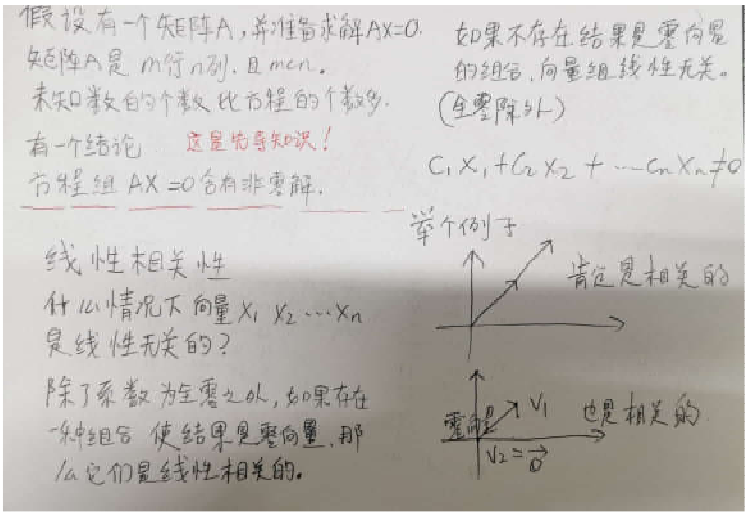
# 线性相关 列空间生成 基 维度

2022年5月9日 17:38



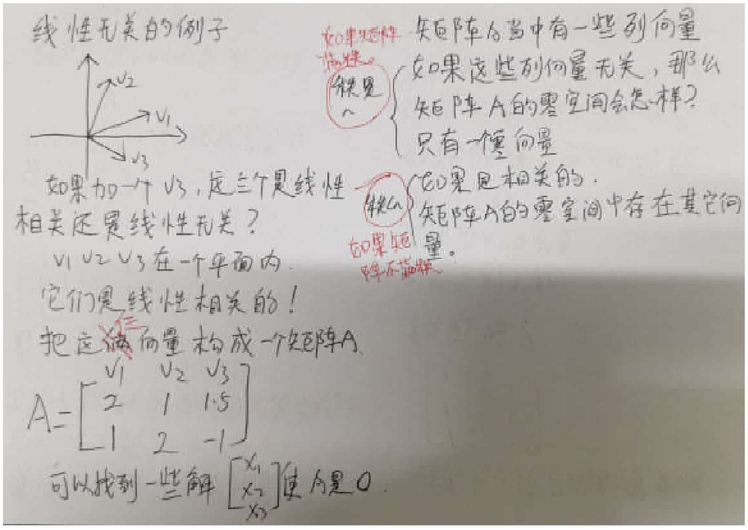
假设有一个矩阵A，并准备求解AX=0.
矩阵A是 m行n列，且m<n。
未知数的个数比方程的个数多。
有一个结论 这是先导知识！
方程组 AX=0含有非零解。

如果不存在结果是零向量的组合，向量组线性无关。
(全零除外)

$c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n\neq 0$

线性相关性
什么情况下向量 $x_1\ x_2\cdots x_n$ 是线性无关的？
除了系数为全零之外，如果存在一种组合使结果是零向量，那么它们是线性相关的。

举个例子
肯定是相关的
零向量 $v_1$ 也是相关的
$v_2=\vec{0}$



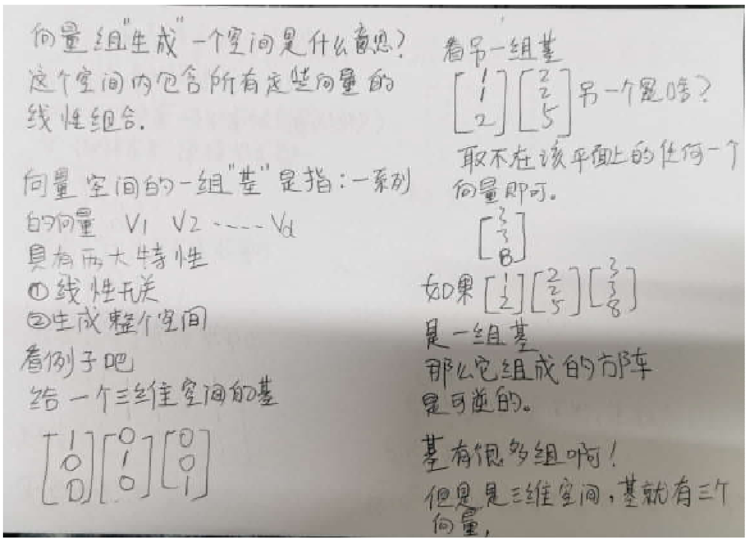
线性无关的例子
$v_2$ $v_1$ $v_3$

如果加一个 $v_3$，这三个是线性相关还是线性无关？
$v_1\ v_2\ v_3$ 在一个平面内.
它们是线性相关的！
把这~~俩~~仨向量构成一个矩阵A

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

可以找到一些解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 使A是0.

矩阵A当中有一些列向量
如果矩阵满秩
缺是
如果这些列向量无关，那么矩阵A的零空间会怎样？
只有一个零向量
缺么
如果矩阵不满秩
如果是相关的.
矩阵A的零空间中存在其它向量。



向量组"生成"一个空间是什么意思？
这个空间内包含所有这些向量的线性组合.

向量空间的一组"基"是指：一系列的向量 $V_1\ V_2 \cdots\cdots V_d$
具有两大特性
①线性无关
②生成整个空间
看例子吧
给一个三维空间的基

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

看另一组基
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 另一个是啥？
取不在该平面上的任何一个向量即可。
$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$
如果 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$
是一组基
那么它组成的方阵是可逆的。

基有很多组啊！
但是是三维空间，基就有三个向量，

觉得每句话都是经典，每句话都能找到一种视角来观察线性代数的知识。
所有的概念之间都是有联系的。

某空间的每一组基都具有相同的向量个数。
这个个数就是空间的维数。

看个例子吧！

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

它是线性相关的吗？
显然不是
比如 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 就能使它是0。
那么这四个列向量能生成空间吗？当然可以了，

那么它生成空间的基是啥？

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

秩是啥？ 2

2是主列个数，
主列可以构成基
所以2是维度
矩阵的秩是列空间维数.
如果知道列空间的维数 dim
随便知道n个线性无关的
向量就能生成空间。

还看零空间.
矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

这个 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 会使它为0

还有 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 也会使它为0

这俩结果是线性无关的.
那么它俩是一组基吗（零空间的）
零空间的维度是多少？
是. 零空间也是二维的

零空间的维数是自由变量的数
已知秩 $r$ $m\times n$
则 $n-r$ 是零空间维数。