《统计推断》第二次测验题目

姓名：________ 系别：________学号：__________

2015.12.25

我承诺我将独立完成本次开卷测验，(签名)________,____年____月____日

说明：

1. 开卷测验，独立完成。可查看教材和笔记，自律自信切忌讨论！答卷雷同者记为0分.
2. 答卷提交截止时间2016年1月2日24:00，在网络学堂指定窗口提交。
3. 前三题共计100分. 第4和5题为选做题，每题10分，共计20分.

1. [40分] 设$X_1, ..., X_n \sim iid$ Poisson(λ), $\lambda > 0$是未知参数。设$\bar{X}$和S^2分别是样本均值和方差。 定义 $V_a = a\bar{X} + (1-a)S^2$, 已知常数$a \in R$。试从估计量评价的无偏性、相合性和有效性(定义参见：教材p. 471, Definition 10.1.11)三个方面 来评价λ的三个估计量$\bar{X}$、S^2和V_a的优劣。

2. [30分] 设$f(x)$是单峰的概率密度函数。如果区间$[a,b]$满足条件:

   (i) $\int_a^b f(x)dx = 1-\alpha$,

   (ii) $f(b) = f(b) > 0$.

   (iii) $a \le x^* \le b$, 其中x^*是$f(x)$的众数(mode),

   证明：$[a,b]$是所有满足条件(i)中的区间中长度最短的区间。

3. [30分] 假设检验方法与置信区间有无联系？如有，请说明理由并举例说明。

4. [10分] 设样本$X_1, \cdots, X_n \sim iid\ f(x|\mu, \sigma^2)$, 其中

   $$f(x|\mu,\sigma^2) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} + (1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu \in R, \sigma > 0$$

   其中已知常数 $p \in (0,1)$.

   (i) 证明: μ和σ^2的MLE不存在;

   (ii) 如何估计μ和σ^2;

   (iii) 推导出(ii)中你所得到的的估计量的渐近分布.

5. [10分] 设$X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} U[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$. 现在欲检验假设：

   $$H_0 : \mu = 0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq 0.$$

   试构造该假设检验在控制第一类错误概率为$\alpha \in (0,1)$下的拒绝域。（要求求出零假设成立时检验统计量的分布或者渐近分布）。