求导法则

2021年11月1日　　11:26

1.一些导数运算法则
2.推导sinx导数的两种方法
3.证明两个等价无穷小，sinx---x,1-cosx---x

求导法则

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(cu)' = cu'$$

证 sinx 的导数 以及两个等价无穷小

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

证明过程 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = 0$　$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$

所以

$\Rightarrow \cos x$

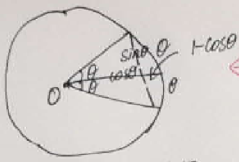
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

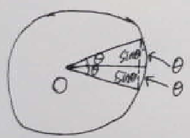


证 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

当 θ特别小的时候

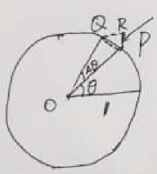
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

1-cosθ 和 θ 相比更小



证 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

弦的长度是2sinθ



$\Delta y = PR$

$\Delta\theta \approx PQ$

$y = \sin\theta$

θ. PQ ≈ PQ

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta} = \cos\theta.$$

$$\Rightarrow \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

几何证 sinx 的导数

弦的长度是$2\sin\theta$

弧的长度是2θ

那么 $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{2\sin\theta}{2\theta} = 1$

当θ特别小，弦和弧重合。

$y = \sin\theta$

①. PQ ≈ PQ

② PQ几乎和OP垂直

我们可证得$\angle QPR = \theta$.

$\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta\theta} = \cos\theta$

几何证 $\sin x$ 的导数
还有一种方法，列导数
定义证导数