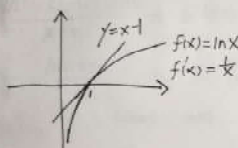


线性近似和二阶近似

2021年11月6日 21:37

线性近似和二阶近似

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$


例 $x_0=1$ $f(x_0)=\ln 1=0$
 $f'(x_0)=\frac{1}{x}=1$
 $\ln x = 0 + 1(x-1)$
 $\ln x \approx x-1$
 在 $x=1$ 的邻域内, 它们相近.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$
 $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_0)$
 $\Delta f \approx f'(x_0) \Delta x$
 $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

举几个例子, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求几个函数的线性近似函数.

$\sin x$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$
 $\sin x - \sin 0 = f'(0)(x - 0)$
 $\sin x = x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时成立.

$\cos x$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$
 $\cos x - \cos 0 = -\sin 0(x - 0)$
 $\cos x = 1$ 当 $x \rightarrow 0$ 时成立.

e^x : $e^x - e^0 = 1(x - 0)$
 $e^x = x + 1$ 当 $x \rightarrow 0$ 时成立.

线性近似

列举了几个例子

需要重点注意一下线性近似的几何意义

后面二阶近似提了一点

下节课重点讲

二阶近似挺有用的, 可以做一下课本上的练习题

$\ln(1+x)$, $(1+x)^y$ 求它们俩当 $x=0$ 时的线性近似.

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \ln'(1+x)|_{x=0}$$

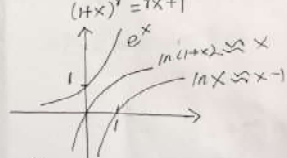
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x}|_{x=0}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\frac{(1+x)^y - 1}{x - 0} = (1+x)^y|_{x=0}$$

$$\frac{(1+x)^y - 1}{x} = y(1+x)^{y-1}|_{x=0}$$

$$\frac{(1+x)^y - 1}{x} = y$$

$$(1+x)^y \approx yx + 1$$


例 求 $\ln x$ 的值
 $\ln x \approx x-1$
 $\approx \frac{1}{10}$

例 找 $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}$ 在 $x=0$ 的线性近似函数.

方法一 $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{d}{dx} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}|_{x=0}$
 $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}} \approx -\frac{7}{2}x + 1$ 方法二: 利用之前求得的线性近似.
 $e^{-3x} \approx 1 - 3x$
 $\frac{1 - 3x}{1 + \frac{1}{2}x} \approx (1 - 3x) \cdot (1 - \frac{1}{2}x + 1)$
 $\approx -\frac{7}{2}x + 1$ (高阶项扔掉)

例 4. 速度 $v = 4 \text{ km/s}$
 卫星时间 T

时间为 T'
 $T' = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ v 是卫星速度
 c 是光速 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$T' \approx (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}v^2/c^2 + 1)T$
 $T' \approx (\frac{1}{2} + 1)T$
 $T' \approx T(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2})$

二阶近似
 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

$\sin x \approx x$
 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$
 $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
 当 $x \rightarrow 0$ 时成立.

二阶近似的几何意义

二阶近似

选0作为基点

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 \quad f(0) = a$$

$$f'(x) = b + 2cx \quad f'(0) = b$$

$$f''(x) = 2c \quad \frac{1}{2}f''(0) = c$$

以0为基点，二阶近似函数

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2$$

这是关于二阶近似的
一些公式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k})^k \rightarrow e$$

$$\ln a_k = k \ln (1 + \frac{1}{k})$$

当k生近似于1/k

$$\ln a_k = 1$$

例：求 $e^{-3x}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 当x趋于0时

的二阶近似

$$e^{-3x}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad x \rightarrow 0 \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$$
$$= (1-3x+\frac{9}{2}x^2)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2)$$

无高阶项

$$\approx 1 - 3x - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x^2$$

常数项 一阶项 二阶项

x→0时成立

$$\approx 1 - \frac{7}{2}x + \frac{51}{8}x^2$$