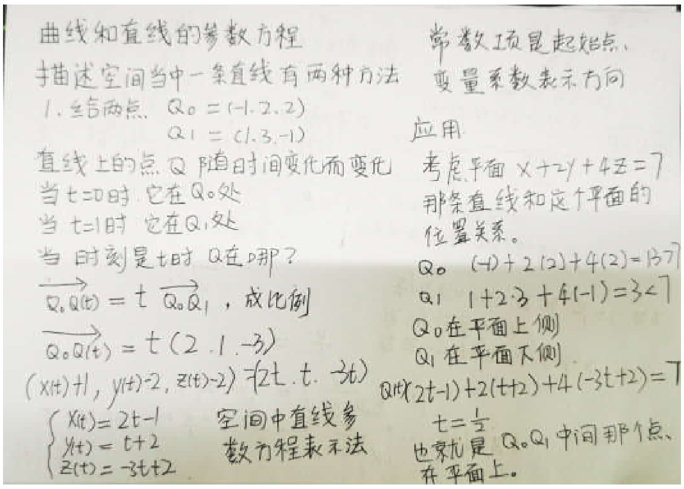
摆线，开普勒第二定律

2022年3月30日 11:36



曲线和直线的参数方程

描述空间当中一条直线有两种方法

1. 给两点 $Q_0=(-1,2,2)$

$Q_1=(1,3,-1)$

直线上的点 Q 随时间变化而变化

当 $t=0$ 时 它在 Q_0 处

当 $t=1$ 时 它在 Q_1 处

当 时刻是 t 时 Q 在哪？

$\overrightarrow{Q_0Q(t)}=t\,\overrightarrow{Q_0Q_1}$，成比例

$\overrightarrow{Q_0Q(t)}=t(2,1,-3)$

$(x(t)+1,\ y(t)-2,\ z(t)-2)=(2t,\ t,\ -3t)$

$\begin{cases} x(t)=2t-1 \\ y(t)=t+2 \\ z(t)=-3t+2 \end{cases}$ 空间中直线参数方程表示法

常数项是起始点、变量系数表示方向

应用

考虑平面 $x+2y+4z=7$ 那条直线和这个平面的位置关系。

Q_0 $(-1)+2(2)+4(2)=11>7$

Q_1 $1+2\cdot3+4(-1)=3<7$

Q_0 在平面上侧

Q_1 在平面下侧

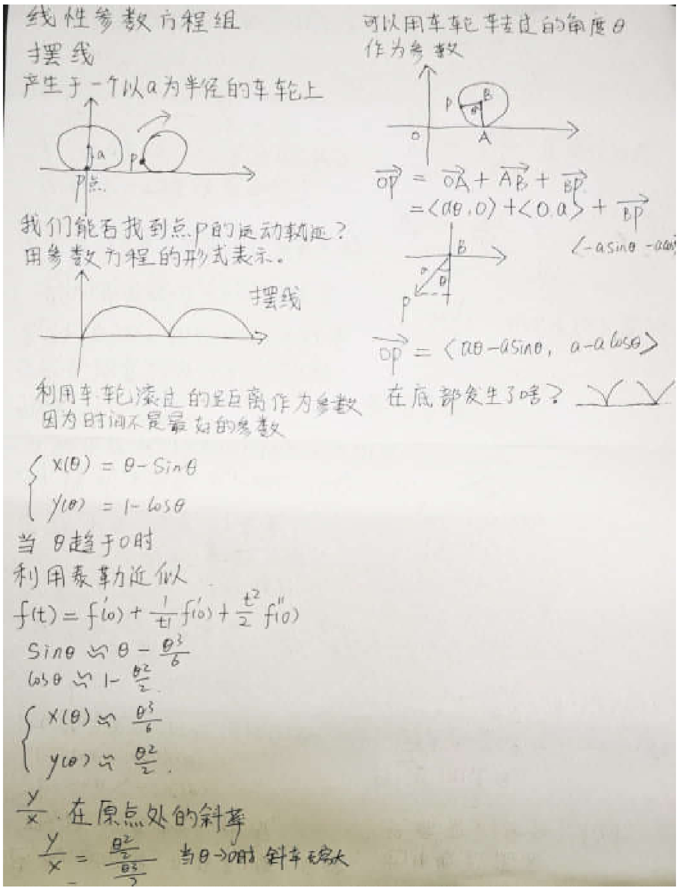
$Q(t)$ $(2t-1)+2(t+2)+4(-3t+2)=7$

$t=\frac{1}{2}$

也就是 Q_0Q_1 中间那个点、在平面上。

介绍了空间中直线怎样用参数方程的形式来表示

应用是可以判断空间中直线和平面的位置关系



线性参数方程组

摆线

产生于一个以 a 为半径的车轮上

我们能否找到点 P 的运动轨迹？用参数方程的形式表示。

利用车轮滚过的距离作为参数

因为时间不是最好的参数

$\begin{cases} x(\theta)=\theta-\sin\theta \\ y(\theta)=1-\cos\theta \end{cases}$

当 θ 趋于 0 时

利用泰勒近似

$f(t)=f(0)+\frac{t}{1}f'(0)+\frac{t^2}{2}f''(0)$

$\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{6}$

$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$

$\begin{cases} x(\theta)\approx\frac{\theta^3}{6} \\ y(\theta)\approx\frac{\theta^2}{2} \end{cases}$

$\frac{y}{x}$ 在原点处的斜率

$\frac{y}{x}=\frac{\frac{\theta^2}{2}}{\frac{\theta^3}{6}}$ 当 $\theta\to0$ 时 斜率无穷大

可以用车轮转过的角度 θ 作为参数

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$

$=\langle a\theta,0\rangle+\langle 0,a\rangle+\overrightarrow{BP}$

$\langle -a\sin\theta,\ -a\cos\theta\rangle$

$\overrightarrow{OP}=\langle a\theta-a\sin\theta,\ a-a\cos\theta\rangle$

在底部发生了啥？

介绍了摆线

用参数方程的形式表示摆线

用向量的形式表示摆线

利用导数分析了和x轴相交时候的斜率

速度，加速度，开普勒第二定律

摆线的参数方程是

$(\theta-\sin\theta)=x(\theta)$

$(1-\cos\theta)=y(\theta)$

假设角度和时间等同的话

$\overrightarrow{OP}=(t-\sin t,\ 1-\cos t)$

$\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}=\left\langle \dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right\rangle$

现在假设车轮以单位时间转，求摆线~~的参数方程~~。

运动速度，它是一个矢量

则摆线速度是 $\langle 1-\cos t,\ \sin t\rangle$

这能告诉我们在任何时间运动的速度

如果要求速率

只需要对速度求模长.

什么是加速度

加速度是速度的一阶导数

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ (和物理里上的)

$\vec{a}=\langle \sin t\ \cos t\rangle$

摆线运动的二阶导

当 $t=0$ 时

$\vec{a}=\langle 0.1\rangle$

$\vec{v}=\langle 0.0\rangle$

弧长.

S代表沿着轨道所走的路程

怎样把弧长和时间联系起来

$\dfrac{ds}{dt}$ 其实就是移动的速率

速率是标量，每单位时间里走的距离

怎样求一个摆线有多长？

从 $t=0$ 到 2π 对速率做积分

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\underline{\sqrt{2-2\cos t}}\,dt$

速度是向量 $\langle 1-\cos t,\ \sin t\rangle$

速率是它的模长。

单位矢量

那么单位矢量为

$\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}\cdot\underbrace{\dfrac{ds}{dt}}_{=|\vec{v}|}$

$\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 是单位向量

$\vec{v}=\vec{T}\cdot\dfrac{ds}{dt}$

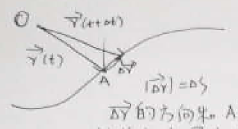
速度 $\begin{cases}\text{方向是 } \vec{T}\\ \text{大小是 } \dfrac{ds}{dt}\end{cases}$

利用向量来分析那个点（它的轨迹构成了摆线）

分析它运动的速度

速率就是速度（向量形式表示）的模长

介绍了加速度 ， 单位矢量（向量形式表示）



$|\Delta\vec{r}|=\Delta s$

$\Delta\vec{r}$ 的方向和 A点处单位向量的方向一致

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\approx$ 速率

$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\approx\vec{T}\cdot\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

当 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$ 时

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{T}\ \dfrac{ds}{dt}$

$\Delta\vec{r}\approx\vec{v}\Delta t$

$S=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}\Delta t|$

$\ \ =\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|\Delta t$

匀速扫过是啥意思

$\dfrac{S}{\Delta t}=\underbrace{\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|}$ 是定值.

并且它们在同一个平面上运动

$\vec{r}\times\vec{v}$ 的方向也是确定的

其实开普勒第二定律是说

$\vec{r}\times\vec{v}$ 是一个常向量

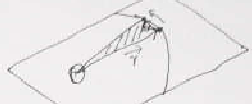
$\dfrac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt}=0$

分析开普勒第二定律

掌握向量的方法去分析运动

① 首先每个行星的运动都保持在同一个平面内

② 太阳和行星的连线在相等的时间内扫过相等的面积 速率相同.



扫过的面积如何表示？

$S=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$

这是 Δt 时间，太阳行星连线扫过的面积

也可以利用乘积定理

对点乘和叉乘求导

只是对叉乘求导时.

左右的位置不变.

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}+\vec{r}\times\dfrac{d\vec{v}}{dt}=0$

$\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{a}=0$

$\Rightarrow\vec{r}\times\vec{a}=0$

当两个向量叉乘是零时

四边形面积是0

也就意味着

$\vec{a}$ 和 $\vec{r}$ 是平行的.

开普勒说，加速度平行于位置矢量

也就是说 万有引力指向太阳.

从微积分作图的方式分析 速度 速率 单位矢量

利用向量的方式介绍了开普勒第二定律

最终得出

太阳和行星相连的那个向量

和行星运动加速度（向量）

这俩向量是重合的

从而得出 太阳和行星之间的万有引力方向在它俩之间的连线上