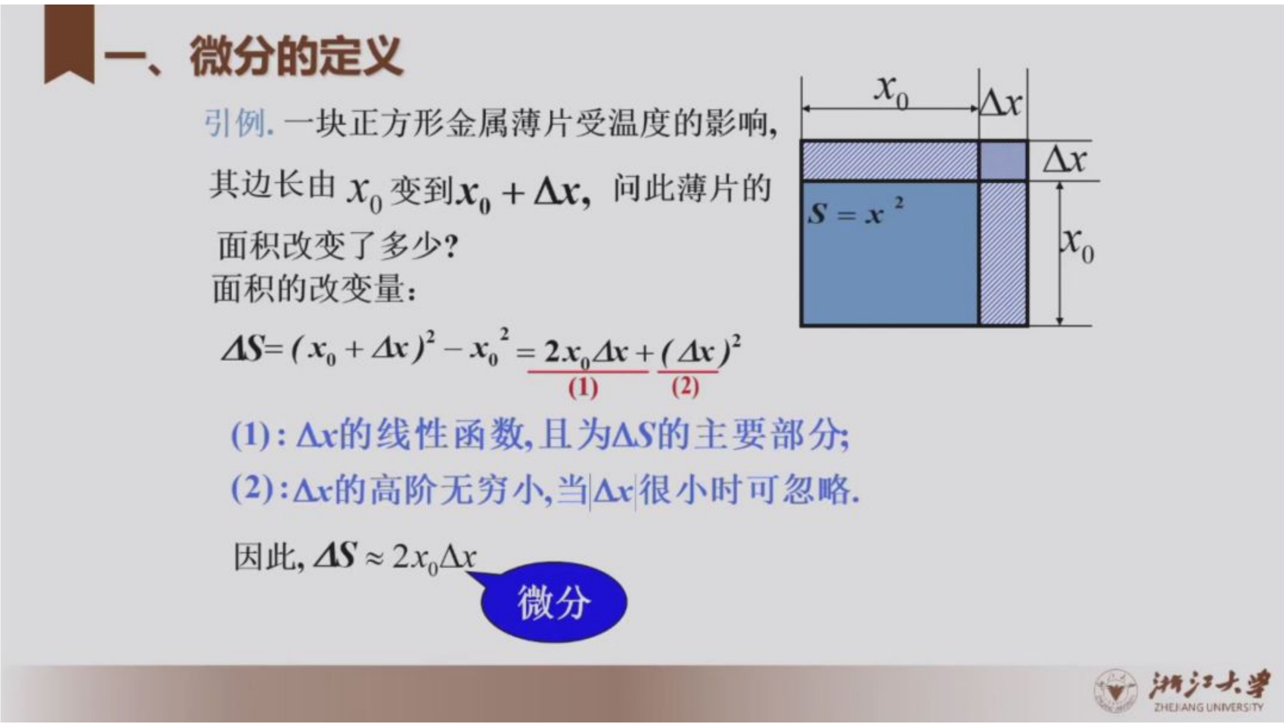
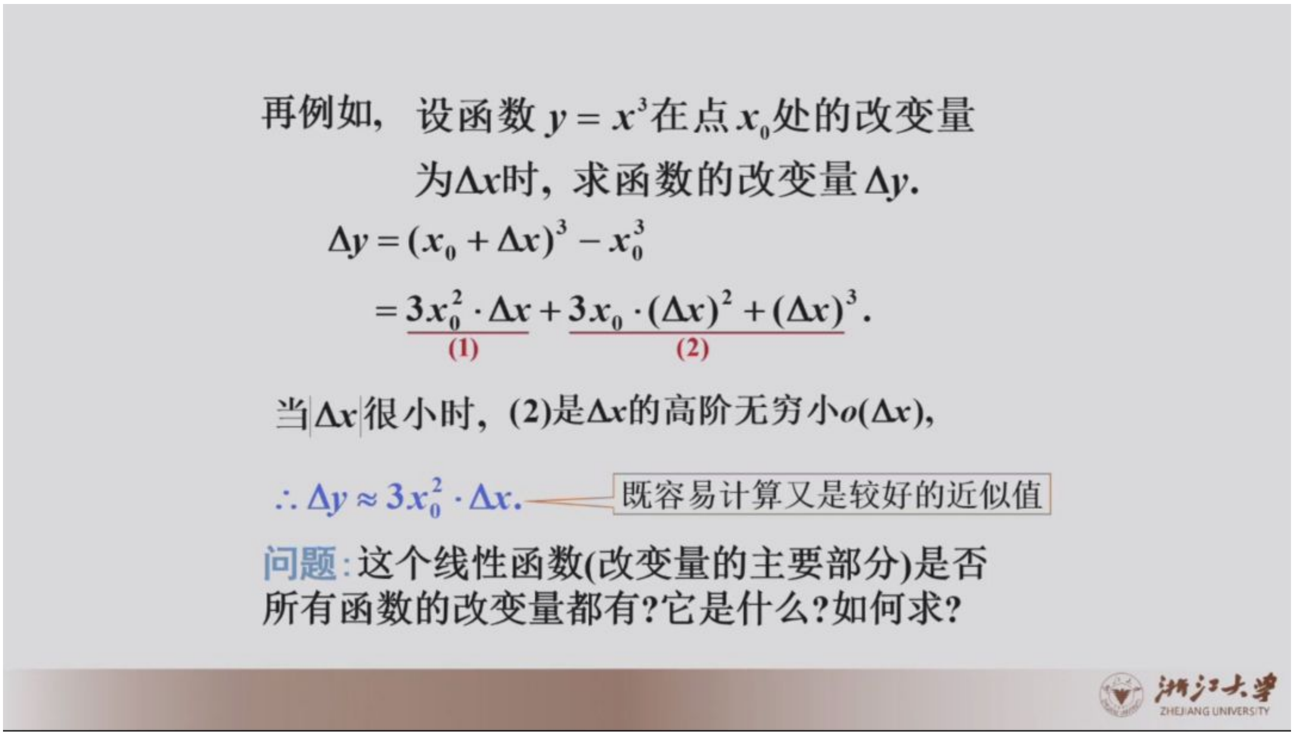
微积分（第二章）

二、微分

- 一、微分的定义





定义：设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ 成立(其中 A 是与 Δx 无关的常数)，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，并且称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$，即 $dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$.

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.(微分的实质)

由定义知：

(1) dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

(2) $\Delta y-dy=o(\Delta x)$ 是 Δx 高阶无穷小;

(3) 当 $A\neq 0$ 时，dy 与 Δy 是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy}=1+\frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x}\to 1 \quad (x\to 0).$$

(4) A 是与 Δx 无关的常数，但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;

(5) 当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$ (线性主部).

问题： 1)函数应具备什么条件，其增量才可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$的形式？

2) 式中的 A 究竟等于什么？

定理：函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，

且 $A = f'(x_0)$.

可微与可导的关系

证 (1) 必要性 $\because f(x)$在点x_0可微，$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$.

即函数 $f(x)$在点x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$函数$f(x)$在点x_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$,

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,

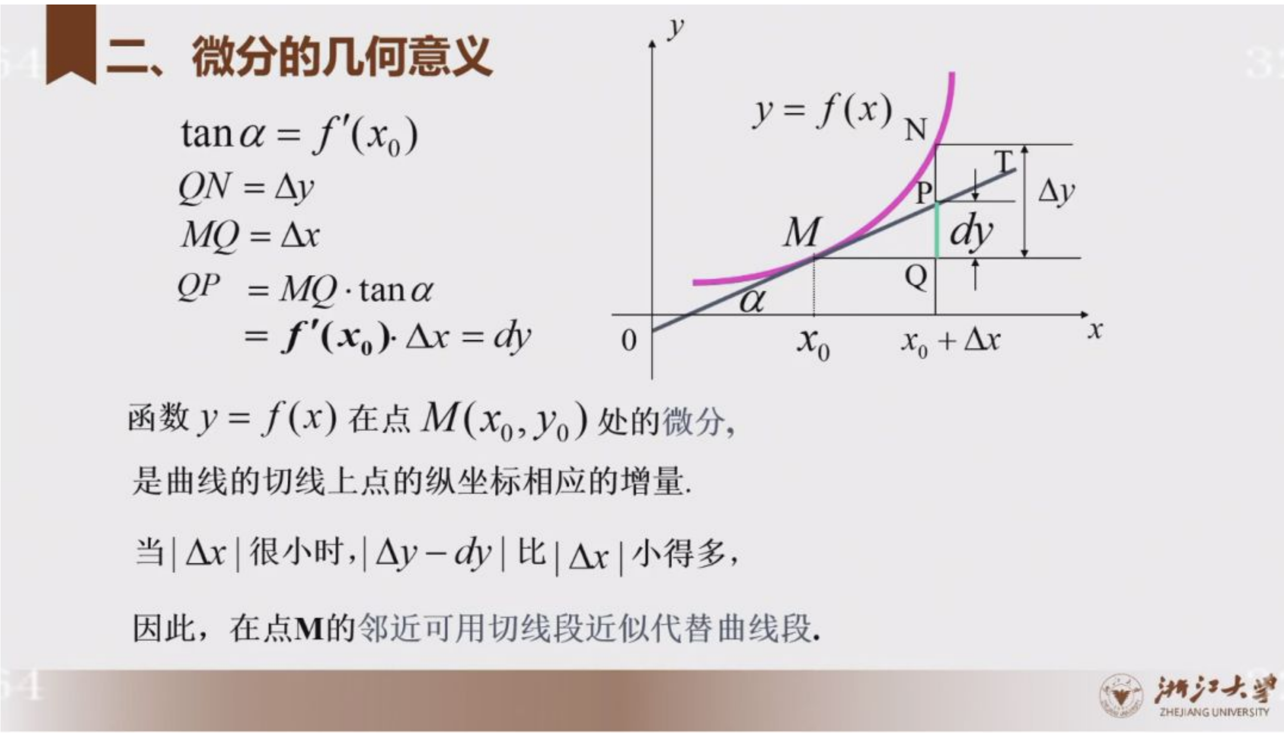
$\therefore$函数 $f(x)$在点x_0可微，且 $f'(x_0) = A$. $\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$在任意点x的微分，称为函数的微分，记作 dy或$df(x)$，即 $dy = f'(x)\Delta x$.

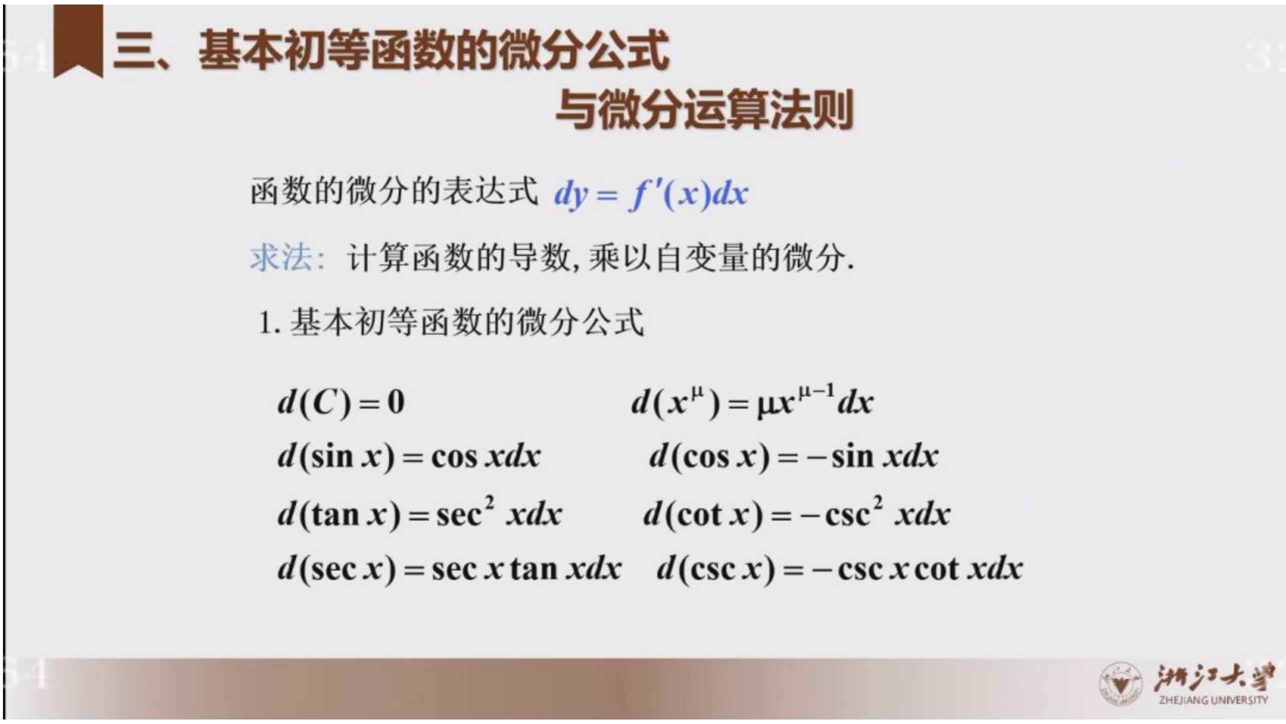
由于函数$f(x) = x$在x处可微，且$dx = (x)'\Delta x = \Delta x$,
即自变量x的增量Δx等于自变量的微分，记$dx = \Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".


二、微分的几何意义
$\tan\alpha = f'(x_0)$
$QN = \Delta y$
$MQ = \Delta x$
$QP = MQ \cdot \tan\alpha$
$= f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$
$y = f(x)$
N
T
P
Δy
M
dy
Q
α
0
x_0
$x_0 + \Delta x$
x
y
函数 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的微分,
是曲线的切线上点的纵坐标相应的增量.
当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多,
因此，在点M的邻近可用切线段近似代替曲线段.
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

- 二、初等函数微分公式


三、基本初等函数的微分公式
与微分运算法则
函数的微分的表达式 $dy = f'(x)dx$
求法: 计算函数的导数, 乘以自变量的微分.
1. 基本初等函数的微分公式
$d(C) = 0$
$d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$
$d(\sin x) = \cos x dx$
$d(\cos x) = -\sin x dx$
$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\mathrm{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u\pm v)=du\pm dv \qquad d(Cu)=Cdu$$

$$d(uv)=vdu+udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0)$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

四、复合函数的微分法则

定理：若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处可微，而 $y=f(u)$ 在相应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可微，则 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 处可微. 且 $\mathrm{d}y=f'(u)du$.

证：按微分的定义

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=(f(\varphi(x)))'\mathrm{d}x=f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

而 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$

故：$dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)du$ （u为中间变量）

当u为中间变量时的微分形式与u为自变量时的微分的形式相同，

均为$dy=f'(u)du$，这种性质称为函数的一阶微分形式不变性 .

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例： $y=\ln(1+e^{x^2})$，求 dy.

解： $dy = d[\ln(1+e^{x^2})] = \dfrac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})$

$$= \frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}d(x^2) = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$$

另解 $y' = [\ln(1+e^{x^2})]' = \dfrac{1}{1+e^{x^2}}(1+e^{x^2})'$

$$= \frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}(x^2)' = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

$$dy = y'dx = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

例： 设由 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定 y 为 x 的函数, 求 dy.

解： 应用微分的运算法则及一阶微分形式的不变性, 有

$$d(\arctan\frac{y}{x}) = d(\ln\sqrt{x^2+y^2})$$

$$d(\arctan\frac{y}{x}) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2} = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$d(\ln\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

于是 $xdy-ydx = xdx+ydy$ 得： $dy = \dfrac{x+y}{x-y}dx$

- 三、参数方程

五、参数式函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

在方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 中,

设函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

或由微分知：$\dfrac{dy}{dx}$ 可以看成 dy 除以 dx, 若 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$

都可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 知：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}=\dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

注意：d^2y/dx^2不是直接对dy/dx求导

若$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$均有二阶导数，且$\varphi'(t)\neq 0$，

由前面的结论知：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

例：求摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程.

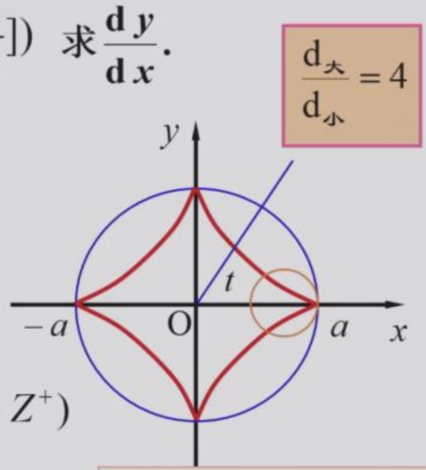
解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{a\sin t}{a-a\cos t}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1.$

当$t=\dfrac{\pi}{2}$时，$x=a(\dfrac{\pi}{2}-1)$，$y=a$.

所求切线方程为 $y-a=x-a(\dfrac{\pi}{2}-1)$ 即：$y=x+a(2-\dfrac{\pi}{2})$

例：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad (t\in[0,\frac{\pi}{2}]) \quad 求 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$



解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'}$$

$$=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$=-\tan t \quad (t\neq\frac{n\pi}{2},\ n\in Z^+)$$

星形线是一种圆内摆线

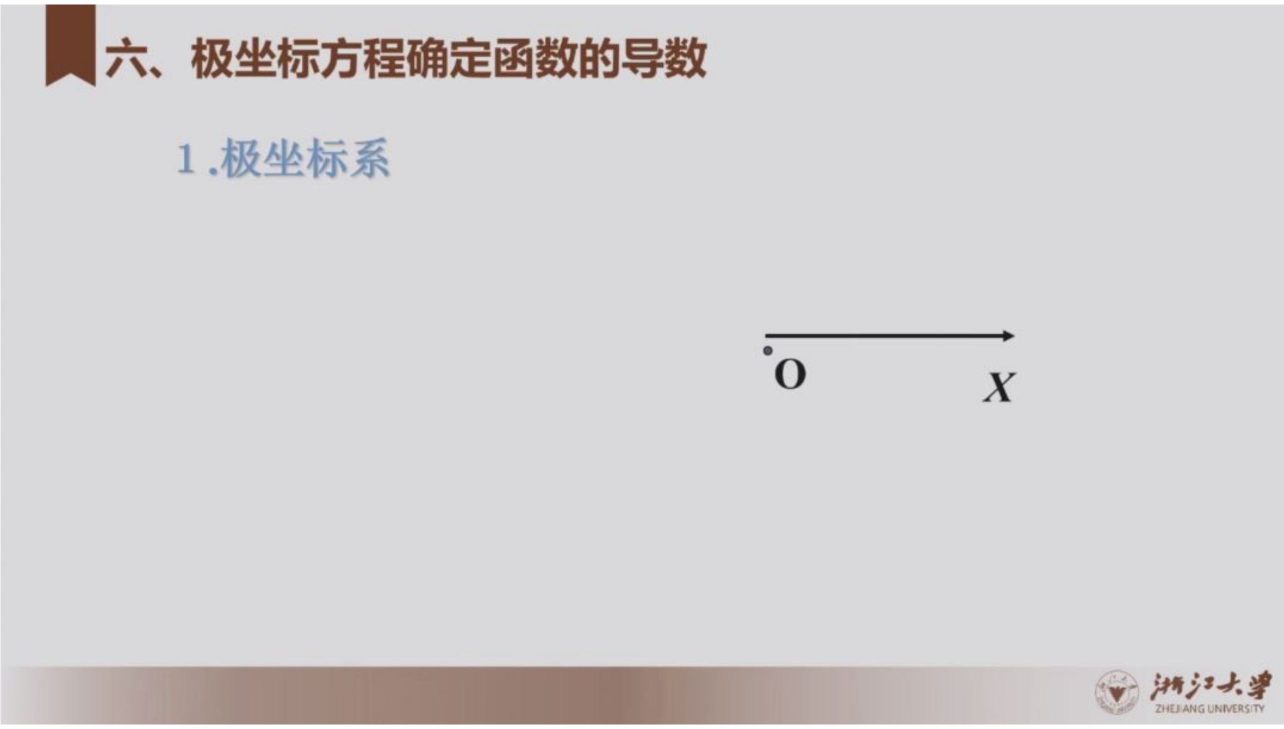
例：设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

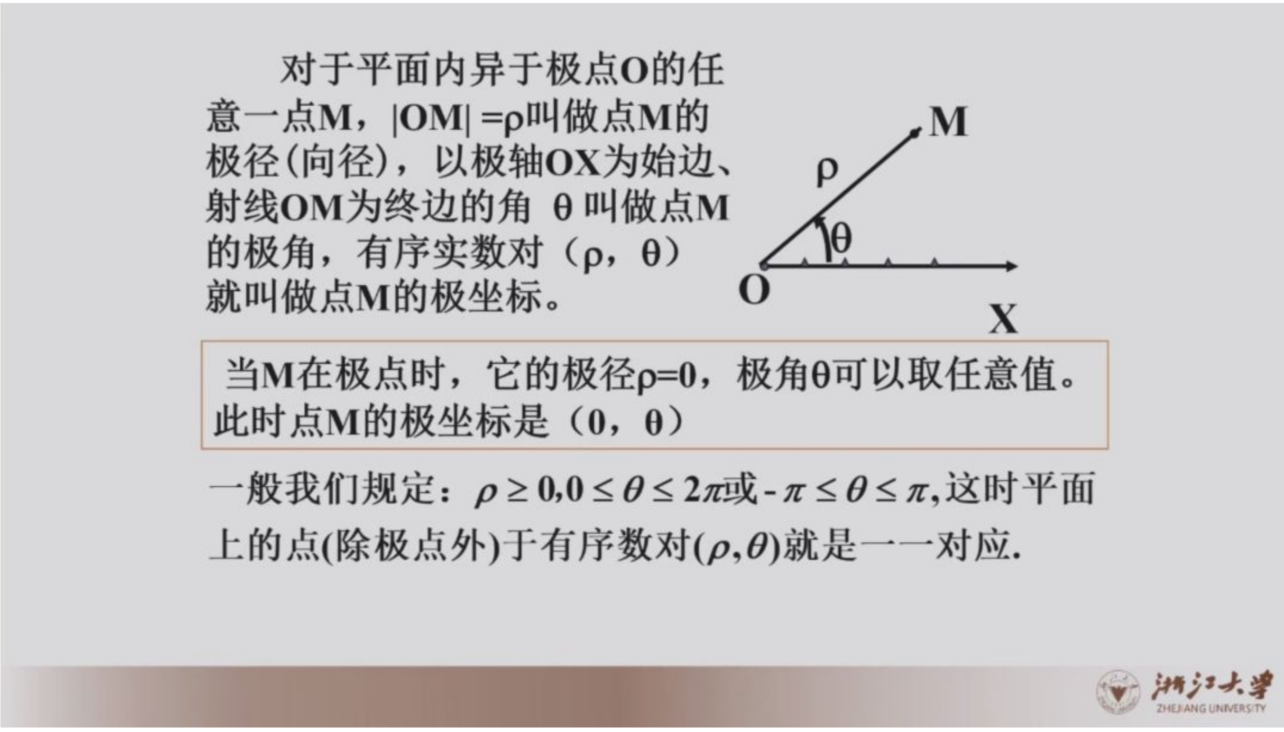
解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(t-\arctan t)'}{\left(\ln(1+t^2)\right)'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)'}{\left(\ln(1+t^2)\right)'}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\left(\frac{1+t^2}{4t}\right)'}{\left(\ln(1+t^2)\right)'}=\frac{\frac{2t^2-1-t^2}{4t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}$$

- 四、极坐标方程


六、极坐标方程确定函数的导数
1 .极坐标系
O
X
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY


对于平面内异于极点O的任意一点M，|OM| =ρ叫做点M的极径(向径)，以极轴OX为始边、射线OM为终边的角 θ 叫做点M的极角，有序实数对（ρ，θ）就叫做点M的极坐标。
M
ρ
θ
O
X
当M在极点时，它的极径ρ=0，极角θ可以取任意值。此时点M的极坐标是（0，θ）
一般我们规定：$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$或$-\pi \leq \theta \leq \pi$,这时平面上的点(除极点外)于有序数对$(\rho,\theta)$就是一一对应.
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

2.极坐标与直角的互化

极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系，同一个点可以用极坐标表示，也可以用直角坐标表示。

在以直角坐标系的原点为极点，x轴的正半轴为极轴，并在两中坐标系中取相同的长度单位的条件下，同一个点的直角坐标(x,y)与极坐标(ρ,θ)之间有如下关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \quad x\neq 0 \end{cases}$$

直角坐标方程不好化：用参数方程

例：求对数螺线$\rho=e^{\theta}$在点$(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程.

解：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

曲线在点$(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线斜率为 $y'\big|_{(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})}=\dfrac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$

点$(e^{\frac{\pi}{2}},\pi/2)$的直角坐标为$(0,e^{\frac{\pi}{2}})$.

因此，所求切线方程为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，即：$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

- 五、近似计算与误差估计

七、近似计算与误差估计

1、.计算函数增量的近似值

若$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)\neq 0$,且$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\big|_{x=x_0}\approx dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

例：半径10厘米的金属圆片加热后,半径伸长了0.05厘米,问面积增大了多少？

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

2、计算函数的近似值

(1)求$f(x)$在点$x=x_0$附近的近似值;

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.\quad (|\Delta x|很小时)$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

例：计算$\cos 60^{o}30'$的近似值.

解：设$f(x)=\cos x$, $\therefore f'(x)=-\sin x$, (x为弧度)

$$\because x_0=\frac{\pi}{3},\quad \Delta x=\frac{\pi}{360},\quad \therefore f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2},\quad f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^{o}30'=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360})\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

(2)求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值

令 $x_0=0, \Delta x=x$. $\because f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$,

$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$.

常用近似公式($|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$ (2) $\sin x\approx x$ (x为弧度) (3) $e^x\approx 1+x$;

(4) $\tan x\approx x$ (x为弧度) (5) $\ln(1+x)\approx x$.

例 计算下列各数的近似值 .

(1) $\sqrt[3]{998.5}$; (2) $e^{-0.03}$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$