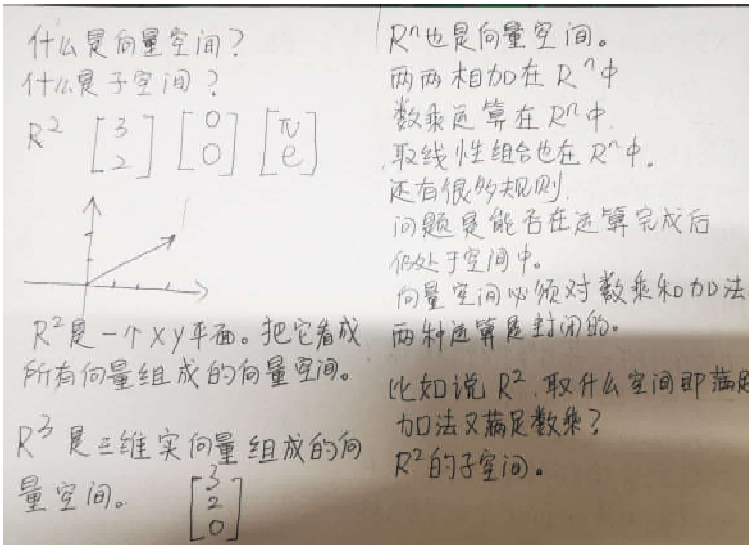
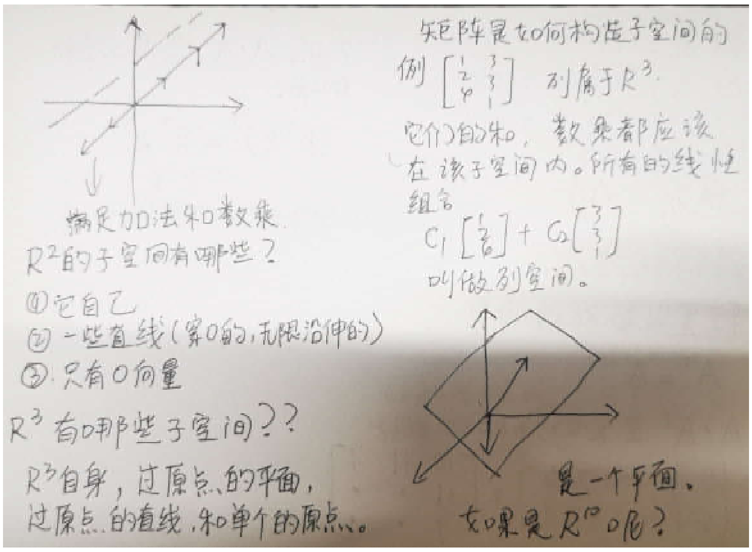
向量空间

2022年5月4日 21:14

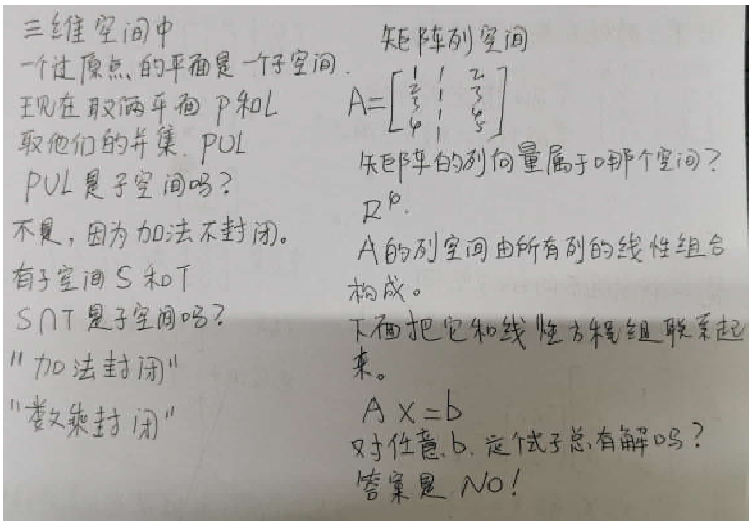


什么是向量空间？
什么是子空间？
R^2 $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$
R^2是一个xy平面。把它看成所有向量组成的向量空间。
R^3是三维实向量组成的向量空间。$\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$
R^n也是向量空间。
两两相加在R^n中
数乘运算在R^n中
取线性组合也在R^n中。
还有很多规则
问题是能否在运算完成后仍处于空间中。
向量空间必须对数乘和加法两种运算是封闭的。
比如说R^2，取什么空间即满足加法又满足数乘？
R^2的子空间。

关于向量空间和子空间说的很清楚
列举了2维和3维向量空间的例子



满足加法和数乘
R^2的子空间有哪些？
① 它自己
② 一些直线（穿0的，无限沿伸的）
③ 只有0向量
R^3有哪些子空间？？
R^3自身，过原点的平面，过原点的直线，和单个的原点。
矩阵是如何构造子空间的
例 $\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}$ 列属于R^3.
它们的和，数乘都应该在该子空间内。所有的线性组合
$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$
叫做列空间。
是一个平面。
如果是R^{10}呢？



三维空间中
一个过原点的平面是一个子空间。
现在取两平面P和L
取他们的并集 $P\cup L$
$P\cup L$是子空间吗？
不是，因为加法不封闭。
有子空间S和T
$S\cap T$是子空间吗？
"加法封闭"
"数乘封闭"
矩阵列空间
$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$
矩阵的列向量属于哪个空间？
R^4.
A的列空间由所有列的线性组合构成。
下面把它和线性方程组联系起来。
$Ax=b$
对任意b，这个式子总有解吗？
答案是No！

接下来这几张图片讨论了，Ax=b，这个式子。
由于A的三个列向量不是线性无关的，有一个列向量没有什么贡献。所以矩阵A的子空间只是一个4维空间中的子空间。只有在这个二维子空间上的b才有解。

$Ax=b$

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$$

这个方程组不总是有解的。

3个列向量的线性组合无法充满整个四维空间。

有很多b不是这三个列向量的线性组合。

怎样的b,能让方程组有解?

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\dots$$

也可以先写出解 然后再求b

$Ax=b$有解,当且仅当右侧向量b属于A的列空间才有解。

A的列空间包含所有A乘以任意x得到的向量。

A的三个列向量线性无关吗?

如果把三列都进行线性组合 是否每一列都对组合有所贡献呢

能否去掉某列,得到同样的列空间呢?

把第三列去掉!不影响

第一列是一个直线?

第二列是指另一个方向的直线?

但第三列处在前两列的平面上。

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$$ 它可以描述成4维空间中的二维子空间。

零空间

是一种完全不同的子空间。

它包含 $Ax=0$ 所有的解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1\ x_2\ x_3$ 都是啥?

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

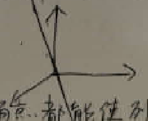
$$\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c\\c\\-c\end{bmatrix}$$

就是 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 和 $c\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

就是 $c\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是解。

是空间中一条直线



这里的所有点,都能使列向量线性组合等于0。

这个讨论了0解的情况

检验 $Ax=0$ 的解是一个空间呢?

$Av=0$ $Aw=0$ 则 $A(v+w)=0$.

$Av=0$ $A(cv)=0$

所以 啥是向量空间的关键呢?

如果 b确定

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

那么 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 是 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

此时还有别的解吗?有

这些解构成子空间吗?NO!

因为最基本的0解都没有

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\dots\dots$$

是不过原点的直线!

啥是向量空间的关键呢?
这个空间满足加法和数乘封闭!!