第 5 周作业

——2023210314，赵熠卓

一、牛顿迭代法解非线性方程组问题

（一）问题描述

用牛顿法求解二元方程组的根

$$\begin{cases} x^2cos2x + y^2sin2y = 1 \\ x^3 + y^3 - 6cos2xy = -1 \end{cases}$$

（二）数学模型

(1) 在(x_k, y_k)处将将f_1和f_2分别进行泰勒级数展开，并取线性部分作为近似，如下：

$$\begin{cases} f_1(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) \approx f_1(x_k, y_k) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k)\Delta x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k)\Delta y \\ f_2(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) \approx f_2(x_k, y_k) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k)\Delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k)\Delta y \end{cases}$$

(2) 令泰勒级数展开的近似式等于零，得到线性方程组：

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_k, y_k) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k)\Delta x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k)\Delta y \\ 0 = f_2(x_k, y_k) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k)\Delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k)\Delta y \end{cases}$$

(3) 表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}$$

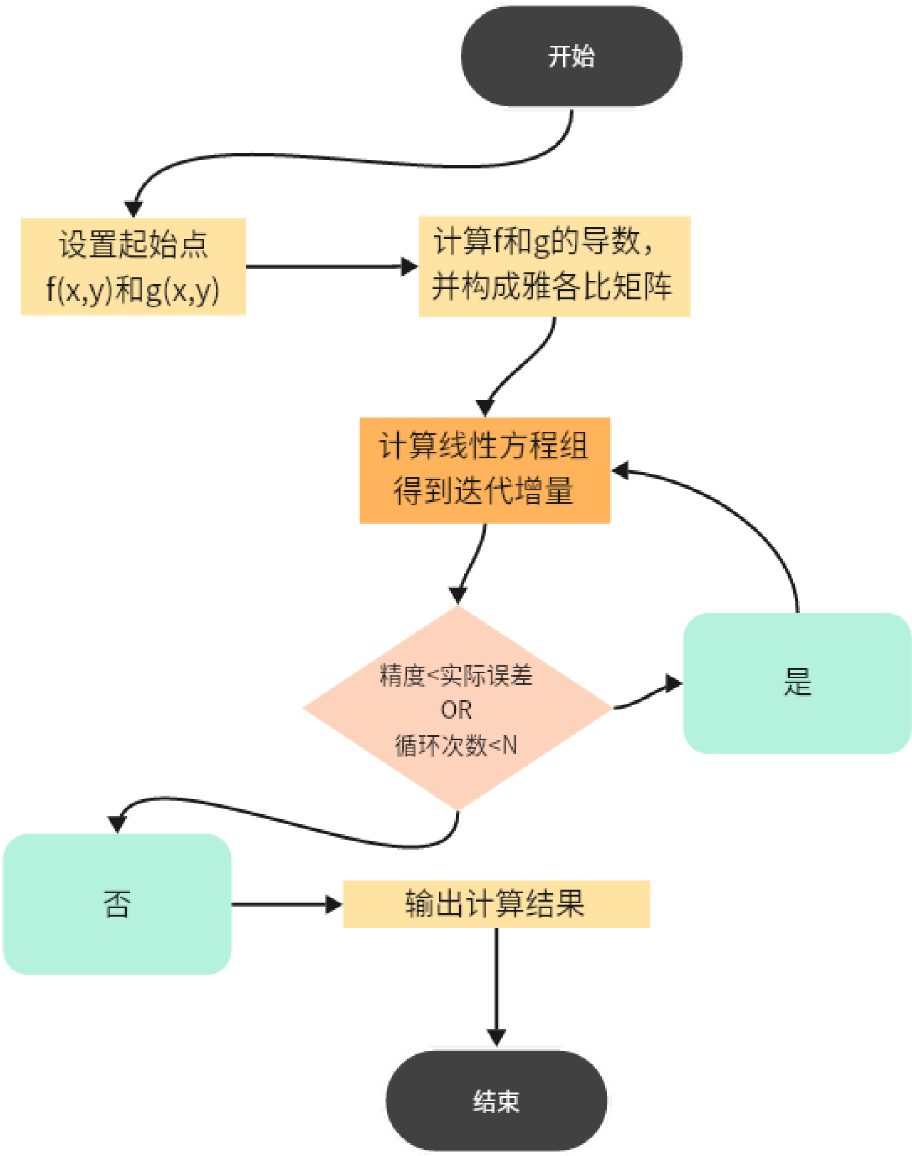
(4) 求解这个线性方程组，可以得到迭代增量，进而更新将x和y的值：

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

(5) 重复这个过程，直到满足收敛条件（例如，两次迭代的差的绝对值小于某个预定的容忍度）或达到最大迭代次数。

（三）程序设计

A. 流程图



B. 代码

newton_method.mlx

```
X=[1;1];  %取初始解
N=100;    %最大迭代次数
e=1e-5;   %设置误差限


syms x y;
func1=x^2*cos(2*x)+y^2*sin(2*y)-1; %定义函数 1
func2=x^3+y^3-6*cos(2*x*y)+1;      %定义函数 2


d_func1_1=diff(func1,x);
d_func2_1=diff(func2,x);
d_func1_2=diff(func1,y);
d_func2_2=diff(func2,y);

f_out=f(X,func1,func2);


for i=1:N
    d_f_out=d_f(X,d_func1_1,d_func2_1,d_func1_2,d_func2_2); %计算雅各比矩阵
    det_x=-inv(d_f_out)*f_out;                             %计算 x 的变化量
    X=X+det_x;                                             %x 更新
    f_out=f(X,func1,func2);                                %计算非线性方程组
    if norm(det_x)<e
        break;
    end
end
double(X)
function [out] = f(X,func1,func2)
syms x y;
out(1,1)=subs(func1,{x,y},{X(1,1),X(2,1)});
out(2,1)=subs(func2,{x,y},{X(1,1),X(2,1)});
end
function d_out= d_f(X,d_func1_1,d_func2_1,d_func1_2,d_func2_2)
syms x y;
d_out(1,1)=double(subs(d_func1_1,{x,y},{X(1,1),X(2,1)}));
d_out(2,1)=double(subs(d_func2_1,{x,y},{X(1,1),X(2,1)}));
d_out(1,2)=double(subs(d_func1_2,{x,y},{X(1,1),X(2,1)}));
d_out(2,2)=double(subs(d_func2_2,{x,y},{X(1,1),X(2,1)}));
end
```

（四）计算结果与分析

```
ans = 2×1
    0.6219
    0.9685
```

结果较好