欧拉数值拟合

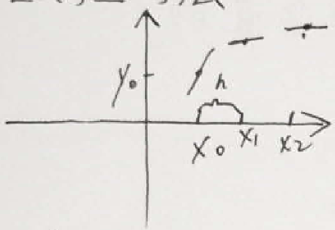
2022年4月14日　　18:20

现实当中很多微分方程都是通过数值方法解出来的。

$y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

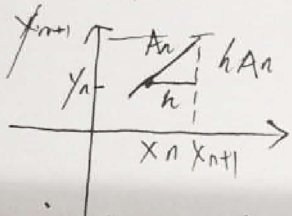
欧拉方法



它告诉我们$(x_0 y_0)$处有个线素.

斜率是$f(x, y)$

提供一种折线的近似.



A_n是$f(x_n, y_n)$

代表那一点的斜率

$$y_{n+1} - y_n = hA_n$$

$$y_{n+1} = y_n + hA_n$$

新的x是

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hA_n \\ A_n = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

例题 $y'=x^2-y^2$

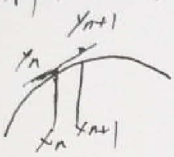
$y(0)=1$

$h=0.1$ (步长)

n	x_n	y_n	A_n
0	0	1	-1
1	0.1	0.9	-0.8
2	0.2	0.82	

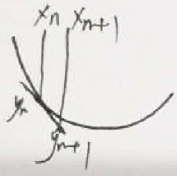
利用这种近似拟合的方法精确吗？

如果是



如果是凸函数
是偏大的

如果是

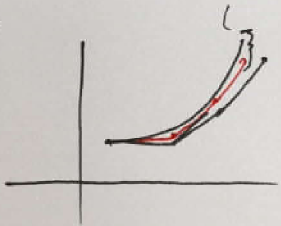


如果是凹函数
是偏小的。

找更好的方法。

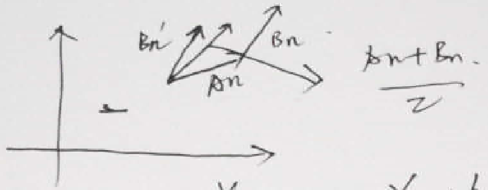
取较小的步长

知道~~误差~~就
知道步长误差.



什么是误差.
误差 e
和步长 h 是一阶的
$e=c_1 h$ (它的幂是1阶的)

更好的方法.
对欧拉方法的改进
利用一个比An更好的斜率.



$x_{n+1} = x_n + h$

新的 $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{A_n+B_n}{2}\right)$

$B_n = f(x_{n+1},\ y_n + hA_n)$

$(x_{n+1},\ y_n + hA_n)$ 的斜率

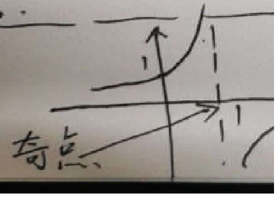
修恩方法.
改进欧拉方法. ~~如果~~ 误差更小了。
RK2

$e \sim C_2 h^2$

RK4
是一种标准方法，用4次计算。
效率不高。

加权平均An $\frac{A_n + 2B_n + 2C_n + D_n}{6}$

可能遇到的问题.
$y' = y^2$ 用数值法咋算呢?
$y = \frac{1}{c-x}$



最后面有一个陷阱
考虑到奇点的问题