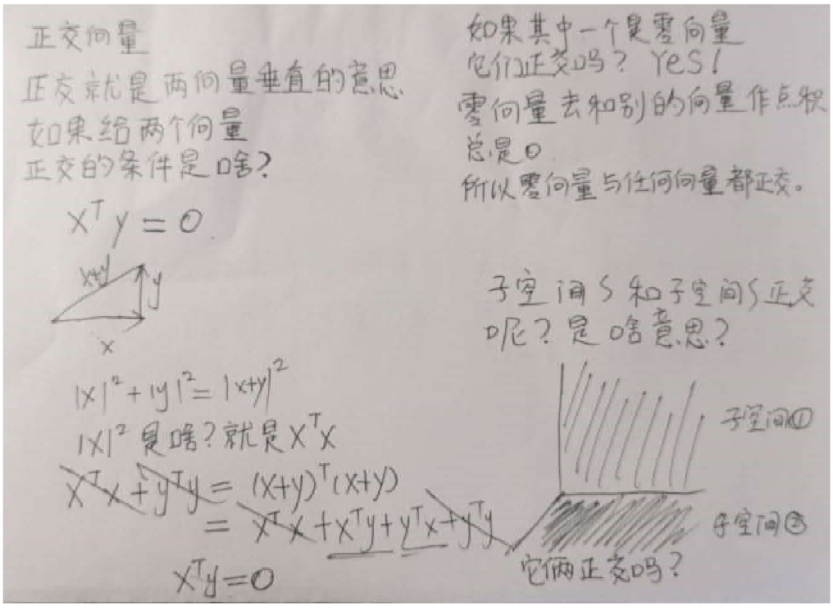
正交向量和子空间

2022年5月14日 19:49



正交向量

正交就是两向量垂直的意思

如果给两个向量

正交的条件是啥？

$x^Ty=0$

$|x|^2+|y|^2=|x+y|^2$

$|x|^2$是啥？就是x^Tx

$\cancel{x^Tx+y^Ty}=(x+y)^T(x+y)$

$=\cancel{x^Tx}+x^Ty+y^Tx+\cancel{y^Ty}$

$x^Ty=0$

如果其中一个是零向量

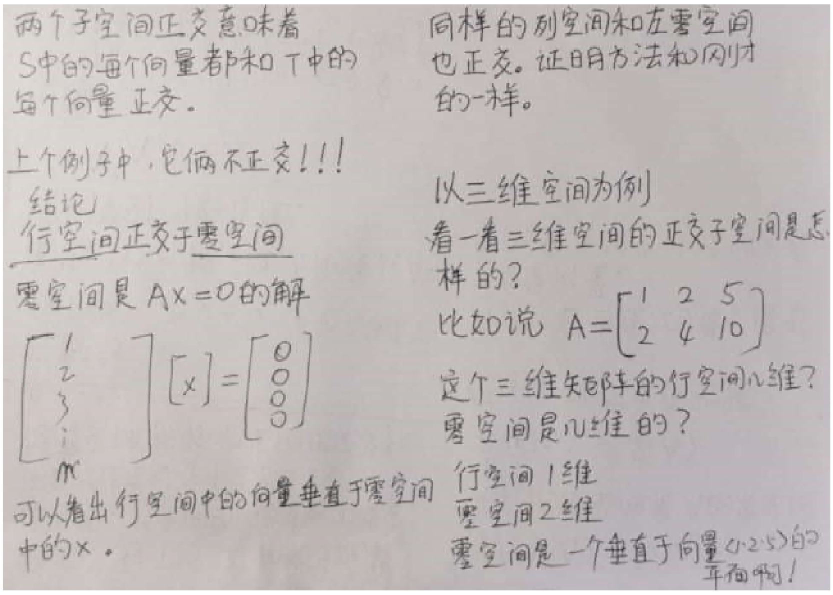
它们正交吗？Yes!

零向量去和别的向量作点积

总是0

所以零向量与任何向量都正交。

子空间S和子空间S正交呢？是啥意思？



两个子空间正交意味着

S中的每个向量都和T中的每个向量正交。

上个例子中，它俩不正交！！！

结论

行空间正交于零空间

零空间是$Ax=0$的解

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可以看出行空间中的向量垂直于零空间中的x。

同样的列空间和左零空间也正交。证明方法和刚才的一样。

以三维空间为例

看一看三维空间的正交子空间是怎样的？

比如说 $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&4&10\end{bmatrix}$

这个三维矩阵的行空间几维？

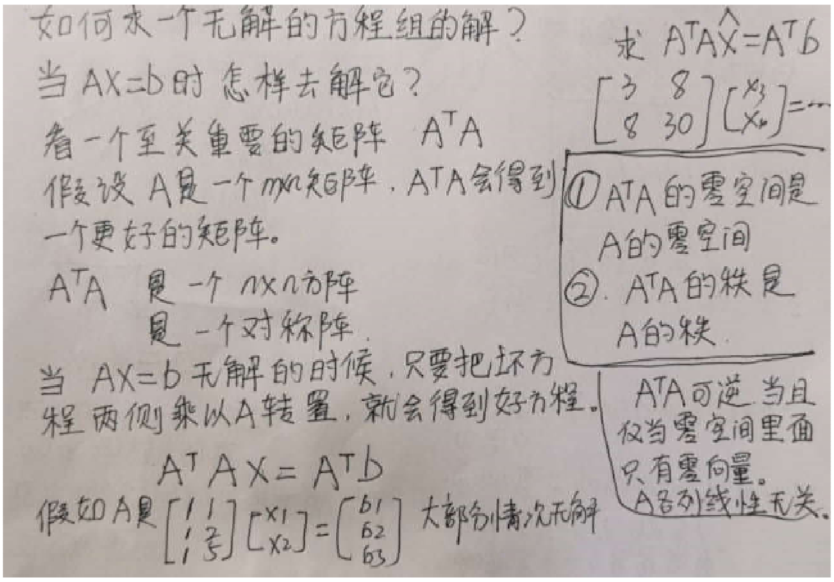
零空间是几维的？

行空间1维

零空间2维

零空间是一个垂直于向量(1,2,5)的平面啊！

循序渐进地介绍正交的概念



如何求一个无解的方程组的解？

当$Ax=b$时怎样去解它？

看一个至关重要的矩阵 A^TA

假设A是一个$m\times n$矩阵，A^TA会得到一个更好的矩阵。

A^TA 是一个$n\times n$方阵

是一个对称阵

当$Ax=b$无解的时候，只要把坏方程两侧乘以A转置，就会得到好方程。

$A^TAx=A^Tb$

假如A是 $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ 大部分情况无解

求 $A^TA\hat{x}=A^Tb$

$\begin{bmatrix}3&8\\8&30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\cdots$

① A^TA的零空间是A的零空间

② A^TA的秩是A的秩

A^TA可逆当且仅当零空间里面只有零向量。A各列线性无关。

最后一页介绍了 A转置乘A 的几个概念