

三种群捕食-竞争-合作混杂模型的全局渐近稳定性

郑 涛, 周欣然, 张 龙*

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要: 本文建立了一类三种群具有捕食-竞争-合作混杂交互关系的生态模型。首先引入辅助系统, 应用微分方程比较原理, 构造合适的 Lyapunov 函数以及分析方法, 讨论了系统解的正性和有界性, 建立正平衡点全局渐近稳定性的充分条件。然后通过数值模拟检验本文结论的有效性。

关键词: 周期性; Lyapunov 函数; 全局渐近稳定性; 捕食-竞争-合作混杂系统

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-6600(2020)05-0064-07

引用格式: 郑涛, 周欣然, 张龙. 三种群捕食-竞争-合作混杂模型的全局渐近稳定性[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2020, 38(5): 64-70.

ZHENG T, ZHOU X R, ZHANG L. Global asymptotic stability of predator-competition-cooperative hybrid population models of three species[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2020, 38(5): 64-70.

Global Asymptotic Stability of Predator-Competition-Cooperative Hybrid Population Models of Three Species

ZHENG Tao, ZHOU Xinran, ZHANG Long*

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: This paper establishes a class of ecological model of three species with predator-competition-cooperative hybrid interaction. Firstly, the positivity and boundedness of the solution of the system are discussed by introducing auxiliary system and differential comparison principle. Next, the sufficient conditions of globally asymptotically stable positive equilibrium are obtained by constructing suitable Lyapunov functions and some analytical skills. Finally, numerical simulations are conducted to verify the theoretical results.

Keywords: periodicity; Lyapunov functions; global asymptotic stability; predator-competition-cooperative hybrid systems

Lotka-Volterra 种群模型在描述不同生物种群之间的相互关系之中扮演着重要的角色, 这些模型包括捕食模型、竞争模型和合作模型。生物种群彼此之间经常会为了有限的资源呈现相互捕食、竞争、合作的关系^[1-6]。但是在现实环境中, 许多物种之间的关系并不是单一的, 而是要相对复杂一些。当生物种群周围的环境发生变化时, 种群之间的相互关系也会发生相应调整。比如 3 个种群之间的捕食-竞争关系与捕食-合作关系的相互转化。本文不同于前人对于种群间单种关系的研究, 我们对于 3 个种群之间存

收稿日期: 2019-03-17

基金项目: 国家自然科学基金(11861065, 11771373, 11702237); 新疆教育厅重点实验室项目(2016D03022); 新疆普通高等学校科研计划-创新团队项目(XJEDU2017T001); 新疆大学博士创新项目(XJUBSCX-2017005)

通信联系人: 张龙(1977—), 男, 新疆乌鲁木齐人, 新疆大学教授, 博士。E-mail: longzhang_xj@sohu.com

在的捕食-竞争关系与捕食-合作关系随时间做交替地周期变化的两类模型合并成一类三种群的捕食-竞争-合作混杂模型进行研究,讨论这样的系统下正平衡点的全局渐近稳定性^[7-13]。

1 模型

具有时间周期的三种群捕食-竞争-合作混杂模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(\bar{a}_1 - \bar{b}_1x - \bar{c}_1z - \bar{d}_1y) \\ \dot{y} = y(\bar{a}_2 - \bar{b}_2y - \bar{c}_2z - \bar{d}_2x) \\ \dot{z} = z(\bar{a}_3 - \bar{b}_3z + \bar{c}_3x + \bar{d}_3y) \end{array} \right\} t \in [2k\tau, (2k+1)\tau], k \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1x - \tilde{c}_1z + \tilde{d}_1y) \\ \dot{y} = y(\tilde{a}_2 - \tilde{b}_2y - \tilde{c}_2z + \tilde{d}_2x) \\ \dot{z} = z(\tilde{a}_3 - \tilde{b}_3z + \tilde{c}_3x + \tilde{d}_3y) \end{array} \right\} t \in [(2k+1)\tau, (2k+2)\tau], k \in \mathbf{N}.$$

这里 x 和 y 是两食饵种群密度, z 是捕食者种群密度, 其中 z 种群同时捕食 x 和 y 两种群, x 和 y 两种群之间存在随时间变化的相互关系, 当时间 $t \in [2k\tau, (2k+1)\tau]$, 种群 x 和种群 y 为相互竞争关系; 当时间 $t \in [(2k+1)\tau, (2k+2)\tau]$, 种群 x 和种群 y 为相互合作关系。其余各系数皆为正数。

为了方便研究, 可以将式(1) 合并为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(a_1 - b_1x - c_1x - d_1y) \\ \dot{y} = y(a_2 - b_2y - c_2z - d_2x) \\ \dot{z} = z(a_3 - b_3z + c_3x + d_3y) \end{array} \right. \quad (2)$$

式中各系数为:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{\bar{a}_i [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{a}_i [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ b_i = \frac{\bar{b}_i [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{b}_i [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ c_i = \frac{\bar{c}_i [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{c}_i [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ d_i = \left\{ \frac{\bar{d}_i [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{d}_i [(-1)^{n+1} + 1]}{2} \right\} (-1)^n, \quad i = 1, 2; \\ a_3 = \frac{\bar{a}_3 [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{a}_3 [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ b_3 = \frac{\bar{b}_3 [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{b}_3 [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ c_3 = \frac{\bar{c}_3 [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{c}_3 [(-1)^{n+1} + 1]}{2}, \\ d_3 = \frac{\bar{d}_3 [(-1)^n + 1]}{2} + \frac{\tilde{d}_3 [(-1)^{n+1} + 1]}{2}. \end{array} \right.$$

(式中 $n \in \mathbf{N}$, 各系数皆为正数)

2 正性与有界性

引理 1 $\mathbf{R}_+^3 = \{h = (x \ y \ z)^T \in \mathbf{R}^3 | h > 0\}$ 是系统(2)的一个正不变集。

证明 对于任意的 $t \in [0, +\infty)$ 以及 $h = (x \ y \ z)^T \in \mathbf{R}_+^3$, 易知, 若初值 $x(0) > 0, y(0) > 0, z(0) > 0$, 则:

$$\begin{aligned} x &= x(0) e^{\int_0^t (a_1 - b_1 x - c_1 z - d_1 y) dt} > 0, y = y(0) e^{\int_0^t (a_2 - b_2 y - c_2 z - d_2 x) dt} > 0, \\ z &= z(0) e^{\int_0^t (a_3 - b_3 z - c_3 x - d_3 y) dt} > 0. \end{aligned}$$

因此 \mathbf{R}_+^3 为系统(2)的正不变集。证毕。

为了讨论方便, 系统(2)可以写成矩阵形式

$$\dot{h} = \text{diag}(x \ y \ z) (A + Bh),$$

式中:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -b_1 & -d_1 & -c_1 \\ -d_2 & -b_2 & -c_2 \\ c_3 & d_3 & -b_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

在讨论系统(2)解的有界性之前, 先引进定义 1。

定义 1 设 Q 为实矩阵, 如果存在一个正的对角矩阵 W , 使得 $WQ + Q^T W$ 是正定的, 则称 $Q \in S_W$ 。

定理 1 如果 $-B \in S_W$, 那么系统(2)满足初始条件 $h_0 = h(t_0) \in \mathbf{R}_+^3$ 的解在 $[t_0, +\infty)$ 上恒正且有界。

证明 由于 $-B \in S_W$, 所以存在正的对角矩阵

$$W = \text{diag}(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \quad \omega_i > 0 \quad i = 1 \ 2 \ 3,$$

使得 $W(-B) + (-B)^T W$ 是正定的。

设 $h(t_0) = h_0$ 是系统(2)满足初始条件 $h_0 = h(t_0) \in \mathbf{R}_+^3$ 且定义在 $[t_0, +\infty)$ 上的任意一个解, 其中 $[t_0, b)$ 为解的最大存在区间, $b \leq +\infty$, 再设

$$S(t) = \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z.$$

由引理 1 知, \mathbf{R}_+^3 是系统(2)正的不变集, 下面只要能证得对某个 $\sigma > 0$, 存在一个正数 L 使得

$$(\dot{S} + \sigma S)|_{(2)} < L \quad t \in [t_0, b),$$

那么由微分方程的比较原理^[7]有

$$0 \leq S(t) \leq \frac{L}{\sigma} + \frac{R}{e^{\sigma t}} \quad t \in [t_0, b).$$

式中 R 是一个常数, 满足 $S(t) \leq \frac{L}{\sigma} + \frac{R}{e^{\sigma t}}$, 从而解 $h(t_0) = h_0$ 的有界性得证。

$$\begin{aligned} (\dot{S} + \sigma S)|_{(2)} &= (\omega_1 \dot{x} + \omega_2 \dot{y} + \omega_3 \dot{z}) + \sigma(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) = \\ &= \frac{1}{2} h^T (WB + B^T W) h + \omega_1 a_1 x + \omega_2 a_2 y + \omega_3 a_3 z + \sigma \omega_1 x + \sigma \omega_2 y + \sigma \omega_3 z. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2} [W(-B) + (-B)^T W]$ 是正定的, 设 $\lambda_i (i = 1 \ 2 \ 3)$ 是它的正的实数特征根, 并记 $\lambda' = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 那么有

$$(\dot{S} + \sigma S)|_{(2)} \leq -\lambda' x^2 - \lambda' y^2 - \lambda' z^2 + \omega_1 a_1 x + \omega_2 a_2 y + \omega_3 a_3 z + \sigma \omega_1 x + \sigma \omega_2 y + \sigma \omega_3 z.$$

式中所有的二次项系数都为负, 从而一定存在正数 L , 使得

$$(\dot{S} + \sigma S)|_{(2)} < L \quad t \in [t_0, b).$$

再由解的延拓性定理^[7]可知, 满足初始条件 $h_0 = h(t_0) \in \mathbf{R}_+^3$ 的解 $h(t_0) = h_0$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上存在且有界。证毕。

3 正平衡点的全局渐近稳定性

设 $E_1 = \{x_1^*, y_1^*, z_1^*\}$ 为 $t \in [2k\tau, (2k+1)\tau]$ 时, 系统(1) 的正平衡点, 即 E_1 满足:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 - \bar{b}_1 x_1^* - \bar{c}_1 z_1^* - \bar{d}_1 y_1^* = 0, \\ \bar{a}_2 - \bar{b}_2 y_1^* - \bar{c}_2 z_1^* - \bar{d}_2 x_1^* = 0, \\ \bar{a}_3 - \bar{b}_3 z_1^* + \bar{c}_3 x_1^* + \bar{d}_3 y_1^* = 0. \end{cases} \quad (4)$$

式中正平衡点为:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 + \bar{a}_1 \bar{c}_2 \bar{d}_3 + \bar{d}_1 \bar{c}_2 \bar{a}_3 - \bar{d}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 - \bar{c}_1 \bar{a}_2 \bar{d}_3 - \bar{c}_1 \bar{b}_2 \bar{a}_3}{\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 + \bar{b}_1 \bar{c}_2 \bar{d}_3 + \bar{c}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 - \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{b}_3 - \bar{d}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 - \bar{c}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3}, \\ y_1^* = \frac{\bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 + \bar{c}_1 \bar{d}_2 \bar{a}_3 + \bar{c}_1 \bar{a}_2 \bar{c}_3 - \bar{b}_1 \bar{c}_2 \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \bar{d}_2 \bar{b}_3 - \bar{a}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3}{\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 + \bar{b}_1 \bar{c}_2 \bar{d}_3 + \bar{c}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 - \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{b}_3 - \bar{d}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 - \bar{c}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3}, \\ z_1^* = \frac{\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{a}_3 + \bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{d}_3 + \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 - \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{a}_3 - \bar{d}_1 \bar{a}_2 \bar{c}_3 - \bar{a}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3}{\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 + \bar{b}_1 \bar{c}_2 \bar{d}_3 + \bar{c}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 - \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{b}_3 - \bar{d}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 - \bar{c}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3}. \end{cases}$$

设 $E_2 = \{x_2^*, y_2^*, z_2^*\}$ 为 $t \in [(2k+1)\tau, (2k+2)\tau]$ 时, 系统(1) 的正平衡点, 即 E_2 满足:

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 x_2^* - \tilde{c}_1 z_2^* + \tilde{d}_1 y_2^* = 0, \\ \tilde{a}_2 - \tilde{b}_2 y_2^* - \tilde{c}_2 z_2^* + \tilde{d}_2 x_2^* = 0, \\ \tilde{a}_3 - \tilde{b}_3 z_2^* + \tilde{c}_3 x_2^* + \tilde{d}_3 y_2^* = 0. \end{cases} \quad (5)$$

式中正平衡点:

$$\begin{cases} x_2^* = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{a}_1 \tilde{c}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{a}_2 \tilde{b}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{c}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{c}_1 \tilde{a}_2 \tilde{d}_3 - \tilde{c}_1 \tilde{b}_2 \tilde{a}_3}{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{b}_1 \tilde{c}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{b}_3}, \\ y_2^* = \frac{\tilde{b}_1 \tilde{a}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{a}_1 \tilde{d}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{a}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{b}_1 \tilde{c}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{c}_1 \tilde{d}_2 \tilde{a}_3}{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{b}_1 \tilde{c}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{b}_3}, \\ z_2^* = \frac{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{a}_3 + \tilde{b}_1 \tilde{a}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{a}_2 \tilde{c}_3 + \tilde{a}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{a}_3}{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 + \tilde{b}_1 \tilde{c}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 + \tilde{c}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{b}_3}. \end{cases}$$

设 $E = \{x^*, y^*, z^*\}$ 为系统(2) 的正平衡点, 即 E 满足:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 x^* - c_1 z^* - d_1 y^* = 0, \\ a_2 - b_2 y^* - c_2 z^* - d_2 x^* = 0, \\ a_3 - b_3 z^* + c_3 x^* + d_3 y^* = 0. \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$E = \frac{[(-1)^n + 1]E_1}{2} + \frac{[(-1)^{n+1} + 1]E_2}{2}, n \in \mathbf{N}.$$

正平衡点:

$$\begin{cases} x^* = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 c_2 d_3 + d_1 c_2 a_3 - d_1 a_2 b_3 - c_1 a_2 d_3 - c_1 b_2 a_3}{b_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 b_2 c_3 - d_1 d_2 b_3 - d_1 c_2 c_3 - c_1 d_2 d_3}, \\ y^* = \frac{b_1 a_2 b_3 + c_1 d_2 a_3 + c_1 a_2 c_3 - b_1 c_2 a_3 - a_1 d_2 b_3 - a_1 c_2 c_3}{b_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 b_2 c_3 - d_1 d_2 b_3 - d_1 c_2 c_3 - c_1 d_2 d_3}, \\ z^* = \frac{b_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 d_3 + a_1 b_2 c_3 - d_1 d_2 a_3 - d_1 a_2 c_3 - a_1 d_2 d_3}{b_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 b_2 c_3 - d_1 d_2 b_3 - d_1 c_2 c_3 - c_1 d_2 d_3}. \end{cases}$$

下面给出正平衡点 E 全局渐近稳定性的条件。

定理 2 若系统(2) 满足条件 $-B \in S_w$, 且

$$\begin{cases} |d_1 + d_2| < \sqrt{b_1 b_2}, \\ |c_3 - c_1| < \sqrt{b_1 b_3}, \\ |c_2 - d_3| < \sqrt{b_2 b_3}. \end{cases} \quad (7)$$

则其正平衡点全局渐近稳定。

证明 定义 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{h}) = \omega_1 \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + \omega_2 \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) + \omega_3 \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right),$$

式中 $\omega_i > 0 \ i = 1, 2, 3$ 为待定常数。

沿着系统(2)的正解对 $V(\mathbf{h})$ 求关于 t 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2)} &= \frac{\omega_1(x - x^*)\dot{x}}{x} + \frac{\omega_2(y - y^*)\dot{y}}{y} + \frac{\omega_3(z - z^*)\dot{z}}{z} = \\ &\omega_1(x - x^*)(a_1 - b_1x^* + b_1x^* - c_1z^* + c_1z^* - d_1y^* + d_1y^* - b_1x - c_1z - d_1y) + \\ &\omega_2(y - y^*)(a_2 - b_2y^* + b_2y^* - c_2z^* + c_2z^* - d_2x^* + d_2x^* - b_2y - c_2z - d_2x) + \\ &\omega_3(z - z^*)(a_3 - b_3z^* + b_3z^* - c_3x^* + c_3x^* - d_3y^* + d_3y^* - b_3z + c_3x + d_3y) = \\ &\omega_1(x - x^*)[b_1(x^* - x) + c_1(z^* - z) + d_1(y^* - y)] + \\ &\omega_2(y - y^*)[b_2(y^* - y) + c_2(z^* - z) + d_2(x^* - x)] + \\ &\omega_3(z - z^*)[b_3(z^* - z) + c_3(x - x^*) + d_3(y - y^*)] = \\ &-b_1\omega_1(x - x^*)^2 - b_2\omega_2(y - y^*)^2 - b_3\omega_3(z - z^*)^2 + \\ &(\omega_3c_3 - \omega_1c_1)(x - x^*)(z - z^*) + (\omega_1d_1 + \omega_2d_2)(x - x^*)(y^* - y) + \\ &(\omega_2c_2 - \omega_3d_3)(y - y^*)(z^* - z) \leq \\ &(|\omega_1d_1 + \omega_2d_2| - \sqrt{b_1\omega_1b_2\omega_2})(|x - x^*||y - y^*|) + \\ &(|\omega_3c_3 - \omega_1c_1| - \sqrt{b_1\omega_1b_3\omega_3})(|x - x^*||z - z^*|) + \\ &(|\omega_2c_2 - \omega_3d_3| - \sqrt{b_2\omega_2b_3\omega_3})(|y - y^*||z - z^*|). \end{aligned}$$

在此取定 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$, 并利用式(7), 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2)} &< (|d_1 + d_2| - \sqrt{b_1b_2})(|x - x^*||y - y^*|) + \\ &(|c_3 - c_1| - \sqrt{b_1b_3})(|x - x^*||z - z^*|) + \\ &(|c_2 - d_3| - \sqrt{b_2b_3})(|y - y^*||z - z^*|) \leq 0. \end{aligned}$$

因此正平衡点 E 是全局渐近稳定的。证毕。

4 数值模拟

通过 MATLAB 软件进行数值模拟, 验证该系统正平衡点具有全局渐近稳定性。在此取定相应系数值:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 1.00, \bar{a}_2 = 1.00, \bar{a}_3 = 0.80, \bar{b}_1 = 0.20, \bar{b}_2 = 0.15, \bar{b}_3 = 0.25, \\ \bar{c}_1 &= 0.12, \bar{c}_2 = 0.16, \bar{c}_3 = 0.15, \bar{d}_1 = 0.08, \bar{d}_2 = 0.08, \bar{d}_3 = 0.12; \\ \tilde{a}_1 &= 1.00, \tilde{a}_2 = 1.00, \tilde{a}_3 = 0.80, \tilde{b}_1 = 0.20, \tilde{b}_2 = 0.15, \tilde{b}_3 = 0.25, \\ \tilde{c}_1 &= 0.12, \tilde{c}_2 = 0.16, \tilde{c}_3 = 0.15, \tilde{d}_1 = 0.08, \tilde{d}_2 = 0.08, \tilde{d}_3 = 0.12. \end{aligned}$$

由此容易验证

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.20 & -0.08 & -0.12 \\ -0.08 & -0.15 & -0.16 \\ 0.15 & 0.12 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

$-B \in S_w$, 且式(7)成立。

模拟 1 捕食-合作阶段和捕食-竞争阶段都满足式(7)时, 分别模拟出系统(2)中 x 、 y 、 z 三种群密度随时间变化的时间序列与三维空间相。

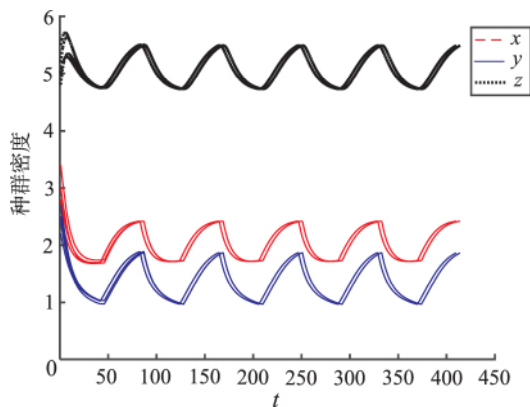


图 1 模拟 1 的时间序列

Fig. 1 Time series diagram of simulation 1

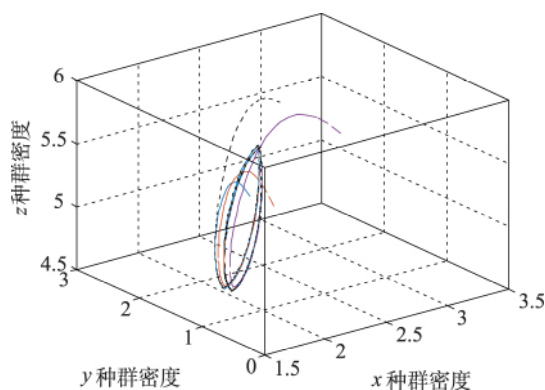


图 2 模拟 1 的三维空间相

Fig. 2 3D phase diagram of simulation 1

图 1、2 中的解曲线分别代表系统(2)的初始值 (x_0, y_0, z_0) 取定为 $(2.5, 2.2, 5.0)$, $(2.8, 2.4, 4.8)$, $(3.0, 2.7, 5.5)$, $(3.4, 2.5, 5.2)$ 的种群 x 、 y 、 z 的种群密度的时间序列与三维空间相。

模拟 2 取定一组相关系数使得 2 个阶段中的捕食-合作阶段满足式(7), 然而捕食-竞争阶段不满足式(7), 则模拟结果为图 3 和图 4。

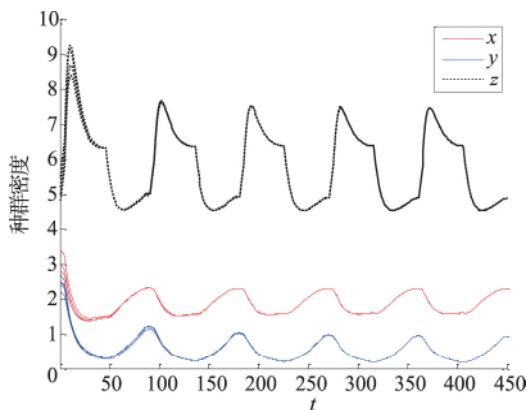


图 3 模拟 2 的时间序列

Fig. 3 Time series diagram of simulation 2

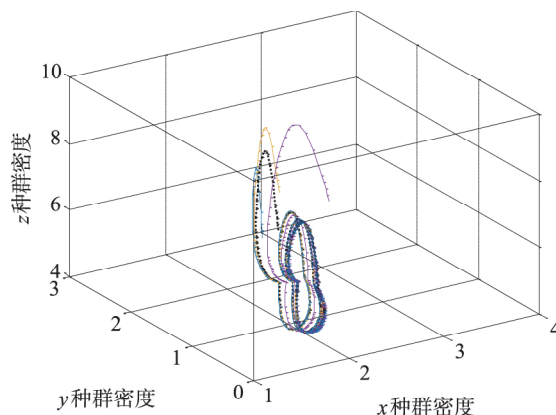


图 4 模拟 2 的三维空间相

Fig. 4 3D phase diagram of simulation 2

图 3、4 中的解曲线分别代表系统(2)的初始值 (x_0, y_0, z_0) 取定为 $(2.5, 2.2, 5.0)$, $(2.8, 2.4, 4.8)$, $(3.0, 2.7, 5.5)$, $(3.4, 2.5, 5.2)$ 的种群 x 、 y 、 z 的种群密度的时间序列与三维空间相。

模拟 3 取定一组相关系数使得 2 个阶段中的捕食-合作阶段与捕食-竞争阶段都不满足式(7), 则模拟结果如图 5、6。

图 5、6 中的解曲线分别代表系统(2)的初始值 (x_0, y_0, z_0) 取定为 $(2.5, 2.2, 5.0)$, $(2.8, 2.4, 4.8)$, $(3.0, 2.7, 5.5)$, $(3.4, 2.5, 5.2)$ 的种群 x 、 y 、 z 的种群密度的时间序列与三维空间相。

由模拟出的图像可以看出, 图 1 中的 x 、 y 、 z 3 个种群密度随时间呈现反复交替的周期变化, 并且三者的种群密度三维空间相图最终构成了一个闭合的图像, 由此可以看出, 系统(2)的正平衡点 $E = (x^*, y^*, z^*)$ 构成了一个周期的闭轨。图 2 两个阶段中若单个阶段满足条件式(7), 依旧能构成一个周期的闭轨, 然而图 3 中 2 个阶段都不满足式(7), 可以看到其中有一个食饵种群最终灭绝了, 并且得不到周期的闭轨。

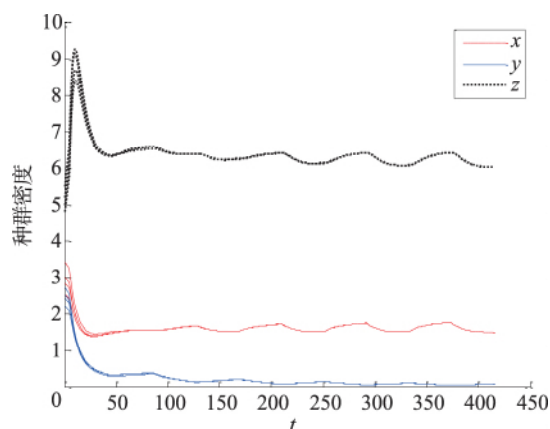


图5 模拟3的时间序列

Fig. 5 Time series diagram of simulation 3

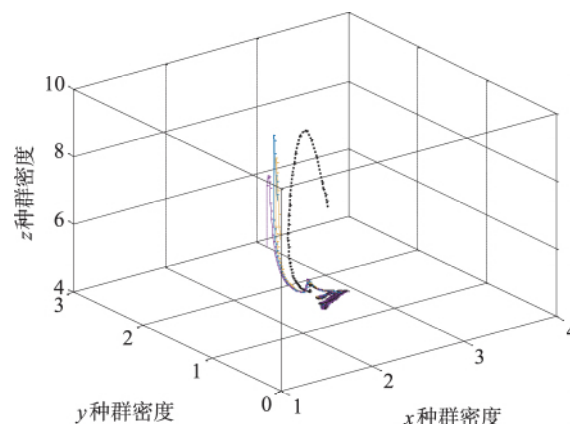


图6 模拟3的三维空间相

Fig. 6 3D phase diagram of simulation 3

5 结论

本文通过将3个种群之间的捕食-竞争与捕食-合作关系随时间周期变化的两类模型合并成一类三群种的捕食-竞争-合作混杂模型,讨论该模型下的系统解的正性、有界性,给出了系统正平衡点全局渐近稳定性的充分条件,证明了正平衡点的全局渐近稳定性。最后通过数值模拟检验了这一结论,并给出了若2个阶段中单个满足这一充分条件下的数值模拟。

参 考 文 献

- [1] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法: 第2版[M]. 北京: 学科出版社, 2017.
- [2] 陈凤德, 谢向东. 合作种群模型动力学研究[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [3] 吴丹阳, 柏灵. 三种群非自治扩散系统的概周期解[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2003(1): 35-41.
- [4] 程荣福, 李辉. 具有Holling III型功能性反应的捕食者与被捕食者收获模型的分支与极限环[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2007, 39(1): 17-21.
- [5] 李辉, 王艺菲. 具有功能性反应的时滞扩散模型的周期解与稳定性[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2008, 40(2): 22-29.
- [6] 刘潇. 一个具有竞争关系的Lotka-Volterra模型全局结构分析[J]. 生物数学学报, 2009, 24(4): 702-710.
- [7] HARTMAN P. Ordinary differential equations[M]. New York: Wiley & Sons, 1964.
- [8] 黑力军, 陈斯养. 具有时滞三斑块扩散捕食模型的全局稳定性[J]. 工程数学学报, 2003, 20(4): 129-133.
- [9] MUHAMMADHAJI A, REHIM M, TENG Z D. Boundedness on the two-species stochastic predator-prey system[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(3): 310-312.
- [10] SUGIE J, KIRA K. Uniform global asymptotic stability for oscillators with superlinear damping[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 425(2): 827-853.
- [11] 苗新艳, 张龙. 一类交替变化的竞争-合作混杂种群模型研究[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2018, 36(3): 25-31.
- [12] IGNAT'EV A O. On global asymptotic stability of the equilibrium of predator-prey system in varying environment[J]. Russian Mathematics, 2017, 61(4): 5-10.
- [13] MA M J, OU C H. Existence, uniqueness, stability and bifurcation of periodic patterns for a seasonal single phytoplankton model with self-shading effect[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 263(9): 5630-5655.