

V-BLAST MIMO  
&  
Water-filling Algorithm

高云帆 15307130314

张奕朗 16307130242

陈幸豪

2018 年 12 月 27 日

# 1 MIMO

## 1.1 MIMO 概述

多输入多输出 MIMO(Multiple-Input Multiple-Output), 指在发射端和接收端分别使用多个天线传送和接收信号, 从而改善通信质量. 通过多个天线实现多发多收, 在频谱资源和天线发射功率不变的情况下, 充分利用空间资源, 成倍地提高系统信道容量, 增加了频谱利用率. 根据网上查阅到的资料, MIMO 已被用于 802.11n 标准, 并且被用于改进 802.11 a/b/g 网络的性能.

一个典型性的 MIMO 系统如图2.1所示. 发射端通过空间——时间映射(空时映射)将数据信号映射到多根天线上, 接收端将各根天线接收到的信号进行空时译码, 恢复出发射端发送的数据信号.

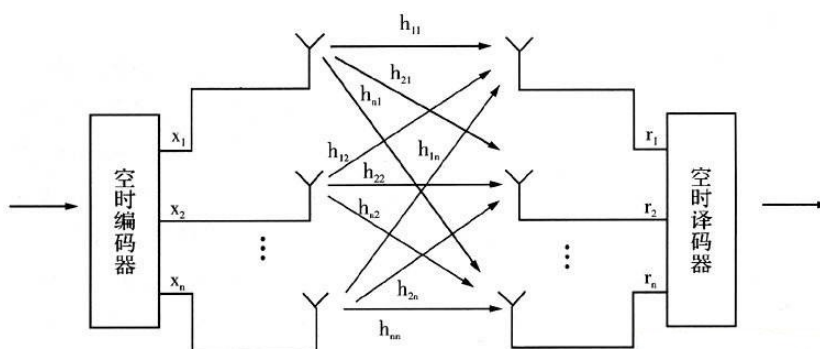


图 1.1 MIMO 系统结构图.

无线电发送的信号被反射时, 会产生多份信号, 每份信号都是一个空间流. 单输入单输出(SISO)系统一次只能发送或接收一个空间流. 相比于 SISO, MIMO 主要有以下两大优点:

- 1 提高了信道容量. 这是因为 MIMO 允许多个天线同时发送和接收多个空间流, 极大地提高了信号传输的效率. MIMO 技术的应用, 使空间成为一种可以用于提高性能的资源, 并能够增加无线系统的覆盖范围.
- 2 提高了信道的可靠性. 利用 MIMO 信道提供的空间复用增益及空间分集增益, 可以利用多天线来抑制信道衰落. 多天线系统的应用, 使得并行数据流可以同时传送, 可以显著克服信道的衰落, 降低误码率.

(以上资料部分来自相关教材和互联网)

## 1.2 数学模型

MIMO 系统中的输入输出关系可描述为

$$r = Hx + n$$

其中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n_T}]$  为多维输入信号矢量构成的矩阵,  $r = [r_1, r_2, \dots, r_{n_R}]$  为接受信号构成的矩阵,  $H$  为信道转移矩阵,  $n$  为加性高斯白噪声.

## 2 V-BLAST

### 2.1 V-BLAST 概述

V-BLAST (Vertical Bell Labs Layered Space-Time) 是贝尔实验室提出的一种利用垂直结构来达到极高数据传输速率的无线通信技术. 这种技术在一个带限无线信道内, 通过多天线技术充分利用空间复用, 使得信道容量随着天线数的增加呈线性增长, 有着极高的频谱效率. 一个典型的 V-BLAST MIMO 系统的结构图如下:

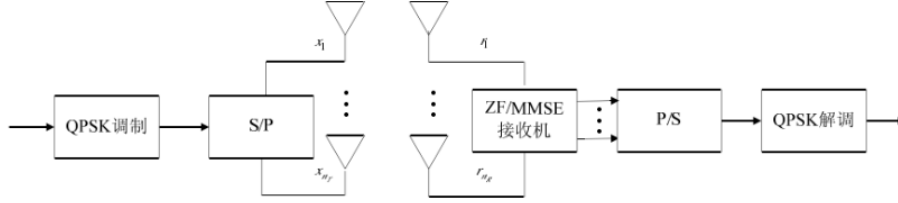


图 2.1 V-BLAST 系统结构图.

### 2.2 V-BLAST 检测算法

V-BLAST 在接收端对信号进行恢复所使用的检测算法主要有**迫零 (Zero Force) 算法** (以下简称 **ZF 算法**), **最小均方误差 (Minimal Mean Square Error) 算法** (以下简称 **MMSE 算法**) 和 **ML 算法** 三种. 其中 ML 算法较为复杂, 这里不作讨论.

#### ZF 算法

假设在接收端信道状态信息 (CSI) 是已知的, 即信道转移矩阵  $H$  是已知的. ZF 检测算法主要是基于 Guass-Markov 定理, 其数学描述为一个最小二乘问题:

$$\min \|r - H\hat{x}\|_2^2$$

其中  $\hat{x}$  是估计得到的发送信号.

令  $\frac{\partial}{\partial x}(r - H\hat{x})^T(r - H\hat{x}) = 0$ , 即可得到最小二乘问题的闭式解:

$$\hat{x}_{ZF} = H^\dagger r$$

其中  $H^\dagger = (H^T H)^{-1} H^T$  为  $H$  的伪逆 (Moore-Penrose pseudo inverse).

根据 Guass-Markov 定理: 在给定经典线性回归的假定下, 最小二乘估计量 LSE 是具有最小方差的线性无偏估计量 (MVUE). 当经典假定成立 (即  $r$  与  $x$  满足线性变换关系  $H$ ) 时, 我们不需要再去寻找其它无偏估计量, 没有一个会优于 LSE 估计量. 也就是说, 如果存在一个好的线性无偏估计量, 这个估计量的方差最多与 LSE 的方差一样小, 不会小于 LSE 的方差.

ZF 检测的设计目标是在不考虑噪声的情形下, 完全消除天线间干扰, 因此不需要噪声的统计特性. 并且计算方法较为简单, 直接通过求解信道矩阵的伪逆即可得到 (复杂度  $O(n^3)$ ). 在这一假设下, ZF 算法可以得到信号估计的最优解.

## MMSE 算法

MMSE 算法考虑了噪声的影响，目标是 minimized 信号估计的均方误差 MSE 的期望：

$$\min \mathbb{E} [\|\hat{x} - x\|_2^2]$$

将其进行等效化简可得到一个线性变换的最小二乘问题 (乘上矩阵  $H$  对应线性变化，只要  $|H| \geq 0$ ，就有下述问题与原问题等价)：

$$\begin{aligned} & \min \mathbb{E} [\|H(\hat{x} - x)\|_2^2] \\ &= \min \mathbb{E} [\|H\hat{x} - r + n\|_2^2] \\ &= \min \mathbb{E} [(H\hat{x} - r + n)^T (H\hat{x} - r + n)] \\ &= \min \mathbb{E} [(H\hat{x} - r)^T (H\hat{x} - r) + 2(H\hat{x} - r)^T n + n^T n] \\ &= \min \mathbb{E} [(H\hat{x} - r)^T (H\hat{x} - r) + 2\hat{x}^T H^T n] \\ &= \min \mathbb{E} [(H\hat{x} - r)^T (H\hat{x} - r) + \sigma_n^2 \hat{x}^T \hat{x}] \end{aligned}$$

利用同样的方法，令  $\frac{\partial}{\partial \hat{x}} ((H\hat{x} - r)^T (H\hat{x} - r) + \sigma_n^2 \hat{x}^T \hat{x}) = 0$  得到该问题的闭式解：

$$\hat{x}_{MMSE} = (H^T H + \sigma_n^2 I_M)^{-1} H^T r$$

其中  $R_n = Cov(r, n) = \hat{x}^T H^T n = \frac{\sigma_n^2}{2} \hat{x}^T \hat{x}$  为接受信号与噪声的协方差矩阵； $H^T H + \sigma_n^2 I_M$  正定，其逆一定存在 (虽然 ZF 算法中的 Gram 矩阵  $H^T H$  只是半正定，但是由于实际信道  $H$  不可能为零矩阵，故  $H^T H$  也一定正定)。在有噪声的情况下，MMSE 算法得到的  $\hat{x}$  为该模型的 MVUE (minimum variance unbiased estimator)。

## ZF 算法和 MMSE 算法的改进

V-BLAST MIMO 信道由于空间复用的效应，不同天线之上会受到其他天线带来的噪声的影响。通过引入串行干扰消除的思想 (Successive Interference Cancellation)，在基于 QR 分解的基础上可以得到 ZF-QR-SIC 和 MMSE-QR-SIC 两种非线性检测方法以及基于排序的 OSIC (Ordered Successive Interference Cancellation) 检测算法。OSIC 算法过于复杂，没有找到相应的资料，此处不予考虑。下面将简要给出基于 QR 分解的改进算法原理：

先将矩阵  $H$  进行 QR 分解：先将  $G$  的列空间 Schmidt 正交化获得酉矩阵  $Q$ ，然后根据  $R = Q^T H$  获得上三角阵  $R$ ，即：

$$H = QR$$

代入 1.2 中的 AWGN 信道模型得到 QR-SIC 检测算法的迭代表达式：

$$\begin{aligned} Q^T r &= Rx + Q^T n \\ \hat{x}_{k,SIC} &= \frac{r_k - R_{k,k+1:N_t} \hat{x}_{k+1:N_t}}{R_{k,k}} \end{aligned}$$

由于只需要做一次 QR 分解 (复杂度  $O(n^3)$ )，之后都可以由迭代算法计算，所以算法复杂度并未增加。

### 3 Matlab 仿真与算法比较

接下来的部分，我分别对上述算法进行了仿真，下面将分别给出相应的结果以及分析。

#### 3.1 ZF 算法的比较

对于 ZF 算法，根据其是否使用 QR 以及是否进行了排序，可以分为以下几类：线性 ZF 检测算法 (Linear ZF)，基于 QR 分解的 ZF 检测算法 (ZF-QR SIC)，基于排序和 QR 分解的 ZF 检测算法 (ZF-SQRD)，ZF-VBLAST 检测算法 (基于串行干扰消除)。

设定发送端和接收端天线数量均为 4，使用 QPSK 进行调制，在瑞利衰落信道 (RFC)、加性高斯白噪声 (AWGN) 的情况下得到在不同 SNR 下各算法的误比特率 BER(bit error rate)，并重复 1000 次计算平均 BER，如图 3.1 所示。可以看出四种算法的性能差距不是非常大，其中基于串行干扰消除的 ZF 算法性能最好，但计算复杂度也最高。随着信噪比的不断提升，各算法的误比特率也在不断下降。

这也说明了在误比特率和计算复杂度、信噪比之间有一个折衷：计算复杂度高的算法准确率高，信噪比高的情况下准确率高。

代码和函数见文件夹 zf。

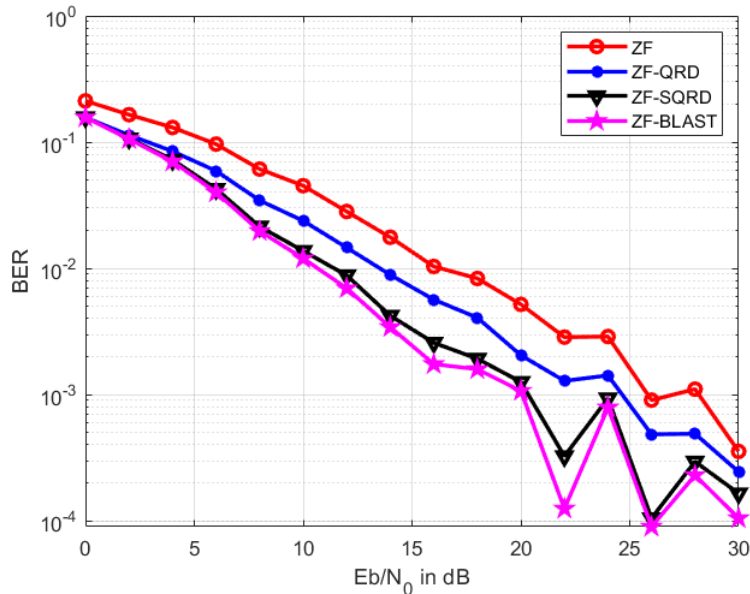


图 3.1 不同的 ZF 算法仿真结果。

#### 3.2 MMSE 算法的比较

使用与 ZF 算法同样的设置 (天线、调制、信道、噪声、重复次数)，对线性 MMSE 检测算法 (Linear MMSE)，基于 QR 分解的 MMSE 检测算法 (MMSE-QR SIC)，基于排序和 QR 分解的 MMSE 检测算法 (MMSE-SQRD) 和 MMSE-VBLAST 检测算法 (基于串行干扰消除) 进行仿真，结果如图 3.2 所示。其中 MMSE-VBLAST 未能成功实现，图中的曲线有误，理论上 MMSE-BLAST 的性能应较 MMSE-SQRD 更好。文章 [1] 中描述的 ZF-BLAST 算法是：将其滤波矩阵  $G_{ZF}$  替换为  $G_{MMSE}$ ，并且在 MMSE 条件下把信道矩阵替换为扩展的信道矩阵  $\underline{H} = [H; \sigma_n I_n]$  作为 MMSE-BLAST 算法。但是失败了，网上也没有找到有效的解决

方案，其原因仍待探讨。除去这点，MMSE 其余三种算法的仿真性能排序与 ZF 相同，复杂度越高的算法准确率越高。

代码和函数见文件夹 *mmse*。

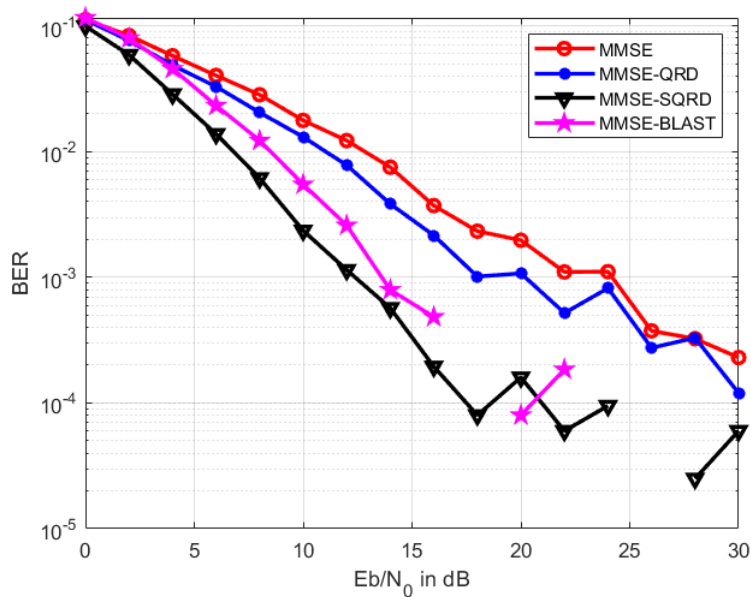


图 3.2 不同的 MMSE 算法仿真结果。

### 3.3 SISO 与 MIMO 的比较

将信道数量设为 1，此时 8 种算法在性能上没有区别，维持天线、调制、信道、噪声、重复次数等设置不变，任选一种算法进行仿真（这里选择了性能最好的 ZF-BLAST 算法），结果如图 3.3 所示。

与图 3.1 和图对比知：MIMO 与 SISO 的 BER 近乎相同（注意纵轴坐标），但是由于 MIMO 使用多天线同时发送数据，所以传输速率在不增大带宽的情况下随天线数量线性增长，并且能维持与 SISO 相近的正确率，充分体现了 MIMO 传输的优点。

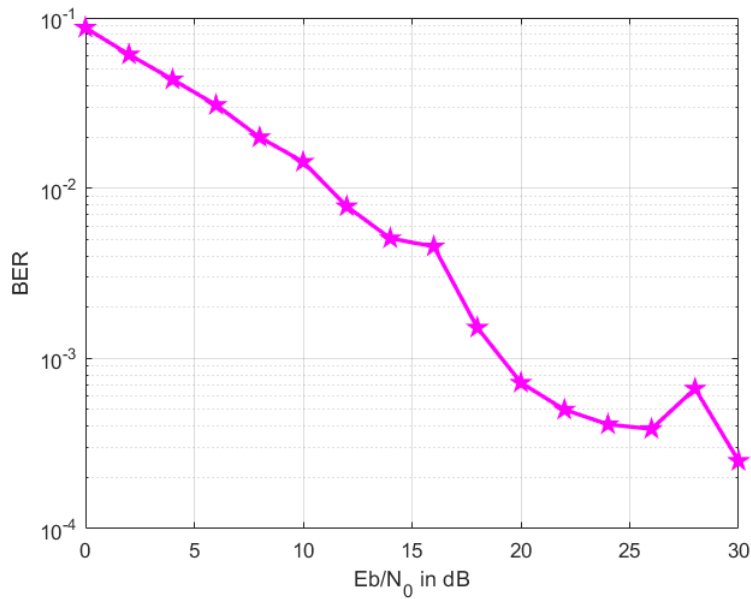


图 3.3 相同条件下的 SISO 仿真结果.

### 3.4 Demo: 图像传输

将一张  $100 \times 100 \times 3$  的 8 位彩色图像转为二进制文件，进行 QPSK 调制后用 4 天线 MIMO 发送，接收端用 4 天线接受信号，并通过 ZF-BLAST 算法恢复，在三种信噪比下恢复的图像见 3.4。当  $\text{SNR}=10\text{dB}$  时，图像上有一些明显的误码（而且均为集中的突发差错）；而当  $\text{SNR}=15\text{dB}$  时，图上的误码已经基本可以忽略；当  $\text{SNR}=20\text{dB}$  时，图中已经没有任何误码。这说明 MIMO 传输和 ZF-BLAST 恢复的性能非常好，完全能够满足图片传输的需求。

不过这里还有一些可以改进的地方：由于图片是直接转为二进制文件，未经过任何信源编码，所以一张  $100 \times 100 \times 3$  的 8 位彩色图像就需要  $100 \times 100 \times 3 \times 8 = 2.4 \times 10^5$  个二进制码元来描述。一种解决方法是利用我们在 project 1 中写好的 JPEG 2000 算法进行信源编码，压缩冗余的熵。但是由于我们组的 JPEG 2000 是用 Python 写的，而 VBLAST 是用 Matlab 写的，两者接口无法对接，在询问周小林老师后，老师说可以直接传输一张图片的二进制文件。理论上，两者连接之后传输效率能够得到很大的提升。

代码见文件夹 *zf* 中的脚本 *vblast\_zf\_picture.m*。

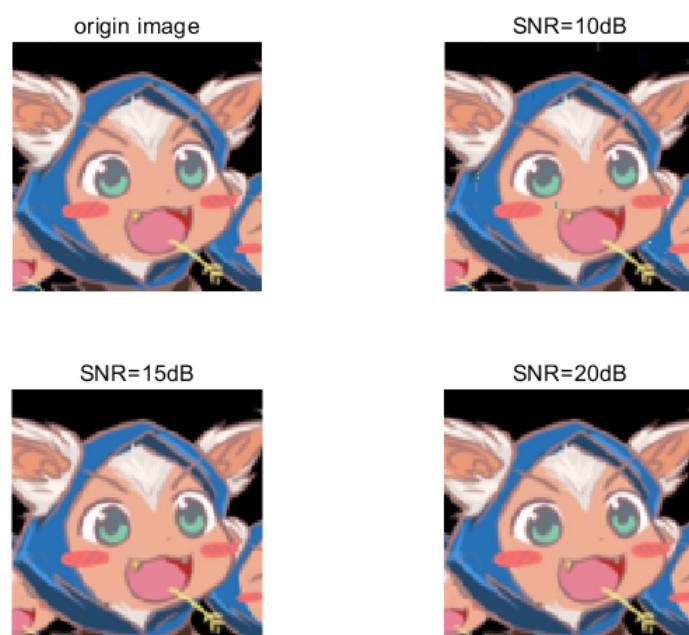


图 3.4 Demo: 图像传输.



## 参考文献

- [1] Wolniansky, P.W. & Foschini, G.J. & Golden, G.D. & Valenzuela, Reinaldo. (1999). V-BLAST: An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless Channel. Proceedings of URSI Int. Symp. Signals, Systems and Electronics. 2. 295 - 300. 10.1109/ISSSE.1998.738086.
- [2] MIMO 中 VBLAST 检测算法研究. 佚名. <https://wenku.baidu.com/view/cab355b4ee06eff9aef807fd.html>
- [3] V-BLAST 的实现及其检测. Kerstan. <https://doc.mbalib.com/view/34395168e14cb060d54bbcf06ac430d6.html>
- [4] MIMO. 百度百科. <https://baike.baidu.com/item/MIMO/1881?fr=aladdin>
- [5] vblast. github. <https://github.com/rachelxi/vblast>