

## 微积分 (第四章)

### 一、不定积分

- 一、原函数与不定积分

- 1. 原函数定义

**定义：** 如果在区间 $I$ 内，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$ ，即 $\forall x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 在区间 $I$ 内**原函数**。

例  $(\sin x)' = \cos x$   $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数。

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ )  $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的原函数。

#### 问题

#### 结论：

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，则存在可导函数 $F(x)$ ，使 $F'(x) = f(x)$  ( $x \in I$ )。连续函数一定有原函数

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有一原函数 $F(x)$ ，则 $F(x) + C$ 仍为 $f(x)$ 的原函数。

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有一原函数 $F(x)$ ，则 $f(x)$ 的所有原函数，可表示为： $F(x) + C$  ( $C$ 为任意常数)

证：设 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的任一原函数，则

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\therefore \Phi(x) - F(x) = C \quad \text{即} \quad \Phi(x) = F(x) + C$$

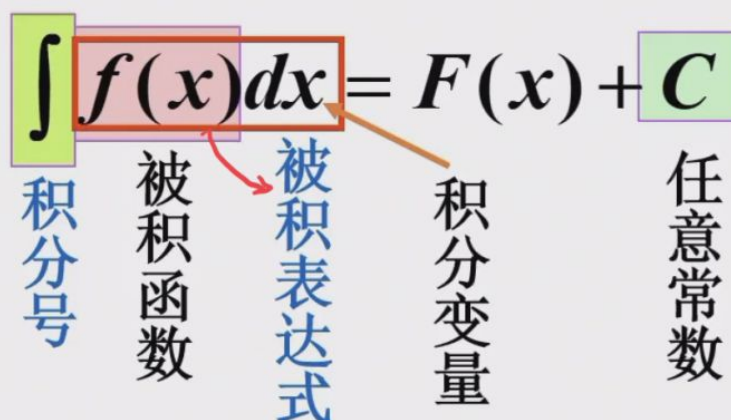
○ 2.不定积分的定义

## 不定积分的定义：

在区间 $I$ 内，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数 称为 $f(x)$ 在区间 $I$ 内的不定积分，记为 $\int f(x)dx$ .

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号      被积函数      被积表达式      积分变量      任意常数



The diagram illustrates the components of the indefinite integral formula  $\int f(x)dx = F(x) + C$ . The integral symbol  $\int$  is highlighted with a green box and labeled '积分号' (Integral sign). The function  $f(x)$  is highlighted with a red box and labeled '被积函数' (Integrand). The entire expression  $f(x)dx$  is enclosed in a red box and labeled '被积表达式' (Integrand expression). The variable  $x$  in  $dx$  is highlighted with an orange box and labeled '积分变量' (Integration variable). The constant  $C$  is highlighted with a green box and labeled '任意常数' (Arbitrary constant). A red arrow points from the '被积函数' label to the  $f(x)$  part of the integrand, and an orange arrow points from the '积分变量' label to the  $dx$  part of the integrand.

习惯上, 称求已知函数  $f(x)$  的全部原函数的过程, 为求函数  $f(x)$  的不定积分.

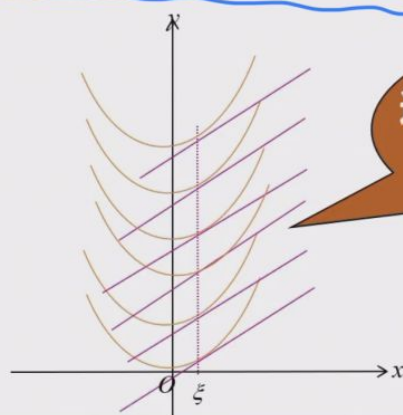
求不定积分是求导的逆运算.

## 原函数与不定积分的几何意义

$f(x)$  的一个原函数在几何上称为一条积分曲线

$\int f(x)dx$  在几何上表示  $f(x)$  的

全体积分曲线所组成的 积分曲线族



这些积分曲线在这自变量相同的点处切线是相互平行的

### • 二、基本积分

$$(1) \quad \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \quad \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C; \quad \text{或} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

**说明:**  $x > 0, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0, [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad \therefore \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\text{简写为} \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$(6) \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(13) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(14) \quad \int \sinh x dx = \cosh x + C;$$

$$(15) \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C;$$

- 三、不定积分的性质

- 性质12：求积与求导，微分与积分

性质 1 :

$$\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x), \quad d \left[ \int f(x) dx \right] = f(x) dx,$$

性质 2 :

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$



- 性质3：加减可拆，数乘可提

### 性质3(线性运算法则)

$$(1) \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \because \left[ \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right] \\ &= \left[ \int f(x) dx \right] \pm \left[ \int g(x) dx \right] = f(x) \pm g(x). \end{aligned}$$

$\therefore$  等式成立.

(此性质可推广到有限多个函数之和的情况)

$$(2) \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

( $k$  是常数,  $k \neq 0$ )

- 例

$$\text{例 求积分 } \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C \end{aligned}$$

拆分成加减

例 求积分  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ .

解 
$$\begin{aligned}\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.\end{aligned}$$

例 求积分  $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$ .

解 
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx &= \int \frac{1}{1+2\cos^2 x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C.\end{aligned}$$

**说明：** 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.