# 非齐次微分方程求特解（特殊形式的）

2022年4月23日　　17:08

非齐次方程求特解

$$y''+Ay'+By=f(x)$$

因为它解的形式是

$$y=y_p+C_1y_1+C_2y_2$$

所以现在的问题是求特解$y_p$!

$$y''+Ay'+By=f(x)$$

把左边看成多项式算子

$$\underbrace{(D^2+AD+B)}_{p(D)}y=f(x).$$

如果$p(D)$应用于复指数

$$p(D)e^{\gamma x}=p(\gamma)e^{\gamma x}$$

就是用$\gamma$来代换$D$.

简单证明

$$(D^2+AD+B)e^{\gamma x}$$
$$=D^2e^{\gamma x}+ADe^{\gamma x}+Be^{\gamma x}$$
$$=\gamma^2e^{\gamma x}+A\gamma e^{\gamma x}+Be^{\gamma x}$$
$$=p(\gamma)e^{\gamma x}.$$

指数输入定理。

是指$f(x)$是一个指数函数。

特解是$y_p=\dfrac{e^{\gamma x}}{p(\gamma)}$

$$p(D)\frac{e^{\gamma x}}{p(\gamma)}=\frac{p(\gamma)e^{\gamma x}}{p(\gamma)}=e^{\gamma x}$$

$(p(\gamma)\neq 0)$

涉及到一点　微分算子　的知识

高数书本上简单介绍

当$p(\gamma)\neq 0$时 求方程特解简单

当$p(\gamma)=0$时呢?

利用这个公式

$$p(D)e^{ax}u(x)=e^{ax}p(D+a)u(x)$$

假设$p(D)$不是二阶的

刚开始是一个常量或常数

$$De^{ax}u=e^{ax}Du+ae^{ax}u$$
$$=e^{ax}(D+a)u.$$
$$=e^{ax}p(D+a)u(x)$$

如果$p(D)$是二阶的

不要直接算$e^{ax}u$的二阶导

看成$D(D(e^{ax}u))$

$$D(e^{ax}(D+a)u)$$
$$=e^{ax}(D+a)(D+a)u$$
$$=e^{ax}(D+a)^2u$$
$$=\cdots\cdots$$

$$(D^2+AD+B)y=e^{ax}$$

$p(\gamma)=0$

求特解.

则$y_p=\dfrac{xe^{ax}}{p'(\gamma)}$

如果$p'(\gamma)=0$呢?

如果 $p(x)=0$. $x$是单根,二重根
说明 $p'(x)\neq 0$. 满足特解的形式
如果 $p(x)=0$ $x$是两相等的根

$$y_p = \frac{x^2 e^{ax}}{p''(a)}$$

可以向更高阶推广。

$$\frac{e^{ax}\,\overset{a-b}{p(D+a-b)D}\,\overset{1}{x}}{p'(a)} = \frac{e^{ax}(a-b)\cdot 1}{a-b} = e^{ax}.$$

证明。如果有俩因子 一阶导不是零的情况。

$p(D)=(D-b)(D-a)$  $b\neq a$

$p'(D)=a-b$. 一定不是0.

现在是证明 $p(D)\,\frac{x e^{ax}}{p'(a)}$ 是特解。

例如 $y''-3y'+2y=e^x$
求特解

$$y_p = \frac{xe^x}{(2D-3)|_{x=1}} \quad \frac{1}{-1} = -xe^x$$

例题.

$y''-y'+2y=10e^{-x}\sin x$

求它的特解。 它是底下这个复指数的虚部.

$(D^2-D+2)y = 10e^{(-1+i)x}$

$(10e^{-x}[\cos x + i\sin x])$

$$y_p = \frac{10e^{(-1+i)x}}{(-1+i)^2-(-1+i)+2} = \frac{10e^{(-1+i)x}(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)} = \frac{5(3+3i)e^{(-1+i)x}}{9}$$

找它的虚部。

$$\frac{5}{3}e^{-x}(\cos x+\sin x)$$

$$= \frac{5}{3}e^{-x}\sqrt{2}\cdot\cos(x-\phi) \quad (\phi=\frac{\pi}{4})$$

$y''+w_0^2 y = \cos w_1 t$

$(D^2+w_0^2)y = \cos w_1 t$

复化

$(D^2+w_0^2)\tilde{y} = e^{iw_1 t}$

$$\tilde{y}_p = \frac{e^{iw_1 t}}{(iw_1)^2+w_0^2} = \frac{e^{iw_1 t}}{w_0^2-w_1^2}$$

现在需要求它的实部.

$$y_p = \frac{\cos w_1 t}{w_0^2-w_1^2}$$

如果输入函数是　一个多项式*一个指数函数那种
可以利用待定系数法来求解　特解

求二阶常系数线性非齐次微分方程

$f(x)$ 是 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 这样的方程的特解。

由于多项式的导数仍然是多项式与指数函数乘积。。

和$e^{\lambda x}$乘积

因此推测 $y^* = R(x)e^{\lambda x}$ （$R(x)$是某多项式）

可能是一个特解．把它代入方程得．

$$R''(x) + (2\lambda+p)R'(x) + (\lambda^2+p\lambda+q)R(x) = P_m(x).$$

如果 $\lambda^2+p\lambda+q \neq 0$，比较$x$两边同次幂的系数相等即可。

如果$\lambda$是单根。 $(\lambda^2+p\lambda+q)=0$.

$(2\lambda+p) \neq 0$. 一阶导．

让$R(x)$和$x$相乘之后．再和$P_m(x)$比较系数

如果$\lambda$是复根 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

$2\lambda+q=0$ 一阶导是0

那么让$R(x)$与$x^2$相乘之后再与$P_m(x)$比较系数即可。