线性代数

六、二次型

- 一、二次型定义
  - 1.定义

form 第6章 二次型

二次型: 二次齐次式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

a_{ij} 是常数 $a_{ij} \in R$: 实二次型 $a_{ij} \in C$: 复二次型 type

$a_{ii}x_i^2$: 平方项 $2a_{ij}x_ix_j$: 交叉项

非退化 $\exists \begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$ $\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ s.t. $f(x_1, \cdots, x_n) = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 标准形

  - 2.研究目的

思路: $f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$\exists$? 非退化(可逆)线性替换 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$ $\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

s.t. $f(x_1, \cdots, x_n) = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \underline{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

可逆

- 法1：配方法：配一次少一个未定元，一定非退化

例1：$f(x_1,x_2,x_3)=\underbrace{x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3}+x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-\cancel{x_2^2}-2x_3^2-4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_3^2+2x_2x_3+x_2^2)+2x_2^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2+2x_2^2$$

$$=y_1^2-2y_2^2+2y_3^2$$

其中 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_2 \end{cases}$

若无平方项，先用平方差公式创造平方项

例：$f(x_1,x_2,x_3)=\underline{2x_1x_2}+2x_1x_3-6x_2x_3$

解：令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$\therefore f(x_1,x_2,x_3)=\underline{2y_1^2}-2y_2^2\underline{-4y_1y_3}+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2\underline{-2y_2^2+8y_2y_3}$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

$$=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$$

$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \\ \vdots \\ x_n=y_n \end{cases}$

$\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$$\therefore \cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- 二、二次型的矩阵形式及矩阵合同

§6.2 二次型的矩阵形式. 矩阵合同

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

↓ 称为二次型矩阵

$A^T = A$: 对称矩阵

拆分处理:

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ij}x_jx_i = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

$a_{ji} \triangleq a_{ij}$

  - 1.二次型->矩阵

例1: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$

二次型化矩阵: 平方不变, 交叉减半

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

反之同理

- 2.化标准形

给二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$　$A^T=A$

一定∃C可逆，令 $X=CY$ s.t.

$f(x_1,\cdots,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^TC^TACY$ 为标准形 √　$\Lambda=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$

定理：$A^T=A$，则一定存在可逆阵C

s.t. $C^TAC=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$ √

特别地，实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$，A实对称

则∃C正交 s.t. $C^TAC=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

注意：C不一定为正交阵，若C为正交阵，标准形的系数一定为特征值；若C不是正交阵，标准形的系数不唯一

例1：用正交线性替换化二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

为标准形，并写出正交替换

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

$\lambda_1=5$，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　$\lambda_2=\lambda_3=-1\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\xi_2,\xi_3\xrightarrow{\text{正交化}}\beta_2,\beta_3$　∴ ξ_1,β_2,β_3 正交基　∴单位化 $\eta_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}$

$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}$　$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}$　$C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$　∴ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

∴ $f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

- 3.合同

定义1: $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$, $C_{n\times n}$可逆. $B=C^TAC$

称$A\overset{T}{\sim}B$. A与B合同

反身性. $A\overset{T}{\sim}A$ $\quad E^TAE=A$

对称性 $A\overset{T}{\sim}B \Rightarrow B\overset{T}{\sim}A$

$C^TAC=B \quad \therefore A=(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^TBC^{-1}$

传递性. $A\overset{T}{\sim}B$ $\quad B\overset{T}{\sim}C \Rightarrow A\overset{T}{\sim}C$

$P^TAP=B \quad Q^TBQ=C \Rightarrow Q^TP^TAPQ=C$

$\Rightarrow (PQ)^TA(PQ)=C$

- 定理2：二次型化为标准型，秩不变

定理. 二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$的标准形中, 系数不为0的平方项个数等于$r(A)$

定义. 二次型的秩定义为$r(A)$

- 三、二次型的规范形

§6.3 二次型的规范形§

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+2y_2^2-3y_3^2+0y_4^2$$

$$=y_1^2+(\sqrt{2}y_2)^2+(\sqrt{3}iy_3)^2+0y_4^2$$

$$=z_1^2+z_2^2+z_3^2+0z_4^2$$

$$\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=\sqrt{2}y_2 \\ z_3=\sqrt{3}iy_3 \\ z_4=y_4 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2 + 0y_4^2$$

$$= y_1^2 + (\sqrt{2}y_2)^2 - (\sqrt{3}y_3)^2 + 0y_4^2$$

$$= z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 0z_4^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \sqrt{2}y_2 \\ z_3 = \sqrt{3}y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases}$$

- 1.复数域上的规范型：均可化为唯一确定的规范型

$f(x_1, \cdots, x_n) \xlongequal[|C| \neq 0]{X=CY} z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$ 称为 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在C上的规范形

定理：1.(二次型语言) 任何一个复二次型经过适当的非退化线性替换可化为规范形，规范形是唯一的，是由二次型的秩唯一决定

2.(矩阵语言) $C^{n\times n}$ 任一个秩为r的对称矩阵A与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同，即存在可逆阵C，使 $C^TAC = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 推论：复对称阵合同即秩相等

推论：A、B复对称，A与B合同 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

- 2.R上规范形 补惯性定理：同一实对称阵，秩、正负惯性指数均相等

- 定理：实数域合同，r、正（负）惯性指数相等

给一个实对称矩阵A. $r(A)=r$ $\exists C$实可逆 s.t

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad 其中r(A)=r$$

定理. A.B均为n阶实对称矩阵. 则

A与B在实数域上合同 $\Leftrightarrow$ A,B有相同的秩和相同的正(负)惯性指数

- 四、实二次型的正交替换：换成系数为特征向量的标准型
  - 具体操作：

例7: xoy面上一条有心二次曲线

$3=2x^2+2xy+2y^2$ 求标准方程

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=3$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2=1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$

单位化: $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $3x'^2+y'^2=3$

$\therefore \frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{3}=1$

- 五、正定性：只考虑实数域
  - 1.定义：

定理. 实二次f$(x_1\cdots x_n)$负定 $\Leftrightarrow$ $-f(x_1\cdots x_n)$正定

实二次型$f(x_1\cdots x_n)$半负定 $\Leftrightarrow$ $-f(x_1\cdots x_n)$半正定

  -

- 定理. 实二次型 $f(x_1,\cdots x_n)=X^TAX$. 下述等价.
  (1) $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定
  ② ——— 正惯性指数为 n
  ③ $\lambda_A>0$
  ④ $\exists$ 实可逆阵 B. s.t $A=B^TB$.
  注: 正定二次型规范形: $y_1^2+\cdots+y_n^2$

- 定义: $f(x_1,\cdots x_n)=X^TAX$ 正定 (负定, 半正定, 半负定) 则称 A 正定 (负定 ———)

- 定理: 设 A 为实对称阵. 则下述等价
  (1) A 正定
  (2) $\lambda_A>0$
  (3) $A=B^TB$. B 实可逆.
  (4) A 与单位阵 E 合同.
  $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$
  注: A 正定 $\Rightarrow$ ① $|A|>0$ ($\lambda_1\cdots\lambda_n$)
  ② $a_{ii}>0$