

doi: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2014.08.018

中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题

感觉归约构造有较严重的问题, NP-hard
都没证到

高 强, 徐心和

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘 要:寻找棋类游戏的理想解是计算机博弈研究的目标, 而计算复杂性是不可逾越的障碍。首先介绍了计算复杂性类中的 EXPTIME-complete 问题及它的一个实例—— G_3 游戏。构建了一个 $n \times n$ 中国象棋的归约模型, 模型由 6 部分组成, 分别为布尔控制器、开关、子句通道与文字通道的交叉区域、兑子区域、延迟区域及九宫。在该模型上模拟进行 G_3 游戏, 并最终证明了 G_3 游戏可多项式时间内归约到 $n \times n$ 的中国象棋, 从而证明了 $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题。

关 键 词:计算机博弈; 中国象棋; 计算复杂性; 指数时间的完全问题; 归约

中图分类号: TP301.5

文献标识码: A

文章编号: 1674-8425(2014)08-0085-07

Chinese Chess Being EXPTIME-complete

GAO Qiang, XU Xin-he

(College of Information Science and Engineering,
Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The main objective of research on computer game is looking for an ideal invincible solution of the board games. However, computational complexity is an insurmountable obstacle in the process of solving. Firstly, this article introduces EXPTIME-complete problem of computational complexity and an example of it, G_3 game. An $n \times n$ Chinese Chess position is constructed, and this position consists of six components which include Boolean controller, switch, the crossing of clause-channel and literal-channel, exchanging chess zone, delay zone and Nine-palace. G_3 game is simulated on the position, and hence it is proved that G_3 is reducible to $n \times n$ Chinese Chess in polynomial time, and then Chinese Chess is EXPTIME-complete.

Key words: computer games; Chinese chess; computational complexity; EXPTIME-complete; reducibility

收稿日期: 2014-03-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61370153)

作者简介: 高强(1980—), 男, 辽宁沈阳人, 博士研究生, 主要从事机器博弈、计算复杂性理论研究; 徐心和(1940—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 主要从事控制理论与应用、系统仿真、智能机器人、机器博弈等方面研究。

引用格式: 高强, 徐心和. 中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2014(8): 85-91.

Citation format: GAO Qiang, XU Xin-he. Chinese Chess Being EXPTIME-complete[J]. Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science, 2014(8): 85-91.

计算机博弈是让计算机给出着法,能够下棋,属于人工智能学科极具挑战性的研究领域。计算机博弈的最高境界是找到该棋种的理想解,即不败解。而计算机博弈的最大困难和无法逾越的障碍是求解问题过程中的计算复杂性。通过对问题的计算复杂性进行分类可以了解该问题被求解的难易程度,如果问题被证明是难解的(例如 NP-complete、PSPACE-complete 及 EXPTIME-complete),则不必将大量的精力花费在寻找问题的解析解上,而只能去寻求某种近似解。国外有很多学者在研究计算机博弈问题的计算复杂性,国际象棋^[1]和西洋跳棋^[2]被证明属于 EXPTIME-complete 问题。这 2 个棋种的计算复杂性证明在构建模型的过程中,都用到了一个已被证明为 EXPTIME-complete 的 G_3 游戏^[3]。围棋被证明属于 PSPACE-hard 问题^[4](围棋也被怀疑属于 EXPTIME-complete 问题^[1]),五子棋^[5]、六子棋^[6]、奥赛罗棋^[7]被证明属于 PSPACE-complete 问题。这些棋种的计算复杂性证明都用到了广义地理学游戏(generalized geography game)^[8]。亚马逊被证明属于 PSPACE-complete 问题^[9],在证明过程中,它采用了一种公式博弈(formula game^[8])方法。

中国象棋是一种历史悠久的棋类游戏。在兵种及走法方面,它与国际象棋有许多相似之处。 9×10 的中国象棋与 8×8 的国际象棋在状态空间复杂度、博弈树复杂度方面的比较见表 1^[10]。

表 1 中国象棋与国际象棋的复杂度比较
(数据以 10 为底)

棋种	状态空间复杂度	博弈树复杂度
中国象棋	48	150
国际象棋	50	123

由表 1 可见:中国象棋的复杂度与国际象棋的复杂度相当,既然 $n \times n$ 的国际象棋已被证明属于 EXPTIME-complete 问题,所以有理由推测 $n \times n$ 的中国象棋也应属于 EXPTIME-complete 问题。

本文在第 1 节分析了 EXPTIME-complete 问题及它的一个典型实例—— G_3 游戏。根据计算复杂性类中完全问题的定义^[1],首先在第 2 节证明了

$n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME 问题,然后在第 3 节重点构建了一个 $n \times n$ 中国象棋的归约模型,并在此模型上模拟进行 G_3 游戏,证明了 G_3 游戏可在多项式时间内归约到 $n \times n$ 中国象棋,从而证明了 $n \times n$ 中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题。为了保证论述的严密性,第 4 节给出了归约模型中不恰当走法的分析。第 5 节对于此证明的完全性给出了论证。

1 EXPTIME-complete 问题

EXPTIME 问题的定义 该复杂性类是一些确定型问题的集合,这些问题可以使用确定型图灵机在 $O(2^{p(n)})$ 的时间内解决,这里的 $p(n)$ 代表 n 的某个多项式。属于该复杂性的问题,它的难度不小于 P, NP, NP-complete 以及空间复杂性类(PSPACE 和 PSPACE-complete)^[11]。而 EXPTIME-complete 问题是 EXPTIME 复杂性类中最难的问题,其定义可参考其他复杂性类完全问题的定义^[1],如下:

一个问题 B 属于 EXPTIME-complete,如果它满足 2 个条件:

- 1) B 属于 EXPTIME;
- 2) 每个属于 EXPTIME 的问题在多项式时间内可以归约到 B。

常见的属于 EXPTIME-complete 问题的有停机问题^[8]、简洁电路问题^[11]、 G_3 游戏等。

该游戏中的每个局面(position)是一个 4 元组 $(\tau, R\text{-LOSE}(X, Y), B\text{-LOSE}(X, Y), \alpha)$, 其中 $\tau \in \{R, B\}$, 它表示当前走棋方, $R\text{-LOSE} = C_{11} \vee C_{12} \vee C_{13} \vee \dots \vee C_{1p}$ 和 $B\text{-LOSE} = C_{21} \vee C_{22} \vee C_{23} \vee \dots \vee C_{2q}$ 是属于 12DNF 的布尔公式,其中每个 $C_{1i} (1 \leq i \leq p)$ 和 $C_{2j} (1 \leq j \leq q)$ 是最多 12 个文字之间的与运算,每个文字是集合 $X(Y)$ 中的一个变量。例如: z 或 \bar{z} (变量 z 的非运算); α 是对 $X \cup Y$ 的一个赋值,如 $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, 则 $X \cup Y = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ 。对 $X \cup Y$ 赋值,就是对该集合中的各个元素赋值为 0 或 1。比赛双方交替进行, R 方或 B 方通过改变集合 X 和 Y 中的一个变量的值进行走棋。更精确地, R 方能够从局面

($R, R\text{-LOSE}(X, Y), B\text{-LOSE}(X, Y), \alpha$) 下棋到局面 ($B, R\text{-LOSE}(X, Y), B\text{-LOSE}(X, Y), \alpha'$), 当且仅当 α 与 α' 不同, 并且在 α 的赋值下, $R\text{-LOSE}(X, Y)$ 的布尔值为 false。如果在 $R(B)$ 走了若干步后, 公式 $R\text{-LOSE}(B\text{-LOSE})$ 值为 true, 那么 $R(B)$ 失败。在文献[3]中, 该游戏被证明属于 EXPTIME-complete 问题。此游戏的规则与许多棋类游戏有类似之处。比如, 在游戏中有 2 个参与方, 通过判断布尔公式 $R\text{-LOSE}(B\text{-LOSE})$ 的值是否为真来判断某方是否输棋(也就是说, 这 2 个布尔公式可以看作是棋类游戏估值函数)。4 元组中的 α 就是双方兵力的集合, 从 α 对应的 4 元组到 α' 对应的 4 元组可以看作是棋类游戏中的一个走法。因此, 选用 G_3 游戏来构造机器博弈问题的归约模型是非常合适的。

2 对于中国象棋计算复杂性的证明

本文的主要工作是证明对于任意的一个 $n \times n$ 的中国象棋局面, 判定黑方(红方)是否能够获胜的问题属于 EXPTIME-complete。根据计算复杂性类 complete 问题的定义^[1], 证明广义化的中国象棋属于 EXPTIME-complete 的步骤如下:

1) 证明广义化的中国象棋属于 EXPTIME;

2) 构造一个归约模型, 使得 G_3 游戏可归约到中国象棋;

3) 证明此归约可在多项式时间内完成。

2.1 中国象棋的广义化

对于固定棋盘规模的博弈问题(如 9×10 的中国象棋或 8×8 的国际象棋), 可能出现的局面数是有穷的, 即产生的局面数是一个常量。而研究问题的计算复杂性时采用的是渐近法, 用此方法来度量复杂性随着问题规模的增加而变化的增长率。因此, 需要将问题的规模广义化, 即规模是任意大的^[8]。对于中国象棋的广义化, 要保证各个棋子的走法不变, 双方的帅(将)只能有 1 个, 不能广义化为多个, 帅(将)和士不能出“九宫”(由于棋盘被广义化, 所以原来九宫的规模也被扩大了)。

2.2 $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME 问题

该证明比较简单, 可以进行粗略计算。假设

计算机处理象棋的一个局面需要一个单位时间, 则 $n \times n$ 的中国象棋可能产生的局面总和就是其被求解所需总时间的上限值。中国象棋的双方兵种之和为 14, 则 $n \times n$ 个交叉点的中国象棋所能产生的局面总数上限为 $15^{n \times n}$ 。由此得证, $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME 问题。

3 归约模型的构建

本文给出一个 $n \times n$ 的中国象棋局面(实例), 并在此局面上模拟进行任意一个 G_3 游戏。所构建的归约模型(即局面)遵循的主要思想是: 在该模型上能够模拟进行 G_3 游戏, 并对 G_3 游戏所包含的变量适当地赋值, 确保它们所在的子句为 true, 进而使得 G_3 游戏在 $n \times n$ 中国象棋棋盘上能够被求解; 双方都采用车作为进攻的棋子, 在走棋过程中, 将出现吃子和兑子的情况, 最终通过计算吃掉对方的帅(将)所需的总的步数判定哪一方需要的步数更少, 那么该走棋方先于对方获胜。也就是说, 在这个构建的局面上, G_3 游戏中的某个走棋方存在一种赢棋策略, 当且仅当中国象棋的某个走棋方在此给定的局面中存在一种赢棋策略。

3.1 归约模型中各构件的说明

为了在 $n \times n$ 中国象棋的归约模型上模拟 G_3 游戏, 构建此模型的过程中, 既要考虑 G_3 游戏的特点, 也不能违反中国象棋的走棋规则。本文所构建的归约模型主要包括布尔控制器、开关、子句通道、兑子区域、延迟区域和九宫, 这 6 个构件组成了一个 $n \times n$ 中国象棋的特定局面。

3.1.1 布尔控制器

一个布尔控制器(boolean controller, BC)的作用是实现对于 G_3 游戏的 4 元组中的一个布尔变量赋值(true 或 false)。图 1 显示了红方布尔控制器(red boolean controller, RBC)的基本结构, 其中包含的棋子有红兵、红相、红车、红马、红炮、黑车; 包含文字(与 G_3 游戏的子句所包含的文字对应)通道即 x 通道和 $\sim x$ 通道, 以及一个红方的时钟通道(red clock channel)。只要将该图旋转 180° , 并将各个位置上的棋子由红兵换成黑卒、红相换成黑相、红车换成黑车、红马换成黑马、红炮换成黑炮、

黑车换成红车等,就能得到 Black Boolean controller(BBC)的结构。在一个布尔控制器中,只有1个红相和2个车(一个红方、一个黑方)可以主动走棋,其他棋子处于僵局状态,不能主动走棋,但根据各个棋子的走法规则,它们可以被动地吃子。由这些棋子构成的区域迫使双方的车经由给定的通道离开布尔控制器,在 Red Boolean controller 中,若黑方的车吃掉了红方的棋子,则它将立即被邻近的红方棋子吃掉,从而使红方可以经由正常的通道离开布尔控制器,并最终获胜;若有一方的车不经由正常通道离开布尔控制器(例如,黑方的车第一步没有直接走到 x 通道或 $\sim x$ 通道的横向虚线处,而是只走了一格),那么对方的车同样可经由正常的通道离开布尔控制器,并最终可能先于对方获胜。这种不恰当的走法将在后面章节详细论述。

开始时,红方的相必须先走一步,它只有2个走法(即图中的2个虚线位置),这2个走法决定了黑方的车是从 x 通道还是 $\sim x$ 通道离开布尔控制器。若红相移动到南方(即下方)的虚线位置,则黑车可从 x 通道离开,说明该布尔控制器对变量 x 赋值为 true;相反,若红相移动到北方(即上方)的虚线位置,则黑车从 $\sim x$ 通道离开,说明该布尔控制器对变量 x 赋值为 false。如前所述,红相走一步,然后黑车走一步到达 x 通道或 $\sim x$ 通道的横向虚线处;接下来轮到红方的车走棋,它可以从东北角的 x 通道或 $\sim x$ 通道离开,也可以从北方的 Red clock channel(时钟通道)离开此布尔控制器。

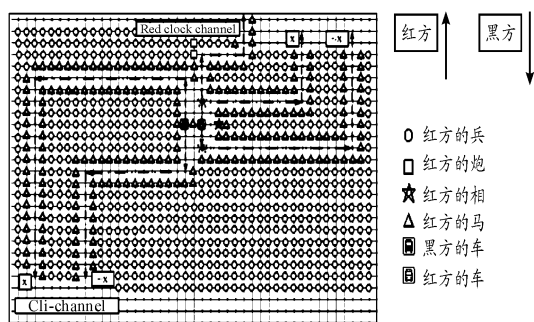


图1 红方的布尔控制器

3.1.2 开关(switch)

开关的作用是确保只有一个对方的车能到达

子句通道,并确保对方的车无法从子句通道再进入BC。图2显示了开关的基本结构。同样,由红马、红兵、红相和红炮组成的区域是一个僵局,它们不能主动移动,但根据各个棋子的走法规则,它们可以吃对方的棋子。

当有黑方的车从 RBC 到达开关时,黑车将按照红方棋子形成的通道走棋,途中将吃掉拦在通道上的一个红马,然后安全地离开开关,到达子句通道。如果黑方的车在吃掉红马后,打算反向走棋并返回布尔控制器,此时被吃掉的红马的东南方的红相将走棋到西北角处,这样红相原来位置左侧的若干个红方的炮(此处炮的数量大于或等于 G_3 游戏所包含的变量的总数)将封锁住红相右侧的通道,使得黑方的车无法返回布尔控制器。同样,子句通道中的黑车也无法经由开关返回布尔控制器。

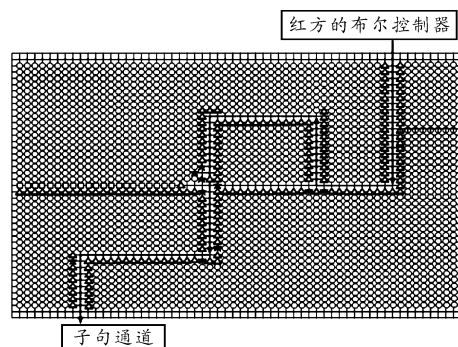


图2 红方的开关

3.1.3 子句通道(C_{ii} -channels)

子句通道对应 G_3 游戏中布尔公式 R-LOSE (B-LOSE) 所包含的子句 C_{ii} 或 C_{2i} 。根据 G_3 游戏的定义,每个子句包含若干个文字,这些文字的“与”运算的值就是该子句的运算结果。图3显示了各个子句通道与各个文字通道形成的交叉结构。

如上所述,黑方的车从 RBC 经由开关到达子句通道,只有子句包含的文字的值为真(如 x)时,黑车才可以停在对应的值为真的文字通道(x 通道)与该子句通道的交叉点处,并经由此子句通道到达兑子区域(exchanging chess zone);否则黑车无法停在文字通道与子句通道的交叉点处,如图3所示。假设子句 C_{ii} 不包含 \bar{x} ,如果黑车经由 \bar{x} 通道

停在此文字通道与 C_{11} 通道的交叉点处,此时黑车将被西南方的红马吃掉,从而无法安全到达兑子区域(exchanging chess zone),最终红方将获胜。此处的一些不恰当走法将在后面章节详细论述。

假设某个子句包含的变量总数为 p ,如该子句通道与文字通道的交叉点处安全地停有 p 个黑方的车,则这 p 个黑车向东移动至兑子区域。

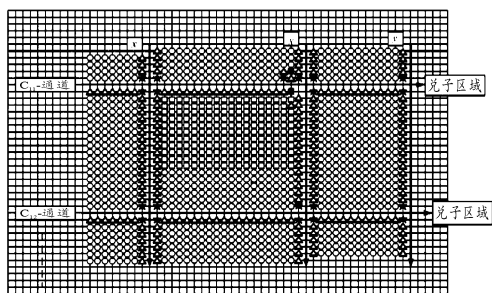


图3 子句通道与文字通道的交叉结构

3.1.4 兑子区域

如果某个子句通道上停有与该子句所包含的文字数相同的黑方的车,则这些车经由该子句通道到达兑子区域。如图4所示,在兑子区域的通道上有一个红方的马,该棋子受到正上方若干个红炮的保护,因此双方开始兑子,直到最后一个红方的炮被黑车吃掉。其中红炮的个数为 $p - x$, p 为该子句所包含的文字数, x 为奇数且 $1 \leq x < p$ 。剩下的黑方的车安全地到达九宫(nine-palace)。

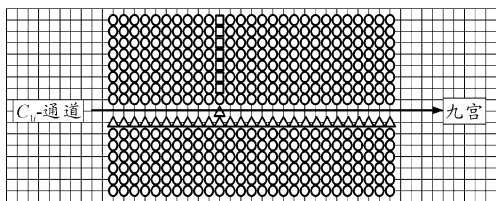


图4 兑子区域

3.1.5 九宫和延迟区域

九宫和延迟区域(delay zone)是归约模型中的最后2个构件。在中国象棋中,九宫是帅(将)和士活动的区域,也是最后一道防线。对于 $n \times n$ 的中国象棋,该区域的帅(将)仍然只有一个,士的数量为多个,士只能在九宫中活动,它的走法为斜走斜吃,且每次只能走一格。图5显示了九宫的基本结构(图中未显示帅的位置),若干个黑方的车

到达九宫,将与九宫中的士进行兑子,并最终吃掉红方的帅。此处子句通道连接的九宫共有 $2 \times (x - 1)$ 个士。

延迟区域与 Clock channel 相连接,如图6所示,是一列马,马的数量为 $12k - 5$ 。其中, k 为 G_3 游戏对应的4元组中子句包含的最大文字数,即 $1 \leq k \leq 12$ 。车吃掉若干个马之后,可直接吃掉对方的帅(将)。

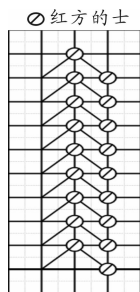


图5 九宫



图6 延迟区域

每个构件中,由若干个棋子构成的区域,迫使黑方的车沿着这些区域形成的通道向另一个构件前进。为了防止若干个黑方的车未按照设计好的通道走棋,而是去吃掉区域中的棋子并冲破这些区域,这些区域要足够厚。它的厚度是子句中所包含的最大文字数的13倍,即 $13k$ 。由3.2节可知,黑方达到这个步数时,红方可先于黑方获胜。

3.2 赢棋策略

图7显示了归约模型的整体结构,它构成了 $n \times n$ 的中国象棋的一个局面。在此局面上模拟 G_3 游戏,若有 p (p 为某个子句包含的文字的个数,文字形如 x 或 $\sim x$) 个黑车安全地停留在该子句通道上,说明 G_3 游戏已被求解;对于 $n \times n$ 的中国象棋,红黑双方通过吃掉对方的帅(将)所需步数的多少来判定是否先于对方获胜。如前所述,第一步由布尔控制器中的红相走棋,它只有2种走法,红相的走棋决定了黑方的车从 x 或 $\sim x$ 通道离开布尔控制器。然后由布尔控制器中的黑车走棋,接下来轮到布尔控制器中的红车走棋,它从东北角的 $x(\sim x)$ 通道或者经由 Red Clock channel 离开布尔控制器,接下来黑方的车经由开关区域到达子句通道。如果某个子句通道上有 p 个黑方的车安全地停留在该通道上,说明该子句的布尔值为

真,即布尔公式 $R-LOSE$ 为真,此时 G_3 游戏已被求解。接下来须计算 $n \times n$ 的中国象棋是否被最终求解。

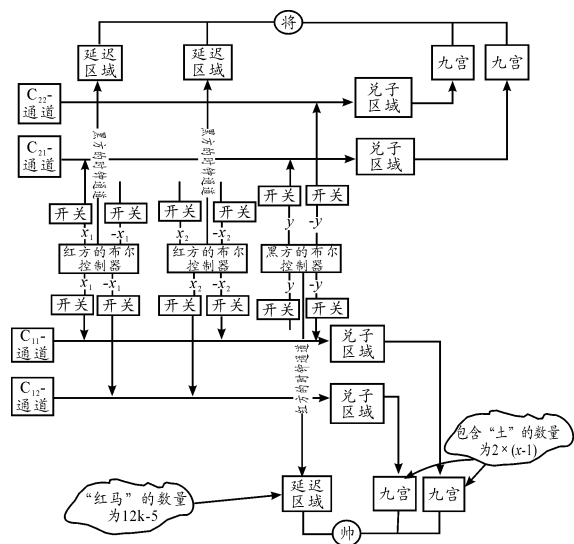


图7 一个归约模型的整体结构,其中 $R-LOSE = C_{11} \vee C_{12}, C_{11} = x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \sim y, C_{12} = \sim x_1 \wedge x_2$;
 $B-LOSE = C_{21} \vee C_{22}, C_{21} = x_1 \wedge y, C_{22} = \sim y$

3.2.1 黑方的赢棋策略

假设黑方的车从 x 或 $\sim x$ 通道正常离开布尔控制器,同一个布尔控制器中的红车从 Red Clock channel 离开。黑车离开布尔控制器需要 3 步(如图 1 所示),经由开关到达子句通道需要 6 步(到达开关的那一步与离开布尔控制器的最后一步是同步),所以一个黑车到达子句通道共用掉 $m = 9$ 步。当某个子句通道 C_{ii} 上已有 p (p 为该子句包含的文字的个数, $1 \leq p \leq k \leq 12$, 文字形如 x 或 $\sim x$) 个黑车,则这 p 个黑方的车将陆续到达兑子区域,并开始与红方兑子。兑子过程所需步数计算如下: p 个黑车要吃掉 1 个拦在通道上的红马和 $p - x$ 个红炮,所以在兑子区域共用掉黑方 $p - x + 1$ 步。而剩下的 x 个黑车需要多走 1 步(经过一个拐点)顺利到达九宫,九宫中共有 $2 \times (x - 1)$ 个士,每 2 个士能兑掉 1 个黑方的车,所以这里需要与士进行兑子,吃掉 $2 \times (x - 1)$ 个士。而每吃掉 2 个士,还需再走一步吃掉另外的 1 个士,因此在九宫共用掉黑方 $2 \times (x - 1) + 2 \times (x - 1) \div 2 - 1 = 3x - 4$ 步,最后剩下的 1 个黑车需要两步吃掉对方的帅。综上所述,黑方下完这盘棋共需要: $m \times$

$p + p - x + 1 + x + 3x - 4 + 2 = (m + 1) \times p + 3x - 1$ 步,又 $m = 9$,所以总的步数为 $10p + 3x - 1$ 。

下面计算红方。在布尔控制器中,红方的车经由 Red Clock channel 离开布尔控制器需要 3 步,同时红相用掉 1 步。在兑子区域,红方用 $p - x$ 步吃掉对方 $p - x$ 个车。在九宫中红方的士吃掉对方 $x - 1$ 个车,所以在九宫兑子的过程中,红方用了 $x - 1$ 步。红方的车到达延迟区域,这里有 $12k - 5$ 个对方的马,红车吃掉这些马之后,又用了 2 步吃掉对方的将。因此,红方所需总的步数为: $3 + 1 + p - x + x - 1 + 12k - 5 + 2 = 12k + p$ 。因为 $1 \leq p \leq k \leq 12$ 且 $1 \leq x \leq p - 1$,所以红方获胜所需步数比黑方多 1 步。综上所述,黑方必胜。

3.2.2 红方的赢棋策略

黑方需要将 p 个车落在某个子句通道上,每个车到达子句通道需要 m 步,但有可能该子句通道对应的子句 $C_{ii} = 0$ 。例如:子句 $C_{11} = x_1 \wedge x_2 \wedge y_1$,BBC 中的黑象的走棋决定了变量 y_1 的赋值,如果黑象的走棋使得在同一布尔控制器中的黑车从 $\sim y_1$ 离开此布尔控制器,则说明变量 y_1 被赋值为 false,则子句 $C_{11} = 0$ 。因此,若子句 $C_{ii} = 0$,则之前若干个停在该子句通道上的黑车(设为 y 个)至少需要 1 步才能移动到一个能使子句的值为真的通道上。若该子句通道所包含的文字数为 k (包含的最大文字数),且该子句连接的兑子区域中的红炮的数量为 1 (即 x 的值为 $k - 1$),则黑方吃掉帅所需总的步数为 $10k + 3(k - 1) - 1 + y = 13k - 4 + y$;红方获胜所需步数为 $12k + k = 13k$ 。因此,当 $y > 4$ 时,红方先于黑方获胜。

4 不恰当走法分析

4.1 红方布尔控制器(RBC)中可能存在的不恰当走法(BBC与RBC中可能出现的不恰当走法类似)

1) RBC 中的黑车第 1 步到达北面的 x 通道,若它下一步往东走,进入 Red Clock channel,在它吃掉 1 个红方的马后,将被上方的红炮吃掉。南面的 $\sim x$ 通道同理。

2) RBC 中的黑车通过任何途径都无法吃掉

红方的相;

3) RBC 中只有双方的 2 个车和红方的相可以主动走棋,其他棋子只能被动吃子。例如:RBC 中通道拐角处的红马若走到黑车的通道上,将被黑车吃掉,而黑车不会受到威胁。

4.2 子句通道与文字通道的交叉点处可能存在的不恰当走法

黑方的车离开开关到达子句通道,只有其所在的通道对应的文字在子句中为真时,黑车才能安全地停在文字通道与子句通道的交叉点处,否则将被交叉点西南方的红马吃掉。假设该红马吃掉黑车后,被同一子句通道上的其他黑车吃掉,则红马原来位置左侧的红炮将向东移动到文字通道上。该红炮由若干个西侧的红炮保护,防止交叉点上的黑车向另一个子句通道上移动。若此黑车打算吃掉该红炮,将被红炮西侧的另一个红方的炮吃掉;若此黑车打算由此交叉点所在的文字通道反向冲入布尔控制器,则将被开关中红方的炮吃掉。

5 结论

根据各章节的论述及 EXPTIME-complete 问题的定义,证明 $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题:

1) 根据 2.2 节的论述,可知 $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME 问题。

2) 根据第 3 节的论述,可知在模拟的过程中,采用的是任意的一个 G_3 游戏实例,从而说明一个给定的 $n \times n$ 的中国象棋局面(构建的归约模型所形成的局面)可以求解任意的一个 G_3 游戏的实例。也就是说,存在这样的归约,可以将任意的一个 G_3 游戏问题转换成 $n \times n$ 的中国象棋问题。根据可归约性的定义^[8]:

问题 A 是可归约到问题 B 的,如果存在可计算函数 f :使得对每个 $w, w \in A, f(w) \in B$,称函数 f 为 A 到 B 的归约。

由此可说明, G_3 游戏可归约到 $n \times n$ 的中国象棋。再者, G_3 游戏已被证明属于 EXPTIME-com-

plete 问题^[3],根据 EXPTIME-complete 问题的定义可知,所有属于 EXPTIME 的问题都可归约到 G_3 游戏。根据归约可传递的特性^[8]可知:所有属于 EXPTIME 的问题都可归约到 $n \times n$ 的中国象棋。

接下来需要估算第 3 节中构建归约模型所需要的时间。设 m 为 4 元组包含的变量总数,对于每个变量,在归约模型中,需要用到 1 个布尔控制器、4 个文字通道、4 个开关区域、1 个 Clock channel 以及最多 4 个与文字通道交叉的子句通道(可能某个文字不存在于任何子句中,所以该文字通道不与任何子句通道交叉,如图 6 所示)。各个组成部分都存在固定数量的处于僵局的各个棋子构成的区域。前面已提到这种区域的厚度为 $13k$,固定数量的区域形成的总厚度为 $O(k)$,又因为共有 m 个变量,所以此归约模型的总规模可以记为 $O(m \times k)$ 。因此,此归约模型可在多项式时间内构建完成。结合前面的论述得证:所有属于 EXPTIME 的问题都可在多项式时间内归约到 $n \times n$ 的中国象棋。

由以上两点得证: $n \times n$ 的中国象棋属于 EXPTIME-complete 问题。

参考文献:

- [1] AVIEZW S. FRAENKEL. Computing a perfect strategy for $n \times n$ chess requires time exponential in n [J]. JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series A 31, 1981:199-214.
- [2] Robson J M. N by N Checkers is EXPTIME complete [J]. SIAM Journal on Computing, 1984, 13 (2): 252-267.
- [3] STOCKMEYER L J, CHANDRA A K. Provably difficult combinatorial games[J]. SIAM J. Compuf, 1979 (8):151-174.
- [4] Lichtenstein D, Sipser M. Go is polynomial-space hard [J]. Journal of the ACM, 1980(27):393-401.
- [5] Reisch S. Gobang ist PSPACE-vollständig (Gobang is PSPACE-complete)[J]. Acta Informatica, 1980 (13):59-66.

的有效行分别进行检验,结果见表 5。

表 5 对极值理论结果的 Kupiec 失败率检验

股票	样本长度	失败次数	置信水平	LR 统计量
沪深 300	237	1	0.95	3.27[<3.841 459]
宝安地产	237	0	0.95	3.59[<3.841 459]
长江证券	237	0	0.95	3.59[<3.841 459]

检验结果显示:在 95% 的置信水平下 LR 统计量大于卡方统计量的临界值。说明:① 对同一支股票而言,不论是长期头寸还是短期头寸,它们的失败次数是一致的;② 同蒙特卡洛和历史模拟法相比,极值理论计算所得的 VaR 值通过了 Kupiec 失败率检验,初步说明与历史模拟法和蒙特卡洛模拟法相比,应用极值理论可以利用高频数据对我国市场的在值风险 (VaR) 进行有效的估计。

3 结束语

为了判别国内金融市场间是否存在异构型,本文选取了国内沪深两大金融市场 2013 年的“沪深 300”、“宝安地产”和“长江证券”的 5 min 高频数据作为研究对象,选取经典的历史模拟法、蒙特卡洛模拟法和极值理论依次对 3 支股票的在值风险进行预测,并通过 Kupiec 失败率检验对国内金融市场异构性做出判断。初步得到以下结果:历史模拟法并不能很有效地应用于高频金融数据的国内市场;为了考查国内市场高频数据的正态性,采用 Shapiro-Wilk 检验方法,依次对每天的历史数

据进行分析,发现全年每天的交易数据并不能全部显示出正态性,从而初步断定蒙特卡洛模拟法对 VaR 值得估计会失效,Kupiec 失败率检验的结果验证了这一断定。为了判定是否数据存有后尾特性,本文在蒙特卡洛模拟之后应用了极值理论对 3 支个股数据进行分析。结果显示:通过极值理论计算的 VaR 值能够大部分通过失败率检验,可有效地对国内市场的在值风险进行度量。

参考文献:

[1] Butler J S, Schachter B. Estimating value-at-risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation[J]. Review of Derivatives Research. Springer,1998,1(4):371-390.

[2] David J, Moya. Estimating oil price “Value at Risk” using the historical simulation approach[J]. Energy Economics,2003,25(3):239-253.

[3] Asfaha T, Desmond A F, Hailu G. Statistical Evaluation of Value at Risk Models for Estimating Agricultural Risk [J]. Journal of Statistical and Econometric Methods, 2014,3(1): 13-34.

[4] 陈玉峰,孙洪祥,温巧燕. 基于历史模拟法的 VaR 计算及其优化[J]. 中国科技论文在线精品论文,2011,4(13):1231-1237.

[5] Longin F M, From value at risk to stress testing: The extreme value approach [J]. Journal of Banking and Finance,2000,24(7):1097-1103.

[6] Genay R, Seluk F. Extreme value theory and value-at-risk: relative performance in emerging markets[J]. International Journal of Forecasting,2004,20(2):287-303.

(责任编辑 刘 舸)

(上接第 91 页)

[6] Ming Yu Hsieh, Shi-Chun Tsai. On the fairness and complexity of generalized k-in-a-row games [J]. Theoretical Computer Science, 2007(385): 88-100.

[7] Iwata S, Kasai T. The Othello game on an $n \times n$ board is PSPACE-complete [J]. Theoretical Computer Science, 1994 (123): 329-340.

[8] Michael Sipser. Introduction to the Theory of Computation

(Second Edition) [M]. China Machine Press, 2006.

[9] Robert A. Hearn, Amazons is PSPACE-comp-lete [EB/OL]. arXiv:cs. CC/0502013v1, 2005.

[10] Yen Shi-Jim, Chen Jr-Chang, Yang Tai-Ning. COMPUTER CHINESE CHESS [Z]. ICCA, 2004.

[11] Christos Papadimitriou. Computational Complexity [M]. [S. l.]: Addison-Wesley, 2001.

(责任编辑 杨黎丽)