


求向量 \vec{A} 沿某单位向量 \vec{u} 的分量。



例1 可以利用向量来分析物理上的单摆

例2 可以利用向量求三角形面积

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{B}| |\vec{A}| \sin \theta$

解法一，可以利用 $\cos \theta$ 求 $\sin \theta$

解法二，可以利用行列式

例3 空间当中求体积

$\vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{C}$

$\det(\vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{C})$ 它是6个空间中的平行四边形组成的一个立体图形的体积

叉积

它适用于两个在空间内的向量

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

叉积的模长等于向量 \vec{A} 与向量 \vec{B} 在空间内构成的平行四边形的面积

叉积的方向是垂直于平行四边形所在的平面。右手法则

这里介绍了二阶三阶行列式的几何意义

假设 n 把 AM 分成 $1:2$ 的两段，假设 BP, QC 都存在，证明这样的点 n 存在。

证明三条中线的交点是它任意 $\frac{1}{3}$ 分点。(利用向量)

$\vec{BP} = \vec{BA} + \frac{1}{3} \vec{APC}$

$\vec{AM} = \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{CB}$

$\vec{CQ} = \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{BA}$

$\vec{BP} + \vec{AM} + \vec{CQ} = \frac{3}{2} (\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB})$

假设这个点在 AM 上，那么 $n=1$

假设这个点在 BP 上，那么 $n=2$

假设这个点在 CQ 上，那么 $n=3$

假设原点 O

则 $\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC})$

$\vec{ON} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AM}$

$= \vec{OA} + \frac{2}{3} (\vec{OM} - \vec{OA})$

$= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OM}$

$= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} (\frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC})$

$= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{9} \vec{OB} + \frac{2}{9} \vec{OC}$

$\vec{AN} = \vec{OA} - \vec{ON} = \vec{OA} - \frac{1}{3} \vec{OA} - \frac{2}{9} \vec{OB} - \frac{2}{9} \vec{OC} = \frac{2}{9} \vec{OB} + \frac{2}{9} \vec{OC} - \frac{2}{9} \vec{OA}$

$\vec{NM} = \vec{OM} - \vec{ON} = \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC} - \frac{1}{3} \vec{OA}$

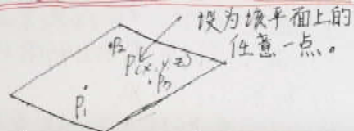
$\vec{AP} = 2 \vec{PN}$

这里应用向量一个小案例
证明三角形三条中线的交点 是三分点

外积的一个应用

空间中有三个点, P_1, P_2, P_3

我们找到它们决定的平面方程



其实这两种方式等价

$$\vec{N} \cdot \vec{P_1P} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{P_2P_3} \times \vec{P_3P_1}) \cdot \vec{P_1P} = 0$$

这个叫做混合积

解法一

$\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_2P_3}$ 看这三个向量三阶行列式是否是一个扁的立体, 只有一个面。

解法二: 利用已知向量 $\vec{P_2P_3}, \vec{P_3P_1}$ 求这两个向量的 $\vec{P_2P_3} \times \vec{P_3P_1}$ 。

得出垂直于该平面的法向量, 再利用 $\vec{N} \cdot \vec{P_1P} = 0$ 这样的方法求。

可以利用外积求解平面方程