微积分

四、函数的连续性

- 一、函数连续性定义

一、函数连续性定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义：

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，应该满足以下三点：

(1) $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义；(包括在点 x_0 处有定义)

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 存在；　($x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限)

(3) $a = f(x_0)$. (极限值等于函数在点 x_0 处的函数值)

注意：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处极限存在与函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是连续的区别。

例：试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义知

函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

增量定义：

定义 2 设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，如果当自变量的增量Δx趋向于零时，对应的函数的增量Δy也趋向于零，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那末就称函数$f(x)$在点$x_0$连续，$x_0$称为$f(x)$的连续点.

设 $x=x_0+\Delta x,\qquad \Delta y=f(x)-f(x_0),$

$\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$.

单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0 - 0) = f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0 + 0) = f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理: 函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续, 并且在左端点 $x = a$处右连续, 在右端点 $x = b$处左连续, 则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的连续曲线.

例如,有理函数在区间 $(-\infty,+\infty)$内是连续的.

例 证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\because \left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\quad 则 |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的α, 当$\alpha\neq 0$时, 有$|\sin\alpha|<\alpha$,

故 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当$\Delta x\to 0$时, $\Delta y\to 0$.

即函数 $y=\sin x$对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

同理可证: 函数 $y=\cos x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

初等函数在定义域内均为连续函数

- 二、间断

函数间断点的定义

若函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义, 且在点 x_0 处满足下述三个条件中的任何一个, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个间断点:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 不存在 .

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, 但 $a\neq f(x_0)$.

- 第一类间断点

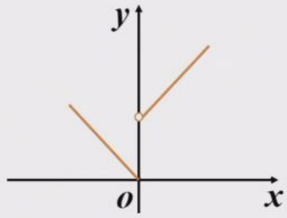
1.跳跃间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$ 为函数的跳跃间断点.

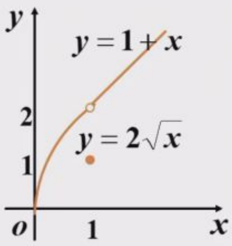


2.可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性.



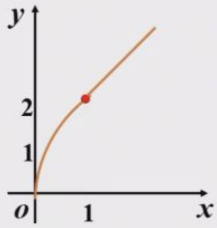
可去间断点作用：构建一个在该点连续，其他部分均与f(x)相同的函数F(x)，就可以

利用连续函数的性质解决问题

如上例中，令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.



跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在点x_0处的左、右极限都存在.

- 第二类间断点：

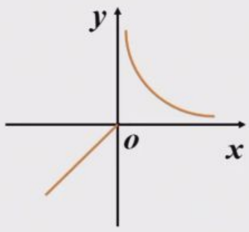
3.第二类间断点 如果$f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在，则称点x_0为函数$f(x)$的第二类间断点.

例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x, & x\le 0, \end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0$, $f(0+0)=+\infty$,

$\therefore x=0$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

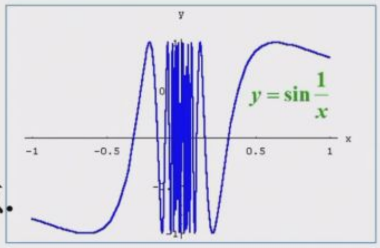


例 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为的振荡间断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

★ 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

★ $f(x)=\begin{cases}x, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$

仅在x=0处连续, 其余各点处处间断.

∞通过分子分母同除变成0处理

例：分析下列函数的间断点及其类型.

$$(1)\ f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} \qquad (2)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}.$$

解：(1) $\because$ 初等函数在定义域内为连续函数，

$\therefore$ 只要考虑 $x=0$ 处即可

易知 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，有 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=1.$ $\quad\therefore x=0$ 处为跳跃间断点.

解:(2) 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ x^2-2x, & |x|<1\\ 1, & x=-1\\ 0, & x=1\end{cases}.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1;\qquad \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=3;$

$\therefore \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1;\qquad \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1.$

$\therefore x=-1,1$ 均为跳跃间断点.

- 三、连续函数的性质

二、 连续函数的局部性质

1、连续函数的四则运算

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则$f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

2、反函数与复合函数的连续性

定理(反函数的连续性) 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如, $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续,

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=arc\cot x$ 在$[-\infty,+\infty]$上单调且连续.

反三角函数在其定义域内连续.

定理(复合函数的连续性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,函数$f(u)$在点$u=u_0$连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

证 $\because f(u)$在点 $u=u_0$连续,

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \eta>0$, 使当$|u-u_0|<\eta$时,

恒有$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$成立.

又$\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,

对于$\eta>0$, $\exists\ \delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时,

下结论需记

意义 1.极限符号可以与函数符号互换;

2.变量代换($u=\varphi(x)$)的理论依据.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$$

即 : $x\sim\ln(1+x)\quad x\to 0.$

用好变量代换

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.　　即 : $x \sim e^x - 1 \quad x \to 0.$

解：令 $e^x - 1 = y$,　则 $x = \ln(1+y)$,

当$x \to 0$时, $y \to 0$.

$$原式 = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = 1.$$

同理可得: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x} = \ln a.$

即 : $x\ln a \sim a^x - 1 \quad x \to 0.$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

三、初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu\log_a x} \Longrightarrow y = a^{u},\quad u = \mu\log_a x.$

在$(0,+\infty)$内连续，　讨论μ不同值，

(均在其定义域内连续)

定理5　基本初等函数在定义域内是连续的.

定理6　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

例

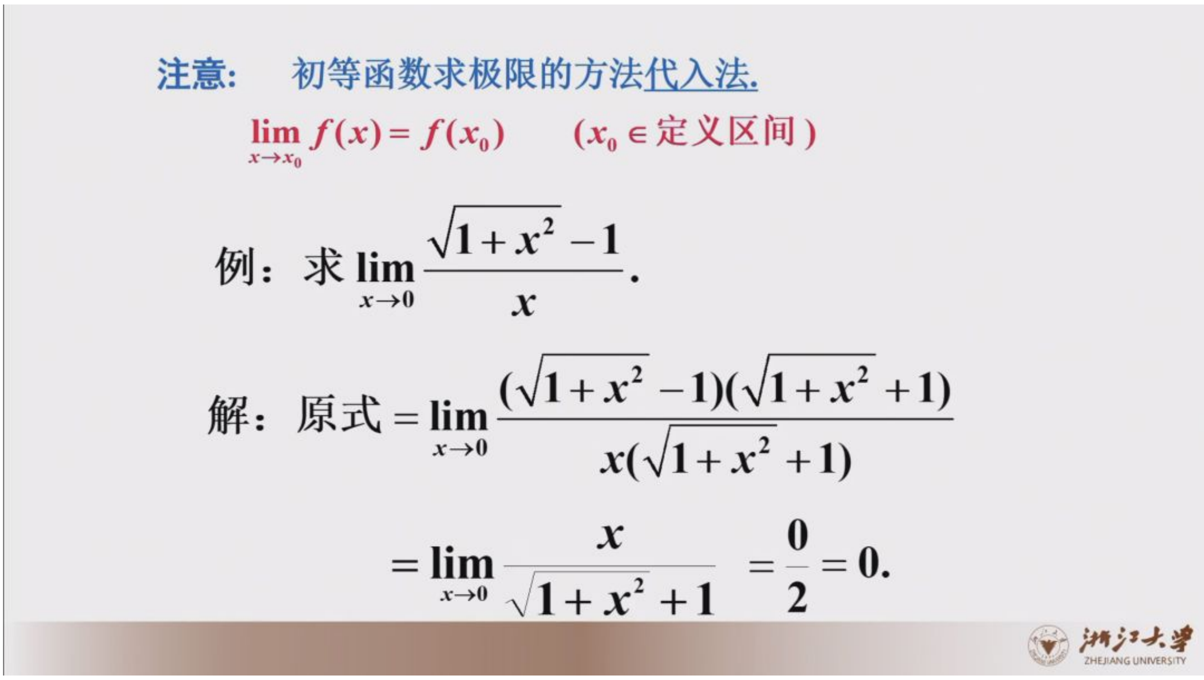
例：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{a}-1}{x}$$(a\neq 0$为常数$)$.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}=a.$$

即，当$x\to 0$时，$ax\sim(1+x)^{a}-1.$

代入法：适用于$x\to x_0$的情况



幂指函数 **法一：直接代入法二：恒等变换化e为底法三：化ln()=e的常用极限分母无穷小，比值为常数，分子也是无穷小**

- 四对无理式也存在**注意：四只能在x→∞时使用，且极限是＋∞还是-∞需根据分式判断**
- 三、闭区间上连续函数的性质
  - 1.最大值最小值定理
  - 2.介值定理**思路都是将证明可取的值化到m与M之间**