1. ADMM for the Primal

$$C^T - y^TA - S^T + \beta\left(\underline{(AX_1-b)^TA} + \underline{(X_1-X_2)^T}\right) = 0$$

$$\beta\left(X_1^T(A^TA+I)\right) + C^T - y^TA - S^T - \beta b^TA - \beta X_2^T = 0$$

$$(A^TA+I)\beta X_1 = C - A^Ty - S - \beta A^Tb - \beta X_2$$

X_1 迭代公式：
$$X_1^{k+1} = \frac{(A^TA+I)^{-1}}{\beta}\left(-C + A^Ty^k + S^k + \beta A^Tb + \beta X_2^k\right)$$
公式不对！

$$\frac{\beta}{2}(X_2-X_1)^2 + S^TX_2$$

$$\min \frac{\beta}{2}\|X_2-X_1\|^2 + S^T(X_2-X_1) \quad \frac{\beta}{2}X_2^2 - \beta X_2X_1 + SX_2$$
$$X_2 \geq 0$$

$$X_2 = \frac{\beta X_1 - S}{\beta}$$

$$\frac{\beta}{2}\left\|X_2 - \left(X_1 - \frac{S}{\beta}\right)\right\|^2$$

X_2 迭代公式.
$$X_2^{k+1} = \max\left\{0,\ X_1^{k+1} - \frac{S^k}{\beta}\right\}$$

ADMM 求解线性规划的原问题.

测试数据

$$\min\ -X_1 - 2X_2$$
$$X_1 + X_3 = 1$$
$$X_2 + X_4 = 1$$
$$X_1 + X_2 + X_5 = 1.5$$
$$X_1, \dots, X_5 \geq 0$$

$C = (-1, -2, 0, 0, 0)$

$b = (1, 1, 1.5)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matlab 编程

输出结果与用 linprog 得到的一致.

2. ADMM for the Dual.

$$L^d(y, S, x) = -b^Ty - \underline{x}^T(A^Ty + \underline{S} - c) + \frac{\beta}{2}\|A^Ty + s - c\|^2 \quad (S \geq 0).$$

上面测试数据的对偶问题为

$$\max\ y_1 + y_2 + 1.5y_3$$
$$\text{s.t.}\quad A^Ty \leq C.$$

可见求出的 y 与用ADMM 求解中输出的 y 一样，即 Primal Lagrange 乘数 y 就是对偶变量。
(乘子)

$$-b^T - x^TA^T + \beta(A^Ty + s - c)^TA^T = 0.$$

$$-b - Ax + \beta A(A^Ty + s - c) = 0.$$

$$\beta AA^Ty = Ax + b + \beta A(C - S)$$

$$y_{k+1} = \beta^{-1}(AA^T)^{-1}\left(Ax^k + b + \beta A(C - S^k)\right)$$

$$\min \frac{\beta}{2}\|S + A^Ty^{k+1} - C\|^2 - x^kS.$$

$$S^{k+1} = \max\left\{0,\ \frac{x^k}{\beta} + C + A^Ty^{k+1}\right\}$$

求出的 x 为原问题 x 的相反数.