毕设论文定理 2.5 及推论 2.1 证明修订

Siyi Yang

September 10, 2017

1 定理 2.4 证明

原论文 FIM 矩阵最后一行最后一个元素打印错误，修改如下：

$$\mathbf{J}_{\mathrm{e}}(\mathbf{P},k)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_0+\mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^H & -\mathbf{B}_0\mathbf{F}_1^H & & & \\ -\mathbf{F}_1\mathbf{B}_0^H & \boldsymbol{\Sigma}_1+\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^H+\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1^H & -\mathbf{B}_1\mathbf{F}_2^H & & \\ & -\mathbf{F}_2\mathbf{B}_1^H & \boldsymbol{\Sigma}_2+\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^H+\mathbf{F}_2\mathbf{F}_2^H & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{\Sigma}_k+\mathbf{F}_k\mathbf{F}_k^H\end{pmatrix}. \tag{1}$$

其余证明不变。

2 定理 2.5 证明

根据定理 2.4 结论：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(k)=&\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{F}_1^H\\&\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{F}_2^H\cdots\\&\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\\&\cdots\mathbf{F}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\\&\mathbf{F}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\}.\end{aligned} \tag{2}$$

第 k 层网络中去掉边 e 时 (2) 中 $\boldsymbol{\Sigma}_{k,2}$ 为 $\boldsymbol{\Sigma}_k$，保留边 e 时变为 $\boldsymbol{\Sigma}_{k,1}=\boldsymbol{\Sigma}_k+\mathbf{a}\mathbf{a}^H$ $(\mathbf{a}=\mathbf{a}_{i,j})$。根据定理 2.4 中 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的递推式，$\boldsymbol{\Sigma}_k$ 对 (2) 中其它值不产生影响。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1=&\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{F}_1^H\\&\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{F}_2^H\cdots\\&\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\left(\boldsymbol{\Sigma}_k+\mathbf{a}\mathbf{a}^H\right)^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\\&\cdots\mathbf{F}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\\&\mathbf{F}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\}.\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2=&\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{F}_1^H\\&\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{F}_2^H\cdots\\&\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_{k-1}^H\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1}\\&\cdots\mathbf{F}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{B}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\\&\mathbf{F}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{B}_0^H\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\}.\end{aligned} \tag{4}$$

根据以上二式，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{\mathrm{SL}}(e,k)\\
=&\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_2\\
=&\mathrm{tr}\{\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\mathbf{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{F}_1^H\\
&\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{F}_2^H\cdots\\
&\mathbf{\Sigma}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\{\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\left(\mathbf{\Sigma}_k+\mathbf{a}\mathbf{a}^H\right)^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
&-\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\}\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Sigma}_{k-1}^{-1}\\
&\cdots\mathbf{F}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{B}_1^H\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\\
&\mathbf{F}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\mathbf{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{B}_0^H\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\left(\mathbf{\Sigma}_k+\mathbf{a}\mathbf{a}^H\right)^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
=&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\left(\mathbf{\Sigma}_k^{-1}-\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\left(\mathbf{I}+\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\right)^{-1}\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\right)\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
=&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k-\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\left(\mathbf{I}+\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\right)^{-1}\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
=&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
&+\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\\
&\left(1+\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}-\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\right)^{-1}\\
&\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
=&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\\
&+\left(1+\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}-\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\right)^{-1}\\
&\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

代入 (5) 中得：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{\mathrm{SL}}(e,k)\\
=&\left(1+\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}-\mathbf{a}^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}\right)^{-1}\\
&||\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_0^H\mathbf{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{B}_0+\mathbf{F}_1^H\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{F}_1\right)^{-1}\mathbf{F}_1^H\\
&\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_1^H\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{F}_2^H\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{F}_2\right)^{-1}\mathbf{F}_2^H\cdots\\
&\mathbf{\Sigma}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{a}||
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3 推论 2.1 证明

首先证明一个引理：

Lemma 1.

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{U}(\mathbf{M}-\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||&=\frac{||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}{1-||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}\\
||\mathbf{U}(\mathbf{M}+\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||&=\frac{||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}{1+||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{I}-\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{U}(\mathbf{M}-\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H\\
\Longleftrightarrow&\mathbf{U}(\mathbf{M}-\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H=\left(\mathbf{I}-\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}-\mathbf{I}\\
\Longrightarrow&||\mathbf{U}(\mathbf{M}-\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||=||\left(\mathbf{I}-\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}-\mathbf{I}||\\
\Longrightarrow&||\mathbf{U}(\mathbf{M}-\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||=\frac{||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}{1-||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}.
\end{aligned}\tag{9}$$

注意到我们目前为止关注的矩阵范数中的矩阵都是对称且正定的，因此 lemma1 中的 M 应是对称正定的，$M-UU^H$ 其实也是（从 11 中对 lemma1 的应用可以看出）。在这个前提下，式（9）中的 UMU^H 是可以正交对角化的，假设为 QDQ^H。此时，式（9）右边变为 $Q((I-D)^{-1}-I)Q^H$ 的模，也就是对角阵 $(I-D)^{-1}-I$ 中的最大元素，因而式（9）是成立的（这里本来应该限制 UMU^H 的矩阵范数。

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}=\mathbf{I}-\mathbf{U}(\mathbf{M}+\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H\\
\Longleftrightarrow&\mathbf{U}(\mathbf{M}+\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H=\mathbf{I}-\left(\mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}\\
\Longrightarrow&||\mathbf{U}(\mathbf{M}+\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||=||\mathbf{I}-\left(\mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H\right)^{-1}||\\
\Longrightarrow&||\mathbf{U}(\mathbf{M}+\mathbf{U}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^H||=\frac{||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}{1+||\mathbf{U}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}^H||}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Q.E.D.

回到推论 2.1，(B-11)-(B-17) 照旧，(B-18) 及之后推导修改：
令 $\mathbf{A}_k=\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-\frac{1}{2}}$，则 $\mathbf{\Lambda}_k^{-1}=\mathbf{\Sigma}_k^{-1}-\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H$.
由 Lemma 1 得：

$$\begin{aligned}
&f(k+1)\\
=&||\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Lambda}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k||\\
=&||\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}-\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k||\\
=&\frac{||\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k||}{1-||\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k||}\\
=&\frac{g(k)}{1-g(k)}.
\end{aligned}\tag{11}$$

这里，

$$
\begin{aligned}
&g(k)\\
=&||\mathbf{A}_k^H\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)\mathbf{B}_k^H\mathbf{A}_k||\\
=&||\mathbf{A}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}_k^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}_k||\\
\leq&||\mathbf{A}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_k||||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||\\
=&||\mathbf{\Sigma}_k^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{\frac{1}{2}}||||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||\\
=&||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}+\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{F}_k\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||\\
&\cdot||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-1}\mathbf{B}_k+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||\\
=&\frac{||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||}{1+||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}_{k-1}^H\mathbf{\Lambda}_{k-1}^{-1}\mathbf{B}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{F}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||}\\
&\cdot\frac{||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||}{1+||\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_k\left(\mathbf{I}+\mathbf{F}_{k+1}^H\mathbf{\Sigma}_{k+1}^{-1}\mathbf{F}_{k+1}\right)^{-1}\mathbf{B}_k^H\mathbf{\Sigma}_k^{-\frac{1}{2}}||}\\
\leq&\left(\frac{c}{c+1}\right)^2<\frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

故而

$$
f(k+1)=\frac{g(k)}{1-g(k)}\leq\frac{c^2}{2c+1}<1. \tag{13}
$$