

## 微积分 (第三章)

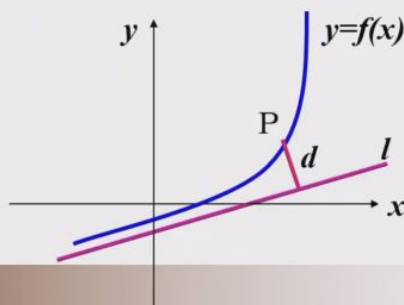
### 五、函数图形的描绘

- 一、渐近线

#### 一、渐近线

**定义：**当曲线  $y = f(x)$  上的一动点  $P$  沿着曲线移向无穷点时, 如果点  $P$  到某定直线  $l$  的距离趋向于零, 那么直线  $l$  就称为曲线  $y = f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的一条渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d = 0$$
$$l: y = ax + b.$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0$$



#### 1. 铅直渐近线 (垂直于 $x$ 轴的渐近线)

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ , 那么  $x = x_0$  就是  $y = f(x)$  的一条铅直渐近线.

例如  $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$ ,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \infty$$



有铅直渐近线两条:  $x = -2$ ,  $x = 3$ .



## 2. 水平渐近线 (平行于 $x$ 轴的渐近线)

如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  ( $b$  为常数), 那么  $y = b$  就是  $y = f(x)$  的一条水平渐近线.

例如  $y = \arctan x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

有水平渐近线两条:  $y = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = -\frac{\pi}{2}$ .



## 3. 斜渐近线

如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ( $a, b$  为常数)

那么  $y = ax + b$  就是  $y = f(x)$  的一条斜渐近线.

斜渐近线求法:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a \right) = 0$$

$$\text{即: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b.$$

那么  $y = ax + b$  就是曲线  $y = f(x)$  的一条斜渐近线.

注意： 如果

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  不存在;

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$  不存在,

可以断定  $y = f(x)$  不存在斜渐近线.



例： 求  $f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$  的渐近线.

解：  $D : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .  $\because \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty,$

$\therefore x = 1$  是曲线的铅直渐近线.

又  $\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-2)(x+3) - 2x(x-1)}{x-1} = 4,$$

$\therefore y = 2x + 4$  是曲线的一条斜渐近线.



$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$  的两条渐近线如图



## • 二、函数图形的描绘

### 二、函数图形的描绘

一般步骤：

1. 确定函数的定义域、值域
2. 考察对称性、奇偶性、周期性；
3. 讨论单调性
4. 讨论凸凹性及拐点
5. 讨论极值、极值点；最值、最值点
6. 求渐近线
7. 找出特殊点，极值点、拐点、与坐标轴相交的点等等。

**定义域，一二阶导，渐近线，零点**

例 作函数  $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$  的图形.

解  $D: x \neq 0$ , 非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x) = -\frac{4(x+2)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = -2$ ,

令  $f''(x) = 0$ , 得特殊点  $x = -3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = -2, \text{ 得水平渐近线 } y = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = +\infty, \text{ 得铅直渐近线 } x = 0.$$



列表确定函数升降区间, 凹凸区间及极值点和拐点:

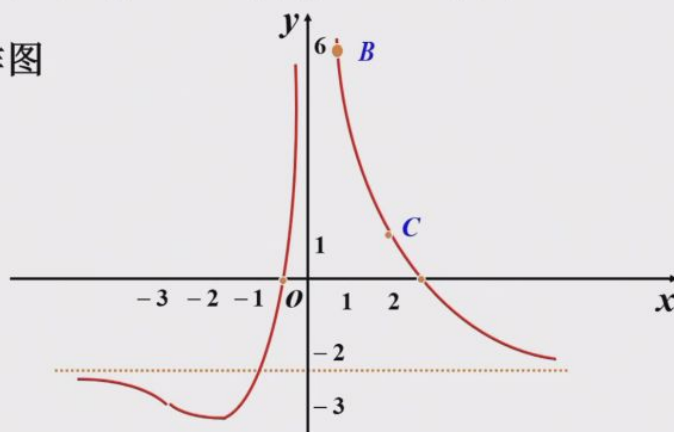
$x$	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	—		—	0	+	不存在	—
$f''(x)$	—	0	+		+		+
$f(x)$		拐点 $(-3, -\frac{26}{9})$		极值点 $-3$		间断点	



补充点:  $(1-\sqrt{3},0)$ ,  $(1+\sqrt{3},0)$ ;

$A(-1,-2)$ ,  $B(1,6)$ ,  $C(2,1)$ .

作图



例 作函数  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  的图形.

解  $D: (-\infty, +\infty)$ ,  $W: 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$ .

偶函数, 图形关于y轴对称.

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi''(x) = -\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令  $\varphi'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 0$ ,

令  $\varphi''(x) = 0$ , 得特殊点  $x = -1, x = 1$ .

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$\varphi'(x)$	+		+	0	-		-
$\varphi''(x)$	+	0	-		-	0	+
$\varphi(x)$	↗	拐点 $(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	↘	极大值 $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$	↘	拐点 $(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	↗

