集合的划分问题分析

先举个例子，设S＝｛1，2，3，4｝，k＝3，不难得出S有6种不同的划分方案，即划分数S(4，3)=6，具体方案为：

｛1，2｝∪｛3｝∪｛4｝

｛1，3｝∪｛2｝∪｛4｝

｛1，4｝∪｛2｝∪｛3｝

｛2，3｝∪｛1｝∪｛4｝

｛2，4｝∪｛1｝∪｛3｝

｛3，4｝∪｛1｝∪｛2｝

考虑一般情况，对于任意的含有n个元素a1，a2，……，an的集合S，放入k个无标号的盒子中去，划分数为S(n，k)，我们很难凭直觉和经验计算划分数和枚举划分的所有方案，必须归纳出问题的本质。

对于任一个元素an，则必然出现以下两种情况：

1、｛an｝是k个子集中的一个，于是我们只要把a1，a2，……，an-1划分为k－1子集，便解决了本题，这种情况下的划分数共有S(n－1，k－1)个；

2、｛an｝不是k个子集中的一个，则an必与其它的元素构成一个子集。则问题相当于先把a1，a2，……，an-1划分成k个子集，这种情况下划分数共有S(n－1，k)个；然后再把元素an加入到k个子集中的任一个中去，共有k种加入方式，这样对于an的每一种加入方式，都可以使集合划分为k个子集，因此根据乘法原理，划分数共有k \* S(n－1，k)个。

综合以上两种情况，应用加法原理，得出n个元素的集合划分为k个子集的划分数为：

S(n，k)＝S(n－1，k－1) + k \* S(n－1，k) (n>k，k>0)

下面，我们来确定这个递归公式的边界条件。

首先，不能把n个元素不放进任何一个集合中去，即k=0时，S(n，k)＝0；

其次，也不可能在不允许空盒的情况下，把n个元素放进多于n的k个集合中去，即k＞n时，S(n，k)＝0；

再者，把n个元素放进一个集合或把n个元素放进n个集合，方案数显然都是1，即k=1或k=n时，S(n,k)=1。

[问题拓展]

如果是求n个元素a1,a2,……,an放入k个有标号的盒子中去，每个盒子至少一个，划分数是多少？

解答：在原问题上对k个盒子进行全排列，所以答案为：k!\*S(n,k)