

电磁学

张志财

2025 年 1 月 5 日

序一

A 老师序。

序二

B 老师序。

作者序

本书是在高原宁、杨振伟、蒲以康等清华大学工程物理系近代物理研究所的基础物理教学团队的老师们在清华大学讲授多年的电磁学课程中积累的课件等教学资料的基础上，由张志财整理和总结的课程讲义。该课程的主要授课对象包括物理学专业以及数理 + 工程物理/微电子/材料/机械等“理 + 工”双学位专业的低年级本科生。鉴于该课程的授课对象包含较多工科背景的专业的学生，本书力求在讲清电磁学基本原理的基础上，着重介绍一些在相关科研工作中与电磁学相关的一些应用。

张志财
清华大学工程物理系
zhicaizhang@tsinghua.edu.cn
<https://zhicaiz.web.cern.ch>
2025 年 1 月 5 日

目录

引言	9
第一章 数学预备知识	11
1.1 标量和矢量	12
1.2 线、面和体积分	15
1.3 梯度、散度和旋度	23
第二章 真空中的静电场	33
2.1 电荷	33
2.2 库仑定律	36
2.3 电场和电场强度	41
2.4 高斯定理	49
2.5 环路定理	56
2.6 电势	58
第三章 有导体时的静电场	63
3.1 物质的导电性质	64
3.2 静电场中的导体	66
3.3 静电场唯一性定理	74
3.4 电镜像法	77

第四章 电介质	85
第五章 静磁场	87
第六章 磁介质	89
第七章 电磁感应	91
第八章 电磁波	93
习题参考答案	95

引言

第一章 数学预备知识

电磁学里的几个主要定律（如库仑定律、毕奥萨伐尔定律）描述的都是“源”（电荷、电流）和它们产生的“场”（电场、磁场）之间的关系，这些定量的关系都是通过数学公式体现出来的，电和磁的对称性和统一性也是通过数学表达式体现出来的。这里有些场是标量场，有些场是矢量场，其中矢量带方向，而且大小和方向都会变，产生场的源的空间分布也存在复杂的多样性，因此电磁学里的场的计算具有一定的复杂性。利用一些数学工具，可以将复杂的问题变为简单的问题，比如：

1. 由于标量计算比矢量计算更简便（如叠加等），因此，有些时候把矢量（如电场）的计算先转化为标量（如电势）的计算要更简单。
2. 电磁学里的方程往往都是偏微分方程（如麦克斯韦方程组），直接求解他们往往比较困难，此时利用复变函数相关的傅里叶变换，可以很容易将这些偏微分方程转换成容易求解的代数方程。

历史上，很多对电磁学的发展做过重要贡献的科学家都是数学家，他们在电磁学领域的突破都或多或少的得益于他们的扎实的数学功底，比如：

- 安培 Ampere (1775-1836) 法国人，数学家
- 玻尔兹曼 Boltzmann (1844-1906) 奥地利人，数学物理学家
- 毕奥 Biot (1774-1862) 法国人，数学家
- 泊松 Poisson (1781-1840) 法国人，数学家
- 拉普拉斯 Laplace (1749-1827) 法国人，数学家
- 高斯 Gauss (1777-1855) 德国人，数学家
- 格林 Green (1793-1841) 英国人，数学家
- 麦克斯韦 Maxwell (1831-1879) 苏格兰人，数学物理学家
- 开尔文 Kelvin (1824-1907) 苏格兰人，数学物理学家和工程师
- 洛伦兹 Lorentz (1853-1928) 荷兰人，理论物理学家

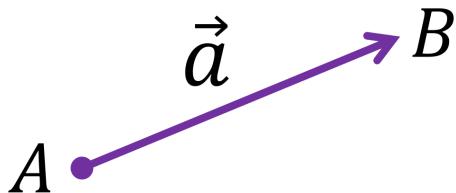
接下来我们将选取几个重要的数学工具进行介绍，作为本书的数学预备知识。

1.1 标量和矢量

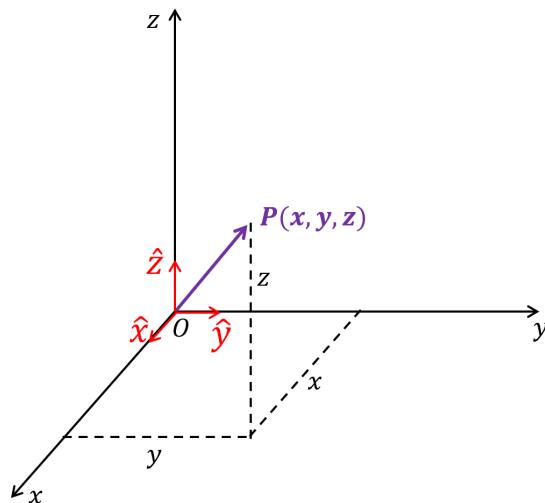
1.1.1 标量和矢量的定义

为了定量的研究物理现象，我们常常需要引入能够测量的物理量，有些物理量可以用简单的一个数字（和单位）来表示，比如质量、温度、时间、能量等，我们把这些量称为标量（scalar）；而有些物理量，比如位移、速度等，它们既有大小、也有方向，不能简单的用一个数字来表示，我们把这些量称为矢量（vector）。

英语中“vector”一词源于拉丁语的“carrier”，翻译过来便是“运送者”的意思，早期曾用于导航和天文，用来描述连接空间中的一点 A 到另一点 B，即 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ，从 A 到 B 的方向即为该矢量的方向，从 A 到 B 的距离则为该矢量的大小：

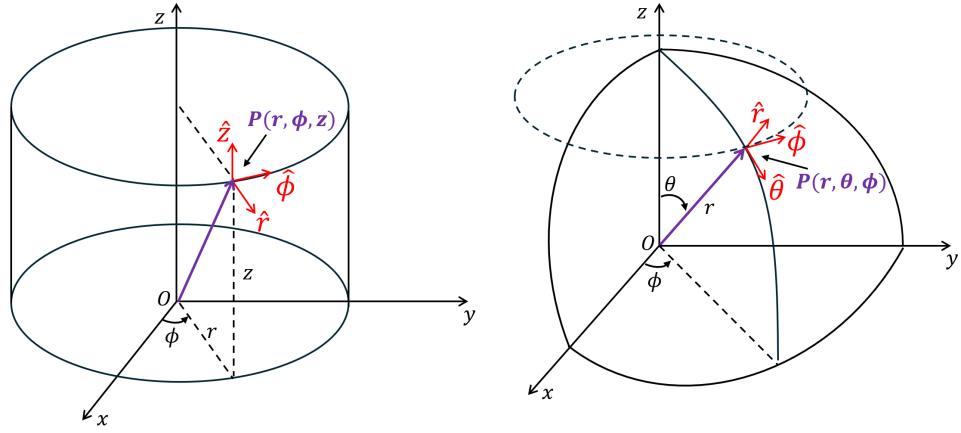


物理上的矢量大多数不具备空间距离的含义，但是它们的大小和方向仍然可以用箭头的大小和方向来表示，而具体的数学表达形式则取决于坐标系的选取。以大家熟悉的直角坐标系为例，一个矢量可以分解为三个坐标轴方向的矢量之和，矢量的运算便可以分解成三个标量的运算：



$$\vec{a} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

在电磁学中，使用更为频繁的是柱坐标系和球坐标系，在这两个坐标系里的矢量表达式分别为：



$$\vec{a} = r\hat{r} + \phi\hat{\phi} + z\hat{z}$$

$$\vec{a} = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + \phi\hat{\phi}$$

在电磁学的计算中，很重要的一点是根据物理量分布的特征，选取相应的坐标系以及合适的原点，有时候利用对称性和相应的坐标系可以减少变量，方程从三维变成一维。比如，研究有球对称性的物理体系（如点电荷），显然使用球坐标系更为方便。

1.1.2 常见矢量计算公式

物理上矢量的计算法则和数学中的向量的计算法则是一致的，常用的有：

1. 矢量 \vec{r} 的模: $|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$
2. 单位矢量: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
3. 矢量的加法遵循平行四边形法则和三角形法则，满足交换律和结合律
4. 矢量的减法可以看成是一个矢量加上与另一个矢量方向相反的矢量
5. 矢量的点乘: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ，可以理解为矢量 \vec{a} 在矢量 \vec{b} 方向上的投影长度；点乘满足交换律和分配律
6. 矢量的叉乘: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ，叉乘的结果是一个矢量，其中 \vec{c} 的方向垂直于 \vec{a} 与 \vec{b} 所在的平面（右手定则）， \vec{c} 的大小可以理解为当 \vec{a} 和 \vec{b} 始于相同点时它们所张成的平行四边形的面积 ($|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$)；叉乘满足分配律；在正交的坐标系（如直角坐标系、柱坐标系、球坐标系）中矢量的叉乘计算方法如下 ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}/\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}/\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$):

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_i \hat{i} + a_j \hat{j} + a_k \hat{k}) \times (b_i \hat{i} + b_j \hat{j} + b_k \hat{k}) \\ &= (a_j b_k - a_k b_j) \hat{i} + (a_k b_i - a_i b_k) \hat{j} + (a_i b_j - a_j b_i) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.2)$$

7. 三个矢量的混合积/三重积: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ，其结果是一个标量，该值可以理解为 \vec{a} 、 \vec{b} 和 \vec{c}

始于同一点时它们所张成的平行六面体的体积，因此很容易分析出如下等式：

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.3)$$

8. 双叉乘： $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ，该结果是一个矢量，其方向垂直于 \vec{a} ，同时也位于 \vec{b} 和 \vec{c} 所在的平面，因而可以分解成 \vec{b} 和 \vec{c} 的线性叠加¹：

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.4)$$

由此也可以得出下面的等式（雅可比等式）：

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.5)$$

矢量的计算在电磁学中非常常见，熟练掌握常见的矢量计算对于电磁学的学习有重要的作用。比如，我们中学时候学过的运动带电粒子在磁场中的受力（洛伦兹力）就是以矢量的叉乘来表示的。

1.1.3 标量场和矢量场

历史上，物理学家们对于场的概念是经过一番争论的。传统上，物体与物体之间的相互作用力大多数是接触引起的，对于像电荷之间相互作用这种非接触式的作用力，现代观点认为该作用力不是两个带电粒子之间的直接相互作用，而是由其中一个带电粒子在空间中产生了场，而另外一个带电粒子在空间中的某一点感受到了这个场的作用力，场在这里就像一个媒介一样。这一场的概念在我们学习到电磁波的时候尤为重要，比如当带电粒子运动的时候，其远处产生的场是存在时间滞后的，这就是电磁波传播的有限速度。电磁学中的数学主要是围绕电场和磁场的计算，计算两者在三维空间的分布。

物理上，场是指物理量的空间分布，根据物理量的性质可以分为标量场和矢量场，比如温度的空间分布是标量场，河水中的水流速度的空间分布是矢量场。

电磁学中，我们更关心的是标量场和矢量场（如电势、电场、磁场等）在空间中的变化情况，以及这些标量场在特定路径、表面或者体积内的积分情况。

以电磁学中最重要的方程组-麦克斯韦方程组为例，它的微分形式和积分形式分别为：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.9)$$

¹公式记忆口诀：BAC-CAB；减号的理解：当 \vec{b} 和 \vec{c} 同向时结果为 0，因此肯定不能是加号

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV \quad (1.10)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.11)$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.12)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

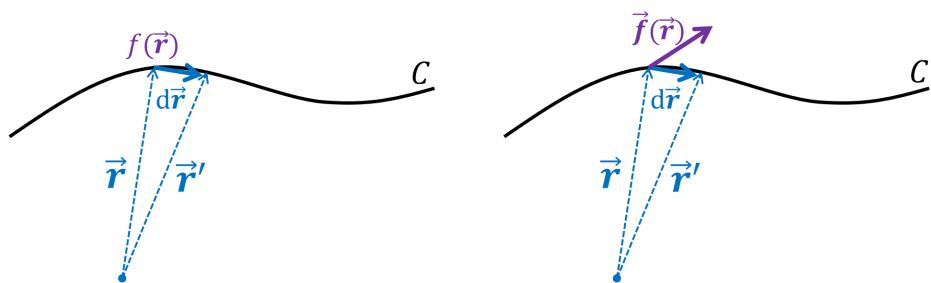
在学习上述方程组之前，我们有必要先学习（或回顾）这个方程组里面涉及到的两个重要的数学工具，即场的线、面和体积分，以及场的梯度、散度和旋度。

1.2 线、面和体积分

1.2.1 线积分

我们常见的形如 $\int_a^b f(x)dx$ 是函数 $f(x)$ 在实数区间 $[a, b]$ 上的积分，计算积分时函数沿着从 a 到 b 的一维区间取值，对于我们即将讨论的线积分（line integral），它的积分函数的取值是沿着被称为积分路径的特定三维曲线（ C ），因此线积分也叫路径积分（path integral）。线积分中，被积函数可以是标量场，也可以是矢量场：

1. 标量场： $\int_C f(\vec{r})ds$ ，其中 $f(\vec{r})$ 是被积的标量场， $ds = |\vec{dr}|$ 是在 \vec{r} 处曲线的切向向量的长度，也可以看成该点处的一段很小的弧长（也称为线元, line element）。
2. 矢量场： $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ，其中 $\vec{f}(\vec{r})$ 是被积的矢量场， $d\vec{r}$ 是在 \vec{r} 处曲线的切向向量（也称为矢量线元, vector line element）。



我们知道，空间中的一条曲线的方程可以用参数方程来表示，比如下式：

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (1.14)$$

表示的是曲线 $\vec{r} : [t_0, t_1] \rightarrow C$ ，其中 $\vec{r}(t_0)$ 和 $\vec{r}(t_1)$ 分别是曲线 C 的两个端点。比如，在 $z = 0$

平面上的以原点为中心，半径为 1 的圆可以写成如下参数方程：

$$x = \cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad z = 0; \quad \theta : [0, 2\pi]$$

利用曲线的参数方程，上述线积分也可以写成关于参数 t 的一个普通积分，为此，我们可以将切向向量 $d\vec{r}$ 写成：

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = \vec{r}'(t) dt \quad (1.15)$$

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{r}'(t)| dt \quad (1.16)$$

因此，上述标量场和矢量场的线积分就可以写成如下关于参数 t 的普通积分：

$$\int_C f(\vec{r}) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \quad (1.17)$$

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (1.18)$$

矢量场的线积分在物理学中非常常见，比如已知质点受到的某个外力随空间的变化（即外力场） $\vec{F}(\vec{r})$ ，则当质点沿着某一特定曲线 C 运动时，外力 $\vec{F}(\vec{r})$ 做的功可以写成：

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.19)$$

例 1.1

质点沿如下螺旋线 C 运动 ($t : 0 \rightarrow 1$)：

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = t$$

质点受到的力 \vec{F} 在各个方向上的分量的大小为：

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = z$$

求在此过程中力 \vec{F} 做的功（上述物理量的单位全部取国际单位制）。

解：

力 \vec{F} 做的功为：

$$\begin{aligned}
 W &= \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 (y, x, z) \cdot (\cos'(t), \sin'(t), t') dt \\
 &= \int_0^1 (\sin(t), \cos(t), t) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1) dt = \int_0^1 (-\sin^2(t) + \cos^2(t) + t) dt \\
 &= \int_0^1 (\cos(2t) + t) dt = \left(\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sin(2)}{2} + \frac{1}{2} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]
 \end{aligned}$$

如果线积分中的曲线是一条闭合曲线 (closed line integral)，即从起点开始沿着曲线积分又回到起点，那么这种情况我们一般把线积分的符号由 \int_C 写成 \oint_C 。在力学中我们学过，质点从初始位置运动到结束位置，如果一个力对质点做的功与质点的运动路径无关，那么我们就把这个力称为保守力；这一说法也等价于当质点沿着闭合曲线运动到起始位置时力做的功为零时力就是保守力²。在接下来的第1.3节讨论梯度和旋度的时候我们将进一步讨论保守力（或者与之对应的保守场）的一些性质。

1.2.2 面积分

与三维空间中的曲线可以定义矢量线元 $d\vec{r}$ 的定义类似，对于三维空间中的曲面，我们可以将这个曲面细分成多个小的面积元，对于每一个小的面积元我们可以定义一个矢量面积元 $d\vec{S}$ ，其中 $d\vec{S}$ 的大小 dS 是该面积元的面积，而 $d\vec{S}$ 的方向是垂直于该面积元的法向方向，其中，法向的正负可以人为的约定其中一个方向为正，一般情况下，对于闭合曲面，我们约定指向闭合曲面外面的方向为正方向。

有了面积元的定义，我们就可以像线积分一样定义标量场和矢量场的面积分：

1. 标量场： $\iint_S f dS$ ，其中 f 为标量场，计算积分时该函数沿着曲面 S 取值
2. 矢量场： $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ ，其中 \vec{f} 为矢量场，计算积分时取该矢量场在曲面 S 的各个面积元处的值

与三维空间中的曲线可以用含一个参数的参数方程 $\vec{r}(t)$ 来表示类似，三维空间中的曲面可以用含两个参数的参数方程 $\vec{r}(s, t)$ 来表示，比如下式：

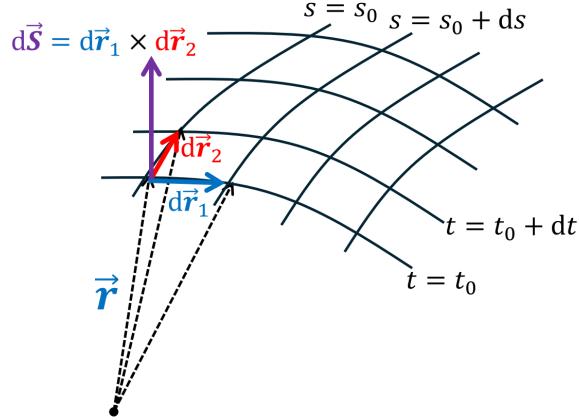
$$\vec{r} = \vec{r}(s, t) = x(s, t)\hat{x} + y(s, t)\hat{y} + z(s, t)\hat{z} \quad (1.20)$$

表示的是曲面 $\vec{r} : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow S$ 。比如，以原点为中心，半径为 1 的球面可以写成如下参

²简单证明如下：如果已知力做的功与质点运动路径无关，那么我们在一个闭合路径上选取任意两点 A 和 B，在这条闭合路径上从 A 到 B 有两条可选的路径（记做路径 1 和 2），我们知道沿着这两条路径力做的功都是相等的，那么根据矢量点乘的性质，我们可以得出，从 A 沿路径 1 到 B 时力做的功，将正好等于从 B 沿着路径 2 的反方向到 A 做的功的负数，因此力沿着这条闭合路径做的总功为零；反之，如果已知力沿着闭合路径做的总功为零，也可以类似的得出力做的功与运动路径无关的结论。

数方程:

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta; \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$



如上图所示, 结合向量叉乘的几何意义 (面积), 我们可以利用曲面的参数方程, 将面积元 $d\vec{S}$ 写成:

$$d\vec{S} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2, \quad d\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} ds, \quad d\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} dt \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} ds dt \quad (1.22)$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} \right| ds dt \quad (1.23)$$

因此, 上述标量场和矢量场的面积分便可以写成关于参数 s 和 t 的普通二重积分:

$$\iint_S f dS = \iint_S f(\vec{r}(s, t)) \left| \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} \right| ds dt \quad (1.24)$$

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{f}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} \right) ds dt \quad (1.25)$$

例 1.2

在柱坐标系中, 求以 z 轴为对称轴、半径为 r 的圆柱面上位于 (r, ϕ, z) 处的面积元 $d\vec{S}$

解：

如右图所示，可知 $d\vec{S}$ 与 \vec{r} 同向，其大小为：

$$dS = \left| d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \right| = r d\phi dz \quad (1.26)$$

因此，柱坐标系的圆柱面的面元为：

$$d\vec{S} = \hat{r} r d\phi dz \quad (1.27)$$

此外，也可以直接通过圆柱面的参数方程求解：首先，我们已知圆柱面的参数方程为：

$$\vec{r}(\phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \quad (1.28)$$

将 \vec{r} 对 ϕ 和 z 求偏导，可得：

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0) \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) \quad (1.30)$$

因而：

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} d\phi dz \quad (1.31)$$

$$= (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0) \times (0, 0, 1) d\phi dz \quad (1.32)$$

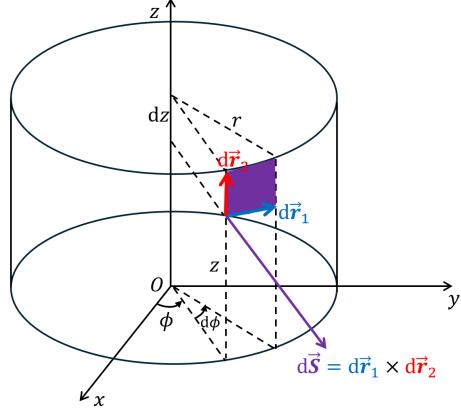
$$= (r \cos \phi, r \sin \phi, 0) d\phi dz \quad (1.33)$$

$$= \hat{r} r d\phi dz \quad (1.34)$$

请注意，在上面的推导过程中，我们把圆柱面的参数方程写到了直角坐标系中（即： $\vec{r} = r \cos \phi \hat{x} + r \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$ ），而不是写到柱坐标系中（即： $\vec{r} = r \hat{r} + \phi \hat{\phi} + z \hat{z}$ ），这是因为，如果使用后者，那么在求诸如 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ 偏导时，我们就要考虑单位矢量 \hat{r} 对 ϕ 的偏导（ ϕ 变化时， \hat{r} 也会变），但是如果采用前者的直角坐标系，由于单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 不会随着 ϕ 或者 z 的改变而改变，因而只需要考虑坐标值本身的偏导就可以了。类似这样的处理方法在本书的后面部分还会经常使用。

例 1.3

在球坐标系中，求以原点为球心、半径为 r 的球面上位于 (r, θ, ϕ) 处的面积元 $d\vec{S}$



解：

如右图所示，可知 $d\vec{S}$ 与 \vec{r} 相同，其大小为：

$$dS = \left| d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \right| = (rd\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.35)$$

因此，球坐标系中的球面的面元为：

$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.36)$$

此外，也可以直接通过球面的参数方程求解：首先，我们已知球面的参数方程为：

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \quad (1.37)$$

将 \vec{r} 对 θ 和 ϕ 求偏导，可得：

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) \quad (1.38)$$

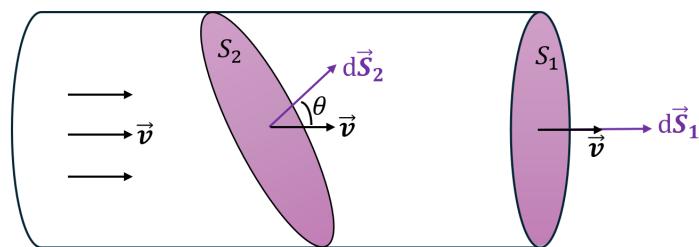
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) \quad (1.39)$$

因而：

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\theta d\phi \\ &= (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) \times (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) d\theta d\phi \\ &= (r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, r^2 \sin^2 \theta \sin \phi, r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi) d\theta d\phi \\ &= r^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) d\theta d\phi \\ &= \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

面积分在物理学中有很多应用，以电磁学中常用的电流的概念为例：我们熟知的电流的定义是单位时间通过某一截面的总电荷量：

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1.40)$$



如上图所示的一段导线内，假设导体内自由电荷密度 ρ 和电荷的运动速度 \vec{v} 处处相等，则显然单位时间通过截面 S_1 和 S_2 的总电荷量是相等的，但是截面 S_1 和 S_2 的面积并不相等，此时，我们可以使用面积分将电流的定义和截面联系起来：

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho v dt S_1}{dt} = \rho v S_1 = \iint_{S_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho v dt S_2 \cos \theta}{dt} = \rho v S_2 \cos \theta = \iint_{S_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

我们把单位时间通过某个面积的物质总量，称之为这个面积上的物质的通量 (flux)，通量是个标量；相对应的，我们把单位面积上的通量，称之为通量密度，通量密度是个矢量。在上述电流的例子中，电流可以看成是自由电荷这一“物质”的通量，而通量密度就是上式中的 $\rho \vec{v}$ ，也称为电流密度 (\vec{J})，即：

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.41)$$

通量的概念可以延伸到一般的矢量场，对于一般的矢量场 \vec{F} ，则 \vec{F} 本身可以看成是通量密度，而通量密度在某个面积 $d\vec{S}$ 上的面积分就是这个矢量场在该面积上的通量³，我们一般用符号 Φ 来表示：

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.42)$$

如果计算面积分（或通量）时的曲面是一条闭合曲面，那么这种情况我们一般把面积分的符号由 \iint_S 写成 \iint_S 。在第1.3节我们将知道，矢量场通过一个闭合曲面的通量是否为零，取决于这个闭合曲面内部是否存在产生这个矢量场的源；事实上直观上也能很好理解，如果闭合曲面内部没有源，那从曲面的一侧进来的通量将从另一个出来，即最后这个闭合曲面的净通量将为零。

1.2.3 体积分

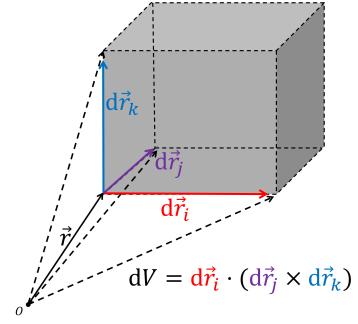
体积分相对于前面学习的线积分和面积分来说是最直观的，因为体积只是个标量，所以一般我们也只是对标量场进行体积分，其物理含义也很容易理解，比如对密度场进行体积分得到的就是总体积，对电荷密度进行体积分得到的就是总电荷，等等。一般标量场 $\phi(\vec{r})$ 的体积分可以写成：

$$\iiint_V \phi(\vec{r}) dV \quad (1.43)$$

其中， dV 是 \vec{r} 处的体积元。如下图所示，对于任意一个三维坐标系 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ，在 \vec{r} 处的体积元，就是 $d\vec{r}_i, d\vec{r}_j, d\vec{r}_k$ 这三个线元所张成的平行六面体的体积，而由矢量的混合积的几何意义我们知道，这个平行六面体的体积可以写成这三个线元的混合积：

³如果用带箭头的线条来画矢量场，可以把线条的密度看成是矢量场的通量密度，而穿过某个面积的总的线条数量则可以看做该矢量场在该面积上的通量

$$\begin{aligned}
 dV &= d\vec{r}_i \cdot (d\vec{r}_j \times d\vec{r}_k) \\
 &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial i} di \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial j} dj \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial k} dk \right) \right) \\
 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial j} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial k} \right) di dj dk
 \end{aligned} \tag{1.44}$$



下面我们将分别计算在几种典型的坐标系中的体积元的表达式：

1. 直角坐标系：

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (x, y, z) \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) \\
 dV &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 &= (1, 0, 0) \cdot \left((0, 1, 0) \times (0, 0, 1) \right) dx dy dz \\
 &= (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dx dy dz \\
 &= dx dy dz
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

显然，对于直角坐标系，我们可以通过下图很直观的看出， \vec{r} 处的三个线元的大小分别是 dx, dy, dz ，且它们之间互相垂直，因此体积元就是 $dxdydz$ 。

2. 柱坐标系：

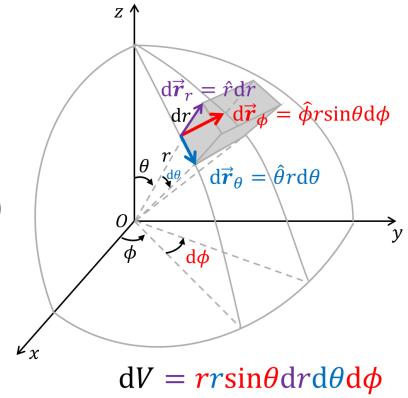
$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0) \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) \\
 dV &= r dr d\phi dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right) dr d\phi dz \\
 &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) \cdot \left((-r \sin \phi, r \cos \phi, 0) \times (0, 0, 1) \right) dr d\phi dz \\
 &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) \cdot (r \cos \phi, r \sin \phi, 0) dr d\phi dz \\
 &= r dr d\phi dz
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

当然我们也可以通过上面右侧的示意图直观的得出 $dV = r dr d\phi dz$ 的结论。

3. 球坐标系：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right) dr d\theta d\phi \\ &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot \\ &\quad \left((r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) \times (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) \right) dr d\theta d\phi \\ &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi\end{aligned}\quad (1.47)$$

同样的，我们也可以通过上面右侧的示意图直观的得出 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ 的结论。

1.3 梯度、散度和旋度

在电磁学中，我们经常要分析场随时间和空间的变化，其中时间是个标量，场随时间的变化可以直接使用常见的对时间求微分来计算，比如，对于一个矢量场 $\vec{f}(\vec{r}, t)$ ，它对时间的微分为：

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{df_x}{dt} \hat{x} + \frac{df_y}{dt} \hat{y} + \frac{df_z}{dt} \hat{z} \quad (1.48)$$

电磁学里更有趣的是场随空间的变化，由于三维空间有三个自由度 x, y, z ，因此，需要分别研究场在三个不同方向 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 的变化，接下来我们将讨论对于标量场和矢量场如何分析它们随着空间的变化情况。

1.3.1 梯度

对于标量场 $U(\vec{r})$ ，如果我们把它在三个方向的变化放到一起组成一个矢量，则我们便可以定义一个新的量，我们称之为标量场 $U(\vec{r})$ 的梯度 (gradient)：

$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.49)$$

其中 ∇ 为矢量算符 (Nabla 算符):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.50)$$

下面我们来分析一下梯度的物理含义, 即它的大小和方向分别包含什么信息。通过微积分里的全微分 (或者通过直接泰勒展开), 我们知道, 一个标量场 U 在 $\vec{r} = (x, y, z)$ 处沿 $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ 的变化 (即 $U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(r)$) 为:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (1.51)$$

上式也可写成:

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \nabla U \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (1.52)$$

我们不妨在标量场的等势面上 (即 $U(x, y, z) = \text{constant}$ 的点所组成的平面) 处取一点 \vec{r} 以及该点沿着等势面的切线 $d\vec{r}$, 由于 $d\vec{r}$ 沿着等势面的切线, 因此 U 沿着 $d\vec{r}$ 的变化为 0, 即 $dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(r) = 0$, 从而有:

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.53)$$

也就是说, ∇U 的方向与等势面的切线方向垂直, 即: ∇U 的方向平行于等势面的法向。现在, 我们再把 $d\vec{r}$ 改成等势面的法线方向, 那么我们知道:

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{r} = |\nabla U| |d\vec{r}| \quad (1.54)$$

即: 此时 $|\nabla U| = \frac{dU}{|d\vec{r}|}$, 也就是说, ∇U 的大小, 等于 U 在等势面法向方向的导数。

在第1.2节学习线积分的时候, 我们提到了保守力的概念: 即如果一个力对指点做的功与质点的运动路径无关, 那么我们就把这个力称为保守力。保守力的概念可以延伸到一半的矢量场, 即如果一个矢量场 \vec{F} 的线积分与从起点到终点的具体路径无关, 那么我们把这种矢量场称为保守场。关于保守场, 我们还有一个定理, 即:

定理 1.1 梯度定理

如果一个矢量场 \vec{F} 可以写成一个标量场的梯度 $\vec{F} = \nabla \Phi$, 那么这个矢量场 \vec{F} 是保守场。

证明:

取空间中的任意两点 A 和 B, 如果 \vec{F} 可以写成 $\vec{F} = \nabla \Phi$, 那么 \vec{F} 从 A 到 B 沿某一路经 C 的线积分为:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \int_C d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A) \quad (1.55)$$

可知，该线积分的值 $\Phi(B) - \Phi(A)$ 只与 A 点和 B 点的 Φ 值之差有关，与从 A 到 B 取哪条路径无关，因此 \vec{F} 是保守场。

实际上，上述定理反过来说也是成立的（梯度定理的逆定理），即：如果 \vec{F} 是一个保守场，那 \vec{F} 一定可以写成一个标量场的梯度的形式 $\vec{F} = \nabla\Phi$ 。证明起来也很简单，因为，如果 \vec{F} 是保守场，那我们可以这样定义 $\Phi(\vec{r})$ ：

$$\Phi(\vec{r}) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

其中 C 是从原点到 \vec{r} 的任意一条曲线，由于 \vec{F} 是保守场，所以上述 $\Phi(\vec{r})$ 的值与具体路径无关，是唯一定义的。因此，根据积分的定义，我们有：

$$d\Phi(\vec{r}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

同时，根据上面关于梯度的定义，我们有：

$$d\Phi(\vec{r}) = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$$

结合上述两式，可知：

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$$

且上式对任意 $d\vec{r}$ 都是成立的，因而 $\vec{F} = \nabla\Phi$ 。

1.3.2 散度

当我们考虑一个矢量场 \vec{F} 随着空间的变化的时候，我们不仅要考虑空间中的三个自由度 x, y, z ，还需要考虑矢量场本身有三个分量 F_x, F_y, F_z ，而每个分量都会随着 x, y, z 的改变而改变，因此总共存在 9 个微分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

从这 9 个微分量中，我们可以通过组合其中某些分量得到具有重要物理含义的一些量，比如，我们将上面 3×3 个微分量里面的对角线上的 3 个相加，可以得到一个标量，我们称之为矢量场 \vec{F} 的散度 (divergence)：

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.56)$$

矢量场的散度是一个标量，它也可以写成 ∇ 和 \vec{F} 的点乘的形式：

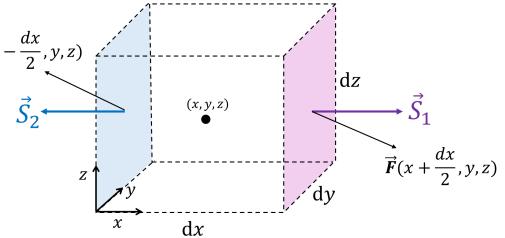
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \nabla \cdot \vec{F} \quad (1.57)$$

需要说明的是，上述关于散度的定义只是单纯的从数学上组合部分 \vec{F} 的空间变化的偏微分量给出的，仅从这个数学上的组合是很难看出其物理含义的。关于散度，还有一个更具有物理含义的定义，即：矢量场 \vec{F} 在空间 \vec{r} 处的散度，是指该矢量场在包含 \vec{r} 的一个无穷小的闭合曲面 S 上的通量，除以该闭合曲面所围起来的空间的体积 dV ：

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dV} \quad (1.58)$$

也就是说，散度这个量表征的是矢量场的“场线”在某一点的发散或者会聚程度（因此取名“散度”）， $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ 表示在这一点 \vec{F} 是向外发散的， $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ 则表示在这一点 \vec{F} 是内会聚的，而 $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ 则表示在这一点既不发散也不会聚（即：有多少场线进来就有多少出去）。

下面，我们将证明，上述1.57式和1.58式关于 \vec{F} 的散度的定义是等价的。如右图所示，取直角坐标系，在空间中某点 $\vec{r} = (x, y, z)$ 处，以该点为中心取边长为 dx, dy, dz 的长方体，下面我们来计算矢量场 \vec{F} 在该长方体的六个表面组成的闭合曲面上的通量。



以图中相对的两个面 \vec{S}_1 和 \vec{S}_2 为例， \vec{F} 在这两个面上的通量之和为：

$$\begin{aligned} \iint_{\vec{S}_1 + \vec{S}_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \vec{F}(x + \frac{dx}{2}, y, z) \cdot \vec{S}_1 + \vec{F}(x - \frac{dx}{2}, y, z) \cdot \vec{S}_2 \\ &= F_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) dy dz - F_x(x - \frac{dx}{2}, y, z) dy dz \\ &= \left[F_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) - F_x(x - \frac{dx}{2}, y, z) \right] dy dz \\ &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right] dy dz \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (1.59)$$

同理可得，前后和上下两个面的 \vec{F} 的通量之和将分别为 $\frac{\partial F_y}{\partial y} dV$ 和 $\frac{\partial F_z}{\partial z} dV$ ，因此， \vec{F} 在该长方体的六个表面组成的闭合曲面 S 上的总通量为：

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dV + \frac{\partial F_y}{\partial y} dV + \frac{\partial F_z}{\partial z} dV \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV \\ &= (\nabla \cdot \vec{F}) dV \end{aligned} \quad (1.60)$$

因此, 1.58式关于 \vec{F} 的散度的定义可以写成:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dV} \\ &= \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{(\nabla \cdot \vec{F}) dV}{dV} \\ &= \nabla \cdot \vec{F}\end{aligned}\quad (1.61)$$

这就得到了1.57式关于 \vec{F} 的散度的定义。

上面的关于散度的两种定义以及证明过程也告诉我们, 对于足够小的体积 V 以及其外表面对应的闭合曲面 S , 我们有下面等式:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left(\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \right) = 0 \quad (1.62)$$

实际上, 上面这个等式对于任意大小的体积及其外表面对应的闭合曲面都是成立的, 而这一结论也被称为高斯定理:

定理 1.2 高斯定理

矢量场 \vec{F} 在任意闭合曲面 S 上的总通量, 等于该矢量场的散度 $\nabla \cdot \vec{F}$ 在 S 所包围的体积 V 内的体积分:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (1.63)$$

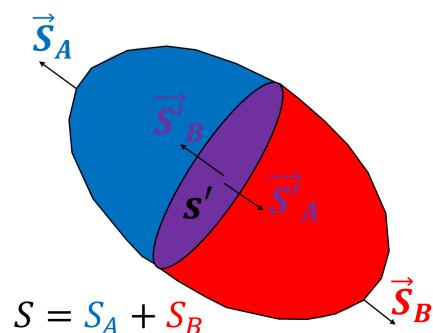
证明:

如图所示, 对一任意闭合曲面 S 及其包围的体积 V , 用一个曲面 S' 将该体积分成两部分, 将这两部分的体积分别记为 V_A 和 V_B , S' 也同时将闭合曲面 S 分成了两部分 S_A 和 S_B 。于是, 矢量场 \vec{F} 在闭合曲面 S 上的总通量可以写成:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.64)$$

曲面 S' 有两个方向相反的法向 (\vec{S}'_A 和 \vec{S}'_B), 且有:

$$\iint_{S'_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S'_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.65)$$



因此, 1.64式可以写成:

$$\begin{aligned}
 \oint\!\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\vec{S}_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\vec{S}_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \left(\iint_{\vec{S}'_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\vec{S}'_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) \\
 &= \left(\iint_{\vec{S}_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\vec{S}'_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) + \left(\iint_{\vec{S}_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\vec{S}'_B} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) \\
 &= \oint\!\oint_{\vec{S}_A + \vec{S}'_A} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \oint\!\oint_{\vec{S}_B + \vec{S}'_B} \vec{F} \cdot d\vec{S}
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

也就是说, 我们把矢量场 \vec{F} 在体积 V 的外表面这个闭合曲面 S 的通量, 写成了 \vec{F} 在两个子体积 V_A 和 V_B 各自的外表面的闭合曲面 $S_A + S'_A$ 和 $S_B + S'_B$ 的通量之和, 我们可以用同样的方法, 继续对这两个子体积进行细分, 直到将 V 细分成多个足够小的体积 V_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) 之和, 且对每个 V_i , 我们可以使用1.62式:

$$\begin{aligned}
 \oint\!\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \sum_{i=1}^N \oint\!\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \nabla \cdot \vec{F} dV \\
 &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

这就证明了上述高斯定理 (1.63式)。

由高斯定理我们知道, 如果在闭合曲面内部矢量场的散度 $\nabla \cdot \vec{F}$ 为 0 (或者其体积分为 0), 那么该矢量场在这个闭合曲面上的通量也为 0, 也就是说从这个闭合曲面流出的场线和流入的场线是相同的, 从这个角度来说, 我们可以把散度 $\nabla \cdot \vec{F}$ 理解为矢量场 \vec{F} 的“源”, 即无源的地方场线既不会聚也不发散, 有源的地方才存在场线的会聚或者发散。

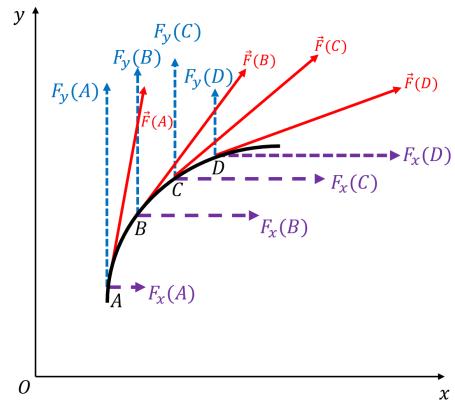
1.3.3 旋度

让我们再从数学上回到一个矢量场 \vec{F} 随空间的变化可能有的 9 个偏微分量:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} \\
 \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} \\
 \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

在定义散度时, 我们使用了上面对角线上的三个偏微分量 $\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial z}$, 这三个偏微分量表征的都是矢量场的各个分量在对应的分方向上的变化, 最终得到的散度的定义物理上表示的也是矢量场的场线在空间中某点的发散 (或会聚) 程度。上述 9 个偏微分量中, 除去 $\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial z}$ 之外的剩下 6 个偏微分量描述的都是 \vec{F} 的各个分量在它们垂直方向上的变化, 比如 $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ 描述的是 \vec{F} 的 y 方向上的分量在 x 方向上的变化。

为了直观的理解矢量场的各个分量在其对应的垂直方向上发生变化时是怎样的物理图像，我们不妨考虑下面这样一个在 $x - y$ 平面上的二维矢量场 \vec{F} ：如右图所示，假设 $\frac{\partial F_x}{\partial y} > 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} < 0$ ，则从图中的 A 点沿着 B, C 到 D 点的这条路径上， F_x 逐渐增大， F_y 逐渐减小，而两者合成之后的矢量场 \vec{F} 的大小则基本上保持不变，但是 \vec{F} 的方向在发生变化，且其方向的变化使得 \vec{F} 看上去一直与从 A 到 D 的圆弧相切，即 \vec{F} 这个矢量场从 A 到 D 的变化像是然绕着顺时针在“旋转”。

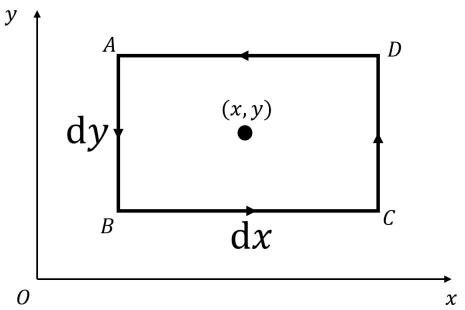


事实上，在上面这种二维的情况下，如果我们定义一个量 $A = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ ，如果 A 在某一点小于 0，那么 \vec{F} 在这一点的变化趋势就是类似于上面这个图像的顺时针旋转，反之，若 $A > 0$ ，则 \vec{F} 的变化趋势就是反过来的逆时针旋转。如果我们进一步给 A 这个量加上一个方向，使得它沿着 z 轴的方向，把 $+z$ 方向定义为逆时针旋转，把 $-z$ 的方向定义为顺时针方向，那么矢量 \vec{A} 可以定义为：

$$\vec{A} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (1.68)$$

这样我们就在二维的情况下利用矢量场 \vec{F} 的各个分量在其对应的垂直方向上的变化的偏微分量，定义了一个新的矢量 \vec{A} ， \vec{A} 能够表征 \vec{F} 随着空间的变化而“旋转”的情况。

上面提到的关于矢量场的“旋转”的图像，很容易让人联想到在第1.2节学习矢量场的线积分，比如对于上面提到的这种从 A 到 D 点 \vec{F} 向右旋转且 \vec{F} 的方向在各个地方都大致与路径的切线方向平行的情况， \vec{F} 从 A 到 D 的线积分必然将与个点的 $A = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ 这个量有关。为了定量的理解上面定义的 \vec{A} 矢量与 \vec{F} 的线积分的联系，我们不妨取右图中这样一个以 (x, y) 为圆心，长宽分别为 dx, dy 的很小的长方形组成的闭合曲线，则 \vec{F} 在这一闭合曲线上的线积分为：



$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{BC} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{CD} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{DA} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \left(-F_y(x - \frac{dx}{2}, y) dy \right) + \left(F_x(x, y - \frac{dy}{2}) dx \right) + \\ &\quad \left(F_y(x + \frac{dx}{2}, y) dy \right) + \left(-F_x(x, y + \frac{dy}{2}) dx \right) \\ &= \left(F_y(x + \frac{dx}{2}, y) - F_y(x - \frac{dx}{2}, y) \right) dy - \left(F_x(x, y + \frac{dy}{2}) - F_x(x, y - \frac{dy}{2}) \right) dx \\ &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS \end{aligned} \quad (1.69)$$

结合上面我们关于矢量 \vec{A} 的定义，我们可以把上式进一步写成：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (S \rightarrow 0) \quad (1.70)$$

或者写成：

$$A = \vec{A} \cdot \hat{z} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \oint_C \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dS} \quad (dS \rightarrow 0) \quad (1.71)$$

即：上面在二维平面上定义的表征二维矢量场 \vec{F} 旋转程度的矢量 \vec{A} ，其在某处的大小等于 \vec{F} 在以该处为中心的一个小的闭合曲线上的线积分，除以该闭合曲线包围的曲面的面积，而其符号（方向）则与线积分的符号相同，即正号表示 \vec{F} 在该点是逆时针“旋转”（线积分为正）。

对于一般情况下的三维情况下的矢量场 \vec{F} ，我们可以类似的定义一个表征 \vec{F} 的“旋转”程度的矢量，我们称之为 \vec{F} 的旋度 (Curl)：

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \nabla \times \vec{F} \quad (1.72)$$

与上述二维情况的分析情况类似，我们可以得出矢量场的旋度与其线积分的关系，即，如果在空间某点附近取一个无穷小的闭合曲线 C ，则 \vec{F} 在 C 上的线积分除以 C 所包围的曲面的面积，等于 \vec{F} 的旋度在该曲面的法向上的投影：

$$\vec{n}_S \cdot \operatorname{curl} \vec{F} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{dS} \quad (1.73)$$

上面的1.70式也可以写成如下等式：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (S \rightarrow 0) \quad (1.74)$$

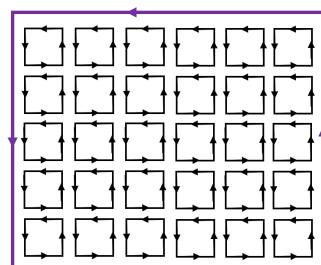
事实上，上式中的 $S \rightarrow 0$ 这个条件也可以去掉，即上式对于一般的有限大的曲面及其对应的闭合曲线也是成立的，这就是下面的斯托克斯 (Stokes) 定理：

定理 1.3 斯托克斯定理

矢量场 \vec{F} 在任意闭合曲线 C 上的线积分，等于该矢量场的旋度 $\nabla \times \vec{F}$ 在 C 所包围的曲面 S 内的面积分：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (1.75)$$

上述定理的证明方法与上一节中高斯定理的证明方法非常类似，即：将一个大的曲面分成多个足够小的小曲面，相邻曲面间共享的路径上 \vec{F} 的路径积分刚好抵消（如右图所示），于是最终可以将 \vec{F} 在 C 上的线积分写成多个小的闭合曲面上的线积分之和，而这些小的线积分又可以由1.70式写成多个面积分的和，最终得出1.75式。



习题

1.1: 请证明: 对于任意矢量场 \vec{F} 和标量场 Φ , 有以下恒等式:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

1.2: 下式左右两边分别是麦克斯韦方程组的微分形式和积分形式, 请从微分形式推出积分形式, 以及从积分形式推出微分形式。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_0 & \oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \rho_0 dV \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

1.3: 对于矢量算符 ∇ , 我们已经学过它在直角坐标系中的表达式为:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

现在, 请你根据直角坐标系和柱坐标系的转换关系, 证明上述 ∇ 在柱坐标系中的表达式:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

(提示: 将直角坐标系中 ∇ 的各个元素转换到柱坐标系中, 比如用 r, ϕ, z 和 $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$ 来表示 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, 再利用链式法则将 $\frac{\partial}{\partial x}$ 写成 $\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}$ 的形式并进一步展开)

1.4: 现在, 我们换一种方法来推导矢量算符 ∇ 在柱坐标系中的表达式: 结合标量场 Φ 的梯度的物理意义, 即方向与等势面的切线方向垂直, 大小等于 Φ 在等势面法向方向的导数 $\frac{d\Phi}{d\vec{r}}$, 通过结合求解标量场的梯度在柱坐标系中的表达式的形式求出柱坐标系中的矢量算符 ∇ 的表达式。

1.5: 利用习题1.3得到的 ∇ 算符在柱坐标系中的表达式, 证明: 在柱坐标系中, 标量场 Φ 的

梯度, 矢量场 $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_z \hat{z}$ 的散度和旋度分别为:

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{F} &= \hat{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \hat{z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right)\end{aligned}$$

(提示: 推导过程中可能会用到: $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \hat{\phi}$ 等结论。)

1.6: 用与习题1.3类似的方法, 证明矢量算符 ∇ 在球坐标系中的表达式为:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

1.7: 用与习题1.4类似的方法, 证明矢量算符 ∇ 在球坐标系中的表达式为:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

1.8: 利用习题1.6得到的 ∇ 算符在球坐标系中的表达式, 证明: 在球坐标系中, 标量场 Φ 的梯度, 矢量场 $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi}$ 的散度和旋度分别为:

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \vec{F} &= \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} \right) + \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

1.9: 某标量场 U 在球坐标系下的表达式为: $U(\vec{r}) = \frac{1}{r}$

求: ∇U , $\nabla \times (\nabla U)$ ($r \neq 0$)

1.10: 某矢量场 \vec{F} 在柱坐标系下的表达式为: $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\hat{\phi}}{r}$

求: $\nabla \cdot \vec{F}$, $\nabla \times (\vec{F})$ ($r \neq 0$)

1.11: 某矢量场 \vec{F} 在直角坐标系下的表达式为: $\vec{F}(x, y, z) = y \hat{x} - x \hat{y}$

画出 \vec{F} 在 $x-y$ 平面上的场线, 并求: $\nabla \cdot \vec{F}$, $\nabla \times (\vec{F})$

第二章 真空中的静电场

物理学中某个理论的创立过程，往往是起源于人们对物质世界某个新现象的发现，随着新现象的发现，物理学家们通过定量观察这一现象总结出新的物理规律，并在这些物理规律的基础上进行简化、猜想和数学推演，创造出系统的理论，进而根据这一新的理论预言新的物理现象，而后物理学家们又根据这些新的语言去进行新的观测来验证这个理论。

电磁学的发展也是这样，历史上人们对电和磁的认识来源于生活中常见的诸如闪电、摩擦起电等现象，而后库仑、安培等人通过实验总结出了这些现象所表现出的物理规律，最后由麦克斯韦将这些规律总结出了麦克斯韦方程组，后人又根据麦克斯韦方程组预言并验证了电磁波的存在，从而验证了这一迄今为止电磁学最重要的理论。本书将从一些简单的电磁现象开始，回顾我们是如何从这一生活中简单的现象开始逐步总结出电磁现象的一般性理论。

本章是电磁学学习的起始章节，我们将从人类已经认识了几千年的静电现象开始，首先从生活中的静电现象中抽象出**电荷**这一基本概念，并学习库仑为我们总结出的电荷之间的相互作用的规律-**库仑定律**，在此基础上，我们将进一步认识这一相互作用的本质，即现代观点认为的不是超距相互作用而是由于电荷产生的**电场**的存在带来的近距相互作用，我们将在库仑定律的基础上从数学上总结真空中的静电场的一些定理，如**高斯定理**和**环路定理**，并学习电荷相互作用对应的**势-电势**，对高斯定理、环路定理以及电势的应用将在很多情况下简化对电荷系统产生的静电场的计算过程，相关的实例我们也将在此章中做一些介绍。

2.1 电荷

汉语中，“电”这个汉字最早见于甲骨文，其本义是闪电，甲骨文的“电”这个字也是和闪电的形状很相似的一个象形文字，后来，随着汉字的演化，我们在“电”上面加了“雨”字以表示闪电多与雨天相伴的天象特征，到了近代，汉字的简化去掉了多加的这个“雨”字头，事实上也让“电”这个字不仅仅局限在描述闪电这一现象。



现在我们知道，闪电的发生，是由于空气中电荷的累积在局部产生很高的电压差从而击穿空气的结果，一般来说闪电里涉及到的累积电荷量和形成的电压差远高于我们日常生活中能接触到的电荷和电压值。事实上，除去闪电这种极端的电荷之间相互情形外，自然界中的电荷相互作用现象往往都非常微弱，大多数时候这些相互作用都是“无声”的存在万物之中。在古代，人们对于生活中的“可观测”的电现象的认识大多来源于摩擦起电现象，很长一段时间内物理学家们研究电现象的主要实验手段也是通过摩擦来产生电。

早在东汉时期，思想家和哲学家王充在其所著的《论衡》中就有关于摩擦起电的记载，该书中写道：“顿牟掇芥，磁石引针”，其中顿牟就是琥珀，意思是琥珀经过摩擦之后，会吸引像草芥一样的轻小的物体，并且他在这里还将这种起电现象跟磁石吸引铁针的现象做类比。在西方，公元前 6 世纪，希腊的哲学家泰勒斯（Thales of Miletu）就记载了摩擦起电的现象：当时人们发现，琥珀摩擦猫毛以后会吸引像羽毛一类的轻微物理。在希腊语中，琥珀这个词是 elektron，这也是“电”的英文单词 electric 的来源。后来，人们观察到了更多的能够摩擦起电的物体，并且发现了下面这些规律：

1. 摩擦不同的物体产生的电荷不相同，共有两种电荷，一种是丝绸摩擦过的玻璃棒（“玻璃电”），另一种是毛皮摩擦过的橡胶棒或琥珀（“树脂电”）。
2. 两种电荷都会吸引微小的物体。
3. 电荷与电荷之间也会相互作用，但是不同电荷之间的相互作用的特点不一样，比如：“玻璃电”与“玻璃电”相互排斥，“玻璃电”与“树脂电”相互吸引，“树脂电”与“树脂电”也会相互排斥。

后来，人们认为上述提到的这两种电荷（“玻璃电”和“树脂电”）是两种不同的流体，通过摩擦的动作可以将这两种电分离，通过合并的动作可以相互中和对方。18 世纪，美国科学家本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin, 1706-1790）提出了电的单流体学说，他认为电不能被创造，只能在物体间转移，摩擦起电就是由于两种物体相互摩擦使电从一个物体转移到了另一个物体上，导致一个物体带过量的电，另一个物体带不足的电，他把这两种情况分别称为带正电和带负电，并且规定丝绸摩擦过的玻璃棒是带正电的，而毛皮摩擦过的橡胶棒是带负电的，后来这一定义就被一直保留到了今天。富兰克林还通过实验发现了电荷守恒定律，即在一个孤立系统里面，电荷的总量是不变的。

要想理解上述观察到的摩擦起电及相关的相互作用的现象的本质，我们需要进入到亚原子层面的围观世界：电荷（charge）是构成物质的基本粒子的一种基本属性，原子中的核外电子带负电，原子核内的质子带正电，中子不带电。带有电荷的粒子称为带电粒子，净电荷不为零的物体称为带电物体。电荷的单位是库仑，符号是 C，迄今为止的实验表明，所有基本粒子所带的电荷都是基本电荷的整数倍^{1,2}，即电荷是量子化的，基本电荷所带的电量为 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，这一数值的首次测量是 1909 年由美国物理学家罗伯特·密立根（Robert Millikan，1868-1953，1923 年诺贝尔物理学奖）通过带电油滴实验测得的。

电荷从一个物体转移到另一个物体的本质是带电粒子在物体间的转移，其总数并不会发生变化；此外，实验同时还表明，当粒子之间发生反应使得反应前后粒子数量和种类不相同时，反应前后的总电荷数是相等的，比如一个光子转换成一个正负电子对的电子对效应，或者一个正负电子对通过湮灭变成一个光子的过程，这就是电荷守恒定律：

定律 2.1 电荷守恒定律 (law of charge conservation)

在任意空间区域内 V 电荷量的变化，等于通过该区域的表面 S 流入该区域的电荷总量，即：

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.1)$$

或写成微分形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.2)$$

其中， ρ 是空间中的电荷密度的标量场， \vec{J} 是电流密度矢量场。

从基本粒子所带电荷的角度，就能很好的理解上面提到的摩擦起电及相关现象了：当两种物体相互摩擦时，原子核外的电子会获得额外的能量，从而有可能导致核外电子从一个物体转移到另一个物体，使得失去电子的物体的净电荷为正，得到电子的物体的净电荷为负。当我们把丝绸和玻璃棒相互摩擦时，由于玻璃棒对核外电子的束缚能力比丝绸弱，因此电子从玻璃棒转移到了丝绸中，最终玻璃棒会带正电荷。

当我们把带正电荷的玻璃棒靠近一个不带电的物体（如上文中提到的羽毛、草芥等轻小物体）时，玻璃棒中的正电荷会吸引不带电的物体中的电子，最终的结果是不带电的物体在靠近玻璃棒的一侧有部分负电荷聚集，在远离玻璃棒的一侧则有正电荷聚集，也就是电荷在物体内部进行了重新分布，或者说物体某种程度上被“极化”了（在第四章我们会进一步学习这一现象）。由于距离越近，电荷之间的相互作用越大，因而玻璃棒与不带电物体之间的相互吸引力大于排斥力，最终我们将观察到带电的玻璃棒会吸引轻小的物体。

¹ 20 世纪后半期，随着大量与质子和中子类似的强子的发现，以美国物理学家默里·盖尔曼（Murray Gell-Mann，1929-2019，1969 年诺贝尔物理学奖）为代表的物理学家提出了夸克模型这一强子分类方法，夸克模型认为强子是由更基本的粒子夸克组成，夸克所带的电荷并不是整数倍电荷，而是 $\pm 1/3e$ 或 $\pm 2/3e$ ，但是实验上我们尚未发现自由夸克，夸克必须和其他夸克一起组成一个粒子，也就是所谓的“夸克禁闭”。

² 截止到目前，国际上仍然有很多大型的实验在试图寻找带非整数倍基本电荷的电荷的带电粒子，如在欧洲核子研究中心的大型强子对撞机上的 MilliQan 实验：[Phys. Rev. D 102, 032002 \(2020\)](#)

2.2 库仑定律

对于摩擦起电以及电荷与电荷之间的相互作用，人类在很长一段时间内只是能够定性的知道电荷之间的相互作用力与电荷的量和电荷之间的距离有关，即电荷量越大、电荷之间距离越小，相互作用力就越强。对于这种相互作用的定量研究直到最近两三百年才开始出现，这其中的一个原因，就是因为我们日常生活中能够获得的电荷（主要是靠摩擦起电获得）产生的相互作用力往往非常的微弱，几百年前对这种微弱的相互作用力进行测量在技术上存在较大的困难。这一技术困难，一直到 18 世纪扭秤实验（torsion balance）的发明，才得到了改变。

右图是扭秤实验的基本原理图，一根木棍两端放了两个球，木棍中间被一根细丝吊起，当其中一个球受到外力 \vec{F} 时，木棍会以细丝所在的轴发生旋转，直到外力给木棍施加的力矩等于细丝由于被扭转给木棍施加的反力矩。通过测量木棍旋转的角度 θ ，就可以推算细丝被扭转的力矩 $M = k\theta$ （其中 k 为扭转系数，可以通过测量简谐旋转的周期来测量），而从而可以计算出球受到的外力大小 $F = M/l = k\theta/l$ 。当使用的细丝的扭转系数足够小时，只需要很小的力 F 就可以使得木棍发生较大的转动，从而具有很高的对力的测量灵敏度，比如 18 世纪当时物理学家们发明的扭秤（如库仑和卡文迪许使用的扭秤等）的灵敏度可达 10^{-8}N 的量级。

1784 年，法国物理学家夏尔·库仑（Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806）就是使用他设计的扭秤首次定量研究了电荷之间的相互作用的规律。首先通过与带电体接触使扭秤上的木棍一端的金属球带上已知电荷量的电荷，而后将另一带电体靠近这个金属球，金属球在电荷之间的作用力下将发生旋转，通过上面所说的测量旋转角度的方法可以精确测量金属球受到的电荷间相互作用力。通过改变外来带电体的电荷量和带电体与金属球之间的距离，便可以定量的测量电荷之间的相互作用与电荷大小以及距离的关系。其中，距离的改变很简单，而电荷的改变也不难，只需要将一个带电金属球和一个相同尺寸的不带电的金属球接触便可将原本的电荷量一分为二，这样便可以定量的研究相互作用力与电荷量之间的关系。

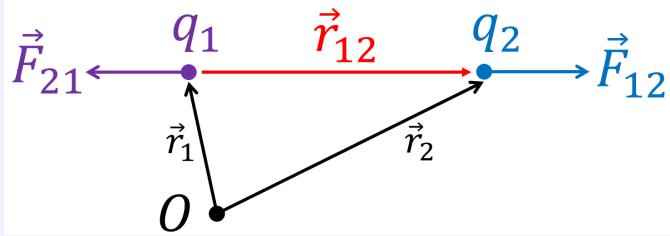
库仑通过上述扭秤实验，总结出了电荷之间相互作用的规律，我们把它称之为库仑定律：



定律 2.2 库仑定律 (Coulomb's law)

真空中, 两个静止点电荷之间的相互作用力, 与两个电荷量的乘积成正比, 与两个点电荷之间距离的平方成反比:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21} \quad (2.3)$$



在上述2.3式中, 力的单位是 N, 电荷的单位是 C, 距离的单位是 m, 而 k 为比例常数, 也被称为库仑常数, 其值为:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

其中 ϵ_0 为真空介电常数, 其值为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

需要指出的是, 库仑定律只适用于点电荷, 即要求带电体的尺度远小于带电体之间的距离, 且只适用于真空中两个相对静止或者低速运动的点电荷的情况 (也称为静电力)。

库仑力与万有引力一样, 其大小与距离的平方成反比。由于这种力的大小随着距离的增加衰减得不是很迅速, 因而力的作用范围比较大 (比如遥远的天体之间的万有引力), 我们也把这种相互作用力称之为长程力。与之相对的是短程力, 比如强相互作用力, 它的大小随距离成指数衰减, 因而力的作用范围极为有限。

例 2.1

比较氢原子中的质子和电子之间的库仑力 F_e 和引力 F_g 的大小。

解:

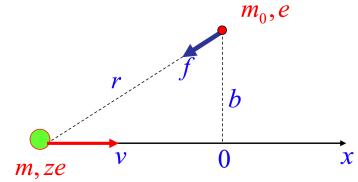
根据库仑定律和万有引力定律, 我们有:

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{kq_1 q_2}{r^2} = \frac{8.99 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{r^2} \\ F_g &= \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times (9.1 \times 10^{-31}) \times (1.7 \times 10^{-27})}{r^2} \\ F_e/F_g &= \frac{kq_1 q_2}{Gm_1 m_2} \\ &= \frac{8.99 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{6.7 \times 10^{-11} \times (9.1 \times 10^{-31}) \times (1.7 \times 10^{-27})} \\ &\approx 10^{39} \end{aligned}$$

即库仑力是万有引力的约 10^{39} 倍！从上面的例子我们可以看出，基本带电粒子间的库仑力远大于万有引力。事实上，电磁相互作用力是原子核与核外电子结合成原子以及原子与原子结合组成我们现实世界中的各种物质的最主要的相互作用力，因此，我们现实生活中所接触到的物质世界的许多现象背后都是由电磁相互作用在起主导作用。而在更大的尺度，比如宇宙中的天体与天体之间，由于宇宙中大部分天体的单位质量所带的净电荷非常小，因此天体之间的库仑力将远小于万有引力。以地球和火星为例，这两个天体所带的净电荷都约为 40 万库仑，根据这个我们可以推算出，地球和火星之间的万有引力是库仑力的约 10^{17} 倍。

例 2.2

如图所示，一个运动的重带电粒子（质量 m ，电荷 ze ，速度 $v \ll$ 光速 c ）在经过物质中的一个原子时，会与核外电子（质量 $m_0 \ll m$ ，电荷 $-e$ ）通过库仑力作用使电子获得能量而引起原子的电离或激发。如图，求带电粒子从负无穷远处入射到正无穷远处的这一过程中，带电粒子损失的能量 ΔE 。



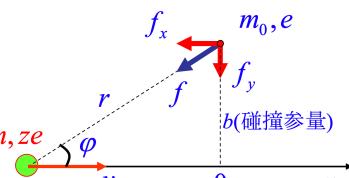
计算时可使用以下简化假设条件：

1. 入射带电粒子在物质中的轨迹近似为直线（由于 $m \gg m_0$ ，重带电粒子的速度几乎不变）；
2. 入射带电粒子的速度远大于核外电子的初始轨道运动速度（即核外电子初始状态可以看成静止）；
3. 轨道电子在此过程中获得的能量远大于其在原子中的激发能，即轨道电子可以看成自由电子；
4. 由于 $v \ll c$ ，可以假定库仑定律在此低速运动情况下适用。

解：

如图所示，由库仑定律，可知在任意时刻核外电子受到来自入射带电粒子的库仑力为：

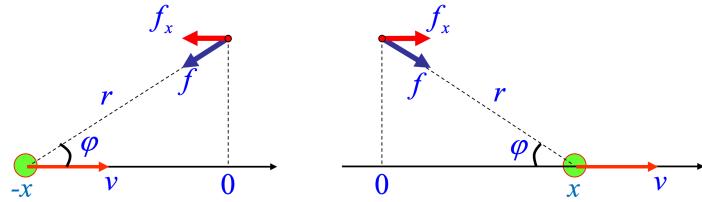
$$\vec{f} = k \frac{ze^2}{r^2} \hat{r} \quad (2.4)$$



由牛顿第二定律 ($\vec{f} = d\vec{P}/dt$)，在 dt 时间内，核外电子获得的动量为： $d\vec{P} = \vec{f}dt$
因此，整个过程电子获得的总动量为： $\vec{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f} dt$
我们先来求上述 \vec{P} 在 x 轴方向的分量 P_x ：

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \frac{dt}{dx} dx = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx \quad (2.5)$$

如下图所示，由对称性可知， $f_x(x) = -f_x(-x)$ ，因此上述积分 $P_x = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = 0$



因此, 所求 $P = P_y$

$$\begin{aligned} P = P_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_y dt = \int_{-\infty}^{+\infty} k \frac{ze^2}{r^2} \sin(\varphi) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k \frac{ze^2}{r^2} \frac{b}{r} \frac{dx}{v} = \frac{kze^2 b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + b^2})^3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

在上述积分中, 将 x 用 $b \tan \theta$ 代替, 可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + b^2})^3} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{b / \cos^2 \theta d\theta}{(\sqrt{b^2 \tan^2 \theta + b^2})^3} = \frac{1}{b^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2}{b^2}$$

代入2.6式, 可得, 核外电子获得的动量为:

$$P = \frac{2kze^2}{bv} \quad (2.7)$$

考虑到可以忽略核外电子的初始速度, 因此这也是核外电子的最终的动量, 其对应的动能为: $E_0 = \frac{P^2}{2m_0}$

由能量守恒, 可知整个过程中入射重带电粒子损失的能量为:

$$\Delta E = E_0 = \frac{P^2}{2m_0} = \frac{2k^2 z^2 e^4}{m_0 b^2 v^2} \quad (2.8)$$

仔细观察2.8式我们可以发现, 对于这样一种由重带电粒子入射导致的原子的电离的情况, 入射粒子损失的能量与入射粒子的电荷 z 和速度 v 有很大的关系:

1. 入射粒子电荷 z 越大, 损失的能量也就越大。这是因为, 电荷越大, 库仑力也就越大, 因此在此过程中入射粒子对核外电子做的功也就越多。事实上, 上文中提到截止目前仍有一些国际大型实验在寻找带非整数倍电荷的新粒子 ($z \ll 1$), 对于这种粒子的寻找, 就依赖于我们这道例题里推导出的能量损失与 z 的关系, 因为这类 z 很小的粒子相比我们一直的带整数倍电荷的粒子在穿过探测器的物质时, 其由于电离导致的能量损失很小, 因而可以在探测器中飞行很长一段距离, 利用这一特征我们便可以将这类新粒子与已知的粒子进行甄别。
2. 入射粒子的速度 v 越大, 损失的能量就越小。这是因为, 速度越大, 入射粒子经过核外电子所需要的时间越短, 因而传递给核外电子的动量也就越少, 所损失的能量也就越小。这一特征, 同样被广泛应用于现代粒子物理实验的带电粒子的探测和甄别中: 对于高能带电粒子, 我们现有的探测手段往往只能测量带电粒子的动量和电荷, 无法直接测量带电粒子的质量, 因而对于一些电荷相同的重带电粒子, 比如质子和介子 (π/K 等介子), 要想将

它们区分开来需要额外的实验手段，其中一种方法就是利用本道例题得出的结论，对于不同质量的重带电粒子，当它们动量相等时，其速度会有所区别，因而它们在探测器的物质中的能量损失也会有所不同，通过对比们在运动过程中损失的能量，我们便可以将电荷相同但质量不同的重带电粒子进行区分。

上文中提到，库仑定律只适用于单个点电荷与另一个点电荷之间的相互作用力，对于复杂的带电体系，要想计算它们之间的相互作用力，我们就需要分别计算带电体系内所有点电荷对另一个带电体系的作用力，并进行矢量叠加，而这一过程，便用到了下面的叠加原理：

原理 2.1 库仑力的叠加原理

多个静止点电荷 (q_1, q_2, \dots, N) 对一个静止点电荷 q_0 的库仑力 \vec{F} ，等于各个静止点电荷 q_i 单独存在时对 q_0 的库仑力 \vec{F}_i 的矢量和：

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{kq_0q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i) \quad (2.9)$$

利用叠加原理，我们便可以计算出点电荷与带电体系的相互作用力，以及带电体系与带电体系之间的相互作用力。比如，对于任意两个带电体系之间的相互作用，我们可以通过如下积分进行计算：

$$\vec{F}_{12} = \iiint_{V1} \iiint_{V2} \frac{k\rho_1(\vec{r}_1)\rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) dV_1 dV_2 = -\vec{F}_{21} \quad (2.10)$$

例 2.3

我们把一对靠得很近的等量异号点电荷对 ($+q$ 和 $-q$) 称为电偶极子 (electric dipole)，如右图所示，设两个点电荷之间的距离为 \vec{l} (方向从负到正)，且我们定义电偶极矩矢量 (electric dipole moment) $\vec{p} = q\vec{l}$ 。求电偶极子的中垂线上的点电荷 Q 受到的库仑力 \vec{F} 。

解：

由叠加原理， Q 受到的总库仑力等于 $+q$ 和 $-q$ 对 Q 的库仑力的矢量和：

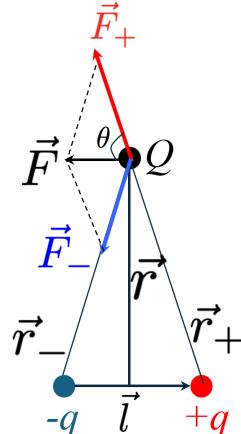
$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \quad (2.11)$$

由对称性可知，竖直方向合力为 0，水平方向的合力大小为：

$$\begin{aligned} F_{//} &= F_{+//} + F_{-//} = -2F_+ \cos \theta \\ &= -2 \frac{kqQ}{r_+^2} \frac{l/2}{r_+} = -\frac{kqQl}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

负号表示与 \vec{l} 方向相反，因此：

$$\vec{F} = -\frac{kqQ\vec{l}}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} = -\frac{kQ\vec{p}}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \quad (2.13)$$



当 $r \gg l$ 时, 上式可简化为:

$$\vec{F} = -\frac{kQ\vec{p}}{r^3} \quad (2.14)$$

即: 电偶极子在远处对其他电荷的库仑力与距离的三次方成反比, 这比点电荷的距离的平方反比衰减得要快, 相对来说是偏短程的相互作用。在本书的后续章节, 我们还将继续讨论电偶极子的一些特征以及诸多应用。

需要指出的是, 本节中所学习的库仑定律和叠加原理, 是静电学的基石, 本书后续静电学章节的所有内容都可以从库仑定律和叠加原理得出。

2.3 电场和电场强度

历史上, 人们对于电荷之间的相互作用力的本质经历了很长一段时间的讨论, 与日常生活中我们常见的依靠接触产生的力不同, 电荷之间能在一定距离之外产生相互作用, 所以, 很长一段时间内, 人们认为这是一种不需要媒介就能产生的相互作用力, 电荷之间的相互作用力也是瞬时的, 描述这些相互作用的时候也是用距离的角度来描述 (比如库仑定律), 即所谓的“超距作用” (action at a distance)。这种观点和处理方法对于描述静电学的现象确实是没什么问题的, 但是, 当我们在[第八章](#)开始学习电磁波的时候我们会发现, 当我们开始考虑其中一个电荷在运动的时候, 另一个电荷感受到的作用力的变化并不是瞬时的, 而是在时间上有延迟的, 这一延迟靠超距作用的观点是无法解释的, 这就需要我们这一节将要介绍的“电场” (electric field) 这一媒介来解释电荷之间的相互作用力。

从电荷直接“超距作用”的观点到“电场”观点的确认, 是一个逐渐发展的过程。电场 (以及我们后面章节要讲到的磁场) 的概念最早是由迈克尔·法拉第 (Michael Faraday, 1791-1867) 在观察带电体和磁体的周围空间的时候提出的, 法拉第发现带电体和磁体产生的力的可以通过场的力线来描述 (比如可以通过铁粉等可视化方式展现场的力线), 这些力线分布在空间中。法拉第提出, 电荷之间的相互作用力不是直接发生的, 而是通过电荷产生的电场来传递的, 场的存在改变了空间的状态, 进而对空间中的另一个电荷产生作用力。法拉第还通过实验总结出了“磁场的改变产生电场”这个我们在[第七章](#)将要学习的电磁感应定律。电场和磁场的概念后来被詹姆斯·麦克斯韦 (James Maxwell, 1831-1879) 数学化, 并通过其总结出的麦克斯韦方程组系统的描述了电场和磁场如何在空间传播, 并预测了电磁波的存在。

让我们回到电场这个概念, 电场是存在于电荷周围能传递电荷与电荷之间相互作用的物理场。任何电荷都会产生电场, 电荷在电场中会受到库仑力。数学上, 我们定义一个电场强度 \vec{E} 这个物理量来表示电场的强度和方向。空间中任意一点的电场强度, 可以由在该处放置一个静止的检验点电荷 q_0 来确定, 若检验电荷受到的库仑力是 \vec{F} , 则该点的电场强度为:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (2.15)$$

根据电场强度的定义和库仑定律，我们可以很容易求出真空中静止点电荷产生的电场：

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.16)$$

可知，点电荷产生的电场其强度与距离 r^2 成反比，方向与 \vec{r} 同向（负电荷为反向），即这是一个有心力场。

电场与库仑力一样，也满足矢量叠加原理，即 N 个点电荷在空间某点产生的总电场强度，等于每个电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.17)$$

有了电场的叠加原理，我们便可以计算任意带电体系产生的电场。下面我们选取几个典型的常见带电体系，来分析它们产生的电场有什么特征。

例 2.4

求电偶极子在远点 $P(\vec{r})$ 处 ($r \gg l$) 产生的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 。

解：

由叠加原理， $P(\vec{r})$ 点的电场强度等于正负电荷在该点产生的电场强度的矢量和：

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中：

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}, \quad \vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{l}}{2} \quad (2.19)$$

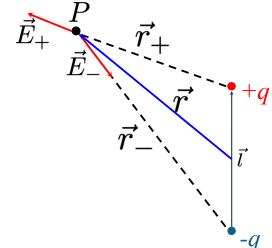
$$r_+^{-3} = \left[(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}) \cdot (\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}) \right]^{-3/2} = \left(r^2 + \frac{l^2}{4} - \vec{r} \cdot \vec{l} \right)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{l^2} \right)^{-3/2} \quad (2.20)$$

由于 $r \gg l$ ，上式可通过泰勒展开只保留 l/r 的一次项：

$$r_+^{-3} = r^{-3} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{l^2} \right)^{-3/2} \approx r^{-3} \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{l^2} \right)^{-3/2} \approx r^{-3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2} \right) \quad (2.21)$$

类似可得：

$$r_-^{-3} \approx r^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2} \right) \quad (2.22)$$



代入2.18可得：

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\vec{r}_+ \left(1 + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2} \right) - \vec{r}_- \left(1 - \frac{3\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) + (\vec{r}_+ + \vec{r}_-) \frac{3\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2} \right]\end{aligned}\quad (2.23)$$

其中， $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l}$, $\vec{r}_+ + \vec{r}_- = 2\vec{r}$, 因此：

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\vec{l} + 3\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^2}\right)\vec{r} \right] \\ &= \frac{-\vec{p} + 3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}\quad (2.24)$$

上述结果分两部分，第一部分与 \vec{l} 平行，是横向场，第二部分与 \vec{r} 平行，是径向场。

- 当 P 点位于电偶极子的中垂线上时，径向场等于零，2.24式可化简为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.25)$$

这与上一节中例2.3计算得出的结果是一致的。

- 当 P 点位于电偶极子的连线上时，2.24式可化简为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.26)$$

自然界中有很多带电体系都可以看成是电偶极子模型，比如有很多分子（或原子）的电子的重心与原子核并不重合，因而正负电荷中心不重合，这种情况下该分子（或原子）就可以看成一个电偶极子，它们会产生电偶极场，我们把它们称为有极分子（或有极原子），由于电偶极场的存在它们会更容易“亲和”（溶解）其他有极分子（或有极原子）。关于有极分子（或有极原子）在本书后面第四章我们还会进一步讨论。

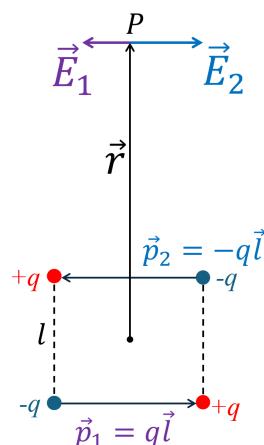
例 2.5

求如图所示的电四极子在远点 $P(\vec{r})$ 处 $(r \gg l)$ 产生的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 。

解：

该电四极子产生的电场可以看成是两个电偶极子产生的电场的矢量和，使用上一个例题的结论，可得：

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q\vec{l}}{(r + \frac{l}{2})^3} + \frac{q\vec{l}}{(r - \frac{l}{2})^3} \right]\end{aligned}\quad (2.27)$$



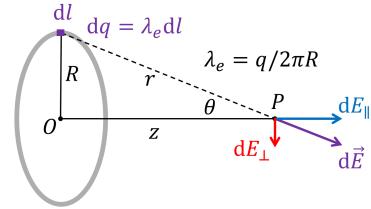
通过泰勒展开只保留 l/r 的一次项, 可得:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{-1}{(1 + \frac{l}{2r})^3} + \frac{1}{(1 - \frac{l}{2r})^3} \right] \\
 &= \frac{q\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-(1 - \frac{3l}{2r}) + (1 + \frac{3l}{2r}) \right] \\
 &= \frac{q\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{3l}{r} \\
 &= \frac{3ql^2\hat{l}}{4\pi\epsilon_0 r^4}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

可见, 电四极子产生的电场随空间成 r^{-4} 的速度衰减, 比电偶极子的衰减更快。

例 2.6

求如图所示的均匀带电细圆环 (半径 R , 总电荷 q) 在其轴线上任意一点 $P(z)$ 处的电场强度。



解:

如图所示, 把带电圆环分成无限多点电荷 dq , 设 dq 在 P 点产生的电场强度为 dE 。由对称性, 所有的 dE_{\perp} 相互抵消, P 点的电场只剩下各 dE_{\parallel} 之和:

$$E = \int dE_{\parallel} \tag{2.29}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 dE_{\parallel} &= dE \cos \theta \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{z}{r}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

定义线电荷密度 $\lambda_e = \frac{q}{2\pi R}$, 上式中 $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, 代入上式可得:

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_e dl}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{2.31}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 E &= \int dE_{\parallel} = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_e}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} dl \\
 &= \frac{2\pi R \lambda_e z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

根据上述结果可知, 当 $z \gg R$ 时, 电场可以近似为:

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad (2.33)$$

即这种情况下变成了点电荷的电场。

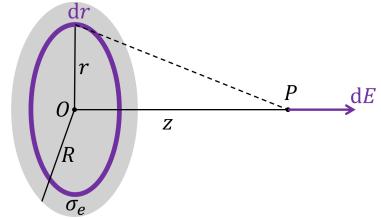
例 2.7

求如图所示的均匀带电圆盘 (半径 R , 面电荷密度 σ_e) 在其轴线上任意一点 $P(z)$ 处的电场强度。

解:

如图所示, 可以将带电圆盘切成很多带电圆环, 利用上一例题的结果, 可知半径为 r 宽度为 dr 的圆环上的电荷在 P 点产生的电场强度为:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z \sigma_e 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z \sigma_e r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.34)$$



因此, P 点的电场强度为:

$$\begin{aligned} E &= \frac{z \sigma_e}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z \sigma_e}{2\epsilon_0} \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

由上述结果可知:

1. 当 $z \ll R$ 时:

$$E \approx \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \quad (2.36)$$

这种情况相当于无穷大带电平板产生的电场, 其电场强度与 z 无关 (即: $E \propto z^0$)。

2. 当 $z \gg R$ 时:

$$E \approx \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right] \right] = \frac{\pi R^2 \sigma_e}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad (2.37)$$

即这种情况下变成了点电荷的电场。

例 2.8

求如图所示的均匀带电细线（长度 l , 线电荷密度 λ_e ）在其中垂线上 $P(r)$ 点产生的电场强度。

解：

如图, 将电荷分成无限多点电荷 λdx 。由对称性可知, P 点水平方向电场强度为 0, 坚直方向的电场强度为:

$$dE = 2dE_1 \cos \theta = 2 \frac{\lambda_e dx}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{r}{r'} \quad (2.38)$$

其中, $r' = \sqrt{r^2 + x^2}$, 因此:

$$E = \int dE = \frac{2\lambda_e r}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{l/2} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.39)$$

令 $x = r \tan \theta$, 则 $dx = \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta}$, 上述积分可化为:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\lambda_e r}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\arctan(l/2r)} \frac{r}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^3 \theta}{r^3} d\theta \\ &= \frac{2\lambda_e r}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\arctan(l/2r)} \frac{\cos \theta}{r^2} d\theta \\ &= \frac{2\lambda_e r}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \theta \Big|_{\pi/2}^{\arctan(l/2r)} \\ &= \frac{2\lambda_e r}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{l}{\sqrt{4r^2 + l^2}} \\ &= \frac{2\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{l}{\sqrt{4r^2 + l^2}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

由上述结果可知:

1. 当 $r \ll l$ 时 (即无限长线电荷):

$$E \approx \frac{2\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.41)$$

可知, 此时 $E \propto r^{-1}$, 其随距离的衰减速度比点电荷要慢。

2. 当 $r \gg l$ 时:

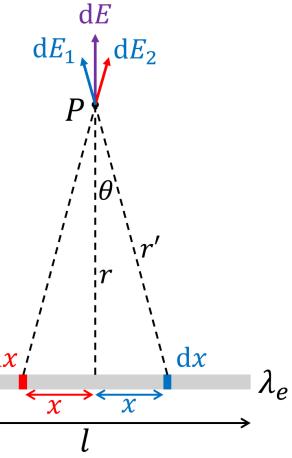
$$E \approx \frac{2\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{l}{2r} = \frac{\lambda_e l}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.42)$$

即这种情况下变成了点电荷的电场。

从上述几个例题中, 我们可以总结出几种典型的带电体系产生的电场 E 随距离 r 的关系:

1. 无限大面电荷: $E \propto r^0$

2. 无限长线电荷: $E \propto r^{-1}$



3. 点电荷: $E \propto r^{-2}$

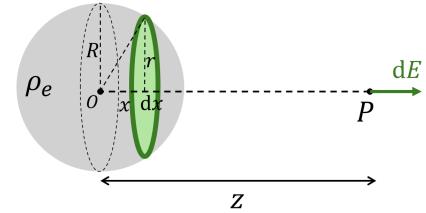
4. 电偶极子: $E \propto r^{-3}$

5. 电四极子: $E \propto r^{-4}$

可以看出, 以点电荷的电场 $E \propto r^{-2}$ 为参考, 诸如电偶极子和电四极子等存在正电荷和负电荷之间有“内耗”的情况会使得产生的场更不容易向远处传播 (长程变短程); 而诸如线电荷和面电荷等同类电荷的分布会使得产生的场随距离衰减得更慢 (“团结就是力量”), 这种增强效应有些类似于影院中使用的呈一条直线分布的柱型音响 (音柱), 这类音响常被作为远距离声音传播设备。

例 2.9

求如图所示的均匀带电球 (半径 R , 体电荷密度 ρ_e) 在其球外距离球心 z 处的一点 $P(z)$ 处的电场强度。



解:

如图所示, 将带电球切分为无穷个与 OP 垂直的均匀带电圆盘, 在2.35式中, 用 $\rho_e dx$ 代替 σ_e , 用 $\sqrt{R^2 - x^2}$ 代替 R , 用 $z - x$ 代替 z , 可得在 x 处厚度为 dx 的圆盘在 P 处产生的电场强度为:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\rho_e dx}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z - x}{\sqrt{R^2 - x^2 + (z - x)^2}} \right] \\ &= \frac{\rho_e dx}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z - x}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zx}} \right] \\ &= \frac{\rho_e dx}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z - x}{\sqrt{2z} \sqrt{\frac{R^2 + z^2}{2z} - x}} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

令 $a = \frac{z^2 + R^2}{2z}$, $b = z - a = \frac{z^2 - R^2}{2z}$, 可得:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\rho_e dx}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{a - x + b}{\sqrt{2z} \sqrt{a - x}} \right] \\ &= \frac{\rho_e dx}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2z}} \left[\sqrt{2z} - \sqrt{a - x} - \frac{b}{\sqrt{a - x}} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

于是:

$$\begin{aligned} E &= \int dE = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2z}} \int_{-R}^R \left[\sqrt{2z} - \sqrt{a - x} - \frac{b}{\sqrt{a - x}} \right] dx \\ &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2z}} \left[\sqrt{2z}x + \frac{2}{3}(a - x)^{3/2} + 2b\sqrt{a - x} \right] \Big|_{-R}^R \\ &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2z}} \left[\sqrt{2z} \cdot 2R - \frac{2}{3}[(a + R)^{3/2} - (a - R)^{3/2}] - 2b[\sqrt{a + R} - \sqrt{a - R}] \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

其中,

$$a+R = \frac{(z+R)^2}{2z}, \quad a-R = \frac{(z-R)^2}{2z} \quad (2.46)$$

$$(a+R)^{3/2} - (a-R)^{3/2} = \frac{(z+R)^3 - (z-R)^3}{2z\sqrt{2z}} = \frac{2(R^3 + 3z^2R)}{2z\sqrt{2z}} \quad (2.47)$$

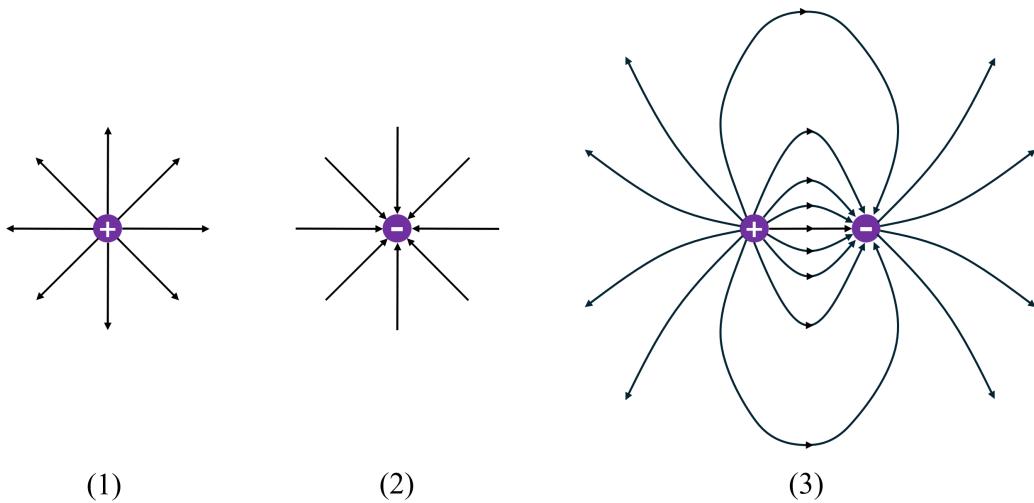
$$\sqrt{a+R} - \sqrt{a-R} = \frac{2R}{\sqrt{2z}} \quad (2.48)$$

因此,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0\sqrt{2z}} \left[\sqrt{2z} \cdot 2R - \frac{2}{3} \cdot \frac{2(R^3 + 3z^2R)}{2z\sqrt{2z}} - 2b \frac{2R}{\sqrt{2z}} \right] \\ &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0\sqrt{2z}} \left[\sqrt{2z} \cdot 2R - \frac{2}{3} \cdot \frac{(R^3 + 3z^2R)}{z\sqrt{2z}} - \frac{z^2 - R^2}{z} \frac{2R}{\sqrt{2z}} \right] \\ &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0\sqrt{2z}} \frac{12z^2R - 2(R^3 + 3z^2R) - 6(z^2 - R^2)R}{3z\sqrt{2z}} \\ &= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \frac{4R^3}{6z^2} \\ &= \frac{\rho_e \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 z^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

从上面的结果可以看出, 电荷量 q 的均匀带电球在球外的电场, 等价于位于球心的电荷量为 q 的点电荷在球外产生的电场。

为了直观的显示电场的方向和大小, 我们往往使用电场线: 电场线是一堆带箭头的曲线, 这些曲线上每一点的切线方向和该点的电场强度方向一致, 而且垂直电场线的横截面积上场线的条数 (即电场线的“密度”) 与电场强度的大小成正比。静电场的电场线是连续的, 且从正电荷 (或无穷远处) 出发, 进入负电荷 (或无穷远处); 且由于电场力是保守力 (我们接下来的章节会学习), 我们还知道电场线是不闭合的。下面是常见带电体系的电场线示意图: (1) 正电荷; (2) 负电荷; (3) 电偶极子。



2.4 高斯定理

从上一节的几个例题我们可以看出, 计算带电体系产生的电场往往需要用到复杂的积分, 而对于一些存在对称性的电荷分布 (比如上一节例题中计算过的带电球、无穷大面电荷、无穷长线电荷等) 产生的电场, 我们又发现其最终计算结果往往又非常的简洁且也具有很强的对称性。对于这种存在对称性分布的电荷体系, 本节将讨论一种极为有效的计算方法, 即利用静电场的高斯定理来计算。

本章中所学习的电场, 是一个矢量场, 它与我们在第一章学习的一般的矢量场一样, 电场 \vec{E} 也有线积分、面积分 (即电场的通量), 以及散度和旋度。本节将讨论并计算电场的通量和散度以及它们的物理意义。

首先我们来看一下电场的散度, 即 $\nabla \cdot \vec{E}$, 由于电场的叠加原理, 以及计算散度时有 $\nabla \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \nabla \cdot \vec{E}_1 + \nabla \cdot \vec{E}_2$ 这一分配律, 因此我们只需要计算点电荷的电场的散度就可以计算出任意带电体系的电场的散度:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \nabla \cdot \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \nabla \cdot \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.50)$$

或者写成连续电荷分布的积分形式:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 \quad (2.51)$$

最终我们需要计算的, 是形如 $\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$ 的矢量场的散度, 由于矢量场的散度与坐标系的选取无关, 因此这里可以选取以 \vec{r}_i 为原点的坐标系进行散度的计算, 即

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.52)$$

利用上一章里习题1.8的结论, 即散度在球坐标系中的表达式:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (2.53)$$

可得:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{1}{r^2})}{\partial r} + 0 + 0 = \frac{1}{r^2} \times 0 = 0 \quad (\vec{r} \neq 0) \quad (2.54)$$

需要注意的是, 上式 $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ 只对 $\vec{r} \neq 0$ 的点成立, 因为, 当 $\vec{r} = 0$ 时, 根据散度的定义:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}}{dV} \quad (2.55)$$

以原点为中心, 取半径为 r 的球, 球面 \vec{S} , dV 为球的体积, 则由对称性可计算上面的面积分:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint_{\vec{S}} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}}{dV} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r}{r^3} 4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{r^3} \\ &= \infty\end{aligned}\quad (2.56)$$

即:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0, \\ \infty, & \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

此外, 根据矢量场的高斯定理 (定理1.2), 我们还有:

$$\iiint_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV = \iint_{\vec{S}} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} \quad (2.58)$$

令 \vec{S} 为以原点为球心的球面, 则:

$$\iiint_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV = \frac{r}{r^3} 4\pi r^2 = 4\pi \quad (2.59)$$

数学上, 我们用 δ 函数来表达类似于 $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ 的函数, 三维空间中的 δ 函数定义如下:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0, \\ \infty, & \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

且:

$$\iiint_{\text{all-space}} \delta(\vec{r}) dV = 1 \quad (2.61)$$

δ 函数还有一个筛分性, 即:

$$\iiint_{\text{all-space}} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3 \vec{r} = f(\vec{r}_0) \quad (2.62)$$

因此, $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ 也可以写成:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\vec{r}) \quad (2.63)$$

现在, 我们再回到电场的散度, 即2.50式, 该式可以写成:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.64)$$

因此, 将矢量场的高斯定理应用到电场中, 我们有:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \\
 &= \iiint_V \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\varepsilon_0} \iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\vec{r}_i \text{ in } V} q_i \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

其中, Q_{in} 是闭合曲面 \vec{S} 内部电荷总量。

对于连续分布的电荷的情况, 类似的我们有:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.66}$$

对应的矢量场的高斯定理为:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \\
 &= \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

这样, 我们便得到了电场的高斯定理:

定理 2.1 电场的高斯定理

真空中的静电场 \vec{E} 通过任意闭合曲面 \vec{S} 的通量, 等于该闭合曲面所包围的体积内的电荷量的代数和的 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍, 即:

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \tag{2.68}$$

上式对应的微分形式为:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.69}$$

也就是说, 只有闭合曲面内部的电荷对总通量有贡献, 闭合曲面外部的电荷产生的电场在闭合曲面上的净通量永远为 0。这一特点, 是由电场强度的平方反比形式 (即 $\frac{\vec{r}}{r^3}$) 决定的, 由于这一平方反比与计算面积时出现的 r^2 刚好抵消, 导致点电荷产生的电场在任意曲面上的通量只跟这个曲面对点电荷所张开的立体角大小有关 (即 $\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = d\Omega$), 而跟这个曲面的位置无关。当点电荷位于闭合曲面外部时, 闭合曲面刚好有两个相对点电荷所张开立体角相等但法向

方向相反的曲面组成，因而点电荷产生的电场在这个闭合曲面的电场净通量为 0.

高斯定理是库仑定律和叠加原理的必然结果，也是麦克斯韦方程组的第一个方程。实际应用中，我们常用高斯定理来计算具有对称性电荷体系所产生的电场。

例 2.10

求均匀带电球（半径 R ，总电荷 q ）产生的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 。

解：

如图，令 \vec{S} 为以 O 为球心、半径为 r 的球面。由对称性， \vec{S} 上所有的点的电场的大小相同，且方向与 \vec{S} 的法向平行。由高斯定理：

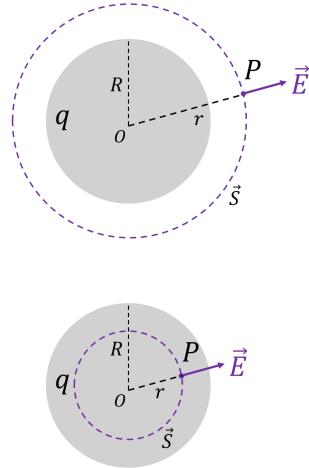
$$\begin{aligned} \iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow 4\pi r^2 E &= \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{Q_{\text{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

1. 当 $r \geq R$ 时， $Q_{\text{in}} = q$ ，

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (2.70)$$

2. 当 $r < R$ 时，

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= q \frac{r^3}{R^3} \\ E &= \frac{q \frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \end{aligned} \quad (2.71)$$



例 2.11

求均匀带电球面产生的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ （球面半径为 R ，总电荷量为 q ）。

解：

取以带电球面的球心为球心、半径为 r 的球面 \vec{S} 。由对称性， \vec{S} 上各点的电场大小相等，方向与 \vec{S} 的法向平行。由高斯定理：

$$\begin{aligned} \iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow 4\pi r^2 E &= \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{Q_{\text{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

1. 当 $r < R$ 时, $Q_{\text{in}} = 0$, $E = 0$

2. 当 $r > R$ 时, $Q_{\text{in}} = q$,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.72)$$

3. 当 $r \rightarrow R+$ 时 (即在无限贴近球面外表面的地方),

$$E \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (2.73)$$

我们注意到两个有趣的现象:

1. 球的外表面附近的电场值为无穷大带电平板附近的电场强度的两倍 (无限大带电平板电场为 $E = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$, 见上一节例2.7)。为了直观的理解这个结论, 可以像右图那样想象在一个维度上将一条直线逐渐弯成一个圆圈, 在逐渐弯成圆圈的过程中, 直线两端的电荷在 P 点产生的电场相互抵消的部分越来越少, 即在水平方向分量越来越大, 因此圆圈相比直线在 P 点产生的电场要大, 同样的道理, 球面 (或者下一例题要讲的柱面) 要比平面在 P 点产生的电场要大。

2. 在球面内外两侧电场强度发生了跳跃, 是不连续的, 这是理想面电荷产生的电场的普遍特征, 本质上是因为在点电荷附近电场不连续 (方向发生反向)。由于我们把面电荷当成理想的点电荷在一个平面上铺开一层, 因此跨过这个平面之后电场就会反向。事实上, 如果我们在 P 点附近的球面上挖掉一个小洞, 那在这个小洞两侧的电场就是连续的, 因为这种情况下不需要跨过点电荷。

如右图所示, P 点的电场可以看成小洞里原本的电荷产生的电场与剩余电荷产生的电场的和, 而当 P 点无限接近小洞时, 挖掉的小洞里的电荷在 P 点产生的电场可以看成无限大带电平板产生的电场, 其在内外两侧的电场大小相等符号相反 ($\pm \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$), 而除去小洞之外的电荷在两侧产生的电场都是向外且大小相等 ($\frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$), 两者相加之后导致内侧总电场为 0 而外侧总电场是无限大平板电场的两倍。

例 2.12

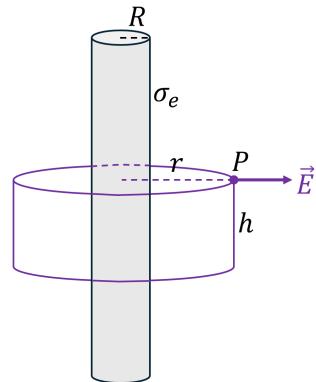
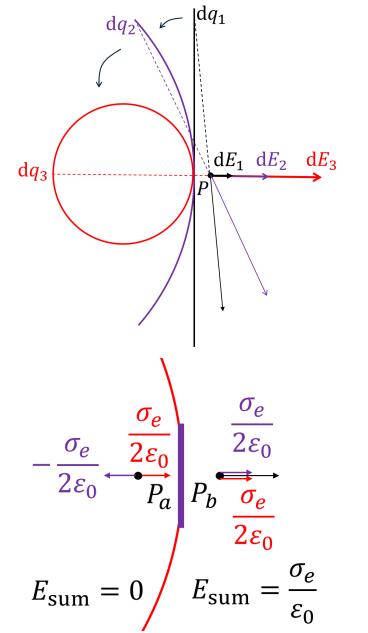
求无限长均匀带电圆柱面 (半径 R , 电荷面密度 σ_e) 产生的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 。

解:

如图, 过 P 点取与带电圆柱面共轴、半径为 r 、高度为 h 的圆柱, 设该圆柱的所有外表面为 \vec{S} :

$$\vec{S} = \vec{S}_{\text{up}} + \vec{S}_{\text{down}} + \vec{S}_{\text{side}} \quad (2.74)$$

由对称性, 上下表面 ($\vec{S}_{\text{up}}, \vec{S}_{\text{down}}$) 上的电场方向与表面的法向垂直, 侧面 (\vec{S}_{side}) 上各点的电



场大小相等且方向与 \vec{S}_{side} 法向平行。因此, 由高斯定理:

$$\begin{aligned}\iint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\vec{S}_{\text{up}} + \vec{S}_{\text{down}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\vec{S}_{\text{side}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow 0 + 2\pi h E &= \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{Q_{\text{in}}}{2\pi\varepsilon_0 rh}\end{aligned}$$

1. 当 $r < R$ 时, $Q_{\text{in}} = 0$, $E = 0$

2. 当 $r > R$ 时, $Q_{\text{in}} = 2\pi Rh\sigma_e$,

$$E = \frac{2\pi Rh\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0 rh} = \frac{\sigma_e R}{\varepsilon_0 r} \quad (2.75)$$

3. 当 $r \rightarrow R+$ 时 (即在无限贴近圆柱面外表面的地方),

$$E \rightarrow \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0} \quad (2.76)$$

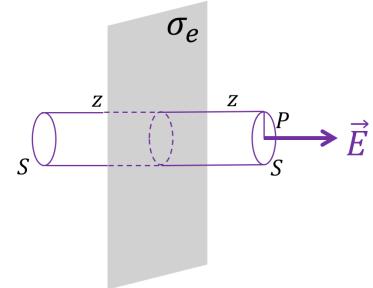
该结果与带电球面的外表面附近的电场强度一致。电场在圆柱面内外两侧发生了从 0 到 $\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$ 的突变。

例 2.13

求无限大带电平板 (电荷面密度 σ_e) 产生的电场 $\vec{E}(z)$ 。

解:

由对称性, 平板外任意一点的电场的方向应当与平板垂直, 且在与平板平行的平面上各点的电场强度应当相等。如图, 以 P 点为原型作平行于平板的一个圆 S , 并以 S 为低做一个高度为 $2z$ 的圆柱, 圆柱的另一个底面在平板的另一侧。对圆柱体表面应用高斯定理:



$$\begin{aligned}\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{\text{left}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{right}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{side}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow ES + ES + 0 &= \frac{\sigma_e S}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\end{aligned} \quad (2.77)$$

即:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \hat{z}, & z > 0, \\ -\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \hat{z}, & z < 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

该电场在 $z = 0$ 处不连续。

例 2.14

均匀带电球体（半径 R , 体电荷密度 ρ_e ）内挖掉一个半径为 r 的空腔，求空腔内的电场。

解：

如图所示，由叠加原理，该带电体系可以看成一个完整的半径为 R 、体电荷密度 ρ_e 的大带电球和一个半径为 r 、体电荷密度 $-\rho_e$ 的小带电球的叠加。

由例2.10可知，均匀带电球在其内部的电场为：

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho_e\vec{r}}{3\epsilon_0} \quad (2.79)$$

因此，大带电球和小带电球在 P 点产生的电场分别为：

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho_e\vec{r}_1}{3\epsilon_0} \quad (2.80)$$

$$\vec{E}_- = \frac{-\rho_e\vec{r}_2}{3\epsilon_0} \quad (2.81)$$

两者矢量叠加便得到了 P 点总的电场强度：

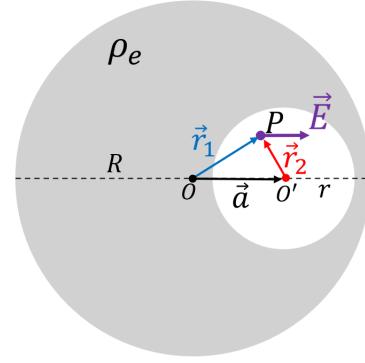
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho_e\vec{r}_1}{3\epsilon_0} + \frac{-\rho_e\vec{r}_2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_e(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_e\vec{a}}{3\epsilon_0} \quad (2.82)$$

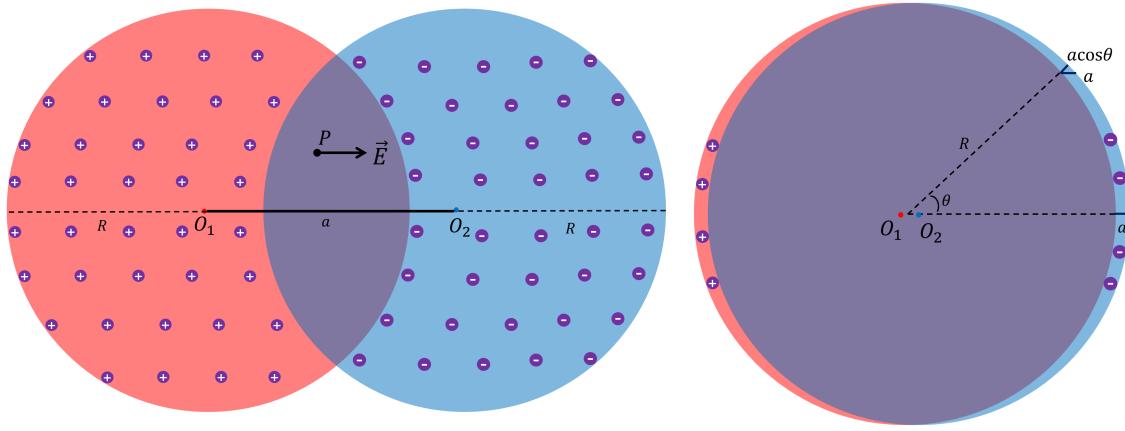
即：空腔内的电场是均匀电场，方向与两圆心组成的矢量同向 ($\vec{a} = \vec{OO'}$)，大小是 $\frac{\rho_e a}{3\epsilon_0}$ 。

上述结论也可以应用到两个半径相同、带等量异号的电荷的球有部分重叠的情况，如下图左图所示，两球的重叠部分净电荷密度为 0，该部分的空间内的电场为：

$$\vec{E} = \frac{\rho_e\vec{a}}{3\epsilon_0} \quad (2.83)$$

当两个球之间的距离逐渐缩小时，重叠部分（电荷空腔）的体积逐渐增大，此时空腔内的电场依然是均匀场。当两个球无限靠近后近似变成一个球时，这个时候只有球的表面有电荷分布，球内部没有电荷且电场为均匀场。如下面右图所示，球表面带电部分的“壁厚”与该处的 θ 角的关系是 $d = a \cos \theta$ ，即这个时候如果简化成面电荷分布，那面电荷密度将呈现 $\cos \theta$ 的分布。也就是说，对于一个表面电荷分布为形如 $\cos \theta$ 的球面电荷系统，其在球内部产生的电场是一个均匀电场。





2.5 环路定理

上一节中，我们计算了电场的面积分及其散度，这一节我们将要计算并讨论静电场的线积分和旋度及它们的物理意义。

首先我们来看一下电场的线积分，即 \vec{E} 沿着某一路径 C 的线积分：

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.84)$$

现在，我们设想有一个电量为 q 的试探电荷，沿着路径 C 从一端运动到另一端，那么，在这个过程中，电场对电荷做的功为：

$$\begin{aligned} A &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C q\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \Rightarrow \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \frac{A}{q} \end{aligned} \quad (2.85)$$

即：静电场沿某一路径 C 的积分，等于电场对沿该路径运动的单位正电荷做的功。

如果路径 C 为闭合路径，那么我们称电场在 C 上的路径积分为静电场的环量 (circulation)：

$$\text{环量} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{A}{q} \quad (2.86)$$

由于此处涉及到矢量场在闭合曲线上的线积分，因此我们在第一章所学习的矢量场的斯托克斯定理（定理1.75）对电场同样成立：

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (2.87)$$

下面，我们来计算任意带电体系产生的静电场的旋度：

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 \quad (2.88)$$

问题转换成了形如 $\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$ 的矢量场的旋度的计算：

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (2.89)$$

由于旋度的计算结果与坐标系的选取无关，因此可以将坐标系平移至以 \vec{r}_0 为中心，即：

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.90)$$

根据上一章中习题1.8得出的旋度在球坐标系中的表达式：

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.91)$$

我们可以得出：

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} (0 - 0) + \hat{\phi} \frac{1}{r} (0 - 0) + \hat{z} \frac{1}{r} (0 - 0) = 0 \quad (2.92)$$

因此，2.88式变成：

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} d^3 \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_0) \cdot 0 \cdot d^3 \vec{r}_0 = 0 \quad (2.93)$$

从而我们可以把电场的斯托克斯定理（2.87式）写成：

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.94)$$

从而我们便得出了静电场的环路定理：

定理 2.2 静电场的环路定理

静电场沿任意闭合路径的积分等于零：

$$\text{环量} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.95)$$

该式的微分形式为：

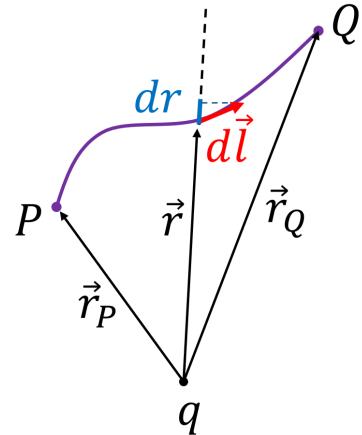
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.96)$$

需要指出的是，环路定理同样也是库仑定律和叠加原理的必然结果。由于静电场沿任意闭合路径的积分等于零，根据我们第一章学习的保守场的讨论，我们知道，静电场的这一性质表明静电场是保守场，即静电场对电荷做的功与电荷的运动路径无关，只与电荷运动的起始和结束点有关。

实际上，关于静电场是保守场的结论，我们也可以直接通过计算静电场对电荷的做功得出。如图所示，在点电荷 q 产生的电场中，让试探电荷 q_0 从 P 点运动到 Q 点，在这个过程中， q 产生的电场对 q_0 做的功为：

$$\begin{aligned} A_{PQ} &= \int_P^Q q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_P^Q \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (2.97)$$

由图中几何关系可知， $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ ，因此：



$$A_{PQ} = \int_P^Q \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) \quad (2.98)$$

可知结果只与试探电荷的起始和结束位置有关，与路径无关，因而点电荷产生的电场是保守场。再根据电场的叠加原理，可知一般带电体系的电场也是保守场。

2.6 电势

在第一章学习梯度定理的时候我们也学习了梯度定理的逆定理，即保守场一定可以写成一个标量场的梯度的形式。上一节我们知道，电荷产生的静电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 是保守场，因此我们也可以定义一个标量场 $\Phi(\vec{r})$ ，使得 $\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\Phi(\vec{r})$ ，例如，我们可以将 $\Phi(\vec{r})$ 定义为：

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.99)$$

即： $\vec{E}(\vec{r})$ 在从无穷远处到 \vec{r} 的任意一条曲线上的线积分，由于 $\vec{E}(\vec{r})$ 是保守场，因此上述定义是唯一的，与选取哪条路径无关。根据积分的定义，我们有：

$$d\Phi(\vec{r}) = \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.100)$$

同时，根据梯度的定义，我们有：

$$d\Phi(\vec{r}) = \nabla\Phi \cdot d\vec{r} \quad (2.101)$$

由上述两式可得：

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \nabla\Phi \cdot d\vec{r} \quad (2.102)$$

上式对任意 $d\vec{r}$ 都成立，因而 $\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\Phi(\vec{r})$ 。

下面，我们来试图理解一下上述定义的 $\Phi(\vec{r})$ 的物理意义，为此，我们不妨再来看一下从点

P 到点 Q 电场对试探电荷 q 所做的功:

$$A_{PQ} = \int_P^Q q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_P^Q \nabla \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q \int_P^Q d\Phi = q\Phi(Q) - q\Phi(P) \quad (2.103)$$

由能量守恒, 电场力对点电荷做的功, 必然等于这个系统某种能量的减少, 对于保守场, 其做功的能量来源是保守场的势能 W , 即:

$$A_{PQ} = W(P) - W(Q) \quad (2.104)$$

比较2.103式和2.104式我们发现, 我们可以把势能函数定义为:

$$W(\vec{r}) = -q\Phi(r) = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.105)$$

需要注意的是, 上述定义我们实际上是把无穷远处定义为势能为零的地方, 实际上势能为零的地方可以任意选取, 因为讨论势能的绝对大小是没有意义的, 只有势能的改变才具有实际意义, 实际应用或研究电路问题时, 我们常常把大地或者仪器外壳等处定义为势能为零的地方。势能不仅与电场的性质有关, 还与试探电荷本身的电荷大小有关。为了表征电场本身的“势”, 我们定义一个只跟电场有关的量, 叫电势 $U(\vec{r})$, 其定义为:

$$\text{电势 } U(\vec{r}) \equiv \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.106)$$

写成微分形式, 上式等价于:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.107)$$

电势的单位是 V (伏特)。有了电势的定义, 电荷 q 在电场中的势能便可以写成:

$$W(\vec{r}) = qU(\vec{r}) \quad (2.108)$$

2.103式也可以写成:

$$A_{PQ} = \int_P^Q q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \left[U(P) - U(Q) \right] \quad (2.109)$$

即: 电场力做功, 等于势能的减少。

根据点电荷电场的形式及2.106, 很容易计算出点电荷 q 产生的电场的电势为:

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.110)$$

由电场的叠加原理, 可得电势的叠加原理, 即带电体系产生的电场在某点的电势为各点电荷在该点的电势的代数和:

$$U(\vec{r}) = \sum_1^N U_i(\vec{r}) = \sum_1^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - vr_i|} \quad (2.111)$$

对连续分布的带电体系则有：

$$U(\vec{r}) = \iiint_{V'} dU_{\vec{r}'}(\vec{r}') = \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.112)$$

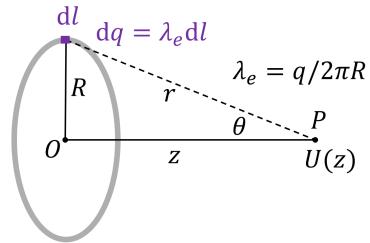
空间中电势相等的平面称为电场的等势面。在第一章学习标量场的梯度的时候我们提到， ∇U 的方向平行于等势面的法向，因此，电场的方向与等势面的法向是平行的（方向相反），且电场的大小等于电势 U 在等势面法向方向的导数的负数。

在求解一个带电系统的电场或电势时，可以通过叠加原理先计算电场然后通过积分得到电势，也可以通过叠加原理先计算电势然后通过微分得到电场。

例 2.15

同例2.6，求如图所示的均匀带电细圆环（半径 R ，总电荷 q ）在其轴线上任意一点 $P(z)$ 处的电场强度。

解：



如图所示，将带电圆环分成无限个点电荷 dq ，该点电荷的电场在 P 点的电势为：

$$dU(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.113)$$

因此，整个带电圆环产生的电场在 P 点的电势为：

$$U(z) = \int dU = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \quad (2.114)$$

由对称性， P 点的电场方向指向 z 方向，且：

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.115)$$

该结果与例2.6中直接通过叠加原理求电场得到的结果相同。

在讨论高斯定理和环路定理的时候，我们都提到过这两个定理是库仑定律和叠加原理的直接结果。实际上，从数学上这个逻辑反过来也是可以推导出来的，即如果已知高斯定理和环路定理，那么我们便可以得出电场的平方反比规律（即库仑定律的形式）和叠加原理的结论。其推导过程也并不复杂，首先，由环路定理的微分形式：

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.116)$$

我们可以得出：

$$\vec{E} = -\nabla U \quad (2.117)$$

再代入高斯定理的微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.118)$$

可得：

$$\nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.119)$$

上述方程，也被称为静电场的泊松方程，其中 ∇^2 称为拉普拉斯算符，有时也用 Δ 来表示：

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.120)$$

求解泊松方程（边界条件 $U(\infty) = 0$ ），便可得到 U 的表达式：

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{\rho(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0 \quad (2.121)$$

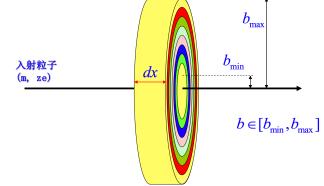
已知该电势，便可使用2.117求出电场：

$$\vec{E} = -\nabla U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{\rho(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} dV_0 \quad (2.122)$$

而上式，便是库仑定律和叠加原理。

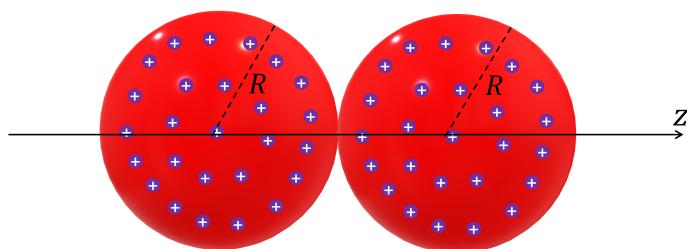
习题

- 2.1:** 如图所示，在例2.2的基础上，假设物质中的原子数密度为 N ，原子数为 Z ，求带电粒子经过单位厚度的物质时损失的能量 $\frac{dE}{dx}$ （提示：注意思考图中的 b_{\min} 和 b_{\max} 该如何取值）。

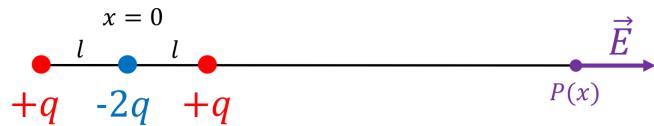


- 2.2:** 在粒子对撞机中，我们一般通过磁场将大量的带电粒子会聚到一个小的束团中，而后与另一个反方向运动的束团发生对撞。如图所示，设有两团质子发生对撞，假设每一团质子都是均匀分布在半径为 R 的球体中，忽略相对论效应（即假定库仑定律适用），求当两团质子刚好发生接触时：

1. 求在 z 轴上何处的质子受到的电场力最大？
2. 假设 $R = 10\mu\text{m}$ ，每一团质子中有 10^{11} 个质子，求上一问中 z 轴上受力最大的质子受到多大的电场力？



2.3: 计算下图中所示的电四极子在其轴线上一点 $P(x)$ 的电场强度 ($x \gg l$)。



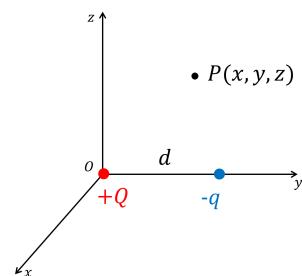
2.4: 求两个带等量异号 (面电荷密度 $\pm\sigma$) 的无限大平行带电平板产生的电场分布。

2.5: 求无限长均匀带电直线 (面电荷密度 λ) 产生的电场的电势。

2.6: 在一个半径为 R 、高度为 $2R$ 的圆柱的中心放置一个电荷为 q 的点电荷, 求通过圆柱侧面的电场强度通量。

2.7: 如图所示, 在原点放置一个正电荷 $+Q$, 在 y 轴上距离原点 d 处放置一负点电荷 $-q$, 已知 $Q > q$, 求:

1. 空间中任意一点 $P(x, y, z)$ 的电势 (以无穷远处为电势零点)。
2. 求电势为零的点组成的等势面, 证明该等势面为一球面, 并求出半径和球心位置。



2.8: 求一个半径为 R 的无限长均匀带电圆柱体 (体电荷密度 ρ_e) 产生的电场。

2.9: 求均匀带电细线 (位于 x 轴上, 长度 l , 线电荷密度 λ_e) 在其所在直线上 (即 x 轴) 各处的电场强度分布, 并画出电场 E 随 x 的变化曲线。根据你的计算, 假如该带电细线是理想导体 (即电荷可以自由移动), 你认为电荷会聚集在何处?

2.10: 请使用先计算电势再用微分计算电场的方法求均匀带电细线 (长度 l , 线电荷密度 λ_e) 在其中垂线上 $P(r)$ 点产生的电场。

第三章 有导体时的静电场

在上一章研究摩擦起电的时候我们提到，摩擦后带电的玻璃棒（或橡胶棒）会吸引轻小的不带电的物体，当时我们给出的解释是当玻璃棒靠近不带电的物体的时候，玻璃棒中的正电荷会吸引不带电的物体中的电子，最终的结果是不带电的物体在靠近玻璃棒的一侧会有部分负电荷聚集，而在远离玻璃棒的一侧会有正电荷聚集。由于库仑定律的距离平方反比关系，靠近玻璃棒的负电荷与玻璃棒之间的相互吸引力会大于远离玻璃棒的正电荷与玻璃棒之间的相互排斥力，因此最终玻璃棒会吸引不带电的物体。

我们注意到，在上述过程中，由于玻璃棒中的电荷产生的电场，原本电中性的物质中的正负电荷进行了重新分布，而且重新分布的结果往往是新分布的电荷产生的电场与原本外加的电场方向相反，也就是说物质中的电场强度被“削弱”了。从这一章开始，我们就要研究这种外加电场对原本电中性的物质中的电荷的重新分配的规律，并试图定量的计算有物质的情况下电场分布。学习在物质中的电场的规律，不仅有利于帮助我们更深入地理解电场的行为（比如与我们后续要学习的导体中的电流及其相关的电磁现象息息相关），同时也是我们解决工程和科学领域中的许多技术问题的基础（比如电场屏蔽、通信技术等）。

要想研究静电场中的物质，我们首先需要弄明白能够运动的电荷（大部分情况下是电子）在物质中的运动规律，即有多少电荷能够运动，运动的速度有多快等，而这些正是表征物质导电性能的关键参数。因此，本章将先带大家一起回顾学习一下物质中的电子分布和运动规律，以及对应的**物质的导电性质**。根据导电性质的不同，物质可以分为导体、半导体和绝缘体。在此基础上，本章将学习**静电场中的导体**在达到**静电平衡**后的电荷、电势、电场等特征，下一章我们将学习静电场中的绝缘体的特征。

定量研究静电场中的物质往往很困难。这是因为，静电场中，一般的计算办法都是给定电荷分布求电场。但是在有物质（比如导体）时，电荷分布是未知的，往往我们只能先猜测最终电场或电势分布，然后去验证我们的猜测。那我们如何来验证我们的猜测是否正确呢？本章将要学习的**静电场的唯一性定理**将会给我们提供一个思路。在大部分情况下，我们的猜测可能往往都是错误的，因此对一般情况我们往往只能借助计算机等手段进行多次猜测直到无限接近正确答案。对于一些简单的导体情况，本章将介绍一个简单的行之有效的我们手工能够进行的猜测方法，也就是所谓的**电镜像法**，这个方法是基于我们上一章所学的一些常见带电体系的电场的特征，来进行猜测并求解一些有导体存在时的电场。

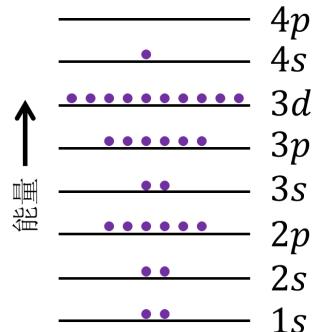
3.1 物质的导电性质

我们日常生活中接触到的物质的很多性质，诸如导电性、磁性、导热性、光学性能等，究其原因都能归结到组成物质的原子这一基本单元的一些性质。原子与原子之间可以有规律的结合在一起组成各种宏观物体，通过化学反应，我们可以很轻易的让不同的原子进行重新组合形成成千上万种不同的宏观物质，但是我们却没法改变组成物质的原子本身。

原子是由带正电的原子核和若干个带负电的核外电子组成的，对于固体而言，原子内部的原子核在宏观上是不会从固体的一侧移动到另一侧的，唯一有可能发生宏观运动进而引起电荷的重新分配的只能是核外电子。电子是自旋为 $1/2$ 的费米子，满足泡利不相容原理，即不同核外电子应处于不同的量子态。表征核外电子的量子态有 4 个量子数，即主量子数 n 、角量子数 l 、磁量子数 m_l 、自旋量子数 m_s 。泡利不相容原理表明在同一体系中，不存在四个量子数完全相同的电子。主量子数 n 相同的电子分布在一个电子层中，根据离原子核的距离分别是第 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 层，第 n 层中最多能容纳 $2n^2$ 个电子（即有 $2n^2$ 个量子态）；电子层根据角量子数 l 又可以再细分为 n 个不同的亚层（ $l = 0, 1, \dots, n-1$ ，分别记作 $s, p, d, f \dots$ ），同一亚层中的电子具有相同的能力（即处于同一能级），一个亚层（即同一能级）中有 $(2l+1)$ 个电子轨道，每个电子轨道最多容纳两个自旋相反的电子。例如，一个铜原子中有 29 个电子，这 29 个电子所在的能级及每个能级所包含的电子数目如下：

$$1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^6 \ 3d^{10} \ 4s^1$$

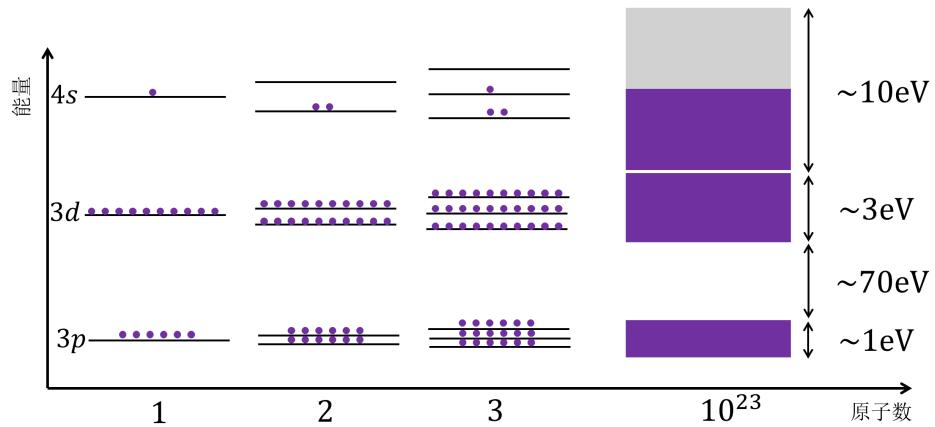
其中， $1s^2$ 表示 $n=1, l=0$ 的亚层中有两个电子（即已经填满了），依此类推，直到 $3d$ 能级的所有亚层都占满了电子，而 $4s$ 能级中有一个电子（它能容纳两个电子），其余亚层则都空着。根据这些亚层的能量大小和间隙，我们可以画出这 29 个电子的能级分布如右图所示。铜原子中的任何一个核外电子，如果想脱离它所在的能级，则必须：



1. 要么获得足够的能量彻底脱离铜原子成为自由电子，要么获得或失去能量去一个能量更高或更低的能级。
2. 所去的那个能级必须是没有被占满的能级，比如一个 $3d$ 能级上的电子在 $4s$ 能级还未被占满的情况下可以在获得足够能量时跳跃到 $4s$ 能级上。

现实生活中我们接触到的物质都是由许多的原子组成的，例如， 1cm^3 的铜里面约有 $N = 10^{23}$ 个铜原子。对于一般固体而言，原子与原子之间是紧密排布，比如相邻铜原子之间的距离与一个铜原子的大小（直径）是相当的，在这种情况下，铜原子中的电子将感知到旁边另一个铜原子的存在，也就是说，不同铜原子之间的电子的波函数是重叠的，而且外层电子的波函数比内层电子的波函数重叠得更加严重。对于由很多个铜原子组成的一个 N 原子系统，泡利不相容原理仍然适用，也就是说要求 $29N$ 个电子都占据不同的量子态，这 $29N$ 个不同的量子态将对应不同的能量。如下图所示，如果将这 N 个铜原子的电子能级从小到大进行排列，我们将看到若干个不同的能带，比如原本一个铜原子对应的 $3p$ 能级将变成很多个靠得非常近的能级形

成的一个能带，且这个能带中不同的量子态将全部被电子占满；而最高能级 $4s$ 对应的能带则将对应的变成另一个能量更高的能带，与 $3s$ 对应的能带不同的是， $4s$ 对应的这个能带中的能级还有一大半是空着没被占据的。由于这些未被占满的能级的存在， $4s$ 中的电子很容易运动到到另一个原子旁边的未被占满的 $4s$ 能级，而且这一运动的速度非常的快（对应的是费米速度，约 $1.6 \times 10^6 \text{ m/s}$ ）。像铜的 $4s$ 对应的能带这样存在大量未被占据的能级的能带，我们称之为导带，而导带下面的那个能带（如 $3d$ 对应的能带）所有的能级都已经被电子占满了，我们把这种能带称为价带。由于铜的导带中同时也被大量的电子占据，这些电子能够轻易的跳到导带中的其他能级，它们能够像气体中的分子那样在样品的整个体积内几乎自由的运动，因此铜便成了很好的导体。



并不是所有的固体都像铜这样，在 N 原子系统组成能带后，价带中的很多能级被电子所占据；有些固体，比如硅、金刚石等，在温度为绝对零度的时候它们的价带中的能级是全空的，比如单个硅原子的最外层的 $3s$ 和 $3p$ 能级在 N 原子系统中（由于 sp^3 轨道杂化）将被分成两个能带，能量较低的那个能带（价带）会被全部占满，而较高的那个能带（价带）则没有任何电子占据，导带和价带之间相隔了 1.12 eV 。由于价带中的能级已经被全部占满了，泡利不相容原理不允许其中的任何一个电子跳到价带中的其他已经被占满的能级，这些电子如果想脱离它所属的原子那它只能跳转到能量比它高 $E_g = 1.12 \text{ eV}$ 的导带中，而光靠电子的热运动是很难满足，比如，对于温度为 T 的这类物体，其导带上的能级被来自价带的电子占据的概率由费米-狄拉克统计给出：

$$p = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \approx e^{-\frac{E-E_F}{kT}} \approx e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

其中 E_F 是费米能级，对硅来说处在能带间隙的的中间；对于室温， $kT \approx 0.026 \text{ eV}$ ，因此：

$$p = e^{-\frac{E_g}{2kT}} \approx e^{-\frac{1.12 \text{ eV}}{2 \times 0.026 \text{ eV}}} = 4.4 \times 10^{-10} \quad (3.1)$$

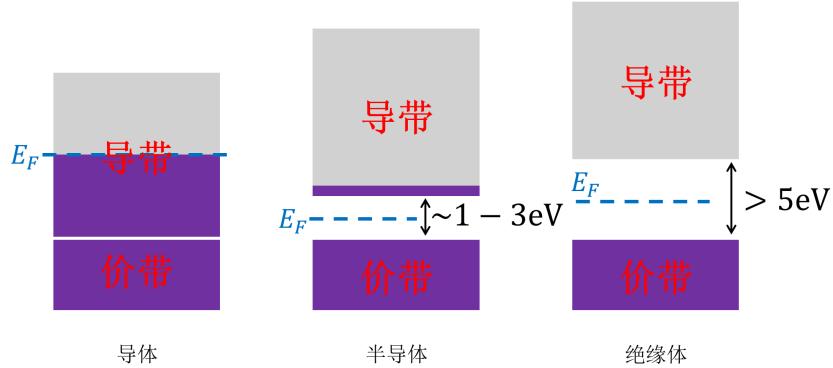
这是一个很小的概率，但是对于有多达 10^{23} 个原子 1 cm^3 的硅来说，就算是上面这么小的概率也会导致可观数量的电子在导带中占据着，只不过要远小于诸如铜这类导体中导带中的电子罢了。我们把这类在绝对零度时导带中完全没有电子占据，但是在室温下有一定数量的电子占据的物体，称为半导体。

值得注意的是，3.2式对能带间隙 E_g 的大小是非常敏感的，比如，对于金刚石， $E_g = 5.5 \text{ eV}$ ，

因此该概率就变成：

$$p = e^{-\frac{E_g}{2kT}} \approx e^{-\frac{5.5\text{eV}}{2 \times 0.026\text{eV}}} = 1.2 \times 10^{-46} \quad (3.2)$$

这是一个极其小的概率，室温下就算是多达 10^{23} 个原子也没有 1 个电子会处在导带中，我们把这类物体称为绝缘体。下图给出了导体、半导体和绝缘体的能带结构以及不同能带中的电子数量示意图。



通过上面的分析我们知道，在导体中存在大量的可以自由运动的电子，而且电子运动的速度很快，宏观上从物体的一端运动 1cm 到另一端只需要约 ns 级别的很短的时间；而在绝缘体中，所有电子都严格的被束缚在其所属的原子周围，没法自由跳转到其他的原子附近，因而理想的绝缘体中不存在能够自由运动的电荷。本章和下一章将分别研究在这两种不同的物质中施加外加电场的情况下其电荷分布及电场的特征。

3.2 静电场中的导体

3.2.1 静电平衡

上一节中提到，导体中存在很多（近似成“无穷多”）能够快速运动的自由电荷（比如固体中的电子），当给导体施加一个外加电场的时候，导体中的电荷会在电场力的作用下发生定向移动，而这一定向移动又会导致导体内电荷分布的改变，从而改变到体内的电场强度，而电场强度的改变又会影响自由电荷的运动，如此进入一个带有反馈机制的循环中。如果导体所处的外部环境是一个静电场，也就是外加电场不随时间改变，那么在经过一段时间的上述循环后（这一时间往往非常短，在 ns 级别），导体内的自由电荷将不再发生定向移动，我们称在这种情况下，电场和导体之间达到了静电平衡 (electrostatic equilibrium)。

处于静电平衡时的导体，具有如下特征：

1. 导体内部电场处处为零，导体表面电场与表面垂直。

这是因为，如果导体内部电场不为零，那么到体内的自由电荷将继续因为受到电场力而发生定向移动，因此静电平衡时导体内部无电场。

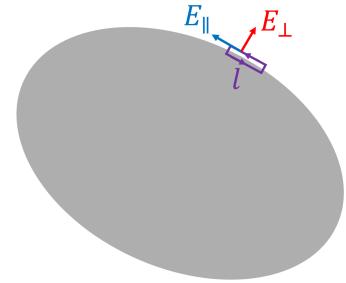
至于导体表面的电场，如果导体表面存在与表面平行的电场，那么在导体表面的自由电荷

将会继续沿着导体表面移动，也不满足静电平衡，只有当表面电场与表面垂直时，导体表面的电荷才无法继续移动，此时，导体表面的电荷除了受到外加电场的作用力外，还会受到来自导体本身的吸引力（比如原子核对电子的吸引力）而达到受力平衡。

当然，我们也可以通过静电场的环路定理来证明导体表面电场与表面垂直，如右图所示，沿导体表面取一个无穷窄的长条形环路 C ，其中长边与导体表明平行（长度为 l ），则根据环路定理：

$$0 = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = E_{\parallel \text{内}} l - E_{\parallel \text{外}} l \quad (3.3)$$

由于导体内部电场处处为零，因此 $E_{\parallel \text{内}} = 0$ ，从而有 $E_{\parallel \text{外}} = 0$ ，即导体表面电场的切向分量为零。



2. 导体是个等势体，导体表面是个等势面。

这个也很好理解，由于导体内部没有电场，因此导体上任意两点之间的在导体内部的路径上的电场的路径积分为零，也就是电势差为零，因而导体是个等势体，导体的表面也是个等势面。

3. 导体内部体电荷密度 ρ_e 处处为零，电荷只分布在导体表面。

导体内部的体电荷密度，可以由高斯定理的微分形式给出：

$$\rho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (3.4)$$

由于导体内部电场处处为零，因而 $\rho_e = 0$ 。

3.2.2 导体表面电场强度

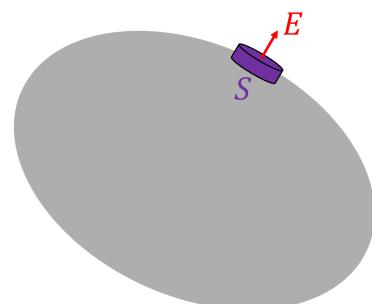
上面提到，处于静电平衡的导体，其表面电场的切向分量为零，那么表面电场的垂直分量是多大呢？为了计算电场的垂直分量，我们可以取如右图所示的圆柱面作为高斯面，该圆柱面的侧面与导体表面垂直，其中一个底面位于导体内部，则由高斯定理：

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E_{\text{外}} S + E_{\text{内}} S + \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_e S}{\varepsilon_0} \quad (3.5)$$

其中，由静电平衡我们知道导体内部电场 $E_{\text{内}} = 0$ ，此外我们再令这个圆柱面的高无限小，则有 $\iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ，因此：

$$E_{\text{外}} S = \frac{\sigma_e S}{\varepsilon_0} \quad (3.6)$$

即导体表面的电场强度为：



$$\vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (3.7)$$

注意到该电场强度有以下一些有趣的现象：

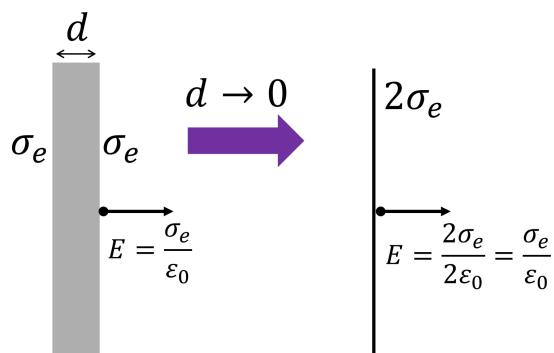
1. 导体表面某一处的电场强度，应该是外加电场加上导体上所有表面电荷共同叠加的结果，但是上式由高斯定理给出的结果却表明电场的值只跟这一点的面电荷密度有关。之所以有这个结论，就是因为导体能够提供“无穷多”的电荷，使得无论外加电场多大，以及无论导体原本带多少电，导体表面的电荷分布最终都会使得让导体内部电场为零，且外表面只有垂直场，且垂直场的场强与该点的面电荷密度存在简单的正比关系。
2. 该电场强度的值与上一章中我们计算得到的无穷大带电平板产生的电场强度类似，但是差了两倍，即导体表面的电场强度是相同面电荷密度的无穷大带电平面产生的电场强度的两倍。这也是由于导体上其他的表面电荷在该点产生的电场叠加后的结果。事实上，如果我们把无穷大带电平面变成无穷大的具有一定厚度的带电导体板，那么在这种情况下，上式3.7依然成立。如下图所示，假设无限大的带电导体板的厚度为 d ，在没有外加电场的情况下，导体板两侧的面电荷相同（假设为 σ_e ），由3.7式，可知导体板表面电场为：

$$E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

当导体板厚度 d 足够小时，它可以等价为一个无限大带电平面，面电荷密度为 $2\sigma_e$ ，由上一章的结论，该无限大带电平面产生的电场为：

$$E = \frac{2\sigma_e}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

可知两种模型给出的结论是一致的。

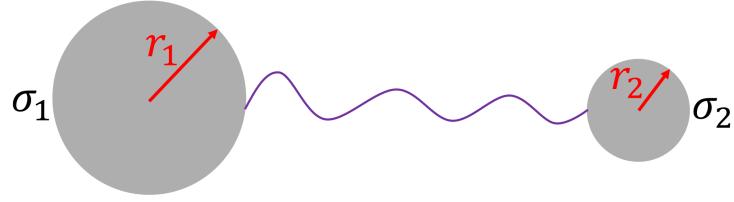


3.2.3 导体表面电荷分布

我们知道，处于静电平衡的导体，其电荷只分布在表面上，那表面电荷的分布有什么规律呢？

我们不妨先看最简单的孤立导体的情况，也就是不存在外加电场或其他导体，在这种情况下，导体上的电荷将会如何分布在其表面呢？为了研究这个问题，我们不妨来看下面这样一个

简单的情况：如图所示，有两个半径分别为 r_1 和 r_2 的导体球通过导线相连，两个球相距无限远，假设两个球表面的面电荷密度分别是 σ_1 和 σ_2 ，求 σ_1 和 σ_2 之间的关系。



上面这个问题可以通过静电平衡时导体是个等势体来求解。由于两个球之间通过导线相连，所以两个球是个等势体，其中球 1 的电势等于球 1 和球 2 上的电荷产生的电场在球 1 处的电势，由于两球相隔无穷远，所以球 2 的电荷产生的电场在球 1 处的电势为零，即球 1 处的电势为球 1 上的电荷在球 1 处产生的电势：

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} \quad (3.10)$$

同理，球 2 的电势为：

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \quad (3.11)$$

由 $U_1 = U_2$ 可得：

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} \quad (3.12)$$

即：

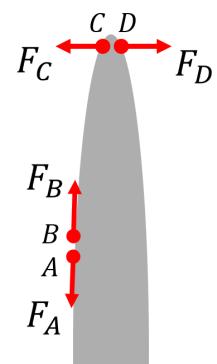
$$\frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{r_1} = \frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{r_2} \quad (3.13)$$

从而有：

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3.14)$$

即半径小（或曲率大）的球其面电荷密度更大。这一结论对于任意形状的孤立导体都是成立的，也就是说电荷更容易聚集在孤立导体的尖端部位。这个现象也可以通过对表面电荷受力分析来理解，如右图所示的一个孤立导体，

即半径小（或曲率大）的球其面电荷密度更大。这一结论对于任意形状的孤立导体都是成立的，也就是说电荷更容易聚集在孤立导体的尖端部位（曲率大）。这个现象也可以通过对表面电荷受力分析来理解，如右图所示的一个孤立导体，在其曲率小和曲率大的地方分别取 A, B, C, D 四个点，处在这四个点上的表面电荷，它们主要受到两类力，一类是来自导体给的吸引力（主要来自原子对电子的束缚力，方向垂直于导体表面指向导体内部，防止电荷脱离导体表面），另一类是来自其他表面电荷的排斥力。



图中标出了不同位置的电荷受到的来自其他表面电荷的排斥力的示意图，由图可知，在表面平坦处的 A, B 两点，电荷附近的其他表面电荷给它的排斥力主要是沿着表面的切向，而在切向没有与之抗衡的来自导体中的原子的力，因此在这个排斥力的作用下自由电荷很容易沿表面切向发生移动，不容易达到静电平衡；而在表面很尖的 C, D 两点，电荷受到的来自其他表面电荷的

排斥力有很大一部分是沿着导体表明的法线方向，而在这个方向刚好有来自导体的吸引力与之抗衡，因而更容易达到静电平衡，因而在这些尖端处更容易聚集表面电荷。由于这个原因，在导体表面的尖端处往往电场比较强，更容易使附近的空气电离而产生放电现象，这一现象也被称为导体的尖端放电现象。比如避雷针往往是由建筑物顶端的一个尖尖的金属做成，就是利用了这个现象，在雷雨天气将建筑物附近的空气提前放电于避雷针附近，并将空气中累积的电荷通过避雷针释放到大地中。

对于一般情况下静电平衡中的导体（比如存在不止一个导体、存在其他电荷、存在空腔、导体接地、或者存在外场等），很多时候我们往往只能运用电荷守恒、静电平衡特征、高斯定理等定量的分析一些简单情况下的电荷分布情况，对一般情况往往不存在解析解（如本章开头提到的利用计算机进行循环猜测和修正得到数值解）。下面，我们通过几个例题，来分析一下几种常见情况下的导体表面电荷分布。

例 3.1

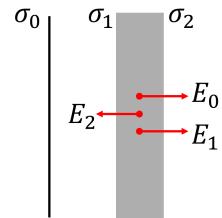
一个面电荷密度为 σ_0 的无限大绝缘板旁边，与之平行放置了一个无限大的原本不带电的导体平板。

1. 求静电平衡后导体板两个表面上的面电荷密度。
2. 若导体平板接地，静电平衡后其两个表面上的电荷又该如何分布？

解：

1. 如右图所示，由对称性，静电平衡后导体平板两侧的电荷一定是均匀分布，设两侧面电荷密度分别为 σ_1 和 σ_2 。由于导体板原本不带电，由电荷守恒，有：

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad (3.15)$$



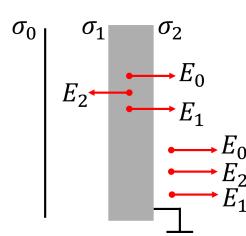
此外，由静电平衡，我们知道导体内部电场为 0，而导体内部的电场是面电荷 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ 在导体内部产生的电场的和，即：

$$0 = E_0 + E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \quad (3.16)$$

联合求解上述两式，可得：

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (3.17)$$

2. 如右图所示，若导体板接地，则接地的作用有两个：一是地球可以给导体板提供无穷多的电荷，因此上面提到的由电荷守恒而得出的导体板两侧面电荷密度之和为零的结论不再成立；二是接地之后导体板的电势与地的电势相等，即电势为零。由对称性，导体板两侧的电荷分布依然是均匀分布，设为 σ_1 和 σ_2 ，因此，导体板右侧空间的电场是均匀电场。



此外，由于导体电势与无穷远处电势相等，电场在从导体出发向右到无穷远处这条路径上的线

积分也必然为零, 因而可知导体板右侧空间的电场必然为零, 即:

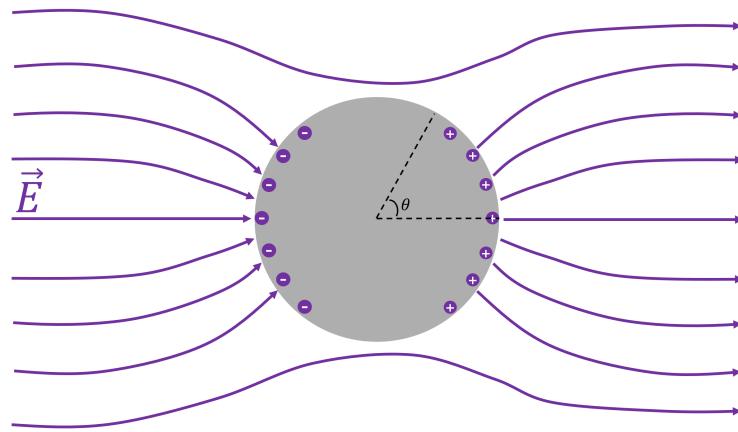
$$0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \quad (3.18)$$

此外, 由于静电平衡, 导体内部电场依然为零, 即3.16式依然成立, 联合3.16和3.18式, 可得:

$$\sigma_1 = -\sigma_0, \quad \sigma_2 = 0 \quad (3.19)$$

例 3.2

如下图所示, 将一个不带电的导体球放入一个均匀外场 \vec{E} 中, 求静电平衡后导体球表面电荷分布。



解:

由静电平衡, 我们知道导体球内部电场为零, 而其内部电场等于外场 \vec{E} 和其自身的表面电荷产生的电场的矢量和, 这意味着表面电荷在球内产生的电场为 $-\vec{E}$, 是个均匀电场。那什么样的球面电荷分布会在球内部产生均匀电场呢? 在第二章中的例2.14的讨论中我们提到, 对于形如 $\cos\theta$ 的球面电荷分布, 其在球内部产生的电场是一个均匀电场。不妨假设球面电荷的面电荷密度分布为:

$$\sigma_e(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta \quad (3.20)$$

我们来计算一下这样一个面电荷在球心产生的电场强度。由电荷分布的对称性, 球心的电场强度必然与 z 轴 (即 \vec{E} 所在的轴) 平行, 球面上一个面元在球心产生的电场在 z 轴的分量为:

$$dE_z = -\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (3.21)$$

其中:

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta, \quad dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.22)$$

因此,

$$dE_z = -\frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.23)$$

积分可得:

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\pi -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta d\cos\theta \end{aligned} \quad (3.24)$$

令 $x = \cos\theta$, 可得:

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_1^{-1} x^2 dx = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \quad (3.25)$$

静电平衡时球内总电场强度为零, 意味着上式 $E_z = -E$, 可得:

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E \quad (3.26)$$

即球面电荷密度分布为:

$$\sigma_e(\vec{r}) = 3\epsilon_0 E \cos\theta \quad (3.27)$$

例 3.3

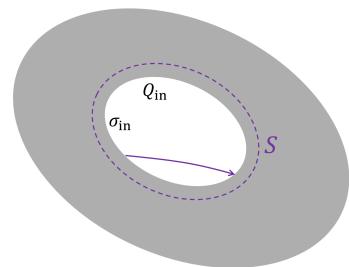
一导体内部有一空腔, 求静电平衡后导体内表面的总电荷 Q_{in} 及面电荷密度 σ_{in} , 以及空腔内部的电场 \vec{E} 。

解:

如右图所示, 在导体内部取一高斯面 S 使其包围导体内表面, 静电平衡时导体内部电场处处为零, 因此, 由高斯定理:

$$Q_{in} = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.28)$$

即导体内表面总电荷为零。



下面我们再来分析空腔内部的电场, 我们判定, 空腔内部电场必定处处为零, 这是因为, 空腔内没有任何电荷, 而电场线只能从正电荷出发到负电荷或无穷远, 因此, 如果空腔内有不为零的电场, 其电场线必定穿过整个空腔从导体内表面的一点 A 到导体内表面的另一个点 B , 如果这样一条电场线存在, 那么点 A 的电势必定大于点 B 的电势: $U_A - U_B = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$, 这与静电平衡时导体是个等势体矛盾, 因此空腔内部电场处处为零。

由于空腔内和导体内电场都处处为零, 因而导体的内表面的面电荷密度也必然处处为零。这是因为, 在导体内表面上取任意一个面元 dS_0 , 取一个穿过 dS_0 的上下底面分别等于 dS_0 的面

积的圆柱体，设该圆柱体的表面为 S ，则由高斯定理：

$$\sigma_{\text{in}} dS_0 = dq_0 = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.29)$$

由于 dS_0 可以任意取，因此 σ_{in} 必定为零。

值得注意的是，上面的分析过程，完全与导体所处的外部电场环境无关，也就是说，不管外部电场环境如何，导体内部以及空腔内部电场为零、导体内表面无电荷这些结论依然成立，也就是导体的外表面的电荷在导体外表面以内的空间产生的电场完美的与外界电场相互抵消了。这一现象，也被称为静电屏蔽现象。利用这一现象，我们经常在一些需要被保护免受外界电场干扰的仪器外面加上金属罩子，也称为法拉第笼（Faraday cage）。

例 3.4

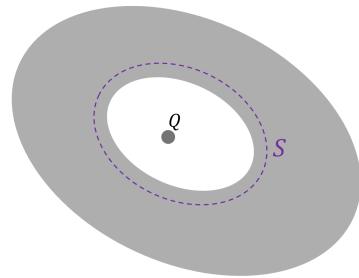
如图所示，一导体内部有一空腔，空腔内有一电荷 Q ，求静电平衡后导体内表面的总电荷 Q_{in} 。

解：

如图取一个在导体内的闭合曲面 S 使其包围导体内表面，静电平衡时导体内部电场处处为零，因此，由高斯定理：

$$Q_{\text{in}} + Q = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.30)$$

即：导体内表面的总电荷为 $Q_{\text{in}} = -Q$



在上一个例题中，我们提到，一个带有空腔的导体，其外表面的电荷分布完美的与外界电场相互抵消，可以起到对导体内部的一个静电屏蔽效果；其实，这个效果反过来说也是成立的，也就是本例题中，带空腔的导体的内表面上的电荷分布在其外部产生的电场完美地与空腔内部电荷产生的电场互相抵消了，在内表面以外的空间，由空腔内的电荷和内表面上的电荷产生的总电场是处处为零的。这个结论我们将在下一节学习完静电场唯一性定理之后很简单就能证明。由于这个现象，我们很容易知道，如果空腔内的电荷 Q 位置发生移动，那么导体外表面的电荷分布以及导体外的电场是完全不受影响的。因此，带空腔的导体壳同样也可以屏蔽其空腔内的电荷对外界的影响，同样起到了一个静电屏蔽的作用。

不过，需要指出的是，由于电荷守恒，在本例题中，如果导体原本不带电，那么由于导体内部电荷 Q 的存在，导体的外表面会有相应的数量为 Q 的电荷分布，这种情况下在导体外是存在电场的，只不过，由于上面提到的静电屏蔽，导体外的电场不会因为空腔内部电荷 Q 的位置的改变而改变，但是会因为 Q 的大小的改变而改变。为了彻底消除空腔内不电荷对导体外的空间的影响，可以将导体接地，这样导体外表面就不会因为电荷守恒而带数量为 Q 的电荷（导体外表面的电荷跑到大地里去了），由于这个时候导体电势为零，在没有外场的情况下导体外表面无电荷，导体外的空间也无电场，且完全不受空腔内部电荷 Q 的大小和位置的影响。

3.3 静电场唯一性定理

上一节提到，对于一般情况而言，当静电场中出现导体时，要想直接求解获得导体中的电荷分布是很难做到的，而没有了电荷分布就无法从库仑定律出发求解电场，这个时候，我们往往只能像例3.2那样依靠经验或者通过计算机循环验证来猜测电荷或电场分布，本节需要回答的一个问题，是我们如何来验证我们的猜测是正确的，或者说如何确保我们通过猜测求解出来的电场就是唯一解。

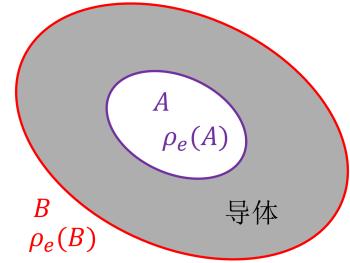
首先让我们回到我们要求解的问题本身，如果没有导体，在给定空间电荷分布的情况下，静电场的问题就是在给定边界条件下求解泊松方程：

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (3.31)$$

例如，在 $U(\infty) = 0$ 的边界条件下，上述泊松方程的解为：

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{\rho(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0 \quad (3.32)$$

当存在导体时，上式必须加上导体中的电荷，而导体中的电荷分布往往是未知而且与空间电场分布有关的，这是问题的难点所在。为了求解这个问题，我们让导体将整个空间划分成除导体以外的若干个区域，而我们关心的，就是这些若干个区域内部的电场求解，在除掉导体之后，这些区域的电荷分布是已知的，而这些区域的边界就是由一个个导体组成的导体表面（包括内表面和外表面）。比如，如右图所示的带空腔的导体将整个空间分成了两个区域：



1. 区域 A ：已知其中电荷分布 $\rho_e(A)$ ；边界是导体的内表面。

2. 区域 B ：已知其中的电荷分布 $\rho_e(B)$ ；边界是导体的外表面和无穷远。

在定义了区域之后，我们的问题是，在牵涉到导体作为区域的边界之一时，我们需要给出什么样的边界条件，就能唯一确定在这个区域内的电场呢？换句话说，在牵涉到导体作为边界时，如果我们前面说的“猜测”出了某个满足区域内电荷分布和其他边界条件的电场解，我们的解满足了导体作为边界的什么条件就能确定这个解是唯一解呢？

为了寻找这样一个关于由导体表面组成的边界的边界条件，我们不妨假设，在某个区域，有两个电势（或电场）解符合这个区域内的电荷分布 $\rho_e(\vec{r})$ （即泊松方程），设这两个解为 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ ：

$$\nabla^2 U_1 = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad \nabla^2 U_2 = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (3.33)$$

并且 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ 都同时满足区域边界上的“某个”边界条件。那么，由叠加原理，可以定义一个新的电势（及与之对应的电场）， $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r})$ ，则由上述泊松方程，我们知道

在该区域内, $U(\vec{r})$ 满足:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3.34)$$

即 $U(\vec{r})$ 对应的场, 是由该区域内没有电荷分布的“假想情况”产生的。如果上面我们说的“某个”边界条件会让区域内的电场唯一确定, 那么我们必须要求在 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ 都同时满足区域边界上的“某个”边界条件时, 会推出在整个区域内 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ 都完全相同 (或相差一个常数) 才行, 也就是 $U(\vec{r})$ 在这个区域内要处处为零 (或者为常数)。

现在的问题变成了, 在一个没有电荷分布的区域这样一个“假想情况”中, 什么样的边界会使得这个区域内部 $U(\vec{r})$ 处处为零呢? 一个很显然的特征就是, 如果 $U(\vec{r})$ 在某个区域内处处为零, 那么这个区域内肯定没有电场, 否则的话如果存在电场线那么电场线上任意两点的电势肯定不一样, 就不可能 $U(\vec{r})$ 处处为零。这句话反过来讲同样也是成立的, 即如果电场处处为零, 那么电势也处处为零 (或者为常数)。

现在的问题又进一步变成了, 在区域内部处处没有电荷的情况下, 什么样的边界条件, 会使得这个区域内部的电场处处为零呢? 我们不妨先反过来问一下, 如果电场处处为零, 那么边界会是什么样子的呢? 至少有下面一些特征:

1. 边界肯定电势处处为零 (或等势), 因为从边界的任意一点 A 经过区域到达 B 的这条路径上没有电场
2. 边界上肯定没有面电荷, 否则的话导体表面的面电荷会在区域内部靠近面电荷的地方产生大小为 σ_e/ϵ_0 的电场。

那么, 我们现在把逻辑反过来, 也就是, 在区域内处处没有电荷的情况下, 如果边界上电势处处相等, 或者边界上处处无面电荷, 那么区域内电场是否处处为零呢? 答案是肯定的, 理由如下:

1. 已知边界上电势处处为零 (或等势): 如果此时区域内存在非零电场, 由于电场线又只能从有电荷的地方产生, 而区域内部处处本身没有电荷, 那么电场线只能从边界上的一点 A 穿过区域跑到边界上的另一点 B , 这种情况下 A 的电势必然大于 B , 因此在边界处处等势的情况下区域内不可能有非零电场。注意这个边界条件对所有边界都适用, 不要求边界是由导体表面组成的。
2. 已知边界是由等势面组成 (如导体表面) 且边界上处处无面电荷 (或者组成边界的导体总面电荷为零): 如果此时区域内存在非零电场, 与上一个分析相同, 这个电场线只能从边界上的一点 A 穿过区域跑到边界上的另一点 B , 而由于边界是由等势面组成, 因此 A 和 B 必然属于两个的等势面 (如两个不同的导体的表面), 且 A 所属的导体电势大于 B 所属的导体, 也就是说组成这个区域的边界的各个导体电势不是完全相同, 那必然存在电势最大的那个导体, 设为导体 1, 则在这个区域内, 所有的电场线必然是从导体 1 出发, 指向其他导体, 也就是说导体 1 表面只有正电荷而没有负电荷, 这与区域的边界上上处处无面电荷 (或者组成边界的导体总面电荷为零) 矛盾。

让我们来总结一下我们上面的分析过程, 我们证明, 在一个电荷处处为零的区域内, 如果已知区域的边界上电势处处为零, 或者边界上处处没有面电荷 (或者组成边界的导体总面电荷为零), 那么这个区域内的电场必定处处为零, 或者说电势处处相等。据于此, 我们知道, 对于

我们上面通过叠加原理定义的 $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r})$, 如果产生的区域 $U(\vec{r})$ 处处无电荷, 且已知边界上 $U(\vec{r})$ 处处为零或者边界上处处无面电荷 (或者组成边界的导体总面电荷为零), 那么 $U(\vec{r})$ 在整个区域必定处处为零, 也就是说: 如果对于给定电荷分布的一个区域, 如果存在两个解 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$, 这两个解都满足区域内的泊松方程 (即满足电荷分布), 且 $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ 都满足如下任意一个边界条件:

1. 给定边界上的电势
2. 给定边界上的面电荷分布 (或者组成边界的导体的总面电荷)

那么, $U_1(\vec{r})$ 和 $U_2(\vec{r})$ 在这个区域内必然处处相等 (或相差一个常数), 而这, 就是静电场的唯一性定理:

定理 3.1 静电场的唯一性定理

设在给定的区域内电荷分布确定, 则给定下列边界条件之一, 区域内的静电场的解就是唯一的:

1. 给定边界上的电势分布;
2. 已知各边界面为等势面 (如导体表面), 且给定边界面上电势梯度分布 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 或者电荷面密度分布 σ_e , 或者如果某个边界面是导体的表面的情况下给定导体的表面电荷总数 Q ;
3. 一部分边界按 1 给出, 另一部分边界按 2 给出。

利用唯一性定理, 我们便能更加容易理解上一节中讲到的静电屏蔽现象。比如, 对于一个存在空腔的导体:

1. 对于空腔内部这个区域, 其边界是导体的内表面, 在区域内的电荷分布给定的情况下, 由高斯定理可以确定导体内表面的总电荷, 也就是给定了上述唯一性定理的第 2 个边界条件, 由唯一性定理, 此时空腔内的电场就唯一确定了, 空腔内表面以外的任何电荷/外加电场都不会影响空腔内部这个区域的边界条件, 因此空腔内部的电场不受外面的影响, 从而达到了屏蔽外界电场对空腔内的影响的作用。
2. 对于导体外部这个区域, 其边界是导体的外表面和无穷远处, 其中无穷远处这个边界的边界条件由电势为零给出, 而导体外表面的边界条件取决于导体球是否接地: 如果导体球不接地, 那么导体外表面的总电荷是这个边界的边界条件, 此时只要空腔内部的总电荷数量不变, 那么无论空腔内部电荷位置分布发生怎样的变化都不会影响这个边界条件, 由唯一性定理, 导体外面这个区域的电场都不发生改变; 如果导体球接地, 那么导体外表面的电势为零是这个边界的边界条件, 此时无论导体内部电荷总数或者电荷分布发生怎样的变化都不会影响这个边界条件, 导体外面这个区域的电场都不会发生改变, 从而达到了屏蔽空腔内部电场对导体外的影响的作用。

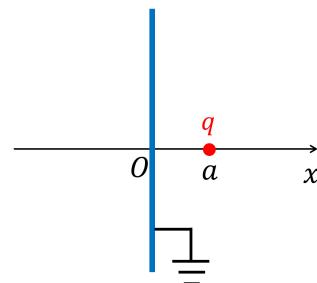
3.4 电镜像法

对于上一个定义个空间中的某个区域，若这个区域的边界是导体的表面，那么由于导体表面是个等势面，对该区域的电场的求解问题就变成了求解一个电场，使得它在区域内有电荷的地方满足泊松方程、同时电场在给定的特定形状的边界是个等势面。只要我们能够找到这样一个电场，那么由唯一性定理，我们找到的这个电场就是唯一解。现实世界中，导体的表面形状千奇百怪，要想找到一个具有特定形状的等势面的电场不是一件简单的工作，但是对于一些特殊形状的等势面，我们可以利用在第二章中已经求解过的一些带电体系的等势面的特征来进行猜测。比如，下面这样一个简单例子：

例 3.5

如图，点电荷 q 位于 $x = a$ 处，在 $x = 0$ 的平面上有一块无穷大的接地导体平板，求：

1. $x > 0$ 的空间各处的电场强度。
2. 导体平板上各处的面电荷密度及总电荷。

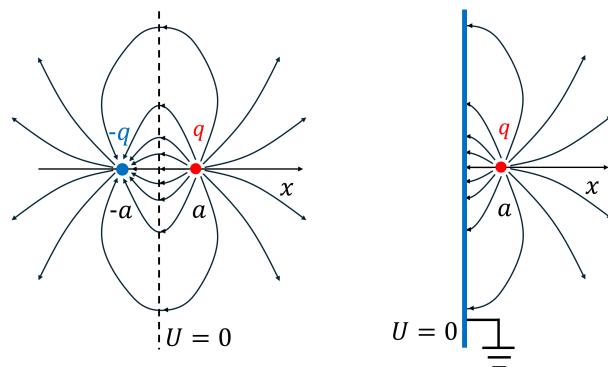


解：

1. 这里我们关心的区域，是 $x > 0$ 的所有三维空间，也就是从导体平板到无穷远处。这个区域由导体平板和无穷远处作为边界，边界上电势处处为零。现在我们需要找的，是从点电荷 q 发出的一个电场，使得电场在 $x = 0$ 处电势为零。如果我们回想一下在第二章计算过的带电体系的电场，去寻找存在一个等势面为平面的情况，会发现电偶极子的中垂面刚好是一个等势面。如下面的左图，假如在 $x = -a$ 处有一个电荷为 $-q$ 的电荷，并且我们把 $x = 0$ 处的导体平面去掉，那么由 $-q$ 和 q 这对电荷产生的电场 \vec{E} 为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} - \frac{q(\vec{r} + \vec{a})}{|\vec{r} + \vec{a}|^3} \right) \quad (3.35)$$

其中， $\vec{a} = (a, 0, 0)$ 。我们注意到，这样一个电场，她在 $x = 0$ 处刚好是一个等势面且 $U = 0$ （无穷远处为电势零点）。也就是说，下面左图中的电场，在 $x > 0$ 这个区域，完全满足右图中 $x > 0$ 区域的电荷分布，而且满足其边界条件（即 $x = 0$ 是等势面且与无穷远处电势相等）。



因此，我们上面通过猜测得到的电场分布（即3.35式），对于题目中所求的 $x > 0$ 这个区域，满

足了其给定的电荷分布和边界条件，由唯一性定理，我们找到的这个电场分布，就是这个区域的唯一解。

2. 下面我们求导体平面上的面电荷密度。由3.8式可知，导体平面上任意一点 \vec{r} 的面电荷密度为：

$$\sigma_e(\vec{r}) = \varepsilon_0 E \Big|_{x=0} = \varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-2q}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) = \frac{-qa}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.36)$$

总电荷为：

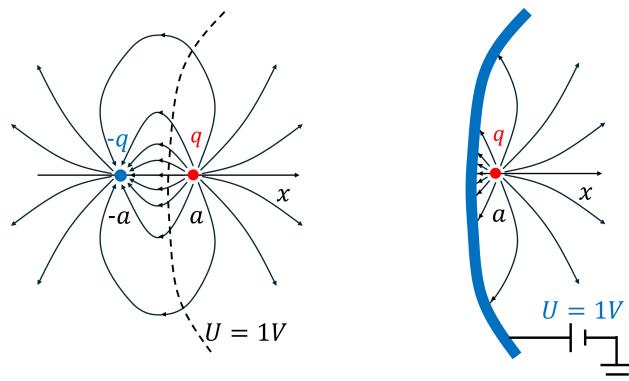
$$Q = \int \sigma_e dS = \int_0^\infty \frac{-qa}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi r dr = -qa \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \Big|_0^\infty = -q \quad (3.37)$$

通过上面这个例子我们可以看到，我们通过联想到已知的带电体系的等势面的形状，来给我们感兴趣的区域内的电荷匹配一个（或多个）额外的电荷（我们称之为“镜像电荷”），这些镜像电荷的引入，最终使得：

1. 不改变区域内的电荷分布（即镜像电荷位置不在我们感兴趣的区域内）；
2. 镜像电荷与区域内的电荷组成的带电体系产生的电场的等势面，与区域的导体边界的形状和位置完全重合，且电势等于导体边界的电势

通过这种方法引入镜像电荷之后，我们计算得出的镜像电荷与区域内的电荷组成的带电体系产生的电场，满足了该区域内的唯一性定理的条件，也就是说，我们为该区域的电场找到了一个解，且这个解是唯一解。我们把这种求解有导体存在时的电场分布的方法，称为电镜像法。这种方法的本质，是借用一个待求解区域之外的一个镜像电荷，来代替区域边界上导体表面的未知电荷对区域内电场的影响，其理论依据便是上一节学习的静电场的唯一性定理。只要引入的镜像电荷不改变待求解区域内的电荷分布，且引入镜像电荷之后能满足求解区域的边界条件，那就能通过这个方法求解出电场。

关于上面这个例题，我们不妨再来想象另一个情形，假如有一个无限大的导体板曲面，其形状和位置如下面的右图所示，我们将该导体板曲面接上一个直流电源使得其电势相对无穷远（或大地）是 1V，并且该导体板的形状和位置与下面的左图中电偶极子产生的电场的 1V 的等势面的形状和位置完全一样，那么在这种情况下，我们依然可以使用位于 $x = -a$ 处的电荷 $-q$ 来代替导体板上的电荷对其右侧区域的电场的贡献。



例 3.6

同上述例3.5，但是导体板不接地，且净电荷为零，请分析导体板两侧电荷分布情况。

解：

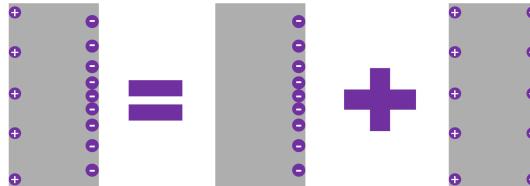
若导体板不接地，为了使导体板所在的平面处于等势面，依然需要如上述例题中求得的感应负电荷：

$$\sigma_e(\vec{r}) = \frac{-qa}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.38)$$

其总量为 $-q$ ，且这些感应负电荷分布在导体板靠近 q 的一侧，这些感应负电荷与 q 形成的带电体系产生的电场在导体板上电势为零。

但是，由于导体板不接地且净电荷为零，所以必然有另外总量为 q 的正电荷分布在导体板两侧。这些正电荷在导体板接地时会被“排斥”到大地中去；在导体板不接地时，正电荷的分布应该使得正电荷产生的电场在导体内部是个等势体，很显然这要求正电荷在导体板两侧对称分布，且由于导体外面的电荷 q 的排斥作用，导体板上的正电荷面密度应该是中间小外围大，此时，若导体板面积无限大，正电荷的面电荷密度趋近于零。

因而，若导体板不接地且净电荷为零，其两侧面电荷分布将如下图所示，其等价于上一例题求解得出的右侧的负电荷分布，加上左右对称的正电荷分布。

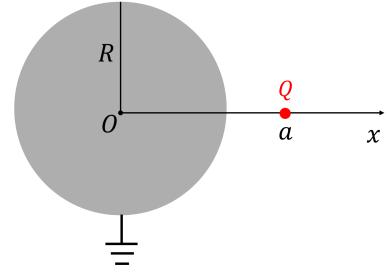


通过上面的例子我们也可以看出，只有极特殊的情况（特殊的边界形状和电势值），我们才能找到镜像电荷来代替导体板上的电荷对电场的贡献。有时候我们往往是先知道了某些带电体系产生的电场的等势面是什么形状，才会反过来联想到对于某些形状的导体我们能够采用相应的镜像电荷使用电镜像法进行求解。比如，在上一章的习题2.7中，我们曾经证明过，两个符号相反、电荷量绝对值不相等的电荷组成的系统，它们的电势为零的等势面是一个球面，且球面刚好将两个电荷隔开（一个在球内，一个在球外）。利用这一个结论，我们便能够对点电荷附近放一个球形导体的情况使用电镜像法进行求解：

例 3.7

如图, 在一个半径为 R 的接地导体球外距离球心为 a 的地方有一个点电荷 Q , 求导体球外的电场。

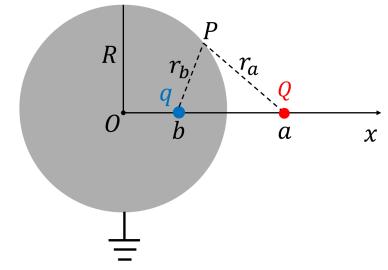
1. 求导体球外的电场;
2. 求导体球面的面电荷密度和总电荷;
3. 若导体球不接地且总电荷为零, 球外电场、球面电荷又如何分布?



解:

1. 上文提到, 两个符号相反、电荷量绝对值不相等的电荷系统的电势为零的等势面是一个球面, 为此, 我们取一镜像电荷 q , 如右图所示, 设它位于球心与 Q 的连线上且与球心的距离为 b , 则由 Q 和 q 产生的电场在 P 点的电势为:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_a} + \frac{q}{r_b} \right) \quad (3.39)$$



其中, r_a, r_b 分别为 P 到 Q, q 的距离。令 $U = 0$, 得:

$$\frac{Q}{r_a} + \frac{q}{r_b} = 0 \quad (3.40)$$

将任意两个特殊点代入上式 (如 P 位于 x 轴上的两个点), 可得:

$$\frac{Q}{a-R} + \frac{q}{R-b} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{Q}{a+R} + \frac{q}{R+b} = 0 \quad (3.42)$$

解得:

$$b = \frac{R^2}{a}, \quad q = -\frac{R}{a}Q \quad (3.43)$$

事实上, 将上述 b, q 的值代入 $U = 0$ 的等势面的表达式 (3.40式), 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{R}{a} \frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} = 0 \\ & \Rightarrow a\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2} = R\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \\ & \Rightarrow a^2 \left[(x-b)^2 + y^2 + z^2 \right] = R^2 \left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 \right] \\ & \Rightarrow (a^2 - R^2)(x^2 + y^2 + z^2) - R^2(a^2 - R^2) = 0 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{aligned}$$

也就是说, 我们已经得到, 由3.43式定义的镜像电荷和 Q 组成的电荷系统产生的 $U = 0$ 的等势

面是一个以原点为球心，半径为 R 的球面。

导体外任意一点 P 的电场为：

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_a}{|\vec{r}_a|^3} - \frac{R}{a} \frac{\vec{r}_b}{|\vec{r}_b|^3} \right) \quad (3.44)$$

其中 \vec{r}_a, \vec{r}_b 分别是 Q, q 到 P 的位移矢量。

2. 导体球面电荷密度为：

$$\sigma_e(\vec{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (3.45)$$

其中，电势 U 在球坐标系中的表达式为：

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_a} + \frac{q}{r_b} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta}} - \frac{R}{a} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos\theta}} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

因此，

$$\begin{aligned} \sigma_e(\vec{r}) &= -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \left(-\frac{R - a \cos\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} + \frac{R}{a} \frac{R - b \cos\theta}{(R^2 + b^2 - 2bR \cos\theta)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \left(-\frac{R - a \cos\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} + \frac{R}{a} \frac{R - (R^2/a) \cos\theta}{(R^2 + (R^2/a)^2 - 2(R^2/a)R \cos\theta)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \left(-\frac{R - a \cos\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} + \frac{R}{a} \frac{R - (R^2/a) \cos\theta}{(R^2/a^2)^{3/2} (R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{Q(a^2 - R^2)}{4\pi R (R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

总电荷为：

$$\begin{aligned} q_e &= \int \sigma_e dS \\ &= \int_0^\pi -\frac{Q(a^2 - R^2)}{4\pi R (R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{3/2}} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{Q(a^2 - R^2)}{2a} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta}} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{R}{a} Q \end{aligned} \quad (3.48)$$

当然，计算球面总电荷时，也可以利用球心处电势为零来计算，注意到球面上的电荷在球心产生的电势与电荷具体在球面上何处无关，所以球心处的总电势为：

$$0 = U_O = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3.49)$$

可得：

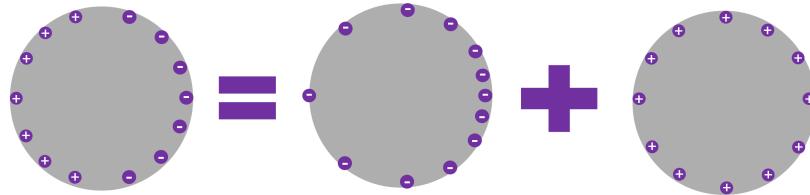
$$q_e = -\frac{R}{a}Q \quad (3.50)$$

3. 若导体球不接地且总电荷为零，此时导体球面仍然为一个等势体，但是电势不一定为零。此时，可以引入两个镜像电荷，其中一个是第1问中的位于 R^2/a 处的负电荷 $-\frac{R}{a}Q$ ，另一个是位于球心处的正电荷 $\frac{R}{a}Q$ ，注意到引入的负镜像电荷与 Q 产生的电场在球面是个等势面，而引入的正镜像电荷产生的电场在球面仍然是个等势面，因此两个镜像电荷加上 Q 在球面产生的电场依然是个等势面。此外，引入的负镜像电荷等价于总量为 $-\frac{R}{a}Q$ 的负电荷以3.47式的形式分布在球面，而引入的正镜像电荷等价于总量为 $\frac{R}{a}Q$ 的正电荷均匀分布在球面，球面上的总电荷刚好为零，满足了唯一性定理的边界条件（给定导体的总电荷量），得到的解便是唯一解。

此时，球外电场分布为两个镜像电荷和 Q 三者产生的电场的叠加：

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\vec{E}_- + \vec{E}_Q) + \vec{E}_+ \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_a}{|\vec{r}_a|^3} - \frac{R}{a} \frac{\vec{r}_b}{|\vec{r}_b|^3} \right) + \frac{RQ\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a |\vec{r}|^3} \end{aligned} \quad (3.51)$$

球面的总面电荷分布等于负电荷分布和正电荷分布的叠加，如下图所示，



面电荷密度分布的具体值为：

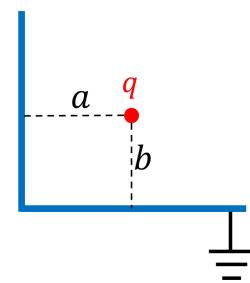
$$\begin{aligned} \sigma_e(\vec{r}) &= \sigma_{e-}(\vec{r}) + \sigma_{e+}(\vec{r}) \\ &= -\frac{Q(a^2 - R^2)}{4\pi R(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} + \frac{Q}{4\pi Ra} \end{aligned} \quad (3.52)$$

习题

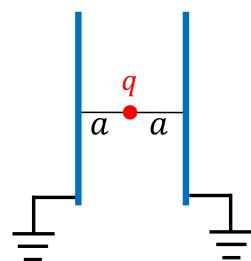
3.1: 接地导体球壳内有一点电荷，球壳内表面半径为 R ，点电荷离圆心距离为 a ，求球壳内电场分布。

3.2: 利用电镜像法，计算均匀电场中放置一导体圆球时圆球外的电场。（提示：利用两个相隔无限远的点电荷在其中心点处产生的电场来模拟均匀电场）

- 3.3: 如图, 在两个正交的无限大接地导体平板附近放置一点电荷 q , q 与两个导体平面的距离分别是 a , b , 求 q 所在的区域的电场分布, 以及两个导体平板上的面电荷分布。



- 3.4: 如图, 在两个无限大接地的平行导体板中间放置一个点电荷 q , 求 q 所在的区域的电场分布, 以及两个导体平板上的面电荷分布。



第四章 电介质

第五章 静磁场

第六章 磁介质

第七章 电磁感应

第八章 电磁波

习题参考答案

1.4:

- 假设标量场 Φ 在空间中某点的等势面的法向与 \hat{r} 平行，则 $\nabla\Phi$ 的大小为：

$$|\nabla\Phi| = \frac{d\Phi}{|d\vec{r}|} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

即这种情况下： $\nabla\Phi = \hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$

- 假设标量场 Φ 在空间中某点的等势面的法向与 $\hat{\phi}$ 平行，则 $\nabla\Phi$ 的大小为：

$$|\nabla\Phi| = \frac{d\Phi}{|d\vec{r}|} = \frac{\partial\Phi}{r\partial\phi}$$

即这种情况下： $\nabla\Phi = \hat{\phi}\frac{\partial\Phi}{r\partial\phi}$

- 假设标量场 Φ 在空间中某点的等势面的法向与 \hat{z} 平行，则 $\nabla\Phi$ 的大小为：

$$|\nabla\Phi| = \frac{d\Phi}{|d\vec{r}|} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

即这种情况下： $\nabla\Phi = \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$

综上，在柱坐标系中， $\nabla\Phi = \hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{\partial\Phi}{r\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ ，因此矢量算符 ∇ 在柱坐标系中的表达式为：

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

1.5: 以 $\nabla \cdot \vec{F}$ 为例：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_z\hat{z} \right) \\ &= \hat{r} \cdot \left(\frac{\partial(F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_z\hat{z})}{\partial r} \right) + \hat{\phi} \cdot \left(\frac{\partial(F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_z\hat{z})}{\partial\phi} \right) + \hat{z} \cdot \left(\frac{\partial(F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_z\hat{z})}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

利用 $\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0, \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0, \frac{\partial \hat{z}}{\partial r} = 0, \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \hat{\phi}, \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial \hat{z}}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial \hat{r}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0$, 可将上式化简为:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{F} &= \hat{r} \cdot \left(\frac{\partial(F_r \hat{r})}{\partial r} \right) + \hat{\phi} \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi})}{\partial \phi} \right) + \hat{z} \cdot \left(\frac{\partial(F_z \hat{z})}{\partial z} \right) \\
 &= \hat{r} \cdot \left(\frac{\hat{r} \partial F_r + F_r \partial \hat{r}}{\partial r} \right) + \hat{\phi} \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{F_r \partial \hat{r} + \hat{r} \partial F_r + \hat{\phi} \partial F_\phi + F_\phi \partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \right) + \hat{z} \cdot \left(\frac{F_z \partial \hat{z} + \hat{z} \partial F_z}{\partial z} \right) \\
 &= \hat{r} \cdot \left(\frac{\hat{r} \partial F_r}{\partial r} \right) + \hat{\phi} \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{F_r \partial \hat{r} + \hat{\phi} \partial F_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{z} \cdot \left(\frac{\hat{z} \partial F_z}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (F_r + \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

1.9: $\nabla U = \frac{-\hat{r}}{r^2}, \quad \nabla \times (\nabla U) = 0$

1.10: $\nabla \cdot \vec{F} = 0, \quad \nabla \times \vec{F} = 0$

1.11: $\nabla \cdot \vec{F} = 0, \quad \nabla \times \vec{F} = 2\hat{z}$

2.1: 由例2.2可知, 碰撞参数为 b 的一个核外电子获得的动能为:

$$\Delta E = \frac{2k^2 z^2 e^4}{m_0 b^2 v^2} \quad (8.1)$$

对厚度为 dx 的物质, 碰撞参数在 b 至 $b + db$ 之间的核外电子总数为:

$$dN_e = NZ dV = NZ(2\pi b db dx) = 2\pi NZ b db dx \quad (8.2)$$

这些电子获得的总动能为:

$$(dE)_{b \sim b+db} = dN_e \cdot \Delta E = \frac{4\pi NZ k^2 z^2 e^4}{m_0 v^2 b} db dx \quad (8.3)$$

因而, 厚度为 dx 的物质中所有核外电子获得的总动能为:

$$dE = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{4\pi NZ k^2 z^2 e^4}{m_0 v^2 b} db dx = \frac{4\pi NZ k^2 z^2 e^4}{m_0 v^2} dx \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) \quad (8.4)$$

下面讨论 b_{\max} 和 b_{\min} 该如何取值:

- b_{\min} 对应的是经典碰撞理论中的对心碰撞, 此时电子获得的动能为 $2m_0 v^2$, 代入8.1式可得:

$$\frac{2k^2 z^2 e^4}{m_0 b_{\min}^2 v^2} = 2m_0 v^2 \Rightarrow b_{\min} = \frac{kze^2}{m_0 v^2} \quad (8.5)$$

- b_{\max} 对应的是电子获得的能量刚好够它激发或电离（即激发能级 I ）：

$$\frac{2k^2z^2e^4}{m_0b_{\max}^2v^2} = I \Rightarrow b_{\max} = \frac{kze^2}{v} \left(\frac{2}{m_0I} \right)^{1/2} \quad (8.6)$$

代入8.4式可得：

$$\begin{aligned} dE &= \frac{4\pi NZk^2z^2e^4}{m_0v^2} dx \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) \\ &= \frac{4\pi NZk^2z^2e^4}{m_0v^2} dx \ln \left(\frac{2m_0v^2}{I} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

即入射带电粒子单位距离由于上述电离过程的能量变化为：

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{ion}} = -\frac{4\pi NZk^2z^2e^4}{m_0v^2} \ln \left(\frac{2m_0v^2}{I} \right)^{1/2} \quad (8.8)$$

2.3: $\vec{E}(x) = \frac{6ql^2}{4\pi\epsilon_0 x^4}$

2.4: 两平板之间： $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ，方向由正带电平板指向负带电平板；两平板外： $E = 0$

2.5: $U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$ ，其中 r_0 为电势为零的参考点离带电直线的距离（注意不能将无穷远或带电直线选为电势为零的参考点）。

2.6: $\frac{q}{\sqrt{2\epsilon_0}}$

2.7:

1. $U(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}}$

2. 球心： $(0, \frac{d}{1-(q/Q)^2})$ ，半径： $\frac{d}{Q/q-q/Q}$

2.8: 使用柱坐标系，当 $r > R$ 时， $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_e R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$ ；当 $r \leq R$ 时， $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_e r}{2\epsilon_0} \hat{r}$

2.9: 设带电细线的中心在 $x = 0$ 处，则当 $x > l/2$ 时 $E(x) = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{8}{4x-l^2/x}$ ；当 $0 < x < l/2$ 时 $E(x) = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{8}{2l-8x^2}$ ；当 $x < 0$ 时 $E(x) = -E(-x)$ 。电荷会向两端聚集。