矩阵乘法

$$AB = A\begin{bmatrix} b1 & b2 & bn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab1 & Ab2 & Abn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a1T \\ a2T \\ anT \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a1TB \\ a2TB \\ anTB \end{bmatrix}$$
$$= \sum aibiT = \begin{bmatrix} a1Tb1 & a1Tb2 & a1Tbn \\ a2Tb1 & a2Tb2 & a2Tbn \\ anTb1 & anTb2 & anTbn \end{bmatrix}$$

矩阵乘向量

$$Av = \begin{bmatrix} a1 & a2 & an \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ vn \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} aivi$$
$$= \begin{bmatrix} a1T \\ a2T \\ anT \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} a1Tv \\ a2Tv \\ anTv \end{bmatrix}$$

矩阵没有乘法交换

$$AB \neq BA$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

矩阵转置，只有矩阵转置有加法

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$|A^T| = |A|$$
$$\left(A^{-1}\right)^T = (A^T)^{-1}$$

Null space Range Rank

Ax=0 的解集为 Null(A)，若 Null(A)={0},为 trivial null space,否则 non-trivial null space

Range(A)为 Ax 的范围，也是 A 的列空间

Rank(A)是 range(A)的维数，

R(A)+Null(A)=n

R(A)=R(AT)=R(ATA)

初等变换不改变秩

R(A)=R(EA),

R(A+B)<=R(A)+R(B)

Min(Ra,Rb)>=R(AB)>=R(A)+R(B)-n

Y=ax 解的情况,对 A 增广 B 做高斯消元为阶梯阵，R(A)=R(B)=n 唯一；R(A)=R(B)<n 无穷；R(A)=!R(B)无解；

矩阵的逆

存在 C,CA=AC=I,则 C 为 A 的逆

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A 逆存在=|A|!=0=,可逆的积也是可逆的，初等 matrix 可逆，A 逆为一系列初等矩阵的乘积

L.I.D

当且仅当 $\alpha 1 = \alpha 2 = \alpha n = 0$ 时

$$\alpha 1 v1 + \alpha 2 v2 + \alpha n vn = 0$$

v1 v2 vn 线性无关

LS

y=Ax,A 为 slim 瘦长，此时无解，找近似值

$$A^T Ax = A^T y$$
$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

p 为投影矩阵

$$p = (A^T A)^{-1} A^T$$
$$pp = p$$
$$p^T = p$$

LN

y=Ax,A 为 slim 宽扁，无穷解

$$AA^T z = y$$
$$x = A(AA^T)^{-1} y$$

weight LS

$$\frac{1}{2}(Ax-y)^T W(Ax-y)$$

$$\frac{1}{2}(Ax-y)^T W(Ax-y)$$
$$A^T WAx - A^T Wy = 0$$
$$x = (A^T WA)^{-1} A^T Wy$$

向量 norm

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x1|^p + |x2|^p + |xn|^p}$$
$$\|x\|_1 = |x1| + |x2| + |xn|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x1|^2 + |x2|^2 + |xn|^2}$$
$$\|x\|_\infty = \max(|xi|)$$

特征向量

$$Av = \lambda v$$
$$AV = V\Lambda$$
$$A = V\Lambda V^{-1}$$

V 逆为 A 左特征向量（行）

$$W^T = V^{-1}$$
$$w^T A = \lambda w^T$$
$$W^T A = \Lambda W^T$$
$$|\lambda I - A| = 0$$
$$(\lambda I - A)v = 0$$

对角

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda 1^k & & \\ & \lambda 2^k & \\ & & \lambda n^k \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda 1} & & \\ & \frac{1}{\lambda 2} & \\ & & \frac{1}{\lambda n} \end{bmatrix}$$

$V\Lambda = [\ \lambda 1v1 \quad \lambda 2v2 \quad \lambda nvn\ ]$

$$\Lambda V = \begin{bmatrix} \lambda 1v1T \\ \lambda 2v2T \\ \lambda nvnT \end{bmatrix}$$

行列式

换两行（列）值乘-1；某一行（列）·α 值·α；一行·α加另一行，值不变；

$|AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$|A^T| = |A|$

$|\Lambda| = \prod aii$

$|A| = \prod \lambda i$

$|A+B| = |A^T + B^T|$

LU

前提可逆并无行变换

$A = (EnE2E1)^{-1}U = LU$

LDU 是化成单位上对角单位下，出现行变换 PA=LU

LTI

$x(k+1) = Ax(k)$

$x(k) = A^k x(0)$

$A^k = T\Lambda^k T^{-1}$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

$x(t) = e^{At}x(0)$

$$e^{At} = \sum_{k=0} \frac{(At)^k}{k!} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

拉氏变换

$x(t) = L\left((SI-A)^{-1}\right)^{-1} x(0)$

$e^{At} = L\left((SI-A)^{-1}\right)^{-1} = \sum vi\lambda iwi^* x(0)$

二次式

xTPx. P 为对称

$x^T Px = z^T \Lambda z = \sum \lambda izi^2 = \sum\sum pijxixj$

正定对非 0 的 x，都有大于 0,特征值均大于 0，主顺序大于 0,其他一样就最后一个没有

Normal

$A^*A = AA^*$

正交，酉

$A^*A = AA^* = E$

$|A| = \pm 1 and |\lambda| = 1$

对称,Hermitan

$A = A^*$

都是 normal，并特征 V 正交

$A = V\Lambda V^T$

矩阵内积

$\langle x, y\rangle = x^T y$

$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) = \sum aiTbi$

$tr(\alpha) = \alpha$

$tr(A) = tr(AT)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

$tr(A) = \sum \lambda i$

$\|A\|_F^2 = \langle A, A\rangle = \sum xi^T xi = \sum |xi|^2$

$$\|A\|_{inp-n} = \max \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \max_{|x|_p=1} |Ax|_p$$

奇异分解

不可逆为奇异

$A = U\Sigma V^T$

$AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$

$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T$

$\sigma = \sqrt{\lambda(A^T A)}$

$$ui = \frac{1}{\sigma i} Avi$$

$$vi = \frac{1}{\sigma i} A^T ui$$

$\|A\|_F^2 = tr(\Sigma^T \Sigma) = \sum \sigma i^2$

$\|A\|_{inp-2} = \sigma 1$

矩阵乘法

$$AB = A\begin{bmatrix} b1 & b2 & bn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab1 & Ab2 & Abn \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a1T \\ a2T \\ anT \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a1TB \\ a2TB \\ anTB \end{bmatrix}$$

$$= \sum aibiT = \begin{bmatrix} a1Tb1 & a1Tb2 & a1Tbn \\ a2Tb1 & a2Tb2 & a2Tbn \\ anTb1 & anTb2 & anTbn \end{bmatrix}$$

矩阵乘向量

$$Av = [\ a1 \quad a2 \quad an\ ]\begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ vn \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} aivi$$

$$= \begin{bmatrix} a1T \\ a2T \\ anT \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} a1Tv \\ a2Tv \\ anTv \end{bmatrix}$$

矩阵没有乘法交换

$AB \neq BA$

$A(BC) = (AB)C$

$(A+B)C = AC + BC$

矩阵转置，只有矩阵转置有加法

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$\left|A^T\right| = |A|$

$\left(A^{-1}\right)^T = (A^T)^{-1}$

Null space Range Rank

Ax=0 的解集为 Null(A)，若 Null(A)={0}, 为 trivial null space,否则 non-trivial null space；Range(A)为 Ax 的范围，也是 A 的列空间；Rank(A)是 range(A)的维数，

R(A)+Null(A)=n

R(A)=R(AT)=R(ATA)

初等变换不改变秩

R(A)=R(EA), R(A+B)<=R(A)+R(B)

Min(Ra,Rb)>=R(AB)>=R(A)+R(B)-n

Y=ax 解的情况,对 A 增广 B 做高斯消元为阶梯阵，R(A)=R(B)=n 唯一；R(A)=R(B)<n 无穷；R(A)=!R(B)无解；

矩阵的逆

存在 C,CA=AC=I,则 C 为 A 的逆

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A 逆存在=|A|!=0=,可逆的积也是可逆的，初等 matrix 可逆，A 逆为一系列初等矩阵的乘积

L.I.D

当且仅当 $\alpha 1 = \alpha 2 = \alpha n = 0$ 时

$\alpha 1 v1 + \alpha 2 v2 + \alpha n vn = 0$

v1 v2 vn 线性无关

LS

y=Ax, A 为 slim 瘦长，此时无解,找近似值

$A^T Ax = A^T y$

$x = (A^T A)^{-1} A^T y$

p 为投影矩阵

$p = (A^T A)^{-1} A^T$

$pp = p$

$p^T = p$

LN

y=Ax, A 为 slim 宽扁,无穷解

$AA^T z = y$

$x = A(AA^T)^{-1} y$

weight LS

$\frac{1}{2}(Ax-y)^T W(Ax-y)$

$$\frac{1}{2}(Ax-y)^T W(Ax-y)$$

$A^T WAx - A^T Wy = 0$

$x = (A^T WA)^{-1} A^T Wy$

向量 norm

$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x1|^p + |x2|^p + |xn|^p}$

$\|x\|_1 = |x1| + |x2| + |xn|$

$\|x\|_2 = \sqrt{|x1|^2 + |x2|^2 + |xn|^2}$

$\|x\|_\infty = \max(|xi|)$

特征向量

$Av = \lambda v$

$AV = V\Lambda$

$A = V\Lambda V^{-1}$

V 逆为 A 左特征向量（行）

$W^T = V^{-1}$

$w^T A = \lambda w^T$

$W^T A = \Lambda W^T$

$|\lambda I - A| = 0$

$(\lambda I - A)v = 0$

对角

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda 1^k & & \\ & \lambda 2^k & \\ & & \lambda n^k \end{bmatrix} \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda 1} & & \\ & \frac{1}{\lambda 2} & \\ & & \frac{1}{\lambda n} \end{bmatrix}$$

$V\Lambda = [\ \lambda 1v1 \quad \lambda 2v2 \quad \lambda nvn\ ]$

$$\Lambda V = \begin{bmatrix} \lambda 1v1T \\ \lambda 2v2T \\ \lambda nvnT \end{bmatrix}$$

行列式

换两行（列）值乘-1；某一行（列）·α 值·α；一行·α加另一行，值不变；

$|AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$|A^T| = |A|$

$|\Lambda| = \prod aii$

$|A| = \prod \lambda i$

$|A+B| = |A^T + B^T|$

LU

前提可逆并无行变换

$A = (EnE2E1)^{-1} U = LU$

LDU 是化成单位上对角单位下，出现行变换 PA=LU

LTI

$x(k+1) = Ax(k)$

$x(k) = A^k x(0)$

$A^k = T\Lambda^k T^{-1}$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

$x(t) = e^{At} x(0)$

$e^{At} = \sum_{k=0} \frac{(At)^k}{k!} = Te^{\Lambda t} T^{-1}$

拉氏变换

$x(t) = L\left((SI-A)^{-1}\right)^{-1} x(0)$

$e^{At} = L\left((SI-A)^{-1}\right)^{-1} = \sum vi\lambda iwi^* x(0)$

二次式

xTPx. P 为对称

$x^T Px = z^T \Lambda z = \sum \lambda izi^2 = \sum\sum pijxixj$

正定对非 0 的 x，都有大于 0,特征值均大于 0，主顺序大于 0,其他一样就最后一个没有,正定=对称

Normal

$A^* A = AA^*$

$A^* A = AA^* = E$

正交，酉 $|A| = \pm 1 and |\lambda| = 1$

对称,Hermitan $A = A^*$

都是 normal，并特征 V 正交

$A = V\Lambda V^T$

矩阵内积

$\langle x, y \rangle = x^T y$

$\langle A, B \rangle = tr(A^T B) = \sum aiTbi$

$tr(\alpha) = \alpha$

$tr(A) = tr(AT)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

$tr(A) = \sum \lambda i$

$\|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle = \sum xi^T xi = \sum |xi|^2$

$\|A\|_{inp-n} = \max \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \max_{|x|_p=1} |Ax|_p$

奇异分解

不可逆为奇异

$A = U\Sigma V^T$

$AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$

$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T$

$\sigma = \sqrt{\lambda(A^T A)}$

$ui = \frac{1}{\sigma i} Avi \qquad \|A\|_F^2 = tr(\Sigma^T \Sigma) = \sum \sigma i^2$

$vi = \frac{1}{\sigma i} A^T ui \qquad \|A\|_{inp-2} = \sigma 1$