梯度 方向导数 切平面

2022年4月5日 21:21

梯度，方向导数，切平面

$\nabla W = \langle W_x, W_y, W_z \rangle$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$

第一个是梯度向量，目的就是更好的理解这一定义。

它的含义是什么？

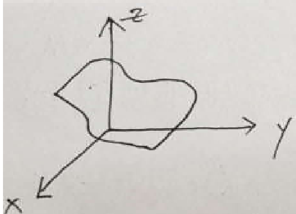
它衡量了什么？

我们应该如何利用它？

1. 梯度向量是垂直于原函数的等值面的。

令 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是一条曲线，在等值面 $W=C$ 上

三变量函数的等值面



该平面上有一个点、，在该平面上有个参数曲线.

问题是在任意给定时刻会发生啥？

这个点的速度 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 和平面 $W=C$ 相切。

令 $W = a_1x + a_2y + a_3z$

$\nabla W = \langle a_1\ a_2\ a_3 \rangle$

随便让 $a_1x + a_2y + a_3z = C$ 常数

我们发现它是一个平面

而 $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 正好是该平面的法向量。

如果用线性近似来取代函数本身，那就意味着用切平面取代等值平。

无论在哪？梯度向量总是垂直于等值线。

并且它总是指向更大的函数值的方向

例 $W = x^2 + y^2$

$\nabla W = \langle 2x, 2y \rangle$

$\frac{dW}{dt} = \nabla W \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \nabla W \cdot \vec{v} = 0$

它们俩是垂直的.

也就是说，那个结论成立

可以用来求很多东西的切面

比如要找与曲面 $x^2+y^2-z^2=4$ 切于点 (2.1.1) 的切平面。

算这个函数的梯度

$\nabla W = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$

$= \langle 4, 2, -2 \rangle$

$4x+2y-2z=$?

点 (2.1.1) 代入即可。

另一种方法是从微分开始.

$dw = 2x\,dx + 2y\,dy - 2z\,dz$

(2.1.1) 处

$dw = 4\,dx + 2\,dy - 2\,dz$.

$\Delta W \approx 4\Delta x + 2\Delta y - 2\Delta z$

$4(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$

梯度向量的应用，方向导数.

$W = w(x, y)$.

$\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial w}{\partial y}$ 恒量了在 x.y 方向上的导数

那么其他方向呢?

如果给一个单位向量

问，如果我沿着这个方向移动

我的函数值会变化的多快呢?

$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\vec{u}} = \nabla W \cdot \vec{u}$

$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\vec{u}} = \nabla W \cdot \vec{u} = |\nabla W| \underbrace{|\vec{u}|}_{1} \cos\theta$

当 θ 是 0 是.

这是理解梯度向量方向的新方法，它的方向是，在给定点处指向函数增加的最快的方向。

它的大小是啥? 是那个方向的方向导数。

一道练习题

(2) 运用梯度算 $z = x^3 + 3xy^2$ 在 (1.2.13) 处的切平面。

令 $f = z - x^3 - 3xy^2$

则 $\nabla f = (-3x^2 - 3y^2, -6xy, 1)$

$\nabla f = (-15, -12, 1)$

$-15x - 12y + z = C$

(1.2.13) 代入

$C = -15 - 24 + 13$

$= -26$

$-15x - 12y + z = -26$

(3) 运用梯度算曲线 $x^3 + 2xy + y^2 = 9$ 在点 (1.2) 处的切线。

令 $g = 9 - x^3 - 2xy - y^2$

则 $\nabla g = (-3x^2 - 2y, -2y - 2x)$

$\nabla g = (-7, -6)$

$-7x - 6y = C$

(1.2) 代入

$C = -7 - 12 = -19$

$-7x - 6y = -19$

(4) 算梯度以及方向导数.

a) $f(x,y) = x^2y + xy^2$

点 $P=(-1,2)$ 方向 $\vec{u}=\langle 3,4\rangle$

$\nabla f = \langle 2xy + y^2, x^2+2xy\rangle$

$P=(-1,2)$ 代入.

得梯度向量是 $\nabla f = \langle -4+4, 1-4\rangle$

$= \langle 0, -3\rangle$

~~求在点 $P(-1,2)$ 方向是 $\vec{u}=\langle 3,4\rangle$ 的方向导数是 $\nabla f\cdot\vec{u} = 0-12 = -12$.~~

算梯度时要找出一个沿 $\vec{u}$ 方向的一个单位向量。 $\vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$

$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\vec{u}} = \nabla f\cdot\vec{u} = -\frac{12}{5}$.

b) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$p=(2,6,-3)$

$\vec{v} = \langle 1,1,1\rangle$

$\nabla g = \langle \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x, \cdot, \cdot\rangle$

$= \langle \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-3}{7}\rangle$

$\vec{v} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$

$\cancel{\nabla g\cdot\vec{v} = \frac{2}{21} + \frac{6}{21} - \frac{3}{21}}$

$= \frac{5}{21}$

$\nabla g\cdot\vec{v} = \frac{2\sqrt{3}}{21} + \frac{6\sqrt{3}}{21} - \frac{3\sqrt{3}}{21}$

$= \frac{5\sqrt{3}}{21}$