线性代数

五、矩阵的特征值理论与相似对角化

- 一、特征值与特征向量
  - 1.定义

定义1：对于给定的 $A \in P^{n\times n}$，若存在数 $\lambda_0 \in P$ 及非零向量 $\xi \in P^n$ s.t. $A\xi = \lambda_0 \xi$

称 λ_0 为 A 的一个特征值，非零向量 $\xi \in P^n$ 为 A 在 P^n 中属于 λ_0 的特征向量。

$$\underbrace{A_{n\times n}\,\underset{\neq 0}{\xi_{n\times 1}}}_{n\times 1} = \underbrace{\underset{R}{\lambda_0}\,\underset{\neq 0}{\xi_{n\times 1}}}_{n\times 1}$$

  - 2.注意：

问：1. $A_{n\times n}$ 给，ξ 给 λ_0，ξ 唯一吗，不唯一 $\underset{k\neq 0}{k\xi}$

$A\xi = \lambda_0\xi \Rightarrow A(\underset{k\neq 0}{k\xi}) = kA\xi = k(\lambda_0\xi) = \lambda_0(k\xi)$

2. $A_{n\times n}$ 给，ξ 给，λ_0 唯一吗？

唯一。$\left.\begin{array}{l} A\xi = \lambda_0\xi \\ A\xi = \lambda_1\xi \end{array}\right\}$ 减 $0 = (\lambda_0 - \lambda_1)\xi$，$\xi \neq 0$

$\therefore \lambda_0 = \lambda_1$

- 3.求ξ和λ

3, 给$A_{n\times n}$，如何求λ及ξ?

$\because A\xi=\lambda\xi \quad \therefore \lambda\xi-A\xi=0$

$\therefore \boxed{\underset{n\times n}{(\lambda E-A)}\underset{n\times 1}{\xi}\ \overset{\neq 0}{=}\ 0}$ ← ② 求ξ Cramer's rule

$\therefore |\lambda E-A|=0$ ← ① 求λ

可知：λ有且只有n个复数域上的解

$W_{\lambda_0}=\{\xi \mid A\xi=\lambda_0\xi\}\cup\{0\}$ 是P^n子空间

∴ 特征子空间

称 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 特征多项式 $=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$

- 4.例

例1: $A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$ 在实数域和复数域中的所有特征值和特征向量

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}\overset{R_1-2R_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&-2\lambda+4&0\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}\overset{R_3-2R_2}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&\lambda-3&-2\\0&-2\lambda+4&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)^2(\lambda-11)=0 \quad \therefore \lambda_1=\lambda_2=2 \quad \lambda_3=11$

属于$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量应满足 ~~基础~~ 基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \therefore x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3$ 的所有特征向量 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ k_1,k_2不同时为0

例2: $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$. $a\neq 0$, $a\in R$ 全部特征值

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -a\\ a & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=0$ $\therefore \lambda=\pm ai$

- 二、特征值与特征向量的基本性质
  - 性质1：

性质1: $A_{n\times n}$ 有n个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (重根按重数计算)

则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ $\quad tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

证: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n$

$\underline{-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})}\lambda^{n-1}+\cdots+\underline{(-1)^n|A|}$

$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$=\lambda^n\underline{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}\lambda^{n-1}+\cdots+\underline{(-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n}$

  - 性质2：不同特征值的特征向量线性无关

性质2. 对于A的属于不同特征值的特征向量线性无关

证: 设 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 互异.
$\quad\downarrow\qquad\downarrow$
$\xi_1\cdots\xi_s$ 无关?

$s=1$ 时 $\xi_1\neq 0$. 无关

$s-1$ 时. $\lambda_1\cdots\lambda_{s-1}$ 互异

$\Longrightarrow \xi_1,\cdots,\xi_{s-1}$ 无关 ✓

下证: s 时.

$\lambda_1\cdots\lambda_s$ 互异

$\xi_1\cdots\xi_s$ 无关?

$k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s=0$ ①

A① $A(k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s)=A0$

$\therefore k_1A\xi_1+\cdots+k_sA\xi_s=0$

$\therefore k_1\lambda_1\xi_1+\cdots+k_s\lambda_s\xi_s=0$ ②

①λ_s − ②

$k_1\underbrace{(\lambda_s-\lambda_1)}_{\neq 0}\xi_1+\cdots+k_{s-1}\underbrace{(\lambda_s-\lambda_{s-1})}_{\neq 0}\xi_{s-1}=0$

$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_{s-1}=0$ $\therefore$ 由① $k_s=0$

- 性质3：1≤每个λ对应ξ的基础解系解向量个数≤该λ重数

性质4: $\dim V_{\lambda_0} \le \lambda_0$ 重数

解向量个数 < λ重数的例子

例: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 求A的全部特征值和特征向量

解: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$

$\therefore \lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

解对于$\lambda_1=2$的特征向量应满足 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3 \text{任意} \end{cases}$ $\therefore \xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore k_1\xi_1\ (k_1\neq 0)$ 为$\lambda_1=2$的所有特征向量

同于$\lambda_2=\lambda_3=1$ — — — :

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{cases}$ 基础 $\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 所以解集 $k_2\xi_2\ (k_2\neq 0)$

- 性质4：所有特征值的基础解系合在一起是一个线性无关向量组

性质3: $A_{6\times 6}$ $\lambda_1=\lambda_2$ $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5$ λ_6

$\xi_1\ \xi_2$ $\xi_3\ \xi_4$ ξ_5

知: $\xi_1\ \xi_3\ \xi_5$ 无关 $\xi_1\ \xi_4\ \xi_5$ 无关

$\xi_2\ \xi_3\ \xi_5$ 无关

问 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4\ \xi_5$ 无关 ✓

- 定理1：哈密顿凯莱定理

定理1：(哈密顿-凯莱定理). 设$A_{n\times n}$.

$f(\lambda)=|\lambda E-A|$, 则$f(A)=0$

意思 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$

$+(-1)^n|A|$

$\Rightarrow f(A)=A^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E$

$=0$

- 定理2：Aξ=λξ的灵活运用

$\because A\xi=\lambda\xi$

$\therefore A^2\xi=A(A\xi)=A(\lambda\xi)=\lambda A\xi=\lambda^2\xi$

$A^3\xi=A(A^2\xi)=A(\lambda^2\xi)=\lambda^2A\xi=\lambda^3\xi$

$\vdots$

$A^k\xi=\lambda^k\xi$

$(2A^2+3A+E)\xi=2A^2\xi+3A\xi+E\xi=2\lambda^2\xi+3\lambda\xi+\xi$

$=(2\lambda^2+3\lambda+1)\xi$

$(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+E)\xi=(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+1)\xi$

① $g(A)\xi=g(\lambda)\xi$

A可逆时. $|A|\neq0$ $\because |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n\neq0\Rightarrow\lambda_i\neq0$

$\because A\xi=\lambda\xi$. A可逆

$\therefore A^{-1}(A\xi)=A^{-1}(\lambda\xi)$ $\therefore \xi=\underset{数}{\lambda}A^{-1}\xi$

② $\therefore \boxed{A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi}$ $\rightarrow$ ③ $\boxed{A^*\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi}$

$\therefore \frac{A^*}{|A|}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$ $\therefore$

- 例题：

练. $A_{3\times3}$ $|A|=6$ A有一个特征值为-2, 则A^*必有一个特征值为 $\frac{|A|}{-2}=-3$ ；$A^3+4A^2+8A+8E$必有一个特征值为 0 。

$|A^3+4A^2+8A+8E|=0$

$B\xi=0$有非零解，$|B|=0$

$\downarrow$

$x^3+4x^2+8x+8=0$

- 三、矩阵的相似
  - 1.定义

定义2：$A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$，$\exists P_{n\times n}$可逆，s.t $P^{-1}AP=B$，称A与B相似

$AP=PB$

  - 2.性质123：

简单性质. $A\sim A$

1. 自反性 A与A相似 $\because E^{-1}AE=A$

$A\sim B$，则$B\sim A$

2. 对称性 A与B相似，则B与A相似，

$P^{-1}AP=B \Rightarrow A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}BP^{-1}$

3. 传递性 A与B相似，B与C相似，则A与C相似

$\because P^{-1}AP=B.\ Q^{-1}BQ=C \Rightarrow Q^{-1}P^{-1}APQ=C$

$A\sim B,\ B\sim C \Rightarrow A\sim C$ $\Rightarrow (PQ)^{-1}APQ=C$

  - 性质4：相似则行列式和秩均相等

4. A与B相似，则 $|A|=|B|$，$r(A)=r(B)$

$\because P^{-1}AP=B$ $\therefore |B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$

$|P^{-1}| = \frac{1}{|P|}$

$\because P^{-1}AP=B$ $\therefore r(A)=r(B)$

- 性质5：相似，则特征多项式一样，特征值一样，行列式的值和迹相同

性质：A与B相似. 则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$. 因而它们的特征值相同. $trA=trB$. $|A|=|B|$

证：$\because$ A与B相似 $\therefore$ $\exists P$可逆. s.t. $P^{-1}AP=B$

$$\therefore |\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda EP-P^{-1}AP|$$

$$=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=\underbrace{|P^{-1}|}_{=\frac{1}{|P|}}\,|\lambda E-A|\,|P|=|\lambda E-A|$$

特征向量不一样，但存在联系

$P^{-1}AP=B$ $\quad B\xi=\lambda\xi$ $\quad \therefore P^{-1}AP\xi=\lambda\xi$

$\therefore \boxed{AP\xi=\lambda P\xi}$

$P^{-1}AP=B \Rightarrow A=PBP^{-1}$ $\quad A\xi=\lambda\xi \Rightarrow PBP^{-1}\xi=\lambda\xi$

$\therefore \boxed{BP^{-1}\xi=\lambda P^{-1}\xi}$

- 例题：

例：已知矩阵A与B相似，其中 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$
求a、b

解：$|A|=|B| \Rightarrow \begin{vmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{vmatrix}$

$\therefore 6a-8=2b$

$trA=trB$ $\quad \therefore a+5=3+b$ $\quad \therefore a=3 \quad b=5$

- 四、矩阵的相似对角化

- 1.由来：

§5.4 矩阵的相似对角化

$P^{-1}AP=B$. 称A与B相似. ∵A与B相似, 它们的性质很多. 希望借助B去研究A. 自然地, 希望B越简单越好.

1. $B=O$ ✗ $\Rightarrow A=O$ ✗
2. $B=E$ ✗ $\Rightarrow P^{-1}AP=E \Rightarrow A=PEP^{-1}=E$ ✗
3. $B=\begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$ ✗ $\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix} \Rightarrow A=P\begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}P^{-1}$
$=kE$ ✗
4. $B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
$\Rightarrow A$? ✓

- 2.充分条件：有n个互异的特征值

问：A满足什么条件能相似到对角阵，

如果 $\boxed{A_{n\times n}\text{有}n\text{个互异的特征值}\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\text{则}A\text{一定能对角化}}$.

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n \Updownarrow \xi_1 \cdots \xi_n$ 无关 $\Leftrightarrow r(\xi_1\cdots\xi_n)=n \Leftrightarrow r(P)=n$ ∴P可逆

分析: $A\xi_1=\lambda_1\xi_1 \cdots A\xi_n=\lambda_n\xi_n \Rightarrow$

$(A\xi_1\ A\xi_2 \cdots A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1 \cdots \lambda_n\xi_n)$

$\therefore A\underbrace{(\xi_1\cdots\xi_n)}_{\triangleq P}=\underbrace{(\xi_1\cdots\xi_n)}_{P\text{可逆}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\therefore AP=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

性质: $A_{n\times n}$, 它有n个互异特征值, 则A一定能对角化.

- 3.充要条件：有n个线性无关的特征向量

小结：$A_{n\times n}$能对角化 ⟺ A有n个线性无关的特征向量 ⟺ λ_i重数等于基础解系的解向量个数

- 4.例题

例2：求$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$ $(a\neq 0,\ a\in R)$的全部特征值

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -a\\ a & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=0$

$\therefore \lambda=\pm ai$

属于$\lambda=ai$的特征向量：$\begin{pmatrix}ai & -a\\ a & ai\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1}\begin{pmatrix}a & ai\\ ai & -a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-iR_1}$

$\begin{pmatrix}a & ai\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore x_1=-ix_2$ $\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}=\xi_1$

属于$\lambda=-ai$ $\begin{pmatrix}-ai & -a\\ a & -ai\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore x_1=+ix_2$ $\begin{pmatrix}+i\\ 1\end{pmatrix}=\xi_2$ $\therefore P=(\xi_1,\xi_2)$ $\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}ai & 0\\ 0 & -ai\end{pmatrix}$

例5：$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求①$A^{1000}$ ②$g(A)$的值

$g(x)=3x^{10}+5x^7+4x^6+2x^4+1$

解：①$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-25)=0$

$\therefore \lambda_1=1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-5$

属于$\lambda_1=1$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $k_1\xi_1\ (k_1\neq 0)\cdots$

属于$\lambda_2=5$ $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ $k_2\xi_2\ (k_2\neq 0)$ $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$

属于$\lambda_3=-5$ $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ $k_3\xi_3\ k_3\neq 0$ $=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}$ $\therefore A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}P^{-1}$

$A^{1000}=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5^{1000} & \\ & & 5^{1000}\end{pmatrix}P^{-1}$

- 5.常用结论

$$P^{-1}AP=B$$

$$B^2=BB=P^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}A^2P$$

$$\vdots$$

$$B^k=B\cdots B=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP=P^{-1}A^kP$$

$$P^{-1}AP=B \Rightarrow P^{-1}(3A^2+2A+3E)P=3B^2+2B+3E$$

$$3P^{-1}A^2P+2P^{-1}AP+3P^{-1}P \qquad P^{-1}AP=B$$

$$=3B^2+2B+3E \Rightarrow P^{-1}g(A)P=g(B)$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}g(A)P=\begin{pmatrix}g(\lambda_1)&&\\&g(\lambda_2)&\\&&\ddots\\&&&g(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(A^2+A+E)P=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&&\\&\lambda_2^2&\\&&\lambda_3^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^2+\lambda_1+1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_3^2+\lambda_3+1\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$. 求$g(A)$. 已知 $g(x)=3x^{10}+5x^7+4x^6+2x^4+1$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}g(A)P=P^{-1}(3A^{10}+5A^7+4A^6+2A^4+E)P$$

$$=3\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}^{10}+5\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}^7+4\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}^6+2\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}^4+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+5\cdot1^7+4\cdot1^6+2\cdot1^4+1&&\\&3\cdot5^{10}+5\cdot5^7+4\cdot5^6+2\cdot5^4+1&\\&&3(-5)^{10}+5(-5)^7+4(-5)^6+2(-5)^4+1\end{pmatrix}$$

$$g(A)=P\begin{pmatrix}\qquad\end{pmatrix}P^{-1}$$

- 五、实对称矩阵的相似对角化

- 1.实对称矩阵

§5.5 实对称阵的相似对角化

$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow$ λ_i重数 = 基础解系解向量个数

实对称阵 $A^T=A \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$ $\quad a_{ij}\in R$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 6\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

- 性质1：实对称矩阵的n个特征值都是实数

性质1: n阶实对称阵有n个实特征值（重根按重数计算）.

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 实矩阵 $\quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$

$\therefore \lambda=\pm i$

- 性质2：实对称阵的属于不同特征值的特征向量必正交

性质2: 实对称阵的属于不同特征值的特征向量必正交.

证: $A\xi_1=\lambda_1\xi_1 \quad A\xi_2=\lambda_2\xi_2 \quad \xi_1,\xi_2\in R^n \quad \lambda_1\neq\lambda_2\in R$

$$(A\xi_1,\xi_2)=(\lambda_1\xi_1,\xi_2)=\lambda_1(\xi_1,\xi_2)$$

$$\parallel$$

$$(\underbrace{A\xi_1}_{n\times 1},\xi_2)=(A\xi_1)^T\xi_2=\xi_1^T(A^T\xi_2)=\xi_1^T(A\xi_2)$$

$$=\xi_1^T(\lambda_2\xi_2)=\lambda_2(\xi_1^T\xi_2)=\lambda_2(\xi_1,\xi_2)$$

$\therefore \lambda_1(\xi_1,\xi_2)=\lambda_2(\xi_1,\xi_2)$

$\therefore \underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}(\xi_1,\xi_2)=0 \quad \therefore (\xi_1,\xi_2)=0$

$\therefore \xi_2$ 与 ξ_1 正交

- 2.正交阵

分析实 $U_{n\times n}$.　$U^TU=E$，称 U 为正交阵　$U^{-1}=\frac{U^*}{|U|}$　$\parallel$ U^T

注：① U 一定可逆　$U^{-1}=U^T$

② U 正交阵 $\Rightarrow |U|=\pm1$

$\because U^TU=E \Leftrightarrow |U^TU|=|E| \Leftrightarrow |U^T||U|=1$　$\therefore |U|^2=1$　$\therefore |U|=\pm1$

③ U 正交 $\Rightarrow U^{-1}, U^T, U^*$ 均正交

$(U^T)^TU^T=(U^{-1})^{-1}U^{-1}=E$　$\therefore (U^*)^TU^*=(|U|U^T)^T|U|U^T$

$=|U|U|U|U^T=UU^T=E$

- 性质1：正交变换不改变长度，夹角，内积

④ 正交变换是保长度，保夹角，保内积，因而是个刚体变换

U 正交阵，则 $(Ux, Uy)=(Ux)^TUy=x^T\underbrace{U^TU}_{E}y$

$=x^Ty=(x,y)$

$|Ux|=\sqrt{(Ux,Ux)}=\sqrt{(x,x)}=|x|$

- 性质2：正交阵的充要条件是n个列向量是标准正交基

性质. $\alpha_1\cdots\alpha_n\in R^n$ 标准正交基 $\Leftrightarrow U=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 正交阵

U正交阵, $U=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \cdots\alpha_n)$

$U^TU=E \Leftrightarrow (\alpha_1\cdots\alpha_n)^T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=E$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}_{n\times n}\underset{n\times 1}{(\alpha_1}\cdots\alpha_n)_{n\times n}=E$$

$$\alpha_i^T\alpha_j$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & & & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E \quad =(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ \vdots & & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}=E$$

$\Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 标准正交基

n个行向量也是标准正交基

- 定理：

定理5. 任意一个n阶$\boxed{\text{实对称阵}}$均可在R上相似对角化，且存在n阶$\boxed{\text{正交阵 } U}$ s.t. $\boxed{\overset{=U^{-1}AU}{U^TAU}\text{ 为对角阵}}$

- 具体操作

定理5：具体题目如何操作？

$\underset{6\times6}{A^T}=\underset{6\times6}{A}$，实对称. $\quad \lambda_1=\lambda_2 \quad \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5 \quad \lambda_6$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \xi_1,\ \xi_2 \qquad \xi_3\ \ \xi_4\ \ \xi_5 \qquad \xi_6$

普通相似对角化 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4\ \xi_5\ \xi_6)$ ∴ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_6\end{pmatrix}$

如何 $P\rightarrow$ 正交？ $\xi_1,\ \xi_2 \xrightarrow{\text{施密特}} \beta_1,\ \beta_2$

$\xi_3\ \xi_4\ \xi_5 \xrightarrow{\text{施}} \beta_3\ \beta_4\ \beta_5$

$\xi_6 \longrightarrow \xi_6$

∴ $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \xi_6$ 正交基 ∴ 单位化 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}\ \cdots\ \gamma_6=\frac{\xi_6}{|\xi_6|}$ ∴ $U=(\gamma_1\cdots\gamma_6)$

∴ $U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_6\end{pmatrix}$

- 例

例16: $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求正交阵$U$. s.t $U^TAU=\Lambda$
$U^TAU = U^{-1}AU$

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$ ∴ $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=-2$

∴ $\lambda_3=-2$ $(\lambda E-A)x=0$ 基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ $(\lambda E-A)x=0$ 基—— $\underbrace{\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{否交}}$

∴将ξ_2, ξ_3施密特正交化. $\beta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$ $\beta_3=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\1\end{pmatrix}$

∴ $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_3=\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 正交基 ∴再单位化. $\eta_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ∴$U=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)$

∴$U^TAU=U^{-1}AU=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$