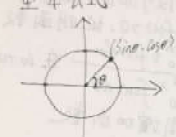


# 三角函数积分

2022年2月27日 20:27

三角函数的积分

基本公式



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$   
 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$   
 $= 2\cos^2\theta - 1$   
 $= 1 - 2\sin^2\theta$   
 $\cos\theta = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$   
 $\sin\theta = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$   
 $d(\sin x) = \cos x dx$   
 $d(\cos x) = -\sin x dx$   
 $\int \cos x dx = \sin x + C$

求  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  积分

当  $m, n$  至少有一个是奇数

比如  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

令  $u = \sin x$  替换

$\int \sin^2 x \cos x dx$

令  $\sin x = 1 - \cos x$

变成  $\int (\cos^2 x - \cos x) \sin x dx$

$\int \sin^2 x dx = ?$

令  $\sin x = 1 - \cos x$

如果只有偶指数

$\int \cos^2 x dx$

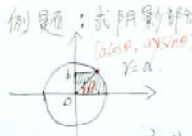
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

令  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  代换

首先是三角函数的基本公式  
然后说了求一类积分的求法

例题：求阴影部分面积



圆的方程  $x^2 + y^2 = a^2$

对  $y$  积分

$\int_0^b \sqrt{a^2 - y^2} dy$

但是如何求它的积分呢?

$\int \sqrt{a^2 - y^2} dy$

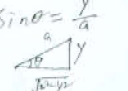
我们注意到  $(a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 = a^2$

$y = a \sin \theta$

则可转化成  $\int a \cos \theta a \cos \theta d\theta$

$= \frac{a^2}{2} \theta + \frac{a^2}{2} \sin \theta \cos \theta + C$

$\sin \theta = \frac{y}{a}$   $\theta = \arcsin \frac{y}{a}$



$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}$

则  $\int_0^b \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} + \frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + C$

$= \frac{a^2 \arcsin(\frac{b}{a})}{2} + \frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{2} - 0$

$\arcsin \frac{b}{a}$  不是  $\theta$  的初值嘛 这不就是一半圆的  $\frac{1}{2} \theta$  嘛, 扇形面积。三角形的面积

这个例子非常有趣，也是书本上  
第二类换元法的第一个例题  
但是MIT的数学课，说明了它的几何意义

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\sec x = \sec x \tan x$

$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

证明  $\int \sec x dx$

$\frac{d}{dx} (\sec x + \tan x) = \sec x (\sec x + \tan x)$

令  $u = \sec x + \tan x$

$u' = u \sec x$

$\sec x = \frac{u'}{u} = \frac{d}{dx} \ln u$

$= \frac{d}{dx} \ln (\sec x + \tan x)$

$\int \sec x = \ln (\sec x + \tan x) + C$

例如求  $\int \sec^3 x dx$

利用  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$= \int \sec x (1 + \tan^2 x) dx$

$= \int 1 + \tan^2 x d(\tan x)$

$= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$

这里介绍了  $\sec$   $\csc$   $\cot$   
以及相关的一些公式 导数 和积分  
证明  $\sec x dx$  的积分方法很巧妙 感觉高数书本上有些复杂

例题  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

①  $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$   $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsinh x + C$   
 $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$   
 $\theta = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$   
 $x = \tan \theta$   
 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \cdot \sec^2 \theta d\theta$   
 $\int \frac{1}{\sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$   
 $\sec \theta = \sqrt{1+\tan^2 \theta} = \sqrt{1+x^2}$   
 $\tan \theta = x$   
 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\tan \theta \sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} d\theta = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$   
 $\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \int \frac{\csc \theta}{1} d\theta = -\ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$   
 $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$   
 $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{x}$   
 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{x} \right| + C = -\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right| + C$

② 因为  $x = \tan \theta$   
 $\theta = \arctan x$   
 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\tan \theta \sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} d\theta = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$   
 $\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \int \frac{\csc \theta}{1} d\theta = -\ln |\csc \theta + \cot \theta| + C$   
 $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$   
 $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{x}$   
 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{x} \right| + C = -\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right| + C$

总结

$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin \theta \\ y = a \cos \theta \end{cases}$	$a \sin \theta$ $a \cos \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \tan \theta \\ y = a \sec \theta \end{cases}$	$a \tan \theta$ $a \sec \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = a \tanh \theta \end{cases}$	$a \sec \theta$ $a \tanh \theta$

基本的三角替换,去根号的时候  
很有用。

这里基本上就是第二类换元积分法  
总结了一些常用的积分公式