

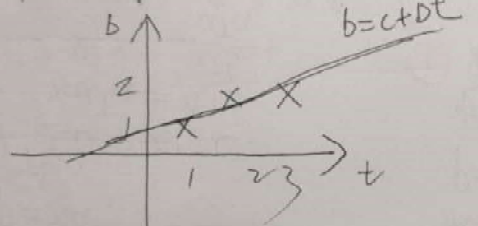
# 最小二乘法

2022年6月12日

17:08

当我们遇到一个矩阵  
现在需求它的最优解

用最小二乘法拟合一条直线  
 $b = c + Dt$



建立矩阵A

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ C + 2D = 2 \\ C + 3D = 3 \end{cases}$$

这个方程无解。

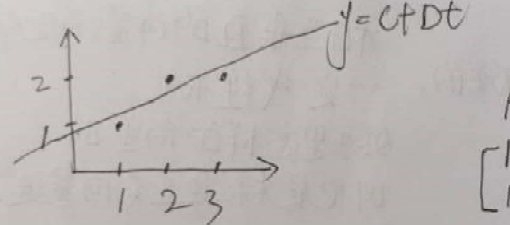
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A X = b 无解  
求最优解。

然后  $A^T A X = A^T b$   
 $X = (A^T A)^{-1} A^T b$   
 $P = AX = A(A^T A)^{-1} A^T b$   
得到一个最近似的解。

两边乘一个转置以后  
得一个方程，通过它可求  
最优解以及投影矩阵。

两边同时乘A的转置 然后可以求得最优解和投影矩阵  
这个知识不太理解，也不晓得该如何用



方程是  $\begin{cases} C + D = 1 \\ C + 2D = 2 \\ C + 3D = 2 \end{cases}$

这个方程是无解的  
最优解是啥?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$A^T A \hat{X} = A^T b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$
$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

可以求C、D

$$D = \frac{1}{2} \quad C = \frac{2}{3}$$

所以最优直线是  
 $y = \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}$

当  $X=1$  时

$$y = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

$X=2$

$$y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$X=3$  时

$$y = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

误差向量

$$1 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2 - \frac{13}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$b$  向量

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}$$

$P$  是投影向量

$e$  是误差向量

而是  $P$  和  $e$  还是垂直的。

最小二乘法有个大前提

如果  $A$  的各列都是线性无关的。

那么  $A^T A$  是可逆的。

现在需要证明它

假设  $A^T A X = 0$ 。

那么  $X$  只有零向量。

$$X^T A^T A X = 0$$

$$(AX)^T AX = 0$$

$$AX = 0$$

且  $A$  是线性无关的

$X$  是零向量。

相互垂直的向量单位长度

一定线性无关。

处理这样的向量时

叫它是标准正交向量组。