二阶非齐次线性方程

2022年4月21日　　17:34

二阶非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

是伴随齐次方程

弹簧方程

支配电流的方程。

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ L\text{是 算子} \end{cases}$$

解的形式是 $y_p + y_c$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_p 是啥？是 $Ly = f(x)$ 的特解

通解中的 y_p 怎么找？

任何一个解都行。

首先证明 $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ 是解

$$L(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2) = \underbrace{\cdots}_{0 + f(x)}$$

所以 $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ 都是解

还有没有有别的解。

假设 $u(x)$ 是解。必须证明 $u(x)$ 是它们中的一个。

$L(u) = f(x)$

$L(y_p) = f(x)$

$L(u - y_p) = 0$

$u - y_p$ 是齐次方程的解，u 是其中一个。

现在和一阶常系数线性方程连系起来。

$$y' + ky = q(t)$$

$$y = \underbrace{e^{-kt}\int q(t)e^{kt}\,dt}_{\text{特解}} + \underbrace{ce^{-kt}}_{y'=-ky\text{ 是它的解}}$$

当 $k > 0$ 时

y_c 是暂态解，当 $t \to \infty$，$ce^{-kt} \to 0$

y_p 是稳态解

$k < 0$ 时

上面的分解没意义。

对于 $y'' + Ay' + By = f(t)$

通解 $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$

A．B 需要满足什么条件

$c_1 y_1 + c_2 y_2$ 当 $t \to \infty$ 时 趋于零

如果 y_c 是趋于零的，

当所有的特征根

都具有负实部

$y'' + Ay' + By = f(t)$

才是具有稳态解的。

特征根	通解.	什么时候 y_c 趋于零
$r_1 \neq r_2$	$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$	$r_1 < 0$ $r_2 < 0$
$r_1 = r_2$	$(c_1 + c_2 t) e^{r_1 t}$	$r_1 < 0$
$r = a \pm bi$	$e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$	$a < 0.$