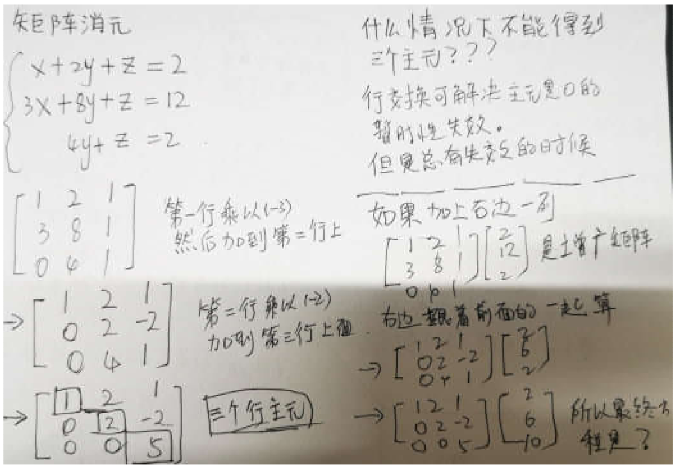
矩阵消元

2022年5月2日 21:20



矩阵消元

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 4y+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ 第一行乘以(-3) 然后加到第二行上

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ 第二行乘以(-2) 加到第三行上面

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$ 三个行主元

什么情况下不能得到三个主元???

行交换可解决主元是0的暂时性失效。

但是总有失效的时候

如果加上右边一列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$ 是増广矩阵

右边跟着前面的一起算

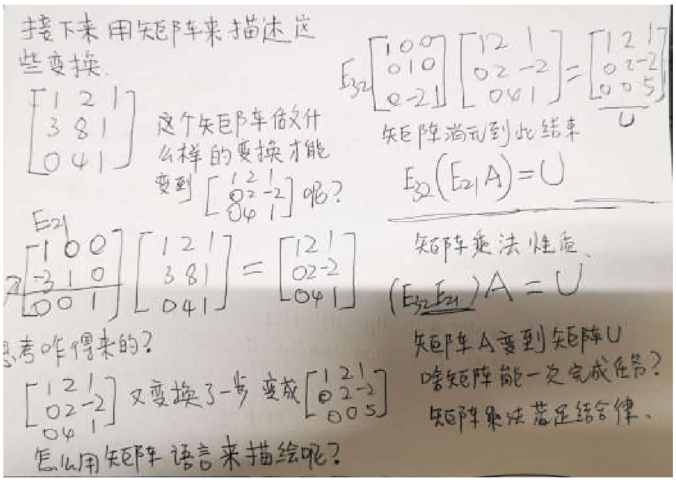
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$ 所以最终方程是?

举了一个三变量的方程组

刚开始利用消元的方法解这个方程组

（系数前面可以不加 [ ] 的）



接下来用矩阵来描述这些变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ 这个矩阵做什么样的变换才能变到 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 呢?

$$\underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

思考咋得来的?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ 又变换了一步 变成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

怎么用矩阵语言来描绘呢?

$$E_{32}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

矩阵消元到此结束

$$E_{32}(E_{21}A)=U$$

矩阵乘法性质

$$(E_{32}E_{21})A=U$$

矩阵A变到矩阵U

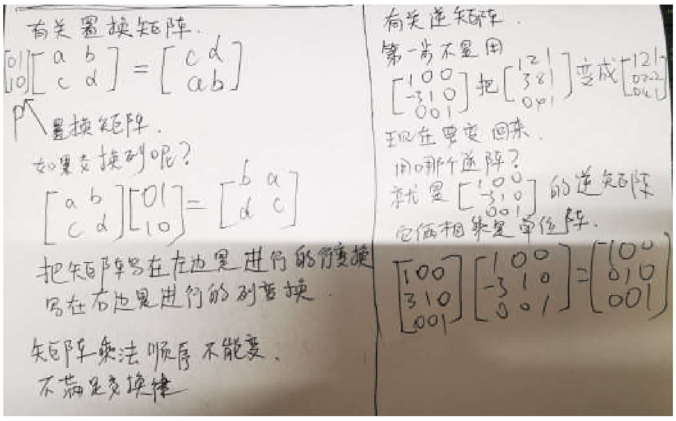
啥矩阵能一次完成任务?

矩阵乘法满足结合律。

然后用矩阵这种形式 变换的形式来说明消元

如果想要行变换的话，把变换矩阵写到左边

如果想要列变换的话，把变换矩阵写到右边



有关置换矩阵。

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

置换矩阵。

如果交换列呢?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

把矩阵写在左边是进行的行变换

写在右边是进行的列变换。

矩阵乘法顺序不能变，

不满足交换律

有关逆矩阵。

第一步不是用

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 把 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

现在要变回来。

用哪个逆阵?

就是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵

它俩相乘是单位阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

说明了置换矩阵的概念

说明了逆矩阵的概念，对矩阵做了变换之后，再把它变换回来

说明矩阵乘法的性质

矩阵乘法不满足交换律，满足结合律