笔记整理

赵丰

November 23, 2017

1 草稿

牛顿流体的本构方程

式(**??**)给出了牛顿流体的本构方程，记 $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$, 表示体膨胀系数。(**??**)写为

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \tag{1}$$

上式中第一项为流体静止时的应力，后两项之和为黏性应力。定义流体的力学压强

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}T_{ii} = p - \mu' S_{kk} \tag{2}$$

可以看出若第二黏性应力 $\mu' = 0$，则力学压强 $\bar{p}$ 与热力学压强 p 相等。

NS 方程–牛顿流体的运动方程

式(**??**)给出了 $\mu' = 0$ 时的 Navier-Stokes 方程，这里我们考虑流体不可压的情形，即 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, 此时 (**??**)化为

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \tag{3}$$

其中 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 被称为运动黏性系数。

黏性流体耗散项的影响

在**??**小节中，针对理想流体我们推导了流体内能、焓的变化。对于一般黏性流体的情形，我们将(**??**)式表示的能量方程的产热项和热交换项合并为 Q 于是可得：

$$\frac{D}{Dt}(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \vec{v}) + Q \tag{4}$$

对(**??**)式表示的动量方程两边同时点乘 $\vec{v}$ 可得：

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{T}) \tag{5}$$

将上面两式相减，得到内能的变化为

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\rho}(\nabla \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{T})) + Q \tag{6}$$

化简

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\vec{v}) =&(\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{e_k})\cdot(T_{ij}v_j\vec{e_i})\\ =&\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}v_j+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}T_{ij}\end{aligned}\tag{7}$$

利用(**??**)式

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) =&(v_k\vec{e_k})\cdot(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\vec{e_j})\\ =&v_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\end{aligned}\tag{8}$$

从(7),(8)两式得到：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\vec{v})-\vec{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}T_{ij}\\ &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(-p\delta_{ij}+\lambda S_{kk}\delta_{ij}+2\mu S_{ij})\\ &= -pS_{ii}+\lambda S_{ii}^2+2\mu S_{ij}S_{ij}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{De}{Dt}=-\frac{p}{\rho}S_{ii}+\Phi+Q\tag{9}$$

其中

$$\Phi=\frac{1}{\rho}(\lambda S_{ii}^2+2\mu S_{ij}S_{ij})\tag{10}$$

由上式，$\Phi\leq 0$,Φ 被称为耗散项，其作用是使流体微元的内能增加。由连续性方程(**??**)式,(9)式可改写为

$$\begin{aligned}\frac{De}{Dt} =&\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}+\Phi+Q\\ =&-p\frac{D}{Dt}\frac{1}{\rho}+\Phi+Q\end{aligned}\tag{11}$$

上式与理想流体的内能变化(**??**)式对比可看出, 二者的区别是是否有耗散项 Φ。类似(**??**)式，我们可推出焓的变化公式

$$\frac{Di}{Dt}=\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+\Phi+Q\tag{12}$$

不可压牛顿型流体的封闭方程组与定解条件利用(3)式的结果，对于四个未知数 $\vec{v},p$，有如下 4 个标量偏微分方程组：

$$\begin{cases}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} & =\vec{f}-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\nabla^2\vec{v}\\ \nabla\cdot\vec{v} & =0\end{cases}\tag{13}$$

求解该偏微分方程组需要给出初始条件，即 $t=0$ 时刻速度场的分布 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_0}$，利用不可压条件，对 (3)式两边取散度，可求出 $t=0$ 时压力场满足 Poisson 方程

$$\nabla\cdot(\overrightarrow{v}\cdot\nabla\overrightarrow{v})=-\frac{\rho}{\nabla}^2 p+\nabla\cdot\overrightarrow{f} \tag{14}$$

其中用到了

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla^2\overrightarrow{v}) =&(\frac{\partial}{\partial x_k}\overrightarrow{e_k})\cdot(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\overrightarrow{e_i})\\ =&\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j^2\partial x_i}\\ =&0\end{aligned}$$

求解(13)式表示的方程组还需要适当的边界条件，具体有

- 固壁无滑移条件:$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_b}$
- 界面条件
  - 界面不可穿透条件 $\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\varphi\cdot\nabla F=0$
  - 无穷远速度条件
  - 压力条件，忽略表面张力的影响，一般取液体自由面的压力等于大气压与液面切应力为零。

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation