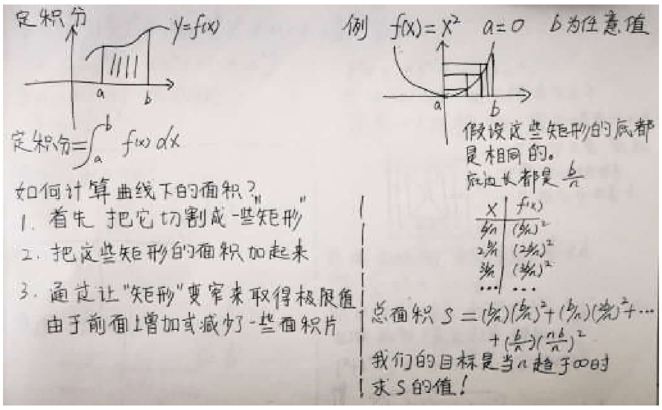
定积分

2022年2月6日　　15:43



定积分

$y=f(x)$

定积分 $=\int_a^b f(x)\,dx$

如何计算曲线下的面积？

1. 首先 把它切割成一些"矩形"
2. 把这些矩形的面积加起来
3. 通过让"矩形"变窄来取得极限值 由于前面增加或减少了一些面积片

例 $f(x)=x^2$　$a=0$　b 为任意值

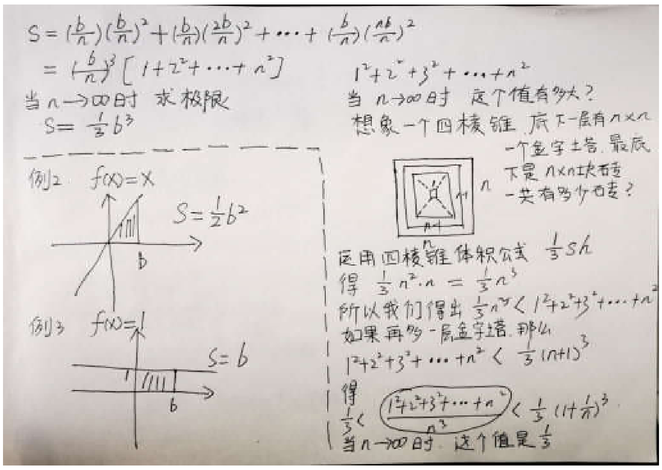
假设这些矩形的底都是相同的。底边长都是 $\frac{b}{n}$

x	$f(x)$
b/n	$(b/n)^2$
$2b/n$	$(2b/n)^2$
$3b/n$	$(3b/n)^2$
…	…

总面积 $S=(b/n)(b/n)^2+(b/n)(2b/n)^2+\cdots+(\frac{b}{n})(\frac{nb}{n})^2$

我们的目标是当 n 趋于 ∞ 时求 S 的值！

介绍定积分的基本概念



$S=(\frac{b}{n})(\frac{b}{n})^2+(\frac{b}{n})(\frac{2b}{n})^2+\cdots+(\frac{b}{n})(\frac{nb}{n})^2$

$=(\frac{b}{n})^3[1+2^2+\cdots+n^2]$

当 $n\to\infty$ 时 求极限

$S=\frac{1}{3}b^3$

例2　$f(x)=x$　$S=\frac{1}{2}b^2$

例3　$f(x)=1$　$S=b$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

当 $n\to\infty$ 时 这个值有多大？

想象一个四棱锥 底下一层有 $n\times n$ 一个金字塔，最底下是 $n\times n$ 块砖 一共有多少砖？

运用四棱锥体积公式 $\frac{1}{3}Sh$

得 $\frac{1}{3}n^2\cdot n=\frac{1}{3}n^3$

所以我们得出 $\frac{1}{3}n^3<1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

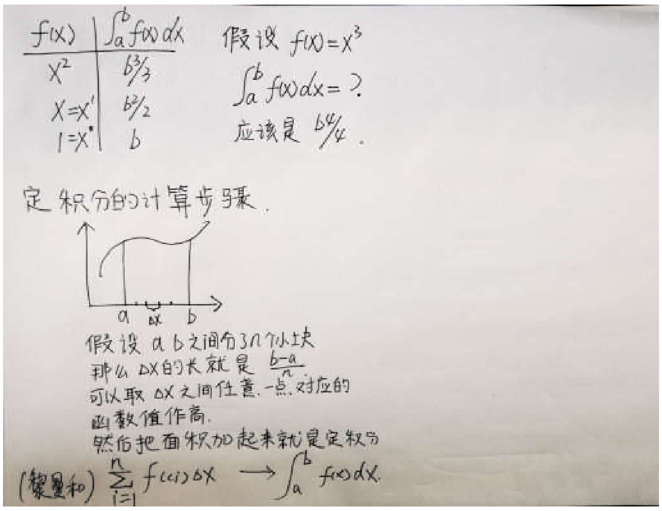
如果再多一层金字塔，那么

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2<\frac{1}{3}(n+1)^3$

得

$\frac{1}{3}<\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}<\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3$

当 $n\to\infty$ 时，这个值是 $\frac{1}{3}$



$f(x)$	$\int_a^b f(x)\,dx$
x^2	$b^3/3$
$x=x^1$	$b^2/2$
$1=x^0$	b

假设 $f(x)=x^3$

$\int_a^b f(x)\,dx=?$

应该是 $b^4/4$.

定积分的计算步骤.

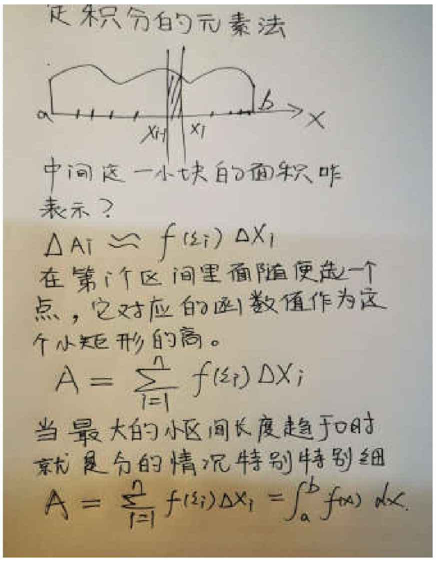
假设 a b 之间分了 n 个小块

那么 Δx 的长就是 $\frac{b-a}{n}$

可以取 Δx 之间任意一点对应的函数值作高.

然后把面积加起来就是定积分

(黎曼和) $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$



定积分的元素法

中间这一小块的面积咋表示？

$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

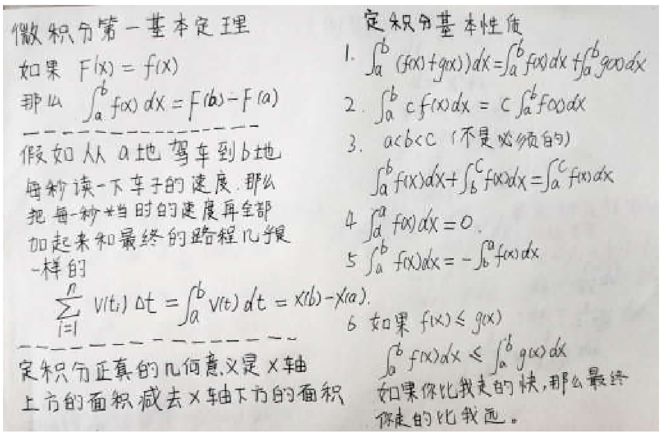
在第 i 个区间里面随便选一个点，它对应的函数值作为这个小矩形的高。

$A=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

当最大的小区间长度趋于0时 就是分的情况特别特别细

$A=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$

定积分元素法的补充
因为不太理解f(x)里面的x是啥意思



微积分第一基本定理

如果 $F'(x)=f(x)$

那么 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

假如从 a 地驾车到 b 地 每秒读一下车子的速度，那么把每一秒当时的速度再全部加起来和最终的路程几乎一样的

$\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t=\int_a^b v(t)\,dt=x(b)-x(a).$

定积分正真的几何意义是 x 轴上方的面积减去 x 轴下方的面积

定积分基本性质

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$
2. $\int_a^b c f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$
3. $a<b<c$ (不是必须的) $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$
4. $\int_a^a f(x)\,dx=0$.
5. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
6. 如果 $f(x)\le g(x)$ $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$ 如果你比我走的快，那么最终你走的比我远。

微积分第一定理
后面介绍了换元法，还有换元法容易错误的一个点

定积分正真的几何意义是X轴上方的面积减去X轴下方的面积

$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

如果你比我走的快，那么最终你走的比我远。

微积分第一定理

后面介绍了换元法，还有换元法容易错误的一个点

例题

当 $x \geqslant 0$ 时 $e^x \geqslant 1$

$\int_0^b e^x dx \geqslant \int_0^b 1\, dx$

$e^x\big|_0^b \geqslant b$

$e^b \geqslant 1+b$

所以我们得到 当 $b \geqslant 0$ 时 $e^b \geqslant 1+b$

$\int_0^a e^b db \geqslant \int_0^a (1+b)\, db$

$e^a - 1 \geqslant b + \frac{1}{2}b^2\big|_0^a$

$e^a - 1 \geqslant a + \frac{1}{2}a^2$

$e^a \geqslant 1 + a + \frac{1}{2}a^2$

...

可以得出一个很好的近似。

例题 $\int_1^2 (x^3+2)^5 x^2 dx$

$u = x^3+2$

$du = 3x^2 dx$

$\int_{x_1=1}^{x_2=2} u^5 \frac{1}{3} du$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{u=3}^{u=10} u^5 du$

注意事项 $\int_{-1}^1 x^2 dx$

① 这样直接算积分结果是 $\frac{1}{3}x^3\big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ✓

$u = x^2$

$du = 2x\, dx$ $\quad dx = \frac{1}{2x} du$

$dx = \frac{1}{2 \cdot \pm\sqrt{u}} du$

$\Rightarrow \int_1^1 u \cdot \frac{1}{2 \cdot \pm\sqrt{u}} du$

② 换元法算

$\int_1^1 u \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 0$ ✗ 错了

③ 换元计算 $\int_1^0 u \frac{1}{2 \cdot -\sqrt{u}} du + \int_0^1 u \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

微积分第二基本定理

从后往前看

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$

$\Delta F = F(b) - F(a)$

$\Delta x = b - a$

$\Delta F = \int_a^b f(x)\, dx$ 第一定理

$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \Rightarrow \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 是均值

这个是 $F'(x)$ 的均值

$\rightarrow \Delta F = (F'(x)$ 均值$) \cdot \Delta x$

均值定理

$(\min F')\Delta x \leqslant \Delta F = F'(c)\Delta x \leqslant (\max F')\Delta x$

第一个取的是导数的均值

第二个取的不确定，但它肯定比取最大那个导数小，比最小那个导数大。

例题

$F'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad F(0) = 1$

① $A < F(4) < B$ 求 A、B.

$F(4) - F(0) = F'(c)(4-0)$

$= \frac{1}{1+c} 4$

$F(4) = \frac{4}{1+c} + 1$

$c \in (1, 4)$

所以 $F(4)$ 最大取 3

$F(4)$ 最小取 $\frac{9}{5}$

② $F(4) - F(0) = \int_0^4 \frac{dx}{1+x}$

最小的黎曼和积 $\int_0^4 \frac{1}{1+x_0} dx$

最大的黎曼和积 $\int_0^4 \frac{1}{1+x_{50}} dx$

前两页证明了微积分第二定理，微积分第一定理

微积分第二定理就是均值定理

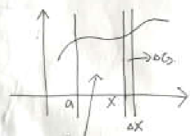
微积分基本定理 II

已知有一个函数 $f(x)$ 假设它是连续的，然后定义一个新函数 $G(x)$

$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad a \leq t \leq x$

然后 $G'(x) = f(x)$

先用微分方程的观点来解释一下



$\Delta G = \Delta x \cdot f(x)$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = f(x)$

$G'(x) = f(x)$

如果函数是连续的

证明微积分基本定理 I

假设 $F' = f$

假设 f 是连续的

定义一个新函数

$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

$F'(x) = G'(x)$

$F(x) = G(x) + c$

$F(b) - F(a) = (G(b)+c) - (G(a)+c)$

$= G(b) - G(a)$

$= \int_a^b f(x)\, dx - 0$

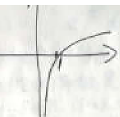
$= \int_a^b f(x)\, dx$

例题 $L'(x) = \frac{1}{x}$；$L(1) = 0$

$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

$= \ln x$

知道定积分也可以画图



例题 $y' = e^{-x^2}$ $\quad y(0) = 0$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

微积分积本定理的第二种表述

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$

例：$y' = \frac{1}{x}$ $\quad L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

它是关于对数函数的一切性质的源头

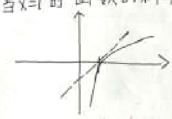
首先通过 $\int_1^x \frac{1}{t} dt$

可以知道 $L'(x) = \frac{1}{x}$

其次 $L(1) = 0$

其次 $L''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ 凸函数

算当 $x=1$ 时函数的斜率



① 过 (1, 0) 点。

② 当 $x=1$ 时斜率是 1

③ 处处是凸函数

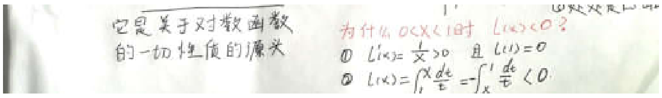
为什么 $0 < x < 1$ 时 $L(x) < 0$？

① $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ 且 $L(1) = 0$

② $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t} < 0$

这里是不定运用

不定积分确定的函数，也能用来确定函数性质



它是关于对数函数的一切性质的源头

为什么 $0<x<1$ 时 $L(x)<0$？

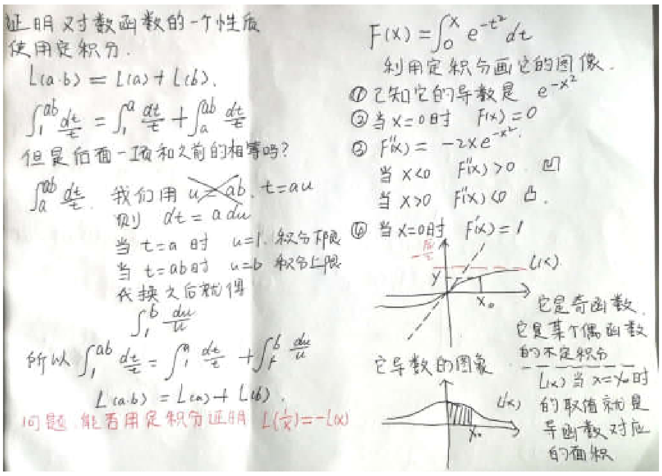
① $L'(x)=\frac{1}{x}>0$ 且 $L(1)=0$

② $L(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}=-\int_x^1 \frac{dt}{t}<0$

这里是不定运用

不定积分确定的函数，也能用来确定函数性质

下一页说到了奇函数和积分的关系



证明对数函数的一个性质

使用定积分.

$L(a\cdot b)=L(a)+L(b)$.

$\int_1^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$

但是后面一项和之前的相等吗？

$\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$. 我们用 ~~$u=ab$~~. $t=au$

则 $dt=a\,du$

当 $t=a$ 时 $u=1$. 积分下限

当 $t=ab$ 时 $u=b$ 积分上限

代换之后就得

$\int_1^{b}\frac{du}{u}$

所以 $\int_1^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_1^{b}\frac{du}{u}$

$L(a\cdot b)=L(a)+L(b)$.

问题. 能否用定积分证明 $L(\frac{1}{x})=-L(x)$

$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

利用定积分画它的图像.

① 已知它的导数是 e^{-x^2}

② 当 $x=0$ 时 $F(x)=0$

③ $F''(x)=-2xe^{-x^2}$.

当 $x<0$ $F''(x)>0$. 凹

当 $x>0$ $F''(x)<0$ 凸.

④ 当 $x=0$ 时 $F'(x)=1$

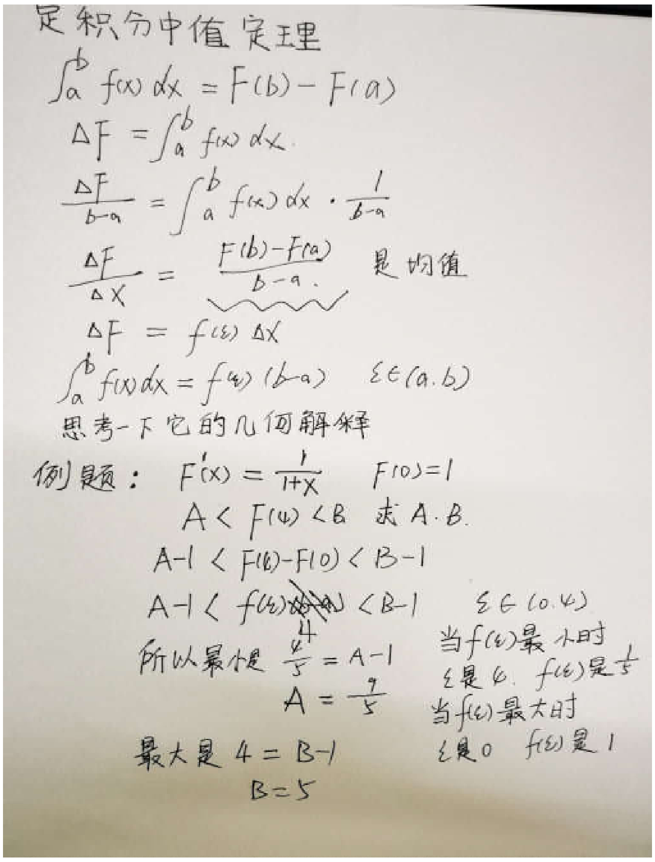
它是奇函数.

它是某个偶函数的不定积分

它导数的图象

L(x) 当 $x=x_0$ 时的取值就是导函数对应的面积

复习积分中值定理的概念



定积分中值定理

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

$\Delta F=\int_a^b f(x)\,dx$

$\frac{\Delta F}{b-a}=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\frac{1}{b-a}$

$\frac{\Delta F}{\Delta X}=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 是均值

$\Delta F=f(\xi)\,\Delta X$

$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$ $\xi\in(a,b)$

思考一下它的几何解释

例题：$F'(x)=\frac{1}{1+x}$ $F(0)=1$

$A<F(4)<B$ 求 $A\cdot B$.

$A-1<F(4)-F(0)<B-1$

$A-1<f(\xi)\,4<B-1$ $\xi\in(0,4)$

所以最小是 $\frac{4}{5}=A-1$

$A=\frac{9}{5}$

当 $f(\xi)$ 最小时 ξ 是 4. $f(\xi)$ 是 $\frac{1}{5}$

当 $f(\xi)$ 最大时 ξ 是 0 $f(\xi)$ 是 1

最大是 $4=B-1$

$B=5$

F(b)-F(a) = f'(x)(b-a) x 在a b 之间

这个是微分中值定理

在定积分当中用它，就得到了积分中值定理

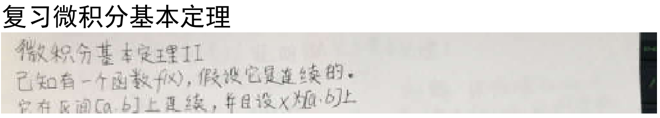
积分中值定理的几何解释是

阴影部分面积和以b-a为底，f(x)为高的一个矩形的面积相等

x 属于 a b 之间

底下这个小例题，挺有意思的，大概可以求定积分取值的区间

复习微积分基本定理



微积分基本定理II

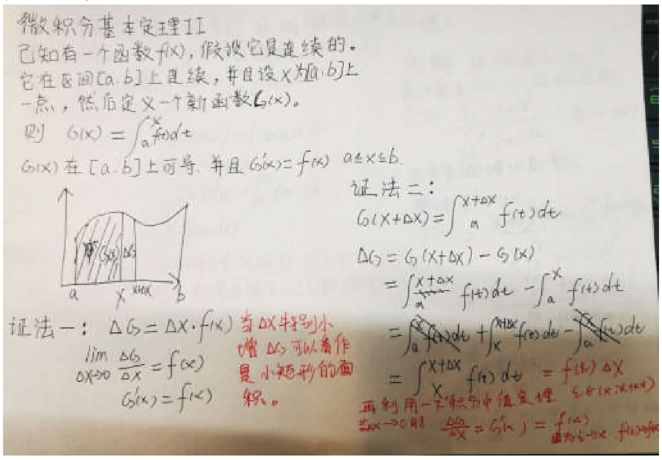
已知有一个函数 f(x)，假设它是连续的。

它在区间 [a, b] 上连续，并且设 x 在 [a, b] 上

微积分第二基本定理的两种证明方法

第一种是听课听的，第二种是书本上的，用了积分中值定理

复习微积分基本定理



微积分基本定理II

已知有一个函数 $f(x)$，假设它是连续的。它在区间 $[a,b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上一点，然后定义一个新函数 $G(x)$。

则 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$

$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $G'(x)=f(x)$ $a\le x\le b$

证法一：$\Delta G=\Delta x\cdot f(x)$ 当 Δx 特别小时 ΔG 可以看作是小矩形的面积。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta x}=f(x)$$

$$G'(x)=f(x)$$

证法二：

$$G(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\Delta G=G(x+\Delta x)-G(x)$$

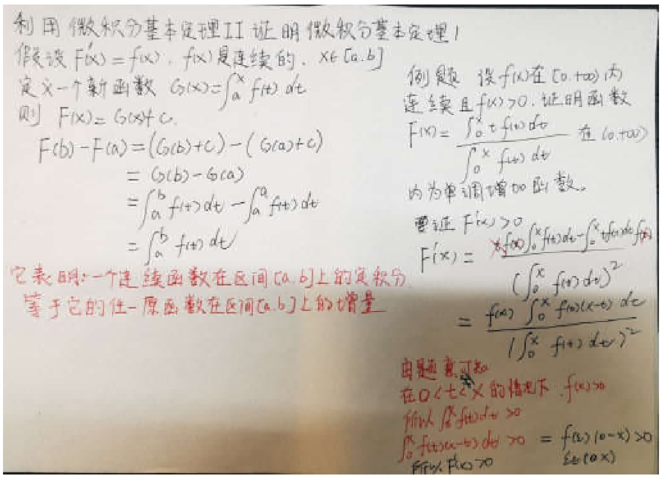
$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\cancel{\int_a^x f(t)dt}+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\cancel{\int_a^x f(t)dt}$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x$$

再利用一下积分中值定理 $\xi\in(x,x+\Delta x)$

当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{\Delta G}{\Delta x}=G'(x)=f(x)$ 因为 $\xi\to x$ $f(\xi)\to f(x)$



利用微积分基本定理II证明微积分基本定理I

假设 $F'(x)=f(x)$，$f(x)$ 是连续的，$x\in[a,b]$

定义一个新函数 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$

则 $F(x)=G(x)+C$

$$F(b)-F(a)=(G(b)+C)-(G(a)+C)$$

$$=G(b)-G(a)$$

$$=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(t)dt$$

它表明：一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量

例题 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$，证明函数 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数。

要证 $F'(x)>0$

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\, f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x f(t)(x-t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

由题意可知

在 $0<t<x$ 的情况下 $f(x)>0$

所以 $\int_0^x f(t)dt>0$

$\int_0^x f(t)(x-t)dt>0$ $=f(\xi)(0-x)>0$ $\xi\in(0,x)$

所以 $F'(x)>0$

微积分第二基本定理的两种证明方法

第一种是听课听的，第二种是书本上的，用了积分中值定理

听课听的感觉简单一点

底下是用基本定理二证明基本定理一

得理解一下积分的本质

然后就是一道书本上的，证明函数单调性的练习题