

第六章（插值法）习题

1、设 x_j 为互异节点 ($j = 0, 1, \dots, n$), 求证

- $\sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n;$
- $\sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, n.$

其中 $l_j(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_j)w'_{n+1}(x_j)}$ 为 Lagrange 插值基函数, $w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ 。

2、设 $f(x) = \frac{1}{a - x}$, 证明:

- $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \prod_{j=0}^n \left(\frac{1}{a - x_j} \right)$; (提示: 用归纳法)
- $\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a - x_0} + \frac{x - x_0}{(a - x_0)(a - x_1)} + \dots + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}{(a - x_0) \cdots (a - x_n)} + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(a - x_0) \cdots (a - x_n)(a - x)}$
(提示: 用Newton型插值公式).

3、设 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$, 求 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^7]$ 及 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8]$.

4、求一个不高于 4 次的多项式 $p(x)$, 满足 $p(0) = p'(0) = 0$, $p(1) = p'(1) = 1$, $p(2) = 1$.

5、设 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, 在 $-5 \leq x \leq 5$ 上取 $n = 10$, 按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$, 计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值, 并估计误差。

6、给出 $f(x) = \ln x$ 的数值表如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

分别用线性插值、二次插值及三次样条计算 $\ln 0.54$ 的近似值。