

# 矩阵A的LU分解

2022年5月4日 21:01

假设A可逆, B可逆.  
那么AB的逆是什么?  
是  $B^{-1}A^{-1}$   
 $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = I$   
 $B^{-1}A^{-1}AB = I$   
如果对  $AA^{-1} = I$  转置呢?  
 $(A^{-1})^T A^T = I$   
如果要求A转置的逆  
只要知道A的逆然后把  
逆转置即可.

$E_{21}$  (消掉2行1列)  $A = U$   
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$   
 $A = L U$   
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$   
 下三角 上三角  
 $A = L D U$   
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

就是把一个矩阵分解成上三角矩阵和下三角矩阵的样子  
还能把一个矩阵分解成上三角 主元 下三角的样子  
这样估计更容易观察出来相关的性质吧

对于3x3矩阵A而言  
暂时先不写出数字  
现在要对它消元, 咋消?  
 $E_{32} E_{31} E_{21} A = U$   
 ↑ 在2,1位置消0  
 $A = \underbrace{E_{21}^{-1} E_{32}^{-1} E_{31}^{-1}}_L U$   
 例子:  
 例如  $E_{32} E_{31} E_{21} A = U$   
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$   
 $E A = U$   
 对于  $A = L U$  而言  
 如果不存在行变换, 消元  
 系数。消元系数可以直接  
 写入矩阵。

这个是把3\*3矩阵分解成LU矩阵的例子  
这个下三角矩阵能够看出来矩阵做了哪些转换

问题:  
比如矩阵A是100x100  
对它消元要进行多少次操作?  
 $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$   
 A  
 某一行乘(再减到)第j行上去  
 称为一次操作  
 大约需要  $100^2$  次  
 (除了第一行元素没变以外)  
 $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  大约  $99^2$   
 $100^2, 99^2, \dots, 1^2$   
 总操作数  
 $(100^2 + 99^2 + \dots + 1^2 + 2^2 + 1^2)$   
 大约是  $\frac{1}{3}n^3$   
 "微分方程是考虑连续状态  
 下求和"

这些数字还挺有意思的

但如果需要行交换呢?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这些矩阵都对行进行了一次互换。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果两两相乘  
不管咋乘都在这n个矩阵中。

对于任何可逆矩阵, 都有

$$\text{并且 } P^{-1} = P^T$$

$$PA = LU$$

上三角矩阵

下三角矩阵

P是让A进行  
行变换的矩阵。

Permutations

是让行重新排列  
了的单位矩阵。

n阶矩阵一共有多少种行变换?

一共有n的阶乘种。

$$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

所有的置换矩阵都有一个很好  
的性质: 可逆。各行还原后得单位阵。

研究了一下P置换矩阵的性质

一共有n的阶乘种行变换

所有的置换矩阵都是可逆的

...

转置矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

对称矩阵。

转置以后矩阵没变。

$$A^T = A$$

$A \cdot A^T$  总是对称的

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 11 & 1 \\ 7 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

为啥  $A \cdot A^T$  总是对称  
的呢?

$$(R^T R)^T = R^T R^{TT}$$

$$= R^T R$$

因此总是对称的。

介绍了转置矩阵的一些概念