DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2013.09.003



【数学与应用数学研究】

# 两种群共生关系的模型分析

孙广才[1]，孙　欢[2]

（1. 渭南师范学院 应用数学研究所，陕西 渭南 714000；2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062）

摘　要：建立了两种群在偏利和偏害共生作用下的数学模型，分析了两种系统的各平衡点的稳定性，得出了两系统各存在唯一的稳定平衡点的结论，并对模型及其平衡点的生物学意义做了讨论.

关键词：种群；数学模型；平衡点

中图分类号：O23　　　文献标志码：A　　　文章编号：1009-5128(2013)09-0005-04

收稿日期：2013-09-02

基金项目：陕西省教育厅专项科研计划项目(2010JK535)

作者简介：孙广才(1958—)，男，陕西大荔人，渭南师范学院应用数学研究所教授，工学博士，主要从事应用数学研究.

## 0　引言

生物种群间存在着相互竞争，其共生关系是极为复杂的. 一般分为两类：一类是互惠互利的，其作用是正相关的；另一类是相互抑制、对抗的，具有负相关作用[1]. 这两类关系的极端情形，即是所谓的互利共生关系与捕食者和被捕食者的关系. 种间的偏利共生关系，是指种间相互作用只对一方有利（偏利），另一方则不受影响[2]. 而偏害共生关系，是指种间相互作用仅使一方受到制约、抑制（偏害），而另一方不受影响[3]. 本文主要对两种群之间偏利、偏害共生作用的数学模型进行研究，对两种模型的平衡点及其对应解的稳定性进行分析，得出相应的结论.

## 1　数学模型

根据种群竞争的 lotka-volterra 模型，建立两种群偏利作用的模型为：

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x\left(\dfrac{k_1 - x + \alpha y}{k_1}\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y\left(\dfrac{k_2 - y}{k_2}\right) \end{cases},$$

其中：所有的参数均为正常数，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$.

在系统(Ⅰ)中，$x$，$y$ 分别为种群 1、种群 2 的数量；$r_1$，$r_2$ 分别为种群 1、种群 2 的自然增长率；$k_1$，$k_2$ 分别为种群 1、种群 2 的环境容纳量；$\alpha$ 表示在种群 1 的环境中，每存在一个种群 2 的个体，对种群 1 的作用效应；$t$ 为时间. 在该竞争作用条件下，种群 1 受益（偏利），种群 2 不受影响.

同理，可建立两种群偏害作用的数学模型为：

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x\left(\dfrac{k_1 - x - \alpha y}{k_1}\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y\left(\dfrac{k_2 - y}{k_2}\right) \end{cases},$$

其中：所有的参数均为正常数，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$.

在系统(Ⅱ)中，$x$，$y$ 分别为种群 1、种群 2 的数量；$r_1$，$r_2$ 分别为种群 1、种群 2 的自然增长率；$k_1$，$k_2$ 分别为种群 1、种群 2 的环境容纳量；$\alpha$ 表示在种群 1 的环境中，每存在一个种群 2 的个体，对种群 1 的作用效应；$t$ 为时间. 在该竞争作用条件下，种群 1 受到抑制（偏害），种群 2 不受影响.

## 2　奇点及其类型

### 2.1　模型(Ⅰ)的奇点及类型

令
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,y)=r_1x\left(\dfrac{k_1-x+\alpha y}{k_1}\right)=0\\ \dfrac{dy}{dt}=g(x,y)=r_2y\left(\dfrac{k_2-y}{k_2}\right)=0\end{cases},\tag{1}$$

容易解出系统(Ⅰ)在第一象限的奇点为:$E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$,$E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$.

对奇点 $E_1(0,0)$,系统(Ⅰ)对应的线性方程组为:$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r_1x\\ \dfrac{dy}{dt}=r_2y\end{cases}$,它的系数矩阵的特征方程为$(\lambda-r_1)(\lambda-r_2)=0$,相应的特征值为$\lambda_1=r_1>0$,$\lambda_2=r_2>0$,故 $E_1(0,0)$为不稳定的结点.

对奇点 $E_2(k_1,0)$,作平移变换$\bar{x}=x-k_1$,$\bar{y}=y$,系统(Ⅰ)化为:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=r_1(\bar{x}+k_1)\left(\dfrac{k_1-\bar{x}-k_1+\alpha\bar{y}}{k_1}\right)=r_1(\bar{x}+k_1)\left(\dfrac{\alpha\bar{y}-\bar{x}}{k_1}\right)\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=r_2\bar{y}\left(\dfrac{k_2-\bar{y}}{k_2}\right)\end{cases},\tag{2}$$

其对应的线性方程组为:$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=-r_1\bar{x}+r_1\alpha\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=r_2\bar{y}\end{cases}$.

它的系数矩阵的特征方程为$(\lambda+r_1)(\lambda-r_2)=0$,相应的特征值为$\lambda_1=-r_1>0$,$\lambda_2=r_2>0$,故$E_2(k_1,0)$为原系统(Ⅰ)的鞍点.

对奇点 $E_3(0,k_2)$,作平移变换$\bar{x}=x$,$\bar{y}=y-k_2$,系统(Ⅰ)化为:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=r_1\bar{x}\left[\dfrac{k_1-\bar{x}+\alpha(\bar{y}+k_2)}{k_1}\right]=r_1\bar{x}\left[\dfrac{k_1+\alpha k_2-\bar{x}+\alpha\bar{y}}{k_1}\right]\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=r_2(\bar{y}+k_2)\left(\dfrac{k_2-\bar{y}-k_2}{k_2}\right)=r_2(\bar{y}+k_2)\left(\dfrac{-\bar{y}}{k_2}\right)\end{cases},\tag{3}$$

其对应的线性方程组为:$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\dfrac{r_1}{k_1}(k_1+\alpha k_2)\bar{x}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=-r_2\bar{y}\end{cases}$.

它的系数矩阵的特征方程为$\left[\lambda-\left(r_1+\dfrac{r_1\alpha k_2}{k_1}\right)\right](\lambda+r_2)=0$,相应的特征值为:$\lambda_1=\dfrac{r_1}{k_1}(k_1+\alpha k_2)>0$,$\lambda_2=-r_2<0$,故 $E_3(0,k_2)$为系统(Ⅰ)的鞍点.

对奇点 $E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$,作平移变换$\bar{x}=x-(k_1+\alpha k_2)$,$\bar{y}=y-k_2$,系统(Ⅰ)化为:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=r_1[\bar{x}+(k_1+\alpha k_2)]\left[\dfrac{k_1-\bar{x}-(k_1+\alpha k_2)+\alpha\bar{y}+\alpha k_2}{k_1}\right]\\ \qquad=\dfrac{r_1}{k_1}[\bar{x}+(k_1+\alpha k_2)](\alpha\bar{y}-\bar{x})\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=r_2(\bar{y}+k_2)\left(\dfrac{k_2-\bar{y}-k_2}{k_2}\right)=r_2(\bar{y}+k_2)\left(\dfrac{-\bar{y}}{k_2}\right)\end{cases},\tag{4}$$

其对应的线性方程组为: $\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=-\dfrac{r_1}{k_1}(k_1+\alpha k_2)\bar{x}+\dfrac{r_1\alpha}{k_1}(k_1+\alpha k_2)\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=-r_2\bar{y}\end{cases}$.

它的系数矩阵的特征方程为 $[\lambda+\dfrac{r_1(k_1+\alpha k_2)}{k_1}](\lambda+r_2)=0$,相应的特征值为 $\lambda_1=-\dfrac{r_1}{k_1}(k_1+\alpha k_2)<0$,$\lambda_2=-r_2<0$,故 $E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$ 为系统(Ⅰ)的稳定结点.

2.2　模型(Ⅱ)的奇点及类型

令
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,y)=r_1x(\dfrac{k_1-x-\alpha y}{k_1})=0\\ \dfrac{dy}{dt}=g(x,y)=r_2y(\dfrac{k_2-y}{k_2})=0\end{cases},\qquad(5)$$

容易解出系统(Ⅱ)在第一象限至少有3个奇点: $E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$,而当 $k_1-\alpha k_2>0$ 时,还有第四个奇点 $E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$.

同2.1的讨论可得到: $E_1(0,0)$ 为不稳定的结点;$E_2(k_1,0)$ 为原系统(Ⅱ)的鞍点;当 $k_1-\alpha k_2>0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 为系统(Ⅱ)的鞍点.而当 $k_1-\alpha k_2<0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 为系统(Ⅱ)的稳定结点;$E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$ 为系统(Ⅱ)的稳定结点.

## 3　稳定性

### 3.1　系统(Ⅰ)的稳定性

由2.1可知,系统(Ⅰ)的奇点所对应的平衡点分别为: $E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$,$E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$.

根据前面对奇点及其类型的讨论,由一次近似理论[4]可知: $E_1(0,0)$ 是不稳定的结点,解 $x=0,y=0$ 是不稳定的;$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$ 为鞍点,其对应的解 $x=k_1,y=0$ 和 $x=0,y=k_2$ 是不稳定的;$E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$ 是稳定的结点,其对应的解 $x=k_1+\alpha k_2,y=k_2$ 是系统(Ⅰ)的渐近稳定解.

### 3.2　系统(Ⅱ)的稳定性

同理,由2.2可知,系统(Ⅱ)的奇点所对应的平衡位置分别为: $E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$,$E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$.

根据奇点的类型及一次近似理论[4]可知,$E_1(0,0)$ 是不稳定的结点,解 $x=0,y=0$ 是不稳定的;$E_2(k_1,0)$ 为鞍点,其对应的解 $x=k_1,y=0$ 是不稳定的;$E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$ 是稳定的结点,其对应的解 $x=k_1-\alpha k_2,y=k_2$ 是系统(Ⅱ)的渐近稳定解.

对奇点 $E_3(0,k_2)$ 处解的稳定性问题分三种情况讨论:

(1) 当 $k_1-\alpha k_2>0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 为系统(Ⅱ)的鞍点,其对应的解 $x=0,y=k_2$ 是不稳定的;

(2) 当 $k_1-\alpha k_2<0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 为系统(Ⅱ)的稳定结点,其对应的解 $x=0,y=k_2$ 是渐近稳定的;

(3) 当 $k_1-\alpha k_2=0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 处因其对应的线性方程组的系数矩阵有一个特征值为零,解的稳定性不能由一次近似理论判定,需要对其解 $x=0,y=k_2$ 直接讨论.

为此,我们作 Liapunov 函数:
$$V(x,y)=\frac{k_1}{r_1}x+\frac{k_2\alpha^2}{2r_2}(y-k_2)^2>0,$$

则:
$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=x(k_1-x-\alpha y)-\alpha^2y(y-k_2)^2\\&=x(k_1-x-\alpha y)-\alpha^2y(y-k_2)^2\\&=-[x+\frac{\alpha}{2}(y-k_2)]^2-\frac{\alpha^2}{4}(4y-1)(y-k_2)^2<0.\end{aligned}$$

由 Liapunov 基本定理,$E_3(0,k_2)$ 对应的解 $x=0$,$y=k_2$ 是渐近稳定的.

## 4 结论及其生物学意义

在系统(I)中,$E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$ 都是不稳定的平衡点. $E_1$ 代表着初始状态,两种群的数量都是0,都有充分的发展空间;$E_2$ 表示种群1达到了相当于单种群时的饱和状态,而种群2的数目为0. 此时,种群2可以充分发展,种群1在种群2的偏利作用下,也会有所发展;$E_3(0,k_2)$ 表示种群1的数量为0,还可以充分发展,而种群2已达到环境所许可的饱和程度,将不再发展[5];$E_4(k_1+\alpha k_2,k_2)$ 为系统(I)的稳定平衡点,它表明两种群从原始状态发展到 $E_4$ 的位置后,两种群的数量都不再增加,各自达到它们的最大值,形成稳定共存的平衡局面.

同理,对系统(II)可以得到以下结论:

(1) 系统(II)在第一象限至少有三个平衡点:$E_1(0,0)$,$E_2(k_1,0)$,$E_3(0,k_2)$. 当 $k_1-\alpha k_2>0$ 时,存在第四个平衡点 $E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$.

(2) 在以上平衡点中,存在而且唯一存在一个稳定平衡点. 当 $k_1-\alpha k_2\leqslant 0$ 时,$E_3(0,k_2)$ 为系统(II)的稳定平衡点;当 $k_1-\alpha k_2>0$ 时,$E_4(k_1-\alpha k_2,k_2)$ 为系统(II)的稳定平衡点. 其它的平衡点都是不稳定的平衡点.

这里,$E_3$ 说明种群2对种群1有极强的抑制作用,挤掉了种群1的全部生存空间,留给种群1的生长空间为0,因而种群1不可能再发展. $E_4$ 表明两种群经过竞争,其数量都不再增加和减少,形成稳定共存的局面.

## 参考文献:

[1] 金岚. 环境生态学[M]. 北京:高等教育出版社,1992.
[2] 孙广才,魏文礼. 种间偏利关系的模型研究[J]. 西北水资源与水工程,2003,(3):33-34.
[3] 孙广才. 两种群偏害作用模型的定性分析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版),2003,(3):283-286.
[4] 阮炯. 差分方程和常微分方程[M]. 上海:复旦大学出版社,2002.
[5] 张向东. 种群增长模型中的增长率和增长速率的比较[J]. 生物学杂志,2006,23(6):63-64.

【责任编辑 牛怀岗】

# Analysis on Symbiosis Model of Two Populations

SUN Guang-cai[1],SUN Huan[2]

(1. Institute of Applied Mathematics, Weinan Normal University, Weinan 714000, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

**Abstract:** This paper deals with two mathematics models of amensalism symbiosis of two populations and the stability of all equilibrium points in the system. It has given the conclusion that there is only one stable equilibrium point in the system. This paper also elucidates the biology meaning of the model and its equilibrium points.

**Key words:** population; mathematics model; equilibrium point