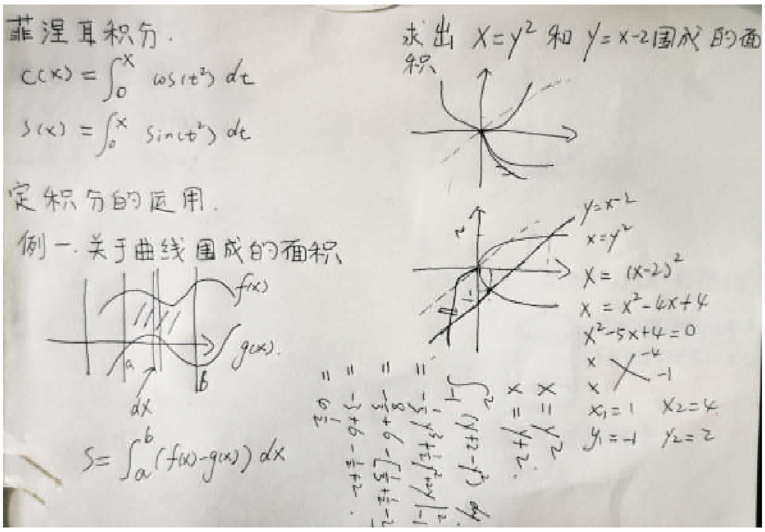
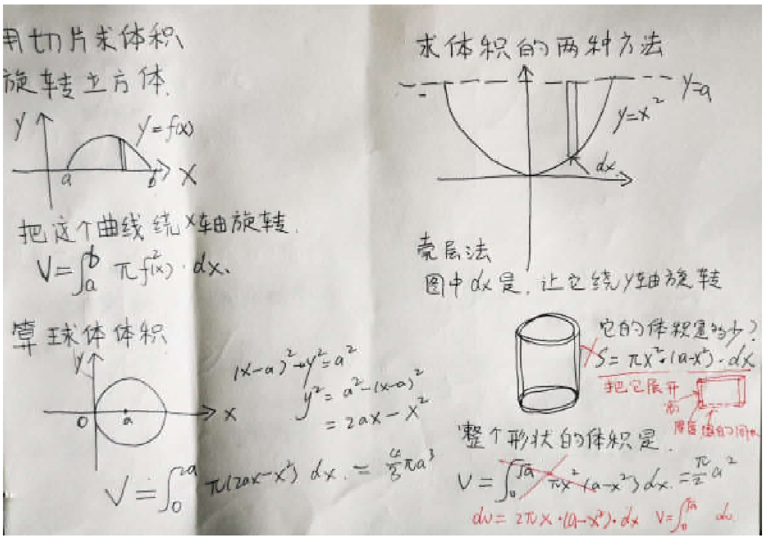
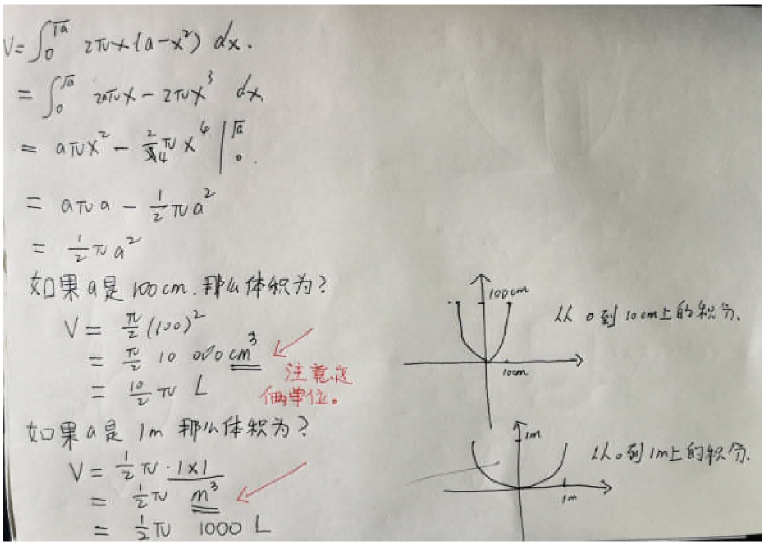
定积分的应用

2022年2月9日　　11:54



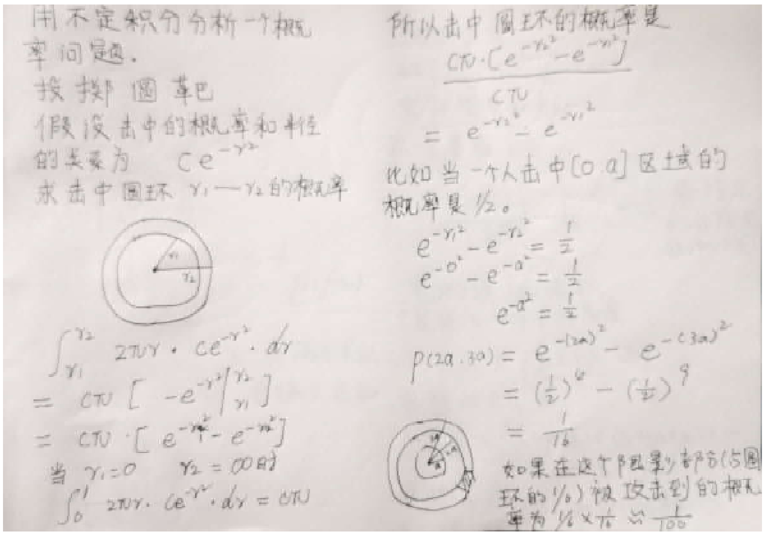




求面积

求体积　壳层法　圆盘法

注意一点　要清楚自己的模型，尤其是单位


用不定积分分析一个概率问题。

投掷圆靶

假设击中的概率和半径的关系为 ce^{-r^2}

求击中圆环 r_1—r_2 的概率

$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \cdot ce^{-r^2} \cdot dr$

$= c\pi\left[-e^{-r^2}\Big|_{r_1}^{r_2}\right]$

$= c\pi \cdot \left[e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}\right]$

当 $r_1=0$ $r_2=\infty$ 时

$\int_0^1 2\pi r \cdot ce^{-r^2} \cdot dr = c\pi$

所以击中圆环的概率是

$\dfrac{c\pi \cdot \left[e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}\right]}{c\pi}$

$= e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2}$

比如当一个人击中 $[0\ a]$ 区域的概率是 $1/2$。

$e^{-r_1^2} - e^{-r_2^2} = \frac{1}{2}$

$e^{-0^2} - e^{-a^2} = \frac{1}{2}$

$e^{-a^2} = \frac{1}{2}$

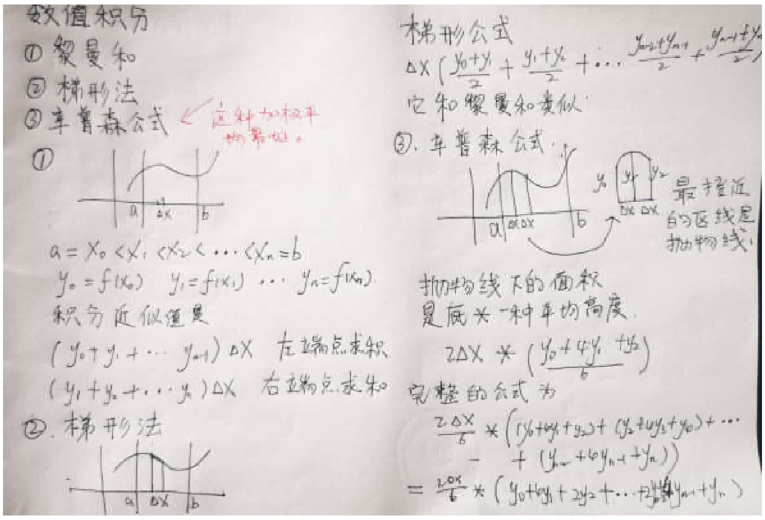
$p(2a, 3a) = e^{-(2a)^2} - e^{-(3a)^2}$

$= (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^9$

$= \frac{1}{16}$

如果在这个阴影部分（5圆环的 $1/6$）被攻击到的概率为 $1/6 \times \frac{1}{16} \approx \frac{1}{100}$

定积分在概率方面的应用


数值积分

① 黎曼和

② 梯形法

③ 辛普森公式 ← 这种方法拟合程度最好。

①

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$y_0 = f(x_0)$ $y_1 = f(x_1)$ $\cdots$ $y_n = f(x_n)$

积分近似值是

$(y_0 + y_1 + \cdots y_{n-1})\Delta x$ 左端点求和

$(y_1 + y_2 + \cdots y_n)\Delta x$ 右端点求和

②. 梯形法

梯形公式

$\Delta x\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \cdots \frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$

它和黎曼和类似

③. 辛普森公式

y_0 y_1 y_2 Δx Δx 最接近的区线是抛物线。

抛物线下的面积是底 * 一种平均高度

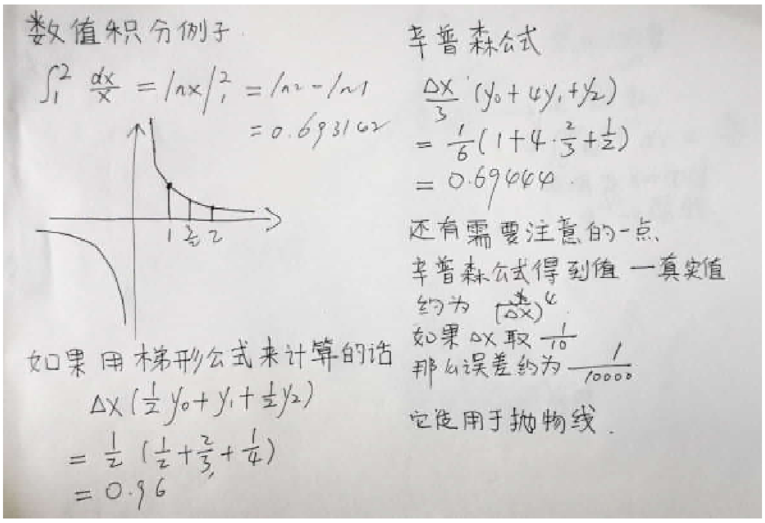
$2\Delta x * \left(\frac{y_0+4y_1+y_2}{6}\right)$

完整的公式为

$\frac{2\Delta x}{6} * \left((y_0+4y_1+y_2) + (y_2+4y_3+y_4) + \cdots + (y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\right)$

$= \frac{2\Delta x}{6} * (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$

数值积分，用几种方法模拟出来定积分的值其中辛普森公式的拟合程度最高


数值积分例子

$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1$

$= 0.693162$

1 $\frac{3}{2}$ 2

如果用梯形公式来计算的话

$\Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \frac{1}{2}y_2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$

$= 0.96$

辛普森公式

$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

$= \frac{1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$

$= 0.69444$

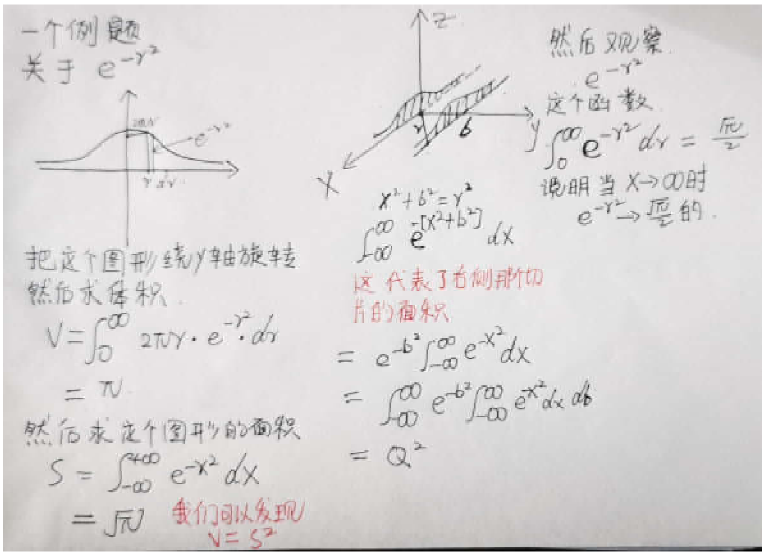
还有需要注意的一点，

辛普森公式得到值 一真实值约为 $(\Delta x)^4$

如果 Δx 取 $\frac{1}{10}$

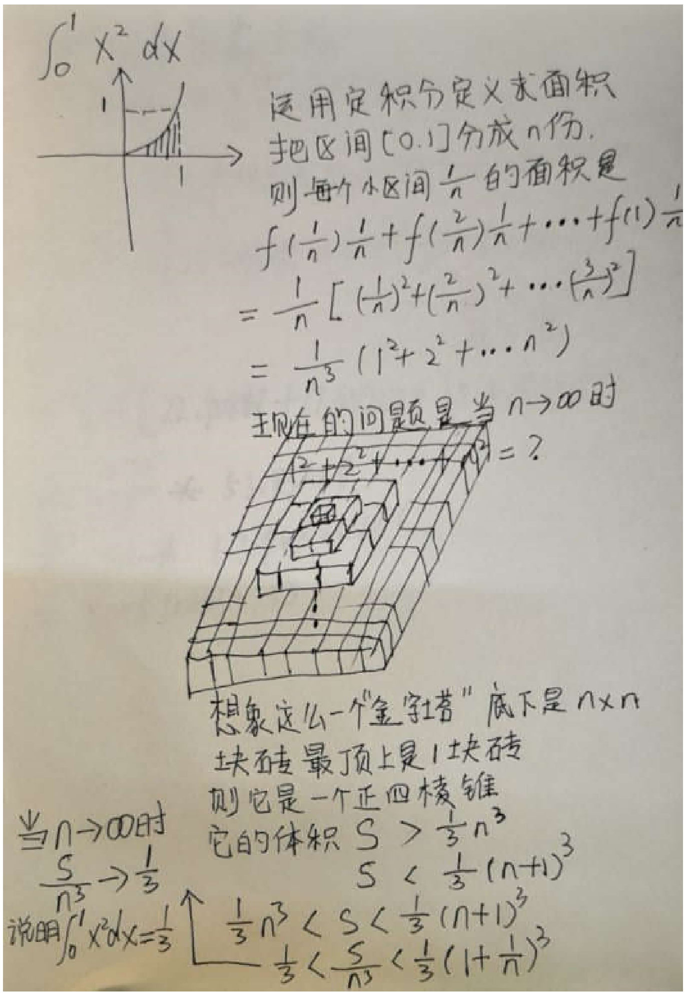
那么误差约为 $\frac{1}{10000}$

它适用于抛物线。



这里是涉及到二重积分的一个例子

定积分做的练习题
第一题是书本上的第一个例题
使用定积分的定义解题，后面求极限有点意思，想象一个金字塔出来

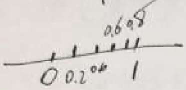


第二个题就是估算定积分的值，但是辛普森公式，找了几个数代入
误差还是比较大的，不知道咋回事，难道是划分区间的时候，应该划分成有
三的倍数个点？

算 定积分$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值.

取$n=10$，计算时取5位小数.

$n=10$·计算太多. 为简便起见取$n=5$



i	x_i	y_i
0	0	4.00000
1	0.2	3.86415
2	0.4	3.44828
3	0.6	2.94118
4	0.8	2.43902
5	1.0	2.00000.

如果是梯形法

$$0.2\left(\frac{4.000+3.866}{2}+\frac{3.860+3.608}{2}+\frac{3.668+2.961}{2}+\frac{2.901+2.63}{2}+\frac{2.63+2}{2}\right)$$

$$=0.2(3.932075+3.656215+3.19673+2.6901+2.21951)$$

$$=3.138526$$

如果是辛普森公式

$$2\Delta x*\left(\frac{y_0+4y_1+y_2}{6}\right)$$

$$=\frac{0.2}{3}*\left[y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+y_4+4y_5+y_6\right]$$

$$=\frac{0.2}{3}*\left[4+4\times y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+y_4+4y_5+y_6\right]$$

[y_5让 $x=0.9$ 值代替]

$$=\frac{0.2}{3}*\left[22.90488+17.65202+13.27878\right]$$

$$=\frac{0.2}{3}*53.83568$$

$$=0.2*17.94522666$$

$$=3.58906533333$$