微积分（第五章）

三、定积分的计算方法

- 一、换元积分法
  - 1.换元公式

定理 假设

（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数；

（3）当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，

则 有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

证 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$,

$\because \Phi(t)=F[\varphi(t)]$， $\Phi'(t)=\dfrac{dF}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$,

$\therefore \Phi(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数.

$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$， $\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$,

$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$,

- 2.注意

应用换元公式时应注意:

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

- 3.例题**凑微分法**

例 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

解 $\because f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

例　计算 $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解　原式 $\displaystyle=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}}=2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$=2\left[\arcsin(\sqrt{\ln x})\right]_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}.$$

变量代换法

例　计算 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx.\quad (a>0)$

解　令 $x=a\sin t,\qquad dx=a\cos t dt,$

$$x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\qquad x=0\Rightarrow t=0,$$

原式 $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}dt$ 凑分母导数

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln|\sin t+\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

sinx与cosx互补

例　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx.$

解　由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$, 设 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$,

则 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$,

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=0.$$

故得 $2I=\frac{\pi}{2}$,

- 4.奇偶性运用

例　当 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，且有

①$f(x)$为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx;$$

②$f(x)$为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt,$$

① $f(x)$为偶函数，则 $f(-t) = f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(t)dt;$$

② $f(x)$为奇函数，则 $f(-t) = -f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

- 5.例题

例　计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解　原式 $\displaystyle= \int_{-1}^{1} \underbrace{\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}}_{\text{偶函数}}dx + \int_{-1}^{1} \underbrace{\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}}_{\text{奇函数}}dx$

$$= 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$= 4\int_{0}^{1} (1-\sqrt{1-x^2})dx = 4 - \underbrace{\boxed{4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx}}_{\text{单位圆的面积}}$$

$$= 4 - \pi.$$

例 求 $\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases}x^2, & |x|\le 1\\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1\end{cases}$ **是偶函数,**

$$原式=2\int_0^2\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx$$

- 5.奇偶性的一般结论

例 当 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，且有

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

证: $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$,

$\because \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，

$$\therefore \int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)+f(-x)}{2}dx+\int_{-a}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{2}dx$$

$$=2\int_0^a\frac{f(x)+f(-x)}{2}dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

例：求 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx.$

解 $\because \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上既不是奇函数，也不是偶函数，但

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\sin^2(-x)}{1+e^{-(-x)}}]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\sin^2 x}{1+e^x}]dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{24}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

- 6.两个常用结论注意(1)积分变量范围是0到π/2，(2)积分变量范围是0到π

例　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证　(1) 设 $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$, $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

(2) 设 $x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt$, $x=0 \Rightarrow t=\pi$, $x=\pi \Rightarrow t=0$,

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

- 二、分部积分法

- 1.分部积分公式

设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$.

定积分的分部积分公式

推导 $(uv)' = u'v + uv'$, $\int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b$,

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx,$$

$$\therefore \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

- 2.例题

例 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$,

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}dx \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x) - \ln(2+x)\right]_0^1$$

例 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx.$

解: 因为$\frac{\sin t}{t}$没有初等形式的原函数,无法直接求出$f(x)$，所以采用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2) = \frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x) = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$\because f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt, \quad f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0, \quad f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1$$

例：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)$，

试证：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解： **右端** $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ **分部积分**

$=\frac{1}{2}[(x-a)(x-b)f'(x)]\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$ **再次分部积分**

$=-\frac{1}{2}[(2x-a-b)f(x)]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **= 左端**

例：设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\int_0^1 [1+xf'(x)]e^{f(x)}dx.$

解：$\because \int_0^1 xf'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1 xe^{f(x)}df(x)$

$=\int_0^1 xde^{f(x)} \quad = xe^{f(x)}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{f(x)}dx$

故 $\int_0^1 [1+xf'(x)]e^{f(x)}dx= \quad xe^{f(x)}\Big|_0^1=e^{f(1)}$

- 3.一个常用结论

证明定积分公式 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数}\end{cases}$$

即

n为正偶数，

$$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

n为正奇数，

$$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

由分部积分法

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

积分 I_n 关于下标的递推公式

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}\quad \cdots\cdots,$$

直到下标减到0或1为止

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,\quad (m=1,2,\cdots)$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1,$$

于是

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

- 4.例题：*双阶乘：若n为奇数，n!!=n(n-2)...5×3×1;若n为偶数，n!!=n(n-2)...6×4×2*

例：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{(6-1)!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

例：计算 $\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x$， $n \in Z^+$.

解：令 $x = \sin t$，则 $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$，

且 $x: 0 \to 1$时，$t: 0 \to \frac{\pi}{2}$，故

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

必须化成0到π/2上求积分

例：计算 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $x=2\sin t$，则 $\mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$，

且 $x: 0\to 2$ 时，$t: 0\to \frac{\pi}{2}$，故

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$=16\cdot\frac{(2-1)!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-16\cdot\frac{(4-1)!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

- 5.周期函数的积分

例：设 $f(x)\in R((-\infty,+\infty))$，且以$T$为周期．证明：

$$\forall a\in R，有 \int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解：因为 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$，

故令$x=t+T$，则$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，且$x:T\to a+T$ 时，$t:0\to a$，从而

$$\int_T^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

于是 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，试证：对任意 x有

$$\int_a^{a+nT}f(t)dt=n\int_0^T f(t)dt.$$

- 6.奇偶函数的积分

例：若$f(t)$是连续函数且为奇函数，证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数；

若$f(t)$是连续函数且为偶函数，证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是奇函数；

证明：令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，若$f(t)$为奇函数,则$f(-t)=-f(t)$,从而

$$F(-x)=\int_o^{-x} f(t)dt \overset{u=-t}{\underset{dt=-du}{=}} -\int_0^x f(-u)du = \int_0^x f(u)du = F(x)$$

所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数.

若$f(t)$为偶函数,则$f(-t)=f(t)$,从而

$$F(-x)=\int_o^{-x} f(t)dt \overset{u=-t}{\underset{dt=-du}{=}} -\int_0^x f(-u)du = -\int_0^x f(u)du = -F(x)$$