Group Theory Fall 2019

Yuxuan Zhang, XJTU, 2160909016

Session 1 - The Symbolic System For Group Theory

Homework

- **Problem 1 - 1.12** 证明除恒等元外的所有元都是二阶的群是阿贝尔群.

证明:

若:$\forall A_n \in G,\ A_n \neq E,\ A_n^2 = E$

且由群的封闭性可知:$\forall A_j,\ A_k \in G,\ A_j\,A_k \in G$

即 $A_j\,A_k$ 也满足 $(A_j\,A_k)^2 = E$

所以:

$$\begin{aligned} A_j\,A_k &= A_j\,\cdot\,E\cdot\,A_k \\ &= A_j\,(A_j\,A_k\,A_j\,A_k)\,A_k \\ &= (A_j\,A_j)\,A_k\,A_j\,(A_k\,A_k) \\ &= A_k\,A_j \end{aligned}$$

即 $A_j\,A_k = A_k\,A_j\ (j \neq k)$ 对群 G 内的所有群元成立.

所以, 原命题得证.

- **Problem 2 - 1.14** 证明每个 (所有) 指数为 2 的子群是正规子群.

证明:

设群 G 及其子群 S 满足 $g = 2s$, 并设 $X \in G$, 则:

(1) 若 $X \in S$, 则显然:

$$XS = SX = S$$

(2) 若 $X \notin S$, 则:

$$\forall S_i \in S,\ XS_i \notin S,\ XS_i \in G$$

$$\forall S_i,\ S_j \in S\,(i \neq j),\ XS_i \neq XS_j$$

相似地:

$$\forall S_i \in S,\ S_iX \notin S,\ S_iX \in G$$

$$\forall S_i,\ S_j \in S\,(i \neq j),\ S_iX \neq S_jX$$

即:

集合 XS, SX 均含有 s 个各不相同, 且不属于 S , 但属于 G 的元,

又因为 G 中不属于 S 的元的数量与 S 的元数量相等 (均为 s 个), 所以:

$$XS = SX = G - S$$

综合 (1) (2) 两种情况:

$$\forall X \in G,\ XS = SX$$

所以, 原命题得证.

• **Problem 3 - 1.15** 若 $G = H \otimes K$ 证明:

(1) 商群 G/H 与 K 同构;
证明:
直积群可以展开为:

$$G = H \otimes K = \sum_{i,j} H_j K_i$$
$$= \sum_{i} H \cdot K_i$$

由商群的定义可知:

$$G/H \ = \{HA_1, HA_2, ..., HA_k\}$$

其中, k 是群 K 的阶, A_1 是群 H, K, G 的共同单位元 E.
不失一般性, 假设 $A_n = H_j K_i \, (n \neq 1)$:

$$HA_n = HH_j K_i$$
$$= (HH_j) K_i$$
$$= HK_i$$

即: $\{A_2, ..., A_k\}$ 与 $\{K_2, ..., K_k\}$ 一一对应
比较直积群的展开和商群的定义, 加上上述对应关系, 可以得出:

$$G/H \ = \{HK_1, HK_2, ..., HK_k\}$$

构造同构对应关系:

$$HK_n \leftrightarrow K_n$$

利用直积的对易关系 $(K_i H = HK_i)$, 验证同构性质:

$$(HK_i)(HK_j) = H^2 K_i K_j = H(K_i K_j)$$
$$K_i K_j = (K_i K_j)$$

所以, 原命题得证.
(2) G 与 H 及 K 同态;
证明:
对于 G 与 H, 构造同态关系:

$$H_i K_j \to H_i \, (1 \leq i \leq h, \, 1 \leq j \leq k)$$

利用直积的对易关系, 验证同态性质:

$$(H_i K_n)(H_j K_n) = (H_i H_j) K_n^2$$
$$H_i H_j = (H_i H_j)$$

由于 $K_n^2 = K_{n'} \in K$, 所以映射 $(H_i H_j) K_n^2 \to (H_i H_j)$ 依然成立.
G 与 K 的同态映射构造及证明与上述过程完全一致, 不再赘述.
所以, 原命题得证.

• **Problem 4 - 1.18** **证明二阶循环群与四阶循环群同态.**

证明:

不失一般性, 令

$$A = \{E, \alpha\} \qquad (E = \alpha^2)$$

$$B = \{E, \beta, \beta^2, \beta^3\} \qquad (E = \beta^4)$$

则可以构造映射关系:

$$B_1,\ B_3 \rightarrow A_1$$

$$B_2,\ B_4 \rightarrow A_2$$

验证同态性质:

$$\left.\begin{aligned} B_1\,B_1 &= B_1 \\ B_1\,B_3 &= B_3 \\ B_3\,B_1 &= B_3 \\ B_3\,B_3 &= B_1 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_1A_1 = A_1 \qquad \left.\begin{aligned} B_1\,B_2 &= B_2 \\ B_1\,B_4 &= B_4 \\ B_3\,B_2 &= B_4 \\ B_3\,B_4 &= B_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_1A_2 = A_2$$

$$\left.\begin{aligned} B_2\,B_1 &= B_2 \\ B_2\,B_3 &= B_2 \\ B_4\,B_1 &= B_4 \\ B_4\,B_3 &= B_4 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_2A_1 = A_2 \qquad \left.\begin{aligned} B_2\,B_2 &= B_1 \\ B_2\,B_4 &= B_1 \\ B_4\,B_2 &= B_3 \\ B_4\,B_4 &= B_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_2A_2 = A_1$$

所以, 原命题得证.

• **Problem 5 - 1.19** **在有限群中有一组元的集合 S, 对于群乘是封闭的, 试证明集合 S 中必包含单位元及各元的逆元.**

证明:

用 $S = \{S_1, S_2, ..., S_s\}$ 表示群 S.
已知: $\forall S_n, S_m \in S,\ \ S_nS_m = S_k \in S$.
且由于 S 是一有限群的子集, 所以 S 的群元依然满足结合律, 并且 S 中的群元各不相同.

(1) 首先证明单位元存在.
由群乘的封闭性, $\exists S_k \in S$, 使得:

$$S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_s = S_k$$

即:

$$(S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{k-1} \cdot S_{k+1} \cdot ... \cdot S_s)S_k = S_k$$

再次利用群乘的封闭性, 可知 $\exists S_t \in S$, $(S_t \neq S_k)$, 使得:

$$S_t = (S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{k-1} \cdot S_{k+1} \cdot ... \cdot S_s)$$

故上式简化为:

$$S_m \cdot S_k = S_k$$

所以:

$$S_m = E \ \ or \ \ S_k = E$$

上述步骤完成了群 S 中存在单位元的证明.

(2) 接下来证明 S 中包含各元的逆元.
不失一般性, 我们设 $S_1 = E$.
再次利用群乘的封闭性, $\exists S_k \in S$, 使得:

$$S_2 \cdot S_3 \cdot ... \cdot S_s = S_k$$

1. 如果 $S_k = E$, 那么由于 S 中群元各不相同, 可知 $\forall S_t \in S$, $(S_t \neq S_k)$, 使得:

$$S_t \cdot (S_2 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{t-1} \cdot S_{t+1} \cdot ... \cdot S_s) = E$$

$$S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{t-1} \cdot S_{t+1} \cdot ... \cdot S_s = S_t^{-1} \neq S_t$$

2. 如果 $S_k \neq E$, 那么:

$$S_k \cdot (S_2 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{k-1} \cdot S_{k+1} \cdot ... \cdot S_s) = E$$

$$S_1 \cdot S_2 \cdot ... \cdot S_{k-1} \cdot S_{k+1} \cdot ... \cdot S_s = S_k^{-1} \neq S_k$$

将 S_k 从上述连乘序列中剔除, 我们就得到第一种情况, 从而证明了任意的群元都有对应的逆元.

综上, 原命题得证.