《统计推断》第一次测验题目

姓名：________ 系别：________学号：__________

2015.10.28

我承诺我将独立完成本次开卷测验，(签名)________,____年____月____ 日

说明：

1. 开卷测验，独立完成。可查看教材和笔记，自律自信切忌讨论！答卷雷同者记为0分.
2. 答卷提交时间截止时间2015年10月31日24:00，在网络学堂指定窗口提交。
3. 前五题每题20分，共计100分. 第6和7题为选做题，每题10分，共计20分.

1. 设$X_1, \cdots, X_n, \cdots$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的随机样本, 定义 $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. 试确定$\frac{1}{\hat{\mu}_n}$的渐近分布，并说明理由。[提示：可以利用$\Delta$方法、Slutsky Th. CMT等].

2. 设$X_1, \cdots, X_{2n+1} \sim$ $iid\ U(0, \theta)$, $\theta > 0$是未知的参数， $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(2n+1)}$是相应的次序统计量，$n \geq 5$.

   (a)[学号末尾数为偶数的同学做] 计算$E(X_{(n+1)} + X_{(2n)})$;

   (b)[学号末尾数为奇数的同学做] 计算$E(X_{(2)} + X_{(n+1)})$.

3. 设$X_1, \cdots, X_n \sim$ $iid\ B(1, p)$, 未知参数$p \in (0, 1)$. 定义$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. 试确定常数列$r_n \to \infty$ 和一元函数ϕ 使得

$$r_n(\phi(\hat{p}_n) - \phi(p)) \xrightarrow{D} N(0, 1), n \to \infty.$$

4. 设$X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, \theta)$, θ $(\in (0, \infty))$是未知参数， $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. 证明：(1). $X_{(n)}$是充分完全的统计量；(2). 存在随机变量X 使得

$$n(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow{d} X, n \to \infty,$$

   并确定X的分布.

5. 设$X_1,\cdots,X_n$是iid的随机变量，$E(X_1)=\mu$, $\sigma^2=\mathrm{Var}(X)\in(0,\infty)$. 定义$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. 试将$(\bar{X}_n)^2$适当的中心化和尺度化之后， 即寻找常数序列$c_n\to\infty$和常数$A$使$c_n((\bar{X}_n)^2-A)\xrightarrow{d}Z$, $n\to\infty$, 其中Z是一个非退化的随机变量。

6. (选做题)设$X_1,\cdots,X_n$是iid 的随机变量，$E(X)=\mu$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2\in(0,\infty)$, $E(X_1^4)<\infty$. 设

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2$$

是所谓的样本均值和样本方差。

(a) 证明：

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{X}_n-\mu\\ S_n^2-\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\begin{pmatrix}X_i-\mu\\ (X_i-\mu)^2-\sigma^2\end{pmatrix}+o_p(1).$$

(b) 利用(a)中的结果和多元中心极限定理证明：

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{X}_n-\mu\\ S_n^2-\sigma^2\end{pmatrix}\xrightarrow{d}Z,$$

其中, $Z\sim N_2(0,\Sigma)$. 并利用$\sigma^2,\gamma_1=E(X_1-\mu)^3/\sigma^3$和$\gamma_2=E(X_1-\mu)^4/\sigma^4-3$表示协方差矩阵$\Sigma$.

(c) 利用(b)中的结果计算

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n}{S_n}-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

的渐近分布， 如果需要，可以增加条件$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$.

7. (选做题)设$X\sim\ N(0,1)$, 证明：

$$Ef'(X)=E(Xf(x)) \tag{1}$$

对于所有的绝对连续函数$f:R\to R$成立，其中$E|f'(x)|<\infty$。

反过来，若(1)对于所有的有界连续且分段连续可微的函数f都成立，其中$E|f'(X)|<\infty$,则$X\sim\ N(0,1)$.