

拉格朗日乘数法

2022年4月6日 10:03

拉格朗日乘数法。
保留所有变量，把这些变量间的关系当做一种限制来算。
例如：想找 $xy=3$ 上离原点最近的点。

又双曲线本身也是一个等高线
 $g(x,y)=3 \Rightarrow g(x,y)=xy$
 $f(x,y)=x^2+y^2$
当 g 、 f 的等高曲线相切时，怎么解出 x,y ？
如果两等高线相切，说明它们的切线相同，它们的法向量应该平行。
当最值出现时， f 和 g 的梯度向量平行。
 $\nabla f \parallel \nabla g$
 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 关系式
接下来找 λ 和 (x,y) 使那成立。

等价于要找它的最小值 (x^2+y^2)
且 $xy=3$ 是限制条件。
最小值就是在 f 的等高曲线与双曲线相切的时候取得的。

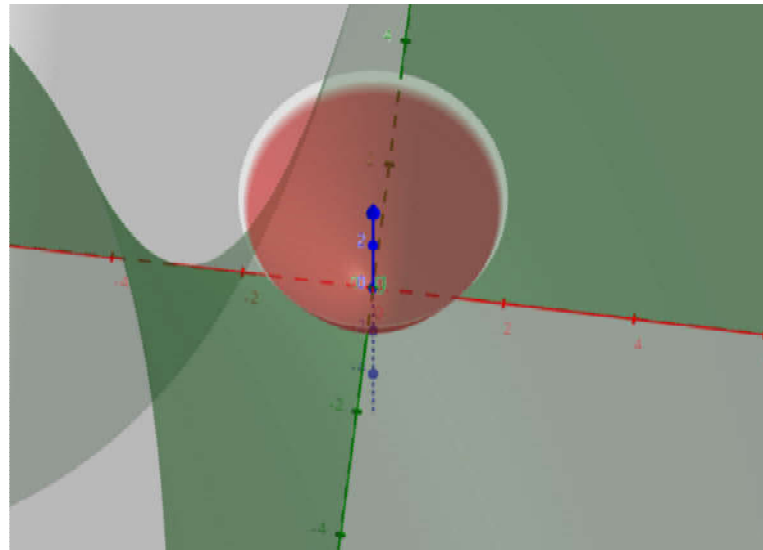
当有俩变量时

例题 找 $xy=3$ 时距离原点最近的点

把问题转化成

找 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 最小值

并且 $g(x,y) = xy$ $g(x,y)=3$



红色的是 $f(x,y)$ 的图像

绿色的是 $g(x,y)$ 的图像 当 $g(x,y)=3$ 时是两条曲线（类似与反比例函数）

把前两条写成 2×2 矩阵
 $\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $x=y=0$ 成立 但不满足 $xy=3$
只有 $\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = 0$ 它有多解存在。
 $\lambda^2 = 4$ $\lambda = \pm 2$
当 $\lambda = 2$ 时 $\begin{cases} x = y \\ xy = 3 \end{cases}$ 得 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
当 $\lambda = -2$ 时 $\begin{cases} x = -y \\ xy = 3 \end{cases}$ 无解！
候选答案 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
 λ 代表两个梯度向量的倍数。

$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = C \end{cases}$
三个方程，三个未知数
 $f(x,y) = x^2 + y^2$
 $g = xy$
 $\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 3 \end{cases}$
解 x, y, λ
 $\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ x\lambda x - 2y = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$

对问题进行分析

如果要满足条件 当 $f(x,y)$ 的等高线和那两条曲线相切

只有一个交点的时候成立

x,y 在那两条曲线上 同时使 x^2+y^2 最小

此时也是 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 等高线相切的时候

那么 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的梯度向量是平行的

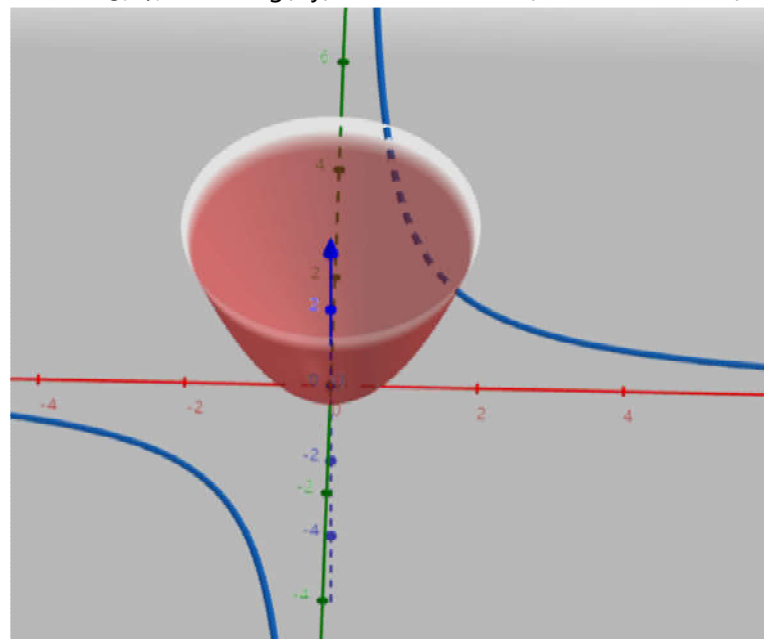
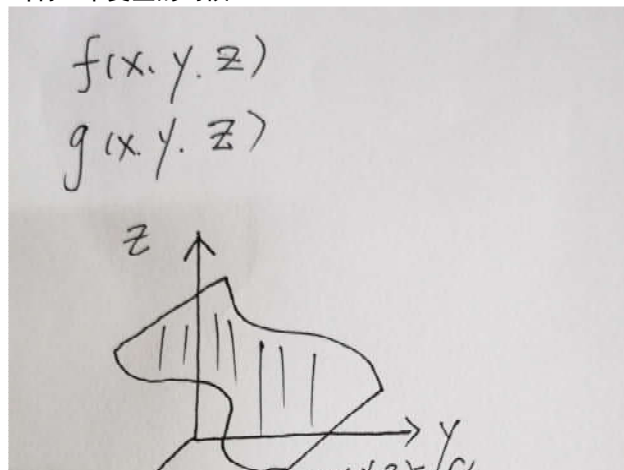
利用这个关系解出 x,y 的具体值

详细计算 看第二页笔记

此时只有两个变量

那么有多个变量的一般情况有类似的关系嘛？

当有三个变量的时候

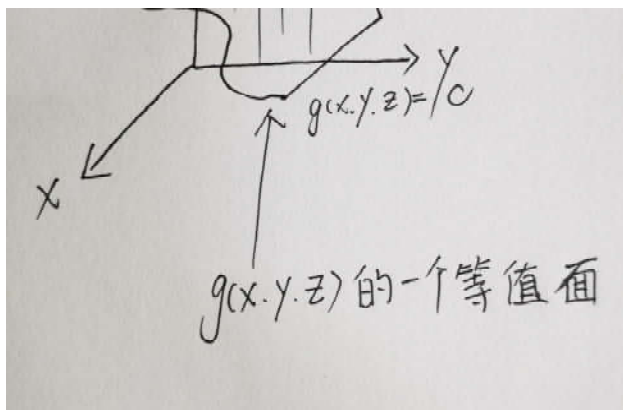


就是找点 (x,y) 它在这两条曲线上运动 然后使红色的图像有最小值

一道练习题

(5) 拉格朗日乘数法

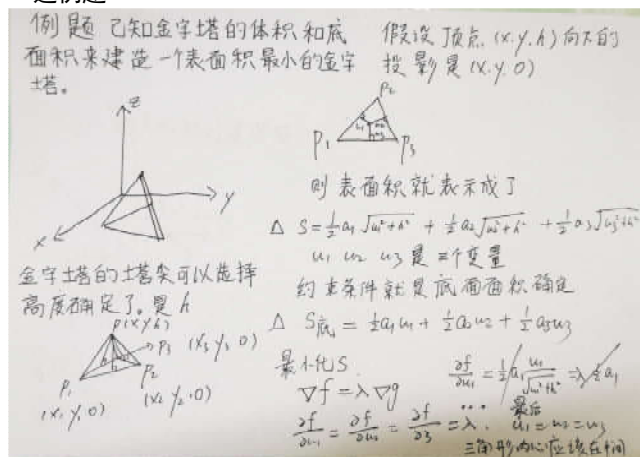
$\nabla f = \lambda \nabla g$



那个等值面代表 x, y, z 的一个约束条件，在这个范围之内，找到使 $f(x, y, z)$ 最大或者最小的点，比如说 x_0, y_0, z_0 是 $f(x, y, z)$ 最大或者最小的点，那么 f 在 x_0, y_0, z_0 处所有的方向导数和 f 在 x_0, y_0, z_0 处的切平面是平行的， f 在 x_0, y_0, z_0 处的梯度向量和 g 在 x_0, y_0, z_0 处的梯度向量是平行的。

但是这种方法不能告诉我们是最大值还是最小值，而且也不能利用二阶导数来判断
可以代入求值 观察函数来确定

一道例题



当底面三角形的面积确定之后，把塔尖选在三角形的内心处（到三条边的距离都相等的地方）面积最小

一道练习题

