

有理函数积分

2022年2月28日 11:15

有理函数积分

① 把分母分解因式

② 建立等式

③ 求出A, B

④ 积分

例: $\int \frac{x^2+3x+8}{(x-1)(x-2)(x+5)} dx$

建立等式: $\frac{x^2+3x+8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5}$

消去一个分母: $\frac{x^2+3x+8}{(x-1)(x+2)} = A + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5}$

然后让 $x=1$

$A=1$

$B=3$

然后让 $x=-2$

$C=1$

然后使用遮盖法求A

分子多项式的最高次幂低于分母的最高次幂

线性因子的最高次是2的话

如果一分开这个线性因子作为分母 那么分子是 $bx+c$

如果分子多项式的最高次幂低于分母的最高次幂并且分母当中没有重复的线性因子

可以给它拆分
然后用遮盖法求解

...

如果分子多项式的最高次幂低于分母的最高次幂线性因子的最高次是2的话

如果一分开这个线性因子作为分母 那么分子是 $bx+c$

如果分子多项式的最高次幂低于分母的最高次幂线性因子有重复的

比如 $\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} dx$

这样的积分

就可以分解成 $\int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x-1)^2} dx + \int \frac{C}{(x+1)} dx$

如果分子多项式的最高次幂比分母的最高次幂高
利用长除法处理

求未知数A B C的时候 使用遮盖法比较简便

例: 带二次项的因子

分子的最高次幂比分母的最高次幂小。

$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}$

$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$A = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

一般都能最高次项和最低次项等系数

也可以代入数值

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{x^2+1}$

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{x^2+1}$

$0x = -Bx + Cx$

则 $C = \frac{1}{2}$

例: 假如P的次数比Q高怎么办?

$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} dx$

把分母乘起来

$\frac{x^3}{x^2+x-2} = (x-1) + \frac{3x-2}{x^2+x-2}$

然后使用遮盖法

$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

书本上的例题 (可化为有理函数的积分举例)

例4

$\sin x \cos x$ 都可以用 $\tan(x/2)$ 表示

$$\sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

可以令 $u = \tan(x/2)$ 代入

例5 6 7 8

都是出现根号的 我们想把根号消掉

比如 $\sqrt{x-1}$

可以让 $u = \sqrt{x-1}$ $1+u^2 = x$

然后就这么转化 就可以转换成 有理函数积分的形式了