切平面近似 极值 最小二乘法

2022年4月2日 10:36

如果同时改变 x, y 值

$x \longrightarrow x+\Delta x$

$y \longrightarrow y+\Delta y$

那么 $z=f(x\ y)$ z的改变量

$\Delta z \backsim f_x \Delta x + f_y \Delta y$

如何证明？

可以从用切平面逼近的想法来入手。

$z=f(x.y)$

f_x. f_y 是曲面上两条切线的斜率

$$L_1=\begin{cases} z=z_0+a(x-x_0) \\ y=y_0 \end{cases}$$

$$L_2=\begin{cases} z=z_0+b(y-y_0) \\ x=x_0 \end{cases}$$

它们决定一个切平面。

① $z=z_0+a(x-x_0)+b(y-y_0)$

当变量x是常数是 刚好是 L_1

y ... 刚好是 L_2

② 也可以用参数方程表示这两条直线，用两直线的方向向量作为外积，从而得到切平面的法向量然后得方程

那个近似式表示，函数图象和切平面靠得很近。

切平面

极大极小值 极值 鞍点

首先考虑，在局部极值点处的偏导数

$f_x=0$ 和 $f_y=0$.

函数图象的切平面是水平的

这些条件是必要的但不是充分的

例 $f(x.y)=x^2-2xy+3y^2+2x-2y$

找极大或极小值点

$f_x = 2x-2y+2 = 0$

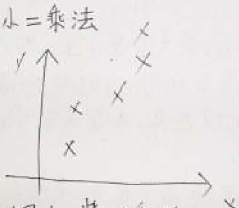
$f_y = 0-2x+6y-2 = 0$

(-1.0)

现在问题是如何判断 (-1.0) 就是一个极值点？

鞍点的定义

最小二乘法



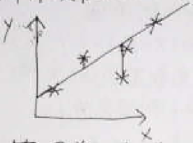
测量出一些 x 和 y

它们可能在同一直线上

$(x_1 y_1)(x_2 y_2) \cdots (x_n y_n)$

问题是什么样的直线对这组数据是“最合适”的

怎样找到最小值使得所有误差的总和最小。



算误差的平方和

最好的意思是使总误差的平方最小。

$y_i-(ax_i+b)$ 误差

$$D=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2$$

使它最小。 最小二乘法

$$\frac{\partial D}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}(y_i-(ax_i+b))(-x_i)=0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}(y_i-(ax_i+b))(-1)=0$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2a+x_ib-x_iy_i)=0 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_ia+b-y_i)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum x_i^2+b\sum x_i-\sum x_iy_i=0 \\ a\sum x_i+nb-\sum y_i=0 \end{cases}$$

这些可以手算

可以解 a. b.

指数拟合 $y=ce^{ax}$

二次拟合 $y=ax^2+bx+c$

我们如何区分 局部极大值点 / 局部极小值点 / 鞍点

整体的最大值最小值，不一定在临界点取得，有时它还可能在定义域边界，或者在无穷远处取得。

如何判断临界点的类型？

要用二阶导数判定。

例子 对于 $W(x.y)=ax^2+bxy+cy^2$

先把函数化成平方的形式

假定 $a\neq0$

像这样的，如何判断极值？

$$W=a[x^2+\frac{b}{a}xy]+cy^2$$

$$=a(x+\frac{b}{2a}y)^2+(c-\frac{b^2}{4a})y^2$$ 注意

$$=\frac{1}{4a}[4a^2(x+\frac{b}{2a}y)^2+(4ac-b^2)y^2]$$

把原式写成了两平方和的形式

如果是两平方和，在原点取最小值

如果是平方差 会有鞍点。

$$\begin{cases} 4ac-b^2<0 \text{ 时 有鞍点.} \\ 4ac-b^2=0 \text{ 退化临界点.} \\ 4ac-b^2>0,\ a>0 \text{ 有最小值} \\ \qquad\qquad\quad a<0 \text{ 有最大值} \end{cases}$$

边界点

二次函数中，临界点的类型

$$W = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$= \underbrace{y^2}_{\geq 0}\left[a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c\right]$$

如果 $b^2-4ac>0$，说明函数值有正有负，则有一个鞍点。

如果 $b^2-4ac<0$ 且 $a>0$ 则函数恒正，有最小值

如果 $b^2-4ac<0$ 且 $a<0$ 则函数恒负，有最大值。

那么对于一般函数呢？

求二阶导数

对于一般情况下利用二阶导数来判断极值

首先求关于 x 的偏导数

然后再求一次关于 x 的偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

假设 (x_0, y_0) 是 f 的临界点

$A = f_{xx}(x_0, y_0)$　$B = f_{xy}(x_0, y_0)$

$C = f_{yy}(x_0, y_0)$

如果 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，则是极小值点

$A<0$ 则是极大值点

$AC-B^2<0$ 则是鞍点

$AC-B^2=0$ 无法判断

二阶泰勒公式

如果我们要了解当 x 和 y 的值稍有变化时，f 会怎样变。

$$\Delta f \approx f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(y-y_0)^2$$

在退化情形中，取决于更高阶导数

例题

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy} \quad (x, y>0)$$

求最大值 最小值

先找临界点，算一阶导数

$$f_x = 1 - 1/(x^2)\cdot y = 0$$

$$f_y = 1 - 1/y^2 \cdot x = 0$$

$$\begin{cases} x^2 y = 1 \\ y^2 x = 1 \end{cases}$$

$x=y=1$ 唯一解

要算二阶导

$f_{xx} = \frac{2}{x^3 y}$　$A=2$

$f_{xy} = \frac{1}{x^2 y^2}$　$B=1$

$f_{yy} = \frac{2}{x \cdot y^3}$　$C=2$

$AC-B^2=3>0$　$A>0$，极~~大~~小值

当 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$

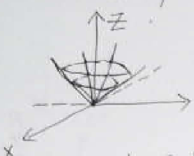
或 $xy\to 0$

有最大值

一些题目

(1) 画图

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

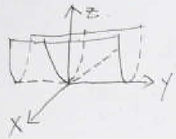


当 $x=0$ 时 $z=|y|$

$y=0$ 时 $z=|x|$

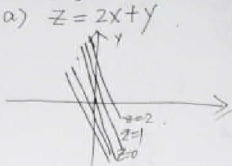
当 $z=1$ 时 $x^2+y^2=1$

b) $z=x^2$



(2) 画等位线

a) $z=2x+y$



$z=0$ 时 $y=-2x$

$z=1$ 时 $y=-2x+1$

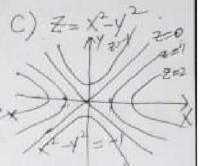
$z=2$ 时 $y=-2x+2$

b) $z=x^2+y^2$

当 $z=0$ 时 $x^2+y^2=0$

$z=1$ 时 $x^2+y^2=1$

C) $z=x^2-y^2$



$x^2-y^2=0$ 时

$x^2-y^2=1$

$x^2-y^2=2$

马鞍的形状

(3) 求偏导数

$f(x,y)=xy^2+x^2y$

① $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$

② $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2+2xy$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2yx+x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=4+4=8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y+2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2y+2x$

(4) 切平面近似

求一个矩形 $x=2.1$ $y=2.8$ 的近似值

$S=x\cdot y$

x 从 2 变到 2.1 $\Delta x=0.1$

y 从 3 变到 2.8 $\Delta y=-0.2$

$\Delta S\approx S_x\Delta x+f_y\Delta y$

$\approx 3\times 0.1+2\cdot(-0.2)$

$\approx 0.3-0.4$

≈ -0.1

原本的 S 是 $2\times 3=6$

变化之后 S 是 $6-0.1=5.9$

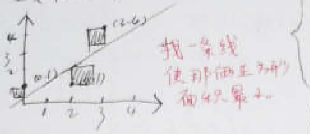
实际的 S 是 $2.1\times 2.8=5.88$ 很近似!!!

当 x y 的增量相同哪一个影响最大?

当 y 不变 $\Delta S=S_x\Delta x=3\Delta x$ x 变化更能影响 S 的变化

当 x 不变 $\Delta S=S_y\Delta y=2\Delta y$

(5) 利用最小二乘法进行线性拟合



找一条线使那個正方形面积最小

假设这条直线是 $ax+b$

我们要使

$\sum_{i=1}^{3}[y_i-(ax_i+b)]^2$ 最小

求 a. b 的值

$f(a,b)=\sum_{i=1}^{3}[y_i-(ax_i+b)]^2$

我们知道当三维曲面中切平面是一个平面时,取最小值

至于为什么,参考最大值 最小值

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial a}=\sum_{i=1}^{3}\cancel{2}[y_i-(ax_i+b)](-x_i)=0\\ \frac{\partial f}{\partial b}=\sum_{i=1}^{3}\cancel{2}[y_i-(ax_i+b)](-1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}[-x_iy_i+ax_i^2+bx_i]=0\\ \sum_{i=1}^{3}[-y_i+ax_i+b]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i=0\\ a\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}y_i+\sum_{i=1}^{3}b=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\cdot 13+b\cdot 5-14=0\\ 5a+3b-6=0\end{cases}$$

$a=?$ $\frac{4}{7}$ $b=?$ $\frac{6}{7}$

上个题还可以进行二次拟合

$f(a,b,c)=\sum_{i=1}^{3}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2$

然后分别对 a. b. c 求偏导.

让它们统统是零

可以利用矩阵来解方程.

求 a. b. c 的值

从而得出二次拟合的曲线。

(6) 判定二阶导数

$w=x^3-3xy+y^3$

先求函数极值,然后对它们进行分类,看它们是极小值点,极大值点,还是鞍点。

$$\begin{cases}A\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(3x^2-3y)'_x\\ \quad=6x\\ C\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(3y^2-3x)'_y\\ \quad=6y\\ B\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=3x^2-3y=0 & x^2-y=0\\ \frac{\partial w}{\partial y}=3y^2-3x=0 & y^2-x=0\end{cases}$$

$x=0.\ y=0$ 时 $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}=0$

$x=1$ $y=1$ $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}=0$

当 (0.0) 时, $AC-B^2<0$ 是鞍点.

当 (1.1) 时 $AC-B^2=36-9>0$ 且 $a>0$ 是极小值点.

(7) 极大值 极小值

有一个盒子. 前后是单层纸板

左右是双层纸板,底部是三层纸板

$$\begin{cases}S_x=-12x^{-2}+3y=0\\ S_y=-6y^{-2}+3x=0\end{cases}$$

这道例题是判断最大值最小值的

利用二次导数只能判断局部极大值极小值和鞍点什么的

这道例题是判断最大值最小值的
利用二次导数只能判断局部极大值极小值和鞍点什么的
如果要判断整体的最大值最小值还需要额外分析
分析一下边界的取值