量子纠错编码

量子计算研讨课程报告

赵晨阳、鲁睿、黄书鸿

清华大学计算机科学与技术系

2022 年 9 月 5 日

量子噪声定义

- 量子系统总会与环境发生相互作用，在如此相互作用内的演化，就表现为实验系统中的噪声。
- 假设初始状态下系统和环境之间没有纠缠，状态分别表示为 ρ 和 ρ_{env}，且在系统和环境组成的系统中经历演化 U，那么从实验室系统的角度来看，ρ 经历如下的变化：

$$E(\rho) = tr_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^{\dagger}] \tag{1}$$

- 我们总是可以引入一个额外系统对 ρ_{env} 进行纯化，并且假设它在纯化后表示状态 $|0\rangle$。假设环境的初始状态为 $|0\rangle$，则以上作用总是可以写作下面的 operator sum 的形式：

$$E(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^{\dagger} \tag{2}$$

- 集合 $E = \{E_i\}$ 就称之为错误。

噪声研究重点

- 所有的有噪声的量子信道都可以用一个保持半正定性和 trace 的 operator sum 来表示。在量子纠错的理论中，我们最为关注的是一类称为 Pauli error 的错误，它们作用在单个 qubit 上，通常可以被表示为：

$$E(\rho) = (1 - p_X - p_Y - p_Z)\rho + p_X X\rho X + p_Y Y\rho Y + p_Z Z\rho Z \tag{3}$$

- 它显然是线性的，并且若 ρ 为正，(ρ) 也为正，并且保持 trace 不变。
- 这还可以解释为对于该 qubit，有 p_σ 的概率发生 σ 错误。

Shor 码定义

- Shor 码是量子比特相位翻转码和三量子比特比特翻转码的组合。
- 首先用相位翻转码来编码量子比特: $|0\rangle \to |{+}{+}{+}\rangle, |1\rangle \to |{-}{-}{-}\rangle$。
- 接着用三个量子比特比特翻转码来编码每个相位码: $|+\rangle$ 编码为 $(|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}, |-\rangle$ 编码为 $(|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$。
- 这个结果为 9 量子比特，其码字为:

$$|0\rangle \to |0_{\mathrm{L}}\rangle \equiv \frac{(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)}{2\sqrt{2}} \tag{4a}$$

$$|1\rangle \to |1_{\mathrm{L}}\rangle \equiv \frac{(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)}{2\sqrt{2}} \tag{4b}$$

Shor 码的保护效果

- Shor 码能对任一量子比特上的相位翻转差错和比特翻转差错进行保护。
- 事实上，Shor 码可对完全任意的差错进行保护，只要规定它们仅影响一个单量子比特。

量子纠错理论假定

- 基于 Shor 码的思想，量子状态通过酉运算被编码为量子纠错码，其形式定义为某个较大 Hilbert 空间中的一个子空间 C。
- 我们采用 P 表示到码空间 C 上的投影算子；且对三量子比特比特翻转码，$P = |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|$。
- 在编码以后，这个码会受到噪声的影响，紧接着执行差错症状测量以检测所出现的差错类型。一旦差错症状确定，恢复运算就会执行，以使量子系统回到这个码的原来状态。
- 不同的差错症状对应于整个 Hilbert 空间中保形的和正交的子空间，这些子空间必是正交的，否则它们就不能被差错症状测量可靠地区分。进而，由于到不同子空间的差错映射必将正交码字映射到正交状态，因此这些不同的子空间必为原来码空间的保形版本，这样就能使其从差错中恢复。

量子纠错理论假定

- 我们仅只作两个很宽泛的假定：噪声由量子运算 ε 所描述，整个纠错方法由我们称之为纠错运算的一个保迹量子运算 R 承担。这个纠错运算把我们上面称为差错检测和恢复的两个步骤合并，为确保纠错是成功的，我们要求对任何状态 ρ，其支集位于码空间 C 中，有：

$$(R \circ \varepsilon)(\rho) \propto \rho \tag{5}$$

- 量子纠错条件是一个简单方程组，它们可被检验以确定量子纠错码是否能对抗特殊类型的噪声 ε。我们将应用这些条件来构造大量的量子码，并将研究量子纠错码的一些普遍性质。

量子纠错条件

- 令 C 为一个量子码，令 P 为到 C 的投影算子。设 ε 为具有运算元 $\{E_i\}$ 的量子运算。
- 则纠正 C 上 ε 的纠错运算 R 存在的充分必要条件为，对某个复数 Hermite 矩阵 α 成立：

$$PE_i^\dagger E_j P = \alpha_{ij} P \tag{6}$$

- 我们称运算元 $\{E_i\}$ 为噪声 ε 的差错，且如果这样一个 $\mathfrak{R}$ 存在，我们就说 $\{E_i\}$ 组成一个可纠正的差错集合。

差错离散化

- 定理：设 C 为量子码，R 为符合量子纠错条件的纠错运算，用以从具有算子元 $\{E_i\}$ 的噪声过程中恢复。设 F 为具有运算元 $\{F_j\}$ 的量子运算，运算元 $\{F_j\}$ 为 E_i 的线性组合，即对某个复数矩阵 m_{ji} 有 $F_j = \sum_i m_{ji} E_i$。那么，纠错运算 R 也可对码 C 上的噪声过程 F 的作用来进行纠正。
- 由此，一噪声过程 ε，其运算元由这些差错算子 $\{E_i\}$ 的线性组合而成，都将通过恢复运算 R 可被纠正。
- 按此观点，设 ε 为作用于单量子比特上的量子运算。那么，其每个运算元 $\{E_i\}$ 都可以被写成为 Pauli 矩阵 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的线性组合。

CSS 码

- 设 C_1 和 C_2 为 $[n, k_1]$ 和 $[n, k_2]$ 经典线性码，使有 $C_2 \subset C_1$ 且 C_1 和 $C_2^{\perp}$。两者可纠正 $k_1 - k_2$ 个差错。通过下面的构造，我们将要定义能纠正 t 个量子比特上差错的一个 $[n, k_1 - k_2]$ 量子码 $\mathrm{CSS}(C_1, C_2)$。即 C_2 上 C_1 的 CSS 码。
- 设 $x \in C_1$ 为 C_1 中的任一码字，那么，我们就定义量子状态 $|x + C_2\rangle$ 为：

$$|x + C_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |x + y\rangle \tag{7}$$

- 这样构造出的 $\mathrm{CSS}(C_1, C_2)$ 是一个 $[n, k_1 - k_2]$ 量子纠错码，它能来纠正最多 $k_1 - k_2$ 个比特上的任意差错。

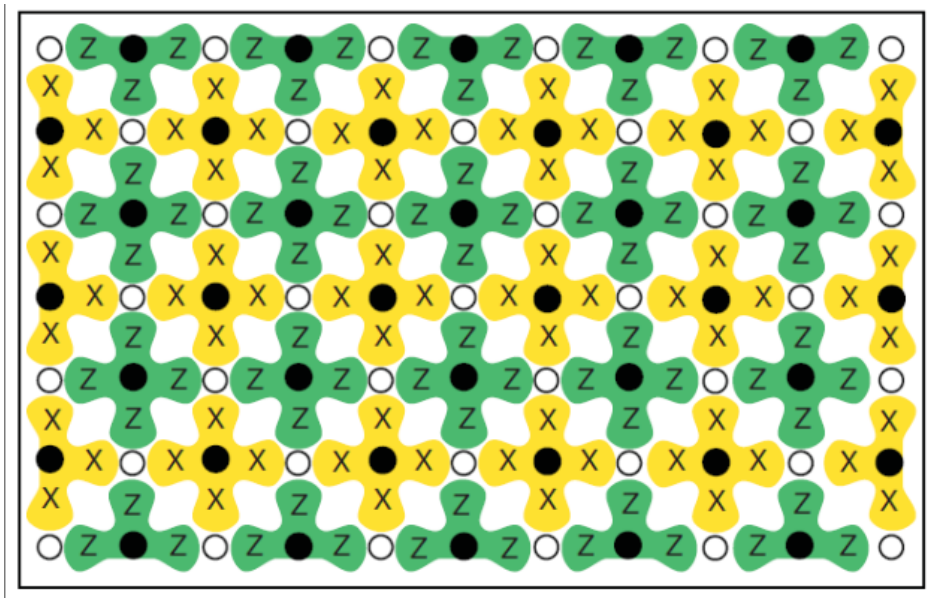
稳定子

- 设 S 为 G_n 的一个子群，定义 V_S 为由 S 的每个元所固定的 n 量子比特状态的集合。V_S 为由 S 所稳定的向量空间。
- 若 V_S 的每个元为在 S 中元的作用下是稳定的，则 S 被称为空间 V_S 的稳定子。
- 如果 G 的每个元都可被写为序列 $g_1, \cdots, g_l$ 的元的一个乘积，则群 G 中的一组元 $g_1, \cdots, g_l$ 即生成群 G，写为 $G = \langle g_1, \cdots, g_l \rangle$
- 大小为 $|G|$ 的一个群 G 具有最多 $\log(|G|)$ 个的一组生成元。
- 为检测一个特定的向量可用群 S 来稳定，我们只需要检验向量可用 S 的生成元稳定。

稳定子

- 并非 Pauli 群的任一子群 S 都可被用作非平凡向量空间的稳定子。为使 S 稳定一个非平凡向量空间 V_S，S 必须满足两个必要条件：
  1. S 的元可对易
  2. $-I$ 不是 S 的一个元

Surface code 的构造

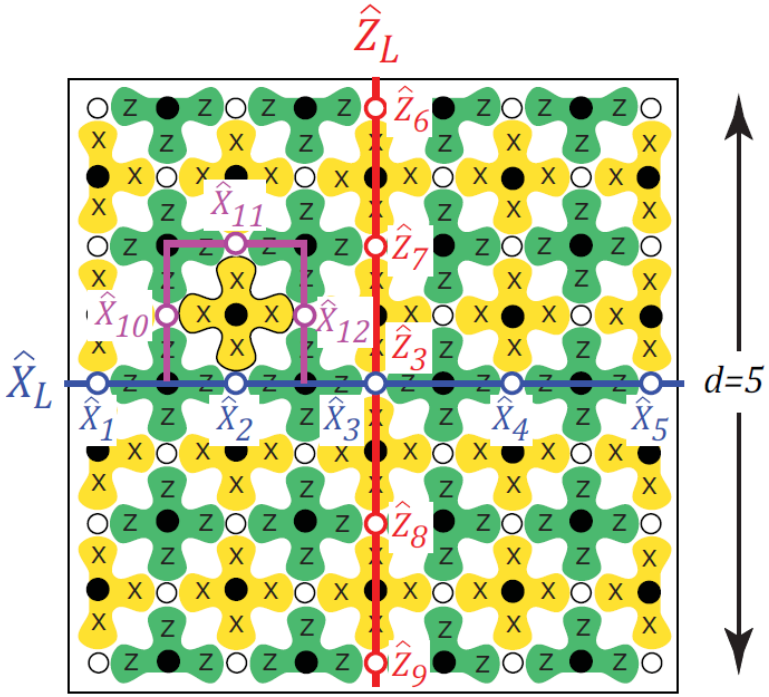


- Surface code 中的量子比特在一个平面上排布，白色为 data qubit，黑色为 measure qubit。
- measure qubit 分为 X 和 Z 两种，分别对它四周的 data qubit 做 X 或 Z 测量。
- 这些测量对应的可观测量就是该稳定子码对应的稳定子群 S 的生成元（符号取决于测量结果）。

单比特错误

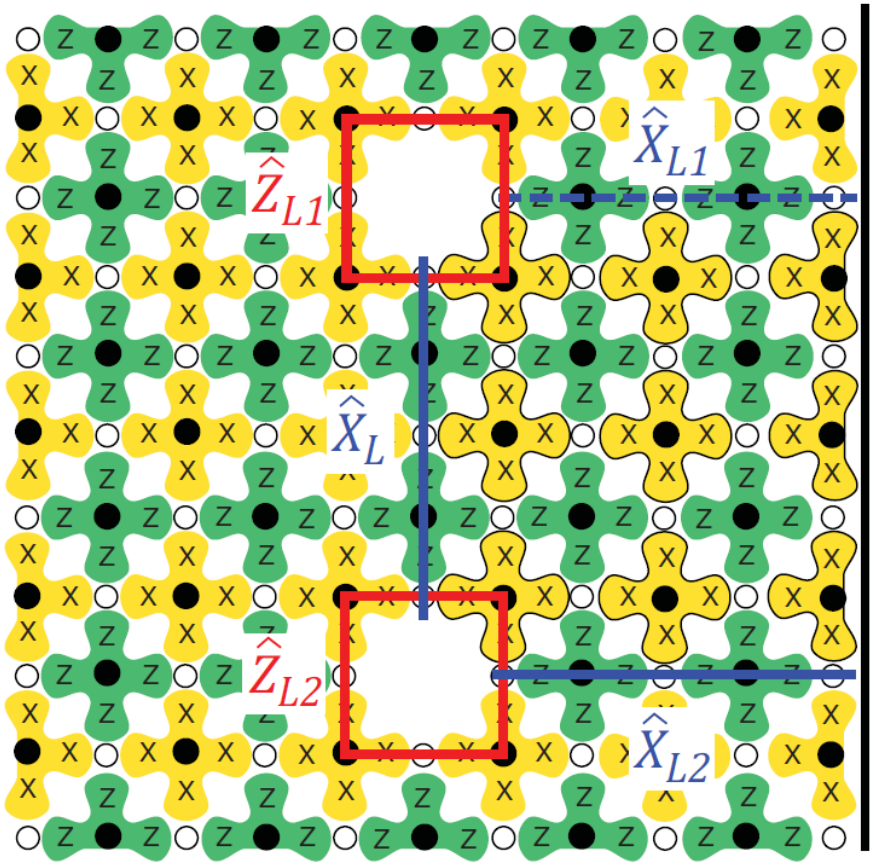
- 此处仅考虑 Pauli 错误。
- 若在某个 data qubit 上出现了 X 错误，则与其相邻的两个 Z-measure qubit 的测量结果会发生翻转，十分容易据此定位错误。
- 如果是某个 measure qubit 上出现 X 错误，注意到这样的错误最多影响一轮测量的一个测量结果，很容易与上面的错误区分。
- 对于 Z 错误，也可以如此分析。
- Surface code 可以有效抵抗单比特错误。

定义 X_L 和 Z_L 算子



- 可以验证，沿着上图蓝（红）线，在经过的 data qubit 上作用 $X(Z)$，定义了 $X_L(Z_L)$）算子。
- 这样定义的逻辑算子在乘上一个 S 中的元素的意义下唯一，例如上图沿着紫线定义的 X_L' 算子。

基于缺陷的 Surface code

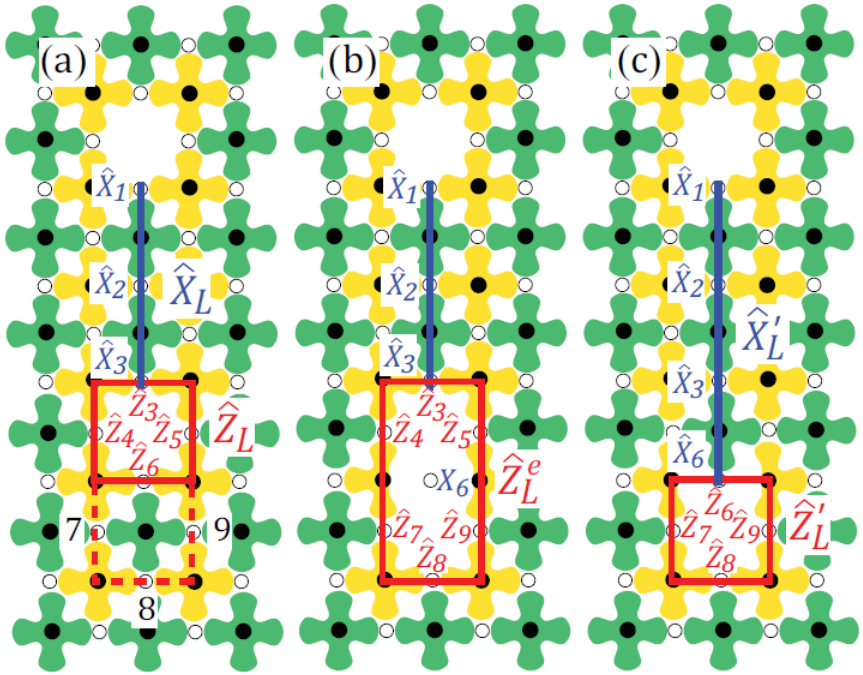


- 关闭两个 $X(Z)$-measure qubit，称为缺陷，按图索骥就可以定义这种编码下的逻辑算子。

基于缺陷的 Surface code

- 优点：
  1. 算子的定义不依赖平面边界，原来需要有两个 X-边界和两个 Z-边界。
  2. 减少了逻辑算子实际作用在 physical qubit 上的算子数量。
  3. 方便进行测量和初始化。
  4. 可以通过 topological braid transformation 来定义 *CNOT* 操作。
- 缺点：
  1. 纠错码的距离 d 减小了，仅为 4。4 个 data qubit 上的 Z 错误就无法通过测量分辨（但是可以通过增大缺陷的“洞”来解决）。

移动缺陷

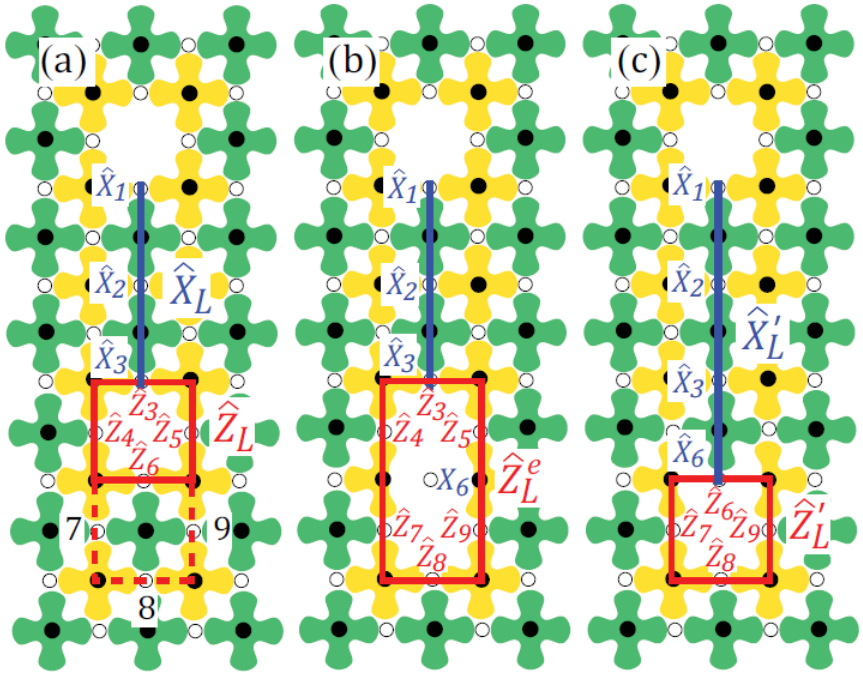


- （a）到（b），先关闭一个 measure qubit，进行一轮测量，新的逻辑算子有如下变化：

$$Z_L := Z_3Z_4Z_5Z_6 \to Z_L^e := Z_3Z_5Z_9Z_8Z_7Z_4 \tag{8a}$$

$$X_L := X_1X_2X_3 \to X_L' := X_1X_2X_3X_4 \tag{8b}$$

移动缺陷



- （b）到（c），打开上面的一个 measure qubit，再进行一轮测量，则逻辑算子有如下变化：

$$Z_L^e \to Z_L' := Z_6 Z_7 Z_8 Z_9 \tag{9}$$

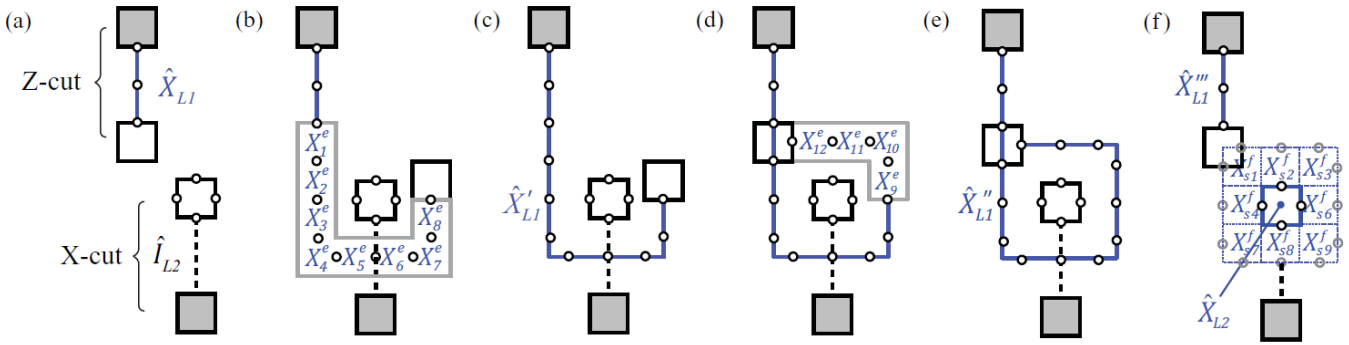
注意

- 新得到的逻辑算子可能在符号上与原来的逻辑算子不一样，这取决于测量的结果，记原来的逻辑量子态在新编码下的表示为 $|\psi'\rangle$，对 X_6 和 (b) 中 Z_L^e 的测量结果分别为 P_X 和 P_Z，则变换的结果为：

$$|\psi\rangle \to X_L'^{P_Z} Z_L'^{P_X} |\psi'\rangle \tag{10}$$

- 这样的单比特的移动也可以推广到多个比特。

CNOT 的构造



- 一个平面上有着 X 和 Z 缺陷表示的两个 logical qubit。
- 分两步，让一个 Z-缺陷绕着一个 X-缺陷移动一圈，等效于 *CNOT*，由其在逻辑算子上的共轭作用验证。

简介

- 基于上述提到的稳定子编码，可以扩展到一种更一般的形式——子系统编码，形式化地来说，将量子系统的希尔伯特空间加以分解

$$\mathcal{H} = C \oplus C^{\perp} = A \otimes B \oplus C^{\perp} \tag{11}$$

其中将信息存储在 A 上，而 B 上的错误则可以忽略，C 的数学描述和上述提到的稳定子描述完全相同。

- 该方法的新颖性在于，A 和 B 的分离能将信息存储和错误纠正部分分解。拓宽了量子纠错的研究。

构造

- 定义作用在 n 比特空间上的泡利算子集合为 P，恰当地选择其中 2n 个泡利算子使其满足：

$$[X_i, Z_j] = 2X_i Z_j \delta_{i,j} \tag{12}$$

- 定义 $k = n - r$ 比特的编码空间，将其中角标小于等于 r 的元素用 S_i 来代替，进而以 S 的元素生成稳定子群：

$$C(S) = \left\langle iI, S_1, \ldots, S_r, X'_{r+1}, \ldots, X'_n, Z_{r+1}, \ldots, Z_n \right\rangle \tag{13}$$

- 再次选择 $q = n - r$ 将该群分离，分别得到逻辑群和测量群，从而将 C 空间分离：

$$\mathcal{L}_b := \left\langle X'_{r+q+1}, \ldots, X'_n, Z'_{r+q+1}, \ldots, Z'_n \right\rangle \longrightarrow A \tag{14a}$$

$$\mathcal{G} := \left\langle iI, S, X'_{r+1}, \ldots, X'_{r+q}, Z'_{r+1}, \ldots, Z'_{r+q} \right\rangle \longrightarrow B \tag{14b}$$

纠错条件

- 由于不需要关心 B 空间的错误，量子纠错条件需要加以修正，其与经典量子纠错对比如下：

经典量子纠错	子系统量子纠错
$\left\langle i \middle\| E_a^\dagger E_b \middle\| j \right\rangle = \delta_{i,j} c_{a,b}$	$\left\langle i \middle\| \otimes \langle k \middle\|) E_a^\dagger E_b (\middle\| j \right\rangle \otimes \middle\| l \right\rangle) = \delta_{i,j} m_{a,b,k,l}$

- 其中，i,k 量子的张量积为 A,B 希尔伯特空间张量积的基，由于只需在 A 空间中进行编码，需要修正纠错条件。

Bacon-Shor 编码

- 我们以 Bacon-Shor 编码为例。在该实例中，考虑二维晶格算子量子纠错，使用一个二维的晶格来存储以及纠错一个量子比特的信息。
- 先将二维坐标一一映射到泡利算符，代表所有二维泡利错误的情况：

$$P(a,b) = \prod_{i,j=1}^{n} X_{i,j}^{a_{i,j}} Z_{i,j}^{b_{i,j}} = \prod_{i,j=1}^{n} \begin{cases} X_{i,j} & \text{if } a_{i,j} = 1 \text{ and } b_{i,j} = 0 \\ Z_{i,j} & \text{if } a_{i,j} = 0 \text{ and } b_{i,j} = 1 \\ -iY_{i,j} & \text{if } a_{i,j} = 1 \text{ and } b_{i,j} = 1 \end{cases} \tag{15}$$

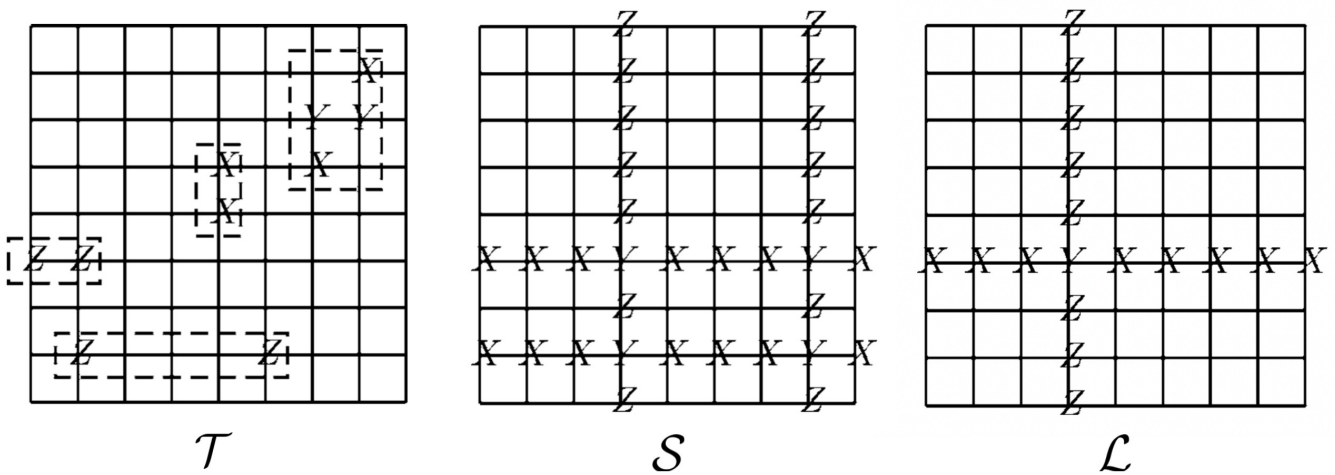
- 其中使用了泡利算符恒等式：

$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -iY \tag{16}$$

算子构造

- 二维晶格的数学形式以及图例如下：

$$
\begin{cases}
\mathcal{T} = \left\{ (-1)^{\phi} P(a,b) \mid \phi \in \mathbb{Z}_2, \bigoplus_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0, \bigoplus_{j=1}^{n} b_{i,j} = 0 \right\}, \langle X_{i,j} X_{i+1,j}, Z_{j,i} Z_{j,i+1} \rangle \\
\mathcal{S} = \left\{ P(a,b) \middle| \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = 0, \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} b_{i,j} \right) = 0 \right\}, \left\langle \prod_{i=1}^{n} X_{j,i} X_{j+1,i}, \prod_{i=1}^{n} Z_{i,j} Z_{i,j+1} \right\rangle \\
\mathcal{L} = \left\{ (-1)^{\phi} P(a,b) \mid \phi \in \mathbb{Z}_2, \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = 1, \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} b_{i,j} \right) = 1 \right\}
\end{cases}
$$



二维晶格子系统分离

- S 算子可以交换，则将大希尔伯特空间进行分解：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{s^X, s^Z} \mathcal{H}_{s^X, s^Z} \tag{17}$$

- T 和 L 中的算子满足对易关系，又可作如下分解：

$$H = \bigoplus_{s^X, s^Z} \mathcal{H}^{\mathcal{T}}_{s^X, s^Z} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{s^X, s^Z} \tag{18}$$

- 将信息编码于后者，与 T 算子相关的错误（列为偶数个 X，行为奇数个 Z）的情形则不用考虑
- S 有 2(n-1) 个生成元，问题转化为两个一维重复编码：

$$\mathcal{S} = \left\langle \prod_{i=1}^{n} X_{j,i} X_{j+1,i}, \prod_{i=1}^{n} Z_{i,j} Z_{i,j+1} \right\rangle \tag{19}$$

三维晶格子系统

- 三维晶格算子量子纠错，与二维类似，在三维层面上加以修改，使用相同的手段构造出相应的算子群：

$$\mathcal{T}_3, \mathcal{S}_3, \mathcal{L}_3 \tag{20}$$

- 利用相同的方式可以将错误都转换到整个大希尔伯特空间上的一个子集中，部分错误对其没有影响，剩余的错误则可以同时在每个维度上进行量子测量并加以修正。
- 在现实世界中该方法可以通过在一个立方体晶格上定义哈密顿量实现：

$$H = -\lambda \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k,i,j} X_{k+1,i,j} + X_{i,k,j} X_{i,k+1,j} + Z_{i,k,j} Z_{i,k+1,j} + Z_{i,j,k} Z_{i,j,k+1})$$

抗噪性能

- 随机噪声：将上述二维晶格子系统纠错编码应用于实验室量子态，不需要相应的纠缠附属态，实现最近两比特测量。找到对抗随机噪声下更低的量子准确极限 I，相比之前下界提高一个数量级。

$$I = 1.94 \times 10^{-4}$$

- 非随机噪声：在泡利错误 X 和 Z 有偏向的情形下，子系统编码有更好的表现，相关的计算表明，若

$$p_Z/p_X \approx 0.02$$

容错率能达到当今经典计算机的效果 10^{-17}

其他工作

研讨内容

- 在课程本身的作业要求之外，我们对课程所讲述材料与推荐阅读书籍也进行了深入学习，并完成了量子编程语言笔记，课堂笔记与《Quantum Computation and Quantum Information》习题的整理，相应的文件请参考 此链接。

课程开源

- 出于对于课程本身的热爱与量子计算领域的浓厚兴趣，我们将课程在 REKCARC-TSC-UHT 平台进行了开源分享，希望以此帮助以后选修本门课程的同学克服量子计算理论部分学习的困难，并鼓励更多同学产生对前景广阔的量子计算领域的兴趣，共同促进这一领域的发展。

参考文献

1. Nielsen, M.A and Chuang, I. L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, (2010)
2. A. G. Fowler, et al., Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation, Phys. Rev. A 86, 032324 (2012)
3. C. Horsman, et al., Surface code quantum computing by lattice surgery, New J. Phys. 14123011 (2012)
4. H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, Optimal resources for topological two-dimensional stabilizer codes: Comparative study, Phys. Rev. A 76, 012305 (2007)
5. Y. Tomita and K. M. Svore, Low-distance surface codes under realistic quantum noise, Phys. Rev. A 90, 062320 (2014)

致谢

Thanks!

- 感谢应明生教授与季铮锋教授的倾情讲授与对量子计算领域前沿的相关引导。
- 感谢助教老师郭敬哲的指点与在作业上的帮助。
- 最后，感谢交叉信息学院《量子计算》课程的助教老师为我们提供论文资源与研究展望。

附录一：Shor 码的保护效果证明

1. 设一个任意类型的噪声只出现在第一量子比特上。用保迹量子运算 ε 来描述噪声。设噪声作用前编码后的量子比特状态为：$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$，$\varepsilon$ 展开为具有运算元 $\{E_i\}$ 的算子和表示，则噪声作用以后这个状态为：

$$\varepsilon(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i E_i|\psi\rangle\langle\psi|E_i^\dagger \tag{21}$$

2. 为分析纠错作用，将纠错作用集中到这个和式的一个单项上，例如 $E_i|\psi\rangle\langle\psi|E_i^\dagger$。作为第一量子比特上的一个单独的算子 E_i，可以被展开为单位阵 I、比特翻转 X_1、相位翻转 Z_1 以及组合位与相位翻转 X_1Z_1 的一个线性组合：

$$E_i = e_{i0}I + e_{i1}X_1 + e_{i2}Z_1 + e_{i3}X_1Z_1 \tag{22}$$

附录一：Shor 码的保护效果证明

1. 非归一化量子状态 $E_i|\psi\rangle$ 由此写作 $|\psi\rangle, X_1|\psi\rangle, Z_1|\psi\rangle, X_1Z_1|\psi\rangle$ 四项的叠加。
2. 测量差错症状会将这个叠加结果坍塌为四个状态 $|\psi\rangle, X_1|\psi\rangle, Z_1|\psi\rangle, X_1Z_1|\psi\rangle$ 之一，恢复过程由随后通过作用适当的逆运算而执行，并获得最终状态 $|\psi\rangle$。
3. 这些对于所有其他运算元 E_i 也是正确的。因此，纠错会使原来状态 $|\psi\rangle$ 恢复，尽管事实上第一量子比特上的差错是任意的。

这是关于量子纠错的一个基本和深刻的事实，通过只纠正差错的一个离散集，量子纠错码就会自动地纠正要比这个离散集明显大得多的连续差错类。

附录二：CSS 码具体阐释

$$|x + C_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |x + y\rangle \tag{23}$$

- “+”为按比特的模 2 方式加。设 x' 为 C_1 的一个元，使有 $x - x' \in C_2$。那么，$|x + C_2\rangle = |x' + C_2\rangle$。状态 $|x + C_2\rangle$ 只依赖于 x 所在的陪集 C_1/C_2，这同时解释了 $|x + C_2\rangle$ 的陪集符号。
- 进而，如果 x 和 x' 属于 C_2 的不同陪集，那么不存在 $y, y' \in C_2$，使得 $x + y = x' + y'$，因而 $|x + C_2\rangle$ 和 $|x' + C_2\rangle$ 为正交状态。
- 量子码 $\mathrm{CSS}(C_1, C_2)$ 就定义为由所有 $x \in C_1$ 的状态 $|x + C_2\rangle$ 所张成的向量空间。C_1 中 C_2 的陪集的数目为 $|C_1|/|C_2|$，所以 $\mathrm{CSS}(C_1, C_2)$ 的维数为 $|C_1|/|C_2| = 2^{k_1 - k_2}$，因此 $\mathrm{CSS}(C_1, C_2)$ 是一个 $[n, k_1 - k_2]$ 量子码。