

#### 第四章（非线性方程（组）解法）习题

1、请给出计算  $\sqrt{a}$  的一种三阶收敛的迭代函数。

2、设  $\phi(x)$  是二阶可微函数,  $\phi(\alpha) = \alpha$  且  $\phi'(\alpha) \neq 1$ , 证明对迭代格式  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  经过 Steffensen 加速后的方法至少具有二阶收敛速度.

3、用下列方法求  $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$  在  $x_0 = 2$  附近的根. (精确解为  $x^* = 1.87938524 \dots$ , 要求至少要有四位有效数字)

(1) Newton 迭代法,  $x_0 = 2$ ;

(2) 弦截法,  $x_0 = 2, x_1 = 1.9$ ;

(3) 抛物线方法,  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$ .

4、用 Newton 法和求重根迭代法计算方程  $f(x) \equiv (\frac{x}{2} - \sin x)^2 = 0$  的近似根, 取  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ . 要求至少要有 5 位有效数字.

5、特征值问题  $Ax = \lambda x$  (这里  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) 等价于解方程组  $f(z) = 0$ , 这里  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  定义为

$$f: \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ x^T x - 1 \end{pmatrix}$$

请写出解以上方程组  $f(z) = 0$  的牛顿迭代法。