

线性代数（一二）

一、线性方程组的求解

• 1.1 线性方程组

第1章 线性方程组的求解

§1.1

有n个未知数, m个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}, b_k$  为常数;  $a_{ij}$ : 系数,  $b_k$  常数  
 $x_1, \dots, x_n$ : 未知数  
 $a_{ij}x_i x_j$ : 未知数

齐次:  $b_1 = \dots = b_m = 0$   
非齐次:  $b_1, \dots, b_m$  不全为0

相容: 有解  
不相容: 无解

$a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$

a,b属于同一

数域;

解:

$$\begin{cases} -7x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 10x_2 + 11x_3 - x_4 = 3. \end{cases} \xrightarrow{\text{简化}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

矩阵

简化第一步：在约定之下简化线性方程组的表达形式

擦去线性方程组中的未知量、加减法运算符号以及等号, 仅在原位保留数字.

约定第一行只跟第一个方程中的数相关, 依此类推.

约定第一列只跟第一个未知量的数相关, 依此类推.

• 1.2 矩阵 有常

数项的矩阵: 增广矩阵 没有常数项的矩阵: 系数矩阵

◦ 行阶梯形矩阵:

- (1) 如果有零行, 则零行位于非零行下方;
- (2) 每一行第一个非零元素所在列的下方是0;

- (3) 每一列第一个非零元素 (阶梯头) 的列标递增;
- 行最简形 (约化) 阶梯形:
  - 1. 同上1;
  - 2. 每一行第一个非零元素是1;
  - 3. 这些1所在列上下方是0;
  - 4. 每一列第一个非零元素 (阶梯头) 的列标递增;

$$P_2. 1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 11x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - 5R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 - 2R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \times (-1) \\ R_3 - 7R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - 5R_2 \\ R_3 \div 14}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 9R_4 \\ R_2 + 2R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 17 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

$$P_{12}. 13/4: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2a-3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \times (-1) \\ R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & 0 & -2a-1 & 1 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & -2a-1 & -1 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_4 + R_3 \\ R_4 \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 \div (a-1) \\ R_4 \div (b+1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{a-b-3}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{a-2b-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b-3}{a-1} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{a-2b-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b-3}{a-1} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-2b-3}{a-1} - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{a-b-3}{a-1} + 1 \\ x_2 = \frac{a-2b-3}{a-1} - 2 \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

(2,2) 位置为零, 从 (2,3) 继续化

- 无数解时, 阶梯头后面的未知量: 自由未知量
- 解方程: 原矩阵——>行最简形或行阶梯形
- 1.3 矩阵及其初等变换;

## §1.4 矩阵及其初等变换

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad a_{ij}: \text{元素}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ : 实矩阵  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ : 复矩阵

零矩阵  $O_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$   $\begin{matrix} 0 \neq 0 \\ 2 \times 3 \end{matrix}$   $\begin{matrix} 0 \neq 0 \\ 5 \times 6 \end{matrix}$

$$A=B \Leftrightarrow \text{完全一样} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = B$$

30101964

32301019 元素

全是0的矩阵才是0矩阵

方阵  $A_{n \times n}$  方阵的行列式  $|A_{n \times n}|$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

分块矩阵  $A = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & O_{2 \times 3} \end{pmatrix}$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

如何分块? 任意, 但有目的问题则来.

30101964

323010196

## 二、行列式和矩阵的秩

### • 2.2 行列式

## §2.2. 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{[\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)]} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

注：①  $n$  阶行列式共有  $n^2$  个元素，展开共有  $n!$  项  
 ② 它的每一项是由所有取自不同行、不同列之元素所积  
 ③ 当行标按标准次序时， $(-1)^{[\sigma]}$  即称为  $p$  为多项符号

## (-1) 的排列数次第易漏

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



◦ 上三角行列式:

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} \underline{a_{11}} \underline{a_{22}} \underline{a_{33}} \cdots \underline{a_{nn}} \\ = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$$

◦ 等价形式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n) + \tau(1 \cdots n)} \underline{a_{1j_1}} \cdots \underline{a_{nj_n}} \\ = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(1 \cdots i_1 \cdots i_n) + \tau(j_1 \cdots j_n)} \underline{a_{i_1 j_1}} \underline{a_{i_2 j_2}} \cdots \underline{a_{i_n j_n}}$$

• 2.3行列式性质

◦ 1.转置不变

§2.3 行列式中性质

例证: 行列式与它的转置行列式相等 即  $|A| = |A^T|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

转

置：沿主对角线翻转

◦ 2. 交换行列变号

性质：(交换) 交换 = 行列，行列变号

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

= 6 -

4 = 2 推论：有重复（或成倍数）行（列）值为零

推论：行列式中有二行（列）对应相等，值为 0

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -D \therefore 2D = 0 \therefore D = 0$$

◦ 3. 倍乘可提：

性质：(倍乘)  $c$  乘以行列式，即用  $c$  乘以行列式的某一行（列）

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

推论：行列式中某一行（列）有公因子朝外提。

◦ 4. 加和可拆分:

性质 3: (可拆分性) 行列式中某一行(列)能写成  $n$  个元素之和, 则行列式可以拆分为  $n$  个行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

◦ 5. 倍加不变:

性质 6: (倍加) 行列式中某一行(列)的每个元素乘以常数  $k$ , 则行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\times k} \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 + 5R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} 5 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \times 5 \\ R_4 - 8R_2 \end{matrix}} 5 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \\
 &= 5 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \times (-1)} -5 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4 - 3R_3 \\ R_2 \times \frac{1}{2} \end{matrix}} -5 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 8 = 40
 \end{aligned}$$

。例

意不要遗漏负号和提出的系数 **法1: 拆成两个行列式**

$$\begin{aligned}
 &13 \mid 6: \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

**法2:**



全都加到一行或一列，凑一行或一列1

101964 32

已知数 18055 83283 61042 48576  
57776 都可以被23整除。证：行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 8 & 8 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

可以证明23整除。

10000 1000 100 10 1

## • 2.4 Laplace定理

- 1. k阶子式：行列式/矩阵任意划k行，任意划k列，交叉点上的元素保持原来位置不变，得到的k阶行列式。划的这几行这几列不一定要挨着划，可以隔几行划一列

§2.4 Laplace's Theorem

k阶子式：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

3阶子式：

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

记为： $D \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

行  $i_1, i_2, i_3$

列  $j_1, j_2, j_3$

◦ 2. 余子式, 代数余子式

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$M_{ij}$ : 余子式  
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ : 代数余子式

◦ 3. 定理: 行列式按某一行或某一列展开

定理 3:  $A_{n \times n}$ . 则  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$   
 $= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

证: ①  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_2, j_3, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_2, j_3, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$   
 $= a_{11} \sum_{(j_2, j_3, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_2, j_3, \dots, j_n)} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$   
 $= a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} D_n &= \begin{vmatrix} * & & & \\ & a_{ij} & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ & & & * & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+n,1} & \dots & a_{i+n,j-1} & a_{i+n,j+1} & \dots & a_{i+n,n} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{i+j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 & a_{ni} & \dots & a_{nn} \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+n,j} & a_{i+n,j} & \dots & a_{i+n,j-1} & a_{i+n,j+1} & \dots & a_{i+n,n} \end{vmatrix} = a_{ij} M_{ij} \\
 &= (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}
 \end{aligned}$$

化求

行列式常用

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} |A| &= \begin{vmatrix} * & & & \\ a_{i1} + \underbrace{0+\dots+0}_{n-1} & 0 + a_{i2} + \underbrace{0+\dots+0}_{n-2} & \dots & 0 + \dots + 0 + a_{in} \\ & & & * \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} * & & & \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & & & \\ 0 & a_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & * \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} * & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{in} \\ & & & * \end{vmatrix} \\
 &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}
 \end{aligned}$$

推

论：行列与余子式不匹配变0

例:  $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j)$

分析:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{33}A_{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

要反

应过来a21即a11, a22即a12, a23即a13例

$$b_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \pm 3A_{11} + 5A_{12} + 4A_{13} \\ // \\ + 6A_{14} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

○ 4.范德蒙德行列式:

例8: 若  $n \geq 2$  时, 则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i)$$

连积



$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} R_4 - x_1 R_3 \\ R_3 - x_1 R_2 \\ R_2 - x_1 R_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)
 \end{aligned}$$

例:

### 法3: 利用递推加拆分求行列式的值

$$\begin{aligned}
 \text{例9: } D_n &= \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} & \cdots & a \end{vmatrix} + x_n (-1)^{n+1} D_{n-1} \\
 &= a x_1 \cdots x_{n-1} + x_n D_{n-1} = a x_1 \cdots x_{n-1} + x_n (a x_1 \cdots x_{n-2} + x_{n-1} D_{n-2}) = \cdots
 \end{aligned}$$

### 5. 行列式按多行多列展开

- (1) 子式的余子式和代数余子式

二. 行列式按多行(列)展开.

按行式 余子式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

代数余子式

$$\text{余子式} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} M \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

代数余子式  $A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$(-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$

划去的所有行列标之和

- (2) Laplace定理

Laplace's Theorem:  
 设  $n$  阶行列式  $D_n$ , 选定某行 (列),  $k$  阶子式:  

$$\begin{array}{ccccccc} N_1 & N_2 & \dots & N_{C_n^k} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{C_n^k} \end{array}$$
 它们所对应的代数余子式  
 则  $|D| = N_1 A_1 + N_2 A_2 + \dots + N_{C_n^k} A_{C_n^k} \rightarrow C_n^k$

例

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第2,3行}} N_1 A_1 + N_2 A_2 + \dots + N_6 A_6$$

$C_4 = 6$

$$N_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$N_4 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$N_5 = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$N_6 = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = (-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = (-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A_6 = (-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$13) D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第2,3行}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) \cdot (a_{11} a_{44} - a_{14} a_{41})$$

当成片出现0的时候使用 特别的，当A、B为方阵，若A、B在主对角线上

例: 
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ c_{11} & \dots & c_{1r} & b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ c_{s1} & \dots & c_{sr} & b_{s1} & \dots & b_{ss} \end{vmatrix}_{r+s}$$

选前r行

$$= \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} \stackrel{H \dots r + 1 \dots r}{=} |A| |B|$$

$\neq |A| |B|$

$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \dots$

有一行或列全为0的行列式值为0 A, B在副对角线上

例: 
$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{r1} & \dots & a_{rr} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \dots & b_{1s} & c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \dots & b_{ss} & c_{s1} & \dots & c_{sr} \end{vmatrix}$$

前r行

$$= \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} \stackrel{H \dots r + s + 1 \dots s + r}{=} |A| |C|$$

$= (-1)^{rs} |A| |B|$

0和C不要求为方阵

- 2.5矩阵的秩



◦ 1.秩:

§2.5 矩阵的秩

$A_{m \times n}$ ,  $a_{ij} \in P$ ,  $A$  中最高阶非零子式的阶数称为  $A$  的秩,  $\text{rank} = r(A)$  rank

$r(A) = 0 \Leftrightarrow A$  为零矩阵

有 ①  $A = 0 \Rightarrow r(A) = 0$  ②  $A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$

③  $A_{m \times n} \Rightarrow r(A) \leq \min\{m, n\}$

④  $P$  上梯形矩阵的秩为阶梯数

阶梯

头个数即化简后真正不重复的方程的个数

◦ 2.定理5:

定理:  $A \in P^{m \times n}$ ,  $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$  则

1)  $r(A) \geq r \Leftrightarrow$  至少存在一个  $A$  的非零  $r$  阶子式

2)  $r(A) \leq r \Leftrightarrow A$  的所有  $r+1$  阶子式(若有)均为 0  
 $\Leftrightarrow A$  的所有  $k$  ( $k > r$ ) 阶子式(若有)均为 0

◦ 3.定理6:

定理6: 矩阵的秩是矩阵初等变换的不变量

证明

见书上二维码

◦ 4.定理7:矩阵增加一行或一列, 秩加一或不变

◦ 例: 镶边法

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$$

镶边法

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_1^3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_1^4 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_1^5 \end{vmatrix}$$

$D_4$  为  $D_5$  中  $M_{45}$

法1:  $D_5 \xrightarrow{\text{法1}} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)}$

法2:  $D_5 \xrightarrow{\text{法2}} \frac{A_{15} + xA_{25} + x^2A_{35} + x^3A_{45} + x^4A_{55}}{\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)}$

第5列属  $\therefore A_{45} = - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)$

$\xrightarrow{D_4}$

利用

两式中 $x^3$ 系数相同

• 2.6高斯消元中的不变量;

§2.6 Gauss消元过程中不变量

$n$ 个未知数  $m$ 个方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{rr+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.  $d_r \neq 0 \Leftrightarrow r(A) \neq r(\bar{A})$  无解

2.  $d_r = 0 \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = r$

①  $r = n$  唯一解

②  $r < n$  有  $n-r$  个自由未知量 无数解

$r(A) = n \Leftrightarrow$  唯一解  $\Leftrightarrow$  零解

$r(A) < n \Leftrightarrow$  无数解

齐次线性方程组

判断

解有无：阶梯形；求解：最简形  $A$ ：系数矩阵； $\bar{A}$ ：增广矩阵

○ Cramer法则：系数矩阵的行列式不等于0时，方程组有唯一解，公式见前

$n$ 个未知数  $n$ 个方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = n$$

$\text{唯一解} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Cramer's rule

D不

等于0，则  $r(D) = n$

• 2.7矩阵的相抵： $A \sim B$

## §2.7 矩阵相抵

定义:  $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{行/列}} B$  称  $A \sim B$  相抵 (等价).  $A \sim B$

问:  $A_{m \times n}$ .  $r(A)=r$ .  $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  相抵标准形

$$A_{m \times n}, r(A)=r \quad A \xrightarrow{c_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

。

任何

矩阵都可通过有限次行列变换变成相抵标准形 注意: 这里的矩阵是一般矩阵, 可以列倍加列倍乘

两个同型矩阵  $A_{n \times m}$ ,  $B_{n \times m}$  等价 (相抵)  $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

相抵性质:

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B \sim$$

1. 自反性  $A \sim A$

2. 对称性  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$$A \rightarrow \dots \rightarrow B \Rightarrow \\ \leftarrow \dots \leftarrow$$

3. 传递性  $A \sim B$   $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$A \rightarrow \dots \rightarrow B \quad B \rightarrow \dots \rightarrow C$$

$P^{n \times n}$  按相抵  
分类, 可分为几类?

$n+1$  类