线性代数

八、欧氏空间（接四/七）

- 一、定义和简单性质
    - 1.内积-->欧氏空间：==一定为实数域上==**大于等于0，可交换，系数可提，分配律**

定义：设V是实数域R上的一个线性空间，如果对于V中任意两个向量α,β都有唯一确定(α,β)的实数与之对应，且有性质

1. $\forall \alpha \in V$ $(\alpha,\alpha)\geq 0$，且 $\alpha=0 \Leftrightarrow (\alpha,\alpha)=0$
2. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ $\forall \alpha,\beta\in V$
3. $(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)$ $\forall c\in R$ $\forall \alpha,\beta\in V$
4. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$.

称(α,β)为向量α,β的内积，具有内积的实线性空间称为欧氏空间。

    - 例：R^n的常用内积

例1：已知$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$R^n$的一个基，任取V中的两个向量α,β，设α,β在该基下坐标为X,Y，令

R^n常用内积

(1) $\underline{(\alpha,\beta)_1 = X^TY} = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

(2) $(\alpha,\beta)_2 = 2X^TY = 2x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+2x_ny_n$

可证$(\cdot,\cdot)_1$，$(\cdot,\cdot)_2$均为R^n内积，∴R^n关于$(\cdot,\cdot)_1$，$(\cdot,\cdot)_2$构成欧氏空间

(2). 1) $(\alpha,\alpha)_2 = 2x_1^2+2x_2^2+\cdots+2x_n^2\geq 0$，$(\alpha,\alpha)_2=0 \Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

2) $(\alpha,\beta)_2 = (\beta,\alpha)_2 \Leftrightarrow 2x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+2x_ny_n = 2y_1x_1+\cdots+2y_nx_n$

3) $(c\alpha,\beta)_2 = 2(cx_1)y_1+2(cx_2)y_2+\cdots+2(cx_n)y_n = c(2x_1y_1+\cdots+2x_ny_n) = c(\alpha,\beta)$

4) $(\alpha+\beta,\gamma)_2 = 2(x_1+y_1)z_1+\cdots+2(x_n+y_n)z_n = (2x_1z_1+\cdots+2x_nz_n)+(2y_1z_1+\cdots+2y_nz_n) = (\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

- 例：矩阵的常用内积

例1：$R^{m\times n}$中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$$(A,B)=a_{11}b_{11}+\cdots+a_{ij}b_{ij}+\cdots+a_{mn}b_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$ 常用内积

(1) $(A,A)\geq 0$ $(A,A)=0\Leftrightarrow A=0$

(2) $(A,B)=(B,A)$

(3) $(cA,B)=c(A,B)=$

$(ca_{11})b_{11}+(ca_{12})b_{12}+\cdots=c(a_{11}b_{11}+\cdots+a_{mn}b_{mn})$

(4) $(A+B,C)=(a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{12}+\cdots$

- 例：f(x)的常用内积

例2：设 $C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)是[a,b]上连续函数\}$ 在 $C[a,b]$ 对函数加法、实数与函数的数量乘法运算是R上的一个线性空间。令

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \forall f(x),g(x)\in C[a,b]$$

可验证 $(\cdot,\cdot)$ 是内积

- 二、度量矩阵
  - 1.定义：

设V是实数域R上的n维欧氏空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一个基。$\forall\alpha,\beta\in V$，

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$$

$$\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$$

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=(x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n,\ y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(x_1\cdots x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&\cdots&(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ \vdots&&\vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1)&\cdots&(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

矩阵A为内积在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵。实对称

V是R上2维欧氏空间 $\dim V=2$. 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i\varepsilon_i$

$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 = \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j$

$(\alpha,\beta) = (x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2,\ y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2) = \left(\sum_{i=1} x_i\varepsilon_i,\ \sum_{j=1} y_j\varepsilon_j\right)$

$= x_1y_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1) + x_1y_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + x_2y_1(\varepsilon_2,\varepsilon_1) + x_2y_2(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$

$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$

$= \underset{1\times 2}{(x_1\ x_2)} \begin{pmatrix} (\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) \end{pmatrix} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \left(x_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+x_2(\varepsilon_2,\varepsilon_1),\ x_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+x_2(\varepsilon_2,\varepsilon_2)\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

- 例

例3: 已知 $\varepsilon_1 = e_1+e_2$. $\varepsilon_2 = e_1+e_3$ $\varepsilon_3 = e_4-e_1$,

$\varepsilon_4 = e_1-e_2-e_3+e_4$ 是欧氏 R^4 的一个基.

α, β 在这个基下坐标分别为 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 求度量矩阵

及 $(\alpha,\beta) \in R$

解: $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & (\varepsilon_1,\varepsilon_3) & (\varepsilon_1,\varepsilon_4) \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & (\varepsilon_2,\varepsilon_3) & (\varepsilon_2,\varepsilon_4) \\ (\varepsilon_4,\varepsilon_1) & \cdots & & (\varepsilon_4,\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(\alpha,\beta) = (1\ 2\ 3\ 4)\,A\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 5$

- 2.向量的长度

P180 定义2: 设 $(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间 V 的内积 $\alpha\in V$.

$\boxed{称 \sqrt{(\alpha,\alpha)} 为 \alpha 的长度. 并记作 |\alpha|}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2 \quad \therefore |\vec{\alpha}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}$

思考: ① $|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

$\sqrt{(\alpha,\alpha)} \Leftrightarrow (\alpha,\alpha)=0$

② $|k\alpha|=|k||\alpha|$ ✓

$\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k|\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|k||\alpha|$

- 3.柯西-施瓦尔茨不等式

定理1: (Cauchy-Schwarz不等式) 设 V 是定义了内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间. 则 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta| \quad \forall\alpha,\beta\in V$

等号成立 $\Leftrightarrow$ α,β 线性相关

定理1: (Cauchy-Schwarz不等式) 设 V 是定义了内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间. 则 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta| \quad \forall\alpha,\beta\in V$

等号成立 $\Leftrightarrow$ α,β 线性相关

$k_1\alpha+k_2\beta=0$, $k_1\ne0$, $\alpha=-\frac{k_2}{k_1}\beta$

证: ① α,β 相关 $\Rightarrow \alpha=k\beta$

$|(\alpha,\beta)|=|(k\beta,\beta)|=|k|(\beta,\beta)$

$|\alpha|=|k\beta|=|k||\beta|, \quad \therefore |\alpha||\beta|=|k||\beta|^2=|k|(\beta,\beta)$

因 α,β 无关. $\forall t\in\mathbb{R}$. $t\alpha+\beta\ne0 \quad \therefore (t\alpha+\beta,\ t\alpha+\beta)>0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha,\alpha)}_{>0}t^2+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)>0 \quad \therefore \Delta=[2(\alpha,\beta)]^2$

$-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0 \quad \therefore |(\alpha,\beta)|<|\alpha||\beta|$

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha|\cdot|\beta| \qquad |\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

Cauchy不等式 R^n: $(\alpha,\beta) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

$$\therefore (x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

施瓦兹不等式 $(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \quad \therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

- 4.三角不等式

三角不等式 $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \quad \forall \alpha,\beta \in V$

证: $(|\alpha+\beta|)^2 = (\alpha+\beta,\alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)$$
$$= |\alpha|^2+|\beta|^2+2(\alpha,\beta)$$
$$\le |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta|$$
$$= (|\alpha|+|\beta|)^2$$
$$\therefore |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

- 四、向量的夹角
  - 1.定义

定义: $\langle\alpha,\beta\rangle = \arccos \boxed{\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}} \in [-1,1]$

正交 $\Leftrightarrow$ 垂直 $\forall \alpha,\beta \in$ 空间 V, $(\alpha,\beta)=0$

- 2.勾股定理

$(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha\perp\beta \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$ (勾股定理)

- 3.标准正交组（不含零向量）

通常：对欧氏空间一个向量组，两两正交，称为正交组

$\Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=0 \quad i\neq j$

标准正交组：$\alpha_1,\cdots\alpha_n \Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

- 4.定理：正交必无关

定理2：欧氏空间中的一个正交向量组的任意一个由有限个非零向量组成的部分组，必是无关组

证：$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是非零正交向量组 →为 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 无关

设存在一组数 $k_1\cdots k_n$ s.t $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\theta$ ①

$\forall\alpha_j\in\{\alpha_1,\cdots\alpha_n\}$

$(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n,\ \alpha_j)=(\theta,\alpha_j)=0$

$=(k_j\alpha_j,\alpha_j)=k_j\underbrace{(\alpha_j,\alpha_j)}_{>0} \quad \therefore k_j=0$

- 五、标准正交基
  - 1.定义：
    - （1）两两正交；
    - （2）每个向量长度为1；
    - $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 是标准正交基 $\Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

      $\Leftrightarrow$ 度量阵 $\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2)\cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \cdots & & \\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}=E$

- 2.定理3：施密特正交化

定理3：n维欧氏空间V的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，令

施密特正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$\vdots$

$\beta_n =$ $\quad\therefore \beta_1 \cdots \beta_n$ 正交基

标准正交基：$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \quad \cdots \quad \gamma_n = \frac{\beta_n}{|\beta_n|}$

3.例

将 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 变为标准正交组

施密特正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \beta_1, \beta_2$ 正交组

标准正交组 $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例6. 已知 $\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = x, \quad \varepsilon_3 = x^2$ $\quad |\beta_1| = \sqrt{(\beta_1, \beta_1)} = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1 dx} = 1$

$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad f(x), g(x) \in R[x]_3$

标准正交基

1. 施密特正交化 $\beta_1 = \varepsilon_1 = 1$ $\quad (\varepsilon_2, \beta_1) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\beta_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 = \varepsilon_3 - \frac{(\varepsilon_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\varepsilon_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$(\beta_1, \beta_1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_0^1$

2. 标准化：$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = 1. \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$

$\gamma_3 = ?$

$|\beta_2| = \sqrt{(\beta_2, \beta_2)} = \sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx}$