笔记整理

赵丰

November 15, 2017

1 草稿

幂函数刻画的流场

针对 $w(z) = Az^n, A \in \mathbb{R}, n \geq \frac{1}{2}$。若采用平面极坐标系，则流函数 $\psi = Ar^n \sin n\alpha$ 射线 $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{n}$ 使得 $\psi = 0$，因此是两条流线，若将两射线换成壁面，则其内部流场不受影响。因此 Az^n 可以描述角域内的流动, 共轭速度场为 $v = nAz^{n-1}$，因此可以分 n 是否大于 1 讨论速度场在角点和无穷远点的零极点特性，如图 1所示：

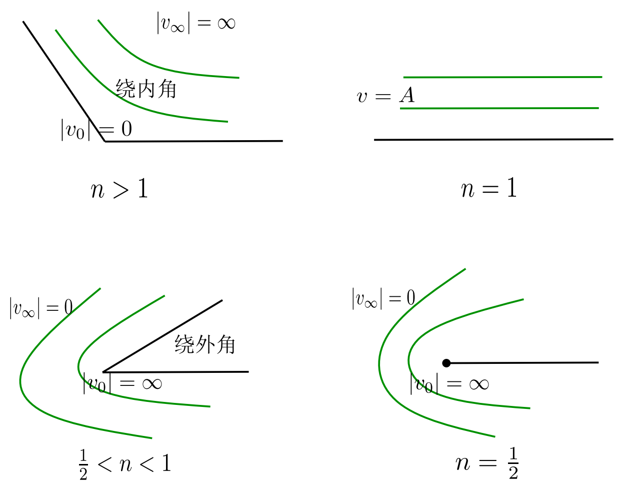

Figure 1: 四类基本解等 φ 线和等 ψ 线的形状

下面利用复势求解圆柱线流问题，考虑沿 x 轴方向的均匀来流 $v_\infty = U$, 原点处有一圆柱，在复平面内投影为一半径为 a 的圆。复势可看成三类基本解的叠加：

$$w(z) = Uz + \frac{k}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \tag{1}$$

其中 Uz 为均匀流场，与无穷远的来流条件相匹配; $\frac{1}{z}$ 为偶极子产生的流场，系数 k 待定，与壁面不可穿透条件相适应; $\ln z$ 为点涡产生的流场, 与流场绕任意不可缩流线的环量为 Γ 相适应。

由不可穿透性条件可以确定 k 的值，(1)式中令 $z = ae^{i\alpha}$, 并取虚部（流函数）为常数得：

$$Ua\sin\alpha - \frac{k}{a}\sin\alpha - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln a = c \tag{2}$$

由 α 的任意性，得 $k = Ua^2$，因此求得复势为：

$$w(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{3}$$

取实部得速度势函数 φ 为：

$$\varphi = Ur\cos\alpha + \frac{Ua^2\cos\alpha}{r} + \frac{\Gamma\alpha}{2\pi} \tag{4}$$

在极坐标下得到速度场为：

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = U(1 - \frac{a^2}{r^2})\cos\alpha \\ v_\alpha &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -U(1 + \frac{a^2}{r^2})\sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \tag{5}$$

若考虑壁面的速度场分布，$r = a$ 因此 $v_r = 0$。

当 $\Gamma = 0$ 即流场速度环量为零时，类似**??**小节讨论的关于圆球绕流问题，在来流方向的前后驻点处 $(\alpha = 0, \pi)$ 速度为零，压强最大。对于壁面 α 角位置的压强，由 Bernoulli 方程可求出 $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin^2\alpha)$

当 $\Gamma \neq 0$ 时（通常由圆柱自身转动引起周围流体的环量），壁面不一定有驻点。若驻点存在，则适合方程 $\frac{dw}{dz} = 0$, 即为下面复二次方程的根：

$$2\pi iUz^2 + \Gamma z - 2\pi iUa^2 = 0 \tag{6}$$

其通解为：

$$z = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2U^2a^2}}{4\pi iU} \tag{7}$$

若 $|\Gamma| > 4\pi Ua$, 则方程的两根都在虚轴上，由于其乘积为 $-a^2$, 所以有一根在壁面内，舍去。若 $\Gamma < 0$，则速度场有一个驻出现在虚轴的负半轴壁面外的地方。

若 $|\Gamma| = 4\pi Ua$, 两根重合，同样考虑 $\Gamma < 0$，这时驻点为 $z = -ia$

若 $|\Gamma| < 4\pi Ua$, 计算两根的模均为 a，因此两驻点均在壁面上，当 $\Gamma < 0$ 时，两驻点虚部为负，关于虚轴对称。

同理可得 $\Gamma \neq 0$ 时壁面压力场为：

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(U^2 - (-2U\sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi a})^2) \tag{8}$$

计算流体对壁面的合力为：

$$\overrightarrow{F} = -\int_0^{2\pi} p\overrightarrow{n}\,d\alpha \tag{9}$$

化为分量形式得 $F_x = 0, F_y = -\int_0^{2\pi} pa\sin\alpha d\alpha = -\rho U\Gamma$, 当 $\Gamma < 0$ 时 $F_y > 0$, 即对于顺时针的环量可以产生升力。此即儒科夫斯基升力定理。

$$\tag{10}$$

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation