即 $V_\lambda = W_\lambda$, 则自然有 $V_\lambda = W_\lambda^{(2)}$, 从而得证.

反之, 若有 $V_\lambda = W_\lambda^{(2)}$, 则任取 $v \in \ker(\lambda I - A)^3, (\lambda I - A)v \in W_\lambda^{(2)} = V_\lambda$, 即 $(\lambda I - A)^2 v = 0$, 从而 $W_\lambda^{(3)} = \ker(\lambda I - A)^3 \subset W_\lambda^{(2)}$, 即 $W_\lambda^{(2)} = W_\lambda^{(3)}$. 以此类推有 $V_\lambda = W_\lambda^{(2)} = W_\lambda^{(3)} = \cdots = W_\lambda^{(n)} = W_\lambda$, 因此 A 可对角化. \square

证明二. \Rightarrow : 设 A 相似于对角阵 $\text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \dots, \lambda_k I_{r_k})$, 故取任意特征值 λ_i , $\lambda_i I_n - A$ 相似于

$$\text{diag}((\lambda_i - \lambda_1)I_{r_1}, \dots, (\lambda_i - \lambda_k)I_{r_k}),$$

其中第 i 个对角分块矩阵取 O_{r_i} , 由于 $\lambda_i - \lambda_j \neq 0 (i \neq j)$, 故 $\text{rank}(\lambda_i I_n - A) = n - r_i$. 而 $(\lambda_i I_n - A)^2$ 相似于

$$\text{diag}((\lambda_i - \lambda_1)^2 I_{r_1}, \dots, (\lambda_i - \lambda_k)^2 I_{r_k})$$

同理知 $\text{rank}(\lambda_i I_n - A)^2 = n - r_i$, 从而两者相等.

\Leftarrow : 设 A 的 Jordan 标准型

$$J = \text{diag}(J(\lambda_1, s_{11}), \dots, J(\lambda_1, s_{1m_1}), J(\lambda_2, s_{21}), \dots, J(\lambda_k, s_{km_k}))$$

其中 $\sum_{i=1}^{m_k} = r_k$ 为特征值 λ_k 的代数重数. 不失一般性的, 取特征值 λ_1 , 可知 $\lambda_1 I_n - A$ 相似于

$$\lambda_1 I_n - J = \text{diag}(J(0, s_{11}), \dots, J(0, s_{1m_1}), J(\lambda_1 - \lambda_2, s_{21}), \dots, J(\lambda_1 - \lambda_k, s_{km_k}))$$

而 $(\lambda_1 I_n - A)^2$ 相似于

$$(\lambda_1 I_n - J)^2 = \text{diag}(J(0, s_{11})^2, \dots, J(0, s_{1m_1})^2, J(\lambda_1 - \lambda_2, s_{21})^2, \dots, J(\lambda_1 - \lambda_k, s_{km_k})^2)$$

由于 $\text{rank} J(\lambda_1 - \lambda_i, s_{ij}) = \text{rank} J(\lambda_1 - \lambda_i, s_{ij})^2$, $\text{rank} J(0, 1) = \text{rank} J(0, 1)^2$, 仅有 $s \geq 2$ 时有 $\text{rank} J(0, s)^2 = \text{rank} J(0, s) - 1$, 因此由题设条件知 $s_{11} = \dots = s_{1m_1} = 1$, 又由 λ 的任意性知所有 $s_{ij} = 1$, 从而 J 是对角阵, 即 A 可对角化. \square

6.6.5 若方阵 A 的特征值全为 0, 则 A 是幂零矩阵.

证明. A 的 Jordan 标准型 $J = \text{diag}(J(0, s_1), \dots, J(0, s_k))$, 从而取 $m = \max_{1 \leq i \leq k} s_k$, $J^m = O$, 因此存在可逆矩阵 P 使得 $A = PJP^{-1}$, $A^m = PJ^mP^{-1} = O$, 即 A 是幂零矩阵. \square

6.6.6 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征值, 证明 $\text{rank}(\lambda I - A)^k = n - k$.

证明一. 即 $\dim W_\lambda = \dim \ker(\lambda I - A)^k = k$, 从而 $\text{rank}(\lambda I - A)^k = n - k$. \square

证明二. 设 A 的 Jordan 标准型 $J = \text{diag}(J(\lambda, n_1), \dots, J(\lambda, n_t), J(\lambda_1, n_{11}), \dots, J(\lambda_s, n_{sm_s}))$, 其中 $\sum_{i=1}^t n_i = k, 1 \leq n_i \leq k$, 因此 $J(0, n_i)^m = O$, 从而 $(\lambda I - A)^k$ 相似于 $\text{diag}(O_k, J(\lambda - \lambda_1, n_{11})^k, \dots, J(\lambda - \lambda_s, n_{sm_s})^k)$, 即 $\text{rank}(\lambda I - A)^k = n - k$. \square

6.7 复习题 6

6.1 设 n 维线性空间 V 的线性变换 \mathcal{A} 有 n 个互不相同的特征值, 证明: 线性变换 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 可交换 $\iff \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{I}, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}$ 的线性组合.

证明. 若 \mathcal{B} 可被表为 \mathcal{A} 的多项式, 则自然可与 \mathcal{A} 交换. 反之, 由题设知 \mathcal{A} 可对角化, 则设 \mathcal{A} 在 V 的某基下的矩阵为 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 在此基下 \mathcal{B} 的矩阵为 B . 由 $AB = BA$ 可解得 $b_{ij} = 0 (i \neq j)$, 故可设 $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$. 考虑方程 $B = x_{n-1}A^{n-1} + \dots + x_1A + x_0I$, 其等价于线性方程组

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

其系数矩阵的行列式为 Vandermonde 行列式 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ (由 A 的特征值互不相同), 因此方程有唯一解, 从而 \mathcal{B} 可表为 \mathcal{A} 的多项式. \square

6.2 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 证明 $\phi_{AB}(\lambda)$ 与 $\phi_{BA}(\lambda)$ 差一个 λ^{n-m} .

证明. 因为 $\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(I_m - AB/\lambda) = \lambda^m \det(I_n - BA/\lambda) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA)$, 从而两多项式差一个 λ^{n-m} . \square

6.3 $\alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n)$, 求 $I + \alpha^T \beta$ 的特征值.

证明. 其特征多项式为 $\det(\lambda I - I - \alpha^T \beta) = (\lambda - 1)^n \det\left(I - \frac{\alpha^T \beta}{\lambda - 1}\right) = (\lambda - 1)^n \det\left(I_1 - \frac{\beta \alpha^T}{\lambda - 1}\right) = (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda - 1 - \beta \alpha^T)$, 因此其特征值为 $1(n-1 \text{ 重})$ 和 $1 + \beta \alpha^T = 1 + \sum_{i=1}^n a_i b_i$. \square

6.4 A, B 是复方阵, 记 $C = AB - BA$, 若 $AC = CA$, 证明 C 是幂零矩阵.

证明. C 幂零即所有特征值为 0, 为此仅需证明 $\forall k \geq 1, \operatorname{tr} C^k = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} C} \lambda^k = 0$. 任取 $k \geq 1$, 有

$$AC^k = CAC^{k-1} = C^2AC^{k-2} = \dots = C^{k-1}AC = C^kA$$

因此 $\operatorname{tr} C^k = \operatorname{tr}(C^{k-1}AB - C^{k-1}BA) = \operatorname{tr}(A(C^{k-1}B)) - \operatorname{tr}((C^{k-1}B)A) = 0$, 从而得证. \square

6.5 设 $B = \begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}$, 其中对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 有特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 求 B 的特征值.

证明.

$$\phi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ -A & \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_n I_n & -A \\ O & \lambda I_n - A^2/\lambda \end{vmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_n - A^2/\lambda) = \det(\lambda^2 I_n - A^2)$$

而 A^2 特征值为 $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$, 故 $\phi_B(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - \lambda_i^2)$, 因此 B 的特征值为 $\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_n$. \square

6.6 若 $\mathcal{A}^m = \mathcal{I} (m \geq 2)$, 证明 \mathcal{A} 可对角化.

6.7 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 记 $g = f/(f, f')$, 证明 A 可对角化 $\iff g(A) = O$.

6.8 A, B 是可交换的 n 阶矩阵, 证明存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ, Q^{-1}BQ$ 均为上三角矩阵.

6.9 $A, B \in M_n(\mathbb{F}), \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B < n$, 证明两者有公共特征向量.

6.10 设 \mathcal{A} 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, \mathcal{A} 有 n 个不同的特征值, 证明 \mathcal{A} 有 2^n 个不变子空间.

6.11 A, B 是 n 阶矩阵, A 有 n 个不同特征值, 证明以下三者等价:

1. $AB = BA$;
2. 存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 均为对角矩阵;
3. A, B 有相同的 n 个线性无关特征向量.