一阶线性常微分方程及其解法

2022年4月17日　　14:40

一阶线性常微分方程.

$a(x)y'+b(x)y=c(x)$

为啥叫线性方程呢?

y和y'呈线性关系

和 $ay_1+by_2=c$ 类比

如果c是0, 叫齐次方程

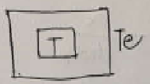
标准线性形式. 强调线性

是将y'的系数取1

$y'+p(x)y=q(x)$

传导—扩散模型.

牛顿冷却定律



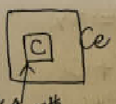
$\frac{dT}{dt}=k(T_e-T)$ $(k>0)$

t: 时间

T: 温度

$T(0)=T_0$

扩散模型



$C_e>C$

$\frac{dc}{dT}=k_1(C_e-C)$ $(k_1>0)$

粘膜

一阶微分方程描述了那种现象。

$\boxed{\frac{dT}{dt}+kT=kT_e}$

解方程

$y'+p(x)y=q(x)$

① 积分因子 $u(x)$

$uy'+puy=qu$

$(uy)'=qu$

条件 $u'=pu$

$\ln u=\int p(x)dx$

$u=e^{\int p dx}$

解 $y'+py=q$ 的方法.

① 写成标准的形式

② 求积分因子 $e^{\int p dx}$

③ 两边同乘 $e^{\int p dx}$, 积分。

例题

$xy'-y=x^3$

① $y'-(\frac{1}{x})y=x^2$.

② $e^{\int -\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$

③ $(\frac{1}{x})y'-(\frac{1}{x^2})y=x$

$(\frac{1}{x}y)'=x$

$(\frac{1}{x})y=\frac{x^2}{2}+C$

$y=\frac{x^3}{2}+Cx$.

例题2.

$(1+\cos x)y'-(\sin x)y=2x$

① $y'-\frac{\sin x}{1+\cos x}y=\frac{2x}{1+\cos x}$

② $e^{-\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx}=e^{\ln(1+\cos x)}$

③ $(1+\cos x)y'-(\sin x)y=2x$

回到原始形式了

$[(1+\cos x)y]'=2x$

④ $(1+\cos x)y=x^2+C$

$y=\frac{x^2+C}{1+\cos x}$.

假设 $y(0)=1$

$C=2$.

解常系数微分方程

$\frac{dT}{dt}+kT=kT_e$

$(e^{kt}T)'=kT_e e^{kt}$

$e^{kt}T=k\int T_e e^{kt}$

$=e^{-kt}\int kT_e(t)e^{kt}dt+Ce^{-kt}$

也可以写成定积分的形式。

介绍一阶线性微分方程

基础篇当中说的是 常数变易法

换元法.

$y'=f(x,y)$.

一种是直接变换.

一种是逆代换

齐次微分方程

$y'=F(y/x)$

介绍了齐次微分方程

它是对放缩变换不敏感，这是齐次的含义

利用换元法解

$y'=f(x,y)$.

一种是直接变换，定义一个新变量写在等式左边。

例题 $y'=p(x)y+q(x)y^n$ $(n\neq 0)$ $(n\neq 1)$

$$\frac{y'}{y^n}=p(x)\frac{1}{y^{n-1}}+q(x)$$

把 $\frac{1}{y^{n-1}}$ 替换成 V

$$V'=(1-n)\frac{1}{y^n}y'$$

$$\frac{V'}{(1-n)}=p(x)V+q(x)$$

这是线性方程

齐次微分方程

$$y'=F(y/x)$$

比如 $y'=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$

它对缩放变换不变。这就是齐次的含义。

例题

$y'=F(\frac{y}{x})$ 令 $y=zx$

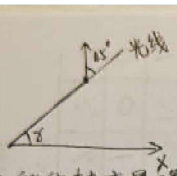
$y'=z'x+z$

$z'x+z=F(z)$

$$x\frac{dz}{dx}=F(z)-z。$$

它是对放缩变换不敏感，这是齐次的含义
利用换元法解

那种是伯努利方程 带y的n次方的



问小船的轨迹是啥？

$$y'=\tan(\gamma+45°)$$

$$y'=\frac{\tan\gamma+\tan 45°}{1-\tan\gamma\tan 45°}$$

$\tan\gamma$ 是 $\frac{y}{x}$

$$y'=\frac{\frac{y}{x}+1}{1-\frac{y}{x}}=\frac{y+x}{x-y}$$

像这样 $y'=\frac{\frac{y}{x}+1}{1-\frac{y}{x}}$ 的方程该如何解呢？

令 $z=\frac{y}{x}$

$$y'=\frac{z+1}{1-z}$$

$$y=zx$$

$$y'=z'x+z$$

$$z'x+z=\frac{z+1}{1-z}$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{1-z}-\frac{z(1-z)}{1-z}$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{dx}{x}$$

$$\arctan z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln x+C$$

$$\tan^{-1}z=\ln\sqrt{1+z^2}+\ln x$$

$$\tan^{-1}(\frac{y}{x})=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$$

转成极坐标系。$\theta=\ln r+C$

这是一个螺线
小船最终会延着一个很特殊的轨迹行驶。

解决齐次微分方程一个例子
最终答案是一个螺线