## 随机响应计算

## 响应平均值

载荷向量 $\mathbf{F}(t)$ 的均值为 $\mathbf{m}_F$ ,再注意到平稳随机过程的平均值与时间无关,于是有

$$egin{aligned} E[oldsymbol{X}(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} oldsymbol{h}( heta) oldsymbol{F}(t- heta) d heta
ight] \ &= \int_{-\infty}^{+\infty} oldsymbol{h}( heta) E\left[oldsymbol{F}(t- heta)
ight] d heta \ &= oldsymbol{m}_F \int_{-\infty}^{+\infty} oldsymbol{h}( heta) d heta \end{aligned}$$

或即为

$$\boldsymbol{m}_X = \boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{m}_F$$

其中H(0)是 $\omega = 0$ 时的频响函数矩阵。上式表明响应均值可以很方便地由激励均值计算。

## 响应相关矩阵

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{XX}(\tau) &= E[\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{h}(\theta_1)\boldsymbol{F}(t-\theta_1)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t+\tau-\theta_2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\theta_2)d\theta_1\theta_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{h}(\theta_1)E\left[\boldsymbol{F}(t-\theta_1)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t+\tau-\theta_2)\right]\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\theta_2)d\theta_1\theta_2 \end{aligned}$$

即

$$oldsymbol{R}_{XX}( au) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} oldsymbol{h}( heta_1) oldsymbol{R}_{FF}( au + heta_1 - heta_2) oldsymbol{h}^{
m T}( heta_2) d heta_1 heta_2$$

这表明响应相关矩阵可由激励相关矩阵积分得到。

$$egin{aligned} oldsymbol{R}_{FX}( au) &= E\left[oldsymbol{F}(t)oldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t+ au)
ight] \ &= E\left[oldsymbol{F}(t)\int_{-\infty}^{+\infty}oldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t+ au- heta)oldsymbol{h}^{\mathrm{T}}( heta)d heta 
ight] \ &= \int_{-\infty}^{+\infty}oldsymbol{R}_{FF}( au- heta)oldsymbol{h}^{\mathrm{T}}( heta)d heta \end{aligned}$$

$$egin{aligned} m{R}_{XF}( au) &= E\left[m{X}(t)m{F}^{\mathrm{T}}(t+ au)
ight] \ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}m{h}( heta)m{F}(t- heta)m{F}^{\mathrm{T}}(t+ au)d heta
ight] \ &= \int_{-\infty}^{+\infty}m{h}( heta)m{R}_{FF}( au+ heta)d heta \end{aligned}$$

## 响应功率谱矩阵

先考虑单点输入单点输出的情况

$$\begin{split} S_{XX}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-\mathrm{i}\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{FF}(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 \theta_2 \right] e^{-\mathrm{i}\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{FF}(\tau + \theta_1 - \theta_2) e^{-\mathrm{i}\omega(\tau + \theta_1 - \theta_2)} d(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) e^{\mathrm{i}\omega\theta_1} d\theta_1 h(\theta_2) e^{-\mathrm{i}\omega\theta_2} d\theta_2 \\ &= S_{FF}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) e^{\mathrm{i}\omega\theta_1} d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_2) e^{-\mathrm{i}\omega\theta_2} d\theta_2 \\ &= S_{FF}(\omega) H^*(\omega) H(\omega) \\ &= |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) \end{split}$$

$$egin{aligned} S_{FX}(\omega) &= rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{FX}( au) e^{-\mathrm{i}\omega au} d au \ &= rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h( heta) R_{FF}( au - heta) e^{-\mathrm{i}\omega au} d heta d au \ &= \int_{-\infty}^{+\infty} rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{FF}( au - heta) e^{-\mathrm{i}\omega( au - heta)} d( au - heta) h( heta) e^{-\mathrm{i}\omega heta} d heta \ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{FF}(\omega) h( heta) e^{-\mathrm{i}\omega heta} d heta \ &= H(\omega) S_{FF}(\omega) \end{aligned}$$

相似地

$$S_{XF}(\omega) = H^*(\omega) S_{FF}(\omega)$$

多点输入多点输出的谱矩阵为

$$egin{aligned} m{S}_{XX}(\omega) &= m{H}^*m{S}_{FF}(\omega)m{H}^{\mathrm{T}} \ m{S}_{FX}(\omega) &= m{S}_{FF}(\omega)m{H}^{\mathrm{T}} \ m{S}_{XF}(\omega) &= m{H}^*m{S}_{FF}(\omega) \end{aligned}$$

CQC(complete quadratic combination,完全二次结合)法

**SRSS**(square root of the sum of squares,平方和开平方)法