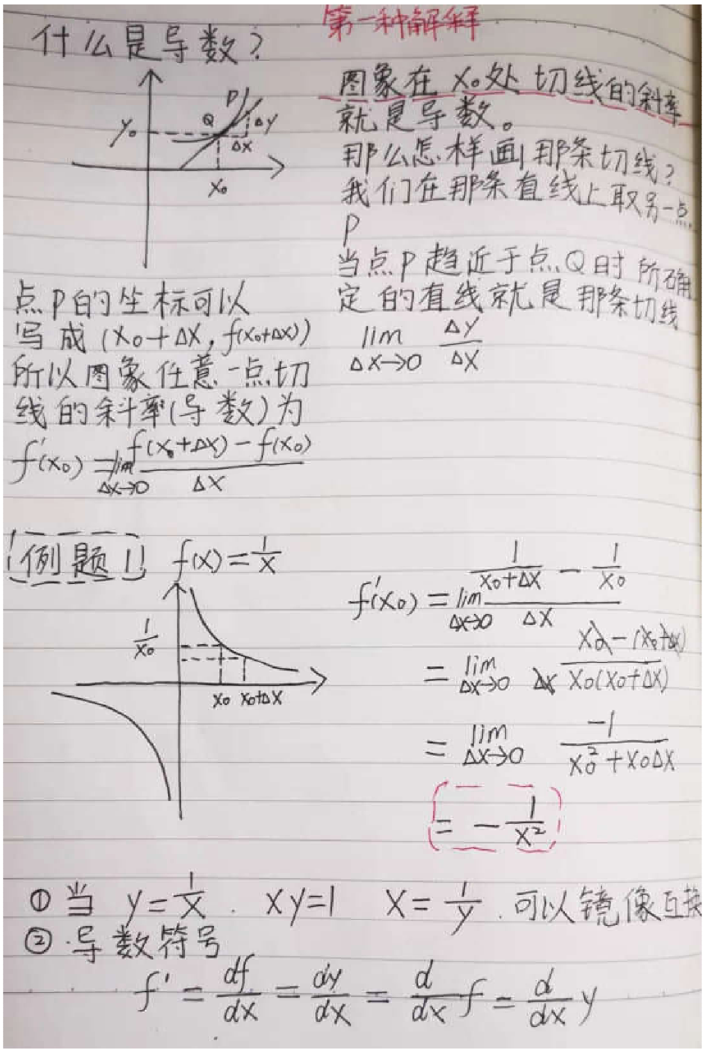
导数的概念

2021年11月1日　　10:48

1导数的概念
2连续和间断
3证明：可导必连续



第一种解释

什么是导数？

图象在 x_0 处 切线的斜率就是导数。
那么怎样画那条切线？
我们在那条直线上取另一点 P
当点 P 趋近于点 Q 时 所确定的直线就是那条切线
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

点 P 的坐标可以写成 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$
所以图象任意一点切线的斜率(导数)为
$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

例题1 $f(x) = \frac{1}{x}$

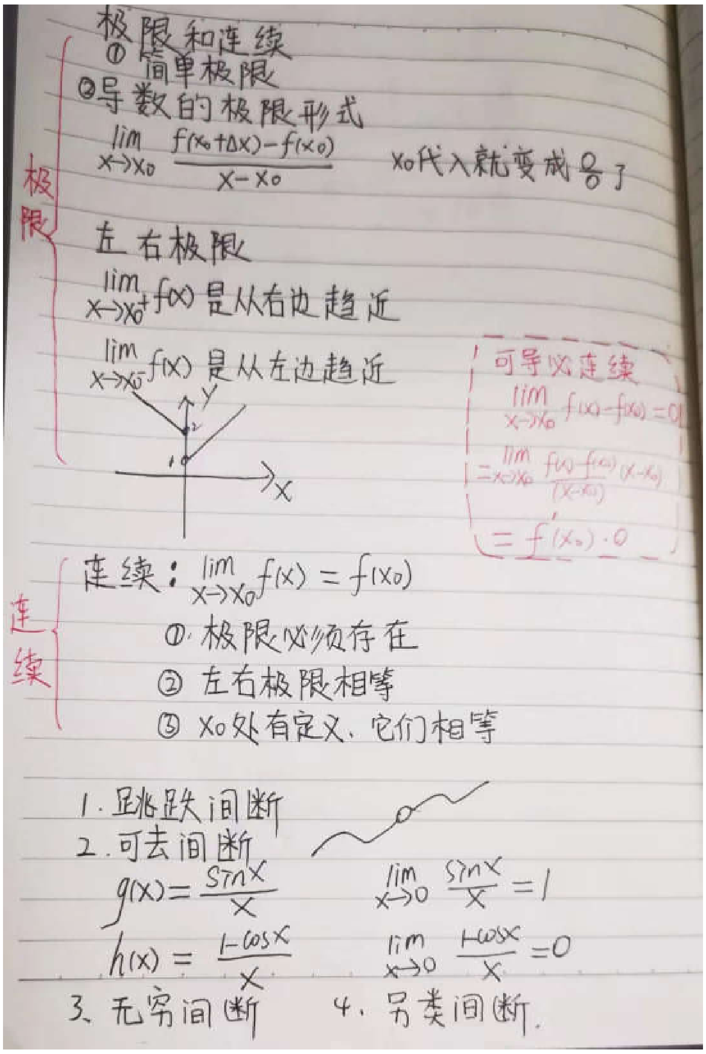
$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{\Delta x \, x_0(x_0+\Delta x)}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0^2 + x_0\Delta x}$

$= -\frac{1}{x^2}$

① 当 $y=\frac{1}{x}$. $xy=1$ $x=\frac{1}{y}$. 可以镜像互换
② 导数符号
$f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}y$



极限和连续
① 简单极限
② 导数的极限形式
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$ x_0 代入就变成 $\frac{0}{0}$ 了

左右极限
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 是从右边趋近
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 是从左边趋近

极限

可导必连续
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$
$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0)$
$= f'(x_0) \cdot 0$

连续：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
① 极限必须存在
② 左右极限相等
③ x_0 处有定义，它们相等

连续

1. 跳跃间断
2. 可去间断
$g(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$h(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
3. 无穷间断 4. 另类间断.

例2 $f(x)=x^n \quad n=1,2,3\ldots\ldots$

$$\frac{d}{dx}x^n=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

一点二项式定理

$$(x+\Delta x)^n=(x+\Delta x)\cdots(x+\Delta x)$$
$$=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\cdots$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\cancel{\Delta x}+\cdots}{\cancel{\Delta x}}$$
$$=nx^{n-1}$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}}$$

变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是平均变化率

$\frac{dy}{dx}$ 是瞬时变化率

第二种解释