运动学——Forward Kinematics

描述空间中位置变化，Forward 由参数求位置

一、机器人运动两种方式

1. 平移 translation ${}^{1}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{p} + {}^{1}\mathbf{t}$
2. 旋转 Rotation ${}^{1}\mathbf{p} = {}^{1}_{0}\mathbf{R}\,{}^{0}\mathbf{p}$

旋转矩阵$\mathbf{R}$为正交阵，有三个约束条件：1. 每一行为单位向量；2. 任意两行点积为0；3. 行列式值为1。这样$\mathbf{R}$ 只改变向量的方向，不改变长度。$||{}^{1}\mathbf{p}|| = ||{}^{0}\mathbf{p}||$三个条件实际上就是标准正交阵的定义。

二、旋转矩阵推导方法

(一)、由欧拉角推导

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x \\ &= \underbrace{\mathbf{R}_z(\gamma)}_{\substack{\text{绕第二次}\\ \text{变换后}z\text{轴}}} \cdot \underbrace{\mathbf{R}_y(\beta)}_{\substack{\text{绕第一次}\\ \text{变化后}y\text{轴}}} \cdot \underbrace{\mathbf{R}_x(\alpha)}_{\text{绕初始}x\text{轴}} \\ &= \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

按$z \to y \to x$顺序旋转

(二)、由罗德里格斯公式推导

Rodriguez formula： 绕任意向量$\overrightarrow{k}$旋转角度θ

设$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{v}$，$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2 + \sin\theta\mathbf{K}$

推导过程

三、 DH变换

空间变换原来需要6个参数，降到4个

步骤1：一个joint一个frame，为每个frame选取z，x坐标轴方向。

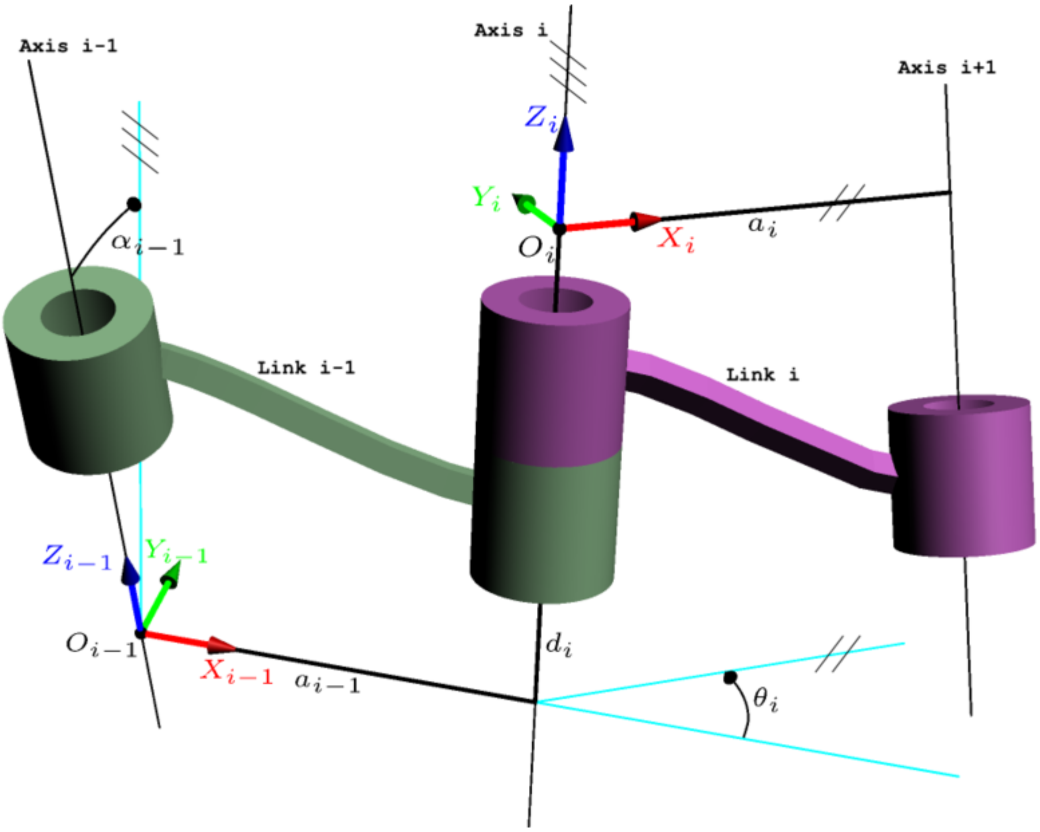
$$\begin{aligned} z\text{：} \quad & 1.\text{若是旋转轴，右手定则确定}z\text{轴方向。} \\ & 2.\text{滑动轴，}z\text{沿着滑动方向} \\ x\text{：} \quad & x_{i-1}\text{垂直于}z_{i-1}, z_i\text{，因为}DH\text{定义}x\text{方向为两条}z\text{轴间最短距离} \end{aligned}$$

步骤2：定4个参数

a_{i-1}	沿x_{i-1}平移
α_{i-1}	绕x_{i-1}旋转
d_i	沿z_i平移
θ_i	绕z_i旋转，顺时针为正方向，与通常相反

$$
{}^{i-1}_{\ i}\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & \underbrace{0}_{\text{不可以绕}y\text{轴旋转}} & \alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}\cdot d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}\cdot d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \triangleq \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

${}^{x}\mathbf{p} = {}^{x}_{y}\mathbf{T}\cdot {}^{y}\mathbf{p}$ 指y在x中的坐标。将多个$\mathbf{T}$依次迭代相乘，得到机械臂末端在原点坐标系中的坐标。

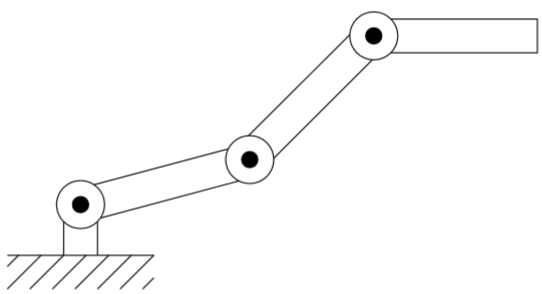


特殊情况

一般情况下，空间中两条z轴既不平行也不相交

1. 当多条z轴平行：有无数条x_i可选，最好让x_i和x_{i-1}共线，这样$d_i = 0$
2. 当两条z轴相交：x_{i-1}必须同时垂直于z_{i-1}和z_i，因此$\mathbf{x}_{i-1} = \frac{\mathbf{z}_{i-1}\times\mathbf{z}_i}{||\mathbf{z}_{i-1}\times\mathbf{z}_i||}$

平面机器人



平面机器人可以一眼看出末端坐标，不需要写标准DH变换矩阵

$$
\begin{aligned}
{}_e^0\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} l_1\cos\theta_1 \\ l_1\sin\theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ \theta_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+l_2\cos(\theta_1+\theta_2)+l_1\cos\theta_1 \\ l_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+l_2\sin(\theta_1+\theta_2)+l_1\sin\theta_1 \\ \theta_3+\theta_2+\theta_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

三个坐标分别为x, y, θ，对应平面机器人三个自由度：在X-Y平面内平移，以及末端360°旋转

四、Jacobian 矩阵

物理意义：反映了在某个位置，joint变换导致坐标位置怎样变换

1. 定义

$$
J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overrightarrow{p}(\theta)}{\partial \overrightarrow{\theta}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \cdots & \frac{f_1}{\partial \theta_6} \\ \frac{f_2}{\partial \theta_1} & & & & \\ \frac{f_3}{\partial \theta_1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{f_6}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{f_6}{\partial \theta_6} \end{bmatrix}
$$

求出的是在原点坐标系下的Jacobian矩阵，记作 ${}^0\mathbf{J}$

平面机械臂的Jacobian矩阵：

$$
{}^0\mathbf{J}(\theta) = \begin{pmatrix} -l_3 s_{123} - l_2 s_{12} - l_1 s_1 & -l_3 s_{123} - l_2 s_{12} & -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_3 c_{123} + l_2 c_{12} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. 速度推导

另外，Jacobian矩阵也可以由速度得出

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix} = \mathbf{J} \cdot \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_v \\ \hline \mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} \dot{\theta}
$$

假设有6个joint：

$$
\begin{aligned}
{}_e^0\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} k_1\dot{\theta}_1 + k_2\dot{\theta}_2 + \cdots + k_6\dot{\theta}_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{J}_v\dot{\theta} \\
{}_e^0\omega &= \begin{pmatrix} r_1\dot{\theta}_1 + r_2\dot{\theta}_2 + \cdots + r_6\dot{\theta}_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{J}_\omega\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

速度递推公式：(angular&linear)

$$
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \cdot \dot{\theta}_{i+1} + {}_i^{i+1}\mathbf{R} \cdot {}^i\omega_i
$$

> ${}^{i}\hat{Z}_n$: Z_n 在坐标系$\{1\}$中的方向

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}p_{i+1})$$

求出的是在末端frame的Jacobian矩阵，记作 ${}^{n}\mathbf{J}$

角速度的递推式可以转换为通式：

$$\begin{aligned}
{}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\omega_i \\
&= {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot[{}^{i}\hat{Z}_i\cdot\dot{\theta}_i + {}^{i}_{i-1}\mathbf{R}\cdot{}^{i-1}\omega_{i-1}] \\
&= {}^{i+1}\mathbf{R}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\cdot\dot{\theta}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\hat{Z}_i\cdot\dot{\theta}_i + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R}\,{}^{i}_{i-1}\mathbf{R}}_{{}^{i+1}_{i-1}\mathbf{R}}\cdot{}^{i-1}\omega_{i-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

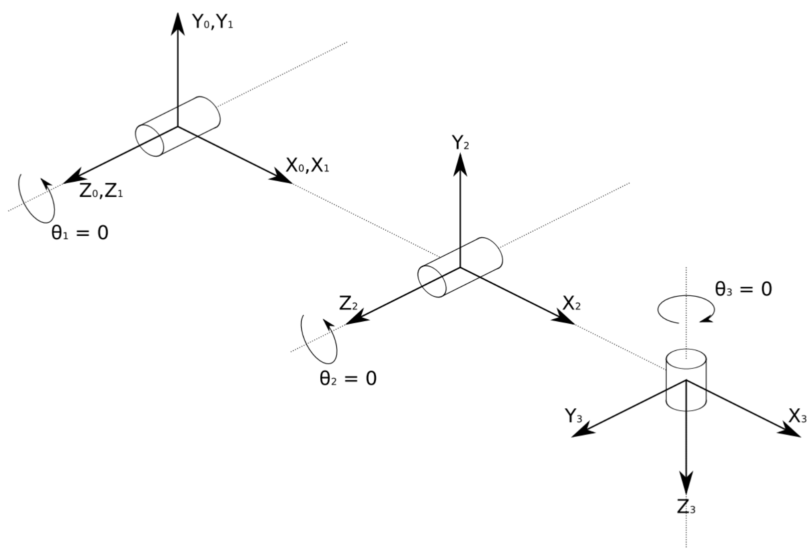
$${}^{n}\omega_n = {}^{n}_{n}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_n + {}^{n}_{n-1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + {}^{n}_{2}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_2 + {}^{n}_{1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_1$$

即Jacobian矩阵的后三行（DoF=6时）。也可以方便求出末端在原点坐标系中的矩阵（当然也仅限后三行，线速度没有通式）

$$\begin{aligned}
{}^{0}\omega_n &= {}^{0}_{n}\mathbf{R}\,{}^{n}\omega_n \\
&= {}^{0}_{n}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_n + {}^{0}_{n-1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_{n-1} + \cdots + {}^{0}_{2}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_2 + {}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\dot{\theta}_1 \\
&= \begin{pmatrix}{}^{0}\hat{Z}_1 & {}^{0}\hat{Z}_2 & \cdots & {}^{0}\hat{Z}_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \cdots & \dot{\theta}_n\end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

所以，Jacobian矩阵的旋转部分（6自由度时，对应后三行）可以直接看出来。如果是平面机械臂，只有一个旋转自由度，它永远是$(1\ 1\ 1)$，放到空间中是$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$。如果是空间机械臂，绕X、绕Y自由度不为0。

例子：



$${}^{0}\mathbf{J}_{\omega} = ({}^{0}\hat{\mathbf{z}}_1\ {}^{0}\hat{\mathbf{z}}_2\ {}^{0}\hat{\mathbf{z}}_3) = \begin{pmatrix}0 & 0 & \sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0 & 0 & -\cos(\theta_1+\theta_2)\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. 坐标系间转换

平面坐标：

$$^0\mathbf{J}(\theta) = {}^0_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{J}(\theta) \iff {}^3\mathbf{J}(\theta) = \underbrace{{}^0_3\mathbf{R}^T}_{\equiv \mathbf{R}^{-1}} \cdot {}^0\mathbf{J}(\theta)$$

空间坐标：

$$\begin{pmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & 0 \\ 0 & {}^A_B\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{pmatrix}$$
$$\therefore {}^A\mathbf{J}(\theta) = \begin{pmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & 0 \\ 0 & {}^A_B\mathbf{R} \end{pmatrix} {}^B\mathbf{J}(\theta)$$

只有当$det(J) \neq 0$时才可以转换。确定奇点时，计算最后一个frame中的$|{}^eJ(\theta)|$，算式最简便。

五、奇点 Singularity

计算det(J)=0

> *这里有一件很奇怪的事情：由于只有方阵可以求行列式，而Jacobian矩阵又$\in \mathbb{R}^{n\times m}$，就导致n必须等于m，即joints（自由度）个数必须等于坐标个数。*

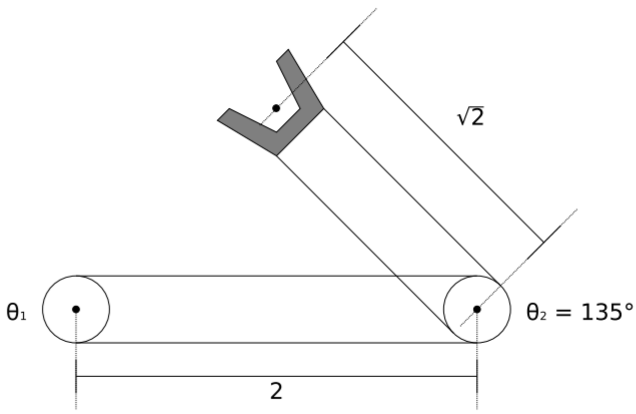
三R平面机械臂：平面机械臂本身有X-Y平面内移动 + 末端旋转共3个自由度。三个旋转轴正好对应三个自由度。

两R平面机械臂：只有两个轴，所以必须忽略末端旋转自由度。

六轴空间机械臂：6个轴正好对应空间中6个坐标——3个平移，3个旋转。

六、isotropic points

isotropic：Jacobian矩阵列之间正交，且每一列向量长度相等（不一定为1）。即$JJ^T = aI$



已知 $^3\mathbf{J} = \begin{pmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{pmatrix}$

1. 由列之间正交得：$l_1 s_2 \cdot 0 + (l_1 c_2 + l_2) l_2 = 0 \implies c_2 = -\frac{l_2}{l_1}$
2. 由列向量长度相等得：$(l_1 s_2)^2 + (l_1 c_2 + l_2)^2 = l_2^2 \implies c_2 = -\frac{l_1}{2l_2}$

$\therefore l_1 = \sqrt{2} l_2, \theta_2 = 135^\circ$，此时 $^3\mathbf{J} = \begin{pmatrix} l_2 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}$，意味着第一个joint控制第一个坐标，第二个轴控制第二个坐标，互不关联、影响，而且”力度“相同。在isotropic点，机械臂控制性能最佳。

Inverse Kinematic

逆变换——知道位置求参数$\theta = f^{-1}(\mathbf{X}_\omega)$，更难

一、牛顿法

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q}_k) && \text{泰勒展开} \\ &\equiv \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) = \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_k) && \\ &\equiv \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_k)[\mathbf{x}_d - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k)] = \mathbf{q}-\mathbf{q}_k && \mathbf{J}^{-1}\text{必须存在} \\ &\equiv \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + J^{-1}(\mathbf{q}_k)[\mathbf{x}_d - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k)] && \text{得出递推公式} \end{aligned}$$

$\mathbf{J}^{-1}$要存在，$\mathbf{J}$只能是方阵，并且$det(J)\neq 0$

何时停止迭代？当$||x_d - f(q)|| < \epsilon$或者$||q_{k+1} - q_k|| < \epsilon$

当$\mathbf{J}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，当$m<n$时，称为redundant。此时$\mathbf{J}^{-1}$不存在，但可以计算$(J^TJ)^{-1}J^Ty = x$

劣势：在奇点处，det(J)=0（缺少自由度）。即便只是靠近奇点也很糟

优势：快

二、梯度下降法

$$\begin{aligned} &g(q) = \frac{1}{2}||x_d - f(q)||^2 = \frac{1}{2}[x_d - f(q)]^T[x_d - f(q)] && \text{这是一个优化问题，}g(q)\text{为损失函数} \\ &\nabla g(q) = -\underbrace{\frac{\partial f(q)}{\partial q}^T}_{\mathbf{J}(q)}\cdot[x_d - f(q)] && \\ &q_{k+1} = q_k - \alpha\nabla g(q_k) = q_k + \alpha\cdot\mathbf{J}^T(q_k)\cdot[x_d - f(q)] && \alpha\text{为一个很小的步长} \end{aligned}$$

优势：计算转置T而非求逆-1，方便快捷，没有奇点问题

劣势：要选取α，而且算得慢

静力学——Statics

计算机械臂不动的时候，作用在末端的力与扭矩需要各个轴出多少力，保证机械臂静止

机械臂末端收到的力是6维的：$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} {}^if \\ {}^in \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$

递推公式：(力) ${}^if_i = {}^{i}_{i+1}R\cdot {}^{i+1}f_{i+1}$，（扭矩）${}^in_i = {}^{i}_{i+1}R\cdot {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{i+1}\times {}^if_i$

算出的力，扭矩均$\in\mathbb{R}^{3\times 1}$，各自有三个分量。但由于旋转轴只能绕z轴转，滑动轴只能沿z轴滑，只有z轴上是驱动力/扭矩。不沿z轴的力、扭矩都直接加在刚性部件上，在理论计算中不需要考虑（实际工程学中用于检验强度）。

$\therefore \tau_i = {}^in_i\odot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$或$\tau_i = {}^if_i\odot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Jacobian矩阵可以直接联系末端受力与每个轴受力：

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = \vec{\tau} = {}^n\mathbf{J}^T\ {}^n\mathcal{F} = {}^0\mathbf{J}^T\ {}^0\mathcal{F}$$

1. ${}^n\mathcal{F}$是已知的，而${}^0\mathbf{J}$比较好求。但它们并不对应同一个frame。
2. ${}^0\mathcal{F} = {}^0_n\mathbf{R} \cdot {}^n\mathcal{F}$
3. ${}^0_n\mathbf{R} = \prod {}^i_{i+1}\mathbf{R}$或者${}^0_n\mathbf{R} = \begin{pmatrix} {}^0\hat{X}_4 & {}^0\hat{Y}_4 & {}^0\hat{Z}_4 \end{pmatrix}$

动力学——Dynamics

由于连杆自身也有质量，机械臂动起来后会产生惯性力，作用到下一个连杆上。动力学=运动学+静力学

一、牛顿——欧拉公式

速度递推公式方向：原点坐标系⟶末端，因此称为Forward

力/扭矩递推公式方向：末端⟶原点坐标系，Backward

$$\text{旋转轴}\begin{cases} {}^{i+1}\omega_{i+1} = \underbrace{(\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1})}_{\Downarrow} + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^i\omega_i}_{\Downarrow} \\ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = (\ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}) + {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^i\dot{\omega}_i + \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot [{}^i\omega_i \times (\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1})]}_{\text{先叉乘再点乘}} \\ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R}({}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_{i+1} + {}^i\omega_i \times [{}^i\omega_i \times {}^ip_{i+1}]) \end{cases}$$

$$\text{滑动轴}\begin{cases} {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^i\omega_i \\ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\mathbf{R} \cdot {}^i\dot{\omega}_i \\ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = \underbrace{{}^{i+1}_{i}\mathbf{R}({}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_{i+1} + {}^i\omega_i \times [{}^i\omega_i \times {}^ip_{i+1}])}_{\text{与旋转轴公式相同}} + \underbrace{2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1}} + \underbrace{\ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1}} \end{cases}$$

每条连杆质心速度：

$${}^i\dot{v}_{c_i} = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_{C_i} + {}^i\omega_i \times [{}^i\omega_i \times {}^ip_{C_i}]$$

计算每条连杆由于加速度受到的力/力矩：

$$\begin{array}{r|l} F = ma \implies & {}^iF_i = m \cdot {}^i\dot{v}_{c_i} \\ N = I\alpha = I_C\alpha + \underbrace{\omega \times I_C\omega}_{\text{平行轴定理???}} \implies & {}^iN_i = {}^{C_i}I_i \cdot {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^{C_i}I_i \cdot {}^i\omega_i \end{array}$$

计算每个轴的受力与扭矩：

$$
\begin{aligned}
{}^{i}f_i &= {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \\
{}^{i}n_i &= \underbrace{{}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}n_{i+1}}_{\text{与静力学相同}} + \underbrace{{}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1}}_{\text{略微不同，因为}\ {}^{i}f_i \neq {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1}} + \underbrace{{}^{i}N_i + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i}_{\text{新增两项}}
\end{aligned}
$$

二、MVG形式

$$
\begin{aligned}
(\text{控制力})\tau &= \underbrace{\overset{\text{惯性力}}{M(\theta)\ddot{\theta}}}_{\text{一定包含}\ddot{\theta}} + \underbrace{\overset{\text{科里奥利力}}{V(\theta,\dot{\theta})}}_{\text{一定包含}\dot{\theta}} + \underbrace{\overset{\text{重力}}{G(\theta)}}_{\text{一定包含}g} \\
&= M(\theta)\ddot{\theta} + B(\theta)\underbrace{\left[\dot{\theta}_i \cdot \dot{\theta}_j\right]}_{i\neq j\text{，长度}C_n^2} + C(\theta)\dot{\theta}^2 + G(\theta)
\end{aligned}
$$

三、拉格朗日势能法

每一条连杆都有动能K与势能U

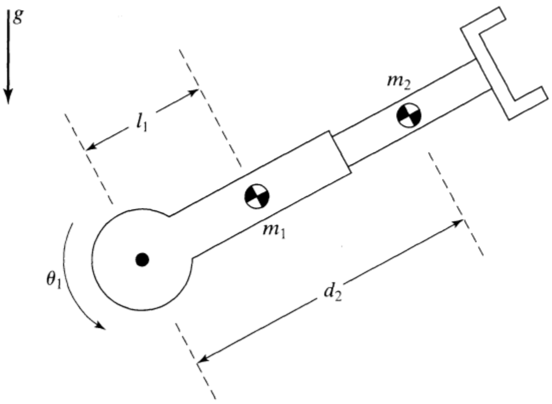
$k_i = \frac{1}{2}m||\overrightarrow{v}_C||^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}^T I \overrightarrow{\omega}$，$u_i = -mgh = -m\overrightarrow{g}^T \overrightarrow{P}_C$

> *线速度动能是平方项，因此只与向量长度有关——在各个坐标系中都相同。索性计算最简单的 ${}^{0}v_{C_i} = \frac{d}{dt}\,{}^{0}P_{C_i}$，只要知道质心在原点坐标系中的位置即可。（对所有变量求导）*
>
> *角速度动能ω_i照常算，幸好计算本来就比较简单。*

整个系统的动能$k_{\text{总}} = \sum k_i$，势能$u_{\text{总}} = \sum u_i$

$$
\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial k_{\text{总}}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial k_{\text{总}}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial u_{\text{总}}}{\partial \theta_i}
$$

举例：



如图是一个R-P机械臂，两轴质心分别为：${}^{0}P_{C_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cdot l_1 \\ -\cos\theta_1 \cdot l_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{包含1个变量}\theta_1}$

$${}^{0}P_{C_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cdot d_2 \\ -\cos\theta_1 \cdot d_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{包含两个变量}\theta_1,d_2}$$

${}^{0}\dot{v}_{C_1} = \begin{pmatrix} c_1\dot{\theta}_1 l_1 & s_1\dot{\theta}_1 l_1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 对sin,cos求$\frac{d}{dt}$多出$\dot{\theta}$

${}^0\dot{v}_{C_2} = \begin{pmatrix} c_1\dot{\theta}_1 d_2 + s_1\dot{d}_2 & s_1\dot{\theta}_1 d_2 - c_1\dot{d}_2 & 0 \end{pmatrix}^T$ 要对两个变量分别求导

系统动力学控制——Control

一、质量、阻尼、弹簧模型

$$
\begin{array}{rl|l}
\text{无外力时微分方程} & m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 & \\
\text{拉氏变换} & \underbrace{ms^2 + bs + k = 0}_{\downarrow} & \\
 & s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 & w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \\
\text{施加外力时微分方程} & m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \triangleq -k_v\dot{x} - k_p x & \\
 & m\ddot{x} + \underbrace{(b+k_v)}_{b'}\dot{x} + \underbrace{(k+k_p)}_{k'}x = 0 & \omega_n = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{k+k_p}{m}}
\end{array}
$$

模型的弹簧系数k应该尽可能大（刚性可抵消扰动），但任何情况下，ω_n又必须$\le \frac{1}{2}\omega_{res}$共振频率。

临界阻尼状态：$b^2 - 4mk = 0$，或$b = 2\sqrt{mk}$；或$k_v = 2\sqrt{k_p}$（如果m=1）

二、系统解耦Partitioning

（一）、平衡

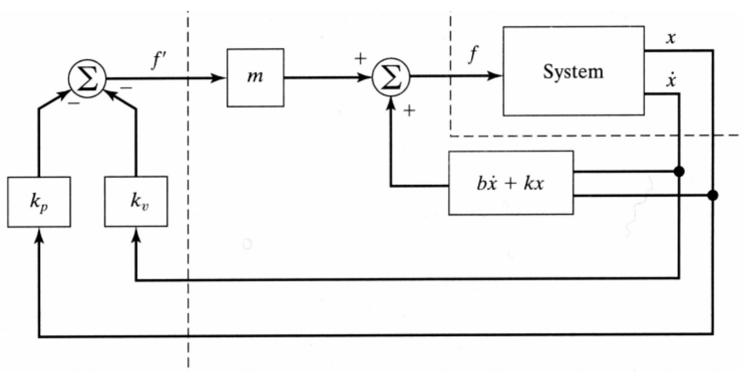
从单个物体开始：

原来系统微分方程为：$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f_{外力}$，

解：令$f = \alpha f' + \beta$，其中$\begin{matrix}\alpha = m \\ \beta = b\dot{x} + kx\end{matrix}$，再设$f' = -k_v\dot{x} - k_p x$,就得到

$\therefore \ddot{x} = f' \triangleq -k_v\dot{x} - k_p x$

系统微分方程转换为：$\ddot{x} + k_v\dot{x} + k_p x = 0$，变回没加外力的样子，顺便质量单元也消失了，成了单位质量1。



如图一通操作，要控制的系统由$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$变为$\ddot{x} = f'$，大大简化了系统模型。原本系统中复杂的阻尼、弹簧项现在可以自平衡，不再需要考虑。$f' \triangleq -k_v\dot{x} - k_p x$是自己设的，$k_v$、$k_p$可以随意调整。要使得新的微分方程临界阻尼，只需要$k_v = 2\sqrt{k_p}$(新模型中m=1)。

多个物体控制解耦：

如果有多个物体，微分方程要写成矩阵形式：$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f_{外力}$

同理，得到新的微分方程$\ddot{x}+K_v\dot{x}+K_px=0$，由于$K_v$，$K_p$是自己选的，就将它们选为对角阵，实现解耦。

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \vdots\\ \ddot{x}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_{v1}&0&\cdots&0\\ 0&k_{v2}&\ddots&\vdots\\ \vdots&&&0\\ 0&\cdots&0&k_{vn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_{p1}&0&\cdots&0\\ 0&k_{p2}&\ddots&\vdots\\ \vdots&&&0\\ 0&\cdots&0&k_{pn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

由于每一个物体的控制互不关联，只要每个都满足$k_{vi}=2\sqrt{k_{pi}}$即可

（二）、轨迹追踪

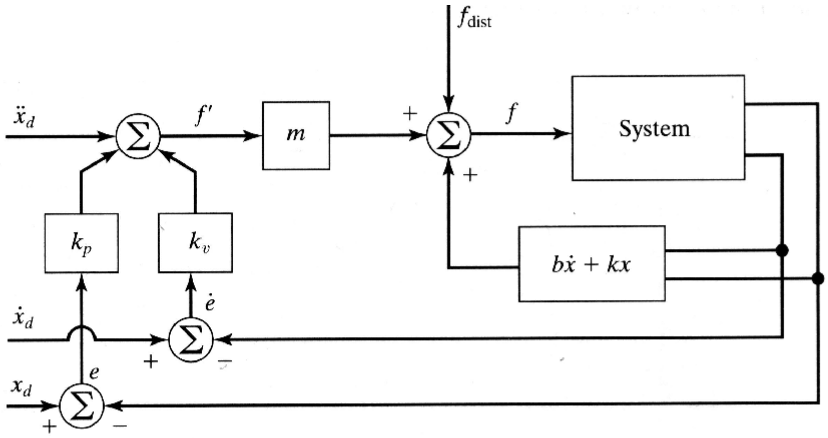
对于一个PD控制器

$f'=-k_v\dot{x}-k_px$时，得到关于位置坐标的微分方程$\ddot{x}+K_v\dot{x}+K_px=0$，物体最后可以平衡，但若存在扰动会有稳态误差。

$f'=\ddot{x}_d+k_v(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)$时，得到关于位置误差$e$的微分方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}=\ddot{x}_d+k_v(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)\implies\quad&(\ddot{x}_d-\ddot{x})+k_v(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)=0\\ &\equiv\ddot{e}+k_v\dot{e}+k_pe=0\end{aligned}$$

e现在在原先x的位置，意味着这个模型可以消除所有扰动和初始误差。



上述为纯数学角度，实际上肯定有没纳入模型的因素，模型会失效。实际应用中一般加上积分环节称为PID控制器。

$$f'=\ddot{x}_d+\underbrace{k_v\dot{e}}_{D}+\underbrace{k_pe}_{P}+\underbrace{k_i\int edt}_{I}$$