特征值和特征向量

2022年6月13日　　10:21

特征值，特征向量

线性代数中，矩阵A就像一个函数
输入X得到AX.
在这些向量中，感兴趣的是那些变换前后方向一致的向量。
因为对于大多数向量而言，作变换A.
AX和X是不同方向的。
只有很特殊的向量能使AX和X平行。
这些就是特征向量

$$\boxed{AX=\lambda X}$$

特征向量

特征值

如果λ为0. 特征向量就是零空间。

那么怎么求解特征值和特征向量?

首先先看一个例子，在三维空间中某向量到某平面上的投影。只有当该向量在平面内时是特征向量，要么和该平面是垂直的。
此时特征值分别是1和0.

再看一个例子

矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 什么向量作A变化

是和它自身平行的呢?

比如 $X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $AX=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\lambda=1$

比如 $X=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $AX=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\lambda=-1$

...

有一个很好的性质

λ的的和 是矩阵A对角线元素之和

也就是说. 上个例子中 $X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 特征值是1

我就知道 一定有另一个特征值为-1。

咋求 $AX=\lambda X$.

$(A-\lambda I)X=0$.

假如X适便有个X存在 $A-\lambda I$ 一定不满

秩, 它的行列式一定是0。

$\det(A-\lambda I)=0$, 这是特征方程

例子 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)^2+1$$

$$=\lambda^2-6\lambda+8$$ 行列式值

Δ $6=3+3$
对角线元素之和.

$\lambda_1=6$ $\lambda_2=2$.

当$\lambda=6$时. 特征向量是?

$A-4I=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$A-2I=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $x_2=c\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

上一个例子 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\lambda_1=1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $\lambda_2=1\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 比 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 多了3I. 那么对于特征值
特征向量有啥影响

例子 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

特征值、特征向量

$\lambda_1=3$ $\quad\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}=0$

$\lambda_2=3.$

$x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

退化矩阵.

没有第二个无关的特征向量.