实验报告——期权定价

杨悦然 517070910121 数学科学学院
张钰 517070910067 数学科学学院
指导教师：陈贤峰

May 28, 2019

【摘要】

本实验根据欧式期权和美式期权的特点，横向比较了 Black-Scholes 方程、二叉树方法、Monte Carlo 模拟三种方法。Black-Scholes 方法通过求解偏微分方程，可以得到欧式期权的准确解。但对于美式期权，由于提前行权的不确定性导致 Black-Scholes 方程难以求解，二叉树方法提供了一种简单实用的近似。Mento Carlo 方法为期权定价的求解提供了新思路。

Contents

1 实验介绍

1.1 实验目的

本实验设计了概率论和微分方程。实验通过介绍金融中期权定价的问题中的 Black-Scholes 方程，利用数学期望，方差，正态分布和分布函数等概念，同时利用二叉树方法模拟金融衍生证券计价。

1.2 背景介绍

1.2.1 期权

期权，是指一种合约，该合约赋予持有人在某一特定日期或该日之前的任何时间以固定价格购进或售出一种资产的权利。期权定义的要点如下：

1. 期权是一种权利。期权合约至少涉及买家和出售人两方。持有人享有权力但不承担相应的义务。
2. 期权的标的物。期权的标的物是指选择购买或出售的资产。它包括股票、政府债券、货币、股票指数、商品期货等。期权是这些标的物“衍生”的，因此称衍生金融工具。值得注意的是，期权出售人不一定拥有标的资产。期权是可以“卖空”的。期权购买人也不定真的想购买资产标的物。因此，期权到期时双方不一定进行标的物的实物交割，而只需按价差补足价款即可。
3. 到期日。双方约定的期权到期的那一天称为“到期日”，如果该期权只能在到期日执行，则称为欧式期权；如果该期权可以在到期日或到期日之前的任何时间执行，则称为美式期权。
4. 期权的执行。依据期权合约购进或售出标的资产的行为称为“执行”。在期权合约中约定的、期权持有人据以购进或售出标的资产的固定价格，称为“执行价格”。

RMK 1. 内容摘自百度百科 *[1]*

1.2.2 期权的内在价值、外在价值

内在价值是指期权合同交割价或约定价与相应证券市场价之间的价差。例如：若某买入期权的约定价格为每股 53 美元而购买该股票的市场价格为 55 美元，则该期权具有内在价值 2 美元：或者在卖出期权情况下，若约定价格为每股 55 美元而相应股票的市场价格为 53 美元，则该期权的内在价值也为 2 美元。平价期权（at the money option）或虚值期权 (out of the money option) 无内在价值，实值期权（in the money option）有内在价值。[2]

外在价值是指期权合约的购买者为购买期权而支付的权利金超过期权内在价值的那部分价值。期权的时间价值跟转股的剩余期限、股票价格的历史波动率、以及当前股票价格的高低有关：转股剩余时间越长、价格变动越大、期权时间价值越高；股票波动率越大、期权时间价值越高；股价过高或过低，期权时间价值越低。[3]

1.3 套期保值

套期保值指在期货市场上买入（或卖出）与现货市场交易方向相反、数量相等的同种商品的期货合约，进而无论现货供应市场价格怎样波动，最终都能取得在一个市场上亏损的同时在另一个市场盈利的结果，并且亏损额与盈利额大致相等，从而达到规避风险的目的。[4]

1.3.1 Black-Scholes 模型

首先，模型的基本假设为

- 金融资产价格服从对数正态分布，即金童资产的对数收益率服从正态分布
- 在期权有效期内，无风险利率和金融资产收益变量是恒定的
- 市场无摩擦，即不存在税收和交易成本
- 金融资产在期权有效期内无红利及其他所得
- 该期权是欧式期权，即在期权到期前不可实施 [5]

则 Black-Scholes 方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{1.1}$$

其中 S 为股票现价，V 为期权的价格，期权约定期为 t，r 为无风险年利率，σ 为股票价格波动率。事实上，因为这样的常微分方程有很多解，所以需要确定一个解，则需要一个初值条件。

如果是欧式看涨期权，那么相应的初值条件为 $V=\max(S-X,0)$，则可以解得方程的解为

$$V=S\cdot N(d_1)-e^{-r\cdot T}\cdot X\cdot N(d_2) \tag{1.2}$$

如果时欧式看跌期权，那么相应的初值条件为 $V=\max(X-S,0)$，则可以解得方程的解为

$$V=-S\cdot N(-d_1)+e^{-r\cdot T}\cdot X\cdot N(-d_2) \tag{1.3}$$

其中

d_1	$\frac{\ln\frac{S}{X}+(r+0.5\sigma^2)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}$
d_2	$d_1-\sigma\cdot\sqrt{T}$
S	期权初始合理价格
X	期权交割价格
S	所交易金融资产现价
T	期权有效期
r	连续复利计无风险利率 H
σ^2	年度化方差
N()	正态分布变量的累计概率分布函数

然而这个方程有精确解的情况确实为少数，对于很多情况，例如美式期权定价，这个方程的解就更加复杂，所以我们需要更好的方法。

2　理论分析

2.1　二叉树介绍

在计算机科学中，二叉树（英语：Binary tree）是每个节点最多只有两个分支（即不存在分支度大于 2 的节点）的树结构。通常分支被称作“左子树”或“右子树”。二叉树的分支具有左右次序，不能随意颠倒。

二叉树的第 i 层至多拥有 2^{i-1} 个节点；深度为 k 的二叉树至多有 2^k-1 个节点（定义根节点所在的深度为 0），而总计拥有节点数匹配的，称为“满二叉树”，深度为 k 有 n 个节点的二叉树，当且仅当其中的每一届点都可以和同样深度的满二叉树序号为 1 到 n 的节点一一对应时，称为完全二叉树。对任何一棵非空的二叉树 T，如果其叶片数位 n_0，分支度为 2 的节点数为 n_2，则 $n_0=n_2+1$.

与普通树不同，普通树的节点个数至少为 1，而二叉树的节点个数可以为 0；普通树节点的最大分支度没有限制，而二叉树节点的最大分支度为 2；普通树的节点无左、右次序之分，而二叉树的节点有左、右次序之分。

二叉树通常作为数据结构应用，典型用法是对节点定义一个标记函数，将一些值与每个节点相关系。这样标记的二叉树就可以实现二叉搜索树和二叉堆，并应用于高效率的搜索和排序。

2.2　思想

二叉树方法把期权定价问题离散化，将时间分为很多很小的时间间隔 Δt，每一个状态点到达下一个状态点简化成为两种情况，上扬或者下跌，假设上扬的概率为 p，下跌的概率为 1-p，同样使用 Black-Scholes 模型中的假设，假定市场为风险中性，即股票预期收益率就等于市场无风险利率 r，那么我们需要股票预期收益等于组合投资的回报的期望，首先考虑股票预期收益，以连续复利来算，有以下微分方程

$$\frac{d\pi}{dt}=r\pi,\pi(0)=\pi_0 \tag{2.1}$$

则可以解得

$$\pi=e^{rt}\pi_0 \tag{2.2}$$

那么我们可以得出

$$Se^{r\Delta t}=pSu+(1-p)Sd\Longrightarrow e^{r\Delta t}=pu+(1-p)d \tag{2.3}$$

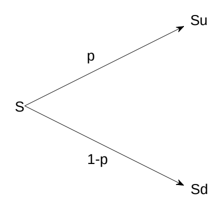


Figure 2.1: Δt 内的股价变化

其中 u 为上涨幅度，d 为下跌幅度。因为股价的变化符合布朗运动，是一个随机变量，满足

$\Delta S \sim N(rS\Delta t, \sigma S\sqrt{\Delta t})$，则有

$$\begin{aligned} D(Q) &= E(Q^2) - [E(Q)]^2 \\ \sigma^2 S^2 \Delta t &= p(Su)^2 + (1-p)(Sd)^2 + [pSu + (1-p)Sd]^2 \\ \sigma^2 \Delta t &= pu^2 + (1-p)d^2 + [pu + (1-p)d]^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

则可以解出

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} \end{aligned} \tag{2.5}$$

3 任务一

3.1 题目

在前文中的欧式期权的实际例子中，将看涨期权改为看跌期权，试用二叉树方法将期权的有效期 T 分为若干段，编制程序进行计算，求出期权的定价，并且与用 Black-Scholes 欧式看跌期权的解公式所求的精确值相比较。

3.2 解答

利用 matlab 编写函数

```matlab
function y =euro(n,T,sig,r,S0,x)
t = 1/n*T;
u = exp(sig*sqrt(t));
d = 1/u;
a = exp(r*t);
p = (a-d)/(u-d);
for i = 0:n
  S(i+1) =  S0*u^i*d^(n-i);
  V(i+1) = max(-S(i+1)+x,0);
end
for i =1:n
  for i = 1:length(V)-1
    Vn(i) = exp(-r*t)*((1-p)*V(i)+p*V(i+1));
  end
  V = Vn;
  Vn =[];
end
y = V;
```

3.3 分析

相比看涨期权，看跌期权中的 $V_T = \max(X - S_T, 0)$。输入参数

n	T	σ	r	S_0	x
6	0.5	0.2	0.1	42	40

得到 $n=6$ 时 0.8684 为二叉树方法求出的解，二叉树如下图，其中每个节点上的数字代表该时刻期权价值。

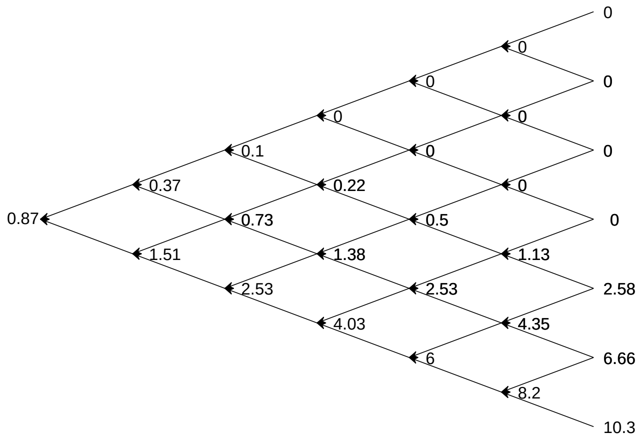


Figure 3.1: 欧式看跌期权的二叉树

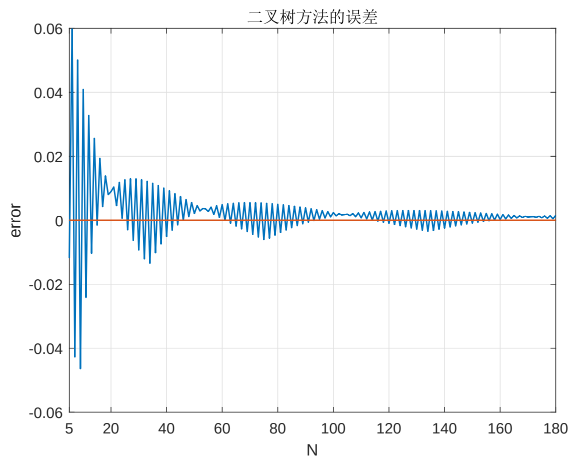
而根据 Black-Scholes 公式

$$V = Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \tag{3.1}$$

该期权的精确解为 0.8086。

3.4 比较结论

我们取多一些 n 然后与精确值进行比较，可以得到以下图



可以发现应该将 n 取得足够大，结果才会更加精确。

事实上当我们取 n=180 的时候，得到的解为 0.8101，误差仍然有 0.0015，且根据图像可以知道二叉树方法的误差相对而言仍然是较大而且比较不稳定的。

4 任务二

4.1 题目

在前文中的美式期权的实际例子中，将看跌期权改为看涨期权。仍将期权的有效期 T 分为 5 段，试用二叉树的方法（写出每个节点上的股价和期权定价）求出美式期权的定价。如果问题再改为欧式看涨期权，用这样的方法求出的定价又是多少？

4.2 解答

如图，$n=5$ 时美式看涨期权的二叉树如下，每个节点上的数字代表期权价格。

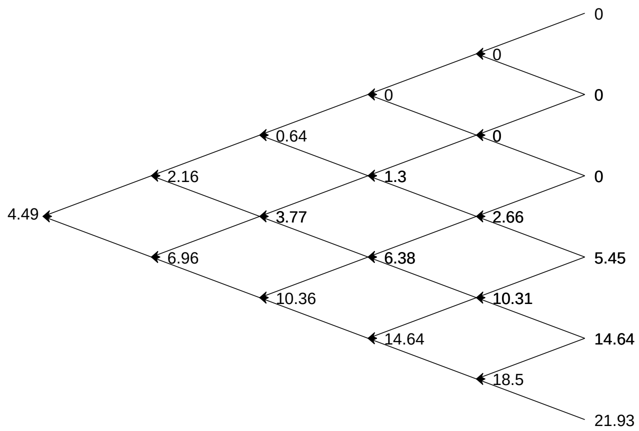


Figure 4.1: 美式看涨期权的二叉树

$n=5$ 时欧式看涨期权的二叉树如下

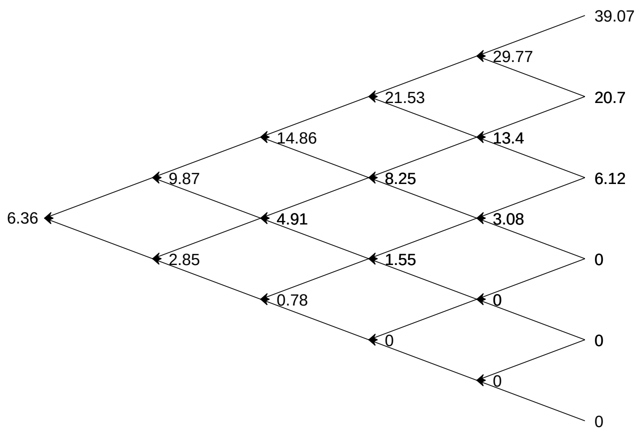


Figure 4.2: 欧式看涨期权的二叉树

5 任务三

对上一任务中美式期权的情况，编制程序进行计算，可用前文中的结果检验程序的正确性，继而将 T 分成充分小的时段，求出期权的定价

5.1 分析

对于美式期权定价，因为美式期权可以随时行使权力，那么就要考虑每一个时间节点，继续持有的期望利益和立即行权的利益之间的大小，然后决定是否继续持有。即我们需要从最终的节点往前推每个点的期权价值。便有以下公式

$$V(i,j) = max(S(i,j) - x, 0, (V(i+1,j) \cdot p + V(i+1,j+1) \cdot (1-p))e^{-r\Delta t}) \tag{5.1}$$

其中 $V(i,j)$ 是二叉树中第 i 列 j 行的节点

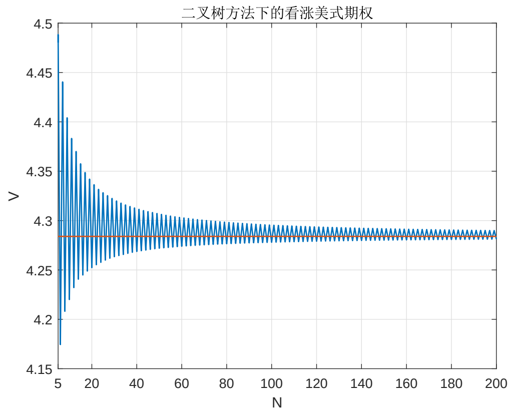
5.2 解答

利用 Matlab 可以写到以下函数

```
function y = usa(n,T,sig,r,S0,x)
t = 1/n*T;
u = exp(sig*sqrt(t));
d = 1/u;
a = exp(r*t);
p = (a-d)/(u-d);
for i = 0:n
  for j = 0:i
    S(i+1,j+1) = S0*u^j*d^(i-j);
  end
end
for i = 0:n
  V(i+1) = max(-S(n+1,i+1)+x,0);
end

for i =1:n
  for j = 1:length(V)-1
    St = max(x-S(n+1-i,j),0);
    no=exp(-r*t)*((1-p)*V(j)+p*V(j+1));
    Vn(j) = max(St,no);
  end
  V = Vn;
  Vn =[];
end
y = V;
```

我们先选取前面题目中的数据验证本函数，即得到期权的价格应该是 4.4855，与之前题目中数据相符合。然后选取递增的 n，看看得到的结果



n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
y	3.9893	4.1379	4.2081	4.2449	4.2646	4.2747	4.2795	4.2819	4.2831	4.2836	4.2839	4.2841

可以知道期权的价格应该是 4.28。

5.3 欧式期权

同样我们如果代用相同的参数（n=5）到欧式期权中，求得的价格为 6.36，通过 Black-Scholes 方程得到的精确解为 6.11 元。可以发现事实上欧式期权比美式期权高很多，可能原因应该是美式期权的买方可以很好地规避风险，他们可以选择在有利于自己的任何时机行权，让偏离自身价值的期权标的产品的市场价格逐渐回归价值，保持市场的理性运行，防止期权到期时集中行权对市场造成冲击。[6]

6 任务四

在二叉树思想一节，得到公式

$$V = e^{-r\Delta t}[pV_u + (1-p)V_d] \tag{6.1}$$

如果 $T = \Delta t$，那么上式即说明期权定价

$$V = e^{-rT}E[V_t] \tag{6.2}$$

如果 $T = 2\Delta t$，那么使用二叉树可知到时间 T，股价分别以概率 p^2，$2p(1-p)$ 和 $(1-p)^2$ 取值 Su^2，Sud 和 Sd^2。因而，此时期权也以同样的概率分别取值

$$V_T^{(1)} = \max(Su^2 - X, 0) \tag{6.3}$$

$$V_T^{(2)} = \max(S - X, 0) \tag{6.4}$$

$$V_T^{(3)} = \max(Sd^2 - X, 0) \tag{6.5}$$

那么倒推至时间 Δt，期权的价值应为

$$V_{\Delta t}^{(1)} = e^{-r\Delta t}[pV_T^{(1)} + (1-p)V_T^{(2)}] \tag{6.6}$$

$$V_{\Delta t}^{(2)} = e^{-r\Delta t}[pV_T^{(2)} + (1-p)V_T^{(3)}] \tag{6.7}$$

于是在初始时刻期权的定价应为

$$
\begin{aligned}
V &= e^{-r\Delta t}[pV_{\Delta t}^{(1)} + (1-p)V_{\Delta t}^{(2)}] \\
&= e^{-2r\Delta t}[p^2V_T^{(1)} + 2p(1-p)V_T^{(2)} + (1-p)^2V_T^{(3)}]
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

即

$$
V = e^{-rT}E(V_T) \tag{6.9}
$$

其中

$$
E(V_T) = p^2\max(Su^2 - X, 0) + 2p(1-p)\max(S - X, 0) + (1-p)^2\max(Sd^2 - X, 0) \tag{6.10}
$$

试对 $T = 3\Delta t$ 的情况考察公式 (6.2) 是否成立？并试着写出当 $T = n\Delta t$ 时公式中 $E(V_T)$ 的表达式。然后应用公式 (6.2) 于前文中的欧式看涨期权的实例，将结果加以比较。

6.1 解答

6.1.1 $T = 3\Delta t$

可以知道到时间 T，股价分别以概率 p^3，$p^2(1-p)$，$p(1-p)^2$，$(1-p)^3$ 取值 Su^3，Su^2d，Sud^2，Sd^3，此时期权也以同样的概率取到

$$
V_T^{(1)} = \max(Su^3 - X, 0) \tag{6.11}
$$

$$
V_T^{(2)} = \max(Su - X, 0) \tag{6.12}
$$

$$
V_T^{(3)} = \max(Sd - X, 0) \tag{6.13}
$$

$$
V_T^{(4)} = \max(Sd^3 - X, 0) \tag{6.14}
$$

倒退至时间 $2\Delta t$，期权的价值应为

$$
V_{2\Delta t}^{(1)} = e^{-r\Delta t}[pV_T^{(1)} + (1-p)V_T^{(2)}] \tag{6.15}
$$

$$
V_{2\Delta t}^{(2)} = e^{-r\Delta t}[pV_T^{(2)} + (1-p)V_T^{(3)}] \tag{6.16}
$$

$$
V_{2\Delta t}^{(3)} = e^{-r\Delta t}[pV_T^{(3)} + (1-p)V_T^{(4)}] \tag{6.17}
$$

倒退至时间 Δt，期权的价值应为

$$
V_{\Delta t}^{(1)} = e^{-r\Delta t}[pV_{2\Delta t}^{(1)} + (1-p)V_{2\Delta t}^{(2)}] \tag{6.18}
$$

$$
V_{\Delta t}^{(2)} = e^{-r\Delta t}[pV_{2\Delta t}^{(2)} + (1-p)V_{2\Delta t}^{(3)}] \tag{6.19}
$$

$$
\tag{6.20}
$$

于是在初始时刻定价应为

$$
\begin{aligned}
V &= e^{-r\Delta t}[pV_{\Delta t}^{(1)} + (1-p)V_{\Delta t}^{(2)}] \\
&= e^{-3r\Delta t}[p^3V_T^{(1)} + 3p^2(1-p)V_T^{(2)} + 3(1-p)^2pV_T^{(3)} + (1-p)^3V_T^{(4)}] \\
&= e^{-rT}E(V_T)
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

其中

$$
E(V_T) = p^3\max(Su^3 - X, 0) + 3p^2(1-p)\max(Su - X, 0) + 3p(1-p)^2\max(Sd - X, 0) + (1-p)^3\max(Sd^3 - X) \tag{6.22}
$$

6.1.2 $T = n\Delta t$

$$E(V_T) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i}(1-p)^i \max(Su^{n-i}d^i - X, 0) \tag{6.23}$$

下面用数学归纳法进行证明

Proof. n=1,2,3 时都已经证明完毕，若 n=k 时，此公式成立，那么 n=k+1 时

$$\begin{aligned}
V &= e^{-r\Delta t}[pV_{\Delta t}^{(1)} + (1-p)V_{\Delta t}^{(2)}] \\
&= e^{-r\Delta t}[pe^{-kr\Delta t}\sum_{i=0}^{k} C_k^i p^{k-i}(1-p)^i \max(Su^{k+1-i}d^i - X, 0) + (1-p)e^{-kr\Delta t}\sum_{i=0}^{k} C_k^i p^{k-i}(1-p)^i \max(Su^{k-i}d^{i+1} - X, 0)] \\
&= e^{-(k+1)r\Delta t}[\sum_{i=0}^{k} C_k^i p^{k-i+1}(1-p)^i \max(Su^{k+1-i}d^i - X, 0) + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i}(1-p)^i \max(Su^{k+1-i}d^i - X, 0)] \\
&= e^{-(k+1)r\Delta t}\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i p^{k-i+1}(1-p)^i \max(Su^{k+1-i}d^i - X, 0)
\end{aligned} \tag{6.24}$$

□

6.1.3 应用到欧式期权中

利用 matlab 编写函数如下

```
function y = pro4(n,T,sig,r,S0,x)
t = 1/n*T;
u = exp(sig*sqrt(t));
d = 1/u;
a = exp(r*t);
p = (a-d)/(u-d);
y = exp(-r*T);
e = 0;
for i = 0:n
  e = e + nchoosek(n,i)*p^(n-i)*(1-p)^i*max(S0*u^(n-i)*d^i-x,0);
end
y = y*e;

%方便对比，将欧式看涨期权二叉树推导方法的代码也放在这里
function y =test(n,T,sig,r,S0,x)
t = 1/n*T;
u = exp(sig*sqrt(t));
d = 1/u;
a = exp(r*t);
p = (a-d)/(u-d);
for i = 0:n
  S(i+1) =  S0*u^i*d^(n-i);
  V(i+1) = max(S(i+1)-x,0);
end
for i =1:n
  for i = 1:length(V)-1
    Vn(i) = exp(-r*t)*((1-p)*V(i)+p*V(i+1));
  end
  V = Vn;
  Vn =[];
```

```
end
y = V;
```

同样输入参数输入参数

n	T	σ	r	S_0	x
6	0.5	0.2	0.1	42	40

得到结果为 4.8192，和二叉树方法算出来的结果一致。

当时两种方法的计算量一致，但是占用的存储空间，显然是此方法占用较小，无论 n，占用的空间始终时只有固定的几个参数，然而前述方法需要在每一次记下 V_n 的值，然后再一步步向前推导出上一个 V_{n-1}

但是一旦 n 很大的时候，因为组合数会很大，所以在 matlab 中由于组合数导致的截断误差会很大，而这个问题在前一种方法中是不存在的。我们尝试取 n 很大的情况，即 n=2000，可以发现用此方法得到的结果是

Figure 6.1: pro4(2000,0.5,0.2,0.1,42,40)

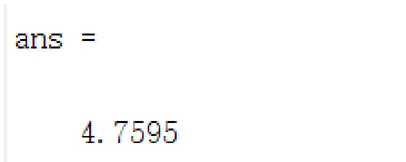


Figure 6.2: test(2000,0.5,0.2,0.1,42,40)

因为 n=2000 时，组合数太大，导致结果报错。

7 蒙特卡洛模拟

股价变化符合布朗运动，是一个随机变量，满足 $\Delta S \sim N(rS\Delta t, \sigma S\sqrt{\Delta t})$，那么可以得到以下方程

$$S(t+\Delta t) - S(t) = rS\Delta t + \sigma S(t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{7.1}$$

那么由伊藤引理 [7]

$$d\ln s = rSdt + \sigma dz \tag{7.2}$$

因此

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{7.3}$$

其中 ϵ 符合标准正态分布.

7.1 欧式期权

因为欧式期权回报仅仅取决于到期时的价值，直接使用以下公式来模拟最终价格

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\epsilon\sqrt{T}} \tag{7.4}$$

得到最终价格后，可以求得到期时期权的价值，然后再通过乘上因子 e^{-rT} 可以得到期权的定价，如此我们有以下代码

```
clear all
r = 0.1;
sig = 0.2;
S0 = 42;
T =0.5;
X = 40;
summ = 0;
for i = 1:100000
e = randn;
summ = summ+ max(S0*exp((r-sig^2*0.5)*T+sig*e*sqrt(T))-X,0);
end
y = summ/100000*exp(-r*T)
```

模拟十次得到的结果分别是 4.7358 4.7776 4.7559 4.7721 4.7715 4.7721 4.7488 4.7582 4.7648 4.7614，对这十次结果取平均值得到 4.7618

7.2 美式期权

因为美式期权随时可以行权，则针对美式期权，仍然是要采用生成样本路径，然后比较期权的价值，决定最优的行权时刻，然后再求期权价值平均值。

首先将时间 T 分为 n 个小区间，可以得到

$$S_i = S_{i-1}e^{(r-\sigma^2*0.5)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_{i-1}} \tag{7.5}$$

然后比较在每个点行权可以得到的利益和继续持有的利益，但是因为美式期权需要估计继续持有的利益，所以应当用最小二乘回归来估计下一个点的利益。显然，对于美式期权的持有者而言，收益最大化的选择便是在 St 首次小于或等于 Lt 的时候执行期权。我们用多项式函数做基，对继续持有期权的期权价值进行模拟。即我们用这个店的数据预测下一个点的数据，会有以下矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & s_{1,i} & s_{1,i}^2 \\ 1 & s_{2,i} & s_{2,i}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_{m,i} & s_{m,i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,i+1} \\ s_{2,i+1} \\ \vdots \\ s_{m,i+1} \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

其中 $s_{i,j}$ 表示第 i 条模拟路径的第 j 个节点。

然后我们用最小二乘法可以求解出 a，b，c，在带入第 i 个节点的数据就可以得到第 i+1 个节点的预测数据。然后和现在执行期权的收益进行比较，选择第一个能使现在执行期权的收益大于继续持有的收益的点执行期权。然后便可以得到每一条路径的最佳执行价格，再将这些数据取平均值，便可以得到期权定价。具体代码如下

```
%根据第i个节点的数据，求出i+1个节点预测的数据
function z = pre(s,m,i)
A = ones(m,3);
A(:,1) = 1;
```

```
A(:,2) = s(:,i);
A(:,3) = s(:,i).^2;
y =  s(:,i+1);
z = inv(A’*A)*A’*y;
z = A*z;

%蒙特卡罗模拟
function summ = monte2(n,m,T,r,sig,S0,x)
t = 1/n*T;
u = exp(sig*sqrt(t));
d = 1/u;
a = exp(r*t);
p = (a-d)/(u-d);

S= zeros(m,n);
S(:,1) = S0;

for i = 1:m
for j = 2:n+1
S(i,j) = S(i,j-1) * exp((r-sig^2*0.5)*t+sig*sqrt(t)*randn);
end
end

A = zeros(m,n+1);
A(:,1) = S0;
A(:,2) = S(:,2);
for i =3:n+1
A(:,i) = pre(S,m,i-1);
end

%美式看跌期权
A =max(A-x,0);
S = max(S-x,0);

% 美式看涨期权
% A =max(-A+x,0);
% S = max(-S+x,0);

summ=0;
for i  = 1:m
k=0;
for j = 1:n
if A(i,j+1)<=S(i,j)&&k==0
k = j;
end
end
if k==0
k = i+1;
end
summ = summ+exp(-r*t*(k-1))*S(i,j);
end
summ = summ/m;
```

为了让蒙特卡洛的方法更加准确，我们采用使用以上函数计算 100 次然后取 100 次得到的期权定价的平均值，美式看跌期权的算出的结果是 4.2805（其参数仍然和书中例题一致，但是时间段取 100 个），美式看涨期权算出的结果是 6.3831.

7.3 和二叉树方法比较

事实上因为蒙特卡洛方法随机性比较大，每一次算出来的数值都不一致，所以蒙特卡罗方法的误差可能比二叉树方法不稳定，但是在实际计算中发现，当我们运行前文二叉树方法算美式看跌期权的时候 usa(2000,5/12,0.4,0.1,50,50)，算出结果用了 4s，然而当我们用蒙特卡洛方法时，1s 不到便出现了结果，当 n = 10000（即时间分段）时，问题尤为明显，运用二叉树方法 5min 都没有得出结果，然而使用蒙特卡洛方法只计算了两秒。

8 交互界面

在总结了欧式期权和美式期权的特点之后，为了能简单迅速地对任意情况的期权定价，我们制作了一个网页。只需要将参数输入文本框，就可以迅速求出期权的定价。编程语言采用 JAVAScript，执行效率比 Matlab 高很多。

Figure 8.1: 交互界面

References

[1] “百度百科–期权,” https://baike.baidu.com/item/期权/317234?fr=aladdin.

[2] “内在价值,” https://baike.baidu.com/item/内在价值/537586.

[3] “期权的时间价值,” https://baike.baidu.com/item/期权时间价值/7878220?fr=aladdin.

[4] “套期保值,” https://baike.baidu.com/item/套期保值交易.

[5] “布莱克-舒尔斯模型,” https://zh.wikipedia.org/wiki/布莱克-舒尔兹模型.

[6] “美式期权和欧式期权有什么联系和区别？,” https:// zhidao.baidu.com/ question/ 583012520744925965.html.

[7] “期权定价的数值方法,” https:// wenku.baidu.com/ view/ 3d6d5477f12d2af90342e608.html.