

微分方程和分离变量法解方程

2022年1月23日 18:07

18.03是专门讲解微分方程

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$
$$y = \int f(x) dx$$

例1. $(\frac{d}{dx} + x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$
$$\frac{dy}{y} = -x dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int -x dx$$
$$\ln y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y = A \cdot e^{-x^2/2}$$


这只是当 $y > 0$ 时成立.

其实把 y 写成 $|y|$ 也是成立的.
那样 y 取值范围就是 $y > 0, y < 0$
然后当 $y = 0$ 时代入原式, 它也成立.

例2.

$$y = a \cdot e^{-x^2/2}$$
$$y' = a \cdot e^{-x^2/2} \cdot -x$$
$$y' = a \cdot (-x y)$$

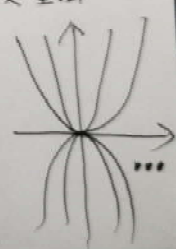
a 取任何值都成立.


$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x}$$

令分离变量法

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln y = 2 \ln x + C$$
$$y = A \cdot x^2$$

这里有取值范围.



例3. 找出处处与原点出发的抛物线垂直的曲线.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2(x/x)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$
$$\int 2y dy = \int -x dx$$
$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$
$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C \quad (a^2)$$

这是隐式解, 也可以解显式解

$$y = \pm \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{2}} \quad \text{上半椭圆}$$
$$y = -\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{2}} \quad \text{下半椭圆}$$