



# Théorie des Ondelettes

## Distributions et Applications

Benjamin, Athanase, Zhan, Tanguy

November 4, 2024



## 1 Introduction

- Des résultats sur l'analyse de Fourier
- Les imperfections de la transformation de Fourier
- La transformée de Fourier fenêtrée

## 2 Ondelettes de Morlet

- Définition
- Analyse et synthèse
- Ondelettes complexes



# Des résultats sur l'analyse de Fourier

pour  $f \in L^1$ .

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{i\xi t} d\xi \quad (2)$$

**La dérivation** pour  $f \in L^1$ ,  $\frac{d}{dx}f \in L^1$ ,

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f\right)(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi) \quad (3)$$

**La reconstruction de Parseval** pour  $f \in L^2$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(\xi)e^{i\xi t}|^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi \leq (2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

(4) 3 / 15

# Problème 1 : Localisation

La transformée de Fourier apporte une information sur le contenu fréquentiel d'un signal, mais pas sur la localisation temporelle des différentes composantes fréquentielles.

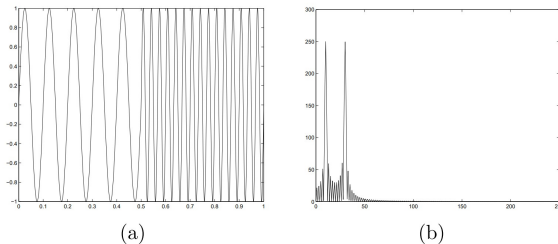


Figure: Perte de l'information temporelle de la TF



## Problème 2 : Impact des irrégularités

Si l'on prend pour exemple une fonction  $f$  à support compact avec une discontinuité en  $t_0$ , on a :

$$\hat{f}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(t_0^+) - f(t_0^-)}{i\xi} e^{-i\xi t_0} \quad (5)$$

Ce qui rend instable la reconstruction de  $f$  avec l'expression (2) pour tout  $t$ .

On peut donc être amenés à chercher à apporter une dimension temporelle à l'information apportée par la transformée de Fourier, et à se placer sur des intervalles où le signal étudié est régulier.



# L'exemple : la reconstruction de Heavyside

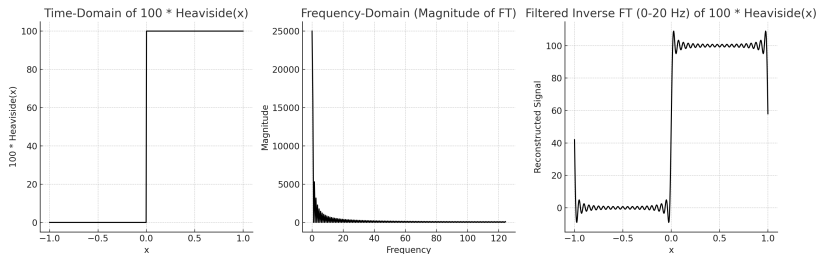


Figure: la fonction temporelle, les gains fréquentiels et la reconstruction de  $100 \cdot \text{Heavyside}$

$$Cste * \frac{d}{dt} H_{t=0} = Cste * \delta_{t=0}$$

$$|i\xi * F(Cste * H)(\xi)| = | \langle Cste * \frac{d}{dt} H_{t=0}, t \mapsto e^{it\xi} \rangle | = Cste$$



# La transformée de Fourier fenêtrée

On choisit comme fenêtre une fonction  $g$  symétrique, et on définit pour un temps  $x$  et une fréquence  $\xi$  réels :

$$C(x, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - x)e^{-it\xi}dt \quad (6)$$

On a également :

$$C(x, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega - \xi)e^{i(\omega - \xi)x}d\omega \quad (7)$$

Ainsi  $C(x, \xi)$  donne une indication du comportement de  $f$  autour du temps  $x$  et de la fréquence  $\xi$ .

# Résolution

On définit l'écart type temporel et fréquentiel de  $g_{x,\xi} : t \mapsto g(t-x)e^{-it\xi}$  normalisée:

$$\sigma_t(x, \xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 |g_{x,\xi}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \quad (8)$$

$$\sigma_\omega(x, \xi)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\xi)^2 |\hat{g}_{x,\xi}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (9)$$

$\sigma_t$  et  $\sigma_\omega$  ne dépendent ni de  $x$  ni de  $\xi$ . Cela signifie que la résolution en temps et en fréquence est la même partout, et dépend uniquement de l'étalement en temps et en fréquence de la fonction  $g$  initiale.



# L'incertitude et le compromis temps-fréquences

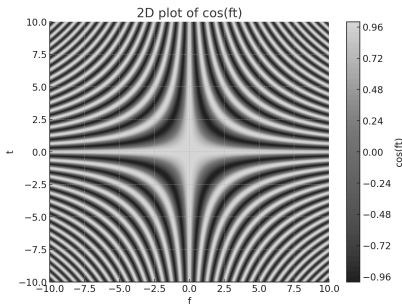


Figure: L'image de  $(f, t) \mapsto \cos(ft)$

Sampled Short-Time Fourier Transform of 100 Heavyside

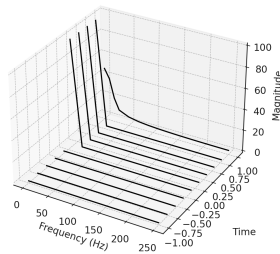


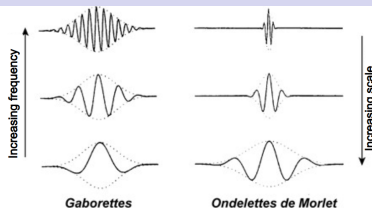
Figure: STFT sur 100Heavyside

**L'incertitude de Heisenberg:**  $\frac{1}{2} \leq \sigma_t \sigma_\omega$

# Définition

Soit  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , on définit :

$$g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$



$$C(a,b) = \langle f | g_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$C(a,b)$  donne une information sur le comportement de  $f$  :

- au voisinage de  $\xi = \frac{\bar{\xi}}{a}$  (information fréquentielle) avec une résolution  $\frac{1}{a} \sigma_{\xi}$
- au voisinage de  $t = b$  (information temporelle) avec une résolution  $a \sigma_t$

# Analyse et synthèse

- On introduit la condition  $C_g = \int_0^{+\infty} |\hat{g}|^2 \frac{d\xi}{\xi} < +\infty$  (g suffisamment plate en 0)
- Alors on utilise les ondelettes analysantes  $g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right)$  avec  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  de sorte que :

- Analyse :

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

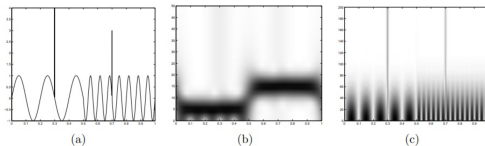
- Synthèse :

$$f(t) = \frac{1}{C_g} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(a, b) g_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db$$

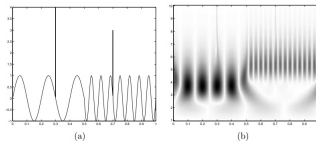
- Plancherel :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_g} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db$$

# Gabor vs Ondelettes de Morlet



**Figure:** Limitations de la TG : (a) Sinus à 5 Hz puis sinus à 15 Hz + deux masses de Dirac, (b) module de sa transformée de Gabor pour  $s = 0.1$ , (c) module de sa transformée de Gabor pour  $s = 0.01$



**Figure:** (a) Sinus à 5 Hz puis sinus à 15 Hz + deux masses de Dirac, (b) module de sa transformée en ondelettes continue



# Ondelettes complexes

Pour  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , on peut exprimer  $\hat{C}(a, b)$  à partir de  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ :

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{g} \left( \frac{t - b}{a} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \sqrt{a} \hat{g}^*(a\xi) e^{ib\xi} d\xi$$

Pour les fonctions  $f$  réelles, on a:  $\hat{f}(-\xi) = \hat{f}^*(\xi)$ .

On construit une ondelette complexe  $\gamma = g + iG$  de sorte que:

$$\hat{\gamma} = 1_{]0, +\infty]} 2\hat{g}$$

$G$  est la transformée de Hilbert:  $G = \frac{1}{\pi} vp \left( \frac{1}{x} \right) * g$

# Discrétisation

Rappel:

- Résolution en fréquence autour de  $\bar{\xi}/a$ :  $\frac{1}{a}\sigma_{\xi}$
- Résolution en temps autour de  $t = b$ :  $a\sigma_t$

Échantillonnage:  $g_{a_0^m, na_0^m b_0}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, a_0 > 0, b_0 > 0$

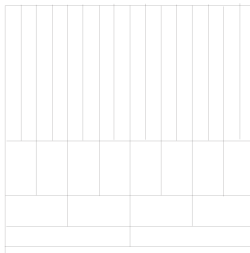


Figure 5.8: Time-frequency decomposition using wavelets.



## Références et remerciements

- Lemarié, P.G. (1990). Introduction a la theorie des ondelettes. In: Lemarié, P.G. (eds) Les Ondelettes en 1989. Lecture Notes in Mathematics, vol 1438. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0083511>
- Meyer, Y. (1990). Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numerique de l'image. In: Lemarié, P.G. (eds) Les Ondelettes en 1989. Lecture Notes in Mathematics, vol 1438. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0083512>
- Jérémie, B. (2009). Analyse par ondelettes. Notes de cours.
- Merci à Olivier pour son enseignement dans Distribution et Applications.