二叉查找树（二叉排序树）

顾名思义，二叉查找树是为了实现快速查找而生的。不过，它不仅仅支持快速查找一个数据，还支持快速插入、删除一个数据。

结构：二叉查找树要求，在树中的任意一个节点，其左子树中的每个节点的值，都要小于这个节点的值，而右子树节点的值都大于这个节点的值。

查找

先取根节点，如果它等于我们要查找的数据，那就返回。如果要查找的数据比根节点的值小，那就在左子树中递归查找；如果要查找的数据比根节点的值大，那就在右子树中递归查找。

插入

新插入的数据都是在叶子节点上，所以我们只需要从根节点开始，依次比较要插入的数据和节点的大小关系。

如果要插入的数据比节点的数据大，并且节点的右子树为空，就将新数据直接插到右子节点的位置；如果不为空，就再递归遍历右子树，查找插入位置。同理，如果要插入的数据比节点数值小，并且节点的左子树为空，就将新数据插入到左子节点的位置；如果不为空，就再递归遍历左子树，查找插入位置。

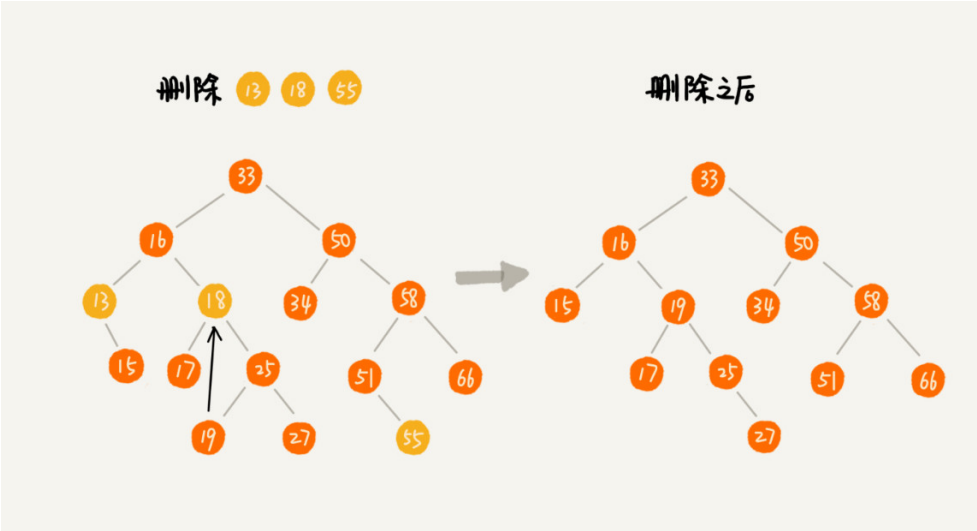
删除

针对要删除节点的子节点个数的不同，需要分三种情况来处理。

第一种情况是，如果要删除的节点没有子节点，我们只需要直接将父节点中，指向要删除节点的指针置为 null。

第二种情况是，如果要删除的节点只有一个子节点（只有左子节点或者右子节点），我们只需要更新父节点中，指向要删除节点的指针，让它指向要删除节点的子节点就可以了。

第三种情况是，如果要删除的节点有两个子节点，这就比较复杂了。我们需要找到这个节点的右子树中的最小节点，把它替换到要删除的节点上。然后再删除掉这个最小节点，因为最小节点肯定没有左子节点（如果有左子结点，那就不是最小节点了），所以，我们可以应用上面两条规则来删除这个最小节点。



关于二叉查找树的删除操作，还有个非常简单、取巧的方法，就是单纯将要删除的节点标记为“已删除”，但是并不真正从树中将这个节点去掉。这样原本删除的节点还需要存储在内存中，比较浪费内存空间，但是删除操作就变得简单了很多。而且，这种处理方法也并没有增加插入、查找操作代码实现的难度。

中序遍历二叉查找树

可以输出有序的数据序列，时间复杂度是 O(n)，非常高效。因此，二叉查找树也叫作二叉排序树。

快速地查找最大节点和最小节点、前驱节点和后继节点

支持重复数据的二叉查找树

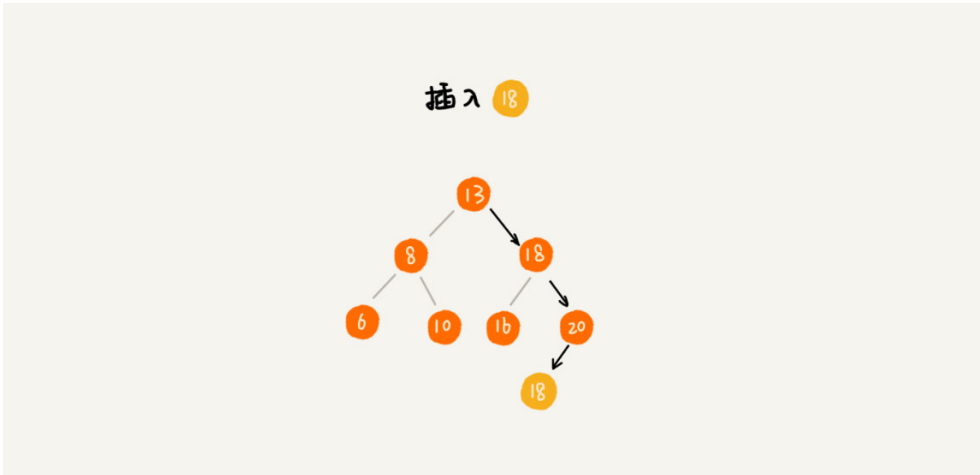
在实际的软件开发中，我们在二叉查找树中存储的，是一个包含很多字段的对象。我们利用对象的某个字段作为键值（key）来构建二叉查找树。我们把对象中的其他字段叫作卫星数据。

- 解决方法1：比较简单。

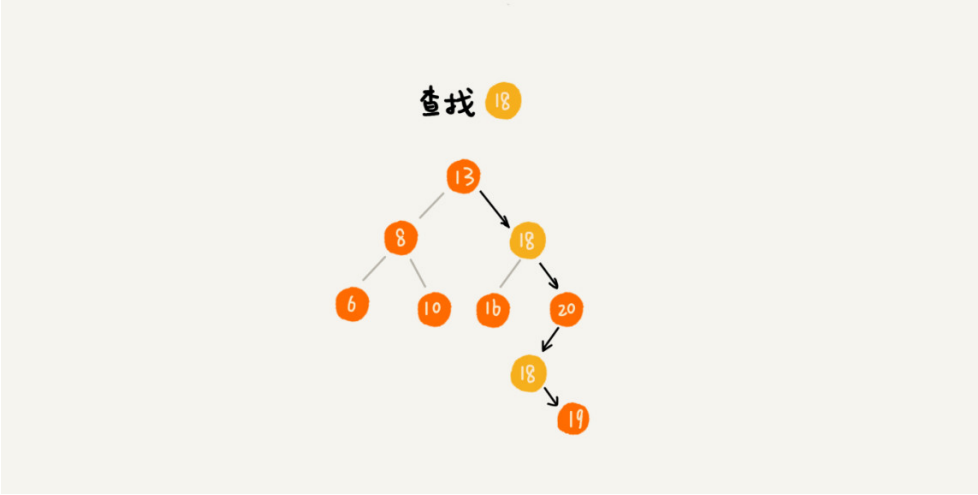
  二叉查找树中每一个节点不仅会存储一个数据，我们通过链表和支持动态扩容的数组等数据结构，把值相同的数据都存储在同一个节点上。

- 解决方法2：更加优雅。

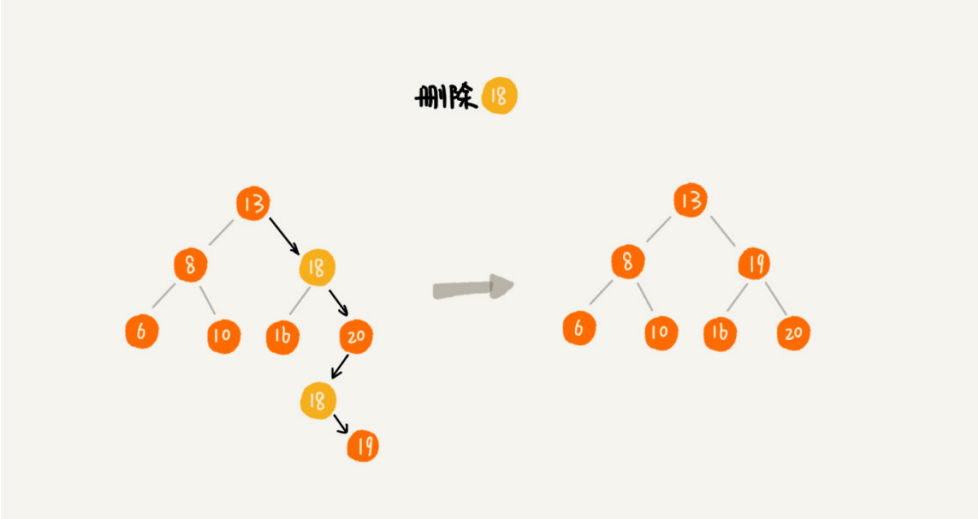
  每个节点仍然只存储一个数据。在查找插入位置的过程中，如果碰到一个节点的值，与要插入数据的值相同，我们就将这个要插入的数据放到这个节点的右子树，也就是说，把这个新插入的数据当作大于这个节点的值来处理。



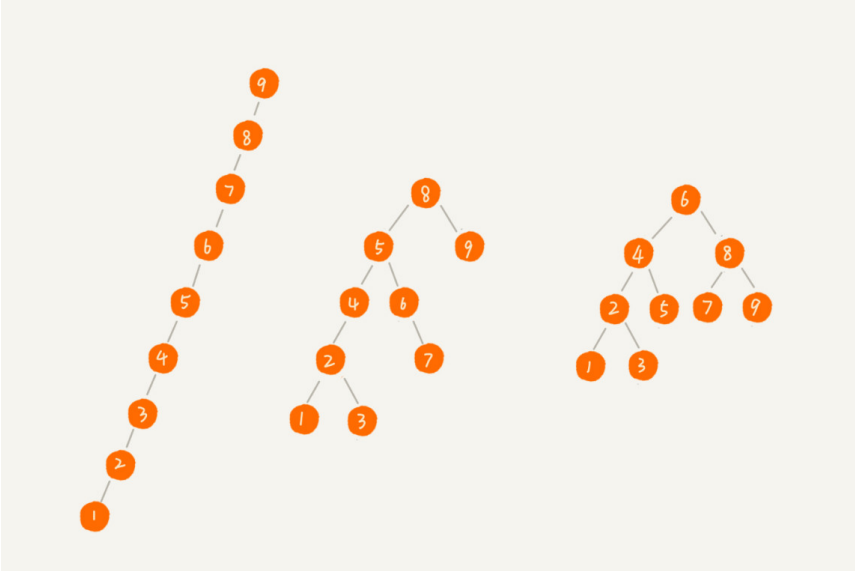
当要查找数据的时候，遇到值相同的节点，我们并不停止查找操作，而是继续在右子树中查找，直到遇到叶子节点，才停止。这样就可以把键值等于要查找值的所有节点都找出来。



对于删除操作，我们也需要先查找到每个要删除的节点，然后再按前面讲的删除操作的方法，依次删除。



查找操作时间复杂度



最坏情况，即第一个树，已经退化成了链表，时间复杂度O(n)。

理想情况，是完全二叉树或满二叉树。从例子来看，不管操作是插入、删除还是查找，时间复杂度其实都跟树的高度成正比，也就是 O(height)。

所以，如何求一棵包含 n 个节点的完全二叉树的高度?

包含 n 个节点的完全二叉树中，第一层包含 1 个节点，第二层包含 2 个节点，第三层包含 4 个节点，依次类推，下面一层节点个数是上一层的 2 倍，第 K 层包含的节点个数就是 2^(K-1)。

最后一层，它包含的节点个数在 1 个到 2^(L-1) 个之间（我们假设最大层数是 L）。

如果我们把每一层的节点个数加起来就是总的节点个数 n。也就是说，如果节点的个数是 n，那么 n 满足这样一个关系：

n >= 1+2+4+8+...+2^(L-2)+1 n <= 1+2+4+8+...+2^(L-2)+2^(L-1)

借助等比数列的求和公式，我们可以计算出，L 的范围是[$\log_2 n(n+1)$, $\log_2 n$ +1]。

完全二叉树的层数小于等于 $\log_2 n$ +1，也就是说，完全二叉树的高度小于等于 $\log_2 n$。

（树的高度 = max(左子树高度，右子树高度)+1）

二叉查找树的优势

散列表的插入、删除、查找操作的时间复杂度可以做到常量级的 O(1)，非常高效。而二叉查找树在比较平衡的情况下，插入、删除、查找操作时间复杂度才是 O(logn)，为什么还要用二叉查找树呢?

1. 散列表中的数据是无序存储的，如果要输出有序的数据，需要先进行排序。而对于二叉查找树来说，我们只需要中序遍历，就可以在 O(n) 的时间复杂度内，输出有序的数据序列。
2. 散列表扩容耗时很多，而且当遇到散列冲突时，性能不稳定，尽管二叉查找树的性能不稳定，但是在工程中，我们最常用的平衡二叉查找树的性能非常稳定，时间复杂度稳定在 O(logn)。
3. 尽管散列表的查找等操作的时间复杂度是常量级的，但因为哈希冲突的存在，这个常量不一定比 logn 小，所以实际的查找速度可能不一定比 O(logn) 快。加上哈希函数的耗时，也不一定就比平衡二叉查找树的效率高。
4. 散列表的构造比二叉查找树要复杂，需要考虑的东西很多。比如散列函数的设计、冲突解决办法、扩容、缩容等。平衡二叉查找树只需要考虑平衡性这一个问题，而且这个问题的解决方案比较成熟、固定。
5. 浪费存储空间，为了避免过多的散列冲突，散列表装载因子不能太大，特别是基于开放寻址法解决冲突的散列表。