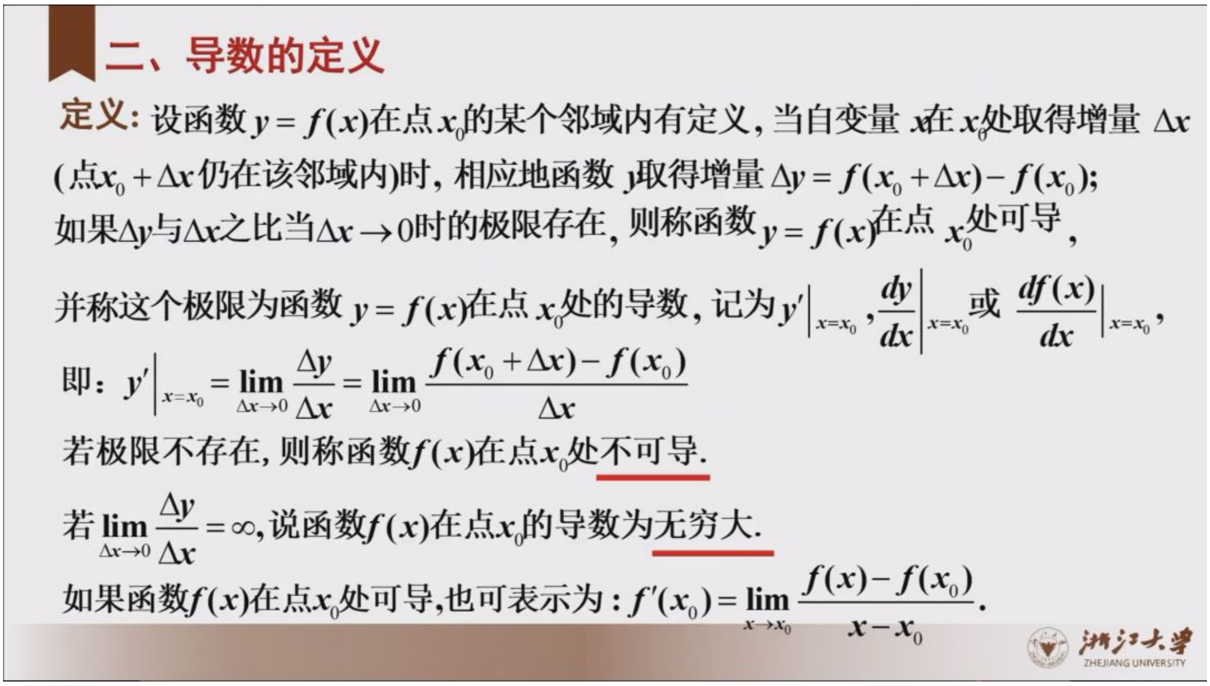
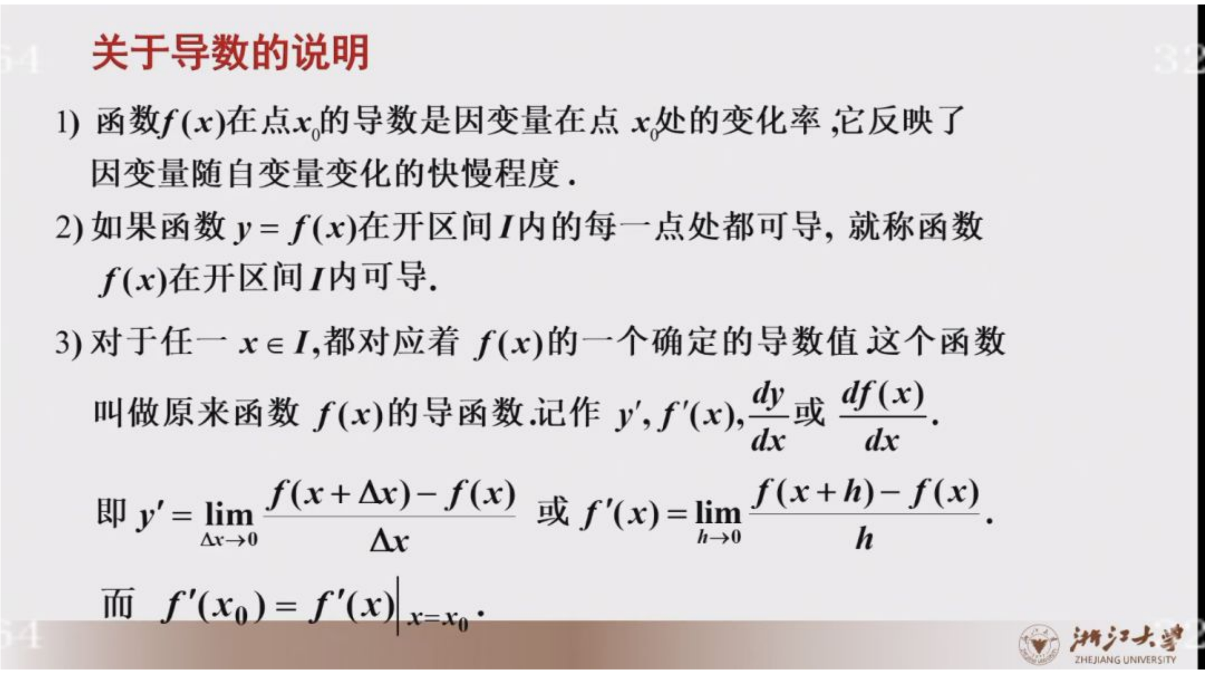
微积分（第二章）

一、导数

- 一、导数的定义





4) 单侧导数

左导数：$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

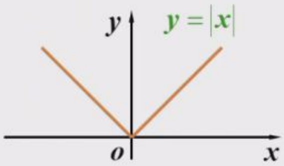
右导数：$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

5) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

例：讨论函数 $f(x) = |x|$ 在$x = 0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

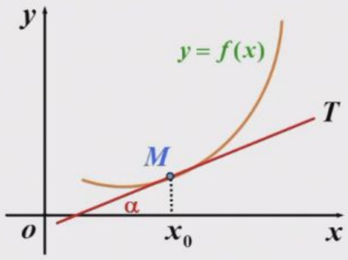
即 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$,

三、导数的几何意义与物理意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$ 在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

四、由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

例 求函数 $f(x)=C$ (C为常数) 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0.$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

同理可证 $(\cos x)'=-\sin x.$

例 求函数 $y=x^n$（n为正整数）的导数.

解 $$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}.$

更一般地 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.\quad (\mu\in R)$

例如，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例　求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$(a^x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$

$=a^x\ln a.$

即　$(a^x)'=a^x\ln a.$　　$(e^x)'=e^x.$

例　求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{h\to 0}\log_a(1+\dfrac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\dfrac{1}{x}\log_a e.$

即　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e.$　特别地　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

五、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)$$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

注意: 该定理的逆定理不成立 (连续函数未必可导).

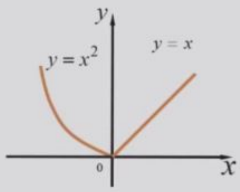
该定理的逆否定理成立. 即: 不连续函数必不可导.

举例:

1. 函数 $f(x)$ 连续, 若 $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点, 函数在角点不可导.

例如,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases},$$



在 $x=0$ 处不可导, $x=0$ 为 $f(x)$ 的角点.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但

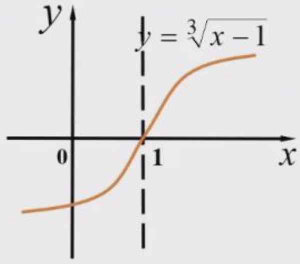
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数.(不可导)

例如，

$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$,

在 $x = 1$ 处不可导.



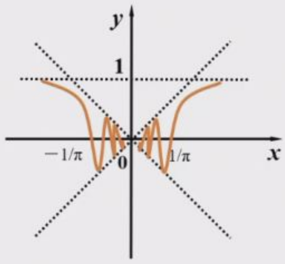
3. 函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在（指摆动不定），则 x_0 点不可导.

例如，

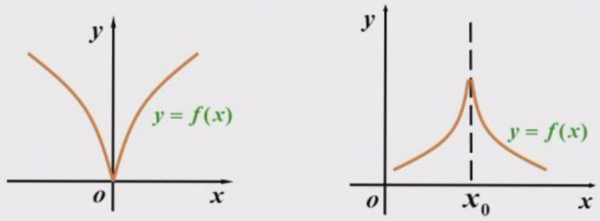
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

在 $x = 0$ 处不可导.

振荡点



4. 若$f'(x_0)=\infty$，且在点x_0的两个单侧导数符号相反，则称点x_0为函数$f(x)$的尖点(不可导点)．



浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

3230101964

例 讨论 $y=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\quad (n\in Z^+)$

在点 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解 $\because\ |\sin\dfrac{1}{x}|\le 1,\quad \lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0(n\in Z^+)$

又 $y|_{x=0}=0$

$\therefore$ 当 $n\in N$ 时，函数在在点 $x=0$ 处连续.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

当 $n=1$ 时,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}\quad \text{不存在,}$$

故 $n=1$ 时，函数在 $x=0$ 处不可导.

当 $n>1$ 时,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{n}\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

故 $n>1$时，函数在 $x=0$ 处可导. 其导数为 $y'|_{x=0}=0$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例 设 $y=\begin{cases} a+bx, & x\le 0 \\ e^{-x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导,

求 a, b 之值.

解 $\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0)=a$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=1$, 故 $a=1$.

由可导性：

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+b\Delta x)-1}{\Delta x}=b$$

故 $b=-1$，此时函数为

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

- 二、导数的四则运算

六、导数的四则运算

定理 如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点 x 处也可导，并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$.

特别地：$\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$

推论

(1) $[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$; (2) $[Cf(x)]' = Cf'(x)$;

(3) $$[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x);$$

求

tanx的导数

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right);$$

cotx，secx，cscx的导数

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad (x \neq k\pi);$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x \quad (x \neq k\pi).$$

分段

函数分段点用定义求导

例 求函数 $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\ge 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ 的导数.

解：$x>0 \quad f'(x)=(xe^x)'=e^x+xe^x$

$x<0 \quad f'(x)=(x)'=1$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x-0}{x}=1$$

$f'(0)=1$

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+xe^x, & x\ge 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$$

浙江大学

- 三、反函数和复合函数

三、反函数的求导法则

定理 2.5 设 $y=f(x)$ 为函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域内连续、严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0(x_0=\varphi(y_0))$ 可导，且

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)} \quad 或 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}}.}$$

ψ'(y_0)的自变量必须还是y

证 给 x_0 以改变量 $\Delta x\neq 0$，由于 $\varphi(y)$ 严格单调，所以 $y=f(x)$ 也严格单调，从而可知 $\Delta y\neq 0$. 由 $\varphi(y)$ 在 y_0 处连续，知 $f(x)$ 在 x_0 处也连续，因此 $\Delta x\to 0$ 等价于 $\Delta y\to 0$. 又 $\varphi'(y_0)\neq 0$，故

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

或

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}}. \quad \square$$

反三角函数的导数

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).}$$

同理可证

$$\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).}$$

$$\boxed{(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R}.}$$

同理可证

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R}.}$$

双曲

在工程技术中经常要用到双曲函数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ (\text{双曲正弦}),\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ (\text{双曲余弦}),$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ (\text{双曲正切}),\qquad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ (\text{双曲余切}).$$

由求导公式可得 $(\sinh x)'=\cosh x$，$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

函数

综上**正弦、正切、正割等都为+，余弦、余切、余割等都为-**

$(\sin x)'=\cos x$, $\qquad (\cos x)'=-\sin x$,

$(\tan x)'=\sec^2 x$, $\qquad (\cot x)=-\csc^2 x$,

$(\sec x)'=\sec x\tan x$, $\qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$,

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad (\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,

二、复合函数的求导法则

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即：因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

证 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

故 $\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

(当$\Delta u=0$时，补充定义$\alpha=0$且满足上面的等式.)

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

推广 设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$,

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

例 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because\ y=\ln u,\ u=\sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

例：

太复杂先化简

例 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because\ y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

例 求函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数。

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})')$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

下结论需记

例 证明：$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$，$(x\neq 0)$

证 $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

当 $x>0$ 时，$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

当 $x<0$ 时，$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}(-x)'=\dfrac{1}{x}$

综上所述，$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$，$(x\neq 0)$.

例 $y=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$，求$y'$

解 $y'=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2\pm a^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$(\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

结论

1：奇偶性

例：证明：在$(-a,a)$内可导的奇函数的导数是偶函数；偶函数的导数是奇函数。

证 设$f(x)$为$(-a,a)$内的偶函数，则$f(-x)=f(x)$.

$\because$ $(f(-x))'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)$

而 $f(x)=f(-x)$

$\therefore$ $f'(x)=(f(-x))' \Longrightarrow f'(x)=-f'(-x)$

即偶函数的导数是奇函数.

同理可证，奇函数的导数是偶函数.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

结论

2：周期性

证明：可导的周期函数仍然是周期函数.

并问：是否具有相同的周期.

证明：由于$f(x)$为可导的周期函数，设周期为T，$f(x+T)=f(x)$.

$$f'(x+\mathrm{T})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\mathrm{T}+\Delta x)-f(x+\mathrm{T})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

$\therefore f'(x)$仍为周期函数.且周期为T.

- 四、隐函数求导

创作于 Effie

三、隐函数的导数

定义： 设在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任意值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

$y=f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \Longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

。

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导，然后，从这个式子中解出 y'.

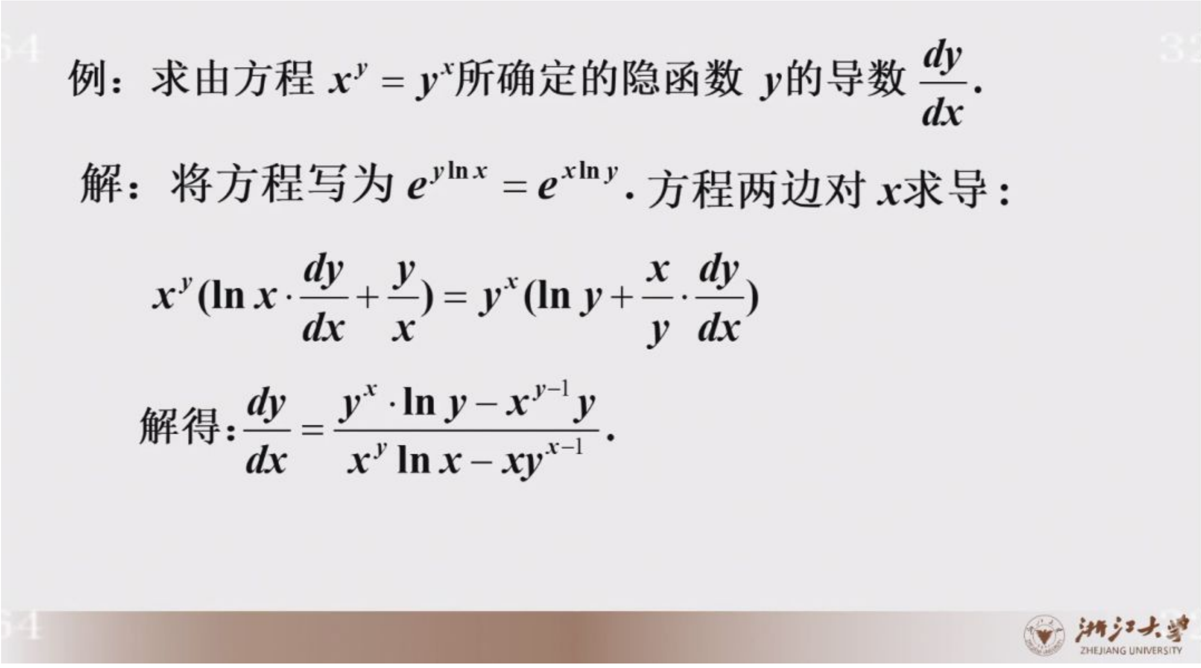
例：求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

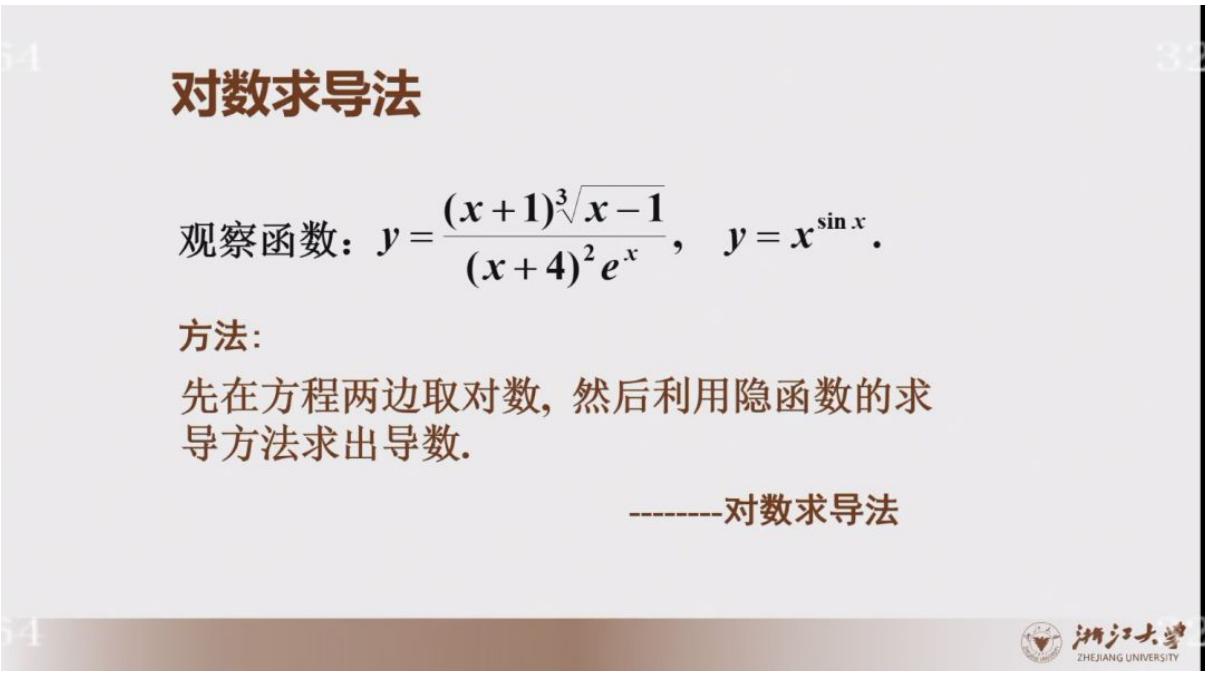
解：方程两边对 x 求导：$y+x\dfrac{dy}{dx}-e^x+e^y\dfrac{dy}{dx}=0$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}$，由原方程知 $x=0, y=0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{e^x-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

例：幂指函数


例：求由方程 $x^y = y^x$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$.
解：将方程写为 $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$. 方程两边对 x 求导：
$x^y(\ln x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}) = y^x(\ln y + \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx})$
解得：$\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \cdot \ln y - x^{y-1}y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$.
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY


对数求导法
观察函数：$y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$， $y = x^{\sin x}$.
方法:
先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.
--------对数求导法
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

幂指函数：

解二：将函数$y=(1+x^2)^x$两边取自然对数

$$\ln y = x\cdot\ln(1+x^2)$$

两边对x求导，由链导法有

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}\cdot 2x$$

$$= \ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\therefore y' = (1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

复杂的分式函数：*对于ln无意义的情况，不做考虑*

例 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求$y'$.

解 等式两边取对数得

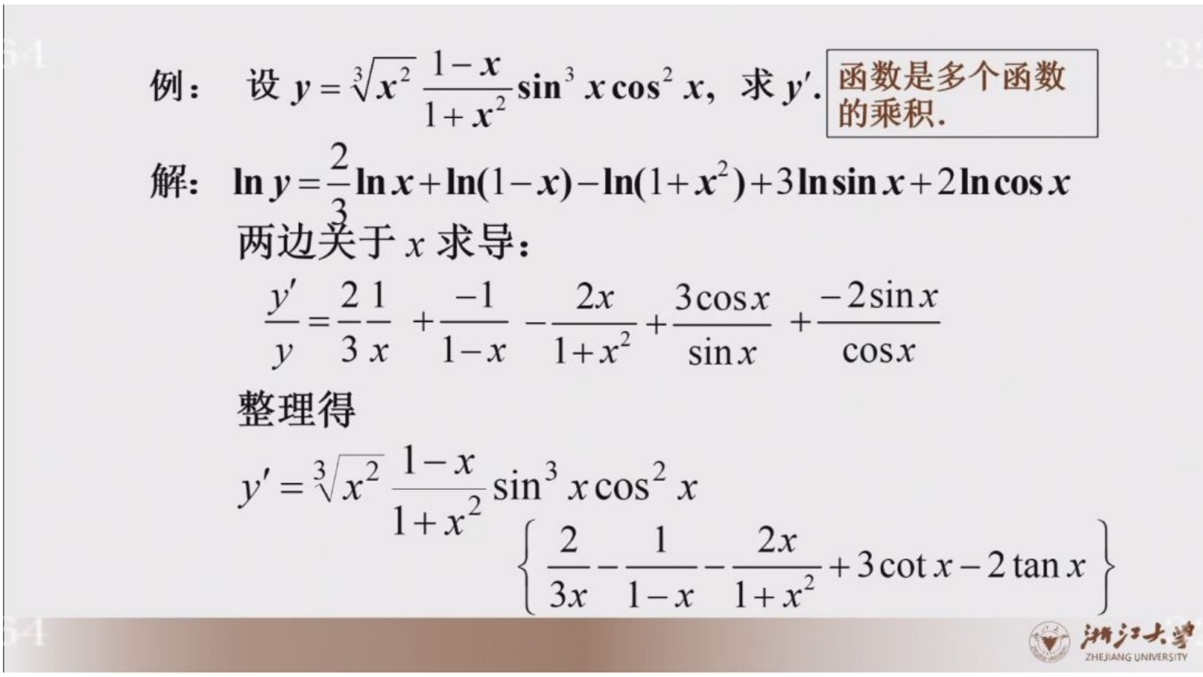
$$\ln y = \ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对x求导得

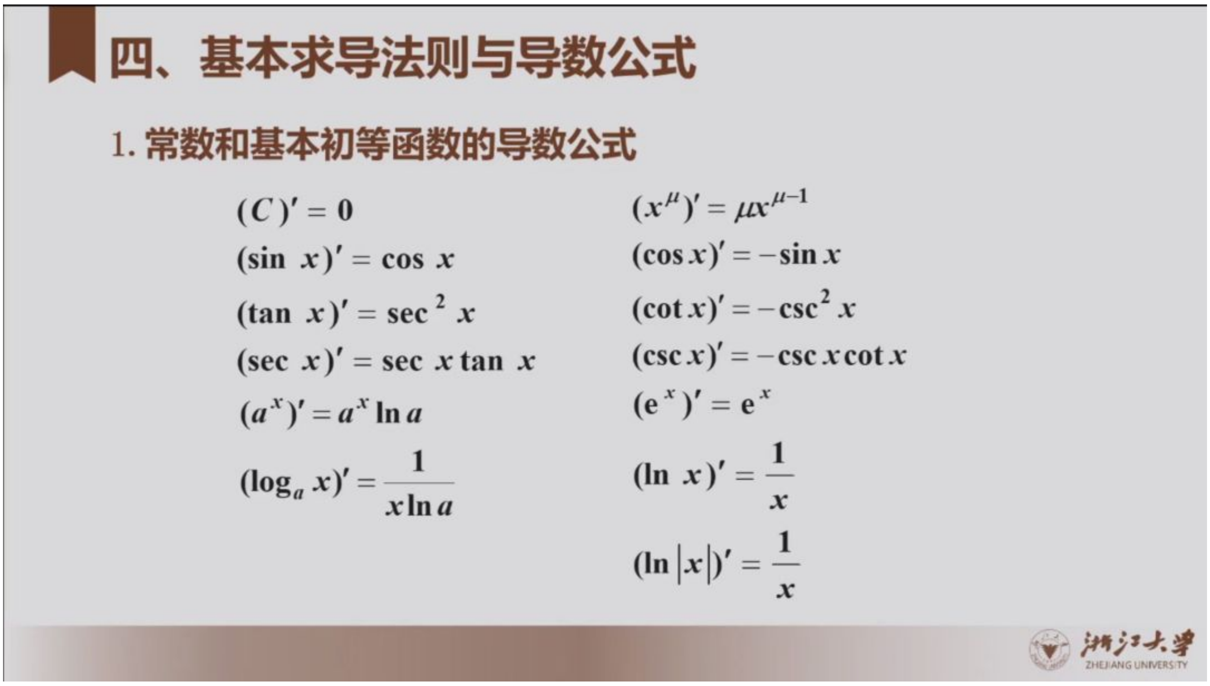
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y' = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

多个函数乘积：


例： 设 $y=\sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$，求 y'.
函数是多个函数的乘积.
解： $\ln y=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x$
两边关于 x 求导：
$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\frac{1}{x}+\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3\cos x}{\sin x}+\frac{-2\sin x}{\cos x}$
整理得
$y'=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x\left\{\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\cot x-2\tan x\right\}$
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

- 五、总结


四、基本求导法则与导数公式
1. 常数和基本初等函数的导数公式
$(C)'=0$
$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$
$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(e^x)'=e^x$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 都可导，则

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$，（2）$(cu)' = cu'$（C是常数）

（3）$(uv)' = u'v + uv'$，（4）$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$.

5. 隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导，然后，从这个式子中解出 y'.

6. 对数求导法

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

- 六、高阶导数

一、高阶导数的定义

问题：变速直线运动的加速度.

设 $s=f(t)$，则瞬时速度为 $v(t)=f'(t)$

$\because$ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t)=v'(t)=[f'(t)]'$.

定义：如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，即

$$(f'(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作 $f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

。

二阶导数的导数称为三阶导数，$f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数，$f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \frac{d^4y}{dx^4}$.

一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作：$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}$ 或 $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地，$f(x)$ 称为零阶导数；$f'(x)$ 称为一阶导数.

一个函数的导函数不一定再可导，也不一定连续。如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数 $f^{(n)}(x)$，且 $f^{(n)}(x)$ 仍是连续的（此时低于 n 阶的导数均连续），则称 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶连续可导，记为 $f(x)\in C^n(\mathrm{I})$ 或 $f(x)\in C^n$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 上的任意阶的高阶导数均存在且连续，则称函数 $f(x)$ 是无穷次连续可导的，记为 $f(x)\in C^{\infty}(\mathrm{I})$ 或 $f(x)\in C^{\infty}$.

- *n 不是整数也可以* **不硬记，求导前先问：一阶导提不提-1，有没有系数，x降不降幂**

二、部分基本初等函数的高阶导数

1. 幂函数 $y=x^n,\ n\in Z^+$ 的高阶导数.

$$y'=(x^n)'=nx^{n-1}\qquad y''=(y')'=(nx^{n-1})'=n(n-1)x^{n-2}$$

$$y'''=(y'')'=n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ \cdots\cdots$$

$$y^{(k)}=(y^{(k-1)})'=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\quad(1\le k\le n)$$

特别 $k=n$ 时 $(x^n)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$

从而，当 $k\ge n+1$ 时，$(x^n)^{(k)}=0$.

$(x^n)^k=A_n^k x^{n-k}$

即：$(x^n)^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\quad(1\le k\le n)$

$[(1+x)^n]^{(k)}=A_n^k(1+x)^{n-k}$

同理：$[(1+x)^n]^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}.\quad(1\le k\le n)$

同理：$[(ax+b)^n]^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)a^k(ax+b)^{n-k}.\quad(1\le k\le n)$

$[(ax+b)^n]^{(k)}=A_n^k a^k(ax+b)^{n-k}$

2. 对数函数$y=\ln x$ 的高阶导数.

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}=(-1)^{1-1}(1-1)!\,x^{-1}$$

$$y''=(-1)x^{-2}=(-1)^{2-1}x^{-2}=(-1)^{2-1}(2-1)!\,x^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)x^{-3}=(-1)^{3-1}(3-1)!\,x^{-3}$$

设 $y^{(k)}=(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$

则 $y^{(k+1)}=(-1)^{k-1}(k-1)!(-k)x^{-k-1}$

$$=(-1)^{(k+1)-1}[(k+1)-1]!\,x^{-(k+1)}$$

故由数学归纳法得

$$y^{n}=(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\qquad(n\in N)$$

类似地, 有 $(\ln(x+1))^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}\qquad(n\in N)$

$$(\ln(ax+b))^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^{n}(ax+b)^{-n}\qquad(n\in N)$$

例：求 $y=\frac{1}{x}$ 的高阶导数.

解：$\because\ y=\frac{1}{x}=(\ln x)'$

$$\therefore\ y^{(n)}=((\ln x)')^{(n)}=(\ln x)^{(n+1)}$$

$$=(-1)^{(n+1)-1}[(n+1)-1]!\,x^{-(n+1)}=(-1)^{n}n!\,x^{-(n+1)}$$

即：$(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)^{n}n!\,x^{-(n+1)}\qquad(n\in N)$

类似地, 有 $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^{n}n!\,a^{n}(ax+b)^{-(n+1)}$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

3.指数函数 $y=a^x$ 的高阶导数.

$$y'=a^x\ln a$$

$$y''=(y')'=(a^x\ln a)'=a^x(\ln a)^2$$

....

$$y^{(k)}=a^x(\ln a)^k$$

运用数学归纳法可得

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n \quad (n\in N)$$

特别地，$(e^x)^{(n)}=e^x \quad (n\in N)$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

4. $y=\sin x$，$y=\cos x$ **的高阶导数.**

$$y=\sin x \qquad y'=\cos x=\sin(x+1\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

....

运用数学归纳法可以证得

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (n\in Z^+)$$

类似地, 可求得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (n\in Z^+)$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

三、高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数，则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

它的系数与二项式$(u+v)^n$展开式的系数相同

- **法1：若u或v的n阶以后导数为0，可用（3）**

例： 设 $y = x^2 e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$，则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$
$$+\frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$
$$= 2^{20}e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$
$$+\frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$
$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$$

法2：化和差*必须化成已知的基本形式的组合，否则特别复杂* **法3：数学归纳法法4：化成隐函数**

- **利用微分和导数的关系**