随机过程

随机过程的概念

对于每个时间$t \in T$(T是某个固定的时间域)，$X(t)$是一随机变量，则这样的随机变量族$[X(t), t \in T]$称为**随机过程**(random process)。
如果T是离散时间域，则$X(t)$是一随机事件序列。对振动过程离散采样时，得到的就是时间序列。

随机过程的统计特征

随机过程的**各个样本在固定时刻t取值进行集合平均**，得到随机过程的**数学期望**

$$E[X(t)] = \mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dF(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)p(x,t)dx$$

其中$F(x,t)$和$p(x,t)$分别是$X(t)$的概率分布函数和概率密度函数。

同样地，**均方值**可表示为

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dF(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)p(x,t)dx$$

方差为

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= \sigma^2(t) \\ &= E[(X(t) - \mu(t))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - \mu(t)]^2 dF(x,t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - \mu(t)]^2 p(x,t)dx \end{aligned}$$

为了研究一个随机过程$X(t)$在两个不同时刻的值，即随机变量$X(t_1)$、$X(t_2)$的相互依赖关系，定义它的**自相关函数**(auto-correlation function)

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)dF(x_1,t_1;x_2,t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)p(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

其中$F(x_1,t_1;x_2,t_2)$和$p(x_1,t_1;x_2,t_2)$分别为随机变量、的联合概率分布函数和联合概率密度函数。

自协方差函数(auto-covariance function)

$$
\begin{aligned}
C_{XX}(t_1,t_2) &= E[(X(t_1)-\mu(t_1))(X(t_2)-\mu(t_2))] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t_1)-\mu(t_1))(x_2(t_2)-\mu(t_2))dF(x_1,t_1;x_2,t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t_1)-\mu(t_1))(x_2(t_2)-\mu(t_2))p(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

显然

$$R_{XX}(t,t) = E[X^2(t)]$$

$$C_{XX}(t,t) = \sigma^2(t)$$

$$C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2)$$

规格化自协方差函数(normalized auto-covariance function)、**自相关系数**(auto-correlation coefficient)

$$\rho_{XX}(t_1,t_2) = \frac{C_{XX}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \qquad -1 \le \rho_{XX}(t_1,t_2) \le 1$$

为了研究两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$在不同时刻的值的相互关系，定义**互相关函数**(cross-correlation function)

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)y(t_2)dF(x,t_1;y,t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)y(t_2)p(x,t_1;y,t_2)dxdy
\end{aligned}
$$

互协方差函数(cross-covariance function)

$$
\begin{aligned}
C_{XY}(t_1,t_2) &= E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(Y(t_2)-\mu_Y(t_2))] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x(t_1)-\mu_X(t_1))(y(t_2)-\mu_Y(t_2))dF(x,t_1;y,t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x(t_1)-\mu_X(t_1))(y(t_2)-\mu_Y(t_2))p(x,t_1;y,t_2)dxdy
\end{aligned}
$$

互相关函数和互协方差函数有如下性质

$$R_{XY}(t_1,t_2) = R_{YX}(t_2,t_1) \neq R_{XY}(t_2,t_1)$$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = C_{YX}(t_2,t_1) \neq C_{XY}(t_2,t_1)$$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - \mu_X(t)\mu_Y(t)$$

$$C_{YX}(t_2,t_1) = R_{YX}(t_2,t_1) - \mu_X(t)\mu_Y(t)$$

规格化互协方差函数(normalized cross-covariance function)、**互相关系数**(cross-correlation coefficient)

$$\rho_{XY}(t_1,t_2) = \frac{C_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} \qquad -1 \leq \rho_{XY}(t_1,t_2) \leq 1$$

平稳随机过程

平稳随机过程的特点是其概率特性不随时间变化。

严格平稳(strict stationarity)：概率密度函数不随时间变化。

广义平稳(generalized stationarity)、**弱平稳**、**宽平稳**：只需平均值与相关函数保持平稳就认为是平稳随机过程。

协方差平稳随机过程：仅要求协方差函数具有平稳性。

如果随机过程$X(t)$任意n个时刻的值$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$的联合分布都是正态的，则称$X(t)$为**正态随机过程**。由于这$n$个值的联合密度函数只与这$n$个值的均值和协方差矩阵有关，所以**对于正态随机过程而言，其严格平稳和广义平稳是等价的**。

随机过程各函数的期望值是对所有样本函数的总体作平均得到的，称为**集合平均**(ensemble average)。对于平稳随机过程的一个给定样本函数$\hat{x}(t)$，定义它在给定时间域上的平均，称为**时间平均**(time average)

$$E[X(t)] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{x}(t)dt$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)dt$$

如果一个平稳随机过程由集合平均和时间平均得到的所有各组概率特性都相等，那么这类平稳随机过程就认为具有**各态历经性**(ergotic)。也就是说，其中任意一条样本曲线基本包含了该随机过程所有的统计特性，只需得到一条实测曲线，就可以由它得到所需的各种统计参数。

平稳随机过程的相关函数

均值

平稳随机过程的均值不随时间变化，即

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \mu$$

自相关函数与自协方差函数

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dF(x_1,t;x_2,t+\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)p(x_1,t;x_2,t+\tau)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

其中x_1与x_2是取自同一随机过程的两个随机变量。若$X(t)$满足各态历经假设，$\hat{x}(t)$是一样本函数，则

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)dt$$

记$\xi(t)$为$X(t)$的零均值随机分量

$$\xi(t) = X(t) - \mu$$

则$X(t)$的自协方差函数为

$$C_{XX}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

因此，$X(t)$的自协方差函数与均值μ的大小无关。

平稳随机过程$X(t)$的自相关函数$R_{XX}(\tau)$具有如下主要特性：

- $R_{XX}(\tau)$是τ的偶函数。

- $\tau=0$时，$R_{XX}(\tau)$取极大值$R_{XX}(0)=E[X^2(t)]=\mu^2+\sigma_X^2$。
- 将平稳随机过程$X(t)$表示为

$$X(t)=\mu+\xi(t)$$

其中μ和$\xi(t)$是$X(t)$的平均值和零均值平稳随机分量。则

$$R_{XX}(\tau)=\mu^2+R_{\xi\xi}(\tau)$$

- $R_{XX}(\tau)$的下界为$\mu^2-\sigma_X^2$。
- $$R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)$$
- $$E[\dot{X}(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=0$$

于是可知，平稳随机过程的导函数也是平稳的。

无量纲形式的自相关系数定义为

$$\rho_{XX}(\tau)=\frac{C_{XX}(\tau)}{\sigma_X^2}\qquad -1\leq\rho_{XX}\leq 1$$

互相关函数与互协方差函数

$$\begin{aligned}R_{XY}(\tau)&=E[X(t)Y(t+\tau)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t+\tau)dF(x,t;y,t+\tau)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t+\tau)p(x,t;y,t+\tau)dxdy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{YX}(\tau)&=E[Y(t)X(t+\tau)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)x(t+\tau)dF(y,t;x,t+\tau)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)x(t+\tau)p(y,t;x,t+\tau)dxdy\end{aligned}$$

若$X(t)$和$Y(t)$满足各态历经假设，$\hat{x}(t)$和$\hat{y}(t)$是其两个样本，则

$$R_{XY}(\tau)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{x}(t)\hat{y}(t+\tau)dt$$

$$R_{YX}(\tau)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{y}(t)\hat{x}(t+\tau)dt$$

记

$$\xi(t)=x(t)-\mu_X,\quad \eta(t)=y(t)-\mu_Y$$

则

$$C_{XY}(\tau)=R_{\xi\eta}(\tau)=E[\xi(t)\eta(t+\tau)]$$

$$C_{YX}(\tau)=R_{\eta\xi}(\tau)=E[\eta(t)\xi(t+\tau)]$$

平稳随机过程$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数$R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$具有如下主要特性：

- $R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$都不是的偶函数，但

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$$

- $\tau=0$时，$R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$都不取极大值，但

$$|R_{XY}(\tau)|\le\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)},\quad |R_{XY}(\tau)|\le\frac{R_{XX}(0)+R_{YY}(0)}{2}$$

- 由$\xi(t)$和$\eta(t)$的互相关函数可以求出$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\mu_X\mu_Y+R_{\xi\eta}(\tau)$$

$$R_{YX}(\tau)=\mu_X\mu_Y+R_{\eta\xi}(\tau)$$

无量纲形式的互相关系数定义为

$$\rho_{XY}(\tau)=\frac{C_{XY}(\tau)}{\sigma_X\sigma_Y}\quad -1\le\rho_{XY}\le 1$$

$$\rho_{YX}(\tau)=\frac{C_{YX}(\tau)}{\sigma_X\sigma_Y}\quad -1\le\rho_{YX}\le 1$$

平稳随机过程的功率谱函数

相关函数体现了随机过程的时域特征，而**功率谱密度函数**(power spectral density function, PSDF或PSD)则反映了随机过程的频域特征。

自功率谱密度函数

设$\hat{x}(t)$是各态历经平稳随机过程$X(t)$的一个样本函数，它在区间$t \in (-\infty, +\infty)$内一般是不绝对可积的，为此定义一个辅助函数

$$\hat{x}_T(t) = \begin{cases} \hat{x}(t) & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & other \end{cases}$$

$\hat{x}_T(t)$在区间$t \in (-\infty, +\infty)$内是绝对可积的，于是可以对其作傅里叶变换

$$\hat{x}_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_T(f) e^{2\pi i f t} df$$

$$\hat{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_T(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

定义$X(t)$的**自功率谱密度函数**(auto-PSD function，或称**自谱密度**或**自谱**)为

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} |\hat{X}_T(f)|^2$$

根据能量积分(Parseval)定理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}_T(f)|^2 df$$

而

$$E[\hat{x}^2(t)] = \lim_{T \to +\infty} E[\hat(x)_T^2(t)] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}_T^2(t) dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\hat{X}_T(f)|^2 df$$

于是有

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df$$

当$X(t)$为零均值平稳随机过程时，

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \mu^2 + \sigma_X^2 = \sigma_X^2$$

$$\sigma_X^2 = R_{XX}(0) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df$$

所以求出自功率谱密度函数$S_{XX}(f)$就可以求得其方差。

维纳-辛钦关系(Wiener-Khintchine theorem)

平稳随机过程$X(t)$的自功率谱密度函数函数$S_{XX}(f)$和自相关函数$R_{XX}(\tau)$构成傅里叶变换对

$$S_{XX}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XX}(\tau)e^{-2\pi if\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(f)e^{2\pi if\tau}df$$

$$S_{XX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

平稳随机过程的自功率谱密度函数函数$S_{XX}(\omega)$的主要性质有

- $S_{XX}(\omega)$是非负实数

$$S_{XX}(\omega)\geq 0$$

- $S_{XX}(\omega)$是偶函数

$$S_{XX}(\omega)=S_{XX}(-\omega)$$

-

$$S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega)=\omega^2S_{XX}(\omega),\quad S_{\ddot{X}\ddot{X}}(\omega)=\omega^4S_{XX}(\omega)$$

负频率处的功率谱值并无直观物理意义，在工程应用中引入**单边功率谱密度函数**

$$G_{XX}(\omega)=\begin{cases}2S_{XX}(\omega) & \omega\geq 0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$

$$R_{XX}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(f)df=2\int_{0}^{+\infty}S_{XX}(\omega)d\omega=\int_{0}^{+\infty}G_{XX}(\omega)d\omega$$

互功率谱密度函数

互功率谱密度函数(cross-PSD function)是由互相关函数的傅里叶变换来定义的

$$S_{XY}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega t}d\tau$$

$$S_{YX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{-i\omega t}d\tau$$

平稳随机过程$X(t)$和$Y(t)$的互功率谱密度函数函数的主要性质有

- 一般不是实数
- 一般不是偶函数，但

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(-\omega)=S_{YX}^{*}(\omega)$$

这里的“$*$”表示取复共轭。

-

$$|S_{XY}(\omega)|\leq\sqrt{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}$$

$$|S_{XY}(\omega)|\leq\frac{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}{2}$$

$S_{YX}(\omega)$同理。

互功率谱密度函数没有明显的物理意义，其无量纲**相干函数**为

$$\gamma_{XY}^{2}(\omega)=\frac{|S_{XY}(\omega)|^{2}}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}\quad 0\leq\gamma_{XY}^{2}\leq 1$$

$$\gamma_{YX}^{2}(\omega)=\frac{|S_{YX}(\omega)|^{2}}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}\quad 0\leq\gamma_{YX}^{2}\leq 1$$