二阶常系数线性方程

2022年4月20日　　21:40

二阶常系数线性微分方程

$y''+Ay'+By=0$

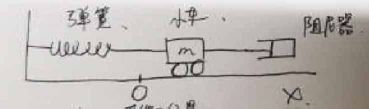
这个方程普遍形式的解

是 $y=c_1y_1+c_2y_2$

c_1 c_2 是俩常数，和阶数是一样的。

令 c_1 是 1 c_2 是 0 那么 y_1 是解

同理 y_2 也是解。



m上的力。 平衡位置

$mx''=-kx-cx'$

$mx''+cx'+kx=0$

$x''+\frac{c}{m}x'+\frac{k}{m}x=0$

这就是支配质点运动的方程。

注意：y_1 和 y_2 必须是线性无关的，意味着 y_2 不能是 y_1 乘以一个常数。

设 $y=e^{rt}$

$r^2e^{rt}+Are^{rt}+Be^{rt}=0$

$\boxed{r^2+Ar+B=0}$

这个方程叫做特征方程。

$r^2+Ar+B=0$

第一种情况是，根是实数而且不相等。

解出 r 以后 立刻就拥有俩不一样的解了。$y=e^{rt}$

所以方程的通解是

$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$

第二种情况，存在复数解。

$y=e^{(a+bi)t}$

如果复数 $(a+bi)$ 是原微分方程的解 那么实数 a 和实部 b 也是微分方程的解。

但 A B 都必须是实数不是复数。

$y=e^{at+ibt}$

$=e^{at}[\cos bt+i\sin bt]$

$y=e^{at}\cos bt$
$y=e^{at}\sin bt$ 是方程的解。

通解

$y=e^{at}(c_1\cos bt+c_2\sin bt)$

比如

$r^2+6r+5=0$

得出的解就是复数 $-2\pm i$

第三种

$r^2+Ar+B=0$ 有俩相同的根。

$y=e^{-at}$ 有一个解，另一个解该怎样找？

$y''+py'+qy=0$

已知 y_1 是它的一个解。

$y=y_1u$ 是它的一个线性无关解

a^2 $y=e^{-at}u$

a $y'=-ae^{-at}u+e^{-at}u'$

1 $y''=a^2e^{-at}u+2(-ae^{-at})u'\cancel{+(-a)e^{-at}u'}+e^{-at}u''$

然后相加 $0=0+0$

$e^{-at}u''=0$

$u''=0$

$u=c_1t+c_2$

随便取个 $u(t)$

另一个解 $y_2=e^{-at}\cdot t$

介绍了二阶常系数线性微分方程以及它的解法
根据特征方程三种解的情况分情况讨论
（一元二次方程和x轴没有交点的时候，是有复数解的）

这节课最大的亮点在于
结合着一个物理上的案例来说
微分方程的参数，图像和实际的物理现象对应着

如果特征方程有俩复根的情况

$r^2+br+k=0$

$r=a\pm bi$

我们可以利用 $r=a+bi$
得到俩实解。

但 $a-bi$ 为啥不用

$a-bi$ 不能给出有用的解。

还有一个问题需要解决.
把通解写成

$$y=C_1\cdot e^{(a+bi)t}+C_2\cdot e^{(a-bi)t}$$

但我们更关心实根。

方法一. 乘开.

方法二. 我们把最终的 i 变成 $-i$, 看是否相等.
如果不变. 必然是实的。

$$C_1 e^{(a+bi)t}+C_2 e^{(a-bi)t}$$

把 i 变成 $-i$

$$\bar{C_1} e^{(a-bi)t}+\bar{C_2} e^{(a+bi)t}$$

如果 $\bar{C_2}=C_1$

$\bar{C_1}=C_2$ 就行。

通解可以写成.

$$(c+id)e^{(a+bi)t}+(c-id)e^{(a-bi)t}$$

怎么变成 $\sin x$, $\cos x$ 那样的表示形式。

$$e^{at}\left[c(e^{ibt}+e^{-ibt})+id(e^{ibt}-e^{-ibt})\right]$$

然后用

$$\cos a=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$$

$$\sin a=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$$ 代入

$$=e^{at}\left[c\,2\cos bt+id\,2i\sin bt\right]$$

$$=e^{at}\left[2c\cos bt-2d\sin bt\right]$$