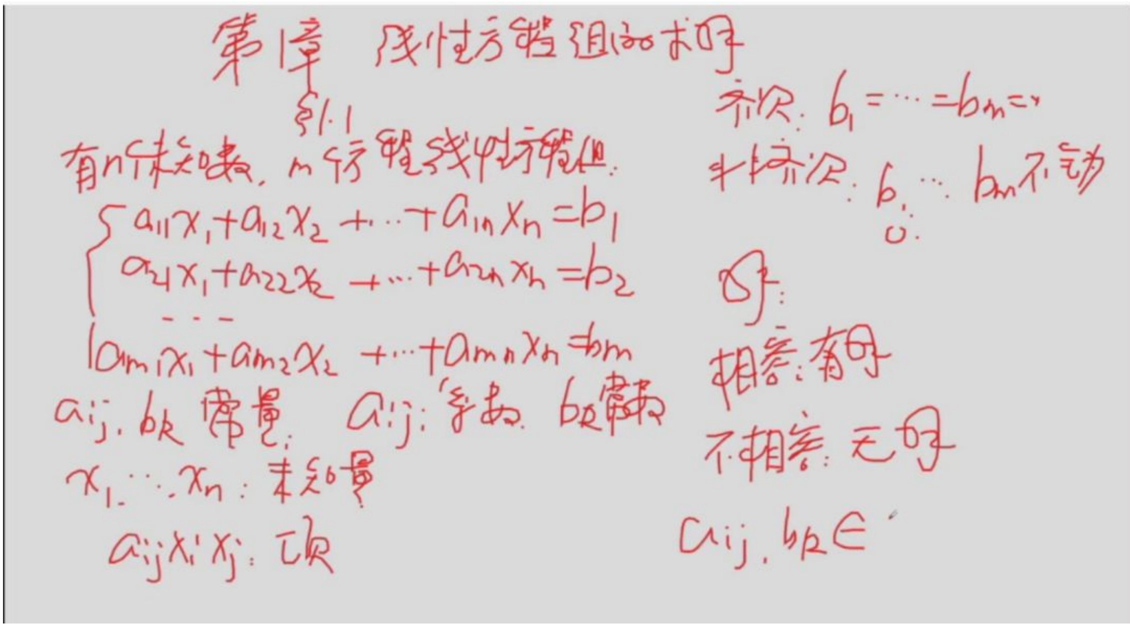
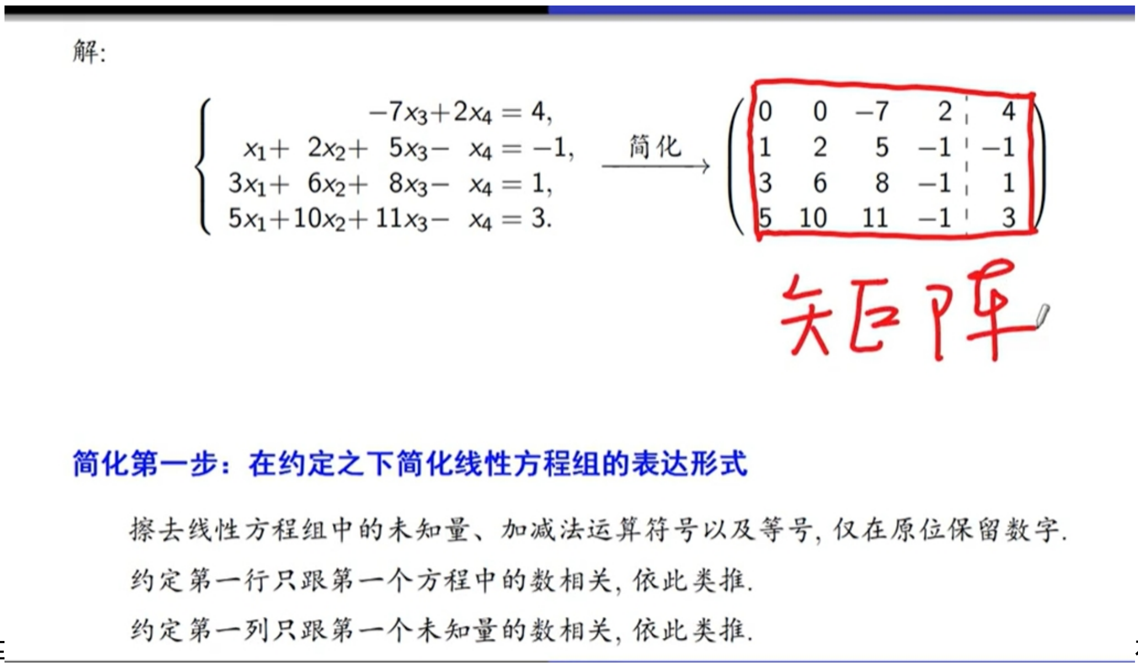
线性代数（一二）

一、线性方程组的求解

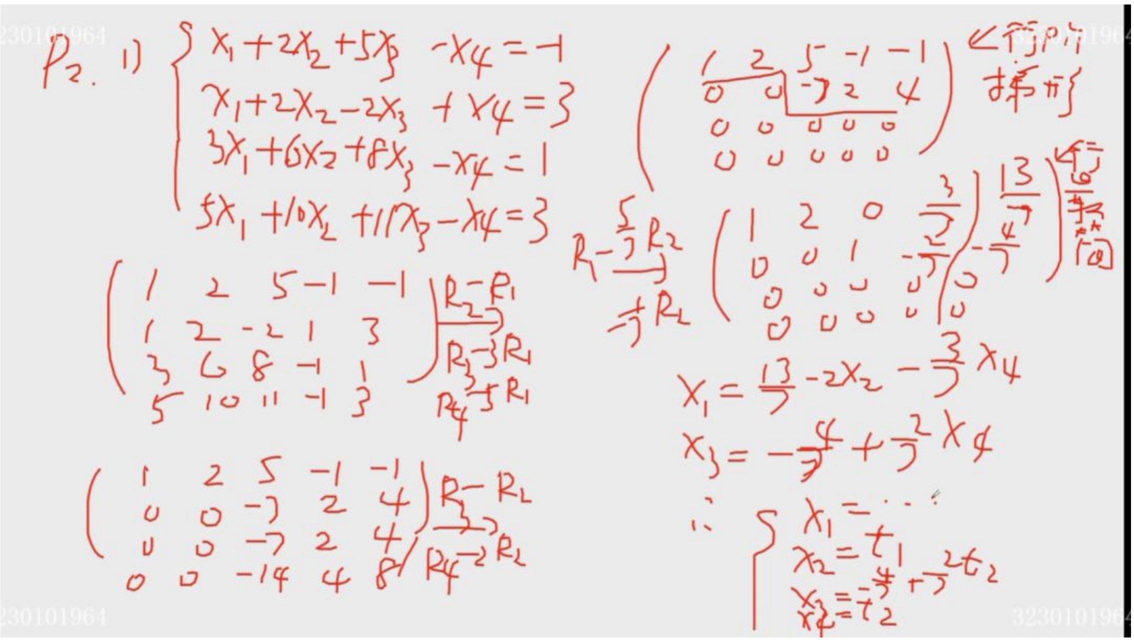
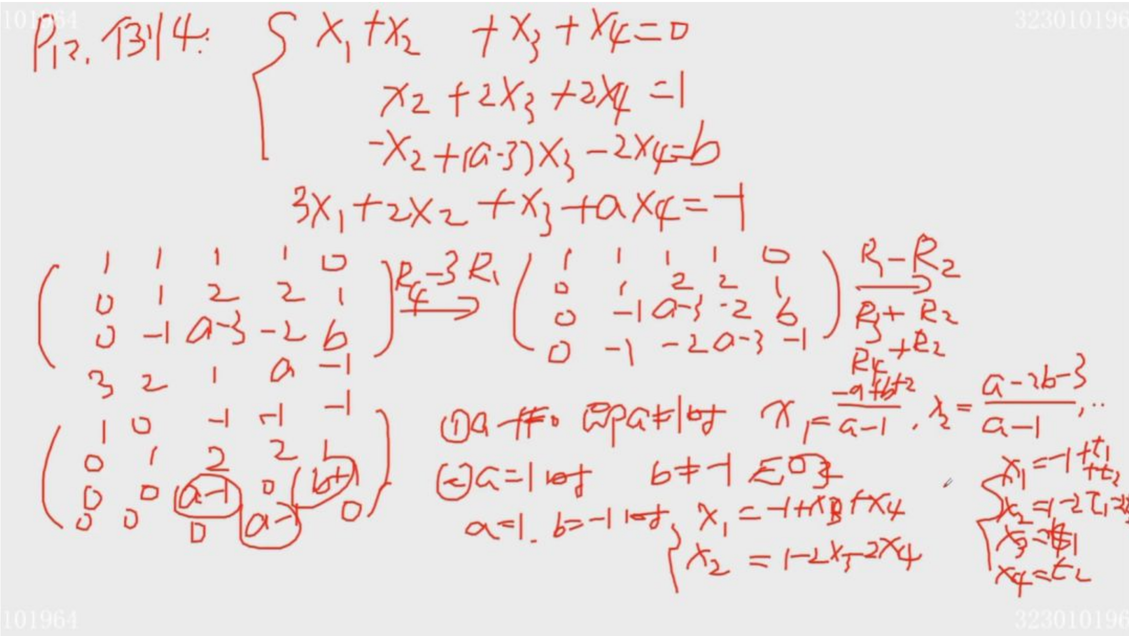
- 1.1线性方程组

  a,b属于同一数域；

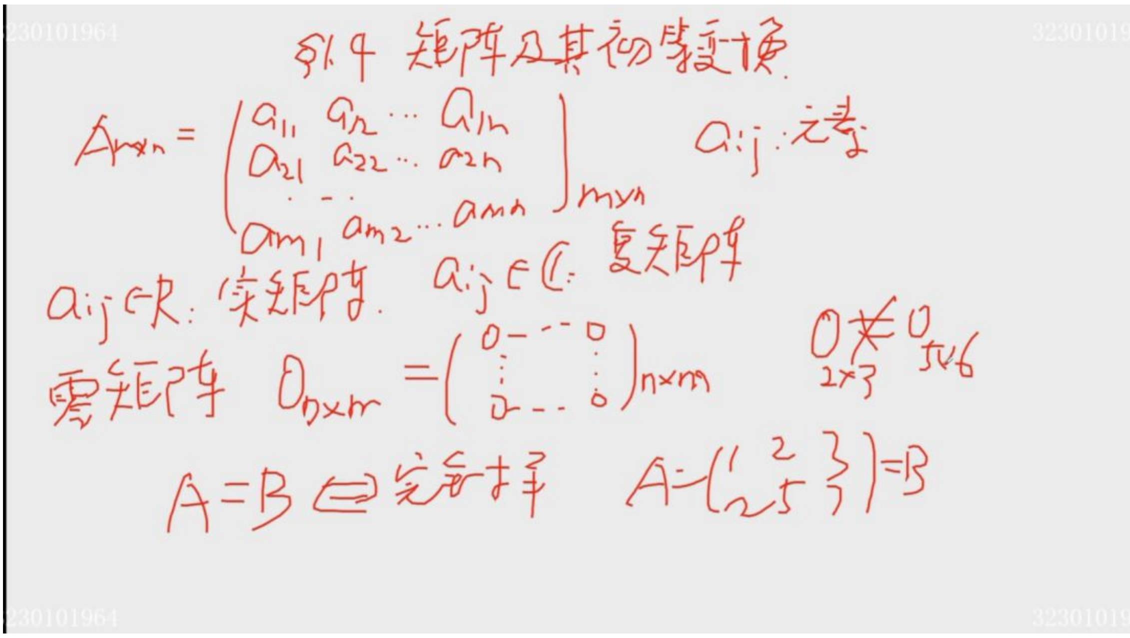
  

- 1.2矩阵 有常数项的矩阵：增广矩阵 没有常数项的矩阵：系数矩阵
  - 行阶梯形矩阵：
    - （1）如果有零行，则零行位于非零行下方；
    - （2）每一行第一个非零元素所在列的下方是0；

        - （3）每一列第一个非零元素（阶梯头）的列标递增；
    - 行最简形（约化）阶梯形：
        - 1.同上1；
        - 2.每一行第一个非零元素是1；
        - 3.这些1所在列上下方是0；
        - 4.每一列第一个非零元素（阶梯头）的列标递增；
    - 


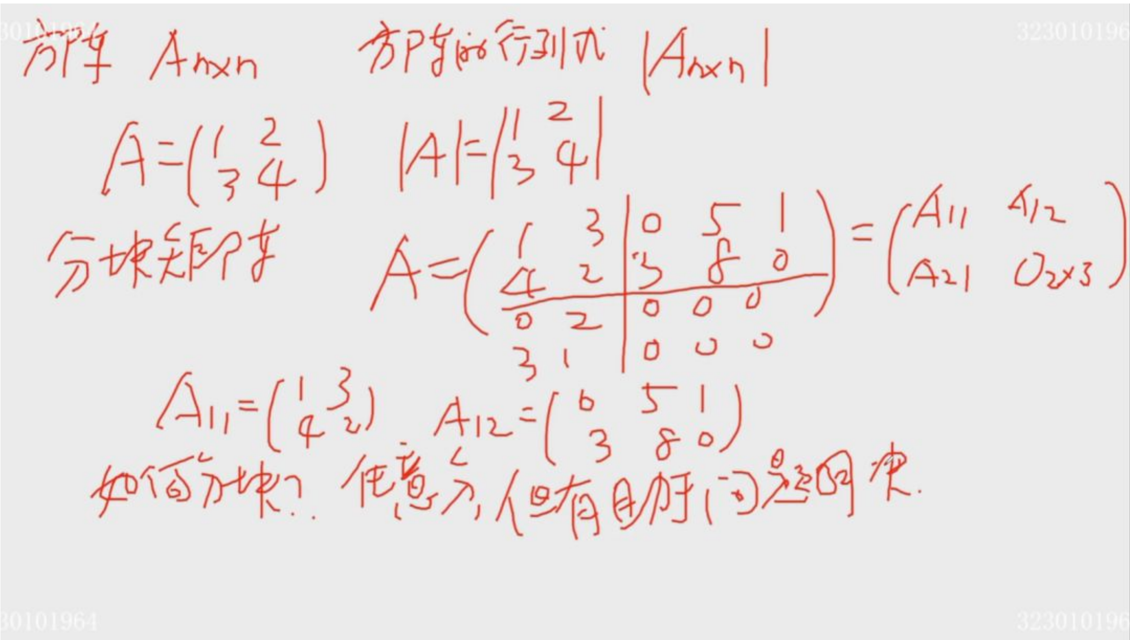
若（2,2）位置为零，从（2,3）继续化

    - 无数解时，阶梯头后面的未知量：自由未知量
    - **解方程：原矩阵——>行最简形或行阶梯形**
- 1.3矩阵及其初等变换；

- 

元素

  全是0的矩阵才是0矩阵

- 

二、行列式和矩阵的秩

- 2.2行列式

§2.2. 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

注：① n阶行列式共有n^2个元素，展开共有n!项

② 它的每一项是由所有取自不同行、不同列元素的积

③ 当行标是标准次序时，$(-1)^{\tau(\text{列标})}$即为该项符号

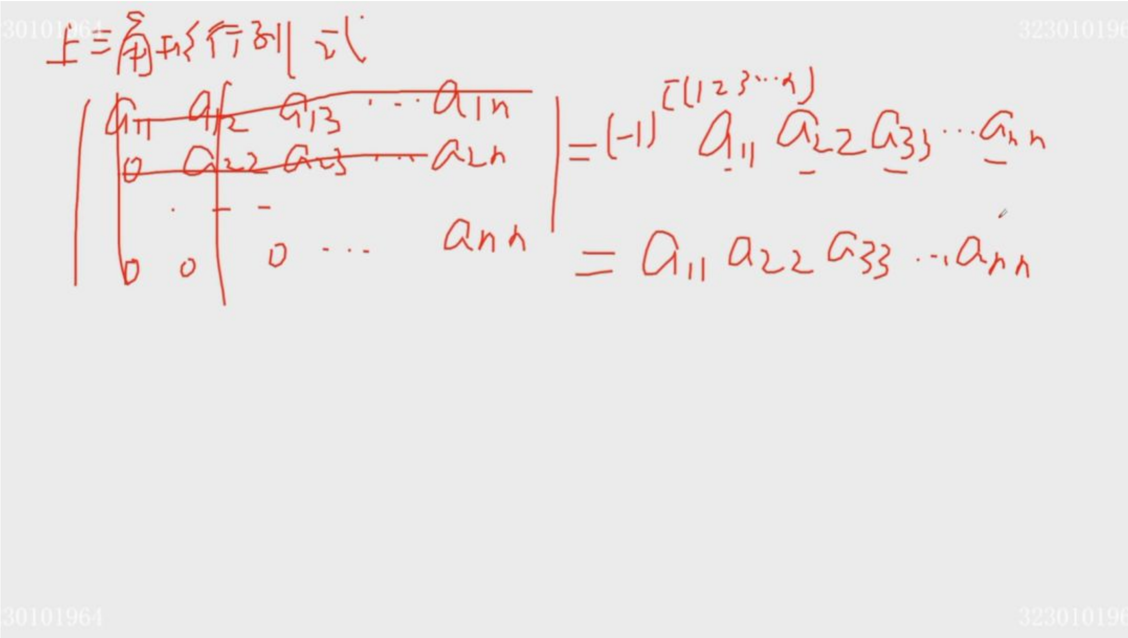
。

（-1）的排列数次幂易漏

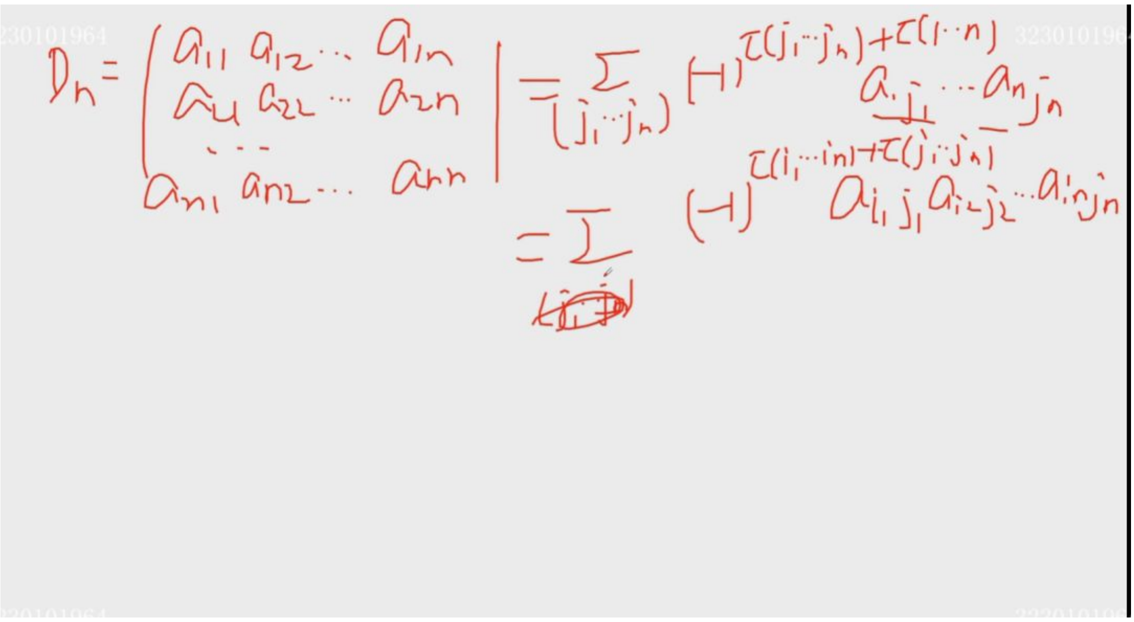
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

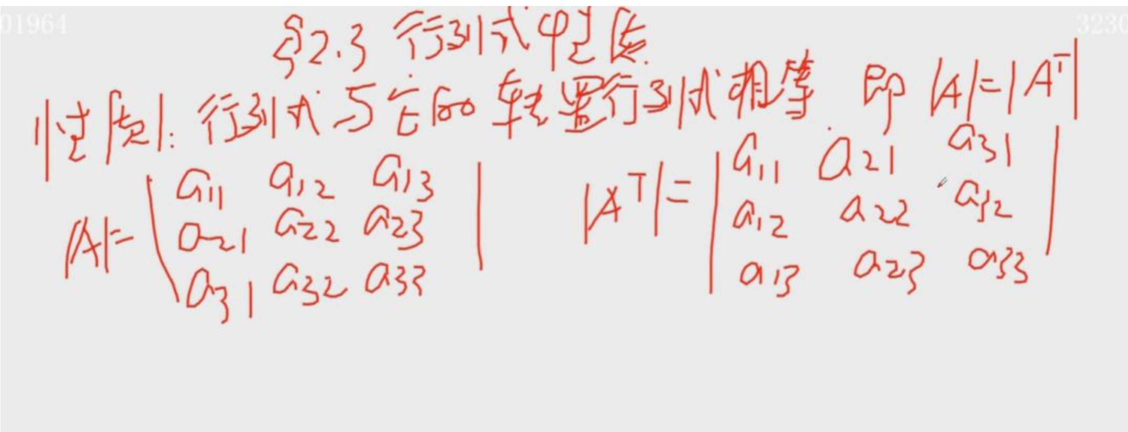
- 上三角行行列式：



- 等价形式：



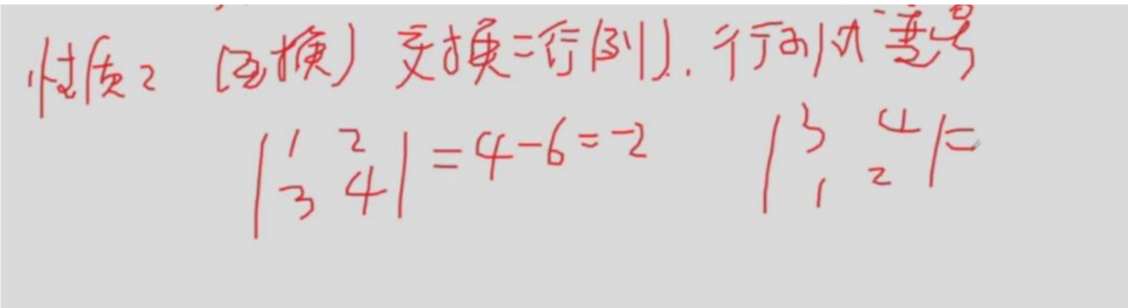
* 2.3行列式性质
  - 1.转置不变



转

置：沿主对角线翻转

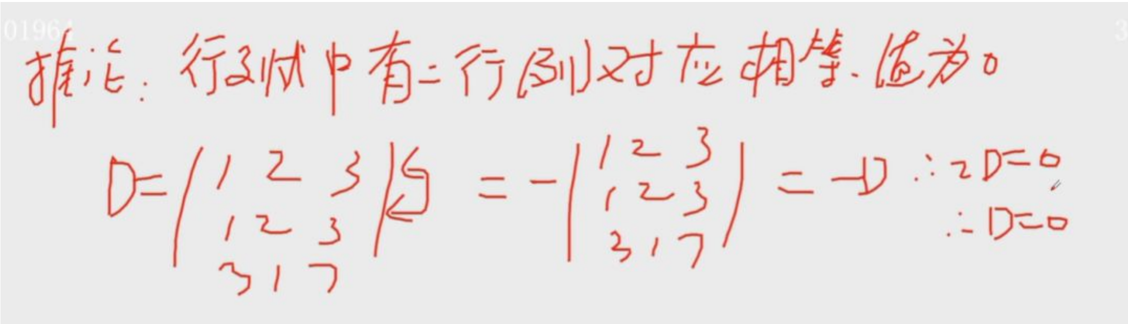
- 2.交换行列变号



性质2（互换）交换二行（列），行列式变号

$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2 \qquad \begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=$

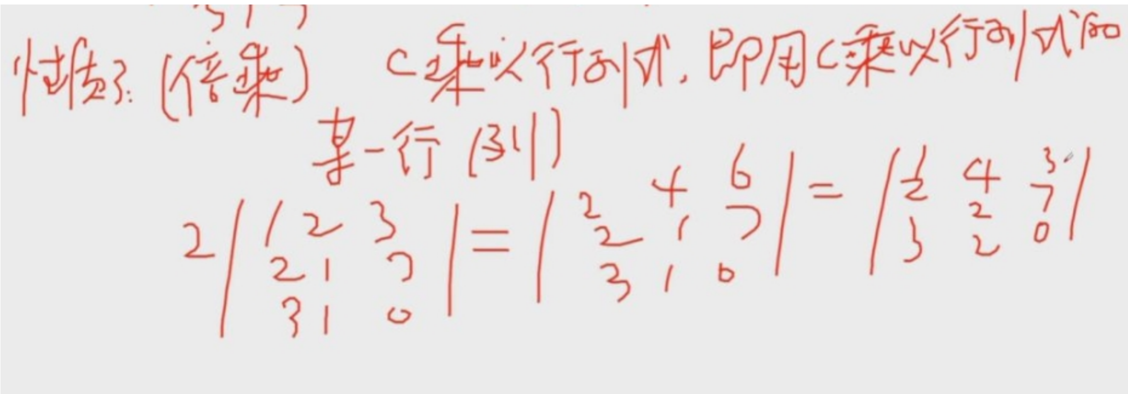
=6-4=2 推论：有重复（或成倍数）行（列）值为零



推论：行列式中有二行（列）对应相等，值为0

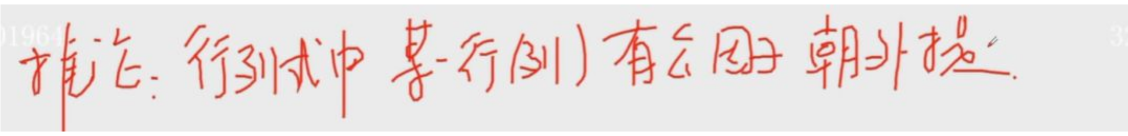
$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\3&1&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\3&1&7\end{vmatrix}=-D \quad \therefore 2D=0 \quad \therefore D=0$

- 3.倍乘可提：



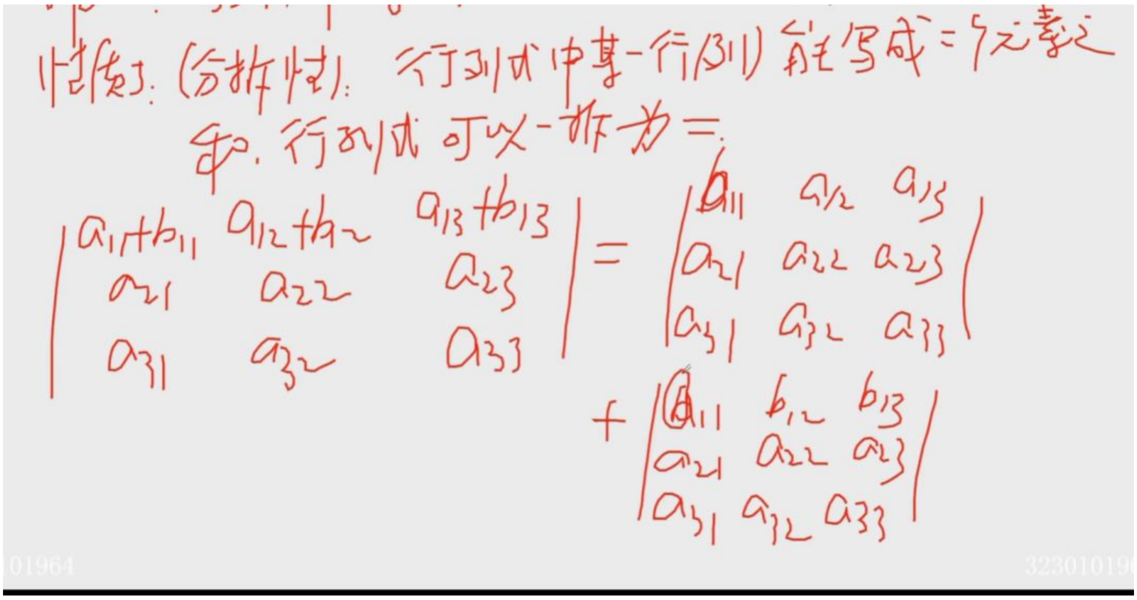
性质3（倍乘）c乘以行列式，即用c乘以行列式的某一行（列）

$2\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&6\\2&1&3\\3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&3\\2&2&3\\3&2&0\end{vmatrix}$

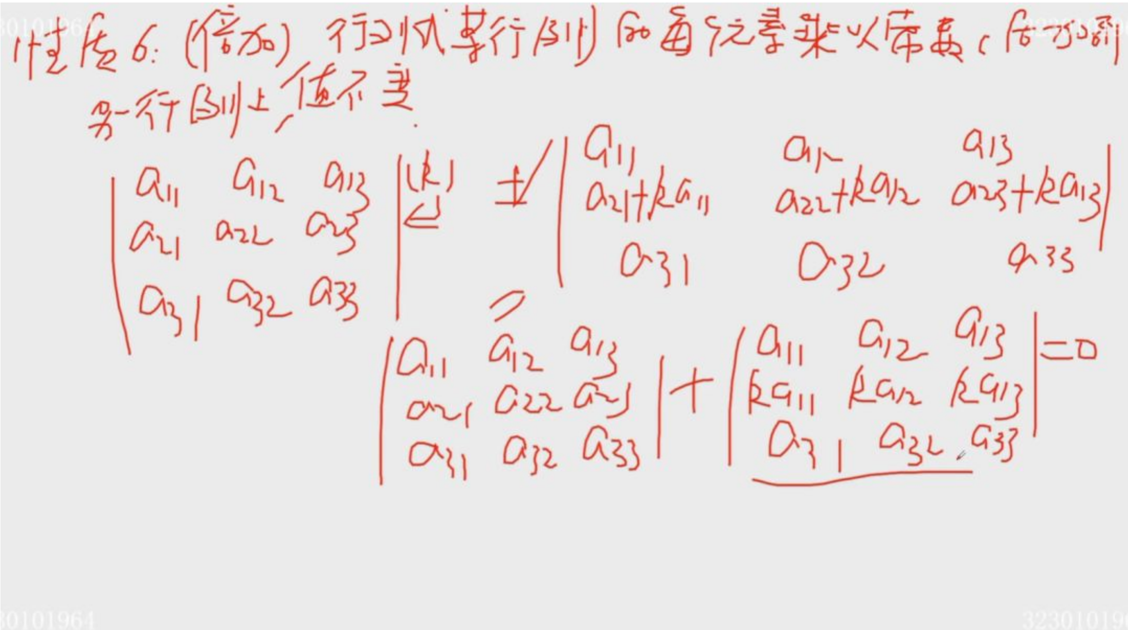


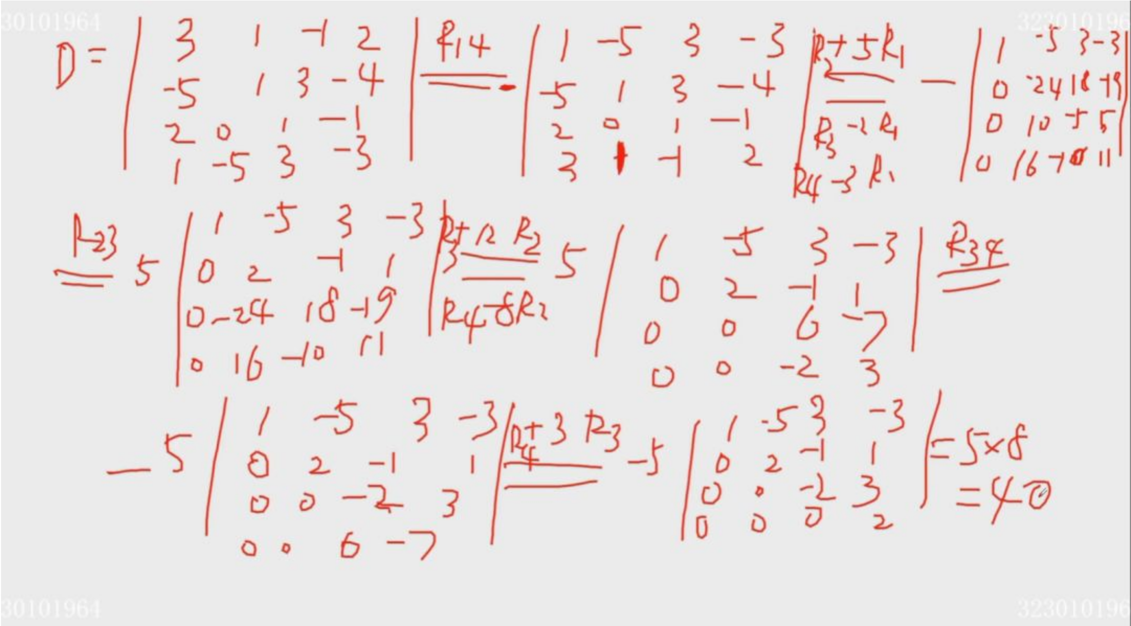
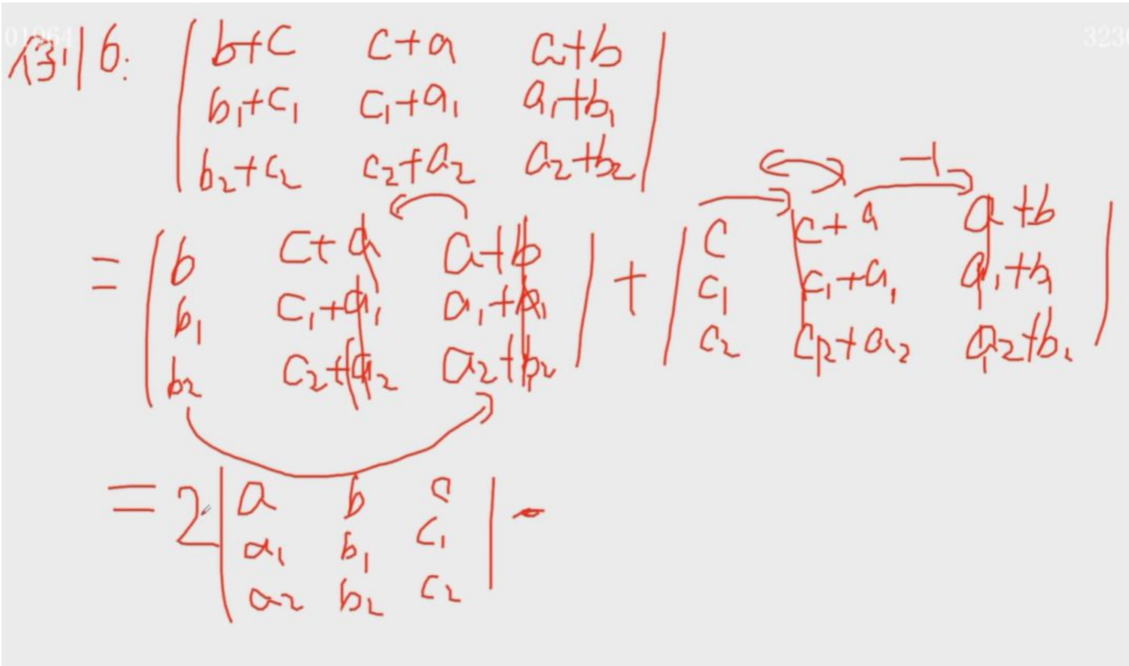
推论：行列式中某一行（列）有公因子 朝外提。

- 4.加和可拆分：

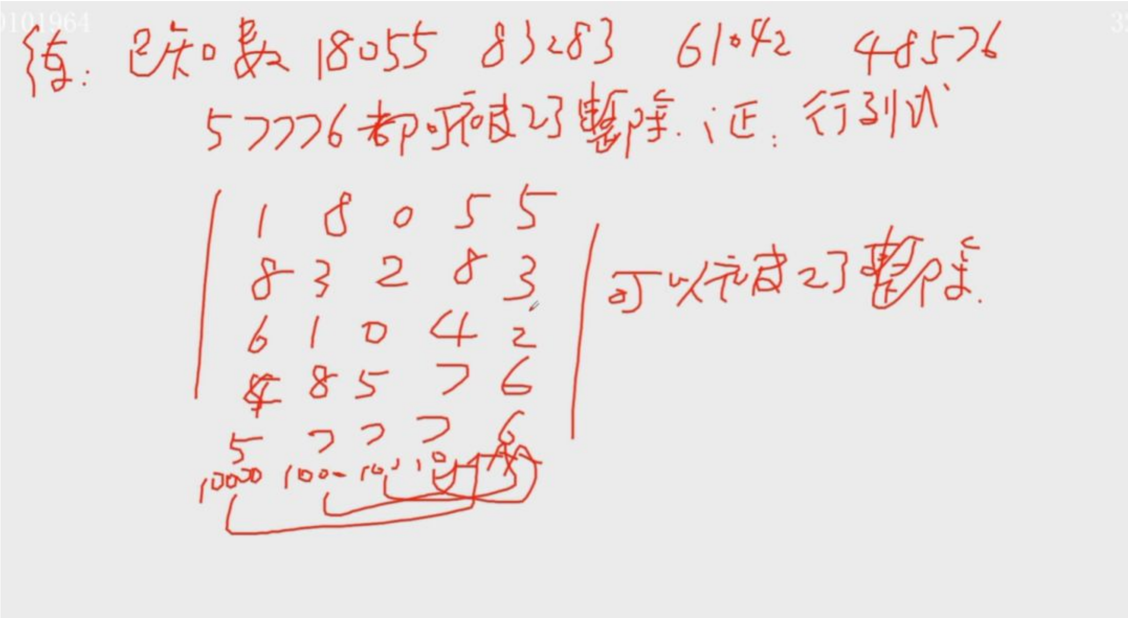


- 5.倍加不变：

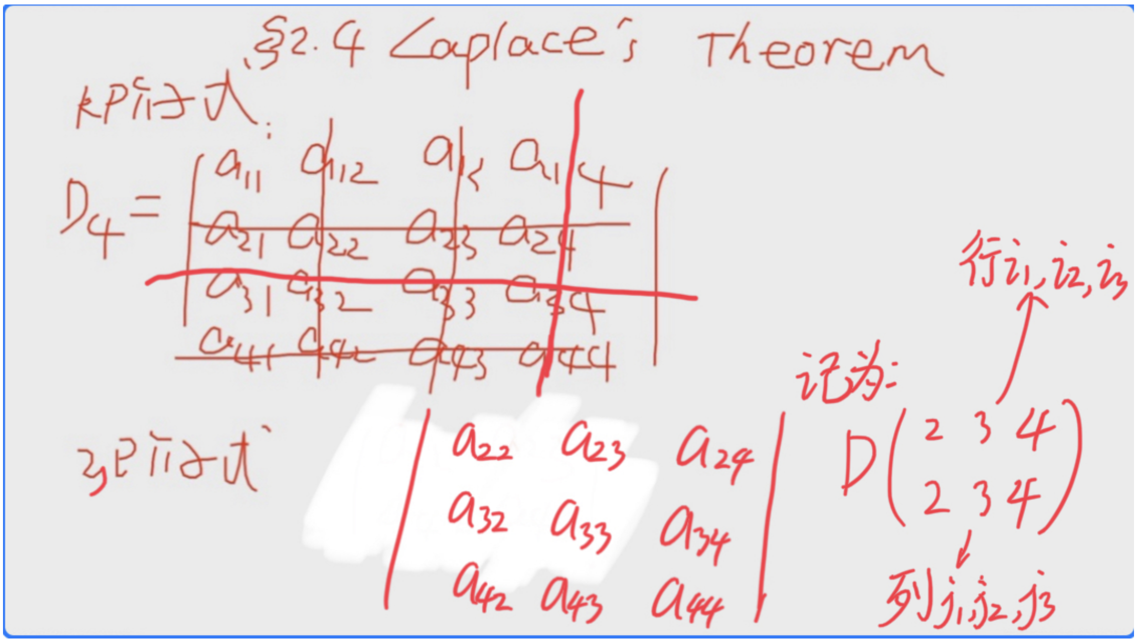


- 例

注意不要遗漏负号和提出的系数**法1:拆成两个行列式**

法2:

全都加到一行或一列，凑一行或一列1



- 2.4Laplace定理
    - 1.k阶子式：行列式/矩阵任意划k行，任意划k列，交叉点上的元素保持原来位置不变，得到的k阶行列式。*划的这几行这几列不一定要挨着划，可以隔几行划一列*



- 2.余子式，代数余子式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

M_{ij}: 余子式

$A_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$ 代数余子式

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 3.定理：行列式按某一行或某一列展开

定理3: $A_{n\times n}$. 则 $|A| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

$= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$

证: ① $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{(1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)} a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$

$= a_{11}\sum\limits_{(j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

$= a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}$

② $$D_n=\begin{vmatrix} & * & \\ 0\cdots 0 & a_{ij} & 0\cdots 0 \\ & * & \end{vmatrix} = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0\cdots 0 & a_{ij} & 0\cdots 0 \\ a_{11}\cdots a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1,1}\cdots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1}\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1+j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0\cdots 0 \\ a_{1j} & a_{11}\cdots a_{1,j-1}\ a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1}\cdots a_{i-1,j-1}\ a_{i-1,j+1}\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1}\cdots a_{i+1,j-1}\ a_{i+1,j+1}\cdots a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1}\cdots a_{n,j-1}\ a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}M_{ij}$$

$$\underline{(-1)^{i+j}}$$

$$=a_{ij}A_{ij}$$

化求行列式常用

③ $$|A|=\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1}+\underbrace{0+\cdots+0}_{n-1} & 0+a_{i2}+\underbrace{0+\cdots+0}_{n-2} & \cdots\ \underbrace{0+\cdots+0}_{n-1}+a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & 0\cdots 0 \\ & * & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & * & \\ 0\cdots a_{i2} & 0\cdots 0 \\ & * & \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} & * \\ 0\ 0\cdots 0 & a_{in} \\ & * \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

推论：行列与余子式不匹配变0

推论：$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$

分析：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$$

要反应过来a21即a11，a22即a12，a23即a13例

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

求 $3A_{11}+5A_{12}+4A_{13}+6A_{14}$

$$\parallel$$

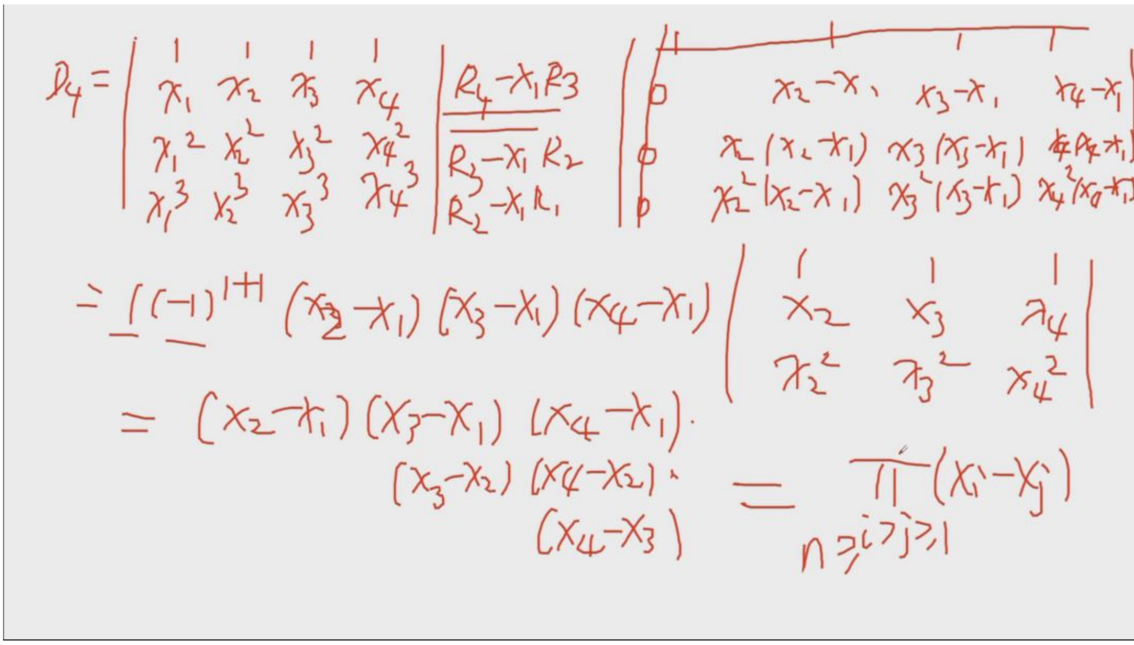
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

- 4.范德蒙德行列式：

例18：若 $n\geq 2$ 时，则

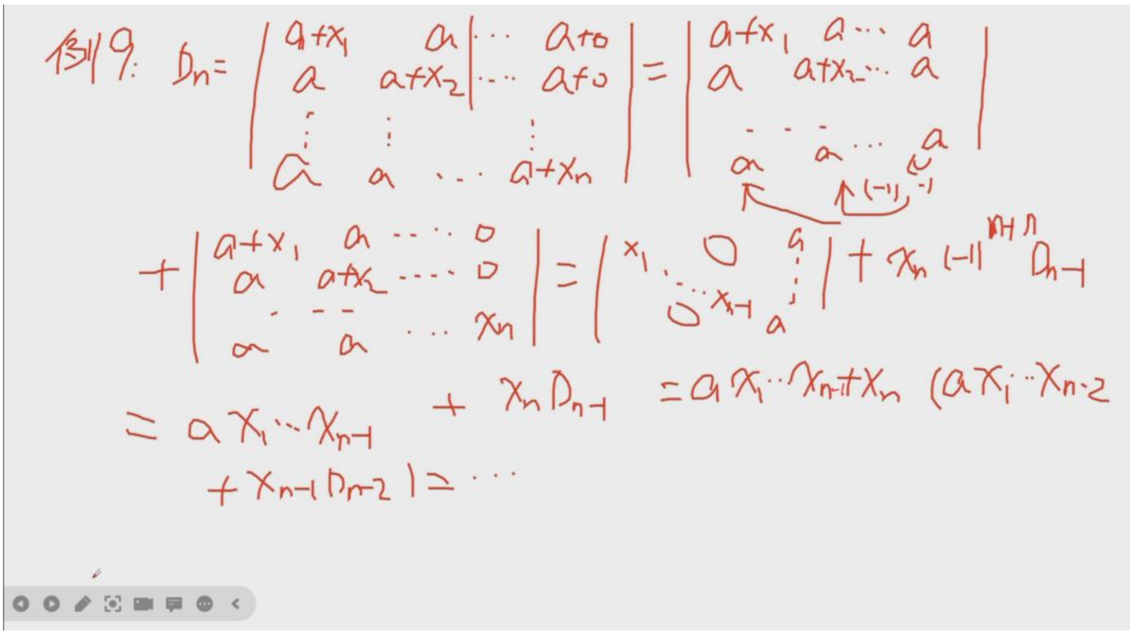
$$D_n=\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq j>i\geq 1}(x_j-x_i)$$

连乘。



例:

法3：利用递推加拆分求行列式的值



- 5.行列式按多行多列展开

- （1）子式的余子式和代数余子式

二. 行列式按k行(列)展开.

k阶子式　　余子式　　代数余子式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2阶子式 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$

$D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

余子式 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

代数余子式 $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$(-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$

划去的所有行列标之和

- （2）Laplace定理

Laplace's Theorem.

设n阶行列式D_n, 选定k行(列), k阶子式:

$N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_{C_n^k}$, 它们所对应的代数余子式

$A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_{C_n^k}$,

则 $D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_{C_n^k}A_{C_n^k}$ $\longrightarrow C_n^k$

例

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} & \cancel{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{选定2,3行}}} N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_6A_6 \qquad C_4^2=6\text{个}$$

$$\overset{12}{N_1} \quad \overset{13}{N_2} \quad \overset{14}{N_3} \quad \overset{23}{N_4} \quad \overset{24}{N_5} \quad \overset{34}{N_6}$$

$$N_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad N_3=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \qquad N_6=\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

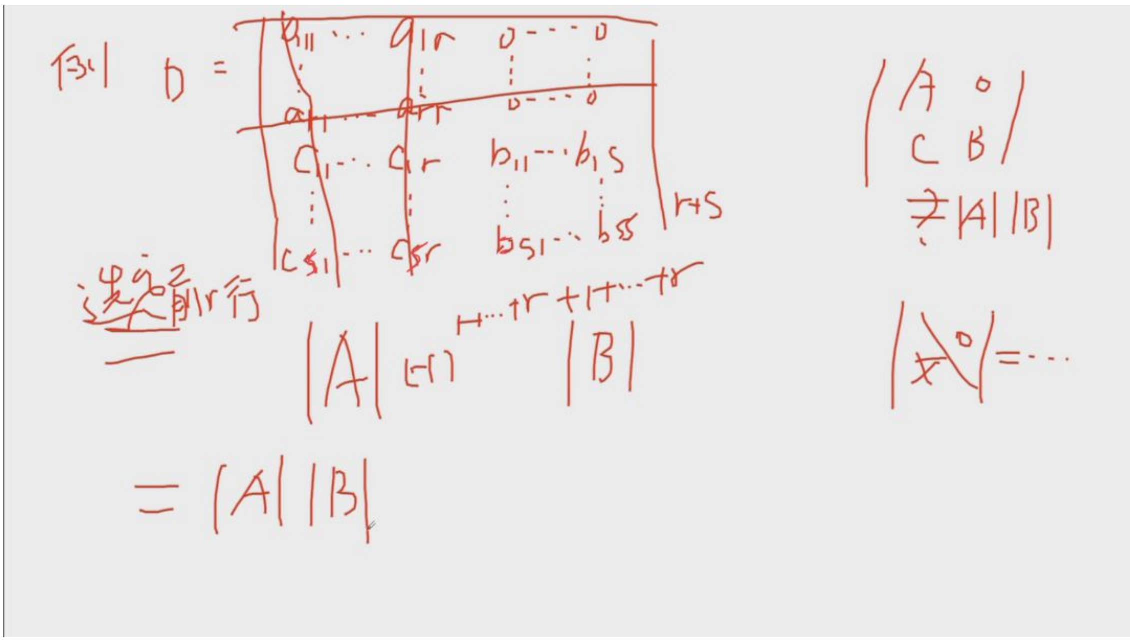
$$A_1=(-1)^{2+3+1+2}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_3=(-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad A_6=(-1)^{2+3+3+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

例1 $$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ \cancel{0} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} & \cancel{0} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{选定2,3行}}}$$

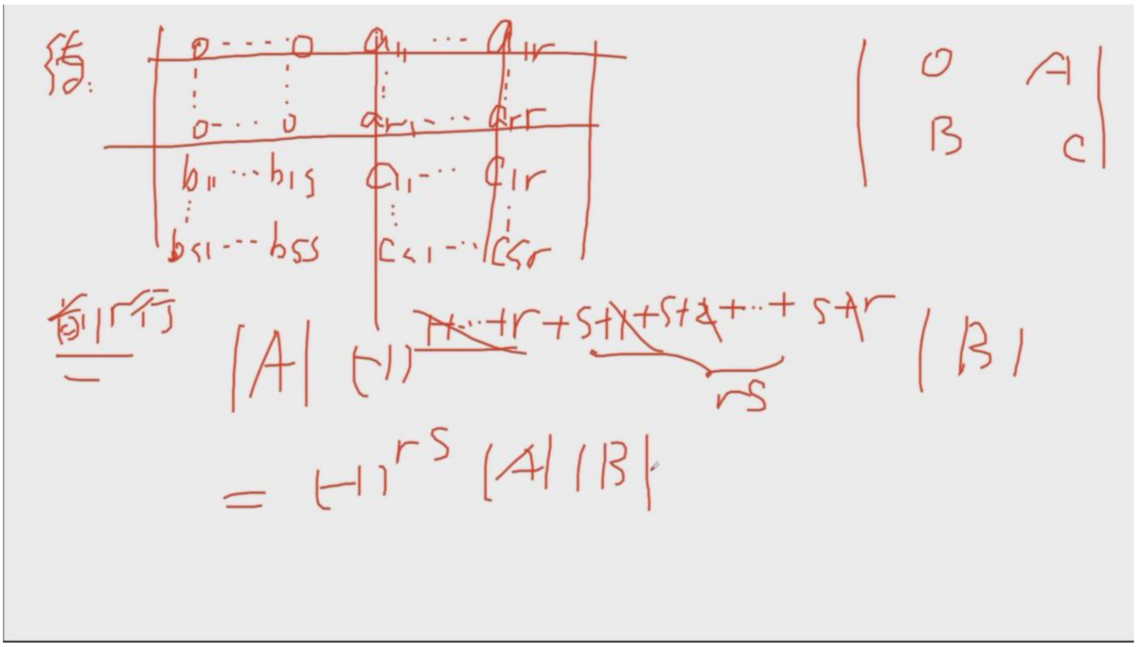
$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\cdot(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})$$

当成片出现0的时候使用 特别的，当A、B为方阵，若A，B在主对角线上



有一行或列全为0的行列式值为0 A，B在副对角线上



0和C不要求为方阵

- 2.5矩阵的秩

- 1.秩:

§2.5 矩阵的秩

$A_{m\times n}$, $a_{ij}\in P$, A中最高阶非0子式的阶数,称为A的秩,记作$r(A)$ rank

$r(A)=0 \Leftrightarrow A$为零矩阵

有 ① $A=0 \Rightarrow r(A)=0$ ② $A\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq 1$

③ $A_{m\times n} \Rightarrow r(A)\leq \min\{m,n\}$

④ 阶梯形矩阵的秩就是阶梯数

阶梯头个数即化简后真正不重复的方程的个数

- 2.定理5:

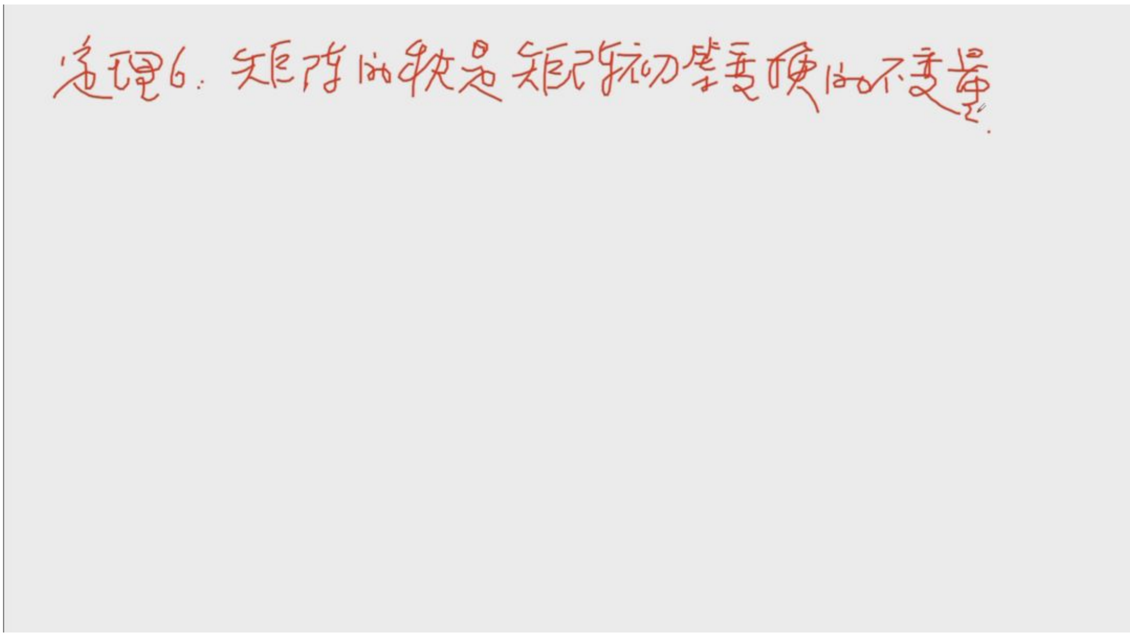
定理: $A\in P^{m\times n}$, $1\leq r\leq \min\{m,n\}$, 则

1) $r(A)\geq r \Leftrightarrow$ 至少存在一个A的非0 r阶子式

2) $r(A)\leq r \Leftrightarrow$ A的所有r+1阶子式(若有)全为0

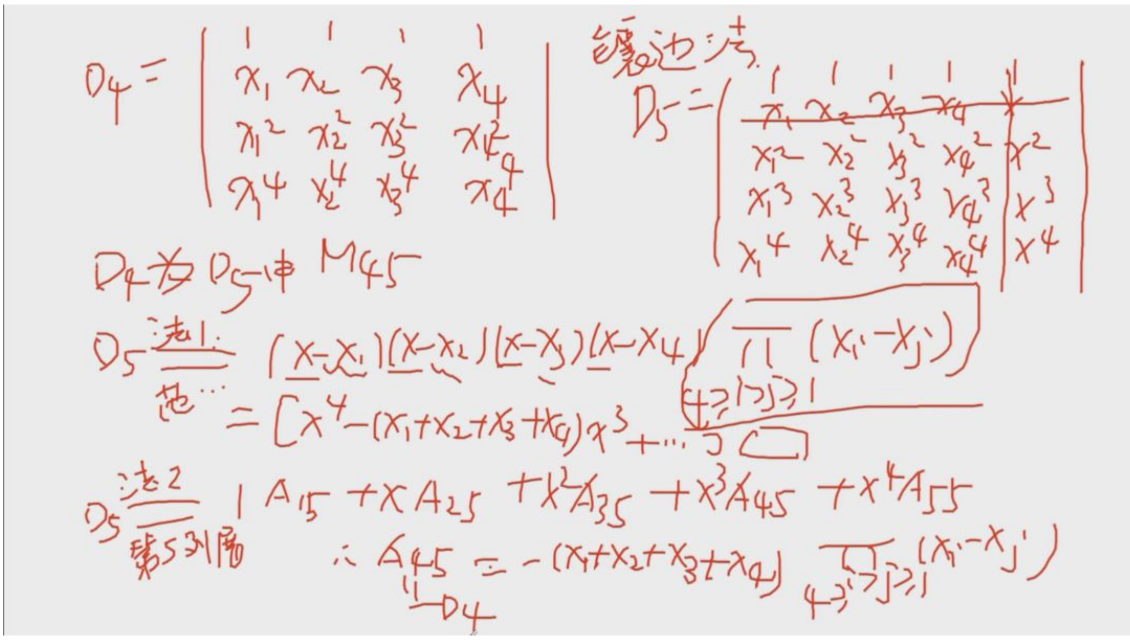
$\Leftrightarrow$ A的所有$k(k>r)$阶子式(若有)全为0

- 3.定理6:

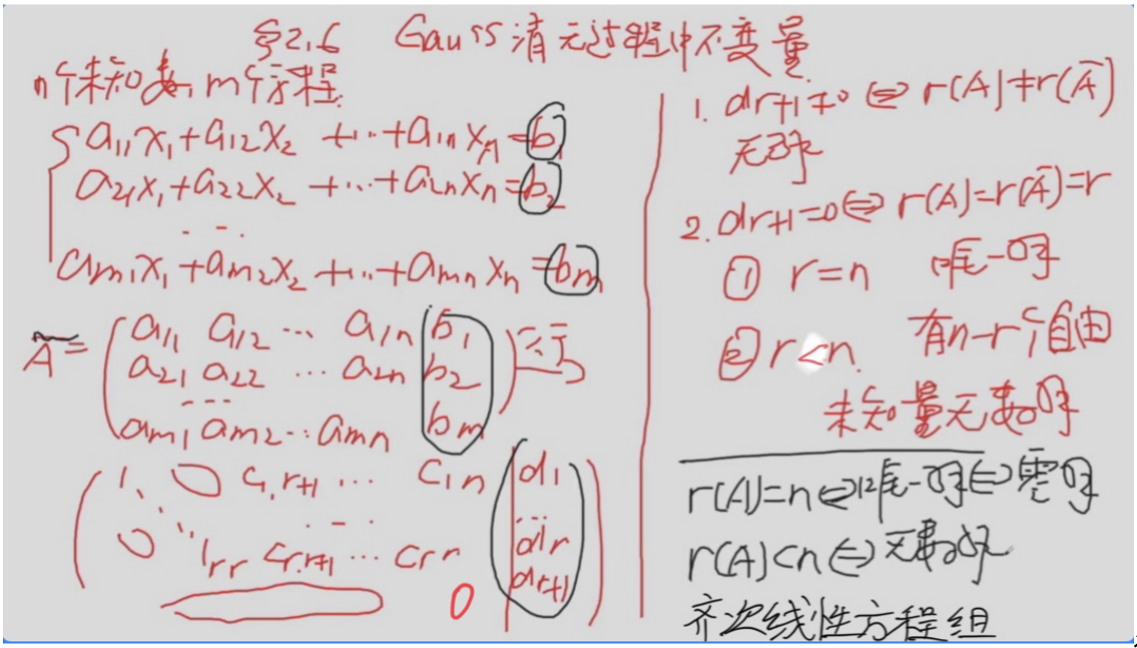
  证明见书上二维码

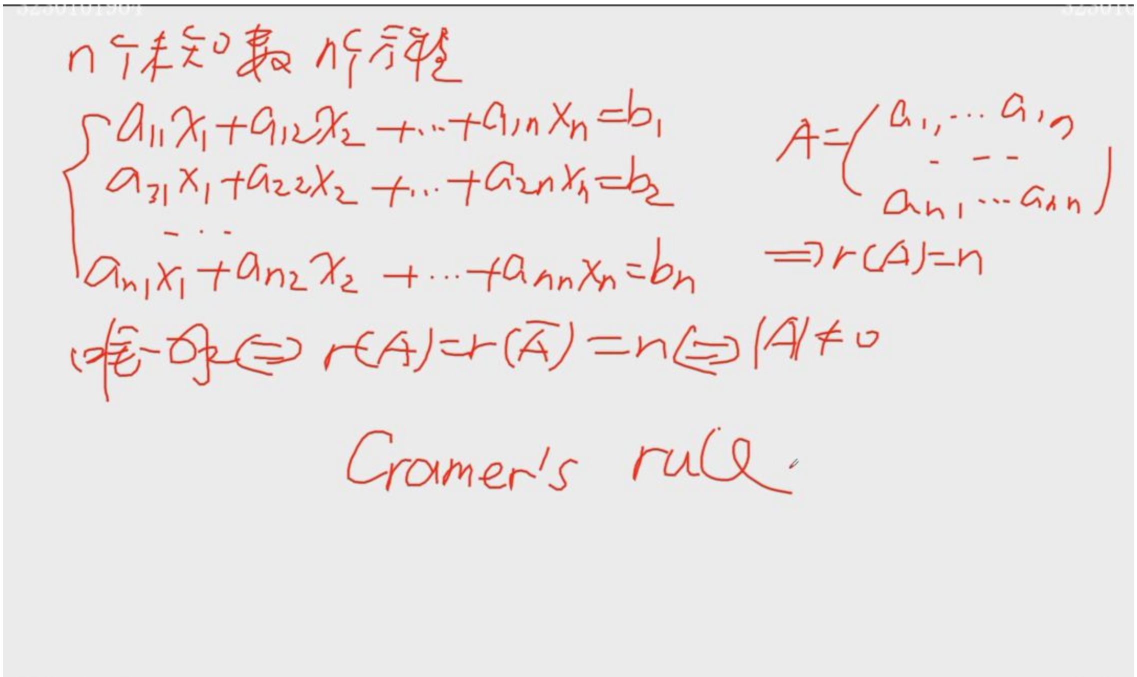
- 4.定理7:矩阵增加一行或一列，秩加一或不变
- 例：镶边法

  利用两式中x^3系数相同

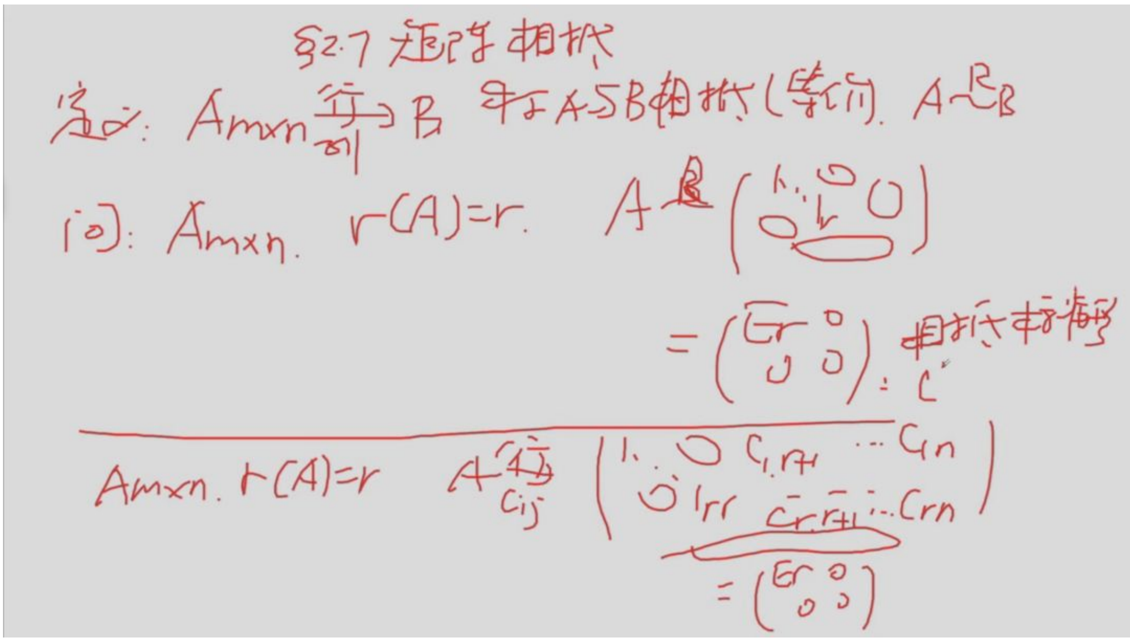
* 2.6高斯消元中的不变量;

- 

判断解有无：阶梯形；求解：最简形A：系数矩阵；Ā：增广矩阵
- Cramer法则：系数矩阵的行列式不等于0时，方程组有唯一解，公式见前


D不等于0，则r(D)=n

- 2.7矩阵的相抵：A~B



- 任何矩阵都可通过有限次行列变换变成相抵标准形 *注意：这里的矩阵是一般矩阵，可以列倍加列倍乘*