对角化

2022年6月13日　　15:52

对角化矩阵　A的幂

假设A有n个线性无关特征向量

按列组成矩阵S，很自然称它为

特征向量矩阵。列向量就是特征向量

AS 得啥？

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & & \vdots \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

这个对角矩阵
就是特征值矩阵。

$AS = S\Lambda$

$S^{-1}AS = \Lambda$ 这就是对角化的一种方法。

如果 $AX = \lambda X$

$A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$.

$A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$

$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

说A的k次方的特征值是A特征值的k次方。特征向量不变。

特征值.特征向量提供一种理解矩阵幂的好方法~~，如果将矩阵平方~~。

特征值是算矩阵幂的一种方法。

A必然存在n个线性无关特征向量.

并且可对角化

如果所有λ值不同。

有一条定理

$A^k \to 0$ 随着 $k \to \infty$.

如果所有 $|\lambda_i| < 1$

对称矩阵及正定性

① 对称矩阵 特征值都是实数

② 对称矩阵. 特征向量都是垂直地。

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

Q的列向量标准正交。

$$A = Q\Lambda Q^T$$

给定一个对称阵就能分解成正交矩阵乘以对角矩阵乘以正交矩阵的转置。

为啥特征值是实数?

$Ax = \lambda x$. $\qquad \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$

$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ $\qquad \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{\lambda} \bar{x}^T \bar{x}$

$\bar{x}^T A^T = \bar{x}^T \bar{\lambda}^T$

推出 $\lambda = \bar{\lambda}$. 并且不是0

所以是实数 (所有的特征值)

$$A = Q \Lambda Q^T$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \underline{q_1 q_1^T} + \lambda_2 q_2 q_2^T + \cdots$$

这是啥矩阵

投影矩阵.

每一个对称矩阵都是一些互相垂直的投影矩阵的组合。

对于对称阵来说，主元的符号与特征值的符号一致.