线性代数

一plus、线性方程组

- （一）线性方程组：
    - $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
    - x：未知数；
    - a，b：常数；
    - 齐次：$b_1 = \cdots = b_m = 0$，一定有解
        - 唯一解：$x_1 = \cdots = x_n = 0$
        - 无数解：有非零解
    - 非齐次：$b_1, \cdots, b_m$ 不全为零，无解、有无数解、有唯一解
- （二）求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & ①a_{22} - ②a_{12} \\ & \therefore (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ & \therefore a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\text{时} \\ & \begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \end{aligned}$$

- 二元一次为例:

- （三）行列式: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ，ad方向为主对角线，bc方向为副/次对角线

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\text{时}$$

- 克拉默法则：

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

b1,b2,b3从左往右移

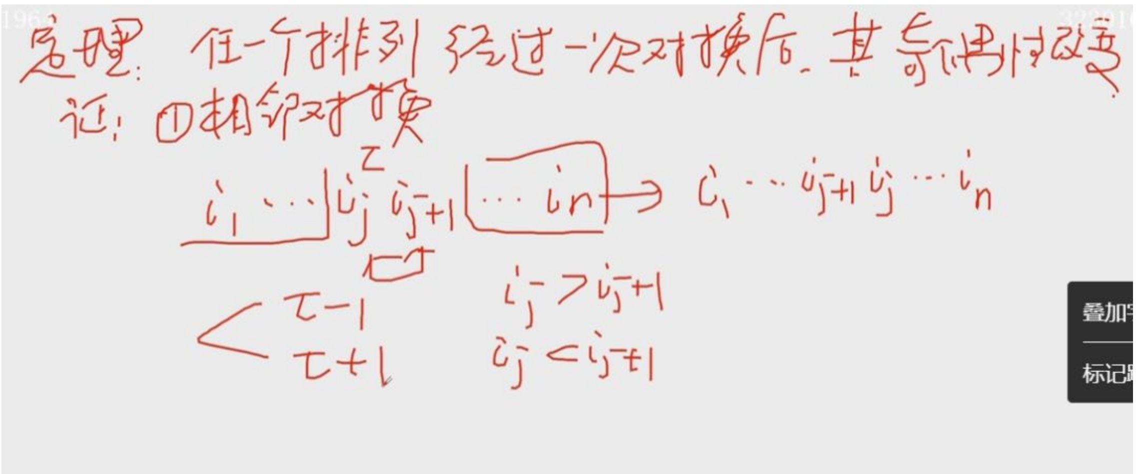
- 三阶行列式中的项与主对角线平行的为正，与副对角线平行为负

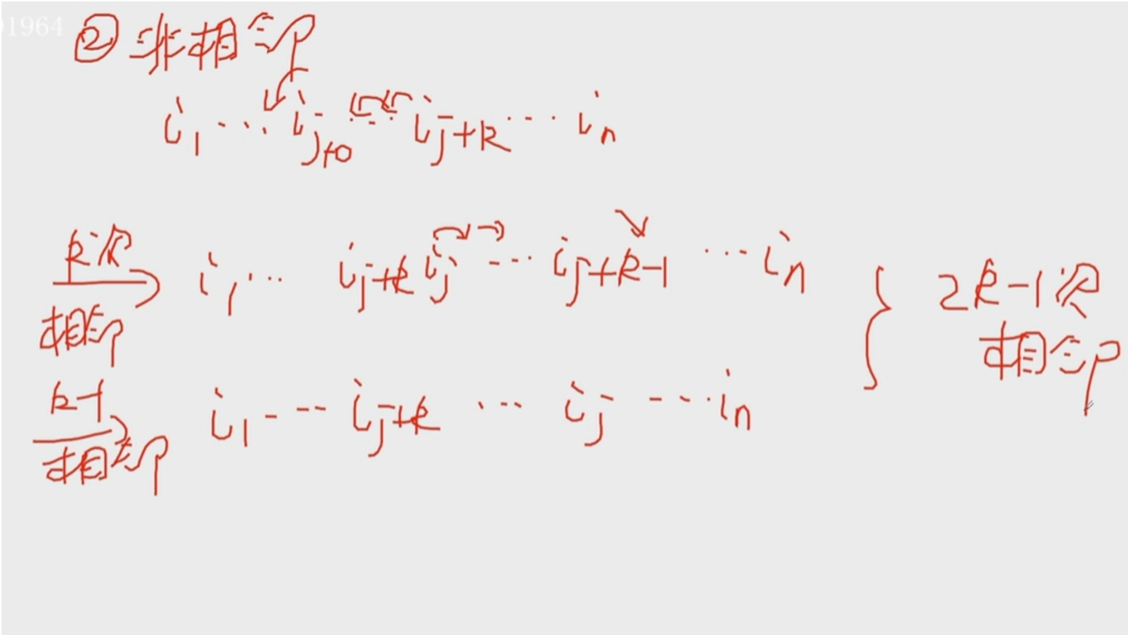
- （四）全排列与逆序数：
  - 全排列：n个数码按一定顺序排成一列，有n!种排发**只能是从1到n的n个数码，中间不能跳数**
  - 123……n：自然顺序（标准排列），反之为非标准排列
  - 逆序：在一个排列中的前后位置与大小顺序相反的一对数，逆序的个数称为 **逆序数**,如

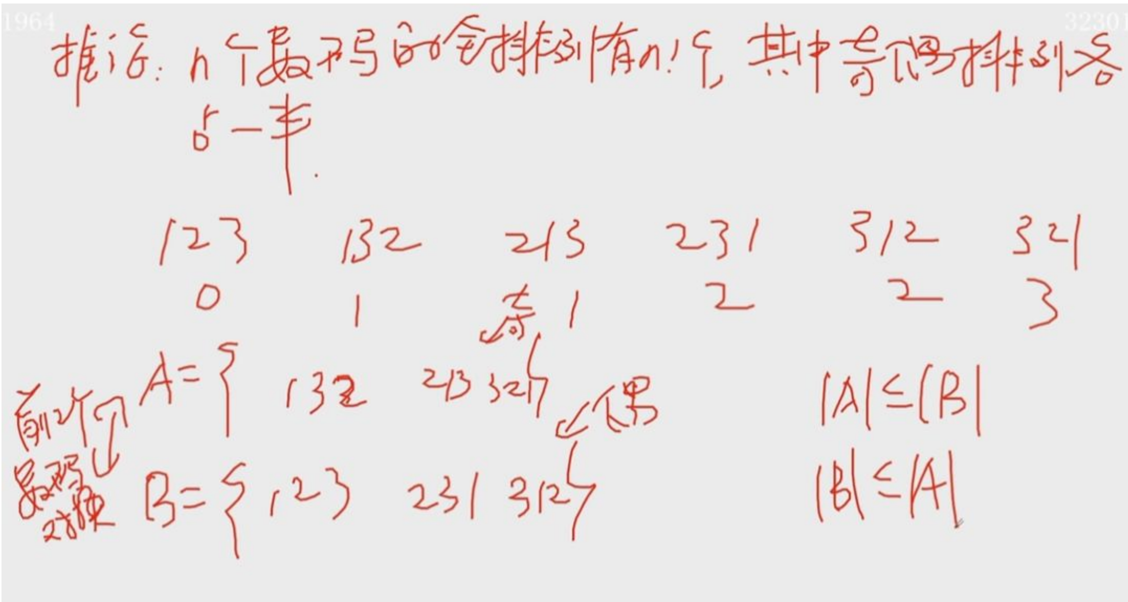
$$\tau(52413) = N(52413)$$

找逆序数：从小到大，看前面有几个比它大的

  - 奇排列：逆序数为奇； 偶排列：逆序数为偶；
    - 定理：一个排列经过一次对换后奇偶性改变



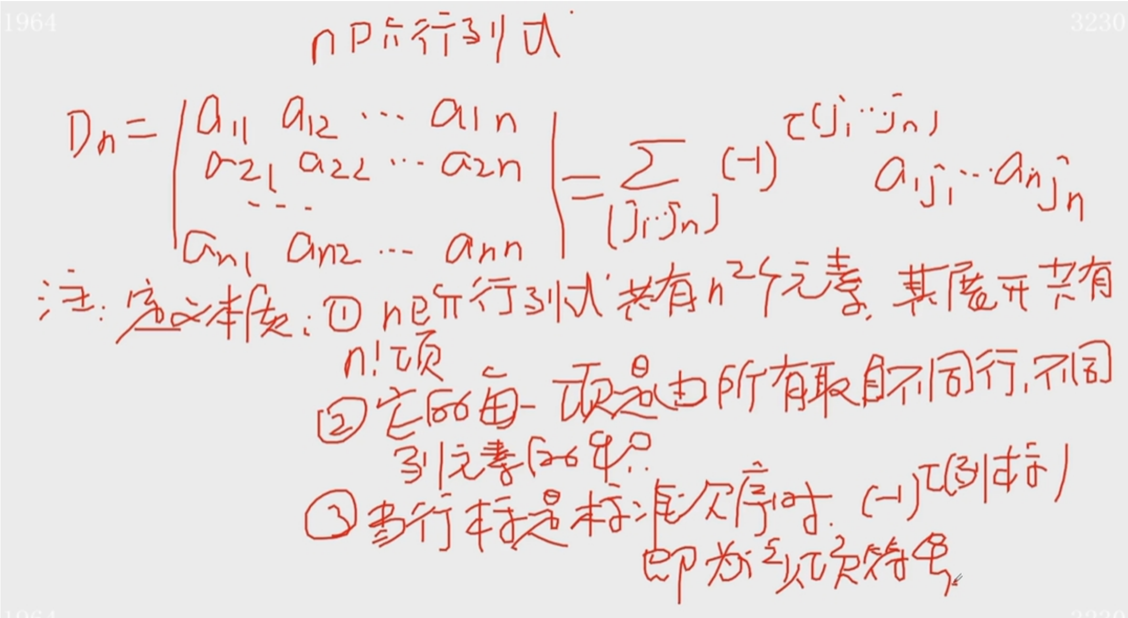


- 

  构造A、B的一一映射

- （五）行列式:

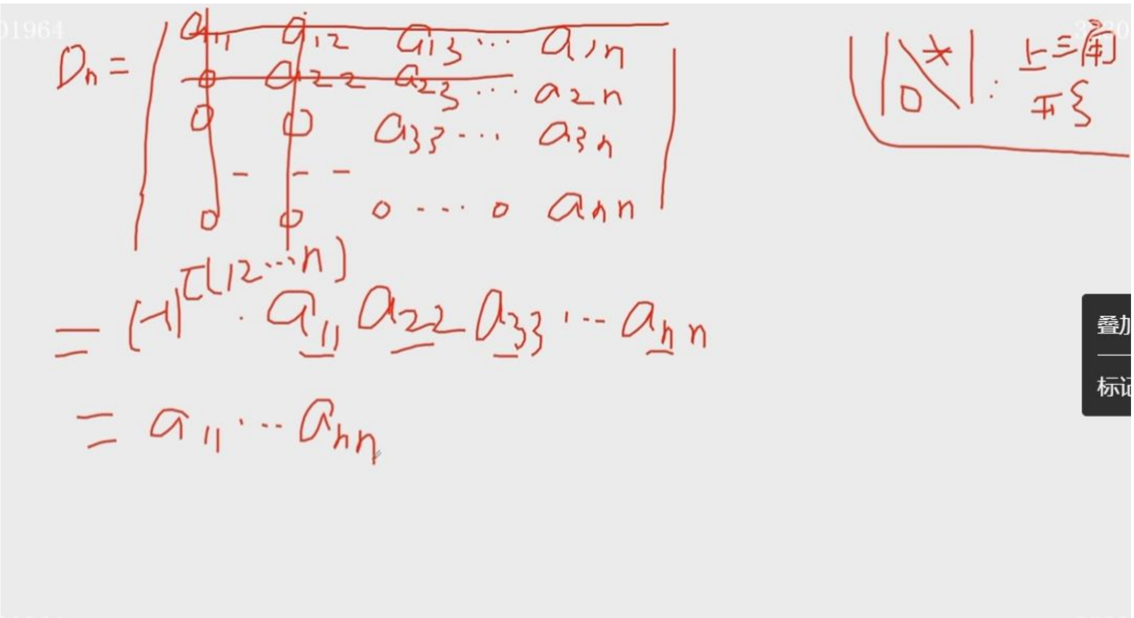
- 前为行标，后为列标

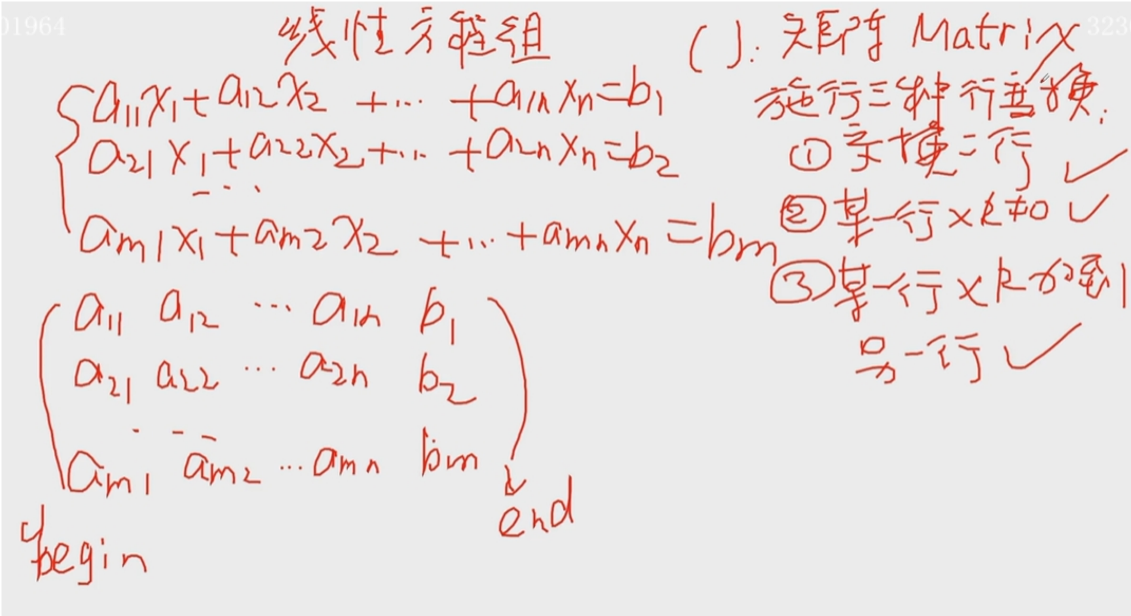
  ,

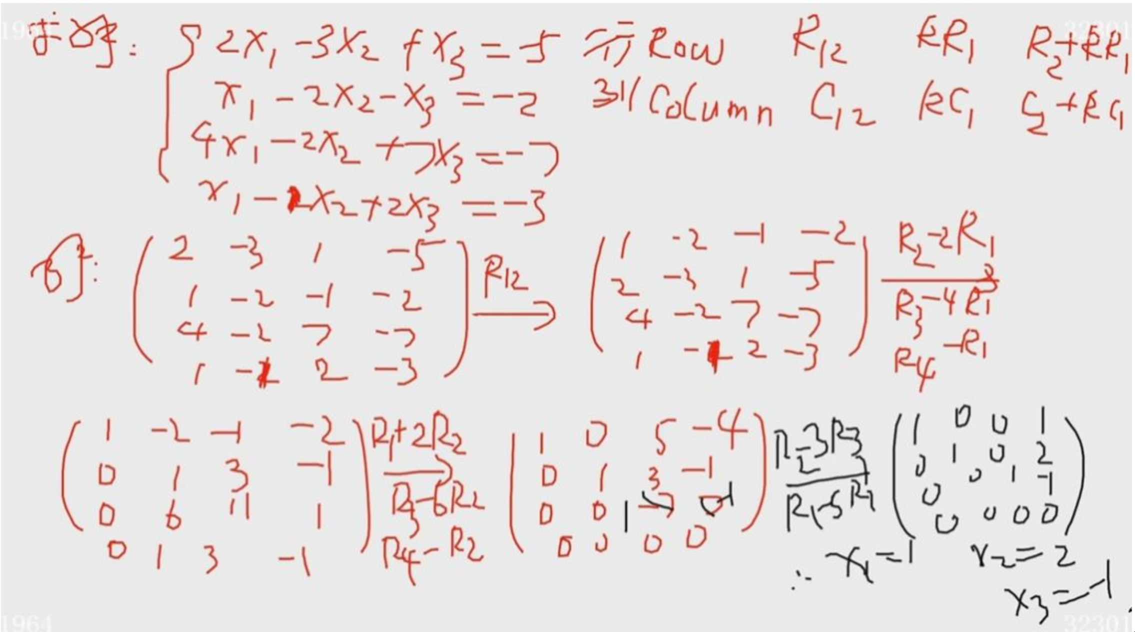
  j1、j2、j3……jn是列标的任意一个排列

- 上三角：

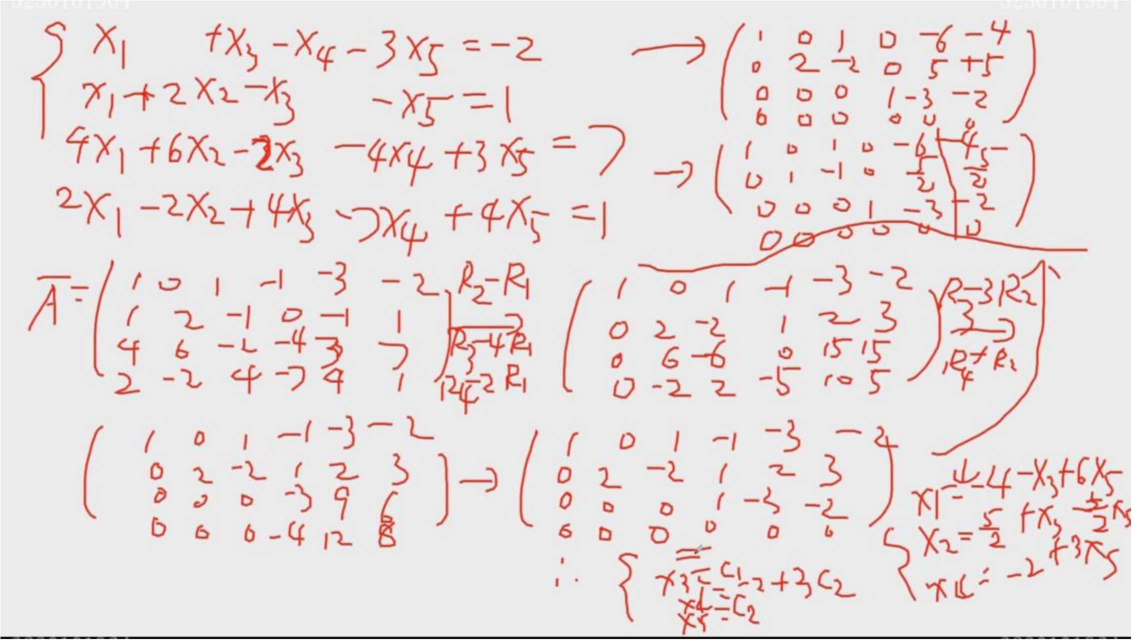
  

二、矩阵=线性方程组-未知数

- 

三种行变换对矩阵的秩都不影响**当矩阵的作用是解线性方程组时，列不能倍加倍乘***交换列也可以，但一定要标清改变后x_1,x_2等未知数位置的变化，注意常数的列不能交换*
- 求解：

不一定要化成行最简型，化成行阶梯型从下往上解xn也可，还避免计算错误 无数解：



- 阶梯形线性方程组：

一般地，我们有如下**结论**：

任何一个形如在第一次课中所示的线性方程组均可经过有限次线性方程组的初等变换（**无需实施未知量位置的互换**）化为如下形式的**同解的**阶梯形线性方程组：

$$\begin{cases} b_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + b_{1j_2}x_{j_2} + \cdots + b_{1j_r}x_{j_r} + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad\quad\; b_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + b_{2j_r}x_{j_r} + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n = c_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = c_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0, \end{cases}$$

这里$1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$及$0 \leq r \leq \min\{m, n\}$均为整数.