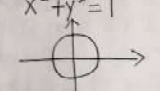


隐函数反函数求导

隐函数求导

$x^2 + y^2 = 1$



暂时只考虑上半圆

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$y' = -x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

求导 $y^4 + xy^2 - 2 = 0$

显式求导 $y^2 = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(-2)}}{2}$

$$y = \pm \sqrt{\frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots$$

隐式

$$\frac{d}{dx}(y^4 + xy^2 - 2 = 0)$$

$$\frac{dy^4}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} y^2 + x \frac{dy^2}{dx} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y^3 y' + y^2 + x \cdot 2y y' = 0$$

$$y'(4y^3 + 2xy) = -y^2$$

$$y' = -\frac{y^2}{4y^3 + 2xy}$$

隐函数求导有一个很重要的应用就是求反函数。

首先介绍了一下隐函数求导

然后介绍了一下反函数的概念

然后用隐函数求导求了反正切函数的导数，反正弦函数的导数

求反函数的导数

反函数 \star

$y = \sqrt{x} (x > 0), y^2 = x$

$f(x) = \sqrt{x}, g(y) = x = y^2$

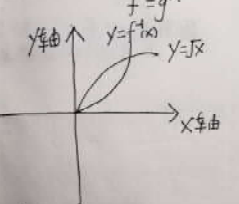
对于原函数 $y = f(x)$

$g(y) = x$

$g(f(x)) = x$

$g = f^{-1}$

$f = g^{-1}$



注意交换 x, y .

用隐函数微分法可以求导任意反函数

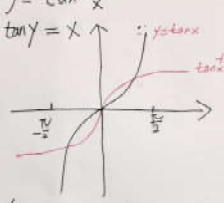
只要知道原函数的导数

$y = \tan^{-1} x$

$\tan y = x$

$\therefore y = \tan^{-1} x$

求反正切函数导数



$\frac{d}{dx}(\tan y = x)$

$\frac{d(\tan y)}{dy} y' = 1$

要求：要化简

$y' = \cos^2 y \Rightarrow \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \cos^2(\tan^{-1} x)$

$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1} x \Rightarrow \tan y = x \text{ 则 } \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{d \tan^{-1} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

求反正弦函数的导数

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y = x)$$

$$\cos y y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

要特别注意取值范围
确保函数有意义。