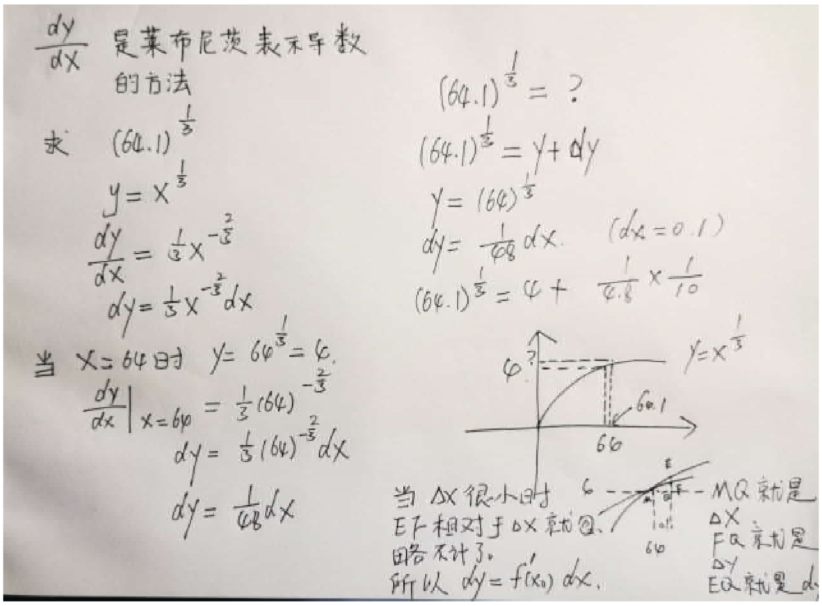
微分和不定积分

2022年1月18日　　20:47



$\frac{dy}{dx}$ 是莱布尼茨表示导数的方法

求 $(64.1)^{\frac{1}{3}}$

$y = x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

当 $x=64$ 时 $y = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=64} = \frac{1}{3}(64)^{-\frac{2}{3}}$

$dy = \frac{1}{3}(64)^{-\frac{2}{3}}dx$

$dy = \frac{1}{48}dx$

$(64.1)^{\frac{1}{3}} = ?$

$(64.1)^{\frac{1}{3}} = y + dy$

$y = (64)^{\frac{1}{3}}$

$dy = \frac{1}{48}dx$　$(dx = 0.1)$

$(64.1)^{\frac{1}{3}} = 4 + \frac{1}{48}\times\frac{1}{10}$

当 Δx 很小时 EF 相对于 Δx 就可以忽略不计了。

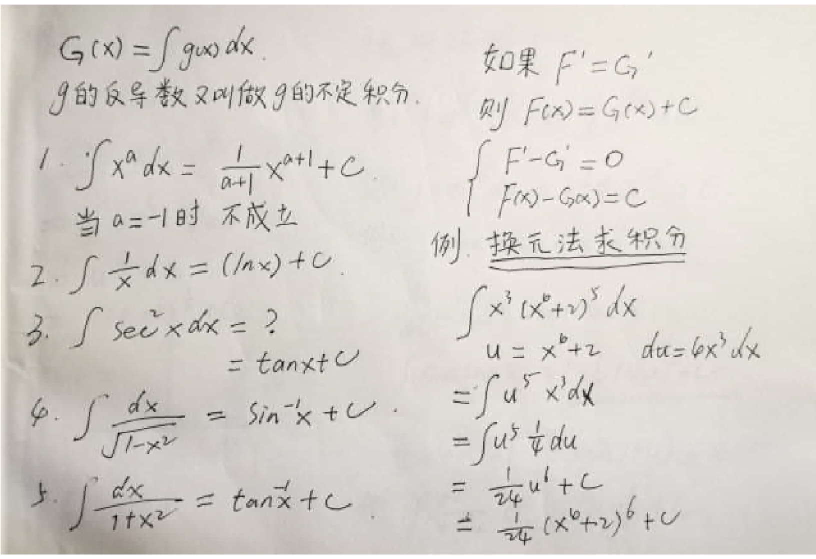
所以 $dy = f'(x_0)dx$.

MQ 就是 Δx

FQ 就是 Δy

EQ 就是 dy

微分的概念



$G(x) = \int g(x)dx$

g 的反导数又叫做 g 的不定积分。

1. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$

   当 $a=-1$ 时 不成立

2. $\int \frac{1}{x}dx = (\ln x)+C$

3. $\int \sec^2 x\, dx = ?$

   $= \tan x + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C$

5. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C$

如果 $F'=G'$

则 $F(x)=G(x)+C$

$\begin{cases} F'-G'=0 \\ F(x)-G(x)=C \end{cases}$

例. 换元法求积分

$\int x^3(x^4+2)^5dx$

$u = x^4+2$　$du = 4x^3dx$

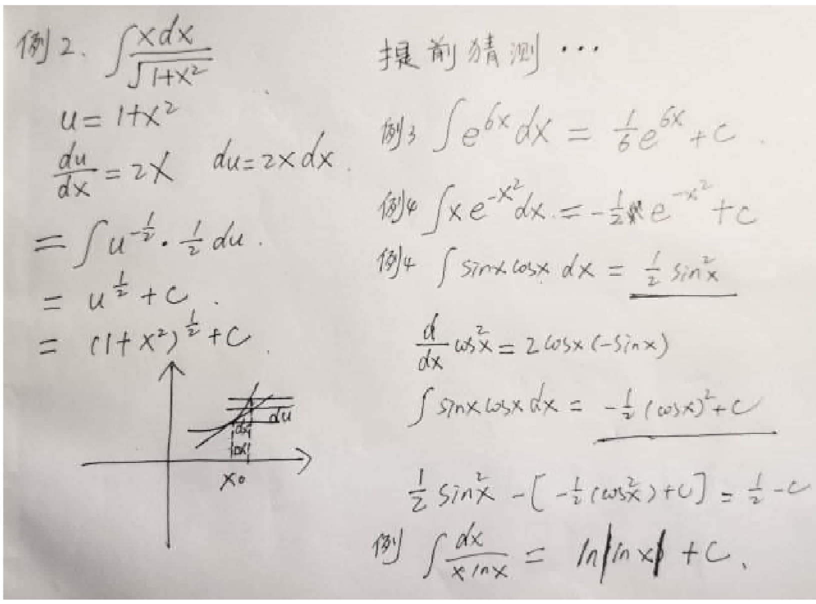
$=\int u^5x^3dx$

$=\int u^5\frac{1}{4}du$

$=\frac{1}{24}u^6+C$

$=\frac{1}{24}(x^4+2)^6+C$

函数的反导数叫做该函数的不定积分



例2. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$u = 1+x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$　$du = 2x\,dx$

$=\int u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}du$

$= u^{\frac{1}{2}}+C$

$=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$

提前猜测…

例3 $\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x}+C$

例4 $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

例4 $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2x$

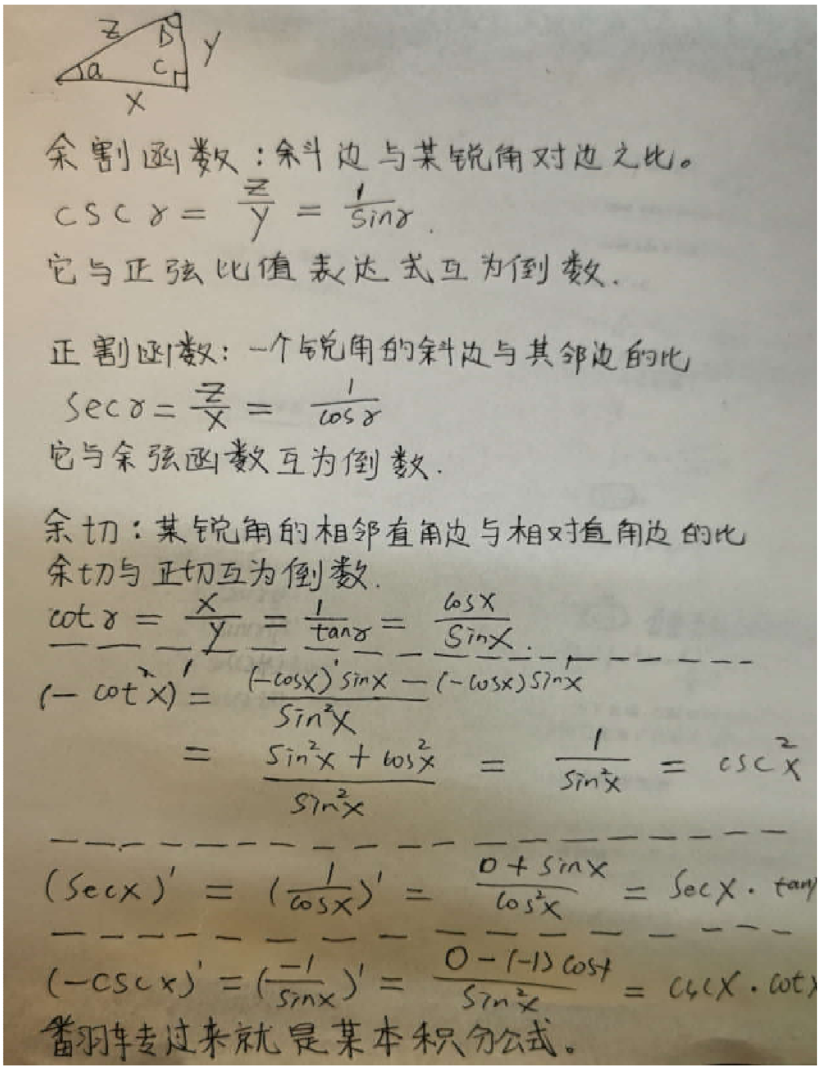
$\frac{d}{dx}\cos^2x = 2\cos x(-\sin x)$

$\int \sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}(\cos x)^2+C$

$\frac{1}{2}\sin^2x - [-\frac{1}{2}(\cos^2x)+C] = \frac{1}{2}-C$

例 $\int\frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|+C$.

做题中遇到不会的知识点



余割函数：斜边与某锐角对边之比。

$\csc\gamma = \frac{z}{y} = \frac{1}{\sin\gamma}$.

它与正弦比值表达式互为倒数.

正割函数：一个锐角的斜边与其邻边的比

$\sec\gamma = \frac{z}{x} = \frac{1}{\cos\gamma}$

它与余弦函数互为倒数.

余切：某锐角的相邻直角边与相对直角边的比

余切与正切互为倒数.

$\cot\gamma = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$(-\cot x)' = \frac{(-\cos x)'\sin x - (-\cos x)\sin' x}{\sin^2 x}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$

$(\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{0+\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan$

$(-\csc x)' = (\frac{-1}{\sin x})' = \frac{0-(-1)\cos x}{\sin^2 x} = \csc x \cdot \cot$

翻转过来就是基本积分公式。

余割函数csc

正割函数sec

余切函数cot

以及它们的导数

刷题当中需要注意的小知识点

要比较熟悉基本积分表

像arctanx arcsinx tanx -cotx secx -csc a^x

这些函数的导数

知道这些函数的导数，就可以求出反导数

还有一些基本的三角公式

$\cos 2x = 2cosx^2 - 1$

$\cos 2x = 1 - 2sinx^2$

如果把2x换成x也是一样的

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

把2x换成x也是一样的

做第一类换元法的练习题

有的要提共因式出来，凑成基本积分公式的形式，然后换元才能做。

有的得转换一下形式才能做

比如$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})$

还有用到这种转换的

$secx^2 = 1 + tanx^2$
对于$sin^{2k}sin^{2l}$这样的把它的次数降低
$\cos 2x = 2cosx^2 \ -1$
$\cos 2x = 1 \ -2sinx^2$
用这俩公式

做第二类换元法的练习题
第21题 就是利用$sinx^2$+$cosx^2$ = 1
让根号下的$a^2 - x^2$转化成$acost$
第22题 利用$sect^2 = \ tant^2 + 1$
把根号下的$a^2 + x^2$转化成$asect$
第23题是转化$\sqrt{x^2 - a^2}$
还是利用$sect^2 = \ tant^2 + 1$
（注意到x有两个区间，分别是x>a,x<-a）
1.我们求出x>a这个区间的结果之后，可以让
x=-u,然后套用得出的结果
2.也可以重新代换，让x = -asect
但是sect = $-\frac{x}{a}$需要注意这里的负号代表的是方向，$tant$得出来得也是负的。
第24题利用了 倒代换
把分母当中得x的几次幂，换到分子上面来
然后就是记忆一些推导出来的积分公式
第27题的分母是二次式那样的，可以先配方，然后再利用$sect^2 = \ tant^2 + 1$
这个公式做代换