式中：$v(0)$表示初始速度；$x(0)$表示初始位移；λ 表示一次积分常数项；η 表示二次积分常数项；$\frac{1}{2}Ct^2$ 表示直流分量积分项.

上述得到的位移可分为 3 个部分：

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \iint a_s(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t \\ \hat{x}(t) = \iint a_n(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t \\ \alpha(t) = \frac{1}{2}Ct^2 + \lambda t + v(0)t + \eta + x(0) \end{cases} \tag{3}$$

第 1 部分表示结构的真实位移；第 2 部分是环境噪声和仪器测量误差的影响，相对于真实位移较小，可通过多次平滑和滤波去除；第 3 部分由直流分量、初始条件和积分常数项所组成，称为漂移项，可通过减去平均值及最小二乘法拟合多项式去除. 下面主要分析第 2 部分和第 3 部分的去除方法，保留真实结构位移.

1.2　消除趋势项和去噪

由于采集到的振动信号数据往往叠加噪声信号，噪声信号中除了工频干扰信号外，还有不规则的随机干扰信号，随机干扰部分高频成分占很大比例，需要对加速度信号平滑处理.

常用的消除趋势项干扰的方法是利用多项式拟合的最小二乘法[13-14]，相对于递归最小二乘的基线校正技术，本文利用一种最小二乘法的滑动平均方法与滤波器相结合，通过多次平滑、滤波和积分，有效消除测量数据中的随机起伏干扰，减小随机性误差的影响，由于在积分位移中，高频成分不会对位移结果产生影响，因此可以得到结构真实的位移结果.

首先最小二乘法的滑动平均法中存在 m 次多项式函数为[15]

$$Y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m \tag{4}$$

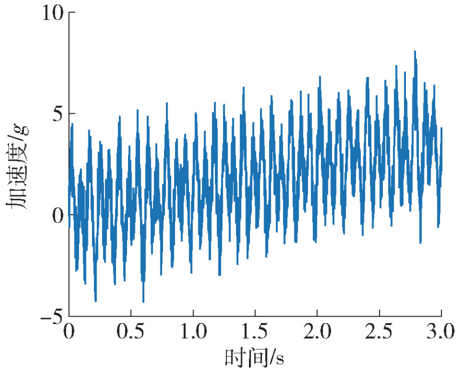
通过最小二乘原理，使平滑后的数据以最小均方差逼近原始数据，令

$$A(a_0, a_1, \cdots, a_m) = \sum_{i=-u}^{u} \left[\sum_{j=0}^{m} a_j t_i^j - Y_i \right]^2 \tag{5}$$

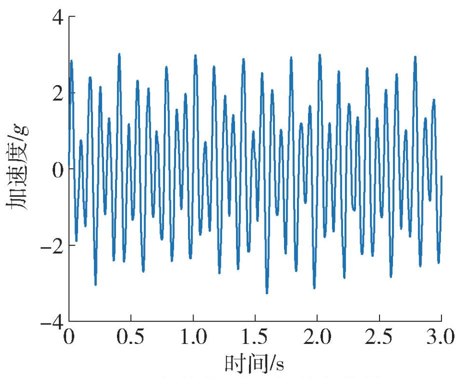
为了确定各待定系数，使得函数 $Y(t)$ 与离散数据的误差平方和为最小，将式(5)分别对 a_k($k = 0, 1, \cdots, m$)求偏导数，并使偏导数为零，得到 $m+1$ 元线性方程组为

$$\sum_{i=-u}^{u} Y_i t_i^k = \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=-u}^{u} t_i^{k+j} \tag{6}$$

式中：u 为滑动阶次；m 为平滑次数. 例如当 $u = 2$、$m = 3$ 时，令 k 分别为 0、1、2，得到 5 个节点，次数为 3 次，带入得到 5 点 3 次平滑法的计算公式. 滑动平均法基于此原理能够有效去除噪声的干扰. 如图 1(a) 所示为一标准正弦叠加信号加 0.8 倍程的随机噪声和漂移项的时程曲线. 用上述滑动平均法和多项式拟合趋势项能在去除随机噪声同时去除趋势项，得到的信号结果如图 1(b)所示.



(a) 加噪声信号



(b) 去趋势项和去噪声信号

图 1　加噪声信号与去噪声信号对比

Fig. 1　Comparison of noise added signal and de-noising signal

1.3　数字滤波及频域积分

上述滑动平均法通过多次校正可以有效消除高频干扰所造成的随机起伏，但趋势项一般由低频噪声引起. 因此，采用下面低频衰减的高通滤波器能去除低频噪声对位移结果的影响. 由于实际采样信号是离散形式，频域积分一般采用 FFT 的离散算法：

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k \frac{r}{N}} \tag{7}$$

式中：N 为采样数据个数；$x(r)$ 为 N 点采样序列信号；$X(k)$ 为其离散频谱.

使用 FFT 代替积分来避免小误差的累积和放大，加速度序列其 FFT 的频谱[3]可以表示为