

本科概率论与数理统计作业卷(八)

一、填空题

1. 设两个总体 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(0, 3^2)$, X_1, \dots, X_9 和 Y_1, \dots, Y_9 是分别取自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}}$ 服从_____分布, 参数为_____.
2. 在天平上重复称量一重量为 a 的物品, 假设各次称量的结果相互独立且均服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$, 若以 \bar{X}_n 表示 n 次称量结果的算术平均值, 则为使 $P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} \geq 0.95$, 需要称量的次数 n 的最少次数应为_____.
3. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 2^2)$, X_1, X_2, \dots, X_7 是取自总体 X 的七个样本, 若要求统计量 $a(X_1 - 2X_2 + X_3)^2 + b(X_4 - X_5 + X_6 - X_7)^2 \sim \chi^2(n)$, 则应取 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

二、选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知, X_1, X_2, X_3 是取自该总体的三个样本, 则不是统计量的是_____.
(A) $X_1 + X_2 + X_3$ (B) $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ (C) $\sigma^2(X_1 + X_2 + X_3)$ (D) $\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3)$
2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 均未知, X_1, \dots, X_n 为 X 的样本, 则下列选项正确的是_____.
(A) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (B) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n)$ (C) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n+1)$ (D) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-2)$
3. 设 X_1, \dots, X_n 是正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本, μ 和 σ^2 均已知, 则下列选项错误的是_____.
(A) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (B) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ (C) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (D) $\frac{(n-1)S}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
4. 设 n 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n , ($n \geq 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则下列选项正确的是_____.
(A) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ (B) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$ (C) $nS^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$

三、计算、证明题

1. 设总体服从正态分布 $N(0, 0.3^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{10} 为 X 的一组样本, 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$.
2. 设总体 X 服从 $(0, \theta)$ 上的均匀分布, $\theta > 0$ 是未知参数, X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一组样本, 记 $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 和 $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 分别是 X_1, \dots, X_n 的最小顺序统计量和最大顺序统计量, 求 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的概率密度函数 $f_{X_{(1)}}(x)$ 和 $f_{X_{(n)}}(x)$.
3. 已知 $T \sim t(n)$, 证明 $T^2 \sim F(1, n)$