(*将常数吸收到解中可得如下等价问题 ，f[x,y]表示 $\left\{\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right\}$,g[t]是此问题的解 *)

```
f[{x_, y_}] := {-2000 * x + 999.75 * y, x - y};
g[t_] := {-1.499875 * E^(-0.5 * t) + 0.499875 * E^(-2000.5 * t),
   -2.99975 * E^(-0.5 * t) - 0.00025 * E^(-2000.5 * t)}
```

```
Eigenvalues[{{-2000, 999.75}, {1, -1}}]
```

```
{-2000.5, -0.5}
```

(*根据课本P400页对四阶显式Runge -Kutta方法绝对稳定性的讨论 ，
此时步长需有h < $\frac{2.785}{2000.5}$ 约为0.001才保证稳定性 *)

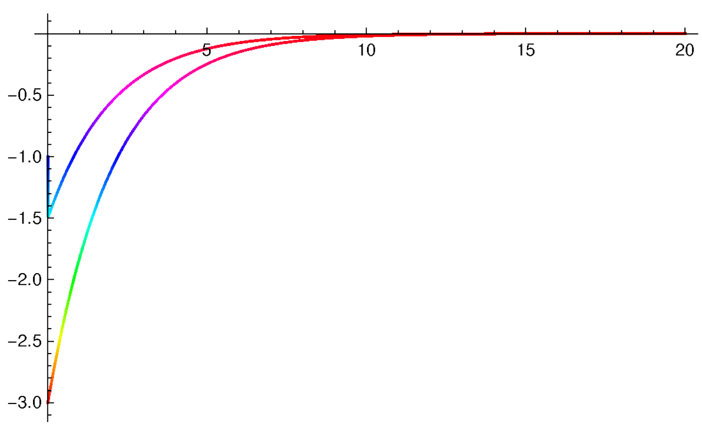
(*数值实验发现h较大时无法得到正确的数值解 *)

(*用classical 四级显式Runge -Kutta迭代法求解 ，取步长为0.001*)

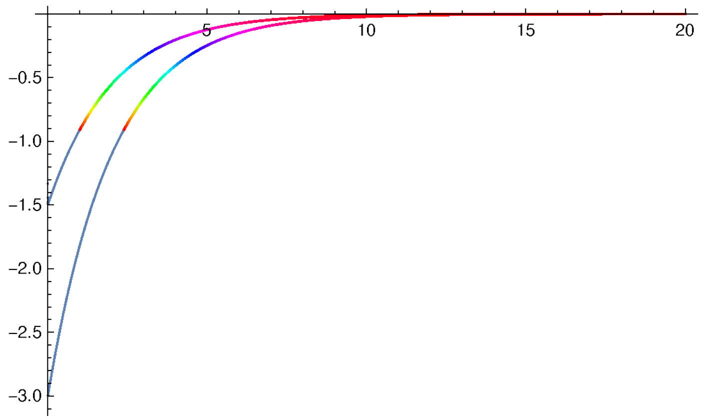
```
f[{x_, y_}] := {x + 2 y, 3 x + 2 y};
h = 0.02;
y[0] = {-1, -3};
For[i = 0, i < 20000, i++, K1 = f[y[i]];
 K2 = f[y[i] + 1/2 * h * K1];
 K3 = f[y[i] + 1/2 * h * K2];
 K4 = f[y[i] + h * K3];
 y[i + 1] = y[i] + 1/6 * h * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)]
```

(*由下图可见，g[t]的第一个分量初值虽为 -1，
但由于E^(-2000.5t)的指数项，其很快衰减到0而E^(-0.5t)的系数-1.5起主要作用 *)

```
Plot[{g[t][[1]], g[t][[2]]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All, ColorFunction → Hue]
```



(*由下图可见，数值解与解析结果符合甚好 *)



(*二级四阶隐式格式，其中K1,K2可通过求解线性方程组得到 *)

```
h = 0.1;
For[i = 0, i < 200, i++, K1 = 0;
 K2 = 0;
 eq = NSolve[{{a, b} == {(-500.` a + 249.9375` b + 77.35026918962573` c -
          38.665465811164175` d) h, 1/12 (3 a - 3 b - (-3 + 2 √3) (c - d)) h} + f[y[i]], {c, d} ==
      {(-1077.3502691896256` a + 538.5404658111642` b - 500.` c + 249.93749999999997` d) h,
       1/12 ((3 + 2 √3) a - 3 b - 2 √3 b + 3 c - 3 d) h} + f[y[i]]}, {a, b, c, d}];
 K1 = ({{a, b}, {c, d}} /. eq[[1]])[[1]];
 K2 = ({{a, b}, {c, d}} /. eq[[1]])[[2]];
 y[i + 1] = y[i] + 1/2 * h * (K1 + K2);]
```

(*结果分析：下图中蓝色的点表示离散化后的数值解，由真解的第一分量在t =0处从-1跳到-1.5可知，
初值的第一分量为 -1具有欺骗性，它使得真解在0处导数值很大，而差分方法对这种情形无能为力 *)