微积分（第五章）

二、定积分的性质和基本定理

- 一、基本性质
  - 性质1：

性质 1： $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx = b - a.$

  - 性质2：线性运算

性质 2 (线性运算法则)

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

式中, α、β 为常数.

证：　由定积分定义及极限运算性质：

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i) \pm \beta g(\xi_i)]\Delta x_i$$

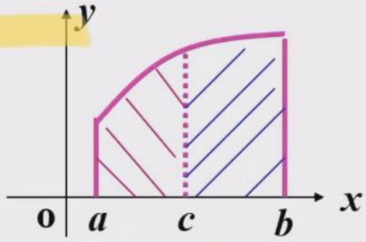
$$= \alpha \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \beta \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- 性质3：区间可加

性质3(对区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



证： a,b,c 的位置，由排列知有六种顺序.

(1)若 $a<c<b$

$f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上可积.

选择适当的分法T，使点c成为分点，则

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

取$\|\Delta x\|\to 0$ 的极限，由可积性即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2)若 $a<b<c$ ，由(1)知

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

其他情况类似可证.

- 性质4：保号

性质4（保号性） 如果在区间$[a,b]$上连续，$f(x)\ge 0$，

则$\int_a^b f(x)dx \ge 0$． $(a<b)$

证 $\because f(x)\ge 0$，$\therefore f(\xi_i)\ge 0$，$(i=1,2,\cdots,n)$

$\because \Delta x_i \ge 0$，$\therefore \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$，

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

性质6：

如果$f(x)$在$[a, b]$上连续，$f(x)\ge 0$且$f(x)\not\equiv 0$，则$\int_a^b f(x)dx > 0$

证：$\because f(x)\not\equiv 0$，$x\in[a,b]$，则至少$\exists x_0\in[a,b]$使

$f(x_0)>0$，由$f(x)\in C([a,b])$，$\exists U(x_0)$，使

$$f(x)>0 \quad x\in U(x_0).$$

取$[\alpha,\beta]\subset U(x_0)$，则$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0$．

又$\int_a^\alpha f(x)\,dx\ge 0$，$\int_\beta^b f(x)\,dx\ge 0$，故

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx > 0.$$

- 性质4'：不等式性质

性质6的推论

如果$f(x), g(x)$在$[a, b]$上连续，$f(x) \ge g(x)$ 且$f(x) \not\equiv g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

例 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0}(e^x - x)dx > 0,$

- 性质7：

性质7（性质5的推论）

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \quad (a < b)$$

证 $\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$\therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$

即$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

- 性质8：最大最小

性质8 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证 $\because\ m \le f(x) \le M,$

$$\therefore\ \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

- 性质9：定积分中值定理

性质9（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).\quad (a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

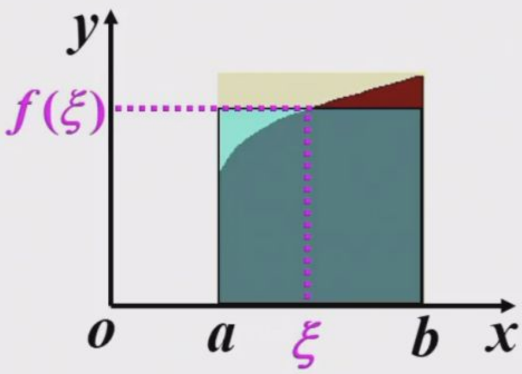
$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使 $$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y = f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

- 二、定理应用

- **1.求定积分极限：定积分中值定理**

例:设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$.

解　由积分中值定理知有 $\xi\in[x,x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

例：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)$.

证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.

证：设 $F(x)=xf(x)$，由积分中值定理，在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上存在一点 C 使得

$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot C\cdot f(C)\cdot(\frac{1}{2}-0)=C\cdot f(C)=F(C)$.　$(0\le C\le\frac{1}{2}<1)$

由已知条件知 $2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)=1\cdot f(1)=F(1)$.

即在区间 $[C,1]$ 上函数 $F(x)=xf(x)$ 连续，在 $(C,1)$ 内可导，且 $F(C)=F(1)$.

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(C,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$.

而 $F'(x)=xf'(x)+f(x)$，即有 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

- 2.推广的积分中值定理

例：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

——推广的积分中值定理

证:(1)当$g(x)\equiv 0, x\in[a,b]$时，$\int_a^b g(x)dx=0, \int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)\cdot 0dx=0$

此时ξ可以是$[a,b]$上任意一个值，都有$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx=0.$

(2)当$g(x)\neq 0$，由$g(x)$不变号，必有对每一个$x\in[a,b]$，或者$g(x)$都大于零或者都小于零. 不妨设$x\in[a,b]$时，$g(x)>0.$

$$m\le f(x)\le M \Rightarrow mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx=\int_a^b mg(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le\int_a^b Mg(x)dx=M\int_a^b g(x)dx$$

由于$\int_a^b g(x)dx>0$，得：$m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$

故至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi).$

即$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

- 三、微积分基本定理
  - 1.积分上限函数及其导数

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且设 x 为$[a,b]$上的一点，考察定积分

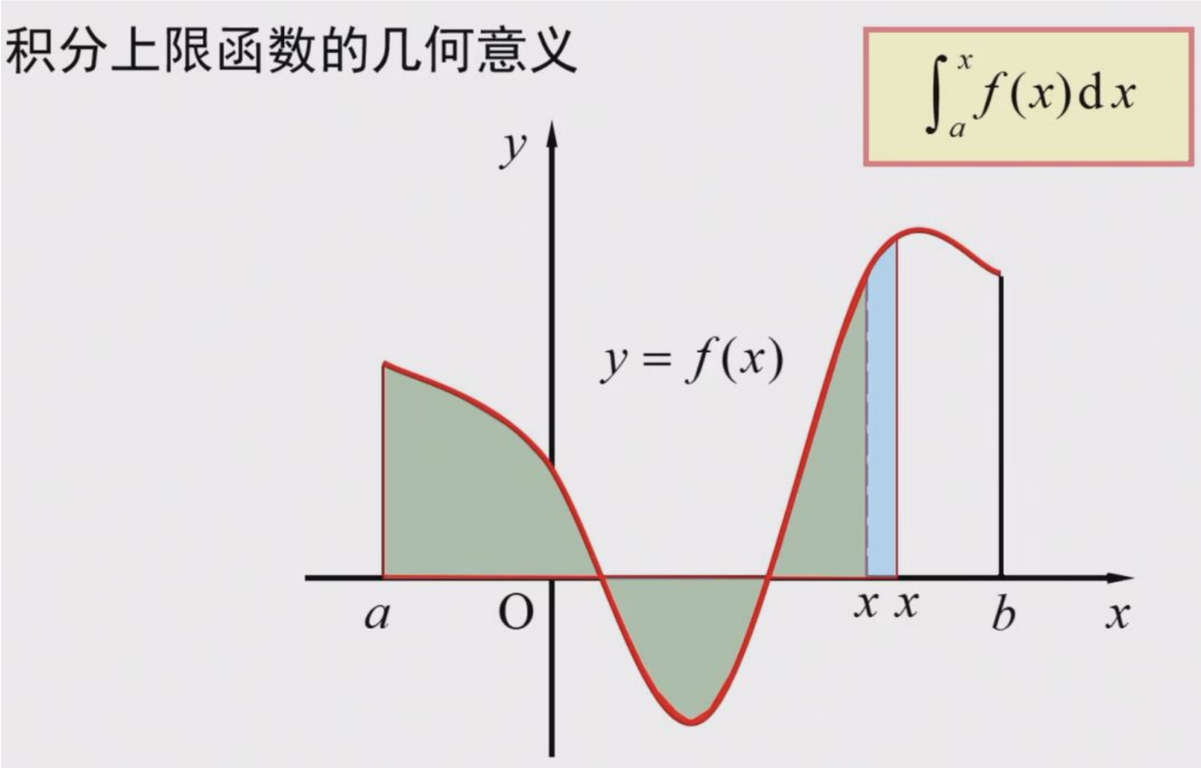
$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt$$

如果上限x在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$

积分上限函数(变上限函数)

- 2.几何意义



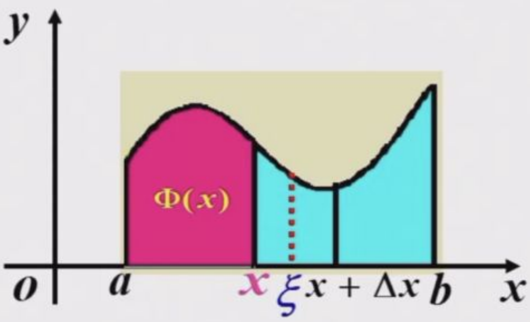
- 3.微积分基本定理

定理 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

由积分中值定理得



$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad \xi \in [x, x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

$$\Delta x \to 0, \xi \to x \qquad \therefore \quad \Phi'(x) = f(x).$$

- 4.原函数存在定理

定理（原函数存在定理）

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

- 5.基本定理推论

补充： 如果 $f(t)$ 连续，$a(x)$、$b(x)$ 可导，

则 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ 的导数 $F'(x)$ 为

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

证 $F(x)=\left(\int_{a(x)}^{0}+\int_{0}^{b(x)}\right)f(t)dt$

$$=\int_{0}^{b(x)}f(t)dt-\int_{0}^{a(x)}f(t)dt,$$

$$F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

- 6.例题

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解 $\dfrac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt=-\dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}dt,$

$$=-e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' \quad =\sin x\cdot e^{-\cos^2 x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}.$$

- 7.**提出x：x相对积分变量t为常量**

例 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$. 证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

此时把x视为常数，有

$$=\frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$x\int_0^x f(t)dt=\int_0^x xf(t)dt$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$\because f(x)>0,\quad (x>0)\qquad \therefore \int_0^x f(t)dt>0,$

$\because (x-t)f(t)>0,\quad \therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$

$\therefore F'(x)>0\quad (x>0).$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

- 8.**换元：消去被积函数中的x**

例：设$f(x)$连续，$F(x)=\int_0^x f(x+t)\,dt$，计算$F'(x)$.

t的上下限

解：$F(x)=\int_0^x f(x+t)\,dt \overset{令u=x+t}{=\!=\!=\!=} \int_x^{2x} f(u)\,du$ 上下限变成u的上下限

$F'(x)=2f(2x)-f(x)$

当被积函数中出现求~~导~~变量时，x

或利用代数方法将求~~导~~变量提出积分号；x（或放入）

或利用换元积分法将求~~导~~变量放到积分的上、下限. x

例：设$f(x)=\int_0^{x^2}\left(\arctan\sqrt{x^2-t}\right)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x^2-t}\right)dt$,

其中$x>0$，计算极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{\sin^4 x}$.

解：令$\sqrt{x^2-t}=u$，$f(x)=-\int_x^0 \arctan u\cdot\ln(1+u)\cdot 2u\,du$

$$=2\int_0^x u\arctan u\cdot\ln(1+u)\,du$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\sin^4 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\int_0^x u\arctan u\cdot\ln(1+u)\,du}{x^4}\quad\left(\frac{0}{0}型\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\arctan x\cdot\ln(1+x)}{4x^3}=\frac{1}{2}$$

例：设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$（$A$为常数），

讨论$\varphi'(x)$在点$x=0$处的连续性．

设$u=xt$，$t=\frac{1}{x}u\ (x\neq 0)$，$dt=\frac{1}{x}du$，$\varphi(x)=\int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{x}du$

$=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，$x\neq 0$时，$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$

$x=0$时，$\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ $\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ $\therefore \varphi(0)=\int_0^1 f(0)dt=0$

$\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$

$$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,du}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,du}{x^2}$$

不可用洛比达法则
因$f(x)$仅知连续，
可导与否未知

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore \varphi'(x)$在点$x=0$处连续．

- 9.综合

例：若函数 $f(x)$是$[a,b]$上取正值的连续函数，试证明：方程

$$(x-a)\int_a^x f(t)dt=(b-x)\int_x^b f(t)dt$$在区间(a,b)内有唯一实根.

证明：令 $\varphi(x)=(x-a)\int_a^x f(t)dt-(b-x)\int_x^b f(t)dt$

则 $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续可导，$\because f(x)>0,$

有 $\varphi(a)=-(b-a)\int_a^b f(t)dt<0,\quad \varphi(b)=(b-a)\int_a^b f(t)dt>0$

由零值定理：$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi(\xi)=0$

$$\text{而}\varphi'(x)=\int_a^x f(t)dt+(x-a)f(x)+\int_x^b f(t)dt+(b-x)f(x)$$
$$=\int_a^b f(t)dt+(b-a)f(x)\ >0$$

$\therefore \varphi(x)$在$[a,b]\uparrow$ $\varphi(x)$在(a,b)内与x轴最多一个交点.

因此，$\varphi(x)=0$在(a,b)内有唯一零点。得证。

- 四、牛顿莱布尼兹公式
  - 1.定义

定理： 如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证： $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，$\therefore F(x)-\Phi(x)=C$ $x\in[a,b]$

令 $x=a\ \Rightarrow\ F(a)-\Phi(a)=C,$

$\because\ \Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0\Rightarrow\ F(a)=C,$

$\because\ F(x)-\int_a^x f(t)dt=C,\ \therefore\ \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),$

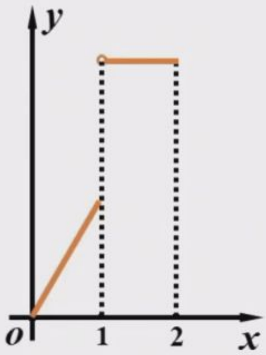
令$x=b\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$ 牛顿—莱布尼茨公式

- 2.例题**分段函数分段求**

例　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

解　原式 $=[2\sin x-\cos x-x]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\frac{\pi}{2}.$

例　设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$



解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

原式 $=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6.$

例：计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

解：
$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\sqrt{2}.$$