第二章（求解线性方程组的直接方法部分）习题

1、用 Gauss-Jordan 方法求以下矩阵的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2、设 A 为一个对称正定三对角矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & a_n \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

(1) 将 A 做 Cholesky 分解：$A = LL^T$，其中

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & & & \\ m_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & m_n & l_n \end{pmatrix}.$$

写出 L 各元素的计算公式。

(2) 写出用平方根法解 $Ax = d$ 的计算公式。

3、利用矩阵的 QR 分解证明关于矩阵行列式的哈达玛不等式 (Hadamard's inequality)

$$|\det A|^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2, \quad \text{其中 } A = (a_{ij})_{n\times n}.$$

（其几何意义是当向量为正交集时体积最大）

4、设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，定义

$$\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}.$$

试证明 $\|x\|_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一种范数.

5、设 $A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$, 对 $\nu = 2, \infty$， 计算矩阵 A 的条件数: $\mathrm{cond}(A)_\nu$.

6、对于一个非奇异矩阵 A, 证明

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)_2} = \frac{\lambda}{\|A\|_2}, \quad \text{其中 } \lambda = \min\{\|B\|_2 : A + B \text{是奇异矩阵}\}.$$

（这说明如果一个非奇异矩阵的条件数很大，则它很接近于一个奇异矩阵。）