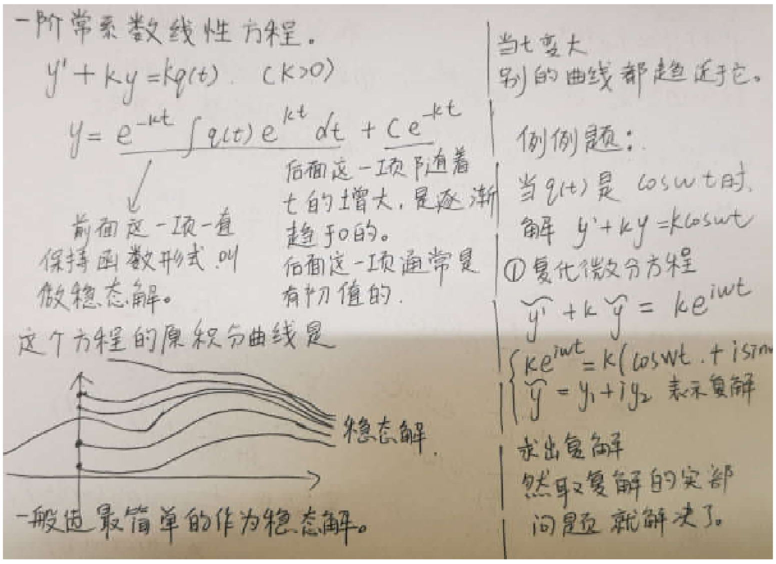
一阶常系数线性微分方程

2022年4月19日　　21:37



一阶常系数线性方程。

$y'+ky=kq(t)$　$(k>0)$

$y=e^{-kt}\int q(t)e^{kt}dt+Ce^{-kt}$

前面这一项一直保持函数形式，叫做稳态解。

后面这一项随着t的增大，是逐渐趋于0的。后面这一项通常是有初值的。

这个方程的原积分曲线是

稳态解.

一般选最简单的作为稳态解。

当t变大 别的曲线都趋近于它。

例例题：

当$q(t)$是 $\cos wt$时，解 $y'+ky=k\cos wt$

① 复化微分方程

$\tilde{y}'+k\tilde{y}=ke^{iwt}$

$ke^{iwt}=k(\cos wt+i\sin wt)$

$\tilde{y}=y_1+iy_2$ 表示复解

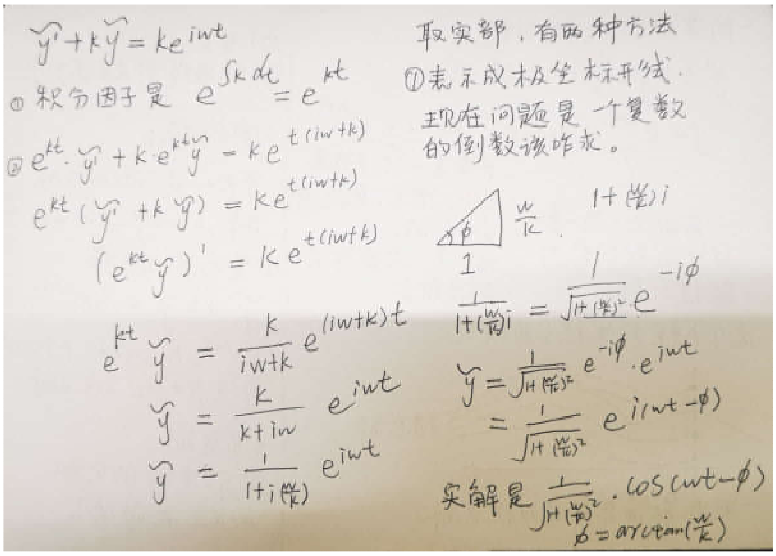
求出复解

然后取复解的实部

问题就解决了。

说了一阶常系数线性方程图像上的特征

然后说了利用复数来解这种形式的微分方程



$\tilde{y}'+k\tilde{y}=ke^{iwt}$

① 积分因子是 $e^{\int k\,dt}=e^{kt}$

② $e^{kt}\cdot\tilde{y}'+ke^{kt}\tilde{y}=ke^{t(iw+k)}$

$e^{kt}(\tilde{y}'+k\tilde{y})=ke^{t(iw+k)}$

$(e^{kt}\tilde{y})'=ke^{t(iw+k)}$

$e^{kt}\tilde{y}=\frac{k}{iw+k}e^{(iw+k)t}$

$\tilde{y}=\frac{k}{k+iw}e^{iwt}$

$\tilde{y}=\frac{1}{1+i(\frac{w}{k})}e^{iwt}$

取实部，有两种方法

① 表示成极坐标形式.

现在问题是一个复数的倒数该咋求。

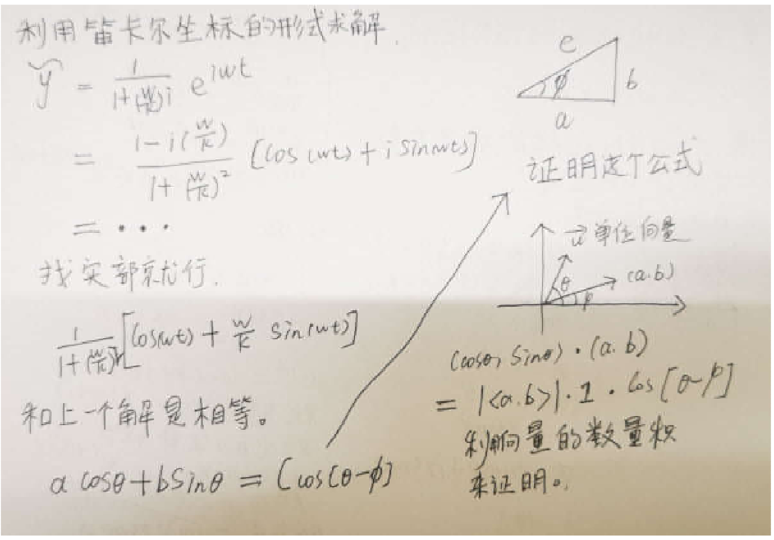
$\frac{w}{k}$　1　ϕ　$1+(\frac{w}{k})i$

$\frac{1}{1+(\frac{w}{k})i}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w}{k})^2}}e^{-i\phi}$

$\tilde{y}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w}{k})^2}}e^{-i\phi}\cdot e^{iwt}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w}{k})^2}}e^{i(wt-\phi)}$

实解是 $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w}{k})^2}}\cdot\cos(wt-\phi)$

$\phi=\arctan(\frac{w}{k})$



利用笛卡尔坐标的形式求解.

$\tilde{y}=\frac{1}{1+(\frac{w}{k})i}e^{iwt}$

$=\frac{1-i(\frac{w}{k})}{1+(\frac{w}{k})^2}[\cos(wt)+i\sin(wt)]$

$=\cdots$

找实部就行.

$\frac{1}{1+(\frac{w}{k})^2}[\cos(wt)+\frac{w}{k}\sin(wt)]$

和上一个解是相等。

$a\cos\theta+b\sin\theta=C\cos(\theta-\phi)$

c　b　a　ϕ

证明这个公式

单位向量　(a,b)　θ　ϕ

$(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(a,b)$

$=|\langle a,b\rangle|\cdot 1\cdot\cos[\theta-\phi]$

利用向量的数量积来证明。

一条定理

使用向量数量积的方法证明

使用复数的方法证明

利用复数的形式来

证明

$a\cos\theta + b\sin\theta = C\cos[\theta-\varphi]$

$(a-bi)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \sqrt{a^2+b^2}e^{-i\varphi} \quad e^{i\theta}$

$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{i(\theta-\varphi)}$

求它的实部 $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos[\theta-\varphi]$

啥时候不能用

那三种方程???

复习之前的方程

① $y' + ky = kq(t)$

② $y' + ky = q(t)$ $\quad \underline{k>0}$

③ $y' + p(t)y = q(t)$