逆矩阵 克拉默法则

2022年6月8日 10:06

克拉默法则，逆矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

这是2x2矩阵的求逆公式

那么3x3甚至n×n矩阵的求逆公式。

这个是逆矩阵公式，公式的分母是行列式的值。

左半部分就是 $\frac{1}{\text{行列式的值}}$ $\begin{bmatrix} a_{11}\text{的代数余子式} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

有啥办法能证明它吗？

要证明 $AC^T = (\det)A$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} =$$

$a_{11}C_{11}+a_{21}C_{12}+\cdots a_{1n}C_{1n}=\det A$

刚才那俩矩阵乘法结果是

$$\begin{bmatrix} \det A & & & \\ & \det A & & \\ & \text{都是}0 & \ddots & \\ & & & \det A \end{bmatrix}$$

如果某行乘以其它行的代数余子式

比如说

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

这里第一行乘 这里第二列。

原本的矩阵是 $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

按第二行展开的话

$a\cdot(-b)+ba=0$

2×2是这样

别的也是一样。

Cramer's Rule

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} C^T b$$

$$x_1 = \frac{\text{C转置乘以b结果的第一个分量是啥?}}{\det A}$$

$x_2 =$

$\vdots$

$x_n =$

是 $\left|\begin{matrix} b & \text{和A一样} \\ \vdots & \end{matrix}\right|$

第一列用b替换后矩阵的行列式的值。

把这个按第一列展开得

$b_1C_{11} + b_2C_{21} + b_3C_{31} \cdots$

刚好是C转置乘以b结果后的第一分量。

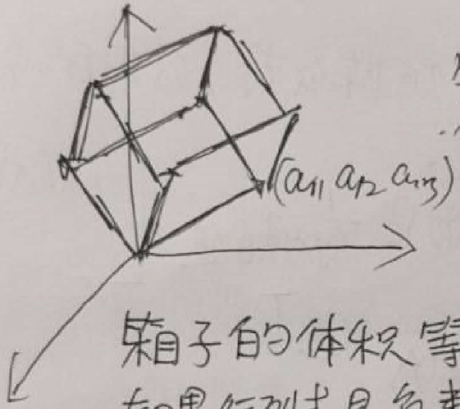
关于行列式的应用，求体积

证明

行列式的值等于一个箱子的体积

比如3x3的行列式

是一个三维空间里的箱子



箱子的第一行对应矩阵一条边

箱子的体积等于行列式的值

如果行列式是负数呢？

那么行列式的符号代表啥几何意义呢？它代表箱子是左手系的还是右手系的。

单位行列式的值是否对应箱子的体积呢？它是一个单位立方体！