全国硕士研究生入学统一考试模拟考试

数学二

一、选择题：（1）~（8）小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母涂在答题卡上。

（1）设$f(x)$为奇函数，$f'(0)=1$，$g(x)=\frac{f(x)}{|x|}$，则

（A）$x=0$是$g(x)$的可去间断点　　（B）$x=0$是$g(x)$的跳跃间断点

（C）$x=0$是$g(x)$的无穷间断点　　（D）$x=0$是$g(x)$的第二类但非无穷间断点

（2）设反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx(m>0,n>0)$，则

（A）当$m<1$时，此反常积分收敛　　（B）当$n>1$时，此反常积分收敛

（C）当$n-m<1$时，此反常积分收敛　　（D）当$n-m>1$时，此反常积分收敛

（3）设$z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中函数$f(u,v)$，$g(u)$均可微，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

（A）$2xyf_1'$　　（B）$2xyf_2'$　　（C）$xyf_1'+\frac{1}{x}g'$　　（C）$xyf_2'+\frac{1}{y}g'$

（4）设函数$f(x)=\begin{cases} xsinx & 0\le x<\pi \\ 1 & \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则

（A）$x=\pi$是函数$F(x)$的跳跃间断点

（B）$x=\pi$是函数$F(x)$的可去间断点

（C）$F(x)$在$x=\pi$处连续但不可导

（D）$F(x)$在$x=\pi$处可导

（5）设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{x}dx$，$I_2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{sinx}dx$，则

（A）$I_1<1<I_2$　　（B）$1<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<1$　　（D）$I_2<1<I_1$

（6）方程$e^{-x}-x^2+2x-1=0$

（A）恰有一个根　　（B）恰有两个根

（C）恰有三个根　　（D）多于三个根

（7）设 3 阶矩阵$A=(2\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$，$B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$都是 3 维列向量，且$|A|=4$，$|B|=5$，则行列式$|3A-5B|=$

（A）-52　　（B）52　　（C）-48　　（D）48

（8）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$的规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$，则

（A）$a=1$或者$a=-2$　　（B）$a<-2$

（C）$a>1$　　（D）$-2<a<1$

二、填空题：（9）～（14）小题，每小题 4 分，共 24 分。正确答案写在答题纸相应位置。

（9）设$f(x)$在$[0,2]$，且对任给的$x\in(0,2)$以及$x+\Delta x\in(0,2)$，均有$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且$f(0)=0$，则$\int_0^2 f(x)\,dx=$________.

（10）设$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2xt}$，则$f^{(n)}(t)=$________.

（11）设函数$z=z(x,y)$由方程$z+e^{2x-3y+z}-xy=1$确定，则$dz|_{(1,1)}=$______.

（12）设$D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\}$，则$\iint_D\left(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2\right)dxdy=$________.

（13）若二阶常系数线性齐次微分方程$2y''+ay'=0$和$y''-by=0$有同一解$y=e^{2x}$，则非齐次方程$y''+ay'+by=e^{2x}$的通解为$y=$______.

（14）设α是 3 维单位列向量，E为 3 阶单位矩阵，则$r(E-2\alpha\alpha^T)=$_______.

三、解答题：（15）～（23）小题，共 94 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{xln(1+x)-x^2}$

（16）（本题满分 10 分）

设$y=y(x)$由$\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ \int_0^y cosu^2\,du+\int_t^1\frac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}du=0\end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

（17）（本题满分 11 分）

设$f(x)=cosx+\frac{1}{4}\int_0^{2x}(2x-t)f\left(\frac{t}{2}\right)dt$，其中$f(x)$为连续函数，求$f(x)$.

（18）（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2$在区域$D=\left\{(x,y)|\frac{x^2}{4}+y^2\le 1,y\ge\frac{1}{2}x-1\right\}$上的最大值与最小值。

（19）（本题满分 10 分）

设平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,x^2+y^2\geq 2y\}$，计算$\iint_D (2x+y)\,dxdy.$

（20）（本题满分 11 分）

设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$，$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1}),n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求出此极限值。

（21）（本题满分 10 分）

已知常数$k\geq ln2-1$，证明：$(x-1)(x-ln^2x+2klnx-1)\geq 0.$

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & a\end{bmatrix}$，问当$a$为何值时，矩阵方程$AX=B$无解、有解？并在有解时，求该矩阵方程的所有解。

（23）（本题满分 11 分）

设A为三阶实对称矩阵，其主对角线元素都是 0，且$(1,2,-1)^T$是A属于特征值$\lambda=2$的特征向量。

（I）求A；

（II）求正交矩阵Q，使Q^TAQ为对角矩阵；

（III）设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，求x^TAx在条件$||x||=2$下的最大值。