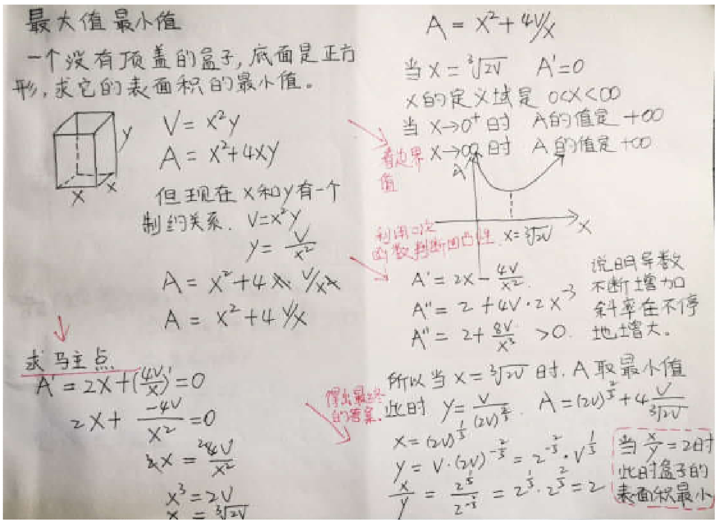
最大值最小值

2021年11月15日 19:41



最大值最小值

一个没有顶盖的盒子，底面是正方形，求它的表面积的最小值。

$V = x^2 y$

$A = x^2 + 4xy$

但现在 x 和 y 有一个制约关系．$V = x^2 y$

$y = \frac{V}{x^2}$

$A = x^2 + 4\cancel{x} \cdot V/x^{\cancel{2}}$

$A = x^2 + 4V/x$

求驻点

$A' = 2x + \left(\frac{4V}{x}\right)' = 0$

$2x + \frac{-4V}{x^2} = 0$

$2x = \frac{4V}{x^2}$

$x^3 = 2V$

$x = \sqrt[3]{2V}$

$A = x^2 + 4V/x$

当 $x = \sqrt[3]{2V}$ $A' = 0$

x 的定义域是 $0 < x < \infty$

看边界值

当 $x \to 0^+$ 时 A 的值是 $+\infty$

当 $x \to \infty$ 时 A 的值是 $+\infty$

$x = \sqrt[3]{2V}$

利用二次函数判断凹凸性

$A' = 2x - \frac{4V}{x^2}$

$A'' = 2 + 4V \cdot 2x^{-3}$

$A'' = 2 + \frac{8V}{x^3} > 0$

说明导数不断增加，斜率在不停地增大。

所以当 $x = \sqrt[3]{2V}$ 时，A 取最小值

得出最终的答案．

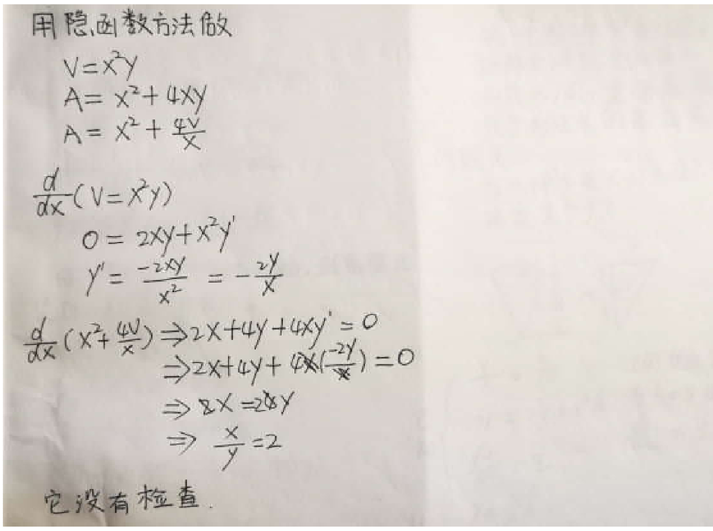
此时 $y = \frac{V}{(2V)^{\frac{2}{3}}}$　$A = (2V)^{\frac{2}{3}} + 4\frac{V}{\sqrt[3]{2V}}$

$x = (2V)^{\frac{1}{3}}$

$y = V \cdot (2V)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$

$\frac{x}{y} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2$

当 $\frac{x}{y} = 2$ 时 此时盒子的表面积最小



用隐函数方法做

$V = x^2 y$

$A = x^2 + 4xy$

$A = x^2 + \frac{4V}{x}$

$\frac{d}{dx}(V = x^2 y)$

$0 = 2xy + x^2 y'$

$y' = \frac{-2xy}{x^2} = -\frac{2y}{x}$

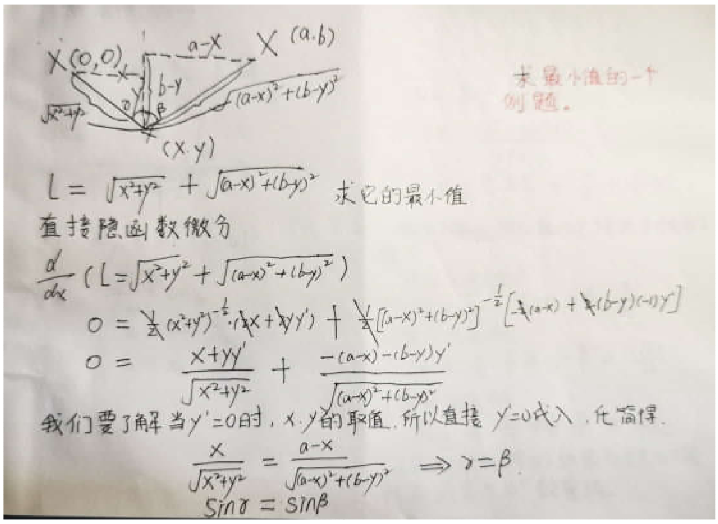
$\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{4V}{x}\right) \Rightarrow 2x + 4y + 4xy' = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y + 4\cancel{x}\left(\frac{-2y}{\cancel{x}}\right) = 0$

$\Rightarrow 2x = 4y$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

它没有检查．



求最小值的一个例题。

$L = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$ 求它的最小值

直接隐函数微分

$\frac{d}{dx}\left(L = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\right)$

$0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2yy') + \frac{1}{2}\left[(a-x)^2+(b-y)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[-2(a-x) + 2(b-y)(-1)y'\right]$

$0 = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-(a-x)-(b-y)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}$

我们要了解当 $y'=0$ 时，x、y 的取值．所以直接 $y'=0$ 代入，化简得．

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} \Rightarrow \gamma = \beta$

$\sin\gamma = \sin\beta$

一般最值就是在导数为0时的那个点

但是还要考虑边界值

左边这个例子，尤其是最后写答案的时候需要注意