全微分 链式法则

2022年4月5日 09:54

微分 链式法则

多元函数微分的确切名字全微分，正好与偏微分区别开来。

$f(x, y, z)$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial y}dz$$

首先 df 不等于 Δf.

当 x, y, z 有了些许变化，Δf 表示的就是变化的量值。

$\Delta x, \Delta y, \Delta f$ 都是实实在在的数量

微分是啥呢？

1) 它能够描述，当 x, y, z 变化时会怎样影响到 f 的值。是 x, y, z 和 f 间的关系.

② 也是微小变化的占位符.

由 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 得到近似式。

$$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z$$

这是 $\approx$ 那边是 $=$ 确实不一样

③ 除以 dt，来得到趋于零时的变化率

$$\frac{df}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} + f_z\frac{dz}{dt}$$

跟 $f(x) = x(t)$ $f(y) = y(t)$

这就是链式法则，一个函数依赖于某变量，该变量又依赖于另一变量。

为啥 $\frac{df}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} + f_z\frac{dz}{dt}$ 存在？

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

如果 x 是 t 的函数

则 $dx = x'(t)\,dt$

$dy = y'(t)\,dt$

$dz = z'(t)\,dt$

$$df = f_x\,x'(t)dt + y'(t)dt + z'(t)dt$$

现在得到 df 和 dt 的关系

同时除以 dt

思考似近公式

$$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z$$

两边同除以一个数 Δt

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时 $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt}$

当 $\Delta t \to 0$ 时

$$\frac{df}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} + f_z\frac{dz}{dt}$$

例题

$W = x^2y + z$ $x = t$ $y = e^t$ $z = \sin t$

还可以把 x, y, z 代入，然后对 t 求导检验结果

$$\frac{dw}{dt} = 2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$
$$= 2te^t\cdot 1 + t^2e^t + \cos t$$

W 就成 t 的函数了。

证明乘法和除法法则.

$f = uv \quad u=u(t) \quad v=v(t)$

$$\frac{d(uv)}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$$

$g = \frac{u}{v} \quad u=u(t) \quad v=v(t)$

$$\frac{d(\frac{u}{v})}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{du}{dt} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dt} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

把链式法则用在多个变量当中.

$W = f(x, y) \quad x = x(u,v) \quad y = y(u,v)$

$$\begin{aligned} dw &= f_x\,dx + f_y\,dy \\ &= f_x(x_u\,du + x_v\,dv) + f_y(y_u\,du + y_v\,dv) \\ &= \underbrace{(f_x x_u + f_y y_u)}_{\frac{\partial w}{\partial u}}du + \underbrace{(f_x x_v + f_y y_v)}_{\frac{\partial w}{\partial v}}dv \end{aligned}$$

整理一下得

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

如果u稍微变化一点呢？f该咋变？

如果u变，x也会变，关系是 $\frac{\partial x}{\partial u}$，x变f也变

还有一个问题困扰我们

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

为啥 ∂x、∂y 不能约掉？

因为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是偏导.

带d的能消掉.

一道练习题

(1) $z = x^2+y^2$

$x = u^2 - v^2$

$y = uv$

a) 用dx、dy表示dz的全微分.

$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$

$= 2x\,dx + 2y\,dy.$

b). 用两种方法算 $\frac{\partial z}{\partial u}$

链式法则和微分。

$dz = f_x\,dx + f_y\,dy.$

$$\begin{cases} dx = f_u\,du + f_v\,dv \\ dy = f_u\,du + f_v\,dv \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = 2u\,du - 2v\,dv. \\ dy = v\,du + u\,dv \end{cases}$$

$dz = 2x(2u\,du - 2v\,dv) + 2y(v\,du + u\,dv)$

$= du(4xu + 2yv) + dv(-4xv + 2yu)$

$\frac{dz}{du} = 4xu + 2yv.$

$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x\frac{dx}{du} + f_y\frac{dy}{du}$

$= 2x\cdot 2u + 2y\cdot v$

$W = x^2+y^2$

$\cancel{\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}}$

$\cancel{\partial x}$