

一阶自治微分方程

2022年4月18日 20:32

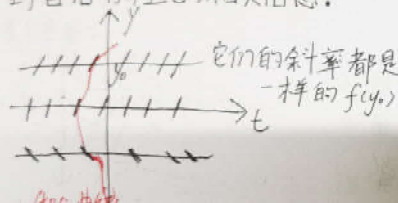
可以在不求解微分方程的前提下得到原积分曲线的信息

一阶自治微分方程

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

右侧的式子不含 t 。

如何在不解方程的前提下得到自治方程的相关信息？



它们的斜率都是一样的 $f(y_0)$

自治方程的积分曲线对平移不变
所有解的形状一样。

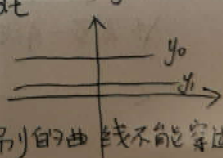
很多时候这种方程难以积分，我们可以通过一种临界的思想来获取信息。

所谓的临界点 y_0

$$f(y_0) = 0$$

如果是临界点，积分函数的斜率是0。

y_0 是一个解

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0)$$


别的曲线不能穿过 y_0

确定了临界点之后画一下 $f(y)$ 的图像看它啥时候是正，啥时候是负

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

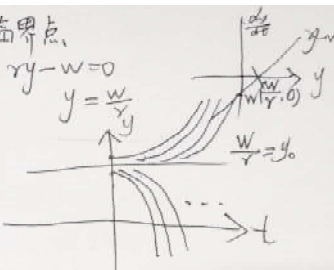
如 $f(y) > 0$ 则原积分曲线斜率大于0，递增
... 小 $f(y)$ ，递减。

可以通过这些方法来确定原积分曲线的性质。

例题 y 表示银行存款
 r 表示利率
 w 是盗用率

$$\frac{dy}{dt} = ry - w$$

求临界点

$$ry - w = 0$$
$$y = \frac{w}{r}$$


一个用来描述人口增长的方程。

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

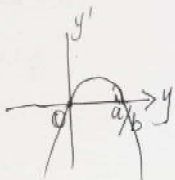
(k 代表增长率)

但地球上资源有限
 $k = a - by$ ，即随 y 的增大而减小。

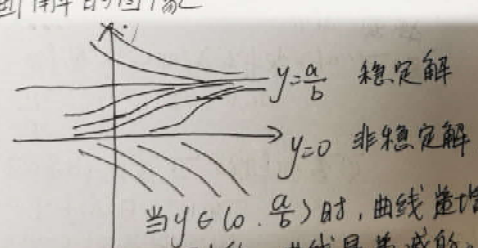
$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

怎样获取 $\frac{dy}{dt} = ay - by^2$ 解的信息？

先找临界点

$$ay - by^2 = 0$$
$$y = 0$$
$$y = \frac{a}{b}$$


画解的图像



$y = \frac{a}{b}$ 稳定解

$y = 0$ 非稳定解。

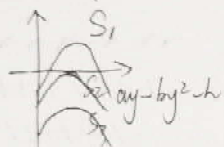
当 $y \in (0, \frac{a}{b})$ 时，曲线递增
别的曲线是递减的。

半稳定临界点。

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 - h$$

如果 $h=0$, 收割率是0.

如果 h 变大.

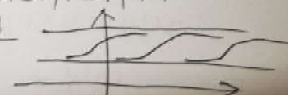


如果 h 变更大

分析临界的情况

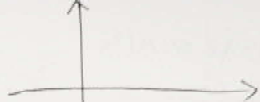
如果是 S_1 这种情况

解是



和 h 是0差不多。

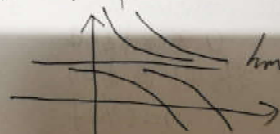
如果是 S_2 这种情况



原积分曲线一直递减

如果是 S_2 这种情况

只有一个临界点。



h_m 是最大的收割率。