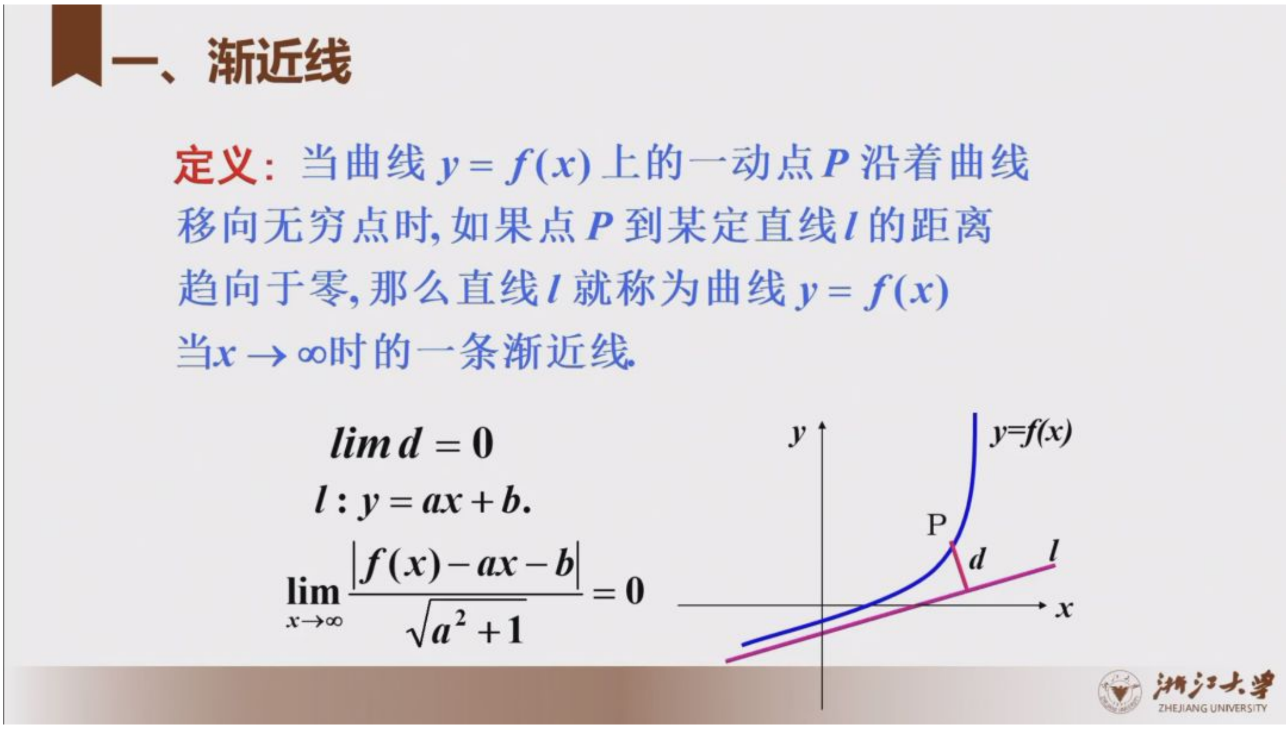
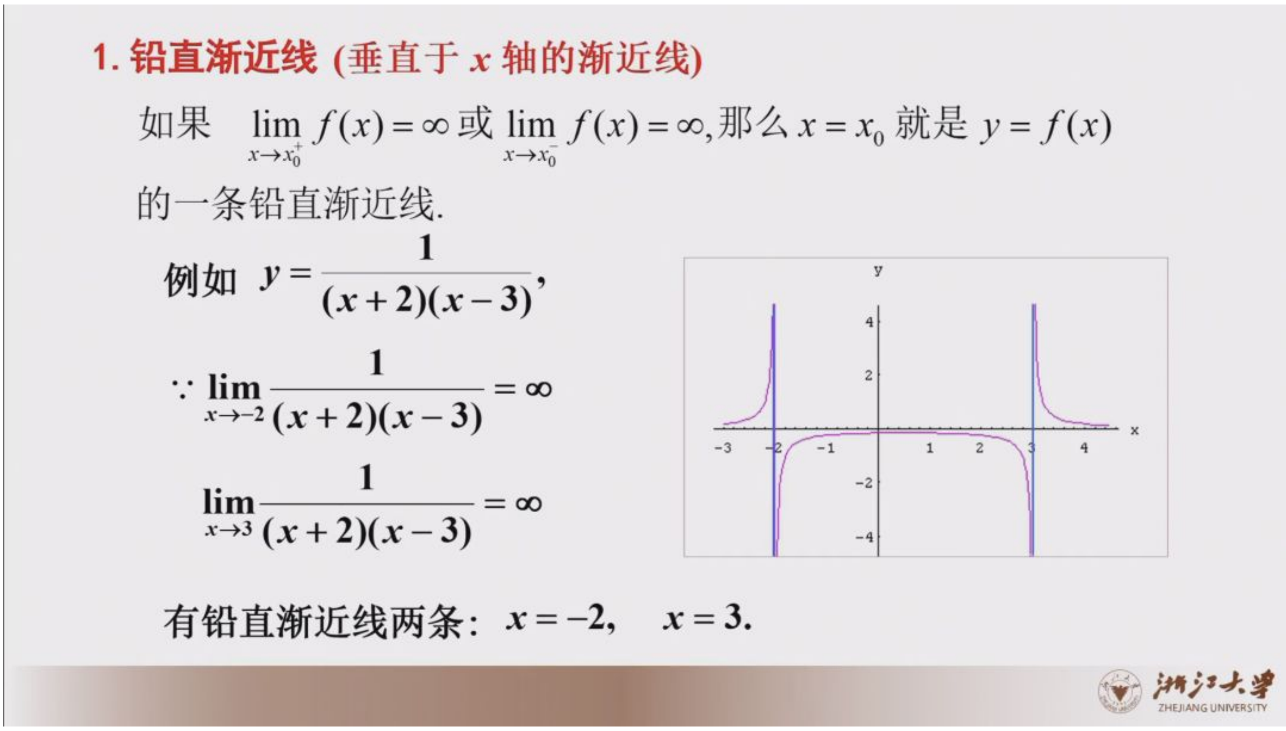
微积分（第三章）

五、函数图形的描绘

- 一、渐近线





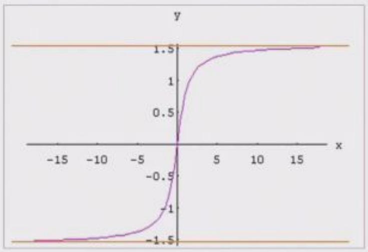
2. 水平渐近线 (平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ (b 为常数),那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如 $y=\arctan x$,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$



有水平渐近线两条: $y=\frac{\pi}{2}$, $y=-\frac{\pi}{2}$.

3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (a,b 为常数)

那么 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

斜渐近线求法:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$$

即: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$.

那么 $y=ax+b$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

注意：　如果

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 不存在,

可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线.

例：求 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 的渐近线.

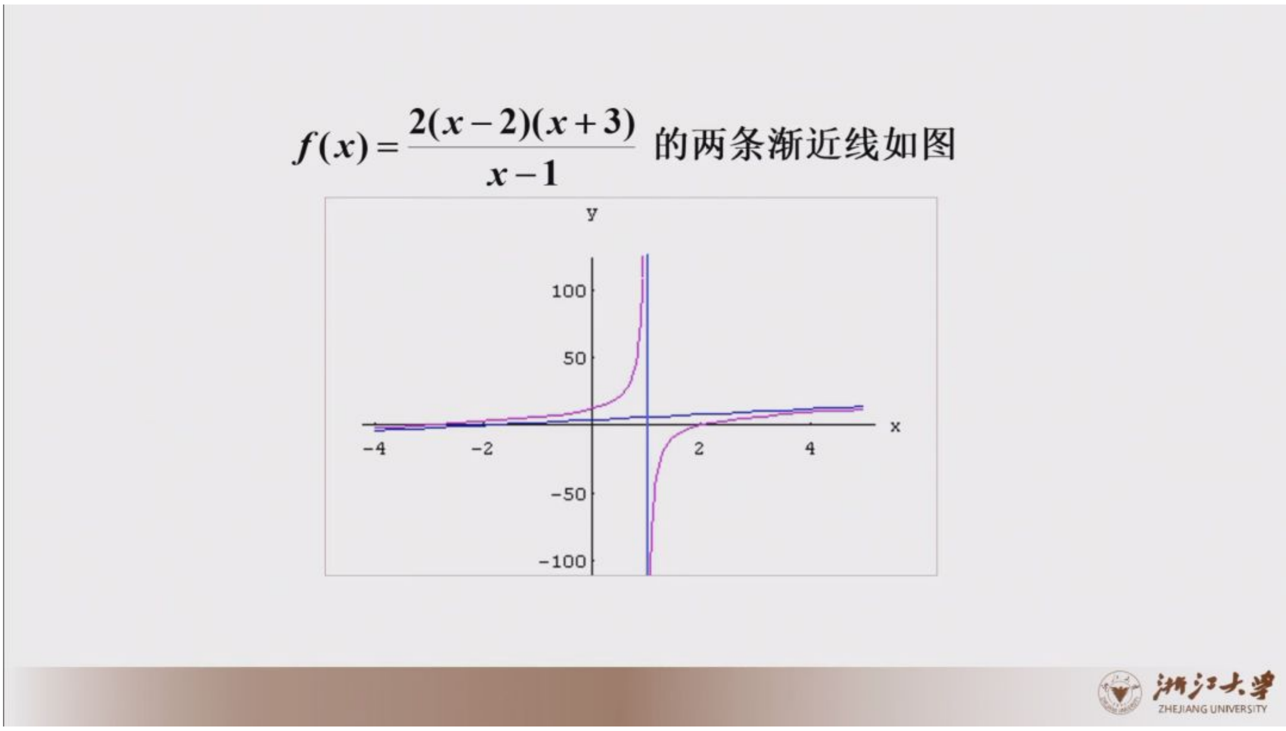
解：$D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. $\because \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$,　$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$,

$\therefore x=1$ 是曲线的铅直渐近线.

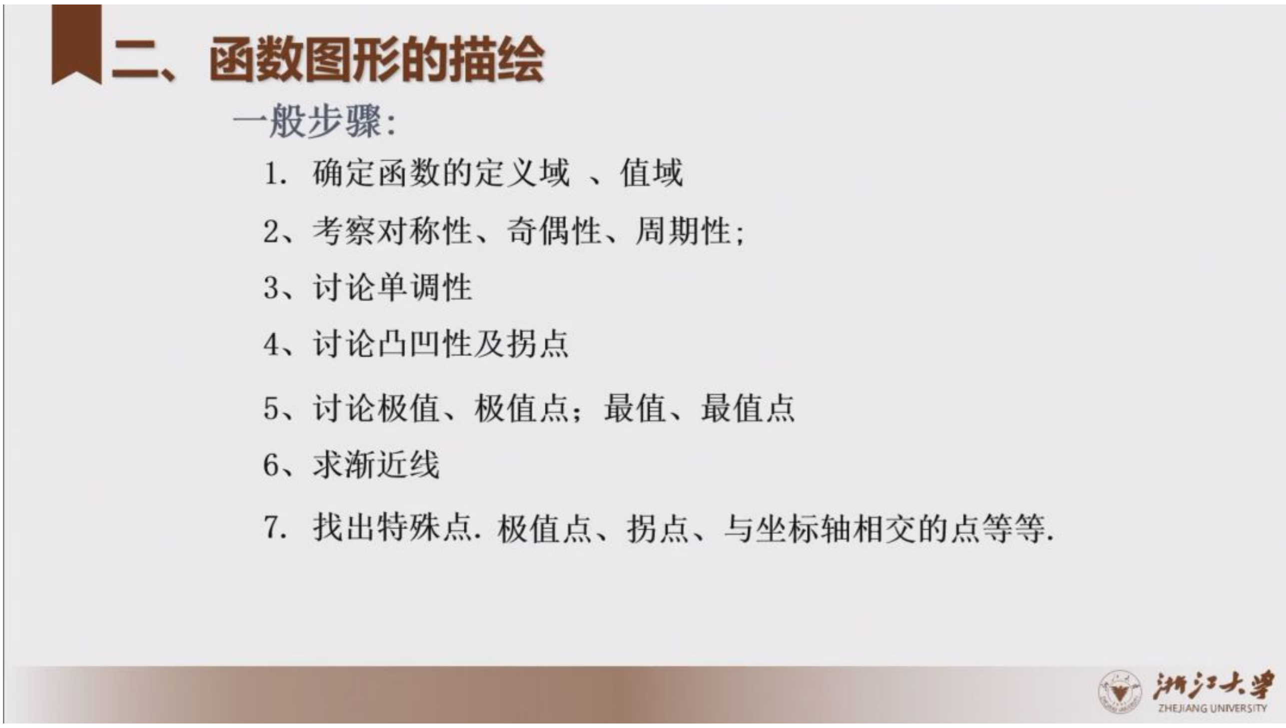
又 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)}=2$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-2)(x+3)-2x(x-1)}{x-1}=4$,

$\therefore y=2x+4$ 是曲线的一条斜渐近线.



- 二、函数图形的描绘



定义域，一二阶导，渐近线，零点

例 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 $D: x\neq 0$, 非奇非偶函数,且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-2$,

令 $f''(x)=0$, 得特殊点 $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$, 得水平渐近线 $y=-2$;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty$, 得铅直渐近线 $x=0$.

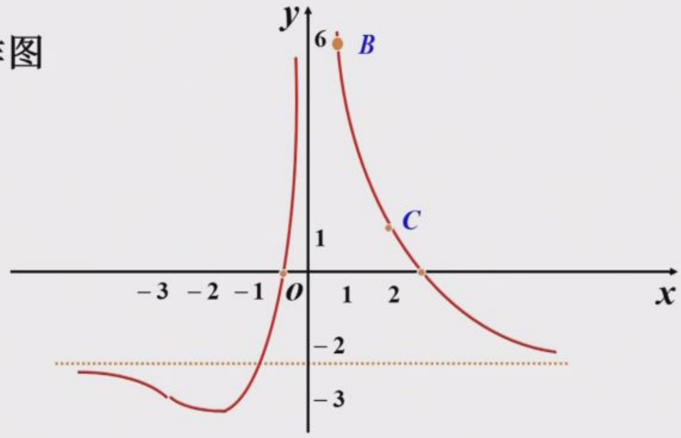
列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		间断点	

补充点：$(1-\sqrt{3},0)$, $(1+\sqrt{3},0)$;

$A\,(-1,-2)$, $B\,(1,6)$, $C\,(2,1)$.

作图



例 作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 $D:(-\infty,+\infty)$, $W:0<\varphi(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4.$

偶函数，图形关于y轴对称.

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \varphi''(x)=-\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令 $\varphi'(x)=0$, 得驻点 $x=0$,

令 $\varphi''(x)=0$, 得特殊点 $x=-1$, $x=1$.

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		拐点 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$		极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$