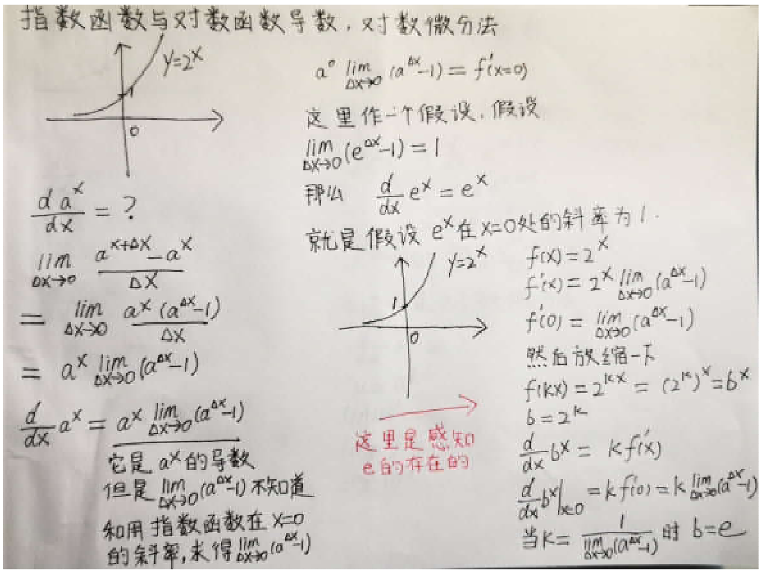
指数与对数函数导数和对数微分法

2021年11月3日 11:24



指数函数与对数函数导数，对数微分法

$y=2^x$

$\frac{da^x}{dx}=?$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$

$=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

$\frac{d}{dx}a^x=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

它是 a^x 的导数

但是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$ 不知道

知用指数函数在 $x=0$ 的斜率，求得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

$a^0\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=f'(x=0)$

这里作一个假设，假设

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(e^{\Delta x}-1)=1$

那么 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

就是假设 e^x 在 $x=0$ 处的斜率为 1.

$y=2^x$

这里是感知e的存在的

$f(x)=2^x$

$f'(x)=2^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

然后放缩一下

$f(kx)=2^{kx}=(2^k)^x=b^x$

$b=2^k$

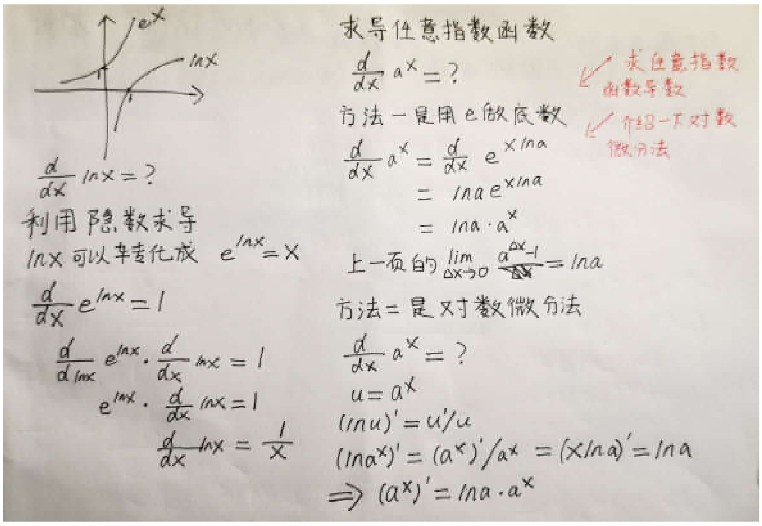
$\frac{d}{dx}b^x=kf'(x)$

$\frac{d}{dx}b^x\Big|_{x=0}=kf'(0)=k\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)$

当 $k=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)}$ 时 $b=e$

求导那种指数是可变的导数，利用对数微分法

还有就是对e的理解



e^x

$\ln x$

$\frac{d}{dx}\ln x=?$

利用隐数求导

$\ln x$ 可以转化成 $e^{\ln x}=x$

$\frac{d}{dx}e^{\ln x}=1$

$\frac{d}{d\ln x}e^{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x=1$

$e^{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x=1$

$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

求导任意指数函数

求任意指数函数导数

介绍一下对数微分法

$\frac{d}{dx}a^x=?$

方法一是用e做底数

$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}$

$=\ln a\, e^{x\ln a}$

$=\ln a\cdot a^x$

上一页的 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\cancel{\Delta x}}=\ln a$

方法二是对数微分法

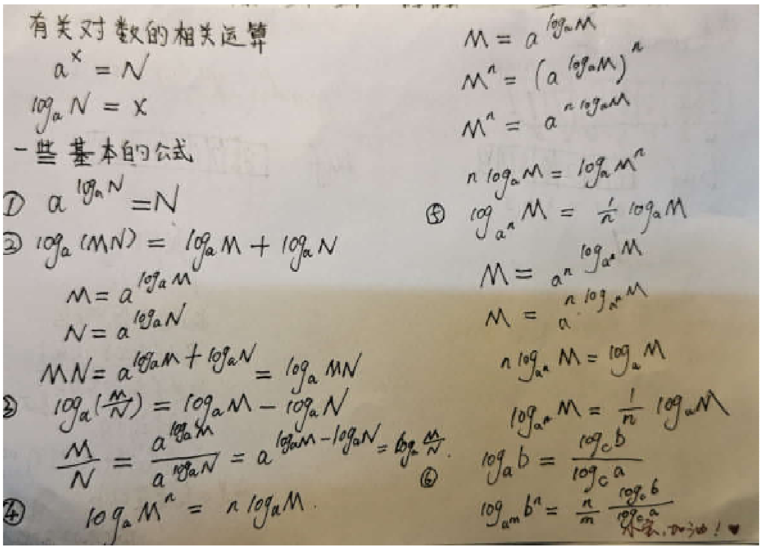
$\frac{d}{dx}a^x=?$

$u=a^x$

$(\ln u)'=u'/u$

$(\ln a^x)'=(a^x)'/a^x=(x\ln a)'=\ln a$

$\Rightarrow (a^x)'=\ln a\cdot a^x$



有关对数的相关运算

$a^x=N$

$\log_a N=x$

一些基本的公式

① $a^{\log_a N}=N$

② $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

$M=a^{\log_a M}$

$N=a^{\log_a N}$

$MN=a^{\log_a M+\log_a N}=\log_a MN$

③ $\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

$\frac{M}{N}=\frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}}=a^{\log_a M-\log_a N}=\log_a\frac{M}{N}$

④ $\log_a M^n=n\log_a M$

$M=a^{\log_a M}$

$M^n=(a^{\log_a M})^n$

$M^n=a^{n\log_a M}$

$n\log_a M=\log_a M^n$

⑤ $\log_{a^n}M=\frac{1}{n}\log_a M$

$M=a^{n\log_{a^n}M}$

$M=a^{n\log_{a^n}M}$

$n\log_{a^n}M=\log_a M$

$\log_{a^n}M=\frac{1}{n}\log_a M$

⑥ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\frac{\log_c b}{\log_c a}$

加油！

基本的对数求导法则

以及对数求导法的三个练习

1. 求 $\frac{d}{dx}a^x = ?$

把 a^x 写成 $e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$

$\frac{d}{dx}a^x \Rightarrow \frac{d}{dx}e^{x\ln a}$

$= e^{x\ln a}\cdot \ln a$

$= \ln a \cdot a^x$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 求极限.

把他写成对数的形式.

$\ln(1+\frac{1}{n})^n = n\ln(1+\frac{1}{n})$

当 $n\to\infty$ 时 等价于 $\frac{1}{\Delta x}\ln(1+\Delta x)$ $\Delta x\to 0$.

$\frac{1}{\Delta x}[\ln(1+\Delta x)-\ln 1]$ 加一个零,减一个零就案要

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln 1}{\Delta x}$

这是 $\ln x\big|_{x=1}$ 的导数

是 1

当 $n\to\infty$ 时 $\ln(1+\frac{1}{n})^n$ 是 1

则 $n\to\infty$ 时 $(1+\frac{1}{n})^n$ 是 $e^1=e$

3. 求 $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

$\ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}[\ln[(x-1)(x-2)] - \ln[(x-3)(x-4)]]$

$= \frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$

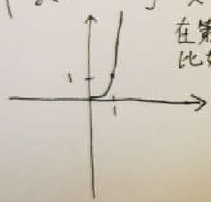
$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$

幂函数知识点

$y = x^{\gamma}$ $\gamma\in R$

可以根据 γ 取值分成三种情况

$\gamma\begin{cases}1<\gamma & y=x^2\\ 0<\gamma<1 & y=\sqrt{x}\\ \gamma<0 & y=\frac{1}{x}\end{cases}$



在第一象限里的图像类似.

比如 $y=x^{\frac{3}{2}}$. $\gamma>1$

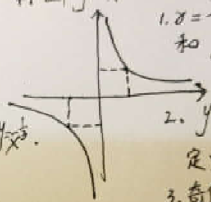
它就和 $y=x^2$ 类似

$y=\sqrt{x^3}$ $x\geq 0$

看一下定义域.

判定奇偶性.

再画 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 的图像



$y=\sqrt[3]{x}$.

1. $\gamma=-\frac{1}{3}<0$

和 $y=\frac{1}{x}$ 类似

2. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

定义域是 $x\neq$

3. 奇偶性呢?

$\frac{1}{\sqrt[3]{-x}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

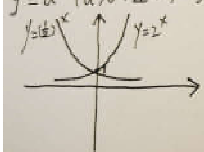
是奇函数

关于原点对称

指数函数.

$y=2^x$, $y=(\frac{1}{2})^x$

$y=a^x$ ($a>0$. 且 $a\neq 1$) 是指数函数.



指数与指数幂运算

$a^r\cdot a^s = a^{r+s}$ ($a>0$ $r.s\in N^*$)
$b>0$

$(a^r)^s = a^{rs}$

$(ab)^s = a^s b^s$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a>0$ $n>1$ $n.m\in N^*$

幂函数和质数函数基本的知识点
还有指数幂运算的知识点