运动学——Forward Kinematics

描述空间中位置变化，Forward 由参数求位置

一、机器人运动两种方式

1. 平移 translation ${}^{1}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{p} + {}^{1}\mathbf{t}$
2. 旋转 Rotation ${}^{1}\mathbf{p} = {}^{1}_{0}\mathbf{R}\,{}^{0}\mathbf{p}$

旋转矩阵$\mathbf{R}$为正交阵，有三个约束条件：1. 每一行为单位向量；2. 任意两行点积为0；3. 行列式值为1。这样$\mathbf{R}$ 只改变向量的方向，不改变长度。$||{}^{1}\mathbf{p}|| = ||{}^{0}\mathbf{p}||$三个条件实际上就是标准正交阵的定义。

二、旋转矩阵推导方法

三、 DH变换

空间变换原来需要6个参数，降到4个

步骤1：一个joint一个frame，为每个frame选取z，x坐标轴方向。

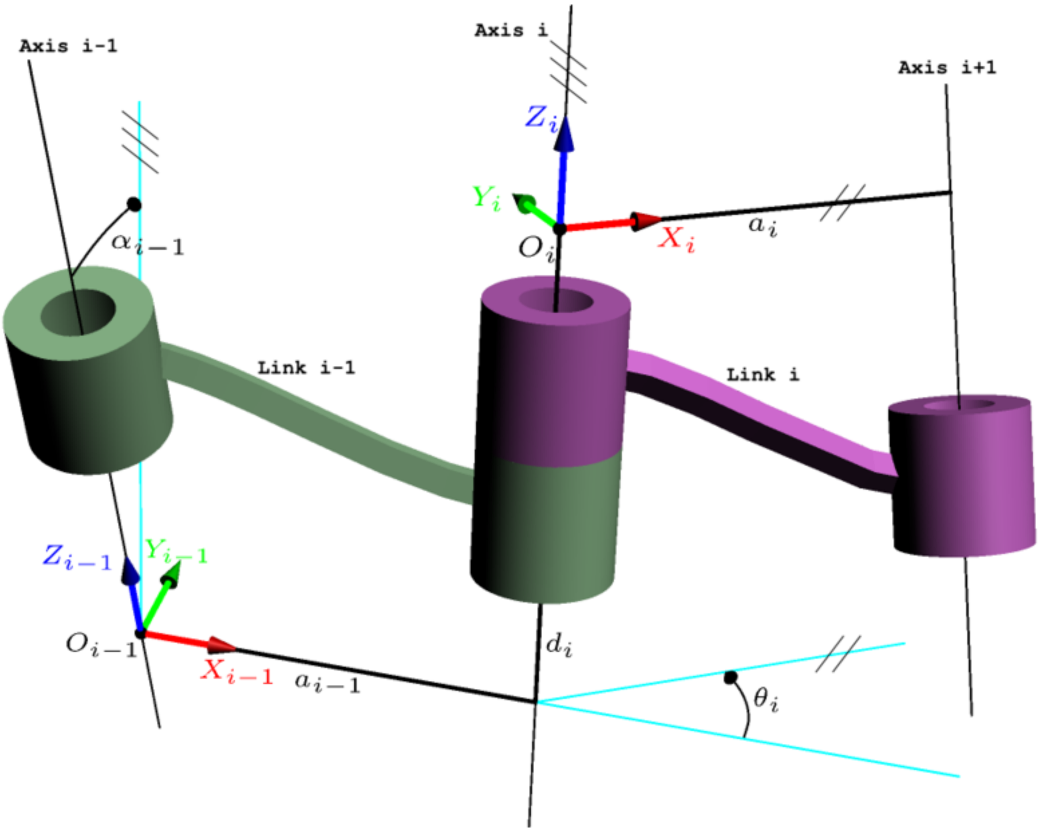
$$\begin{array}{ll} z\text{：} & 1.\text{若是旋转轴，右手定则确定}z\text{轴方向。} \\ & 2.\text{滑动轴，}z\text{沿着滑动方向} \\ x\text{：} & x_{i-1}\text{垂直于}z_{i-1}, z_i\text{，因为}DH\text{定义}x\text{方向为两条}z\text{轴间最短距离} \end{array}$$

步骤2：定4个参数

$$\begin{array}{ll} a_{i-1} & \text{沿}x_{i-1}\text{平移} \\ \alpha_{i-1} & \text{绕}x_{i-1}\text{旋转} \\ \hline d_i & \text{沿}z_i\text{平移} \\ \theta_i & \text{绕}z_i\text{旋转，顺时针为正方向，与通常相反} \end{array}$$

$${}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & \underbrace{0}_{\text{不可以绕}y\text{轴旋转}} & \alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}\cdot d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}\cdot d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \triangleq \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

${}^{x}\mathbf{p} = {}^{x}_{y}\mathbf{T}\cdot\,{}^{y}\mathbf{p}$ 指y在x中的坐标。将多个$\mathbf{T}$依次迭代相乘，得到机械臂末端在原点坐标系中的坐标。

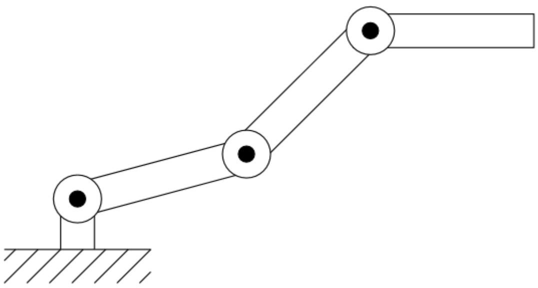


特殊情况

一般情况下，空间中两条z轴既不平行也不相交

1. 当多条z轴平行：有无数条x_i可选，最好让x_i和x_{i-1}共线，这样$d_i = 0$
2. 当两条z轴相交：x_{i-1}必须同时垂直于z_{i-1}和z_i，因此$\mathbf{x}_{i-1} = \frac{\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i}{||\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i||}$

平面机器人



平面机器人可以一眼看出末端坐标，不需要写标准DH变换矩阵

$$\begin{aligned} {}^0_e\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ \theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_1 \cos\theta_1 \\ l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) + l_1 \sin\theta_1 \\ \theta_3+\theta_2+\theta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

三个坐标分别为x, y, θ，对应平面机器人三个自由度：在X-Y平面内平移，以及末端360°旋转

四、Jacobian 矩阵

物理意义：反映了在某个位置，joint变换导致坐标位置怎样变换

1. 定义

$$J(\mathbf{q})=\frac{\partial \overrightarrow{p}(\theta)}{\partial \overrightarrow{\theta}}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \cdots & \frac{f_1}{\partial \theta_6} \\ \frac{f_2}{\partial \theta_1} & & & & \\ \frac{f_3}{\partial \theta_1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{f_6}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{f_6}{\partial \theta_6} \end{bmatrix}$$

求出的是在原点坐标系下的Jacobian矩阵，记作 ${}^0\mathbf{J}$

平面机械臂的Jacobian矩阵：

$$^0\mathbf{J}(\theta)=\begin{pmatrix} -l_3s_{123}-l_2s_{12}-l_1s_1 & -l_3s_{123}-l_2s_{12} & -l_3s_{123} \\ l_3c_{123}+l_2c_{12}+l_1c_1 & l_3c_{123}+l_2c_{12} & l_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 速度推导

另外，Jacobian矩阵也可以由速度得出

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix}=\mathbf{J}\cdot\dot{\theta}=\begin{pmatrix} \mathbf{J}_v \\ \hline \mathbf{J}_\omega \end{pmatrix}\dot{\theta}$$

假设有6个joint：

$$^0_e\mathbf{v}=\begin{pmatrix} k_1\dot{\theta}_1+k_2\dot{\theta}_2+\cdots+k_6\dot{\theta}_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}=\mathbf{J}_v\dot{\theta}$$
$$^0_e\omega=\begin{pmatrix} r_1\dot{\theta}_1+r_2\dot{\theta}_2+\cdots+r_6\dot{\theta}_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}=\mathbf{J}_\omega\dot{\theta}$$

速度递推公式：(angular&linear)

$$^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1}+{}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\omega_i$$

> ${}^i\hat{Z}_n$：*Z_n在坐标系$\{1\}$中的方向*

$$^{i+1}v_{i+1}={}^{i+1}_{i}\mathbf{R}({}^iv_i+{}^i\omega_i\times{}^ip_{i+1})$$

求出的是在末端frame的Jacobian矩阵，记作 ${}^n\mathbf{J}$

角速度的递推式可以转换为通式：

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\omega_{i} \\
&= {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot[\,{}^{i}\hat{Z}_{i}\cdot\dot{\theta}_{i} + {}^{i}_{i-1}\mathbf{R}\cdot{}^{i-1}\omega_{i-1}] \\
&= {}^{i+1}\mathbf{R}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\hat{Z}_{i}\cdot\dot{\theta}_{i} + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\,{}^{i}_{i-1}\mathbf{R}}_{{}^{i+1}_{i-1}\mathbf{R}}\cdot{}^{i-1}\omega_{i-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

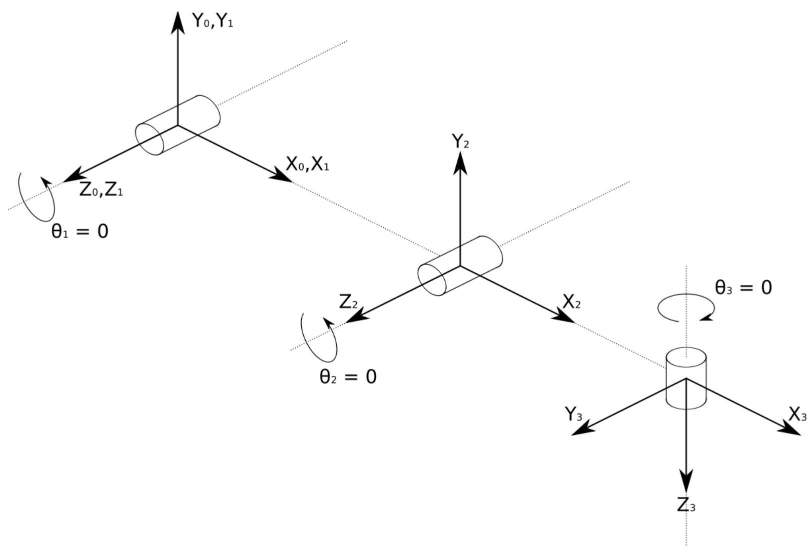
$$
{}^{n}\omega_{n} = {}^{n}_{n}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n} + {}^{n}_{n-1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + {}^{n}_{2}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{2} + {}^{n}_{1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{1}
$$

即Jacobian矩阵的后三行（DoF=6时）。也可以方便求出末端在原点坐标系中的矩阵（当然也仅限后三行，线速度没有通式）

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\omega_{n} &= {}^{0}_{n}\mathbf{R}\,{}^{n}\omega_{n} \\
&= {}^{0}_{n}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n} + {}^{0}_{n-1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + {}^{0}_{2}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{2} + {}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{1} \\
&= (\,{}^{0}\hat{Z}_{1}\quad {}^{0}\hat{Z}_{2}\quad \cdots\quad {}^{0}\hat{Z}_{n}\,)\cdot(\,\dot{\theta}_{1}\quad \dot{\theta}_{2}\quad \cdots\quad \dot{\theta}_{n}\,)^{T}
\end{aligned}
$$

所以，Jacobian矩阵的旋转部分（6自由度时，对应后三行）可以直接看出来。如果是平面机械臂，只有一个旋转自由度，它永远是$(1\ 1\ 1)$，放到空间中是$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$。如果是空间机械臂，绕X、绕Y自由度不为0。

例子：



$$
{}^{0}\mathbf{J}_{\omega} = (\,{}^{0}\hat{\mathbf{z}}_{1}\;{}^{0}\hat{\mathbf{z}}_{2}\;{}^{0}\hat{\mathbf{z}}_{3}) = \begin{pmatrix}0 & 0 & \sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0 & 0 & -\cos(\theta_1+\theta_2)\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}
$$

3. 坐标系间转换

平面坐标：

$$
{}^{0}\mathbf{J}(\theta) = {}^{0}_{3}\mathbf{R}\cdot{}^{3}\mathbf{J}(\theta) \iff {}^{3}\mathbf{J}(\theta) = \underbrace{{}^{0}_{3}\mathbf{R}^{T}}_{\equiv\mathbf{R}^{-1}}\cdot{}^{0}\mathbf{J}(\theta)
$$

空间坐标：

$$\begin{pmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{pmatrix}$$
$$\therefore\ {}^{A}\mathbf{J}(\theta) = \begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}\mathbf{R} \end{pmatrix} {}^{B}\mathbf{J}(\theta)$$

只有当$det(J) \neq 0$时才可以转换。确定奇点时，计算最后一个frame中的$|{}^{e}J(\theta)|$，算式最简便。

五、奇点 Singularity

计算det(J)=0

> *这里有一件很奇怪的事情：由于只有方阵可以求行列式，而Jacobian矩阵又$\in \mathbb{R}^{n\times m}$，就导致n必须等于m，即joints（自由度）个数必须等于坐标个数。*

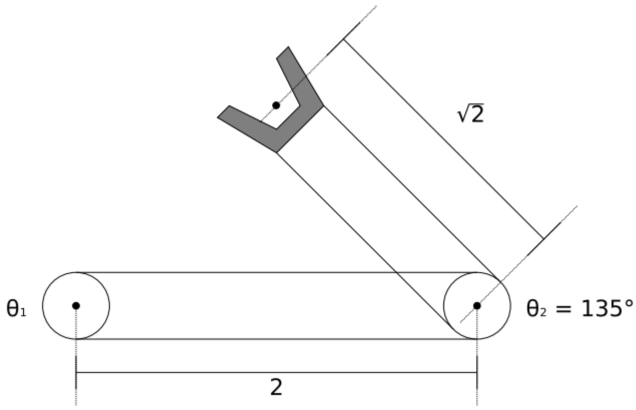
三R平面机械臂：平面机械臂本身有X-Y平面内移动 + 末端旋转共3个自由度。三个旋转轴正好对应三个自由度。

两R平面机械臂：只有两个轴，所以必须忽略末端旋转自由度。

六轴空间机械臂：6个轴正好对应空间中6个坐标——3个平移，3个旋转。

六、isotropic points

isotropic：Jacobian矩阵列之间正交，且每一列向量长度相等（不一定为1）。即$JJ^T = aI$



已知 ${}^{3}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{pmatrix}$

1. 由列之间正交得：$l_1 s_2 \cdot 0 + (l_1 c_2 + l_2) l_2 = 0 \implies c_2 = -\frac{l_2}{l_1}$
2. 由列向量长度相等得：$(l_1 s_2)^2 + (l_1 c_2 + l_2)^2 = l_2^2 \implies c_2 = -\frac{l_1}{2l_2}$

$\therefore l_1 = \sqrt{2} l_2, \theta_2 = 135^\circ$，此时 ${}^{3}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} l_2 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}$，意味着第一个joint控制第一个坐标，第二个轴控制第二个坐标，互不关联、影响，而且”力度“相同。在isotropic点，机械臂控制性能最佳。

Inverse Kinematic

逆变换——知道位置求参数$\theta = f^{-1}(\mathbf{X}_\omega)$，更难

一、牛顿法

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q}_k) && \text{泰勒展开} \\
&\equiv \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) = \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_k) && \\
&\equiv \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_k)[\mathbf{x}_d - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k)] = \mathbf{q}-\mathbf{q}_k && \mathbf{J}^{-1}\text{必须存在} \\
&\equiv \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + J^{-1}(\mathbf{q}_k)[\mathbf{x}_d - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k)] && \text{得出递推公式}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{J}^{-1}$要存在，$\mathbf{J}$只能是方阵，并且$det(J) \neq 0$

何时停止迭代？当$||x_d - f(q)|| < \epsilon$或者$||q_{k+1} - q_k|| < \epsilon$

当$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，当$m < n$时，称为redundant。此时$\mathbf{J}^{-1}$不存在，但可以计算$(J^TJ)^{-1}J^Ty = x$

劣势：在奇点处，det(J)=0（缺少自由度）。即便只是靠近奇点也很糟

优势：快

二、梯度下降法

$$
\begin{aligned}
&g(q) = \frac{1}{2}||x_d - f(q)||^2 = \frac{1}{2}[x_d - f(q)]^T[x_d - f(q)] && \text{这是一个优化问题，}g(q)\text{为损失函数} \\
&\nabla g(q) = -\underbrace{\frac{\partial f(q)}{\partial q}^T}_{\mathbf{J}(q)} \cdot [x_d - f(q)] && \\
&q_{k+1} = q_k - \alpha \nabla g(q_k) = q_k + \alpha \cdot \mathbf{J}^T(q_k)\cdot[x_d - f(q)] && \alpha\text{为一个很小的步长}
\end{aligned}
$$

优势：计算转置T而非求逆-1，方便快捷，没有奇点问题

劣势：要选取α，而且算得慢

静力学——Statics

计算机械臂不动的时候，作用在末端的力与扭矩需要各个轴出多少力，保证机械臂静止

机械臂末端收到的力是6维的：$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} {}^if \\ {}^in \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$

递推公式：(力) ${}^if_i = {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1}$，（扭矩）${}^in_i = {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{i+1} \times {}^if_i$

算出的力，扭矩均$\in \mathbb{R}^{3\times 1}$，各自有三个分量。但由于旋转轴只能绕z轴转，滑动轴只能沿z轴滑，只有z轴上是驱动力/扭矩。不沿z轴的力、扭矩都直接加在刚性部件上，在理论计算中不需要考虑（实际工程学中用于检验强度）。

$\therefore \tau_i = {}^in_i \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$或$\tau_i = {}^if_i \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jacobian矩阵可以直接联系末端受力与每个轴受力：

$$
\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{\tau} = {}^n\mathbf{J}^T\ {}^n\mathcal{F} = {}^0\mathbf{J}^T\ {}^0\mathcal{F}
$$

1. ${}^n\mathcal{F}$是已知的， 而${}^0\mathbf{J}$比较好求。但它们并不对应同一个frame。
2. ${}^0\mathcal{F} = {}^0_n\mathbf{R} \cdot {}^n\mathcal{F}$

3. ${}^{0}_{n}\mathbf{R} = \prod {}^{i}_{i+1}\mathbf{R}$或者 ${}^{0}_{n}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} {}^{0}\hat{X}_4 & {}^{0}\hat{Y}_4 & {}^{0}\hat{Z}_4 \end{pmatrix}$

动力学——Dynamics

由于连杆自身也有质量，机械臂动起来后会产生惯性力，作用到下一个连杆上。动力学=运动学+静力学

一、牛顿——欧拉公式

速度递推公式方向：原点坐标系→末端，因此称为Forward

力/扭矩递推公式方向：末端→原点坐标系，Backward

$$
\text{旋转轴}\begin{cases}
{}^{i+1}\omega_{i+1} = \underbrace{{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \cdot \dot{\theta}_{i+1}}_{\Downarrow} + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^{i}\omega_i}_{\Downarrow} \\
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \cdot \ddot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^{i}\dot{\omega}_i + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot [\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}] \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}}_{\text{先叉乘再点乘}} \\
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}(\,{}^{i}\dot{v}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}p_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times [\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}p_{i+1}])
\end{cases}
$$

$$
\text{滑动轴}\begin{cases}
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^{i}\omega_i \\
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^{i}\dot{\omega}_i \\
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R}(\,{}^{i}\dot{v}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}p_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times [\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}p_{i+1}])}_{\text{与旋转轴公式相同}} + \underbrace{2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1}} + \underbrace{\ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1}}
\end{cases}
$$

每条连杆质心速度：

$$
{}^{i}\dot{v}_{C_i} = {}^{i}\dot{v}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}p_{C_i} + {}^{i}\omega_i \times [\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}p_{C_i}]
$$

计算每条连杆由于加速度受到的力/力矩：

$$
\begin{array}{r|l}
F = ma \implies & {}^{i}F_i = m \cdot {}^{i}\dot{v}_{C_i} \\
N = I\alpha = I_C\alpha + \underbrace{\omega \times I_C\omega}_{\text{平行轴定理???}} \implies & {}^{i}N_i = {}^{C_i}I_i \cdot {}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{C_i}I_i \cdot {}^{i}\omega_i
\end{array}
$$

计算每个轴的受力与扭矩：

$$
\begin{aligned}
{}^{i}f_i &= {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \\
{}^{i}n_i &= \underbrace{{}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}n_{i+1}}_{\text{与静力学相同}} + \underbrace{{}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1}}_{\text{略微不同，因为 } {}^{i}f_i \neq {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1}} + \underbrace{{}^{i}N_i + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i}_{\text{新增两项}}
\end{aligned}
$$

二、MVG形式

$$
\begin{aligned}
\tau =& \underbrace{M(\theta)\ddot{\theta}}_{\text{一定包含}\ddot{\theta}} + \underbrace{V(\theta,\dot{\theta})}_{\text{一定包含}\dot{\theta}} + \underbrace{G(\theta)}_{\text{一定包含}g} \\
=& M(\theta)\ddot{\theta} + B(\theta)\underbrace{[\dot{\theta}_i \cdot \dot{\theta}_j]}_{i\neq j,\ \text{长度}C_n^2} + C(\theta)\dot{\theta}^2 + G(\theta)
\end{aligned}
$$

三、拉格朗日势能法

每一条连杆都有动能K与势能U

$k_i = \frac{1}{2}m||\overrightarrow{v}_C||^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}^T I \overrightarrow{\omega}$，$u_i = -mgh = -m\overrightarrow{g}^T \overrightarrow{P}_C$

> *线速度动能是平方项，因此只与向量长度有关——在各个坐标系中都相同。索性计算最简单的 ${}^0v_{c_i} = \frac{d}{dt}{}^0P_{C_i}$，只要知道质心在原点坐标系中的位置即可。*
>
> *角速度动能ω_i照常算，幸好计算本来就比较简单。*

整个系统的动能$k_{总} = \sum k_i$，势能$u_{总} = \sum u_i$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial k_{总}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial k_{总}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial u_{总}}{\partial \theta_i}$$