求解Ax=b

2022年5月8日　　11:56

解 $Ax=b$

它可能有解，也可能无解

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 6 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3-3b_1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right]$$

$b_3-b_2-b_1$ 必须是0.

$Ax=b$ 什么时候有解？

仅当 b 属于 A 的列空间时成立。

如果 A 中各行线性组合得到零行。

那么 b 中元素的同样组合也必然是零。

求 $Ax=b$ 的所有解

① 只求一个特定的解

把所有自由变量全取0

解 $Ax=b$ 中所有主变量

b 是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 方程组有解

当 x_2 x_4 是0时

$$\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ 2x_3=3 \end{cases}$$

$x_3=\frac{3}{2}$　$x_1=-2$

$$x_p=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

② 加上零空间中的任意 x_n

③ 把它们相加.

$Ax_p=b$

$Ax_n=0$

$A(x_p+x_n)=b$

上例中的全部解是

$$=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像大概是 R^4 空间中穿过 x_p 的二维平面。

思考矩阵 $A(m\times n)$ 秩是 r

$r\le m$　$r\le n$

当 r 取最大时

当列满秩时　$r=n$

这对于方程组的解意味着啥？

每一列都有主元

没有自由变量

$N(A)$ 中有啥呢 只有零向量

$Ax=b$ 呢？如果有解 只有一个特解。

只有0或1个解。

各列线性无关很常见.

举个例子吧！

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\4&1\\5&1\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

前两行线性无关.

$Ax=b$ 是否总有解呢?

只有当 b 选的很好, 才有解

b 可以取 $\begin{bmatrix}4\\3\\7\\6\end{bmatrix}$

如果 b 是 $\begin{bmatrix}4\\3\\7\\6\end{bmatrix}$ 全部解是啥?

只有 $[1, 1]$

行满秩. $r=m$

有多少主元? m 个.

每行都有主元

可解性怎么样?

b 是啥时可解呢?

对于任意 b. $Ax=b$ 有解.

自由变量个数 $n-r$ / $n-m$

举个例子吧!

$\begin{bmatrix}1&2&6&5\\3&1&1&1\end{bmatrix}$

秩是 2.

$R=\begin{bmatrix}1&0&F&\\0&1&&\end{bmatrix}$

构成零空间特殊解

这是 $r=m<n$ 时的典型情况。

当 $r=m=n$ 时

例子 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$

$R=I$

零空间是啥? 只有0向量.

b 满足啥条件, 才可解. 没条件肯定有解。有唯一解。

当 $r=m<n$ 时.

$R=[I\ F]$ 有多余列时.

总有解.

要么有一个. 要么是无穷解.

当 $r<m$ $r<n$

$R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}$

要么无解, 要么有无穷多解。

矩阵的秩

决定了方程组解的数目。