二重积分

2022年4月12日　　21:09

直角坐标下

二重积分

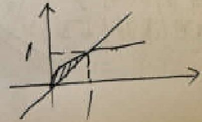
关于积分次序的问题，原则上两种顺序都可以。

如果积分域形状比较古怪的话，某一积分次序可能比另一种更简便些。有时候用其中一种可以算出来结果，但用另外一种就比较困难。理论上两种次序都是可行的。

例题 $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y}\, dy\, dx$.

像这个题，内积分没有办法算出来

交换积分次序很有用



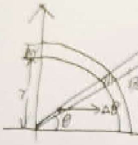
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{e^y}{y}\, dx\, dy$$

$$\int_{y^2}^{y} \frac{e^y}{y}\, dx = e^y - e^y y$$

$$\int_0^1 e^y - e^y y\, dy = -ye^y + 2e^y$$

极坐标下

极坐标下二重积分



则这个小阴影区域的面积是多少

当 θ 变化 $\Delta\theta$

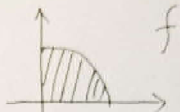
当 r 变化 Δr 时

ΔA 是多少呢？

$\Delta A \approx \Delta r \cdot r\Delta\theta$

$dA = r\, dr\, d\theta$.

$\iint f\, r\, dr\, d\theta$



$f = 1 - x^2 - y^2$

转换成极坐标形式下

$f = 1 - r^2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \Big|_0^1\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8}$$

比直角坐标形式下简单多了。

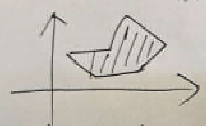
这个课上还讲了一个物理上的一个案例

二重积分应用

它是对区域里函数值求和.

1). 找区域 R 的面积.

$\text{Area}(R) = \iint_R 1\, dA$



算整个区域的面积微元 dA 的总和.

2). 可以通过密度来求一个平面物体的质量。

质量就是密度乘以面积微元的二重积分.

3) 求区域上一些数量的平均值。

连续数据集合平均值的方法，实际上是对整个数据集合上的函数积分然后再除以这个集合的大小。

$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}} \iint f\, dA$.

(12.2) 如何通过密度 δ 找到平面物体的重心呢？

在 x.y 的加权平均值处