

# 求解 $Ax=0$

2022年5月8日 10:42

求解  $Ax=0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

消元法

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元的个数是2  
就叫做矩阵的秩。  
主列

$UX=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

知识点:  
主元所在的列叫做主列  
其余的叫做自由列  
自由列的乘数元所谓,任取。  
比如  $x_2$  取1,  $x_4$  取0  
则  $x_3 = 0$ ,  $x_1 = -2$   
 $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  就得到零空间的一个解也是  $Ax=0$  的一个解。  
还有什么方法能取更多?

第一步先消元 转换成行阶梯矩阵  
第二步看看有多少主元多少自由项  
第三步根据自由项的个数写出来几个特解  
然后取线性组合得出通解

$C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  这个解的常数倍也是它的解呢!  
还有别的解吗,有的。  
 $x_2, x_4$  还能取别的值,比如  
 $x_2 = 0, x_4 = 1$   
则  $x_1 = 2, x_3 = -2$ 。  
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  也是解。  
整个空间, 所有解。  
 $C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$   
利用特解构造出整个空间。

①消元  
②得到主元个数 得几个自由项  
③取特解线性组合  
这是解  $Ax=0$  的步骤。

简化行阶梯矩阵。

$$U \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

简化成主元的上下全是0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$  主元简化成1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这是矩阵R

简化行阶梯, 以最简形式包含所有信息。

$Ax=0$   
 $UX=0$  它们的解都相同。  
 $Rx=0$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

先看主列, 再看自由列

$$\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \text{主列} \\ \text{自由列} \end{array}$$

两列数字刚好是解!!!

简化行阶梯矩阵  
很简单的形式包含很多信息

如果 A 是简化行阶梯形式

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元所在的行列。  
自由项所在的行列。  
 $n-r$

那么特解是啥呢?

$RX=0$  解是啥呢?

用这些特解构成一个零空间  
矩阵"。这个矩阵的列都是这  
些特解。  $N$

$$RN=0 \quad N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

牛通·牛通。

再举一个例子吧

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

简化行阶梯=?

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

偶数 1个自由列

$$X = C \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

也是单位矩阵  
对应自由变量。

利用简化行阶梯矩阵得通解得操作真秀~