微积分（第五章）

五、反常积分

- 一、无穷区间的广义积分
  - 1.定义：求反常积分的值常用

1、定义：　设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取$b>a$，如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分（或第一类广义积分），记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

类似地，设函数$f(x)$在区间$(-\infty,b]$上连续，取$a<b$，如果极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,b]$上的广义积分（或第一类广义积分），记作$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，如果广义积分$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$和$\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$都收敛，则称上述两广义积分之和为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

极限存在称广义积分收敛；否则称广义积分发散.

- 例：

可以证明：广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛与否及收敛时的值与$c$点的选取无关.

例： 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{b} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

- 2.p积分

例： 证明广义积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

$P-$积分

证 (1) $p=1$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{1}^{+\infty} = +\infty$,

(2) $p\ne 1$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{1}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \frac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$

因此当 $p>1$ 时广义积分收敛，其值为 $\frac{1}{p-1}$；

当 $p\le 1$ 时广义积分发散.

- 3.例

例： 证明广义积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

证：

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p>0 \\ \infty, & p<0 \end{cases}$$

例： 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\arctan a + \lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

- 4.性质

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{+\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad c \in R$.

(3) $\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \pm \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) 无穷积分也可按照定积分的换元法进行计算.

- 例

例： 计算 $\int_{2a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}} \quad (a>0)$.

解： 令 $x = a\sec t$，则 $x: 2a \to +\infty$ 时，$t: \frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2}$，故

$$\int_{2a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a^3\tan^3 t}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{-1}{\sin t}\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,a^2}.$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t$,

令 $u=t-\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}u=(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$,

且 $t:0^+\to+\infty$ 时, $u:-\infty\to+\infty$, 从而,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

- 二、无界函数的反常积分
    - 1.瑕点

1. 瑕积分的概念

(1) 瑕点的概念

$\forall\ \delta>0$, 若函数 $f(x)$ 在 $\hat{U}(x_0,\delta)$ 内无界, 则称点 x_0 为函数$f(x)$的一个瑕点.

例如: $x=a$ 是 $f(x)=\frac{1}{x-a}$ 的一个瑕点;

- 2.瑕积分

(2) 瑕积分的概念

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界，即：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$（称点 a 为瑕点）. 取 $\forall\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<b-a$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分（第二类广义积分），记作 $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

广义积分不好直接求：化成极限形式

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，而在点 b 的左邻域内无界. 取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的广义积分（第二类广义积分），

记作 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

- 3.性质

以下均以积分下限 $x=a$ 为唯一瑕点的情形进行叙述,其结论对其它瑕点的情形仍成立.

设以下所有出现的积分均存在，则

(1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad c\in R$.

(3) $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) 瑕积分也可按照定积分的换元法进行计算.

(6) 若在 $(a,\ b]$ 上 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

- 4.例

例: 计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$,

$\therefore x=a$ 为被积函数的无穷间断点(瑕点).

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-0\right]=\frac{\pi}{2}.$$

- 5.q积分

例：证明广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当$q<1$时收敛，当$q \geq 1$时发散.

$x=0$为瑕点

证 (1) $q=1$，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}[\ln x]_\varepsilon^1 = +\infty$,

(2) $q \neq 1$，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & q<1 \end{cases}$

因此当$q<1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；

当$q \geq 1$时广义积分发散.

- 6.例：瑕点不止一个

例：计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x-2)}$.

这是无穷积分与瑕积分混合在一起的广义积分，应设法分开．

解：易知，$x=0$，$x=2$ 为被积函数的瑕点，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x-2)} = \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}\right)\frac{dx}{x(x-2)}$$

分成4段

$$=\left(\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_0^1 + \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_1^2 + \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_2^3 + \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_3^{+\infty}\right\}$$

不存在

由于 $\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$ 与 $\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$ 不存在，

故原积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x-2)}$ 发散.

- 三、Γ函数

- 1.定义

首先研究一个含参变量 积分的敛散性：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad (s>0).$$

这个积分既是一个无穷 积分，又是一个以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分

为此，将积分表示为：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{1} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\text{瑕积分}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\text{无穷积分}}.$$

因为 $x=0$，是 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的唯一的瑕点，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{x^{s-1}}=1$，

而 $\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{s}x^s\Big|_0^1=\dfrac{1}{s}$，故当 $s>0$ 时，积分 $\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛，从而，

当 $s>0$ 时，瑕积分 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛．

比较判别法的极限形式

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{s+1}e^{-x}=0$，

而积分 $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的，故由比较判别法可知：

当 $s>0$ 时，无穷积分 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛．

综上所述，当 $s>0$ 时，下列含参变量的积分收敛：

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad (s>0).}$$

- 2.性质

Γ 函数的概念

由含参变量的积分所确 定的函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,\qquad (s>0).$$

称为 Γ 函数 (Gamma).

Γ 函数的简单性质

(1)当 $s>0$ 时, $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$.

特别有: $\Gamma(1)=1$;

$\Gamma(n+1)=n!\quad (n\in Z^{+})$;

$\Gamma(n)=(n-1)!\quad (n\in Z^{+})$.

(2) 当 $0<s<1$ 时, $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$----余元公式 .

证明: 当 $s>0$ 时, $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$.

运用分部积分法得, 当 $s>0$ 时

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^{s}e^{-x}\,\mathrm{d}x=-x^{s}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x^{s}e^{-x})-(-x^{s}e^{-x})\Big|_{x=0}+s\,\Gamma(s)$$

$$=s\,\Gamma(s).$$

特别地，当r为正整数n时，可得 $\Gamma(n+1)=n!$。

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\cdot(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=n!\Gamma(1),$$

而 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$。

- 3.例

例. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，(2) $\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$。

解： (1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$。

(2) $\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \xlongequal{\lambda x = y} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\frac{y}{\lambda})^{r-1} e^{-y} dx$

$$= \frac{1}{\lambda^r} \int_0^{+\infty} y^{r-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^r} \Gamma(r)\text{。}$$