《统计推断》补充内容和作业之一

内容：O_P 和o_p, Hoeffding不等式

1. 设$\{X_n\}$和$\{Y_n\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的随机变量序列。

   定义 1 设随机变量序列$\{X_n\}$的对应的分布函数列为$\{F_n\}$, $\{X_n\}$称为依概率有界的，如果对于$\forall\epsilon > 0$, $\exists\ M_\epsilon$和N_ϵ使得$F_n(M_\epsilon) - F_n(-M_\epsilon) > 1 - \epsilon, \forall n > N_\epsilon$，记为$X_n = O_p(1)$.

   如果$\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{P}{=} 0$，则称$X_n = o_p(1)$.

   如果$X_n = o_p(Y_n)$, 当且仅当$|X_n/Y_n| = o_p(1)$.

   如果$X_n = O_p(Y_n)$, 当且仅当$|X_n/Y_n| = O_p(1)$.

   利用上面的定义证明：

   (a) $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$;

   (b) $O_p(1) + o_p(1) = O_p(1)$;

   (c) 若$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$，则$X_n = O_p(1)$;

   (d) 设$X_1, \cdots, X_n$是iid的r.v.，且$E|X_1| < \infty$, $\mu = EX_1$. 证明: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \mu + o_p(1)$; 进而，若$EX_1^2 < \infty$, 则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \mu + O_p(n^{-1/2})$.

2. 设$X_1, \cdots, X_n, ...$ iid随机变量，服从$B(1,p)$分布, $(p \in (0,1))$. 试利用Hoeffding不等式证明:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{a.s.}{=} p$.

   (b) 设随机变量列$Z_n, n = 1, 2, ...$满足$\lim_{n\to\infty} Z_n \stackrel{P}{=} 0$, 常数列$A_n \to \infty$, 如果$\lim_{n\to\infty} A_n Z_n \stackrel{P}{=} 0$,则$Z_n = o_p(A_n^{-1})$,即，$Z_n$依概率趋于0 的速度至少是$o(A_n^{-1})$. 试利用Hoeffding不等式证明: (a)中的速度至少是$o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$

   (c) (选做) (a)中的速度是否可以任意快？还是有一个速度的临界值？尝试先给出'速度任意快','速度的临界值' 的概念，然后针对(a)中的问题进一步讨论。

3. (选做) 设$X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 是一列iid随机变量，其分布函数为$F(x, \theta), \theta \in \Theta$, 设二元函数$U(x, \theta)$在$\theta$ 固定时，它是关于x的可测函数，x固定时，它关于θ是连续甚至可微，$\theta \in \Theta$. 试给出一些充分条件, 例如，Θ可以是R中的紧集，试证明下面的结论

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\Theta} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U(X_i, \theta) - E[U(X_1, \theta)] \right| \stackrel{a.s.}{=} 0.$$