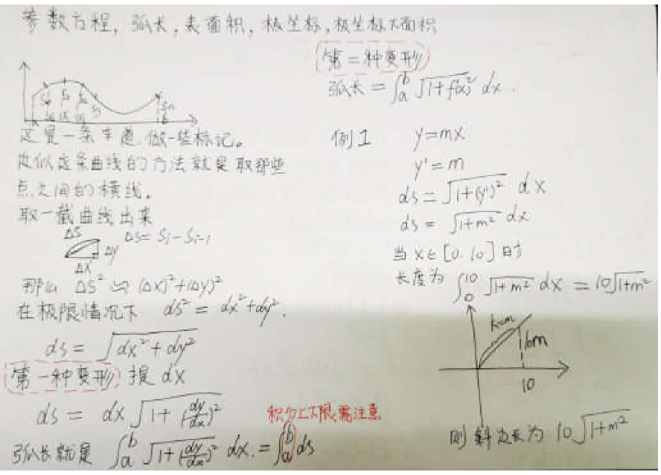
弧长 参数方程 极坐标和面积

2022年3月3日 10:35



参数方程，弧长，表面积，极坐标，极坐标下面积

这是一条车道，做一些标记。
近似这条曲线的方法就是取那些点之间的横线。
取一截曲线出来

$\Delta s = s_i - s_{i-1}$

那么 $\Delta s^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
在极限情况下 $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

第一种变形 提 dx

$ds = dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ 积分上下限需注意

弧长就是 $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_a^b ds$

第二种变形

弧长 $= \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

例1 $y = mx$

$y' = m$

$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$ds = \sqrt{1+m^2}\,dx$

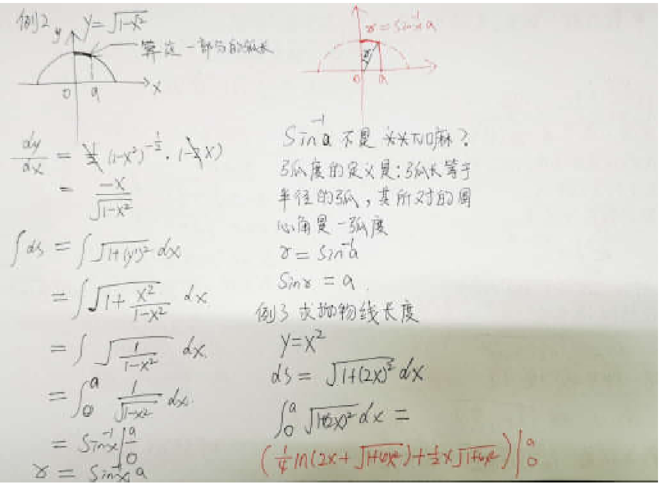
当 $x \in [0, 10]$ 时

长度为 $\int_0^{10} \sqrt{1+m^2}\,dx = 10\sqrt{1+m^2}$

则斜边长为 $10\sqrt{1+m^2}$

推导求弧长的公式

例题1 求直线的弧长



例2 $y = \sqrt{1-x^2}$ 算这一部分的弧长

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int ds = \int \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$= \int \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$

$= \int \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx$

$= \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \sin^{-1}x \Big|_0^a$

$\theta = \sin^{-1}a$

$\theta = \sin^{-1}a$

$\sin^{-1}a$ 不是关于加嘛？
弧度的定义是：弧长等于半径的弧，其所对的圆心角是一弧度
$\theta = \sin^{-1}a$
$\sin\theta = a$

例3 求抛物线长度

$y = x^2$

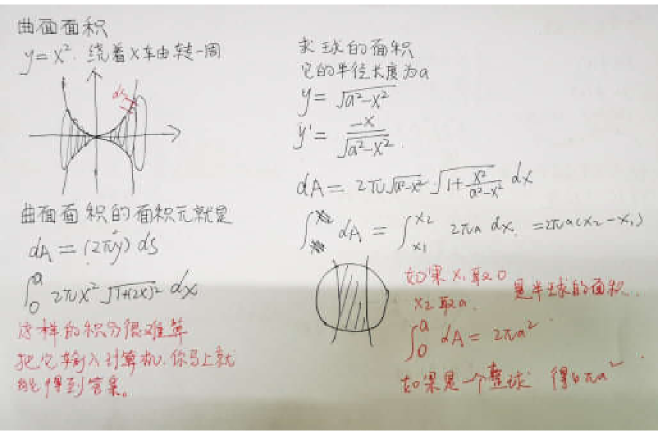
$ds = \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$

$\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,dx =$

$\left(\frac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})+\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}\right)\Big|_0^a$

例题二求圆的弧长

例题三求抛物线的弧长



曲面面积

$y = x^2$ 绕着x轴转一周

曲面面积的面积元就是

$dA = (2\pi y)\,ds$

$\int_0^a 2\pi x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$

这样的积分很难算
把它输入计算机，你马上就能得到答案。

求球的面积
它的半径长度为a

$y = \sqrt{a^2-x^2}$

$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$dA = 2\pi\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$

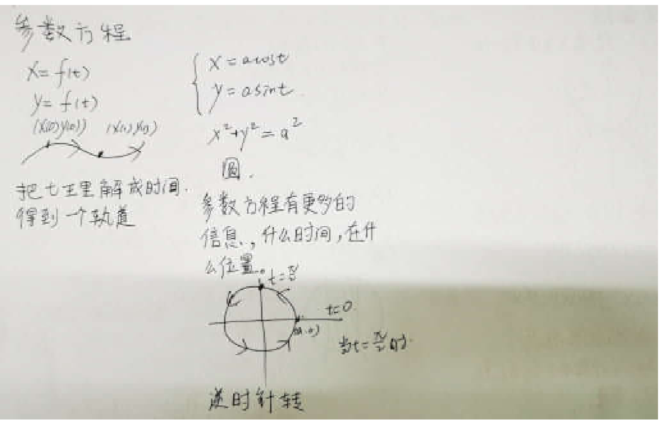
$\int dA = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi a\,dx = 2\pi a(x_2 - x_1)$

如果 x_1 取0，x_2 取a，是半球的面积。

$\int_0^a dA = 2\pi a^2$

如果是一个整球 得 $4\pi a^2$

求曲面的面积



参数方程

$x = f(t)$

$y = f(t)$

$(x(0), y(0))$ $(x(1), y(1))$

把t理解成时间，得到一个轨道

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

$x^2 + y^2 = a^2$

圆。

参数方程有更多的信息，什么时间，在什么位置。

$t = \frac{\pi}{2}$

$t = 0$

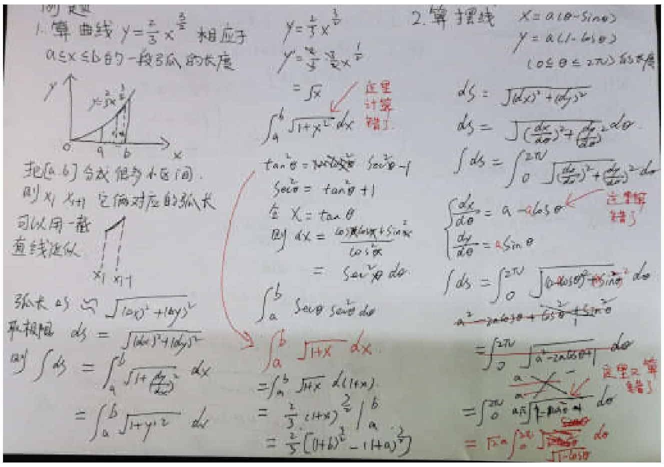
$(a, 0)$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时

逆时针转

介绍参数方程的基本概念

课本上的几个求弧长的练习题



例题

1. 算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 相应于 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度

把[a,b]分成很多小区间，则 x_i x_{i+1} 它俩对应的弧长可以用一截直线近似

弧长 $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

取极限 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

则 $\int ds=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

$=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{x}$　这里计算错了

$\int_a^b\sqrt{1+x^2}\,dx$

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$

令 $x=\tan\theta$

$=\int_a^b\sqrt{1+x}\,dx$

$=\int_a^b\sqrt{1+x}\,d(1+x)$

$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^b$

$=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}]$

2. 算摆线 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ $(0\le\theta\le2\pi)$ 的长度

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$ds=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$

$\int ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$

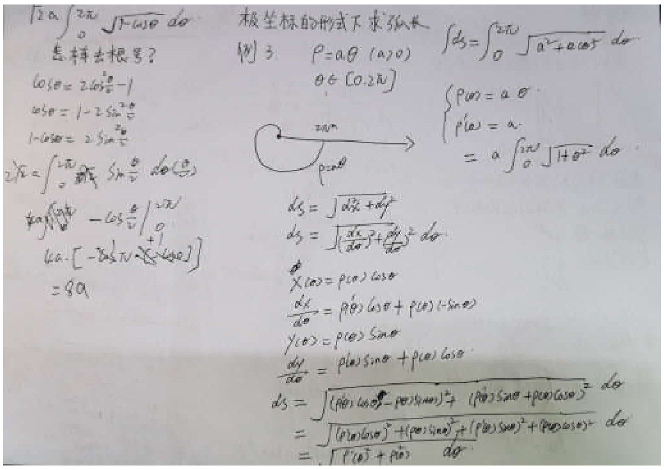
$\frac{dx}{d\theta}=a-a\cos\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$　这里算错了

这里又算错了

$=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$

第一个是普通方程形势下求弧长
第二个是参数方程形势下求弧长
第三个是极坐标形势下求弧长

计算！！！
算错了三处！！！



$\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$

怎样去根号？

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=8a$

极坐标的形式下求弧长

例3. $\rho=a\theta$ $(a>0)$，$\theta\in[0,2\pi]$

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$

$ds=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$

$x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=\rho'(\theta)\cos\theta+\rho(\theta)(-\sin\theta)$

$y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta$

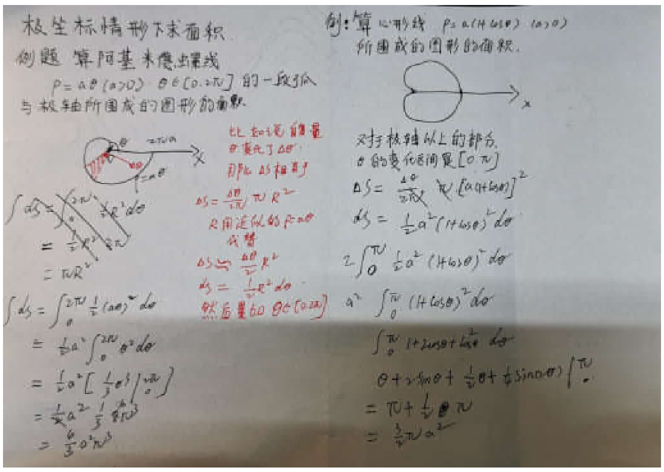
$\frac{dy}{d\theta}=\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta$

$=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

$\int ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,d\theta$

$\rho(\theta)=a\theta$，$\rho'(\theta)=a$

$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$



极坐标情形下求面积

例题 算阿基米德螺线 $\rho=a\theta$ $(a>0)$ $\theta\in[0,2\pi]$ 的一段弧与极轴所围成的图形的面积

$\int ds=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2\,d\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta$

$=\frac{1}{2}a^2[\frac{1}{3}\theta^3|_0^{2\pi}]$

$=\frac{4}{3}a^2\pi^3$

然后量的 $\theta\in[0,2\pi]$

例：算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围成的图形的面积。

对于极轴以上的部分，θ 的变化范围 $[0,\pi]$

$ds=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$

$2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$

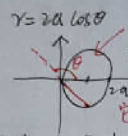
$a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$

$=\frac{3}{2}\pi a^2$

极坐标情况下求面积的两道例题

思考

$r = 2a\cos\theta$



比如方向现在是这样的。

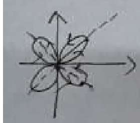
它也有个 $2a\cos\theta$ 不过是负的反方向。

图中可以看出 θ 的变化范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

如果 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 会怎样？

例2. 例3 是两道绘图题。

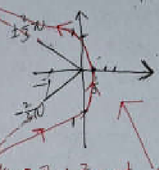
例2. $r = \sin 2\theta$



θ	r
0	0
最大 $\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3}{4}\pi$	-1
π	0

例3. $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$

当 $r=0$ 是焦点，是太阳的位置



θ	r	
0	$\frac{1}{3}$	
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	
$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	
π	-1	
$-\frac{\pi}{2}$	1	

这个是彗星轨道!!!

当 θ 是 $\pm\frac{2}{3}\pi$ 时分母是 0

$\frac{1}{2\cos\theta+1} = 0$

$2\cos\theta = -1$

$\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$

当 $\theta \to \pm\frac{2}{3}\pi$ 时 r 无穷大，

所以可以画出大致图像。

$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$

$r + 2r\cos\theta = 1$

$r = 1 - 2r\cos\theta$

$r = 1 - 2x$

$x^2 + y^2 = (1-2x)^2$

$x^2 - 4x^2 + 4x - 1 + y^2 = 0$

$y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$

双曲线

如果 $\theta > \frac{2}{3}\pi$ 分母就小于0了，曲线是怎样的？那就是另一个分支。

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

它就是开普勒定律

$\frac{dA}{dt}$ 是一个常数

(面积的变化率)

它取决于太阳

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

$r^2 \frac{d\theta}{dt}$ 是一个常数

这个是角动量守恒

极坐标画图

第一个是四叶曲线

第二个是双曲线 （是彗星围绕着太阳运行的轨迹）

极坐标形式能表达好多信息，比如双曲线从哪开始然后要往哪走还能表示出双曲线的某一只