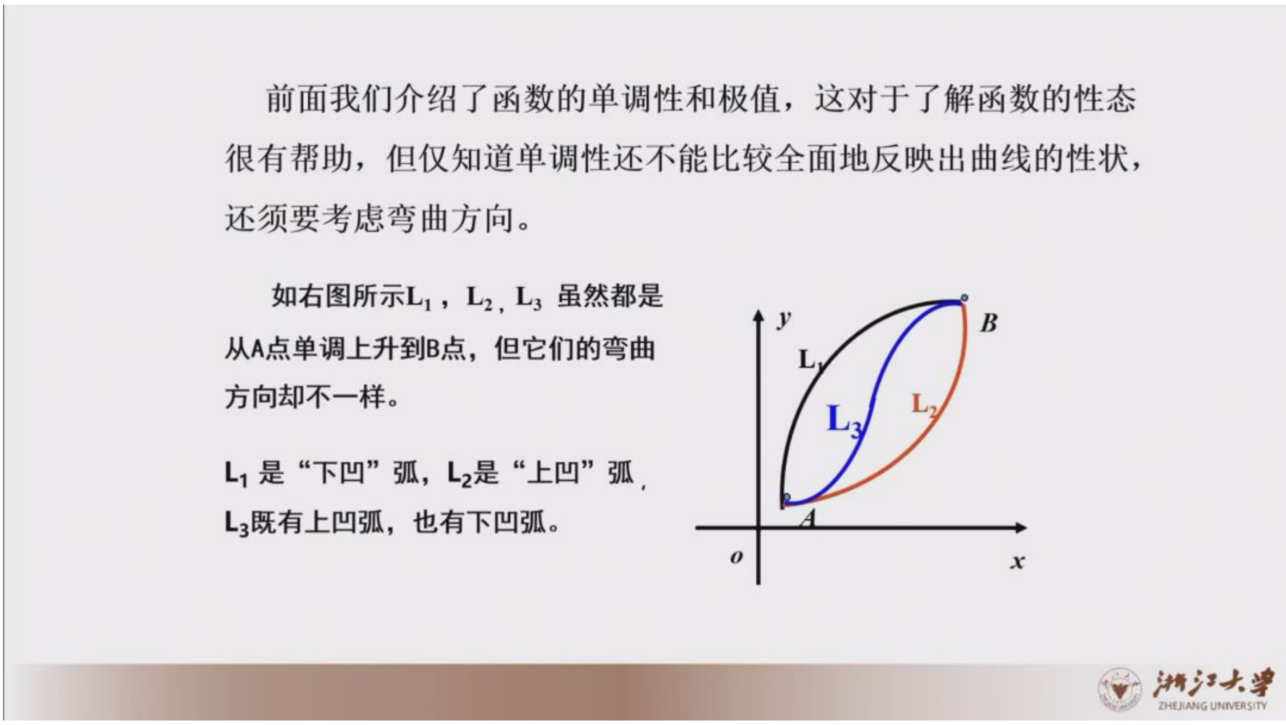
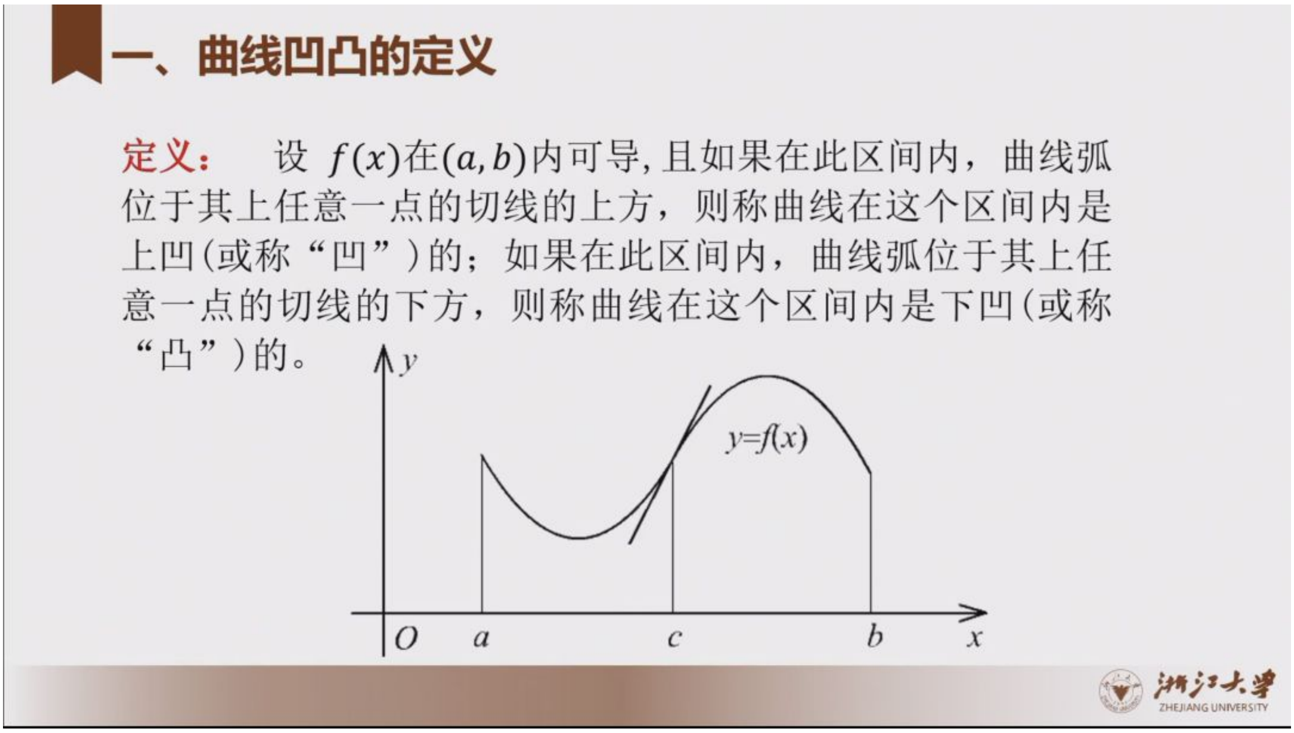
微积分（第三章）

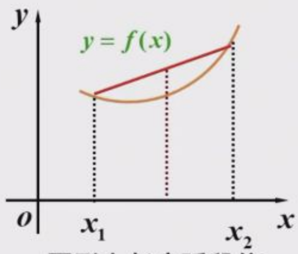
四、函数图像的凹凸性与拐点

- 一、凹凸性

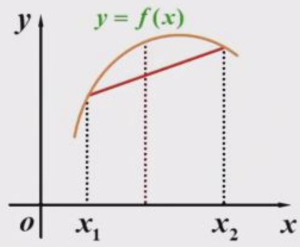


下凹即凸，上下相对切线而言





图形上任意弧段位
于所张弦的下方

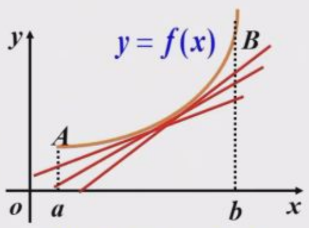


图形上任意弧段位
于所张弦的上方

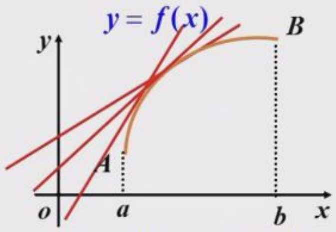
定义：设$f(x)$在区间 I 上连续,如果对 I上任意两个点 x_1, x_2,

恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,那么称 $f(x)$ 在 I 上的图的图形是上凹的(或凹弧);如果恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,那么称 $f(x)$ 在I 上的图的图形是下凹的(或凸弧).

二、定理（曲线凹向的判定定理)



$f'(x)$ 递增　$y''>0$



$f'(x)$ 递减　$y''<0$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数,那么

(1)若在 (a,b)内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上图形是上凹的

(2)若在 (a,b)内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上图形是下凹的

证明：对于$\forall x_0 \in (a,b)$,利用一阶泰勒展开式，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

其中$\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$.

(1)在x_0某个邻域内，$f'' \geq 0$,则有$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$,
由x_0的任意性知：f在(a,b)内上凹.

(2)在x_0某个邻域内，$f'' \leq 0$,则有$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x)$,
由x_0的任意性知：f在(a,b)内下凹.

证明：(2)$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ 记 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$

对$f(x)$在$[x_1, x_0],[x_0, x_2]$上 分别应用L—定理，得

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)h \qquad (x_1 < \xi_1 < x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)h \qquad (x_0 < \xi_2 < x_2)$$

两式相减，得 $2f(x_0) - [f(x_1) + f(x_2)] = [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]h$

由假设 $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$内单调减

由$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) - f'(\xi_2) > 0 \Rightarrow 2f(x_0) - [f(x_1) + f(x_2)] > 0$

即 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

这就证明了$f(x)$在(a,b)内是下凹的 同理可证（1）

例： 研究 $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \ (a_1 > 0)$ 的凹凸性.

解： 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3, \quad y'' = 6a_1x + 2a_2,$$

故 $x > -\dfrac{a_2}{3a_1}$ 时，$y'' > 0$， 曲线在 $(-\dfrac{a_2}{3a_1}, +\infty)$ 中是上凹的；

$x < -\dfrac{a_2}{3a_1}$ 时，$y'' < 0$， 曲线在 $(-\infty, -\dfrac{a_2}{3a_1})$ 中是下凹的；

$x = -\dfrac{a_2}{3a_1}$ 时，$y'' = 0$， $x = -\dfrac{a_2}{3a_1}$ 是曲线凹凸性的分界点.

例： 证明：$x \neq y$ 时，$\dfrac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}$.

证 令 $f(t) = e^t$， $t \in (-\infty, +\infty)$，

$$f'(t) = f''(t) = e^t > 0, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

故 $f(t) = e^t$ 所对应的曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内是上凹的.

$\forall\, x, y \in (-\infty, +\infty)$，由曲线凹性的定义，有

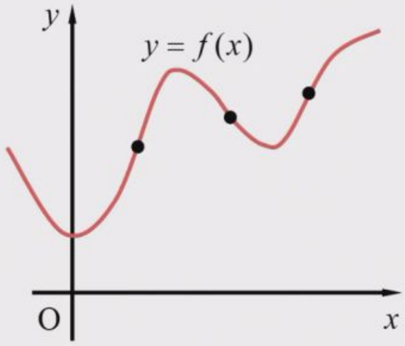
$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}, \quad (x \neq y).$$

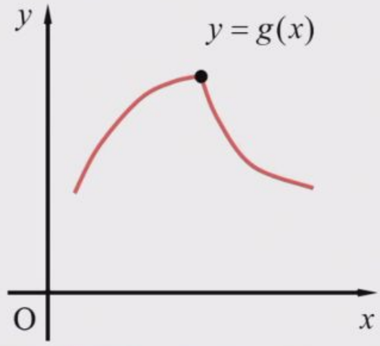
- 二、拐点

三、曲线的拐点及其求法

1. 定义

连续曲线上凹与下凹的分界点称为**曲线的拐点.**





2. 拐点的求法

定理(拐点的必要条件) 如果$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内存在二阶导数，则点$(x_0,f(x_0))$是拐点的必要条件是$f''(x_0)=0$. 反之不成立.

证 $\because f(x)$ 二阶可导，$\therefore f'(x)$ 存在且连续，

又 $\because (x_0,f(x_0))$ 是拐点，

则 $f''(x)=[f'(x)]'$在x_0两边变号，

$\therefore f'(x)$在x_0取得极值，由可导函数取得极值的条件，

$\therefore f''(x)=0.$

定理（拐点的第一充分条件）

设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导,且$f''(x_0)=0$,

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号,点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号,点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例: 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸的区间.

解: $\because D:(-\infty,+\infty)$　$y'=12x^3-12x^2$,　$y''=36x(x-\frac{2}{3})$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	上凹	拐点 $(0,1)$	下凹	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	上凹

凹凸区间为 $(-\infty,0]$, $[0,\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},+\infty)$.

定理（拐点的第二充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$,那末 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

原因：$\because f'''(x_0)\neq 0$，不妨设 $f'''(x_0)>0$

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0 \quad \Rightarrow f''(x)<0 \quad (x<x_0)$$

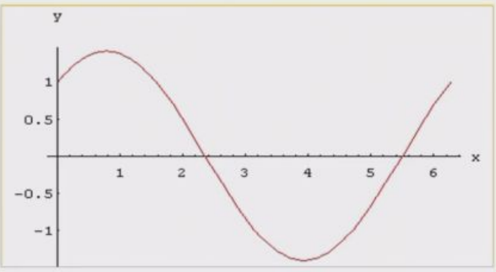
$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0 \quad \Rightarrow f''(x)>0 \quad (x>x_0)$$

例： 求曲线 $y=\sin x+\cos x$ 在$[0,2\pi]$内 的拐点.

解： $y'=\cos x-\sin x$, $y''=-\sin x-\cos x$,

令 $y''=0$, 得 $x_1=\dfrac{3\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{7\pi}{4}$.

$y'''=-\cos x+\sin x$. $f'''(\dfrac{3\pi}{4})=\sqrt{2}\neq 0$, $f'''(\dfrac{7\pi}{4})=-\sqrt{2}\neq 0$,



$\therefore$ 在$[0,2\pi]$内曲线有拐点为

$(\dfrac{3\pi}{4},0)$, $(\dfrac{7\pi}{4},0)$.

注意: 若 $f''(x_0)$ 不存在,点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例: 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: 当$x \neq 0$时, $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}$,

$x = 0$是不可导点,y', y''均不存在.

但在$(-\infty, 0)$内,$y'' > 0$, 曲线在$(-\infty, 0]$上是上凹的;

在$(0, +\infty)$内,$y'' < 0$, 曲线在$[0, +\infty)$上是下凹的.

求曲线 $y = f(x)$ 拐点的一般步骤 :

(1) 求 $f(x)$ 的定义域 (或确定讨论区间) ;

(2) 计算 $f'(x)$, $f''(x)$, (如需要可求出 $f'''(x)$) ;

(3) 求拐点可疑点 :

使 $f''(x) = 0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点 ;

(4) 根据定理判别可疑点是否确为拐点 .

例：求曲线 $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ 的拐点

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t} = \sin t + \cos t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(\sin t + \cos t)\cdot\frac{dt}{dx} = (\cos t - \sin t)e^{-t}$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \cos t = \sin t \quad \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

当$0 < t < \dfrac{\pi}{4}$时 $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$

当$\dfrac{\pi}{4} < t < \pi$时 $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{\pi}{4}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ 是拐点

例：已知点 $(2,\ 2.5)$ 为曲线 $x^2y + ax + by = 0$ 的拐点，求 a，b 的值．

解　由题意：$x^2 + b \neq 0$．由隐函数求导法则，得

$$y' = -\frac{2xy + a}{x^2 + b}, \quad y'' = \frac{6x^2y + 4ax - 2by}{(x^2+b)^2},$$

由拐点的必要条件得：$y_1'' = 0$． 以 $x = 2$，$y = 2.5$ 代入得：

$$60 + 8a - 5b = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

又拐点在曲线上，其坐标满足曲线方程，得：

$$10 + 2a + 2.5\,b = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

联立 (1)，(2) 成方程组，解之得 $a = -\dfrac{20}{3}$， $b = \dfrac{4}{3}$．