微积分（第四章）

三、某些特殊类型函数的不定积分

- 一、有理函数的积分
  - 1.定义：

有理函数的定义： 两个多项式的商表示的函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n<m$，**这有理函数是真分式；**

(2) $n\geq m$，**这有理函数是假分式；**

利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

  - 2.理论依据*均有$p^2-4q<0$*

代数学基本定理（Fundamental Theorem of Algebra）对于复数域，每个次数不少于1的复系数多项式在复数域中至少有一根。由此推出，一个n次复系数多项式在复数域内有且只有n个根，重根按重数计算。

因此，任意次数的实系数多项式在实数域都能够分解成一次和二次因式的乘积。

则有分解式：$Q_m(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{j_i}\prod_{i=1}^{s}(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$

若：$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$

设 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$ 是真分式.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)}+\cdots+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)}+\cdots+$$
$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)}$$

根据代数基本定理，每个真分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$，都可以分解为有限个最简分式之和。

- 3.步骤

部分分式分解的步骤：

第一步：对分母 $Q(x)$ 在实数系内作标准分解：

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$$

其中 $\beta_0=1,\lambda_i,\mu_i(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$ 均为自然数，

而且 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{i=1}^{t}\mu_i=m;\ p_j^2-4q_j<0,j=1,2,\cdots,t$

第二步：根据分母的各个因式分别写出与之相应的部分分式：

对于每个形如 $(x-a)^k$ 的因式，它所对应的部分分式是

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

对于每个形如 $(x^2+px+q)^k$ 的因式，其中 $p^2-4q<0$，则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i,N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

真分式化为部分分式之和的待定系数法

例: $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because\quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore\quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\-(3A+2B)=3,\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases},$$

$$\therefore\quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例: $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)\qquad(1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$　　取 $x=1,\Rightarrow B=1$

取 $x=2$, 并将 A,B 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例：$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

- 4.多项式的处理

说明：将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式；(2) $\frac{A}{(x-a)^n}$；(3) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；$p^2-4q<0,\ n=2,3,\cdots$

讨论积分 $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx,$

$\because\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$ 令 $x+\frac{p}{2}=t$

记 $x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$ 则 $a^2=q-\frac{p^2}{4},\quad b=N-\frac{Mp}{2},$

$$\therefore\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}dt+\int\frac{b}{(t^2+a^2)^n}dt$$

$$(1)\quad n=1,\quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

$$(2)\quad n>1,\quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

对于$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$可得递推公式如下：

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}-I_{n-1}\right]$$

整理得： $$I_n=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数.

结论： **有理函数的原函数都是初等函数.**

- 二、三角函数有理式的积分

- 1.定义

三角有理式的定义：

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x,\cos x)$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

万能

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$ $\quad x = 2\arctan u$（万能置换公式）

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad dx = \frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

公式

- 2.例：**万能公式化有理分式积分**

例 求积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx.$

解 由万能置换公式 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ $dx=\frac{2}{1+u^2}du,$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$=\int \frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}du=\int \frac{1+u}{1+u^2}du-\int \frac{1}{1+u}du$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$$\overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=}\ \frac{x}{2}+\ln|\sec\frac{x}{2}|-\ln|1+\tan\frac{x}{2}|+C.$$

例： 求积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解（一） $u=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du,$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du$$

$$=\frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}]+C$$

$$=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

万能公式一般较为复杂，优先考虑别的方法

解:(二）修改万能置换公式，令 $u=\tan x$

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\qquad dx=\frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

三角恒等变换化基本积分公式

解:(三）可以不用万能置换公式.

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$$

$$=\int\csc^2 x dx+\int\cot^2 x\boxed{\csc^2 x dx}=d(\cot x)$$

$$=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$$

拆奇

次项凑微分

例 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

- **3.改良万能公式:**
  - （1）sinx，cosx均为偶次**也可用2sin²x=1-cos2x,2cos²x=1+cos2x逐步降幂**

    (1) 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

    则可令 $t = \tan x$, 此时,

    $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

  - （2）sinx为偶次，cosx为奇次

    (2) 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可令 $t = \cos x$.

  - （3）cosx为偶次，sinx为奇次

    (3) 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可令 $t = \sin x$.

例：计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x}$.

解：令 $t=\tan x$，则 $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$$

- 4.例

例：计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$.

解：令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{(2+t^2)(1+t^2)}=\int \left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\arctan t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C \quad =x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$$

辅助角公式

例：计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$ （$a \neq 0$，$b \neq 0$ 为常数）.

解：$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right]$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中，$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \csc(x+\varphi)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln|\csc(x+\varphi) - \cot(x+\varphi)| + C.$$

化简

例：计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1-\cos x + \sin x - \sin x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\csc^2 x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \csc x - \frac{\cos x}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x| + C$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x} + \ln\frac{|1-\cos x|}{\sin^2 x} + C.$$

分母

- **5.配凑法**

说明: 此技巧适用于形为 $\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\mathrm{d}x$ 的积分.

令 $a\cos x+b\sin x$

$$=A(c\cos x+d\sin x)+B(c\cos x+d\sin x)'$$

例. 求 $\displaystyle\int\frac{3\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

解: 令 $3\cos x-\sin x$

$$=A(\cos x+\sin x)+B(\cos x+\sin x)'$$

$$=(A+B)\cos x+(A-B)\sin x$$

比较同类项系数 $\begin{cases}A+B=3\\A-B=-1\end{cases}$, 故 $A=1,\ B=2$

$$\therefore\ 原式=\int\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

$$=x+\ln|\cos x+\sin x|+C$$

- 三、简单无理函数的积分
  - 1.**t=√型代换**

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b}),\quad R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right),$

解决方法 **作代换去掉根号.**

令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$,得 $x=\dfrac{t^n-b}{a}$, 则 $dx=\dfrac{nt^{n-1}}{a}dt$

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$,得 $x=\dfrac{b-dt^n}{ct^n-a}$, 则 $dx=\dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt$

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},t\right)\frac{n(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}t^{n-1}dt.$$

例

例：求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解：令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \quad \Rightarrow \frac{1+x}{x}=t^2, \quad x=\frac{1}{t^2-1}, \quad dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$，

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例：求积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

解：　令 $t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5dt=dx,$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.$$

说明　**无理函数去根号时，取根指数的最小公倍数.**

例 求积分 $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx.$

解 先对分母进行有理化

$$原式=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}dx$$

$$=\int(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+1}d(3x+1)-\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)$$

$$=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例：求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. 构造 $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

解 $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}=\sqrt[3]{(\frac{x-1}{x+1})^4}\cdot(x+1)^2.$

令 $t=\frac{x-1}{x+1}$， 则有 $dt=\frac{2}{(x+1)^2}dx$，

$$原式=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(\frac{x-1}{x+1})^4}\cdot(x+1)^2}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$=-\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

欧拉

变换：将根号下二次三项式化成一次式，万能但复杂

注1：一般地，二次三项式 ax^2+bx+c 可利用欧拉变换。

若 $a>0$，则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x\pm t$

若 $c>0$，则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$

若 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$，则可令 $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha)$ 或 $t(x-\beta)$.

例：求 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解：令 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$，有 $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$，$dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$，$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+2t}$，则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}dt=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{t}-\frac{3}{t+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2(t+\frac{1}{2})^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\ln|t|-3\ln|t+\frac{1}{2}|+\frac{3}{2(t+\frac{1}{2})}\right]+c=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2}{|t+\frac{1}{2}|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{|\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}|^3}+\frac{3}{2(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}+C$$

分子

分母同乘x再换元亦可

例：求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x^2} + C$$

注2：通常所说的“求不定积分”，是指用初等函数的形式把这个不定积分表示出来。在这个意义下，并不是任何初等函数的不定积分都能“求出”来的。例如：

$$\int e^{\pm x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx,$$

$$\int \sin x^2 dx, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx\,(0<k<1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx\,(0<k<1),$$

- 记住

- 四、特殊函数的不定积分

- 1.抽象函数的不定积分**往往用凑微分法**

例　求 $\int [\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx.$

解　原式 $= \int \frac{f(x)f'^2(x) - f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} d[\frac{f(x)}{f'(x)}] = \frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2 + C.$$

- 2.分段函数的不定积分

例　求 $\int \max\{1, |x|\}dx.$

解　设 $f(x) = \max\{1, |x|\}$，　则 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，　则必存在原函数 $F(x)$.

$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 \le x \le 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + C_3, & x > 1 \end{cases}$ 又 $\because F(x)$须处处连续，有

$$\lim_{x\to-1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to-1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$$ 即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$，

$$\lim_{x\to1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim_{x\to1^-}(x+C_2)$$ 即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$，

联立并令 $C_1=C$，　可得 $C_2=\frac{1}{2}+C$，$C_3=1+C$.

$$故\int\max\{1,|x|\}dx=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C, & x<-1\\ x+\frac{1}{2}+C, & -1\le x\le 1.\\ \frac{1}{2}x^2+1+C, & x>1\end{cases}$$

例： 求 $\int|x-1|\mathrm{d}x$.

解： 设 $F'(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\ge1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$

则 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x+C_1, & x\ge1\\ x-\frac{1}{2}x^2+C_2, & x<1\end{cases}$

因 $F(x)$ 连续，利用 $F(1^+)=F(1^-)=F(1)$，得

$$-\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}+C_2\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}C$$

得 $\int|x-1|\mathrm{d}x=F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}+C, & x\ge1\\ -\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}+C, & x<1\end{cases}$