正交矩阵 施密特正交化

2022年6月12日 17:09

如果一个矩阵各列都是正交的

比如Q $\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ q_1 & \cdots & q_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$

那么 Q^TQ 是单位阵。

由于Q各列是标准正交的，所以叫正交矩阵。

它有一个重要的性质.

如果Q是一个方阵 $Q^TQ=I$

并且 $Q^T=Q^{-1}$

比如 $Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $Q^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

它也是一个正交矩阵

正交矩阵有哪些好处?

只要列向量是标准正交基

QQ^T 就是投影矩阵。

还有别的性质

$(QQ^T)(QQ^T)=QQ^T$

再看 $A^TA\hat{x}=A^Tb$

如果A是正交矩阵

那么 $\hat{x}=Q^Tb$

举例.

令 $a=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$A=a$.

$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{A^Tb}{A^TA}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\cdot B=0$.

$Q=[q_1\ q_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$A=QR$

令 $A=[a_1\ a_2]$

$Q=[q_1\ q_2]\begin{bmatrix} a_1^Tq_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_1^Tq_2$

R是一个上三角矩阵