

# 二阶齐次线性方程

2022年4月21日 16:29

= 阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

求解的方法是找到线性独立的两个解  $y_1$  和  $y_2$ .

也就是  $y_2 \neq c_1 y_1$   
 $y_1 \neq c_2 y_2$

通解的形式是什么呢?

就是两个解的常系数线性组合

如果  $y_1$  和  $y_2$  是线性方程的解

那么  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  是方程的解

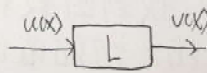
如何证明? 关键性的问题

$$y'' + p y' + q y = 0$$

$$D^2 y + p D y + q y = 0$$

$$y(D^2 + pD + q) = 0$$

$$L y = 0$$



$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$$

$$L(cu) = cL(u)$$

问题是只知道  $y_1$  和  $y_2$  是解  
如何证  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  是方程的解  
线性组合也是解?

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \underbrace{c_1 L(y_1)}_0 + \underbrace{c_2 L(y_2)}_0 = 0$$

另外一个问题, 为什么  $y_1, y_2$  的线性组合是所有的解?

关键性的问题

先看解初值问题.

满足初值条件, 找到函数和它的导数满足给定初始值的解

这一族解  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

满足任意的初始条件.

假如说初始条件为

$$y(x_0) = a$$

$$y'(x_0) = b$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

如果把  $(x_0)$  代入, 它是啥?

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = a \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = b \end{cases}$$

$c_1, c_2$  一定是存在的吗?

只要系数矩阵是可逆的.

系数的行列式值必须非零.

$c_1$  和  $c_2$  才是可解的

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0$$

它是朗斯基行列式.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

如果  $y_1, y_2$  是线性齐次二阶方程  
它的解只有两种形式都是零  
(或者这个  $W(y_1, y_2)$  从不为零。)

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

和  $c_1' u_1 + c_2' u_2$

$$\begin{cases} u_1 = \overline{c_1} y_1 + \overline{c_2} y_2 \\ u_2 = \overline{c_1'} y_1 + \overline{c_2'} y_2 \end{cases}$$

可以用  $y_1$  和  $y_2$  来制造所有解  
也可以另一集合里的解表示成  $u_1$  和  $u_2$   
组的形式。

$y_1$  和  $y_2$  可能容易得到  
但它们可能不是一种很  
好的形式。  
有更好的形式  
利用正交化。

$$Y_1 \quad Y_1(0)=1 \quad Y_1'(0)=0 \quad Y_2 \quad Y_2(0)=0 \quad Y_2'(0)=1$$

例题。

$$y'' + y = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$

在  $x=0$  处  $y_1, y_2$  是正交的。  
的。

存在唯一性定理

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad p, q \text{ 对 } x \text{ 都是连续的。}$$

有且只有一个满足给定初始条件的解。

$$\text{初始条件是 } y(0) = A.$$

我们要所有的解。

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ 是所有的解。}$$

随便取一个解  $u(x)$ , 证明它

$$\text{属于集合 } \begin{cases} u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_0' \end{cases}$$

这个解  $u_0 y_1 + u_0' y_2$  满足同一个  
初始条件。