

# 方程组的几何解释

2022年3月28日 08:34

方程组的几何解释

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A X = b$$

求向量  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  的线性组合  
构造出  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，列向量的线性组合。

用  $1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  和  $2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$   
所有的线性组合是啥？  
所有的向量

咋解方程组呢？  
① 把每一行看成一条直线，然后求交点，很简单。  
② 但是把  $x$  的系数看成是一个向量， $y$  的系数看成是一个向量求方程解，这种方法更重要。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

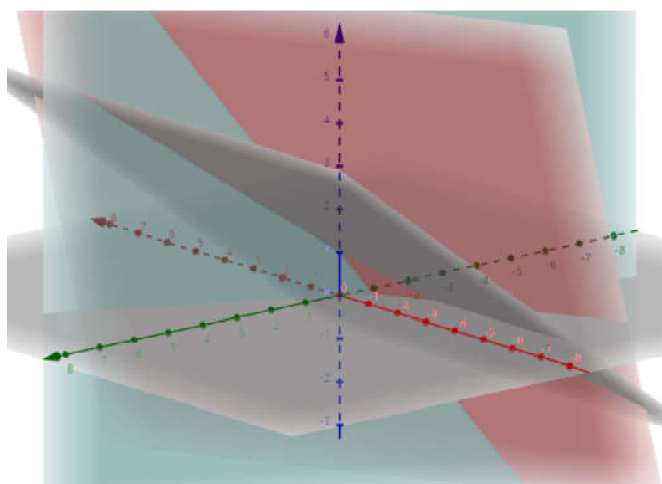
$$X \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

怎么组合才能得到右边的  
 $x=0 \quad y=0 \quad z=1$

对于任意的  $b$  是否都能求解？  
解：  $AX=b$

每一行都是一个平面。  
如果不平行，没什么特殊的  
三个平面交于一点。

这是3个变量方程组对应的图像 空间中三个平面交于一点



问题 对于任意的  $b$   
 $AX=b$  是否都能求解？  
列的线性组合是否能覆盖  
整个三维空间？

比如三个列向量处于一个平面上时，就不能表示出所有的向量  
当  $b$  在它那个平面上才有解，

如果是 9 维空间呢？  
九个方程，九个变量，九个列向量  
是否能通过线性组合得到正确的右侧向量  $b$  呢？

$$AX=b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

第一行  $\times$  第二个的  
第一列，....