微积分（第四章）

一、不定积分

- 一、原函数与不定积分
  - 1.原函数定义

定义： 如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x\in I$，都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I内原函数.

例 $(\sin x)'=\cos x$ 　$\sin x$是$\cos x$的原函数.

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 　$(x>0)$ 　$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

问题

结论：

(1)若函数$f(x)$在区间I上连续，则存在可导函数$F(x)$，使$F'(x)=f(x)$ 　$(x\in I)$. 连续函数一定有原函数

(2)若函数$f(x)$在区间I内有一原函数$F(x)$，则$F(x)+C$仍为$f(x)$的原函数.

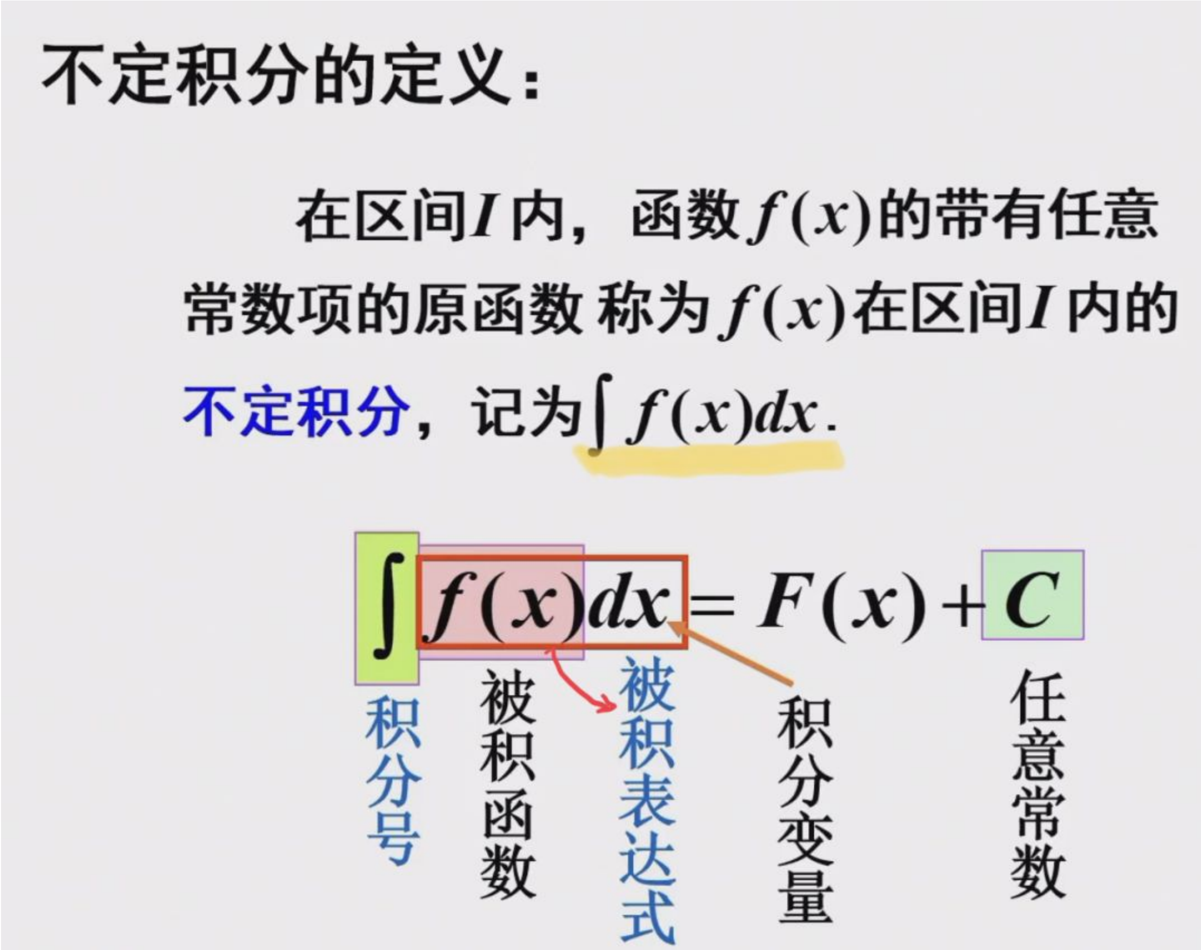
(3)若函数$f(x)$在区间I内有一原函数F(x)，则$f(x)$的所有原函数，可表示为：F$(x)+C$(C为任意常数)

证：设$\Phi(x)$为$f(x)$的任一原函数，则

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

$$\therefore \Phi(x)-F(x)=C \qquad 即\ \Phi(x)=F(x)+C$$

- 2.不定积分的定义


不定积分的定义：
在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.
$\int f(x)dx = F(x) + C$
积分号
被积函数
被积表达式
积分变量
任意常数

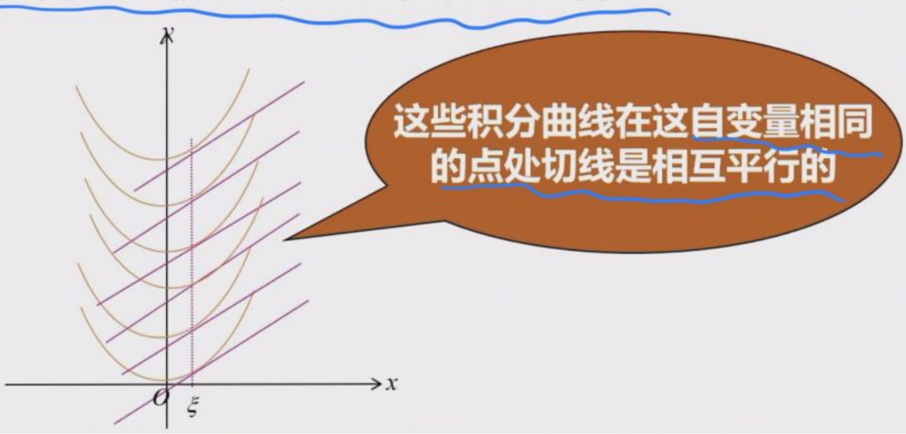
习惯上，称求已知函数 $f(x)$ 的全部原函数的过程，为求函数 $f(x)$ 的不定积分.

求不定积分是求导的逆运算.

原函数与不定积分的几何意义

$f(x)$ 的一个原函数在几何上称为一条积分曲线

$\int f(x)dx$ 在几何上表示 $f(x)$ 的全体积分曲线所组成的积分曲线族



- 二、基本积分

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数);

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$);

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$; 或 $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

说明： $x > 0, \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C,$

$x < 0, \ [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x},$

$\Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad \therefore \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

简写为 $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$

。

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$;

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;

$$(10)\quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12)\quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(13)\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(14)\quad \int \sinh x dx = \cosh x + C;$$

$$(15)\quad \int \cosh x dx = \sinh x + C;$$

- 三、不定积分的性质
  - 性质12：求积与求导，微分与积分

性质 1：

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x), \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx,$$

性质 2：

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

- 性质3：加减可拆，数乘可提

  性质3(线性运算法则)

  (1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

  证 $\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$

  $= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$

  $\therefore$ 等式成立.

  （此性质可推广到有限多个函数之和的情况）

  (2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

  （k是常数，$k \neq 0$）

- 例

  例 求积分 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

  解 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

  $= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

  $= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$

  拆分成加减

例 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$

$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$

例 求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

说明： 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.