

利用矩阵求解线性方程组

2022年3月29日 22:15

把数学公式和几何的形式联系起来
能解决普遍形式的线性方程组

借助平面方程和平面交点思考线性方程组的几何意义
解线性方程组实际上是求平面交点

$$\begin{cases} X+Z=1 & ① \\ X+Y=2 & ② \\ X+2Y+3Z=3 & ③ \end{cases}$$

它的几何意义是啥？
三个平面

①②平面有一条交线。
那么平面③呢？

①是穿过那条交线，有一个点。
交线就是 $P_1 \cap P_2$
交点就是解，如何求解呢？
通过写成矩阵形式求解。

$X=A^{-1}B$
但这种方法不一定全对
②因为第三条平面可能穿过那条交线③也可能包含那条交线
也可能与那条交线平行。
如果是平行，则方程组无解
如果是包含，则有无数解
为啥 $X=A^{-1}B$ 不一定全对？
是因为 A 不一定总是可逆的
如果行列式不为零，正好是三平面交于一点。
如果是零，则是 P_1 和 P_2 的交线与 P_3 平行。

举例 解齐次方程组

$$\begin{cases} X+Z=0 \\ X+Y=0 \\ X+2Y+3Z=0 \end{cases}$$

齐次方程组有 $(0,0,0)$ 这个解
如果行列式不是零，
是正好是三个平面交于一点的情况
如果行列式是零，
那么有无穷多解
证明如下

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

因为系数刚好是平面法向量
我们也可以说
三个平面法向量的行列式是零。
也就是 N_1, N_2, N_3 共面
(利用几何意义)
作三个法向量垂线
这垂线平行于所有平面
为啥该垂线在面内？
因为这线过原点。
如果求解 利用叉乘。

普遍情况
 $AX=B$
如果行列式不是零
如果行列式是零