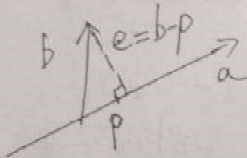


# 子空间投影 最小二乘

2022年6月12日 15:21

投影



$p = xa$

$$a^T(b - xa) = 0$$
$$xa^Ta = a^Tb$$
$$\text{则 } x = \frac{a^Tb}{a^Ta}$$

这个就是投影的倍数  
怎么这个投影和之前学的投影不太一样呢?

则  $P = \frac{a a^T}{a^Ta}$

呃-----  
投影  $P$  是一个投影矩阵作用于随便某个向量。

是一个矩阵哈。

$$P = \frac{a a^T}{a^Ta}$$

它的列空间是啥?

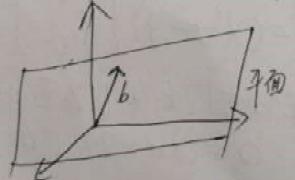
- ① 是  $a$  那条直线。秩是 1
- ② 它是对称的吗?  
是
- ③ 如果做两次投影呢?  
和第一次是一样的。

为啥要讲投影呢?

因为  $Ax = b$  不一定有解啊!  
只能调整  $b$ , 把  $b$  调整成最接近的解。

解决  $Ax = p$ .  $p$  是  $b$  在列空间上的投影。

比如在三维空间中



如果要让  $b$  投影在平面上咋办?

$p = x_1 a_1 + x_2 a_2$

$$p = AX$$

这个平面可以用  $A = [a_1 \ a_2]$  来表示。

现在问题是找到一组  $x$  使  $b - Ax$  和平面垂直。

所以就得到

$$a_1^T (b - Ax) = 0$$

$$a_2^T (b - Ax) = 0$$

把它表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} (b - Ax) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T (b - Ax) = 0$$

$e$  在哪个子空间里?

$e$  位于  $A$  转置的零空间

也就是说  $e$  垂直于  $A$  的列空间。

$$A^T A x = A^T b$$

$$x = (A^T A)^{-1} (A^T b)$$

投影是啥?

$$p = Ax$$

$$= A (A^T A)^{-1} A^T b$$

这些都是投影矩阵

$x$  是啥?

投影是啥?

投影矩阵又是啥?

投影矩阵性质

$$\textcircled{1} P^T = P$$

$$\textcircled{2} P^2 = P$$