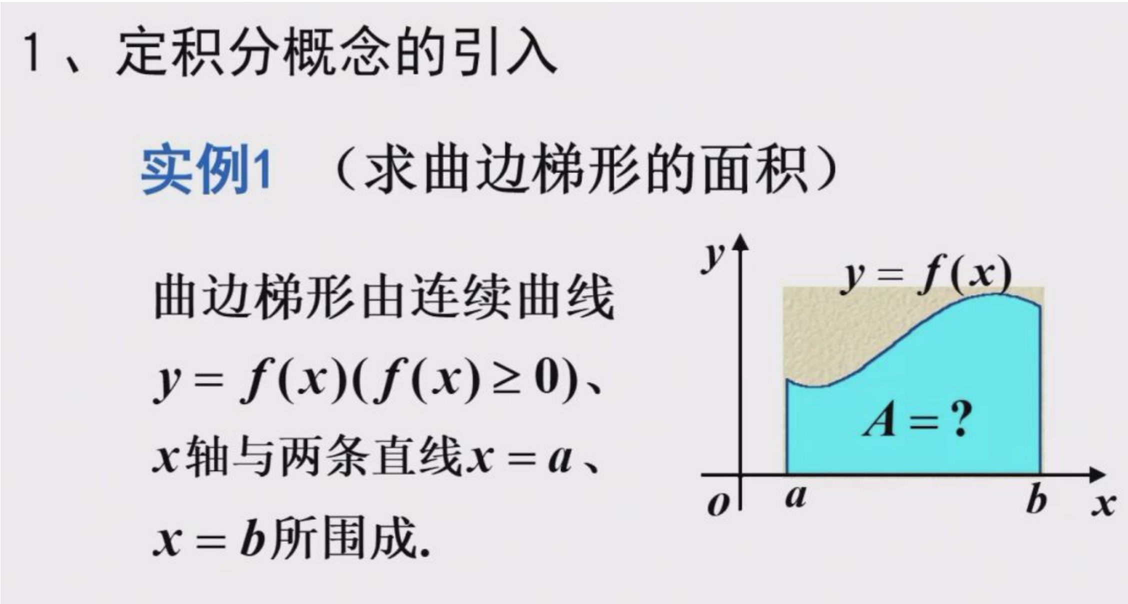
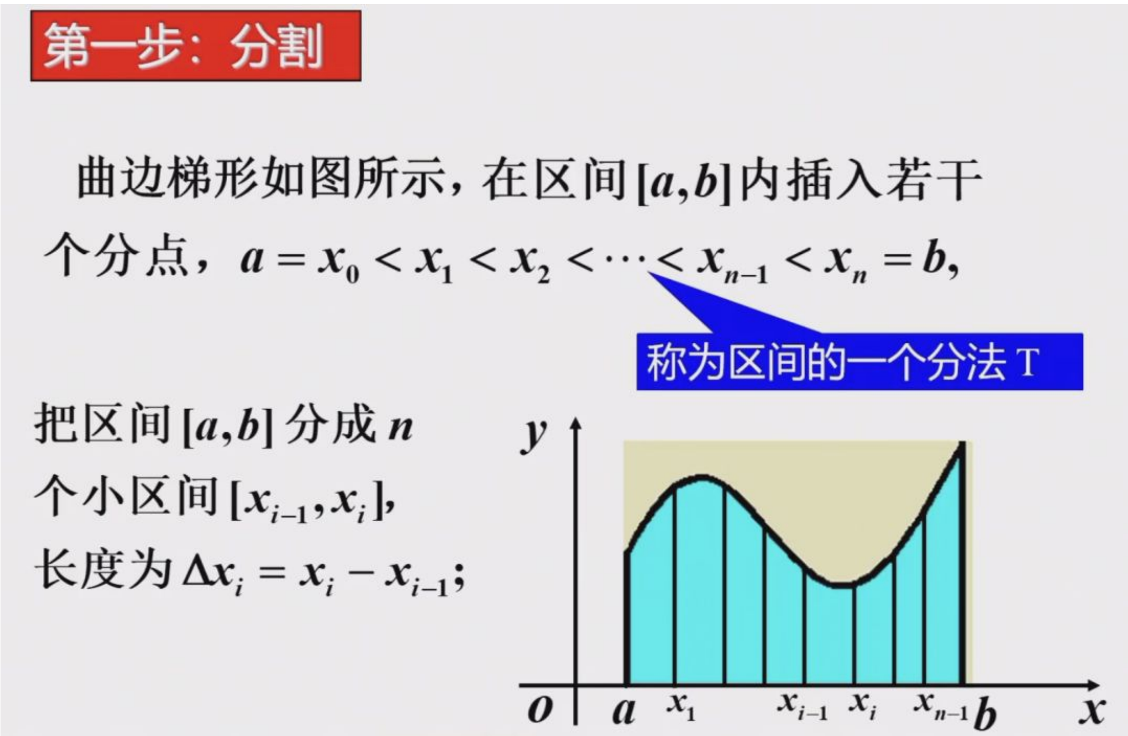
微积分（第五章）

一、定积分的概念

- 一、定积分的定义
  - 1.概念引入



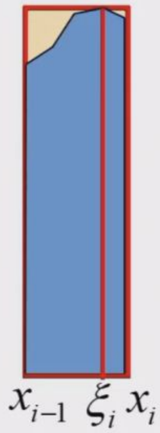


第二步：近似

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，

以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积为

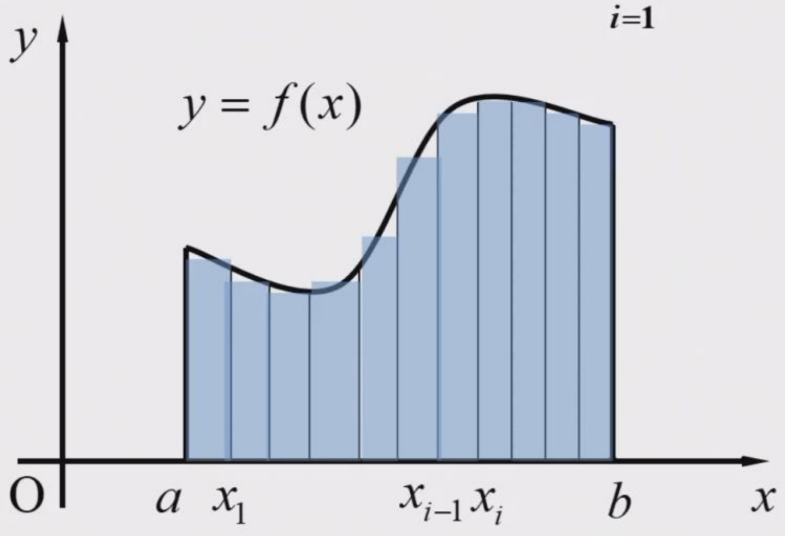
$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$



A_i 与 ξ_i 的选择有关.

第三步：求和

曲边梯形面积的近似值为 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



A 与分法T及点 ξ_i 的选择有关.

第四步：取极限

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时，

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

- 2.定义

2、定积分的定义

定义： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于确定的极限I，我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为

积分上限

积分和式

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

"$\varepsilon-\delta$" 语言描述的定积分定义：

定义 使得对任意的分割

$$T:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若存在一常数I，任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，只要$\max\{\Delta x_i : 1 \le i \le n\} = \lambda(T) < \delta$，任给$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

成立，则称I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分。

——黎曼Riemann积分

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

T

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

- 3.性质
  - （1）交换积分上下限a,b,定积分反号

性质：交换积分上、下限，定积分反号：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证：保持分法T不变，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的取值也不变.

则由a往b看，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；

由b往a看，$\Delta x_i^*=x_{i-1}-x_i=-\Delta x_i$.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{|\Delta x^*|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i^*=\lim_{|\Delta x|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(-\Delta x_i)$$

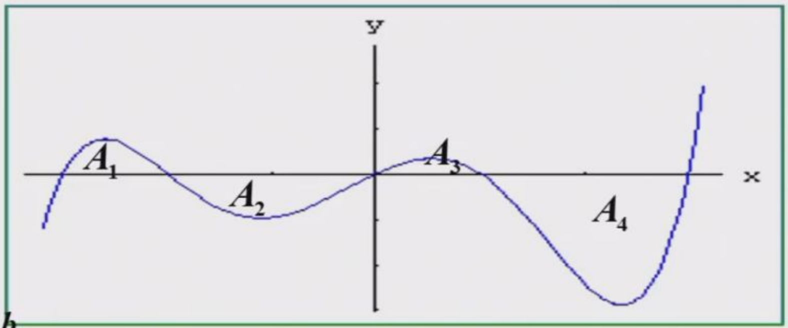
$$=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  - （2）a=b，则定积分为0

- 4.几何意义

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$ 曲边梯形的面积

$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$ 曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

- 二、可积函数类
  - 性质1：可积必有界

性质（可积的必要条件）

设$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证:（反证法）若$f(x)$在区间$[a,b]$上无界，则对于$[a,b]$内的任意分割T，必存在属于T的某个小区间Δ_k，$f(x)$在Δ_k上无界，在$i\neq k$的各个小区间Δ_k上任意取定ξ_i，并记$G=\left|\sum\limits_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$. 现对任意大的正数$M$，由于$f(x)$在$\Delta_k$上无界，故存在$\xi_k\in\Delta_k$，使得$|f(\xi_k)|>\dfrac{M+G}{\Delta x_k}$. 于是有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| > \frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k - G = M.$$

这与$f(x)$在$[a,b]$上可积相矛盾，从而定理得证.

- 推论1：有界不一定可积

例：证明狄理克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上有界但不可积.

- 定理

定理1： 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理2： 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理3： 设$f(x)$在区间$[a,b]$上单调，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

- 三、用定义计算定积分**常均分为n等分**

例 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2dx$.

解 将$[0,1]$ n等分，分点为$x_i=\frac{i}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i=x_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$ $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i$,

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

$\lambda\to 0\Rightarrow n\to\infty$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

。

例 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且取正值.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$.

证明：利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}$$

。

指数上可理解为：$\ln f(x)$在区间$[0,1]$上的一个积分和.

分点为 $x_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

因为$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$

所以$\ln f(x)$在$[0,1]$上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)dx$$

故：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$.

例：将和式极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$

表示成定积分.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx.$$

。