第五章（矩阵特征值问题计算方法）习题

1、设 A 是可对角化 n 阶矩阵，其特征值为 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$，相应特征向量为 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$。取向量 $v^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, 假设 $v^{(0)} \notin \mathrm{span}\{\mathrm{x}^{(2)}, \cdots, \mathrm{x}^{(\mathrm{n})}\}$, 证明以下迭代过程

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

的相应 Rayleigh 商

$$R_k = \frac{\left(Av^{(k)}, v^{(k)}\right)}{\|v^{(k)}\|_2^2}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

满足估计式

$$|R_k - \lambda_1| \leq Cr^k, \quad k = 0, 1, \cdots$$

其中 $C > 0$ 为一常数，$r \equiv |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$.

2、设 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求一个 Householder 矩阵 H，使得 $Hb = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) 求若干个 Givens 矩阵之积 J，使得 $Jb = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3、证明 Hessenberg 矩阵在 QR 算法下保持不变。