微积分

二、数列的极限

- 一、数列极限的定义

定义: 按自然数1,2,3,⋯编号依次排列的一列数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$(1)
称为无穷数列,简称数列.其中的每个数称为数列的项,x_n称为通项(一般项).数列(1)记为$\{x_n\}$.

从函数的角度看:

  - (一) 数列

注意：高等数学中数列是无穷的

从函数的角度看：数列可理解为定义域为N^+的函数$x_n = f(n)$, $n \in N^+$.当自变量依次取1,2,3…等一切正整数时，对应的函数值就排成数列.

  - (二) 数列极限:

定义 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在自然数N,使得对于$n > N$时的一切x_n,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立,那末就称常数a是数列x_n的极限,或者称数列x_n收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad 或 x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

$\varepsilon - N$定义: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

其中 $\forall$:每一个或任给的;

4、定义中的不等式$|x_n - a| < \varepsilon (n > N)$是指下面一串不等式

$$|x_{N+1} - a| < \varepsilon \quad |x_{N+2} - a| < \varepsilon \quad |x_{N+3} - a| < \varepsilon$$

…… 都成立，

而对 $|x_1 - a| < \varepsilon$ …… $|x_N - a| < \varepsilon$

则不要求它们一定成立

N仅是下标的一个界限，N可以是实数。**不一定是整数** *ε刻画与a的接近程度，无论要求多么高，都存在N满足要求* 发散数列：极限a不存在； 收敛数列：极限a存在；

- （三）定理

定理：改变数列的有限项，不改变数列的收敛性与极限。

证(1)：数列$\{a_n\}$收敛，且极限为a，不妨设改变了前k项，得到数列$\{b_n\}$.

即： $\{a_n\}$： $a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \ldots$

$\{b_n\}$： $b_1 \quad b_2 \ldots \quad b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \ldots$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$， $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N_1$，当$n > N_1$时恒有$|a_n - a| < \varepsilon$，

取$N = \max\{k, N_1\}$，当$n > N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$

当$n > N \geq k$时，有$a_n = b_n$，$\therefore |b_n - a| < \varepsilon$成立，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.从而$\{b_n\}$收敛，且极限认为$a$.

(2)：数列$\{a_n\}$不收敛，若假设数列$\{b_n\}$收敛.

则数列$\{a_n\}$可看成数列$\{b_n\}$改变了有限项后得到的数列.

由(1)知：数列$\{a_n\}$收敛，与假设矛盾．所以$\{b_n\}$发散.

- （四）求极限----用定义证明（分析法）**本质是建立ε与N的确定关系** *标星号的结论可直接用*

例* 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0.(k>0\text{常数})$

证: $\forall\varepsilon>0$, 若要 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$, $\Leftrightarrow\dfrac{1}{n^k}<\varepsilon$

$\Leftrightarrow n^k>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\Leftrightarrow$ 只要 $n>\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}$.

直接法

取 $N=\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}$, 当 $n>N$ 时, 都有 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$.

直接法：从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中解出 $n>N(\varepsilon)$.

注意：一定化成n>某个式子的形式

例: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 其中 $|q|<1$.

证: 若 $q=0$ 则上式显然成立　下证 $q\neq0$ 的情形

任给 $\varepsilon>0$, (不妨设 $\varepsilon<1$)

$|x_n-0|=|q^n|<\varepsilon$, $\quad n\ln|q|<\ln\varepsilon$, $\quad\therefore n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,

取 $N=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $|q^n-0|<\varepsilon$,

注 在论证极限问题时，都可以假设ε<1，因为若对小于1的ε已经得到项数指标N，则对于大于1的ε上述项数指标N仍合乎定义要求。

- （五）求极限----用定义证明（放大法）

例： 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

证明: $|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right| = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{a^2}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

(若 $n>a^2$ 则 $\frac{a^2}{n}<1$)

故 $\forall\varepsilon>0$ $N=\max\left\{\frac{1}{\varepsilon},a^2\right\}$ 则当$n>$N时，有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right| < \frac{1}{n}\cdot\frac{a^2}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$$

放大法

放大法自由度高，只要不变号，怎么方便怎么来 *下例很重要*

证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证：首先 $\sqrt[n]{n}>1$ 记 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$

$$\Rightarrow n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots$$

$$\ge 1+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2$$

$\Rightarrow 0<h_n^2\le\frac{2}{n}$ 于是 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|h_n|<\sqrt{\frac{2}{n}},$

只要 $\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n}<\varepsilon^2. \Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}.$ 取$N=\frac{2}{\varepsilon^2},$

则当$n>$N时，有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon, \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

对于难解的函数常用放大法如上下

【方法二】: • $\sqrt[n]{n}=\left(\sqrt{n}\times\sqrt{n}\times\underbrace{1\times\cdots\times1}_{(n-2)\text{个}}\right)^{\frac{1}{n}}<\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$ (均值不等式)

因此，对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon.$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

n足够大时，总有$a^n>n!$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ * a为常数.

证明：i) $a=0$时， 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}0=0.$

ii) $a\neq 0$时， 设$|a|<m$， m是正整数，为常数.

设$\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}=K$是正常数，从而

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\cdot\frac{|a|}{n}<\frac{K|a|}{n}(\text{令}n>m).$$

因此，$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$,只要$\frac{K|a|}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{K|a|}{\varepsilon}$.

取$N=\max\left\{\frac{K|a|}{\varepsilon},m\right\}$，当$n>N$时，就有$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$. $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

注：将大于一的有限项合并为K，将小于1的无限项去掉

- 二、收敛数列的性质
  - （一）唯一性:

1、数列极限的唯一性

定理：如果数列 $\{x_n\}$收敛, 那么它的极限唯一.

  - （二）有界性:

2、数列极限的有界性

定义：对数列x_n，若存在正数M，使得一切 x_n，都满足不等式$|x_n|\leq M$，则称数列$\{x_n\}$有界，否则，称为无界.

例如,数列$x_n=\frac{n}{n+1}$; 有界 数列 $x_n=2^n$.无界

意义：数轴上对应于有界数列的点x_n都落在闭区间$[-M,M]$上.

定理（收敛数列的有界性）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证：设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，　由定义,对于 $\varepsilon = 1$，
则 $\exists N$，使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < 1$，

于是，当 $n > N$ 时，

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$，

$\therefore \forall x_n \in \{x_n\}, |x_n| \le M.$　故数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

注意：有界性是数列收敛的必要条件.

推论：无界数列必定发散.

- （三）保号性：
    - 1.两数列：

3、数列极限的保号性

定理：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $a < b$，则存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时(即 n 充分大时)，有 $a_n < b_n$.

证明：$\because \lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$.

当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \frac{b-a}{2}$，　即 $\frac{3a-b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}$，

当 $n > N_2$ 时，$|b_n - b| < \frac{b-a}{2}$，　即 $\frac{a+b}{2} < b_n < \frac{3b-a}{2}$，

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，

当 $n > N$ 时，都有　$a_n < \frac{b+a}{2}$ 且 $b_n > \frac{b+a}{2}$，

逆命

题：保号不等式

定理(保号不等式)：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且存在$N_0$，当$n > N_0$时，都有$a_n \le b_n$. 则$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

证：设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 任给$\varepsilon > 0$，分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得当时$n > N_1$有$a - \varepsilon < a_n$， (1)

当$n > N_2$时有$b_n < b + \varepsilon$. (2)

取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$，则当时，按假设及不等式(1)(2)有$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon$，由此得到$a < b + 2\varepsilon$，

由ε的任意性推得$a \le b$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

注：如果把定理中条件$a_n \le b_n$换成严格不等式$a_n < b_n$，此时结论不可换作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，仍有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- 2.常数推论：

定理(保号性）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0 (a < 0)$，则对任何常数$\eta \in (0, a)$ $(\eta \in (a, 0))$，存在自然数N，使得当$n > N$时有$x_n > \eta > 0 (x_n < \eta < 0)$.

证：设$a > 0$. 取$\varepsilon = a - \eta (> 0)$，则存在正数$N$，使得当$n > N$时有$x_n > a - \varepsilon = \eta$，这就证得结果.

对于$a < 0$的情形，也可类似地证明.

数列极限的保号性，在关于数列极限证明中经常会用到，注意领会.

- 在保号性的运用中，经常取$\eta = \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a$等正常数；
- 若数列$a_n > 0$，但无法保证数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是有界的；

但是，若$a_n > \alpha > 0$，则$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{\alpha}$. 这便保证了数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是有界的.

- （四）四则运算法则：**前提：两个数列中至少有一个存在极限**

收敛数列的四则运算

定理：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则数列 $\{a_n \pm b_n\},\{a_n \cdot b_n\}\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}(b \neq 0)$

的极限都存在，且

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$ 特别地当 k 为常数时，

有 $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ka.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0).$

证： 由于 $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$ 及 $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$,因此只需

证明关于和、积与倒数 运算的结论即可 .

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

任给 $\varepsilon > 0$,分别存在正数 N_1 与 N_2,

使得 $|a_n - a| < \varepsilon$,当 $n > N_1$, $|b_n - b| < \varepsilon$ 当 $n > N_2$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

则当 $n > N$ 时上述两不等式同时成 立，从而有

(1) $|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

(2) $|a_nb_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$

$\le |(a_n - a)||b_n| + |a||b_n - b|$

由收敛数列的有界性定理,存在正数 M,对一切 n 有 $|b_n| < M$.

于是,当 $n > N$ 时可得 $|a_nb_n - ab| < M\varepsilon + |a|\varepsilon < (M + |a|)\varepsilon$

由 ε 的任意性,这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \ne 0, \because \big||b_n| - |b|\big| \le |b_n - b| < \varepsilon, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b| > 0.$

根据收敛数列的保号性,存在正数 N_3 使得当 $n > N_3$ 时有 $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$.

取 $N' = \max\{N_2, N_3\}$,则当 $n > N'$ 时,有 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_nb|} < \frac{2|b_n - b|}{b^2} < \frac{2\varepsilon}{b^2}$.

由 ε 的任意性,这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

而且

例:证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0n^m + a_1n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} 0, & k > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k = m \end{cases}$,

其中, $m \le k, a_0 \ne 0, b_0 \ne 0$.

证:原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^m(a_0 + a_1n^{-1} + \cdots + a_mn^{-m})}{n^k(b_0 + b_1n^{-1} + \cdots + b_kn^{-k})} \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n^{m-k}G(n)$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = \dfrac{a_0}{b_0}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{m-k} = \begin{cases} 0, & k > m \\ 1, & k = m \end{cases}$

- 三、数列极限存在的准则
  - (一)夹逼定理:

三、极限存在准则

1.夹逼准则

准则Ⅰ 如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

那末数列 x_n 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证: $\because y_n \to a, \quad z_n \to a, \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立,

即 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$

当 $n > N$ 时, 恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore$

- 例：**注意：夹逼的两个数列极限必须相同**
  - （1）分母改大小

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

控制住最高次项系数不变，通过改变其他项的系数改变分母大小，从而构造两个极限相同的数列夹逼

例题：计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1^2}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2^2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$.

解：记 $S_n=\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1^2}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2^2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}$，则：

$$S_n<\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+1^2}}<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},\quad S_n>\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}=\frac{1}{3}$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1^2}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2^2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)=\frac{1}{3}$.

注意：$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- （2）乘方开方互抵，提系数凑小于1

例：求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解：$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}$

而 $1<\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1<3$,

故 $3<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$,

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\cdot 3^{\frac{1}{n}})=3$,

由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

例：求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$,

(其中 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为正常数, $k\in Z^+$.)

解：记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则有

$$a=\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{ka^n}=a\sqrt[n]{k},$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{k}=1$, 故由夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

-

- （4）[ ]取整换数域

例：求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{\beta}$，其中 β 是任意常数.

解：当 $\beta=0$ 时，结论显然成立．当 β 为正整数 m 时，

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^m=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})=1\cdot1\cdots1=1.$$

当 β 为负整数 $-k$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{-k}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^k}=\frac{1}{1}=1.$

一般地, 设 $[\beta]=m$, 则 m 是固定整数, 且 $m\le\beta<m+1$,并有

$$(1+\frac{1}{n})^m\le(1+\frac{1}{n})^{\beta}<(1+\frac{1}{n})^{m+1},$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^m=1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{m+1}=1$, 由夹逼定理,得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{\beta}=1$.

- （二）子数列的收敛性：
  - 1.子列：

2、子数列的收敛性

所谓子数列是指：数列中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列（或子列）.

例如，

$$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$$
$$\Downarrow$$
$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

注意：

在$\{x_{n_k}\}$中，x_{n_k}是第k项，而x_{n_k}在$\{x_n\}$中是第n_k项，显然$n_k \geq k$

  - 2.定理：

定理(收敛数列与子数列间的关系)
数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是它的任一子数列也收敛，且极限也是a.

证：必要性. 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \therefore \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

取$K = N$，则当$k > K$时，$n_k > n_K = n_N \geq N.$

$\therefore \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \quad \therefore \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$

充分性. 若数列$\{x_n\}$的任一子数列$\{x_{n_k}\}$都收敛且极限相等，由于$\{x_n\}$本身就是$\{x_n\}$的一个子列，故$\{x_n\}$收敛.

反之

定理：数列$\{x_n\}$发散的充要条件是$\{x_n\}$中有两个子数列的极限存在但不相等，或有一个子数列的极限不存在.

常用两个子数列极限存在但不相等来判断一个数列发散.

证明：数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 是发散的.

判断：数列 $\{\sin\frac{n\pi}{4}\}$ 的敛散性。

- （三）单调有界定理：

3、单调有界定理

定义：若数列$\{x_n\}$满足关系式$x_n \le x_{n+1}(x_n \ge x_{n+1})$，则称$\{x_n\}$为递增（递减）数列.
递增数列和递减数列统称为单调数列.

定理（单调有界定理）在实数系中单调有界数列必有极限.

证：不妨设$\{x_n\}$为有上界的递增数列.
由确界原理知，数列$\{x_n\}$有上确界，记$a=\sup\{x_n\}$.
下面证明a就是$\{x_n\}$的极限.
事实上，任给$\varepsilon>0$，按上确界的定义，存在数列$\{x_n\}$中的某一项x_N，
使得$a-\varepsilon < x_N$.又由$\{x_n\}$的递增性，当$n\ge N$时有$a-\varepsilon<x_N\le x_n$，
另一方面，由于a是$\{x_n\}$的一个上界，故对一切x_n都有$x_n\le a<a+\varepsilon$.
所以当$n\ge N$时有$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
同理有下界的递减数列必有极限，其极限为它的下确界.

例：设$x_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}, n=1,2,\cdots$，
其中实数$\alpha\ge 2$.证明数列$\{x_n\}$收敛.

证：显然$\{x_n\}$是递增的，下证$\{x_n\}$有上界.事实上，

$$x_n\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

$$=2-\frac{1}{n}<2,\qquad n=1,2,\cdots.$$

于是有单调有界定理，$\{x_n\}$收敛.

注意：先证明极限存在才能用四则运算求极限

例：设 $x_1>0$，证明 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ 有极限 $(a>0)$

证：显然 $x_n>0 \Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ge\sqrt{a}$

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(\frac{a}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-x_n^2}{x_n}\le 0$ 即 x_n 单调减，有下界

故由单调有界原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A>0$ 在 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ 两边取极限得

$A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$ 解得 $A=\sqrt{a}, A=-\sqrt{a}$（舍去）

例：证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$（$n$重根式）的极限存在。

证：显然 $x_{n+1}>x_n$，$\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的；

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$，假定 $x_k<3$，$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$，

$\therefore \{x_n\}$ 是有界的；$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$，

$A^2=3+A$，解得 $A=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，$A=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$（舍去）$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

注意：先证明极限存在，再求具体的极限值.

证明：数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛.

证：由牛顿二项式展开公式

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

类似地，有 $x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

下方法常用于证：1/1!+1/2!+1/3!+……+1/n!<2

比较 x_n 与 x_{n+1} 的展开式可以看出，除前面两项外，x_n的每一项都小于x_{n+1} 的对应项，并且x_{n+1}还多了最后的大于零的一项，因此：$x_n < x_{n+1}$ 即 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又 $x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

【证明】：设 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【方法二】：(1) 记 $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，根据均值不等式，有

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times 1 < \left[\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\} \text{ 单调递增.}$$

$$\frac{1}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \times 1 < \left[\frac{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{b_{n+1}} \Rightarrow b_{n+1} < b_n \Rightarrow \{b_n\} \text{ 单调递减.}$$

由上可得 $2 = a_1 \le a_n < b_n \le b_1 = 4.$

(1+1/n)^n递增是已知

【注】：如果仅仅为了证明 a_n的有界，没必要引进数列 $\{b_n\}$.

因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} < \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = 1$，因此，$a_n < 4$.

而 $\{a_n\}$ 单调递增，因此，$2 = a_1 \le a_n < 4$.

综上所述，数列$\{x_n\}$是单调增加且有上界的，由极限存在准则可知，该数列的极限存在，通常将它记为e，即

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.\quad e\text{ 称为自然数.}$$

$e=2.718281828459045\cdots$

ZHEJIANG UNIVERSITY

有趣的结果：数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right\}$的每一项都是有理数，但它的极限$e$却是无理数。

事实上：对任何一无理数μ，都可以构造一个有理数列$\{a_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mu$.

ZHEJIANG UNIVERSITY

- (四)数列极限存在的准则
  - 1.致密性定理

4、数列极限存在的准则

定理：(Weierstrass定理—致密性定理)由任何有界数列必存在收敛的子数列.

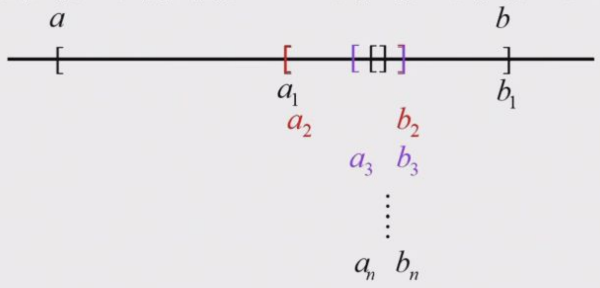
证明：设数列$\{x_n\}$有界：$a\le x_n\le b$.

将区间$[a,b]$二等分，则其中至少有一个小区间含有数列$\{x_n\}$的无穷多项，记为$[a_1,b_1]$.

再将$[a_1,b_1]$二等分，又可得到一个含有数列无穷多项的新的小区间$[a_2,b_2]$.

ZHEJIANG UNIVERSITY

$$\cdots \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$



左端点构成单调增加的数列 $\{a_n\}$，且有上界.
右端点构成单调减少的数列 $\{b_n\}$，且有下界.
单调有界定理可知，两数列有极限，记为

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$，并满足 $a_n \le \alpha \le \beta \le b_n$.

第 n 个小区间 $[a_n, b_n]$ 的区间长度为 $\dfrac{b-a}{2^n}$ $(n \in Z^+)$.

即有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$,

故有 $\alpha=\beta$，即：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

在区间 $[a_n, b_n]$ 中任取数列的一个元素，记为 x_{k_n}，

则得到一个数列 $\{x_{k_n}\}$，它是原数列的子数列，且

$$a_n \le x_{k_n} \le b_n$$

由夹逼定理：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = \alpha$.

- 1′.区间套定理

上面所用到的方法归结起来称为“区间套定理”

定理：（区间套定理）

设 $\{[a_k, b_k]\}$ 是数轴上的一串闭区间，它们满足：

(1) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$, $k \in Z^+$;

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty} |b_k - a_k| = 0$,

则存在唯一的实数 $\alpha \in [a_k, b_k]$，$k \in Z^+$，且

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = \alpha$$

（其中，$|b_k - a_k|$ 为区间 $[a_k, b_k]$ 的长度.）

■ 2.柯西收敛准则：

柯西收敛准则：

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ (即数列 $\{a_n\}$ 收敛) $\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 m, $n>N$ 时, $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

例：证明 $\forall x\in R$,

数列 $\{\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}\}$ 收敛.

证：记 $x_n=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}$, $\forall x\in R$ 有

$$|x_m-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin mx}{2^m}\right|$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)<\frac{1}{2^n},$$

从而 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $m,n>N$ 时, 有

$$|x_m-x_n|<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^N}<\varepsilon$$

由柯西收敛准则可知, 该数列是收敛的.

证明：任一无限十进小数 $\alpha=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的 n 位小数部分 $(n=1,2,\cdots)$

所组成的数列： $\frac{b_1}{10},\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\cdots,\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\cdots$

满足柯西条件(从而必收敛),其中 b_k 为 $0,1,2\cdots9$ 中的一个数, $k=1,2,\cdots$

证： 记 $a_n=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}$.

不妨设 $n>m$, 则有 $|a_n-a_m|=\frac{b_{m+1}}{10^{m+1}}+\frac{b_{m+2}}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}$

$$\le\frac{9}{10^{m+1}}(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-m-1}})=\frac{1}{10^m}(1-\frac{1}{10^{n-m}})<\frac{1}{10^m}<\frac{1}{m}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 则对一切 $n>m>N$ 有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$. 得证

推

柯西收敛准则中，m和n是任意两个大于N的正整数，不妨认为$m > n$，于是 $m = n + p$，p为任意正整数p.

推论：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ (即数列 $\{x_n\}$ 收敛) $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 对一切正整数p, 都有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

定理：数列$\{x_n\}$发散的充要条件是存在 $\varepsilon_0 > 0$，
对无论多大的N，总存在$n_0 > N$，存在正整数p_0，
使 $|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0$.

----用于判断数列发散的准则.

论：

例：证明数列$\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\}$是发散的.

证：记 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

由于 $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$$> \frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

故取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ 时, 则不论 N 取何值, 当$n > N$ 时, 均有

$$|x_{2n} - x_n| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

由柯西收敛准则可知，该数列是发散的.