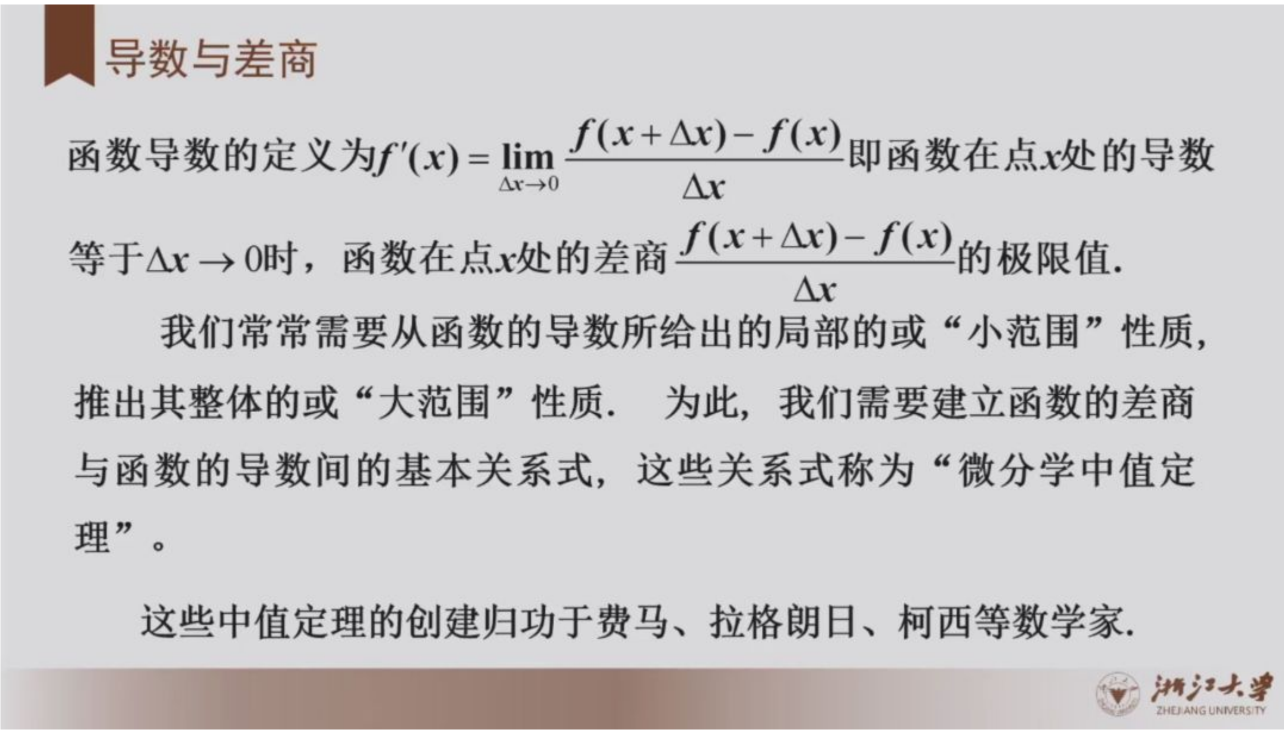
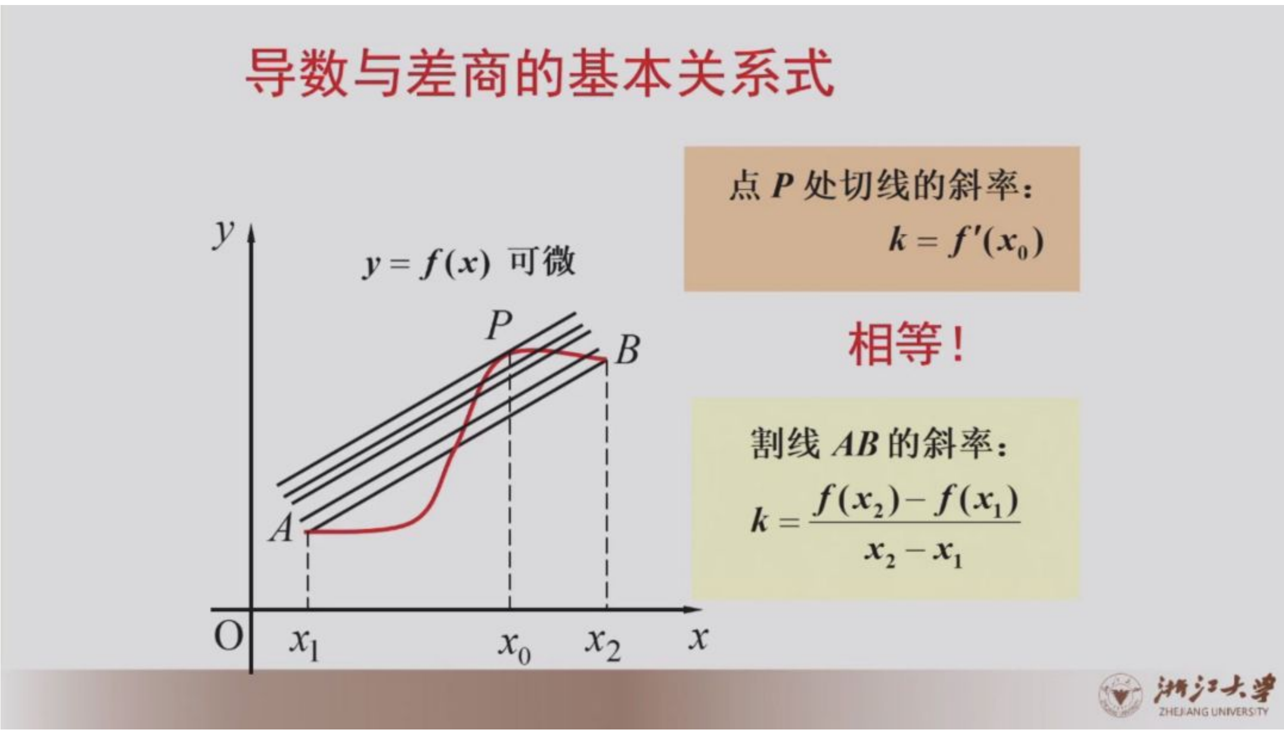
微积分（第三章）

一、微分中值定理

- 一、导数、差商与极值

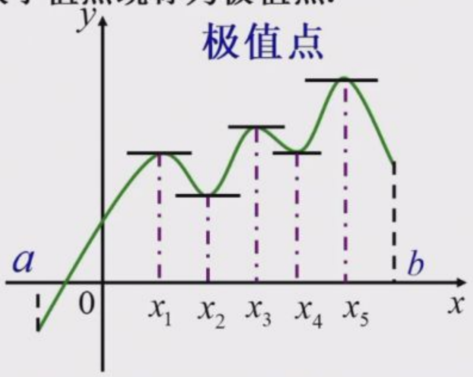




创作于 Effie

极值的定义

定义： 若存在x_0的某邻域$U(x_0,\delta)$，使得对一切$x\in U(x_0,\delta)$，都有$f(x_0)\ge f(x)(f(x_0)\le f(x))$，则称$f(x_0)$为极大值(极小值)，称$x_0$为极大(小)值点，极大值、极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.



极值

x_1，x_3，x_5为极大值点

x_2，x_4为极小值点

$\Downarrow$

$f'(x_i)=0$

$(i=1,2,\cdots 5)$

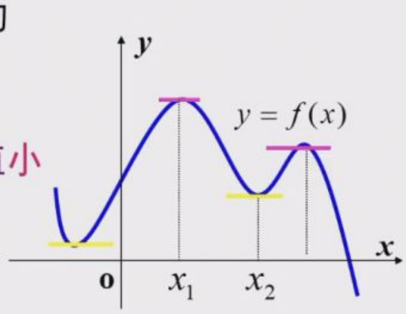
注意：

1) 函数的极值概念是局部性的

2) 函数的极值可能有多个

3) 函数的极大值可能比极小值小

4) 函数的极值不在端点上取



比较：

1) 函数的最值概念是全局性的

2) 函数的最大值（最小值）唯一

3) 函数的最大值大于等于最小值

4) 函数的最值可在端点上取

创作于 Effie

- 二、费马定理：

一、费马(Femat)定理

费马(Femat)定理　设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义,并且在点 $\xi \in$ I 取到极值，$f(x)$ 在点 ξ 可导，则 $f'(\xi)=0$.

证明：设 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，且在 $x=\xi$ 处取极大值 $f(\xi)$,

则有：$f(x) \le f(\xi) \quad x \in \mathrm{U}(\xi,\delta)$

若 $f'(\xi)$ 存在，则

$$f'_+(\xi)=\lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \le 0,$$

$$f'_-(\xi)=\lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \ge 0,$$

于是：$f'(\xi)=0$.　（极小值类似可证）

注意：条件必要而不充分.即导数为零的点未必是极值点.

例：　$y=x^3$, 在 $x=0$ 点导数为零，但不是极值点.

$$\boxed{\text{若} f'(x_0)=0, \text{称点} x_0 \text{为函数} f(x) \text{的驻点.}}$$

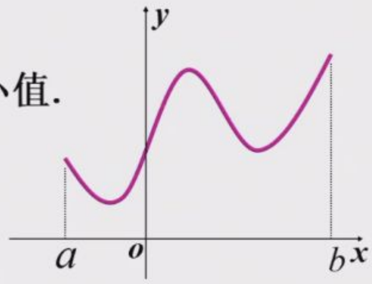
说明：1) 导数不存在的点也可能是函数的极值点.

例：$y=|x|$ 在 $x=0$ 点导数不存在，但有极小值点.

2) 极值点只可能在驻点或导数不存在的点取到。

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，

则必在$[a,b]$上取得最大值、最小值.



说明：

1.函数$f(x)$可能在端点取得最值.

2.若函数$f(x)$在(a,b)内取得最值，

则此点一定是极值点.

结论：

最大值最小值点一定包含在区间端点，区间内部的驻点及区间内部导数不存在点之中。

例：求函数$f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$在$[-2,2]$上得最大、最小值.

解：$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}-x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

令：$f'(x)=0$，　得：$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

当$x=0$，-1，1时，$f'(x)$不存在.

$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt[3]{4}$, $f(0)=1$, $f(\pm1)=1$, $f(\pm2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

函数$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为:$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt[3]{4}$,

最小值为:$f(\pm2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

- 二、罗尔定理

二、罗尔(Rolle)定理

罗尔（Rolle）定理 如果函数$f(x)$ (1) 在闭区间$[a,b]$上连续，(2) 在开区间(a,b)内可导，(3) 且在区间端点的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得函数$f(x)$在该点的导数等于零，

即$f'(\xi)=0$

例如，$f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

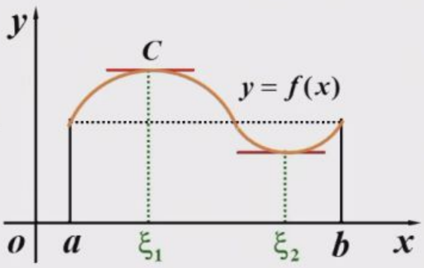
在$[-1,3]$上连续，在$(-1,3)$上可导，且$f(-1)=f(3)=0$,

$\because f'(x)=2(x-1)$，取$\xi=1,\ (1\in(-1,3))$,

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

几何解释：

在曲线弧AB上至少有一点C，在该点处的切线是水平的.



证 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$.　　则 $f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0$.　$\forall\,\xi\in(a,b)$,　都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M\neq m$.　　$\because f(a)=f(b)$,

$\therefore$ 最值不可能同时在端点取得.

设 $M\neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$.

$\therefore$ 由费马定理知：$f'(\xi)=0$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

注意：

- 罗尔定理的三个条件，缺一不可.
- 罗尔定理指出了ξ点的存在性，但不能确定它的位置。

例如，$y=|x|, x\in[-2,2]$ 及 $y=1-\sqrt[3]{x^2}, x\in[-2,2]$.

除不满足条件(2)($f'(0)$不存在)外，满足罗尔定理的一切条件，但在$(-2,2)$内找不到一点能使 $f'(x)=0$.

又例，$y=1-x,\ x\in(0,1],\ f(0)=0$. 不满足条件(1);

$y=x,\ x\in[0,1]$. 不满足条件(3), 罗尔定理结论不成立.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例： 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证： 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$连续,

且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理

$\exists x_0 \in (0,1)$,使 $f(x_0)=0$. 即为方程的小于1的正实根.

设另有 $x_1 \in (0,1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

$\because f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 至少存在一个 ξ (在 x_0, x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x \in (0,1))$ 矛盾, $\therefore$ 只有唯一实根.

推论：

在罗尔定理中，若$f(a)=f(b)=0$，则在(a,b)内必有一点ξ，使方程$f'(\xi)=0$.即方程$f(x)=0$的两个不同实根之间，必存在方程$f'(x)=0$的一个根.

罗尔定理为我们证明方程根的存在性提供了一个途径。

构造更高阶函数

例： 求证 $4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根。

分析：$F(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c$

不符合根的存在定理条件

$F(0)=-(a+b+c),$

$F(1)=4a+3b+2c-a-b-c=3a+2b+c$

证明：设 $F'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c$

$F(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$

$\because F(x)\in C[0,1], F(x)$ 在（0,1）内可导，$F(0)=F(1)=0,$

$\therefore$ 据 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0,$

即：$4a\xi^3+3b\xi^2+2c\xi-a-b-c=0.$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

反证法

例：设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，并且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$.试证：(1)在(a,b)内，$g(x)\neq 0$.

(2)在(a,b)内，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明(1)：用反证法. 假设存在$x_0\in(a,b)$,使$g(x_0)=0$.

$g(x)$在$[a,x_0]$上满足罗尔定理条件，至少存在一点$c_1\in(a,x_0)$,使$g'(c_1)=0$.

$g(x)$在$[x_0,b]$上满足罗尔定理条件，至少存在一点$c_2\in(x_0,b)$,使$g'(c_2)=0$.

$g'(x)$在$[c_1,c_2]$上满足罗尔定理条件，至少存在一点$c\in(c_1,c_2)$,使$g''(c)=0$.

这与对每一个$x\in(a,b)$, $g''(c)\neq 0$相矛盾.

所以假设不成立，即$\forall x\in(a,b)$, $g(x)\neq 0$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

(2)要证$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$成立，由$g(x)\neq 0, g''(x)\neq 0$,只要证

$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$成立.

只要证$f(x)g''(x)-g(x)f''(x)|_{x=\xi}=0$成立.

只要证$\left(f(x)g'(x)-g(x)f'(x)\right)'|_{x=\xi}=0$成立.

设$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$只要证$F'(\xi)=0$成立.

$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$,

由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$成立.

由每一步都可逆，故原等式成立.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

- 三、拉格朗日中值定理

三、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ 成立.

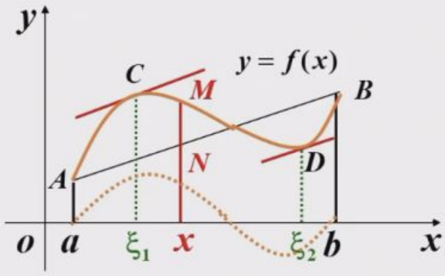
① $f(x)\in C[a,b]$

② $f(x)\in D(a,b)$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



证 分析: 条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.

弦 AB 方程为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

曲线 $f(x)$ 减去弦线 AB,

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)].$$

$F(x)$ 满足罗尔定理的条件 ，

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$ 拉格朗日中值公式

注意: 拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

证法二

证 设$F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)$

$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b)内可导,

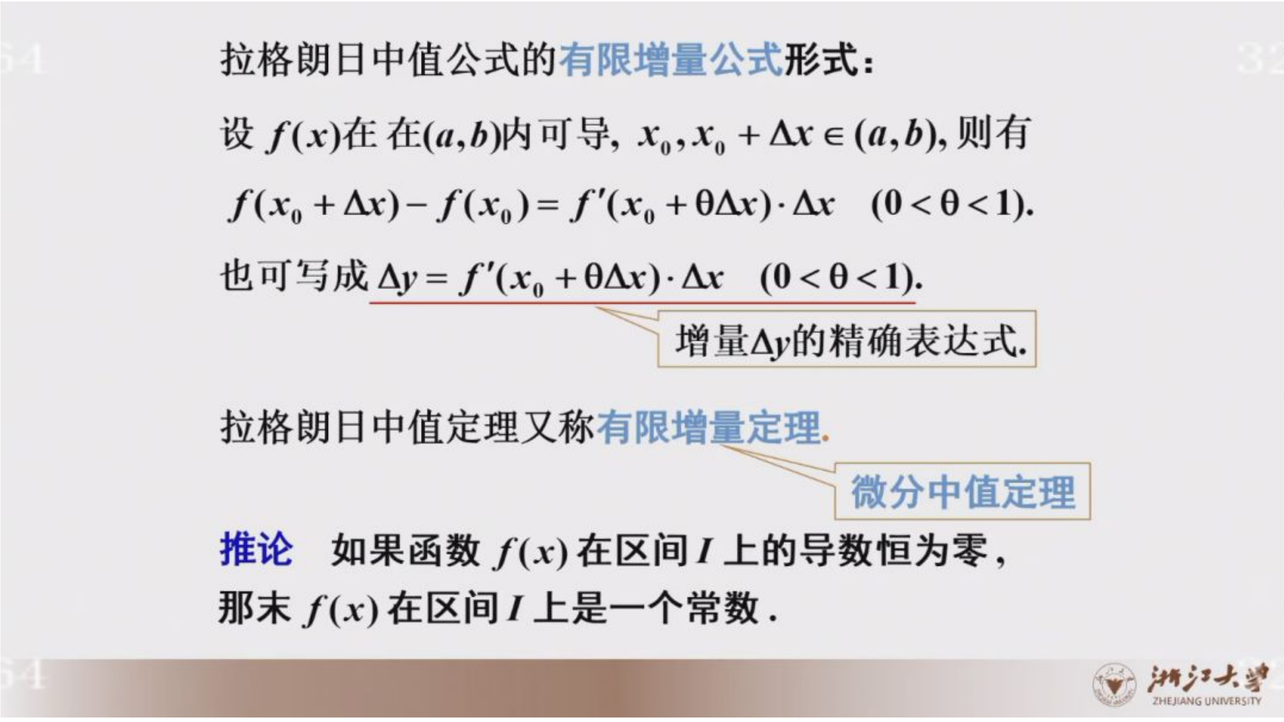
$$F(b)=[f(b)-f(a)]b-f(b)(b-a)=af(b)-bf(a)$$

$$F(a)=[f(b)-f(a)]a-f(a)(b-a)=af(b)-bf(a)$$

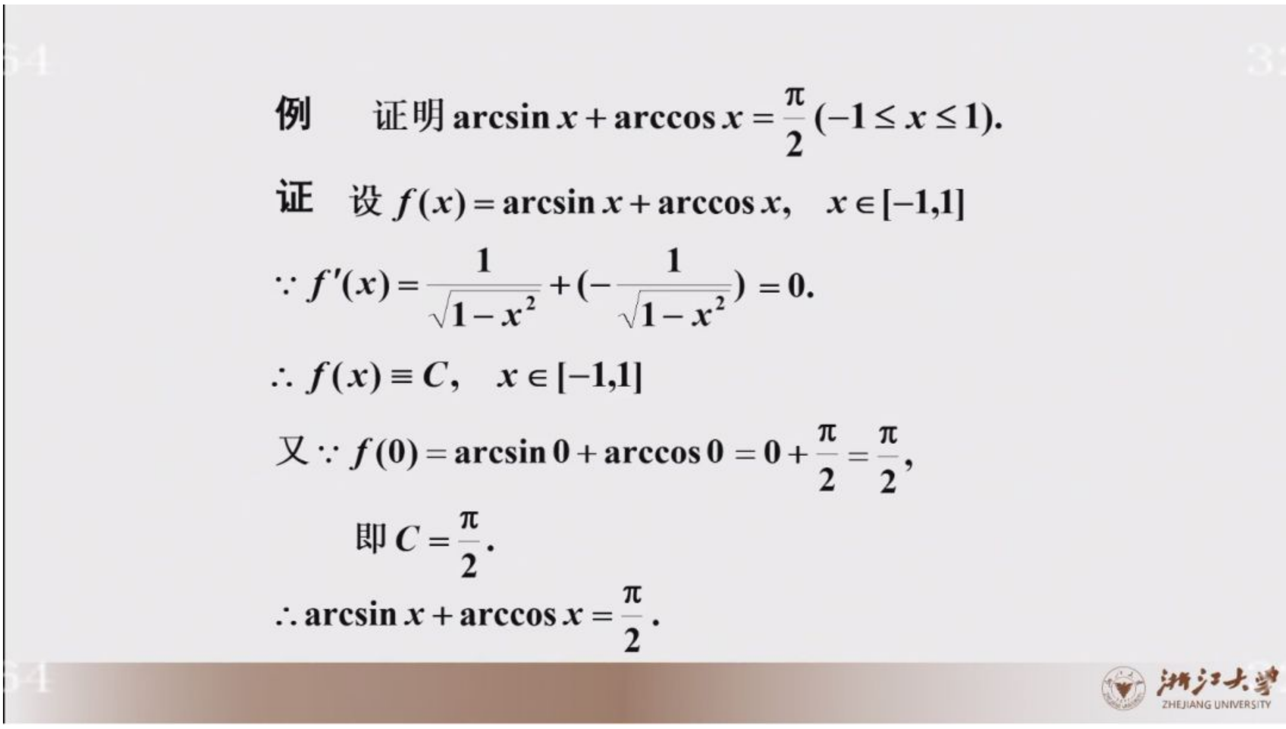
有 $F(a)=F(b)$, 由R-定理知:

$\exists\xi\in(a,b)$ 使$F'(\xi)=0,$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY



例：



拉格朗日中值定理用于比较大小

例　证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足拉氏定理的条件，

$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),(0<\xi<x)$

$\because f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由上式得　$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$,　即$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

【注】可以证明：当$-1<x<0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$同样也成立.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例：比较e^{π}与π^{e}的大小.

当$b>a>e$时，均有$a^b>b^a$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

证明一：设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x\in[e,\pi]$.

由$f(x)$在$[e,\pi]$上连续，在(e,π)上可导，

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,$$

由Language定理：$f(\pi)-f(e)=f'(\xi)(\pi-e)$

由$e<\pi$,知：$f(e)>f(\pi)$.得：

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow\pi\ln e>e\ln\pi\Leftrightarrow\ln e^{\pi}>\ln\pi^{e}\Leftrightarrow e^{\pi}>\pi^{e}.$$

分析：由于$\pi^e=e^{e\ln\pi}$, 只要比较π与$e\ln\pi$大小，只要比较$\pi-e\ln\pi$与0的大小. 构造函数$f(x)=x-e\ln x$.

证明二：设$f(x)=x-e\ln x, x\in[e,\pi]$.

由$f(x)$在$[e,\pi]$上连续，在(e,π)上可导，

$$f'(x)=1-\frac{e}{x}>0,$$

由Language定理：$f(\pi)-f(e)=f'(\xi)(\pi-e)$

由$e<\pi$,知：$f(e)<f(\pi)$.得：

$$0<\pi-e\ln\pi\Leftrightarrow e\ln\pi<\pi\Leftrightarrow\pi^{e}<e^{\pi}.$$

- 四、柯西中值定理

四、柯西(Cauchy)中值定理

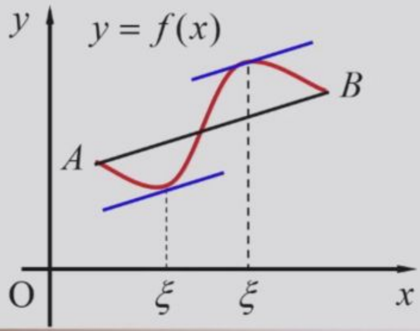
设弧 AB 的参数方程为 $\begin{cases} y = f(t) \\ x = F(t) \end{cases}$

则弧 AB 上任意一点处的切线的 斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{F'(t)}$$

而弦 $\overline{AB}$ 的斜率为

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}$$



由拉格朗日中值定理，至少存在一点 P，使曲线在该点的切线与弦线平行，即他们的斜率相等．

设对应于 P 点，$t = \xi$，则有

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (F'(t) \neq 0)$$

注意：

曲线的参数方程表示式 中 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间 并不具备任意性，它们间的关系由曲线确 定．

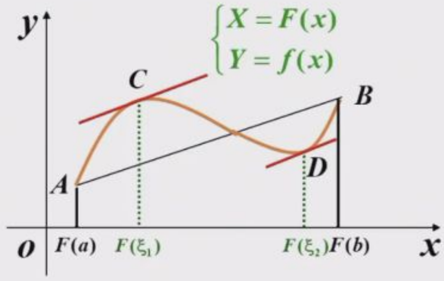
当 $f(t)$ 与 $F(t)$ 真正具有任意性时，上述结论就是柯西定理．

f(x)与F(x)不一定有函数关系

柯西（Cauchy）中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (2) 开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零 (3)，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$ 成立.

几何解释：在曲线弧 AB 上至少有一点 $C(F(\xi),f(\xi))$，在该点处的切线平行于弦 AB.



证 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)=0$，$\quad\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

特别 当 $F(x)=x$，$F(b)-F(a)=b-a,\ F'(x)=1,$

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

ξ单独放一边

例：设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.\quad \text{设 } F(x) = x^2,$$

则 $f(x), F(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件，

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点 ξ，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},\quad \text{即 } f'(\xi) = 2\xi[f(1)-f(0)].$$

例：设 x_1 与 x_2 同号，证明：$x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1-\xi)e^{\xi}(x_1 - x_2)$

其中，ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

$$(1-\xi)e^{\xi} = \frac{x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{F(x_2) - F(x_2)}$$

$$= \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{\frac{(\xi-1)e^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = \text{左边}$$

例：设 x_1 与 x_2 同号，证明：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$

其中，ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

证：令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$， $g(x)=\dfrac{1}{x}$，

$\because x_1$ 与 x_2 同号，$\therefore x=0$ 不在 x_1 与 x_2 之间.

$\therefore f(x), g(x)$ 在以 x_1 和 x_2 为端点的区间内 $x\neq 0$，且满足柯西中值定理条件，从而有

$$\frac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)\,e^{\xi},$$

即 $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$，$\xi$ 在 x_1 与 x_2 之间.

双变量：用两个中值定理

例：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且$f'(x)\neq 0$，

证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

证明：要证明原等式成立，只要证$f'(\xi)=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$成立.

由$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\neq 0$，只要证

$$f'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}\text{成立.}$$

小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

常见构造

注：常见的一些函数构造技巧：

（1）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=-f'(\xi)\xi \quad \Rightarrow F(x)=f(x)x$

（2）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)+f'(\xi)=0 \quad \Rightarrow F(x)=e^x f(x)$

若$F'(x)=e^x f'(x)+e^x f(x)=0 \Rightarrow \quad f(x)+f'(x)=0$

（3）证$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)-f'(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{-x} f(x)$

（4）证$\exists\xi\in(a,b)$使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$即$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

$\Rightarrow F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

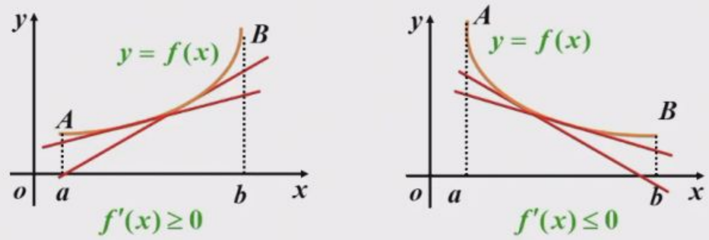
$(F'(x)=f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f'(x)g'(x)-f''(x)g(x))$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

- 五、单调性与导数

五、函数的单调区间与极值

1、单调性的判别法



定理 设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.

(1) 如果在(a,b)内$f'(x)\geq 0$，那末函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；(2) 如果在(a,b)内 $f'(x)\leq 0$，那末函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.(3)如果在(a,b)内 $f'(x)\equiv 0$，那末函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上是一个常值函数.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

证 $\forall\, x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，应用拉氏定理,得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad (x_1<\xi<x_2)$$

$\because\ x_2-x_1>0$,

(1)若在(a,b)内，$f'(x)\geq 0$，则 $f'(\xi)\geq 0$,

$\therefore\ f(x_2)\geq f(x_1)$. $\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(2)若在(a,b)内，$f'(x)\leq 0$，则 $f'(\xi)\leq 0$,

$\therefore\ f(x_2)\leq f(x_1)$. $\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

(3)若在(a,b)内，$f'(x)\equiv 0$，则 $f'(\xi)\equiv 0$,

$\therefore\ f(x_2)\equiv f(x_1)$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

注意：

单调性的判别是拉格朗日中值定理定理的重要应用.

定理中的区间换成其它有限或无限区间，结论仍然成立.

应用：利用函数的单调性可以确定某些方程实根的个数和证明不等式.

例 讨论函数$y = e^x - x - 1$的单调性.

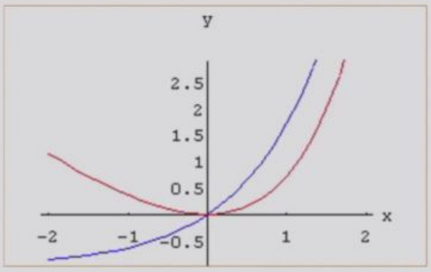
解 $\because y' = e^x - 1$. 又 $\because D:(-\infty,+\infty)$.

在$(-\infty,0)$内，$y' < 0$,

$\therefore$ 函数单调减少；

在$(0,+\infty)$内，$y' > 0$,

$\therefore$ 函数单调增加.



注意：函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

单调区间求法

问题:如例，函数在定义区间上不是单调的，但在各个部分区间上单调.

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

导数等于零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

讨论函数的单调性可以按以下步骤进行:

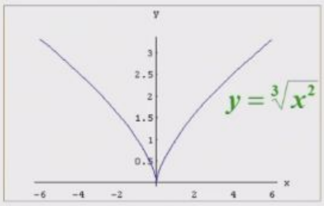
1）确定函数 $f(x)$ 的定义域;

2）求 $f'(x)$，找出 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，以这些点为分界点，把定义域分成若干区间;

3）在各个区间上判别 $f'(x)$ 的符号，以此确定 $f(x)$ 的单调性。

例 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty).$



$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

当$x=0$时,导数不存在.

当$-\infty<x<0$时，$f'(x)<0$, $\therefore$ 在$(-\infty,0]$上单调减少；

当$0<x<+\infty$时，$f'(x)>0$, $\therefore$ 在$[0,+\infty)$上单调增加；

单调区间为 $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$.

注:区间内个别点导数为零或不存在，不影响区间的单调性.

利用单调性证明不等式

例：证明当$x>0$时，$\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$.

证明：令$F(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$

$$F'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}=-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}=2[(\frac{x}{2})^2-(\sin\frac{x}{2})^2]>0$$

$F(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，又$F(0)=0$, $F(x)$在$x=0$处连续.

$\therefore F(x)>0$, 即： $\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}>0$, $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$.

例　证明方程　$x^5+x+1=$有且仅有一个实根。

证明：令 $f(x)=x^5+x+1$，则 $f'(x)=5x^4+1>0$,

$\therefore$ $f(x)$在（-∞，+∞）上单调上升。

又　$f(-1)=-1<0$，　$f(0)=1>0$

$\therefore$ 由介值定理：$f(x)$ 在（-∞，+∞）上有且仅有一个实根。

2、函数极值

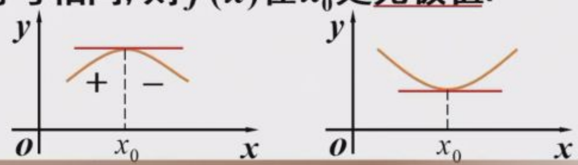
函数极值的判定

定理(极值的第一充分条件)

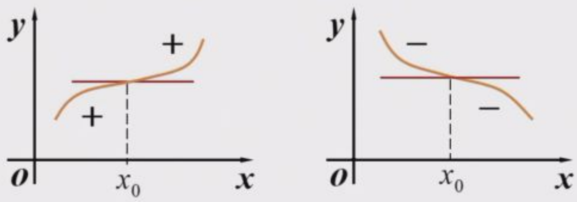
(1) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有$f'(x)>0$;而$x\in(x_0,x_0+\delta)$,
有$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有$f'(x)<0$;而$x\in(x_0,x_0+\delta)$
有$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$及$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)$
符号相同,则$f(x)$在x_0处无极值.



创作于 Effie



(不是极值点情形)

求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根;

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点左右的正负号,判断极值点;

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

注意:函数的不可导点,也可能是函数的极值点.

例 求出函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$的极值.

解 $f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x\neq 2)$

当$x=2$时,$f'(x)$不存在. 但函数$f(x)$在该点连续.

当$x<2$时，$f'(x)>0$;

当$x>2$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(2)=1$为$f(x)$的极大值.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

定理(极值的第二充分条件) 设$f(x)$在x_0处具有二阶导数, 且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 那末

(1) 当$f''(x_0)<0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2) 当$f''(x_0)>0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

证 (1) $\because f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$,

故$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号,

当$\Delta x<0$时, 有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$,

当$\Delta x>0$时, 有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$,

所以, 函数$f(x)$在x_0处取得极大值.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例 求出函数$f(x)=x^3+3x^2-24x-20$的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4$, $x_2=2$.

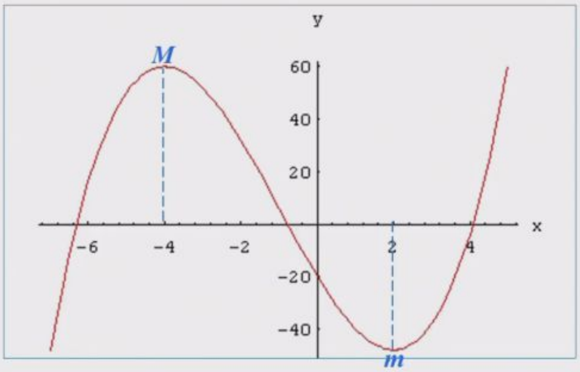
$\because$ $f''(x)=6x+6$,

$\because$ $f''(-4)=-18<0$, 故极大值 $f(-4)=60$,

$f''(2)=18>0$, 故极小值 $f(2)=-48$.

$f(x)=x^3+3x^2-24x-20$图形如下

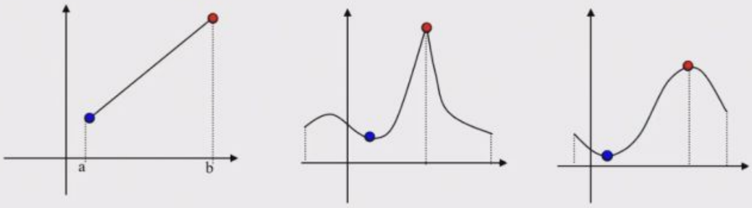
浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY



注意：$f''(x_0)=0$时，$f(x)$在点x_0处不一定取极值，仍用定理2.

3、最大值、最小值问题

在生产实践中，为了提高经济效益，必须要考虑在一定的条件下，怎样才能是用料最省，费用最低，效率最高，收益最大等问题。这类问题在数学上统统归结为求函数的最大值或最小值问题。最值问题主要讨论问题的两个方面：最值的存在性 ；最值的求法。



步骤：1. 求驻点和不可导点；

2. 求区间端点及驻点和不可导点的函数值，比较大小，哪个大那个就是最大值，哪个小那个就是最小值；

几种特殊情况:

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则在端点处取得最值.

2. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个极值点 x_0，则当 x_0 为极大(小)值点时，$f(x_0)$ 就是最大(小)值.

3. 在实际问题中，则按实际情况进行判断.

表面积最大可以是无穷大

创作于 Effie

例：一个圆柱形罐头，其容积是一个常量V.问底面半径如何选取，才能使用料最省(即表面积最小)?

解：设罐头的底面半径为r，表面积$S=2\pi r^2+2\pi rh$

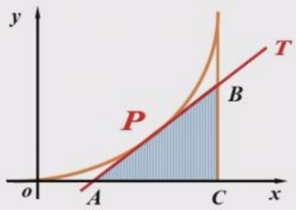
由题设 $\pi r^2h=V$，即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ 代入上式得，

$$S=S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\ r>0 \qquad S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2V}{r^2}$$

令$s'(r)=0$，得 $r_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 则最小值必在$r=r_0$处取得。

此时 $h=\dfrac{V}{\pi r_0^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}=2r_0$

例：由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.



解 如图,设所求切点为$P(x_0,y_0)$,

则切线PT为

$$y-y_0=2x_0(x-x_0),$$

$$\because y_0=x_0^2,\quad \therefore A(\frac{1}{2}x_0,\ 0),\quad C(8,\ 0),\quad B(8,\ 16x_0-x_0^2)$$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2) \qquad (0\le x_0\le 8)$$

创作于 Effie

令 $S' = \frac{1}{4}(3x_0^2 - 64x_0 + 16\times16) = 0,$

解得　$x_0 = \frac{16}{3}$，　$x_0 = 16$ (舍去).

$\because s''(\frac{16}{3}) = -8 < 0.$　$\therefore s(\frac{16}{3}) = \frac{4096}{217}$ 为极大值.

故 $s(\frac{16}{3}) = \frac{4096}{27}$ 为所有三角形中面积的最大者.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY