洛必达法则

2022年3月7日 11:06

洛必达法则

它提供了算极限的捷径

包括一些新型的极限

举个例子来说明思想

Ex1 $\lim_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$

S_1 当 $x\to1$ 的时候，它就变成 $\frac{0}{0}$ 这种，压根不知道它是啥。

这种叫做"不定型"

如果我们把分子分母同除以 $(x-1)$

消掉 $(x-1)$，然后就能求解了。

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^{10}-1)/(x-1)}{(x^2-1)/(x-1)}$$

可以对它进行处理，利用长除法

S_2 $\lim_{x\to1}\frac{(x^{10}-1)/(x-1)}{(x^2-1)/(x-1)}$ ← 这个叫做差商

利用微积分的方法做

在极限情况下，它趋于函数的导数

设 $f(x)=x^{10}-1$

$f(1)=0$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[\text{当}x\to1]{} f'(1)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^{10}-1)/(x-1)}{(x^2-1)/(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x^9}{2x}$$

$$=\frac{10}{2}$$

$$=5$$

版本一的洛必达法则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

条件是

$f(a)=g(a)=0$

把这个原理系统化，并且他们右边的极限存在。

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 默认是 $f(a)=g(a)=0$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

条件是 $g'(a)\neq0$.

例题

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5\cos5x}{2\cos2x}$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

洛必达 $\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}$

再用洛必达 $\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2}$

$$=-\frac{1}{2}$$

如果用逼近法做

当 $u\approx0$ $\sin u\approx u$

$\frac{\sin5x}{\sin2x}\approx\frac{5x}{2x}$ 当 $x\to0$ 时

$\frac{\sin5x}{\sin2x}=\frac{5}{2}$ 当 $x\to0$ 时

$\frac{\cos x-1}{x^2}$ 当 $x\to0$ 时

$$\approx\frac{(1-\frac{x^2}{2})-1}{x^2}$$

$$=\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}$$

$=-\frac{1}{2}$ 当 $x\to0$ 时

洛必达法则(扩展)

$a=\pm\infty$

$f(a)=g(a)=\pm\infty$

右边的极限不必一定存在

也可以是 $\pm\infty$

例是

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=?$$

第一步就是改成除法的形式

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\quad\frac{-\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-px} \quad (p>0)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{px}} \cdot \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{pe^{px}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{px}}{x^{100}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\left(\frac{px}{100}\right)}}{x}\right)^{100} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \frac{\frac{p}{100} e^{\frac{px}{100}}}{1}$$

$$= \left(\frac{\infty}{1}\right)^{100}$$

$$= \infty$$

指数函数比幂函数变化快.

$$\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}} \text{ 当 } x\to\infty \text{ 时 } \frac{\infty}{\infty}$$

$$3\,\frac{\frac{1}{x}}{\cancel{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= 3x^{-\frac{1}{3}} \text{ 当 } x\to\infty \text{ 时}$$

$$= 0$$

$\ln x$ 比 x 变化慢的多.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$$

1°. 两次用洛必达

2° $\sin x$ 的线性近似是

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\frac{\cos x}{2x} = \frac{-\sin x}{2} \cdot x\to 0 = 0$$

用了一次洛必达是 $\frac{\infty}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

洛必达法则的应用形式.

$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

a可以是任何数.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \cdot \quad x^x = e^{x\ln x},$$

变换指数

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

$$= e^0 = 1$$

$$\frac{x^5 - 2x^6 + 1}{x^6 + 2}.$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^5}}$$

x^5/x^6 是主要项.

$$\ln x \ll x^p \ll e^x \ll e^{x^2} \quad (p>0)$$

它们增长的速度依次递增.

$$\frac{1}{\ln x} \quad \frac{1}{x^p} \quad \frac{1}{e^x} \quad e^{-x^2}$$

它趋于0很慢.

它趋于0特别快