

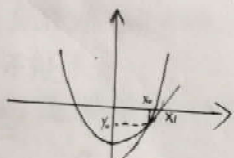
牛顿迭代法

2022年1月17日 21:55

用来求解函数的近似值的

牛顿迭代法

$f(x) = x^2 - 5$ 求解



$0 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$$\frac{-y_0}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5}{2x_0}$$
$$= \frac{2x_0^2 - (x_0^2 - 5)}{2x_0}$$
$$= \frac{x_0^2 + 5}{2x_0} = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{2x_0}$$

我们先大概取一个接近于根的值 2.

近似一次之后为

$$x_1 = \frac{2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{4}$$

第二次近似

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{161}{72}$$

第三次近似

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{161}{72} + \frac{5}{2} \cdot \frac{72}{161} \approx \text{根}$$

三次近似后得的结果与根的实际值误差为 10^{-10} 数量级。

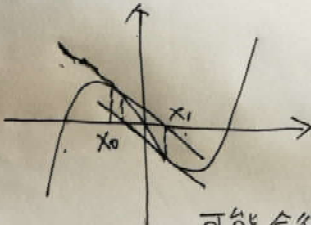
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

牛顿迭代法应用的基本原则

$|f'|$ 应该尽可能的大。不能太小

$|f''|$ 不能太大。

x_0 的选取要在 x 附近。



可能会循环往复