《统计推断》补充作业

内容：次序统计量、连续映射定理的应用

1. 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 令$Y = X^2$. 试求出Y的密度函数，以及$E(Y)$和$\mathrm{Var}(Y)$.

2. 设$d(>1)$维随机列向量$X_n \xrightarrow{D} N(\mu, \Sigma)$，其中列向量$\mu \in R^d$, Σ是$d \times d$的正定对称矩阵。A_n是一列$d \times d$的实数矩阵，$A_n \to A$, $n \to \infty$，其中A是正定对称矩阵。试讨论$U_n \equiv A_n X_n$和$V_n \equiv X_n^T A_n X_n$的渐近分布。

3. 若将上面题目中关于A的假定替换为"随机矩阵$A_n \xrightarrow{P} A$, A是非随机对称矩阵，且$A^2 = A$", 此时第2 题中的结果将如何？试研究之.

4. 设$X_1, \cdots, X_{2n+1} \sim$ iid $f(x)$, $f(x)$是连续的密度函数，$E|X_1| < \infty$. 记$X_{(1)}, \cdots, X_{(2n+1)}$是$X_1, \cdots, X_{2n+1}$的次序统计量. 证明存在$N$和$K$使得$n > N$ 时

$$E|X_{(n+1)}|^k < \infty, 2 \le k \le K.$$

关于Cauchy分许次序统计量的性质.

5. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是iid r.v., 服从Cauchy(0,1)分布，$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$是相应的次序统计量。则

(1) $\forall n, E(|X_{(n)}|) = E(|X_{(1)}|) = \infty$,

(2) 当$n \ge 3, E(|X_{(n-1)}|)$和$E|X_{(2)}|$有限；

(3) 当$n \ge 5, E(|X_{(n-2)}|^2)$和$E|X_{(3)}|^2$有限；

(4) (选做)一般地，$E(|X_{(r)}|^k) < \infty$ 当且仅当$k < \min\{r, n+1-r\}$.