微积分（第三章）

六、曲率

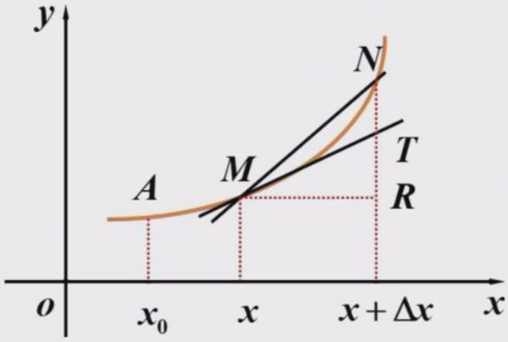
- 一、弧微分
  - 1.弧微分

一、弧微分

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.

基点：$A(x_0, y_0)$,

$M(x,y)$为任意一点,

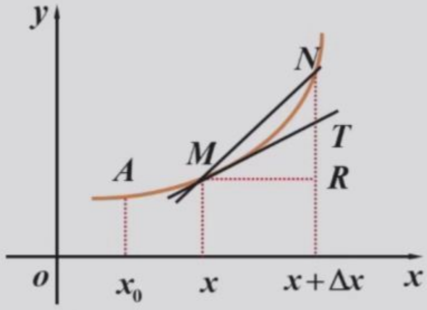


规定： (1) 曲线的正向与x增大的方向一致;

(2) $|\overset{\frown}{AM}| = s$, 当$\overset{\frown}{AM}$的方向与曲线正向一致时，$s$取正号，相反时，$s$取负号.

单调增函数 $s = s(x)$.

设$N(x+\Delta x, y+\Delta y)$, 如图,



$|MN| < \overset{\frown}{MN} < |MT| + |NT|$ 当$\Delta x \to 0$时,

$$|MN| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,|\Delta x| \to \sqrt{1+y'^2}\,|dx|,$$

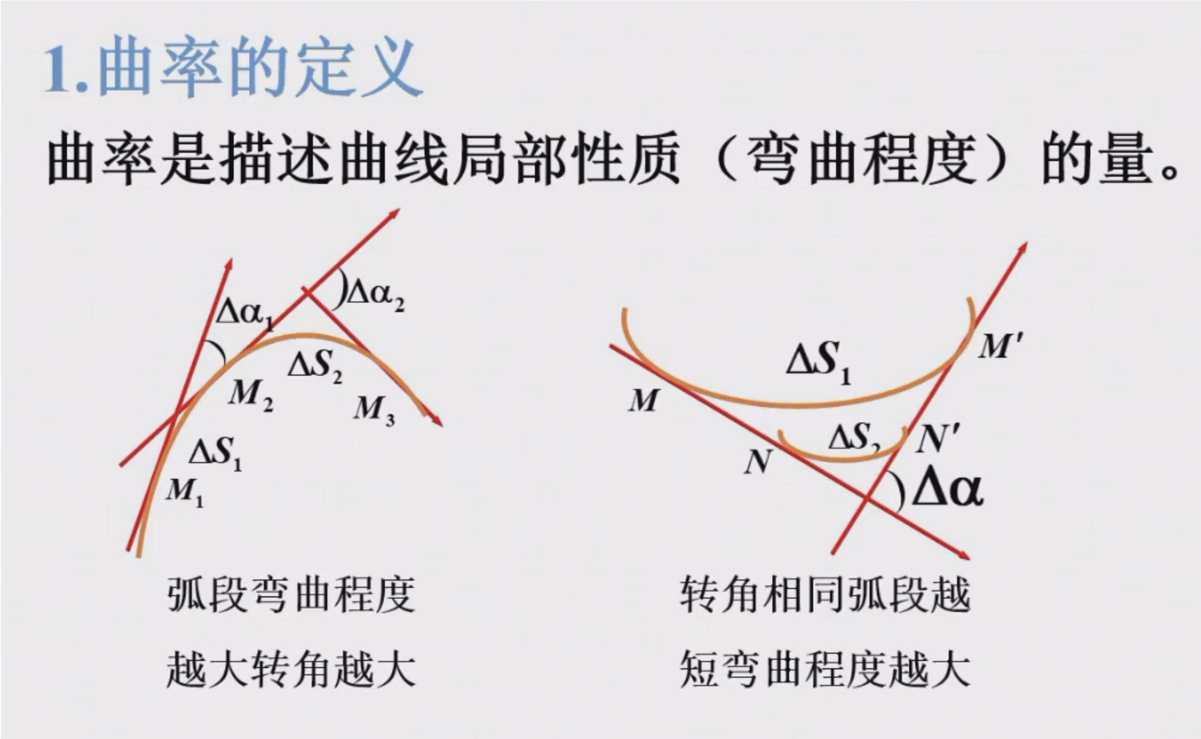
$$\overset{\frown}{MN} = |\Delta s| \to |ds|,$$

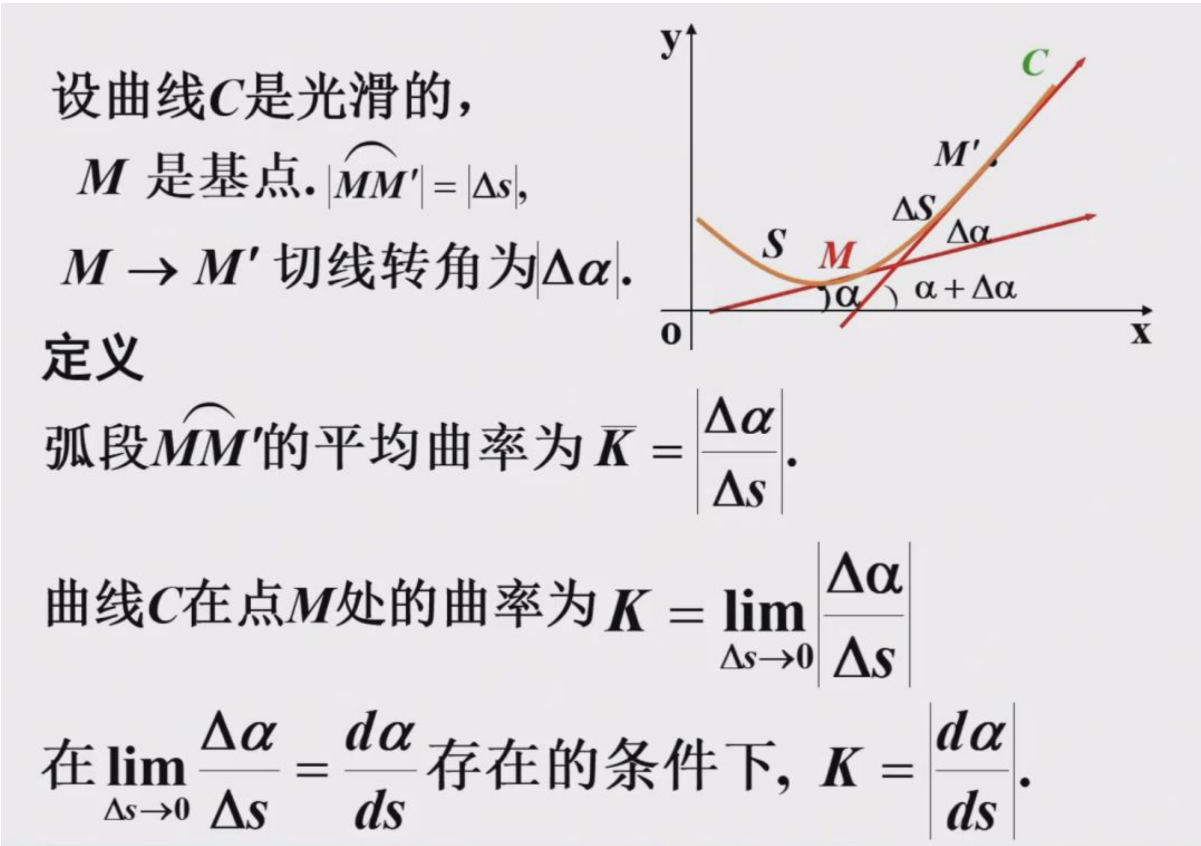
$$|MT| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}\,|dx|,$$

$$|NT| = |\Delta y - dy| \to 0, \quad 故\ |ds| = \sqrt{1+y'^2}\,|dx|.$$

$$\because s = s(x)\text{为单调增函数}, \quad 故\ ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

- 二、曲率
  - 1.定义





注意：直线曲率为0，圆曲率为1/R

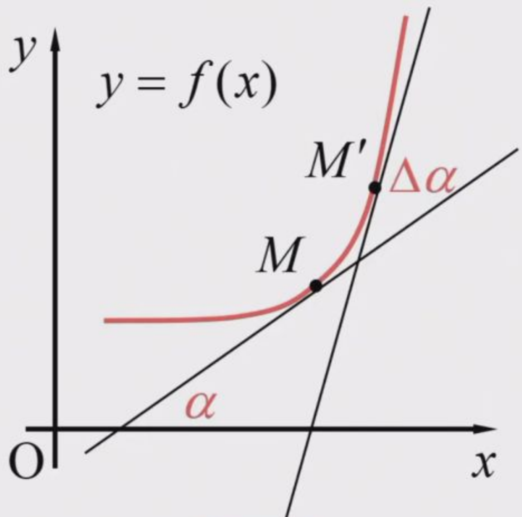
- 2.计算公式

2.曲率的计算公式

设曲线方程为 $y=f(x)$，$\boldsymbol{f(x)}$ 二阶可导，则在曲线上点 $M(x,\ y)$ 处的曲率为

$$k=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

证明



$$\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

证：如图所示，曲线在点 $\boldsymbol{M}$ 处切线的斜率为

$$y'=\tan\alpha$$

故 $\alpha=\arctan y'$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+y'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

又 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

从而 $k=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$

参数方程下曲率的计算公式

若 $\begin{cases} x = x(\theta) \\ y = y(\theta) \end{cases}$，$x(\theta), y(\theta)$ 二阶可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y''(\theta)x'(\theta) - y'(\theta)x''(\theta)}{(x'(\theta))^3}$$

将它们代入曲率计算公式中即可得：

$$k = \frac{|y''(\theta)x'(\theta) - y'(\theta)x''(\theta)|}{[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta)^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

参数方程的了解即可，不用记

- 3.例题

例：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

解：$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a,$

$$\therefore k = \frac{|2a|}{[1 + (2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

显然，当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时，k 最大.

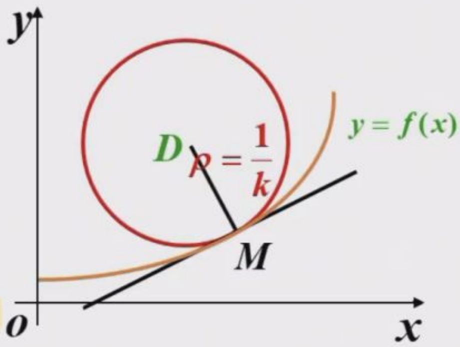
又 $\because (-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a})$ 为抛物线的顶点，

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率最大.

- 三、曲率圆

- 1.定义

定义 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k\neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D, 使 $|DM|=\frac{1}{k}=\rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆(如图),称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.



曲率圆 $y=y(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的关系

①过同一点 $y(x_0)=f(x_0)$

②有公切线 $y'(x_0)=f'(x_0)$

③圆弧与曲线在该点处曲率相等，且弯曲方向相同

$$\frac{|y''(x_0)|}{[1+y'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$$

$\Rightarrow\ |y''(x_0)|=|f''(x_0)|$ 二阶导数也相同

如何求曲率圆方程

设该圆方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$

连续求导两次，将上述条件代入得

$$\begin{cases} (x_0-a)^2+[f(x_0)-b]^2=\rho^2 \\ (x_0-a)+[f(x_0)-b]f'(x_0)=0 \\ 1+[f'(x_0)]^2+[f(x_0)-b]f''(x_0)=0 \end{cases}$$

解得

$$a=x_0-f'(x_0)\frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

$$b=f(x_0)+\frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

$$\rho=\frac{[1+f'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}$$

所以该圆唯一确定

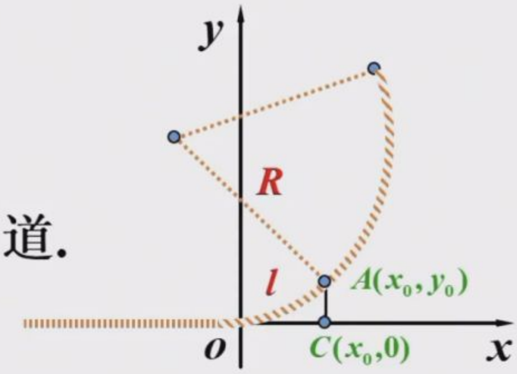
- 2.应用

例 铁轨由直道转入圆弧弯道时,若接头处的曲率突然改变,容易发生事故,为了行驶平稳,往往在直道和弯道之间接入一段缓冲段,使曲率连续地由零过渡到$\frac{1}{R}$(R为圆弧轨道的半径).

通常用三次抛物线$y=\frac{1}{6Rl}x^3,\ x\in[0,x_0]$.

作为缓冲段OA,其中l为OA的长度,验证缓冲段OA在始端O的曲率为零,并且当$\frac{l}{R}$很小($\frac{l}{R}<<1$)时,在终端A的曲率近似为$\frac{1}{R}$.

证 如图



x的负半轴表示直道，

$\overset{\frown}{OA}$是缓冲段，$\overset{\frown}{AB}$是圆弧轨道.

在缓冲段上，

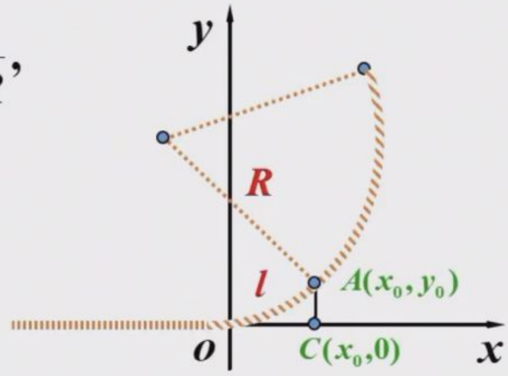
$$y' = \frac{1}{2Rl}x^2, \quad y'' = \frac{1}{Rl}x.$$

在$x=0$处，$y'=0, y''=0$，故缓冲始点的曲率 $k_0 = 0$.

实际要求 $l \approx x_0$，

有 $y'\big|_{x=x_0} = \frac{1}{2Rl}x_0^2 \approx \frac{1}{2Rl}l^2 = \frac{l}{2R}$，

$y''\big|_{x=x_0} = \frac{1}{Rl}x_0 \approx \frac{1}{Rl}l = \frac{1}{R}$，



故在终端A的曲率为

$$k_A = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=x_0} \approx \frac{\frac{1}{R}}{(1+\frac{l^2}{4R^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$\because \frac{l}{R} << 1$， 略去二次项$\frac{l^2}{4R^2}$， 得 $k_A \approx \frac{1}{R}$.