

非独立变量

2022年4月8日 09:24

例题 $x^2 + yz + z^3 = 8$

在点 $(2, 3, 1)$ 附近

当 x, y 稍微变化一点,

z 怎样变?

$$dg = 2x dx + z dy + (y + 3z^2) dz = 0$$

这表示了 g 的某种变化。

$$4dx + dy + 6dz = 0$$

这个关系式告诉我们 x, y, z 在那点上发生变化时关系。

如果把 z 看作 x, y 的函数,

把 dz 移到右边即可。

$$dz = -\frac{1}{6}(4dx + dy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{3} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{6}$$

普遍来说

$$g(x, y, z) = C$$

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$$

$$dz = -\frac{g_x}{g_z} dx - \frac{g_y}{g_z} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z} \quad \text{把 } y \text{ 看成常数}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_y}{g_z}$$

现在就可以找约束变量相互间的变化率。

$$f(x, y) = x + y$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

现在让 $x = u$

$$y = u + v$$

$$\text{则 } f(x, y) = 2u + v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2. \text{ 和刚才得的 } 1$$

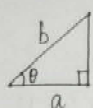
产生了矛盾。

$x = u$. 但 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 不相等

第一个是保持 y 不变, 求对 x 的变化率

第二个是保持 v 不变, v 不变和 y 不变
并不是一回事。

例题



一个直角

$a = b \cos \theta$ 是约束条件

我们要知道面积 S 是怎样依赖于 θ 的。

假若想保留那个直角, θ 的变化方式只能有两种。

一, 假定 a 不变, b 变长同时 θ 变大是一种

= 假定 b 不变, a 变短同时 θ 变小

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_b$$

$$dA = 0 + \left(\frac{1}{2}\right) a \sin \theta (b \tan \theta d\theta)$$

$$+ \frac{1}{2} ab \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} ab (\sin \theta \tan \theta + \cos \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} ab \sec \theta d\theta$$

$$\left(\frac{dA}{d\theta}\right)_a = \frac{1}{2} ab \sec \theta$$

用 da db $d\theta$ 表示 dA

假定 a 不变 则 $da=0$

对约束条件微分

用 $d\theta$ 表示 db

把这些代入 dA

得 dA 和 $d\theta$ 关系

计算 $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a$

法一, 解出 b 和它的等价形式

$$b = a \sec \theta$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \tan \theta$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = \frac{1}{2} a^2 \sec^2 \theta$$

法二, 利用微分

$$a \text{ 不变 } da=0$$

$$a = b \cos \theta \text{ 约束条件}$$

$$da = \cos \theta db - b \sin \theta d\theta = 0$$

$$db = b \tan \theta d\theta \text{ 这是 } b \text{ 关于 } \theta \text{ 的变化率}$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} b \sin \theta da + \frac{1}{2} a \sin \theta db + \frac{1}{2} ab \cos \theta d\theta$$

法三 链式法则

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = A_\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta}\right)_a + A_a \left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)_a$$

$$+ A_b \left(\frac{\partial b}{\partial \theta}\right)_a$$

利用约束条件