反常积分

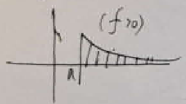
2022年3月9日　　10:08

反常积分.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx$$

就是正常积分的上限N趋于∞

对于积分来讲，如果极限存在，它就是"收敛"的，否则就是发散的。



收敛的情况是函数图象的面积是有限的。

发散就是总面积是无限的

例1 $\int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx \quad (k>0)$

$$\int_0^N e^{-kx}\,dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^N$$

$$= -\frac{1}{k}e^{-kN} + \frac{1}{k}$$

当$N\to\infty$时　结果是$\frac{1}{k}$

对于无穷小来说，做微分之后得到的东西.

都是很简单的式子。

例2 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

例3 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$　　$x^p\ (p=1)$

$= \ln N - \ln 1$

当$N\to\infty$　$\ln N = \infty$

所支是发散的

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$$

$$= \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{\infty}$$

$$= \frac{(\infty)^{(-p+1)}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

当$p=1$时，分母是0了　∞

当$-p+1>0$时 是∞

当$-p+1<0$时 分子是0　$\frac{1}{p-1}$

当$p\leq 1$时 发散

$p>1$时 收敛.

极限的比较.　$f(x)\backsim g(x)$　$\frac{f(x)}{g(x)}=1$　$x\to\infty$

如果一个函数f和另一个函数g很相近

当x趋于∞时，两者逐渐地靠近。

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 和另一个函数 $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 同敛散

两者是同时收敛或者同时发散的

例题

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+10}} \backsim \int_{\substack{100\\(a)\\\cdots}}^{\infty}\frac{dx}{x}$$

例题 $\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+3}} \backsim \underbrace{\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}}_{\text{收敛}}$

它也是.

例题 $\underline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx} = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

$\leq 2\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \underline{2\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx}$ 收敛

$\begin{pmatrix} x\geq 1 \\ x^2\geq x \\ -x^2\leq -x \end{pmatrix}$

收敛.

反常积分的第二种类型

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$　$\int_0^1\frac{dx}{x}$　$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$.

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$$

$= -1x^{-1}\Big|_{-1}^1 = -2$　× 这是错的

因为它是发散的.

① $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2$

所以它是收敛的，并且还能算出值出来。

② $\int_0^1\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+$

$= 0-(-\infty) = +\infty$

所以它是发散的.

③ 一般情况下

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$$

当$p<1$时. 收敛. 值是$\frac{1}{1-p}$

当$p\geq$时 是发散的.

你是最棒的~ 嗒~!!

反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$

当 $p=1$ 时

原式 $=\ln x\Big|_a^{+\infty}$

$=\ln\infty-\ln a$ 发散

当 $p\neq1$ 时

原式 $=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^{+\infty}$

$=\frac{1}{1-p}\infty^{1-p}-\frac{1}{1-p}a^{1-p}$

当 $1-p>0$ 时 $p<1$ 时发散

当 $1-p<0$ 时 $p>1$ 时收敛

$\therefore$ 当 $p\leq1$ 时发散

当 $p>1$ 时收敛.

反常积分 $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^q}$

当 $q=1$ 时

原式 $=\ln(x-a)\Big|_a^b$

$=\ln(b-a)-\lim\limits_{x\to a^+}\ln(x-a)=+\infty$

当 $q\neq1$ 时

原式 $=\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\Big|_a^b$

$=\frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}-\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}$

当 $1-q<0$ 时. $q>1$ 时 $+\infty$ 发散

当 $-q+1>0$ 时 $q<1$ 收敛

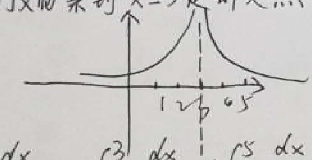
$\therefore$ 当 $q\geq1$ 时发散

$q<1$ 时收敛.

例题

$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}$ 判断它收敛还是发散

我们观察到 $x=3$ 是瑕点.



$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}=\int_0^3\frac{dx}{(x-3)^2}+\int_3^5\frac{dx}{(x-3)^2}+\int_5^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}$

当 $x\to3$ 时

$\frac{1}{(x-3)^2}$ 等价于 $\frac{1}{x^2}$ 是发散的

当 $x\to\infty$ 时

$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}$ 等价于 $\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 是收敛的

一个收敛. 俩发散. 所以是发散的。

例题 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收

求 a. a+b 的关系(选择题)

$\int_0^1\frac{dx}{x^a(1+x)^b}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$

$=$ 当 $x\to0^+$ 时

$\int_0^1\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 相当于 $\int_0^1\frac{dx}{x^a}$

如果要收敛. 则 $a<1$

当 $x\to+\infty$ 时

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 相当于 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a x^b}$

则 $a+b>1$