

# 基于 MatLab 的 三种群 Volterra 模型数值求解

唐家德

(楚雄师范学院数学系, 楚雄 675000)

**摘要:** 建立三种群间相互依存又相互制约的 Volterra 微分方程模型和改进模型, 并结合模型的 MatLab 数值解, 对模型的稳定性进行了说明。

**关键词:** 种群; Volterra 模型; 数值解; 平衡点

## 0 引言

自然环境中的某一种生物的群体, 生态学上称为种群。如果一个自然环境中有两个或两个以上种群生存, 那么它们之间就要存在着或是相互竞争, 或是相互依存, 或是弱肉强食(食饵与捕食者)的关系, 自然界中不同种群之间还存在着一种非常有趣的既有依存、又有制约的生存方式: 种群甲靠丰富的自然资源生长, 而种群乙靠捕食种群甲为生, 种群丙又靠捕食种群乙为生, 类似的现象还存在很多。下面假设这种情况: 一个岛屿上栖居着食肉爬行动物和哺乳动物, 又长着茂盛的植物, 爬行动物以哺乳动物为食, 哺乳动物又依赖植物生存, 由此建立描述三种群数量变化规律的微分方程模型。

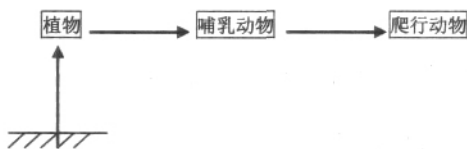


图 1

## 1 基本模型(Volterra 模型)

当植物、哺乳动物、爬行动物在一个自然环境中生存时, 把植物、哺乳动物、爬行动物的数量分别记作  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ 。若不考虑自然资源对植物的限制, 植物独立生存时以指数规律增长, 相对增长率为  $r_1$ , 即  $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1(t)$ , 而哺乳动物的存在使植物的增长率减小, 设减小的程度与捕食者数量成正比, 于是植物的模型为:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)(r_1 - \mu_1 x_2(t)) \quad (1)$$

比例系数  $\mu_1$  反映哺乳动物掠取植物的能力。

哺乳动物离开植物无法生存, 设它独自存在时死亡率为  $r_2$ , 即  $\dot{x}_2(t) = -r_2 x_2(t)$ , 而植物的存在又为哺乳动物提供了食物, 植物的存在相当于使哺乳动物的死亡率降低, 且促使哺乳动物增长, 设这种作用与植物的数量成正比, 则有:

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)(-r_2 + \mu_2 x_1(t)) \quad (2)$$

比例系数  $\mu_2$  反映植物对哺乳动物的供养能力。

哺乳动物又为爬行动物提供了食物, 爬行动物的存在使哺乳动物的增长率减小, 设减小的程度与爬行动物的数量成正比, 于是(2)式右端应减去爬行动物对哺乳动物增长的阻滞作用, 于是哺乳动物的模型应为:

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)(-r_2 + \mu_2 x_1(t) - \mu_3 x_3(t)) \quad (3)$$

比例系数  $\mu_3$  反映爬行动物掠取哺乳动物的能力。

爬行动物离开哺乳动物无法生存, 设它独自存在时死亡率为  $r_3$ , 即  $\dot{x}_3(t) = -r_3 x_3(t)$ , 而哺乳动物的存在又为爬行动物提供了食物, 相当于使爬行动物的死亡率降低, 且促使爬行动物的增长, 于是爬行动物的模型为:

$$\dot{x}_3(t) = x_3(t)(-r_3 + \mu_3 x_2(t)) \quad (4)$$

比例系数  $\mu_3$  反映哺乳动物对爬行动物的供养能力。

方程(1)、(3)、(4)构成植物、哺乳动物、爬行动物三者依存、制约现象的数学模型, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(-r_1 + \mu_1 x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)(-r_2 + \mu_2 x_1(t) - \mu_3 x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)(-r_3 + \mu_3 x_2(t)) \end{cases} \quad (5)$$

收稿日期: 2007-06-18 修稿日期: 2007-08-11

作者简介: 唐家德(1970-), 男, 云南楚雄人, 讲师, 理学硕士, 从事领域为应用数学的教学和研究工作

## 2 模型分析

微分方程组(5)没有解析解,可利用 MatLab 求微分方程组(5)的数值解,通过对数值结果和图形的观察,猜测它的解析解的构造:

记植物、哺乳动物、爬行动物的初始数量分别为:

$$x_1(0)=x_{10}, x_2(0)=x_{20}, x_3(0)=x_{30} \quad (6)$$

为求微分方程组(5)及初始条件(6)的数值解  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  (并作图), 设  $r_1=1, r_2=0.5, r_3=0.6, \lambda_1=0.1, \lambda_2=0.02, \lambda_3=0.06, \mu=0.1, x_{10}=100, x_{20}=40, x_{30}=6$ , 用 MatLab 软件编程序如下:

```
function f=fun1(t,x);
r1 =1;r2 =0.5;r3 =0.6;lambda1 =0.1;lambda2 =0.02;
lambda3=0.06;mu=0.1;
f=[x(1)*(r1-lambda1*x(2));x(2)*(-r2+lambda2*x(1)-mu*x(3));x(3)*(-r3+lambda3*x(2))];
```

```
[t,x]=ode45('fun1',[0,20],[100,40,6]);
subplot(1,2,1)
plot(t,x(:,1),'- ',t,x(:,2),'- ',t,x(:,3),'- ')
legend('x1(t)','x2(t)','x3(t)')
grid
subplot(1,2,2)
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3))
grid
```

可得  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  及相轨线如图 2 所示(数值结果从略)。

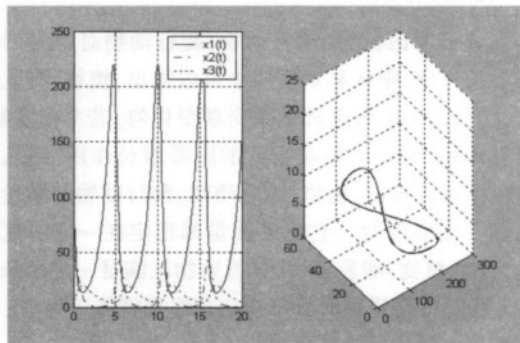


图 2 数值解的图形及轨线图

从图中可以猜测  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  是周期函数, 从数值解近似定出周期为 6.25, 用数值积分可以算出  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  在一个周期的平均值  $\bar{x}_1=71, \bar{x}_2=13, \bar{x}_3=11$

## 3 Volterra 模型的局限性

许多生态学家指出, 多数生态平衡系统都观察不

到 Volterra 模型显示的周期性, 而是趋向某种平衡状态, 即系统存在稳定平衡点。另外, 一些生态学家认为, 自然界里长期存在的呈周期变化的生态平衡系统应该是结构稳定的, 即系统受干扰偏离原来的周期轨后, 其内部制约机制会使系统自动恢复, 如恢复原有的周期和振幅。而 Volterra 模型描述的周期变化状态却不是结构稳定的, 在 MatLab 数值解中, 只要对设参数做微小变动, 其周期解就会改变。

## 4 改进模型

将植物、哺乳动物、爬行动物的数量仍然分别记为, 且数量的演变均遵从 Logistic 规律。当植物独立生存时, 植物的模型为:

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} \right) \quad (7)$$

$r_1$  为植物的固有增长率,  $N_1$  是环境资源容许的植物的最大数量。

而植物又为哺乳动物提供食物, 于是植物的模型应为:

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) \quad (8)$$

$N_2$  是哺乳动物的最大容量,  $\frac{1}{N_2}$  的意义是: 单位数量的哺乳动物(相对  $N_2$  而言) 掠取  $\frac{1}{N_2}$  倍的单位植物量(相对  $N_1$ )。

哺乳动物没有植物的存在会灭亡, 设其死亡率为, 则哺乳动物独立存在时有:

$$\dot{x}_2(t) = -r_2 x_2 \quad (9)$$

植物为哺乳动物提供食物, 于是(9)式右端应加上植物对哺乳动物的促进作用, 哺乳动物的增长又受到自身的阻滞作用, 于是有:

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( -1 - \frac{x_2}{N_2} + \frac{x_1}{N_1} \right) \quad (10)$$

$\frac{2}{N_2}$  的意义是: 单位数量的植物(相对于  $N_1$ ) 供养  $\frac{2}{N_2}$  倍的单位哺乳动物量(相对于  $N_2$ )。

哺乳动物又为爬行动物提供食物, 于是哺乳动物的模型应为:

$$\dot{x}_3(t) = r_3 x_3 \left( -1 - \frac{x_3}{N_3} + \frac{x_2}{N_2} - \frac{x_1}{N_1} \right) \quad (11)$$

$\frac{3}{N_3}$  类似于  $\frac{1}{N_1}$  的解释。

爬行动物没有哺乳动物的存在会灭亡, 设其死亡率为  $r_3$ , 则爬行动物单独存在时有:

$$\dot{x}_3(t) = -r_3 x_3$$

哺乳动物为爬行动物提供食物, 且爬行动物的增长又会受到自身的阻滞增长作用, 于是爬行动物的模

型为:

$$\dot{x}_3(t) = r_3 x_3 \left( -1 - \frac{x_3}{N_3} + \frac{x_2}{N_2} \right) \quad (12)$$

4 的解释类似于 20

方程 (8)、(11)、(12) 构成了植物、哺乳动物、爬行动物三者依存现象的数学模型, 即:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( -1 - \frac{x_2}{N_2} + \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_3}{N_3} \right) \\ \dot{x}_3(t) = r_3 x_3 \left( -1 - \frac{x_3}{N_3} - \frac{x_2}{N_2} \right) \end{cases} \quad (13)$$

利用 MatLab 求微分方程组 (13) 的数值解, 设  $r_1=0.6$ ,  $r_2=5$ ,  $r_3=0.5$ ,  $r_4=2$ ,  $r_1=1$ ,  $r_2=0.5$ ,  $r_3=0.6$ ,  $N_1=1000$ ,  $N_2=300$ ,  $N_3=20$ , 用 MatLab 软件编制程序如下:

```
function f=fun2(t,x);
sigma1=0.6;sigma2=5;sigma3=0.5;sigma4=2;
r1=1;r2=0.5;r3=0.6;
N1=1000;N2=300;N3=20;
f=[r1*x(1)*(1-x(1)/N1-sigma1*x(2)/N2);
r2*x(2)*(-1-x(2)/N2+sigma2*x(1)/N1-sigma3*x(3)/N3);
r3*x(3)*(-1-x(3)/N3+sigma4*x(2)/N2)];
[t,x]=ode45('fun2',[0,15],[900,200,15]);
plot(t,x), grid
```

可得植物、哺乳动物、爬行动物的数量随时间变化的关系图(数值结果略)。

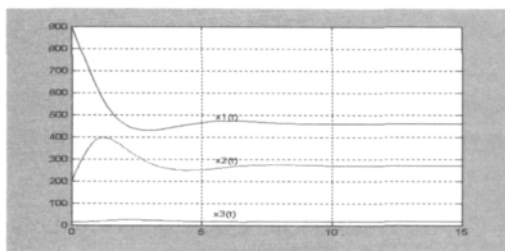


图3 数值解的图形

从图3可看出的变化情况, 随着时间的推移, 都趋于一个稳定值, 从数值解中可近似得到该稳定值为 (460, 270, 16)。

## 5 稳定性分析

根据微分方程组 (13) 解代数方程组:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = r_2 x_2 \left( -1 - \frac{x_2}{N_2} + \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_3}{N_3} \right) = 0 \\ h(x_1, x_2, x_3) = r_3 x_3 \left( -1 - \frac{x_3}{N_3} - \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

得到 8 个平衡点:

$$\begin{aligned} &P_1(0,0,0), P_2(0,0,-N_3), P_3(N_1,0,0), P_4(N_1,0,-N_3), \\ &P_5(0,-N_2,0), P_6\left(0, \frac{N_2(-1+\frac{x_1}{N_1})}{1+\frac{x_1}{N_1}}, \frac{-N_3(1+\frac{x_1}{N_1})}{1+\frac{x_1}{N_1}}\right), \\ &P_7\left(\frac{N_1(1+\frac{x_2}{N_2})}{1+\frac{x_2}{N_2}}, \frac{N_2(-1+\frac{x_2}{N_2})}{1+\frac{x_2}{N_2}}, 0\right), \\ &P_8\left(\frac{-N_1(-1-\frac{x_2}{N_2}-\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}}, \frac{N_2(-1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}}, \frac{-N_3(1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}}\right) \end{aligned}$$

为了达到生态系统平衡, 3 种生物中的某一种不至灭绝, 仅当平衡点中的  $x_1, x_2, x_3 > 0$  时才有实际意义, 从上面 8 个平衡点可以看出, 只有  $P_8$  点才表明植物、哺乳动物、爬行动物在同一环境里相互依存而共生, 下面将分析稳定的条件。

由  $P_8$  点的表达式容易看出, 要使平衡点  $P_8$  有实际意义, 即  $x_1, x_2, x_3 > 0$ , 必须满足下面的条件:

$$1 - \frac{x_1}{N_1} + \frac{x_2}{N_2} + \frac{x_3}{N_3} > 1, \quad 1 - \frac{x_2}{N_2} + \frac{x_3}{N_3} > 1, \quad 1 - \frac{x_3}{N_3} + \frac{x_2}{N_2} > 1$$

我们不难验证前面 MatLab 微分方程数值解所设的参数是满足以上条件的, 并且  $P_8$

$$\left( \frac{-N_1(-1-\frac{x_2}{N_2}-\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}}, \frac{N_2(-1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}}, \frac{-N_3(1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3})}{1+\frac{x_2}{N_2}+\frac{x_3}{N_3}} \right) = (460, 270, 16)$$

这与数值计算的结果相一致, 表明  $P_8$  为稳定平衡点。

## 6 模型评价

若不考虑植物、哺乳动物、爬行动物对自身的阻滞增长作用, 则从基本模型中可以得出, 植物、哺乳动物、爬行动物的数量都是呈周期变化的。若考虑植物、哺乳动物、爬行动物对自身的阻滞增长作用, 则从改进模型可以得出, 植物、哺乳动物、爬行动物的数量当达到一定程度时, 它们的数量都稳定在一定的范围内。说明植物、哺乳动物、爬行动物在满足一定的条件下, 它们相互依存的数量变化最终都将趋于稳定。达到现实生活中的生态平衡。

### 参考文献

- [1]姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型. 北京: 高等教育出版社, 2003(8): 184~201
- [2]王高雄. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2002: 261~267
- [3]陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 科学出版社, 1991

(下转第 34 页)

参考文献

- [1]Ian Davidson, Goutam Paul. Locating Secret Messages in images. KDD 2004: 545~550
- [2]Johnson, Neil F. and Jajodia, Sushil. Steganography: Seeing the Unseen, IEEE Computer, pp.26—34, February 1998
- [3]Johnson, Neil F. and Jajodia, Sushil. Steganalysis of Images

- Created Software, Proceedings on Workshop on Information Hiding, Portland, OR, April 1998. Also Published as Notes in Computer Science, vol.1525, Springer-Verlag, 1998
- [4]边肇琪, 张学工等编著, 模式识别. 第二版, 清华大学出版社, 2002(10)

## Steganalytic Algorithm Based on Color Characteristic of Image

SU Gui-lian<sup>1</sup>, LIU Yan-qing<sup>2</sup>

(1. Department of Computer Science and Technology, Shandong Agricultural Administrators College, Jinan 250100;  
2. Department of Computer, Shandong College of Electronic Technology, Jinan 250014)

**Abstract:** Proposes a steganalytic algorithm based on color characteristic of image, this algorithm is based on color characteristic of 24 bit BMP image. Image's feature vector was extracted on color change of cover-image and stego-image, the set of image is classified using support vector machine, and get a excellent measurement result.

**Keywords:** Steganography; Steganalysis; Support Vector Machine

(上接第 18 页)

## Numerical Solution of Volterra Model Between Three Biological Populations Based on MatLab

TANG Jia-de

(Department of Mathematics, Chuxiong Normal University, Chuxiong 675000)

**Abstract:** Establishes the Volterra differential equation model and the improvement model which between three populations mutually depends on the existence mutually restricts, combines with the MatLab numerical solution to the model, describes the stability of the model.

**Keywords:** Biological Population; Volterra Model; Numerical Solution; Equilibrium Points