

# 定积分的应用

2022年2月9日 11:54

菲涅耳积分.

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$

定积分的应用.

例一. 关于曲线围成的面积.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

求出  $X=y^2$  和  $y=x-2$  围成的面积.

$y=x-2$   
 $x=y^2$   
 $X=(x-2)^2$   
 $X=x^2-4x+4$   
 $X^2-5x+4=0$   
 $X_1=1$   $X_2=4$   
 $y_1=-1$   $y_2=2$

求面积

求体积 壳层法 圆盘法

注意一点 要清楚自己的模型, 尤其是单位

用切片求体积

旋转立方体.

把这个曲线绕x轴旋转.

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

求体积的两种方法

壳层法

图中dx是, 让它绕y轴旋转

它的体积是多少?

$$S = \pi x^2 \cdot (a-x) \cdot dx$$

把壳展开

整个形状的体积是.

$$V = \int_0^a \pi x^2 (a-x) dx = \frac{\pi}{2} a^2$$

$dv = 2\pi x \cdot (a-x) \cdot dx$   $V = \int_0^a dv$

求球体体积

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \int_0^a \pi (2ax - x^2) dx = \frac{2}{3} \pi a^3$$

如果a是100cm, 那么体积为?

$$V = \frac{\pi}{2} (100)^2$$

$$= \frac{\pi}{2} 10000 \text{ cm}^2$$

注意单位.

如果a是1m, 那么体积为?

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} \pi \text{ m}^2$$

从0到100cm上的积分.

从0到1m上的积分.

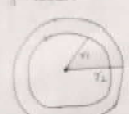
## 定积分在概率方面的应用

用不定积分分析一个概率问题。

投掷圆靶

假设击中的概率和半径的平方成正比

求击中圆环  $r_1 \sim r_2$  的概率



$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \cdot C e^{-r^2} \cdot dr$$

$$= C\pi [-e^{-r^2}]_{r_1}^{r_2}$$

$$= C\pi [e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}]$$

当  $r_1=0$   $r_2=\infty$  时

$$\int_0^{\infty} 2\pi r \cdot C e^{-r^2} \cdot dr = C\pi$$

所以击中圆环的概率是

$$\frac{C\pi [e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}]}{C\pi}$$

$$= e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}$$

比如当一个人击中  $[0, a]$  区域的概率是  $\frac{1}{2}$ 。

$$e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-0^2} - e^{-a^2} = \frac{1}{2}$$


$$e^{-a^2} = \frac{1}{2}$$

$$p(2a, 3a) = e^{-(2a)^2} - e^{-(3a)^2}$$

$$= (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^9$$

$$= \frac{1}{16}$$

如果在这个靶上射击都落在圆环的  $\frac{1}{16}$  被击到的概率率为  $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$



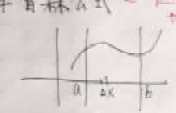
数值积分

① 黎曼和

② 梯形法

③ 辛普森公式 (这种加权平均最好)

①



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

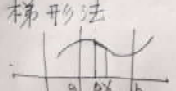
$y_0 = f(x_0)$   $y_1 = f(x_1)$   $\dots$   $y_n = f(x_n)$

积分近似值是

$(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \Delta x$  左端点求和

$(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \Delta x$  右端点求和

② 梯形法




梯形公式

$$\Delta x \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

它和黎曼和类似。

③ 辛普森公式



抛物线下的面积是底  $\times$  一种平均高度。

$$2\Delta x \times \left( \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \right)$$

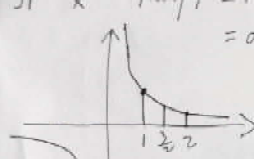
完整的公式为

$$\frac{2\Delta x}{6} \times \left( (y_0 + y_2 + y_4) + (y_1 + y_3 + y_5) + \dots \right)$$

$$= \frac{2\Delta x}{6} \times (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n)$$

数值积分，用几种方法模拟出来定积分的值其中辛普森公式的拟合程度最高

数值积分例子

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = 0.5$$


如果用梯形公式来计算的话

$$\Delta x \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 0.96$$

辛普森公式

$$\frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

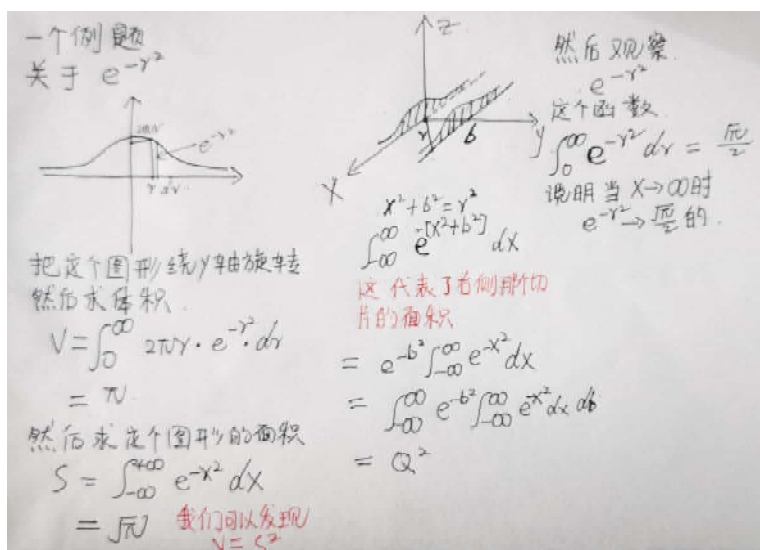
$$= \frac{1}{6} \left( 1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 0.69444$$

还有需要注意的一点，辛普森公式得到值一真实值约为  $\left( \frac{\Delta x}{6} \right)^2$ 。

如果  $\Delta x$  取  $\frac{1}{10}$  那么误差约为  $\frac{1}{10000}$ 。

它适用于抛物线。

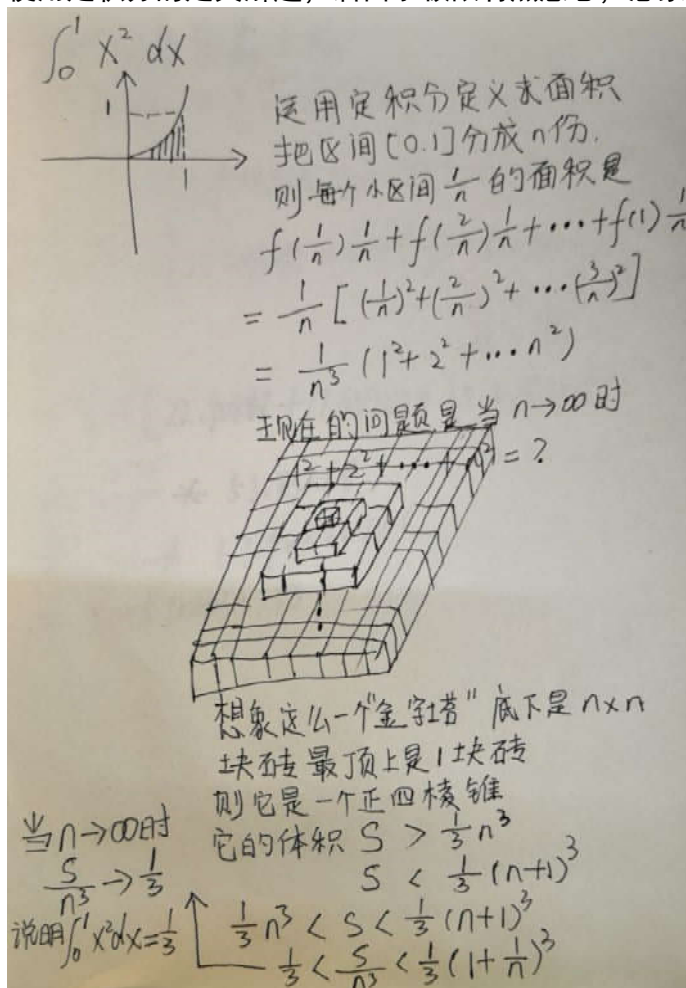


这里是涉及到二重积分的一个例子

定积分做的练习题

第一题是书本上的第一个例题

使用定积分的定义解题，后面求极限有点意思，想象一个金字塔出来



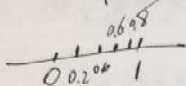
第二个题就是估算定积分的值，但是辛普森公式，找了几个数代入

误差还是比较大的，不知道咋回事，难道是划分区间的时候，应该划分成有三的倍数个点？

算定积分  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  的近似值.

取  $n=10$ , 计算时取5位小数.

$n=10$  计算太多, 为简便起见取  $n=5$



$i$	$x_i$	$y_i$
0	0	4.00000
1	0.2	3.86415
2	0.4	3.64828
3	0.6	2.94118
4	0.8	2.43902
5	1.0	2.00000

如果是梯形法

$$\begin{aligned}
 & 0.2 \left( \frac{4.000 + 3.866}{2} + \frac{3.866 + 3.608}{2} + \frac{3.608 + 2.901}{2} + \frac{2.901 + 2.63}{2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2.63 + 2}{2} \right) \\
 &= 0.2 (3.932075 + 3.656215 + 3.19673 + 2.6901 \\
 & \quad + 2.27951) \\
 &= 3.138526
 \end{aligned}$$

如果是辛普森公式

$$\begin{aligned}
 & 2\Delta x * \left( \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \right) \\
 &= \frac{0.2}{3} * [y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6] \\
 &= \frac{0.2}{3} * [4 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6] \\
 & \quad [y_5 \text{ 让 } x=0.9 \text{ 代入}] \\
 &= \frac{0.2}{3} * [22.90488 + 17.65202 + 13.27878] \\
 &= \frac{0.2}{3} * 53.83568 \\
 &= 0.2 * 17.94522666 \\
 &= 3.5890453333
 \end{aligned}$$