笔记整理

赵丰

October 17, 2017

1 第五周第一次课

积分型守恒方程应用的两个例子

1. 流体对水平弯管的作用力

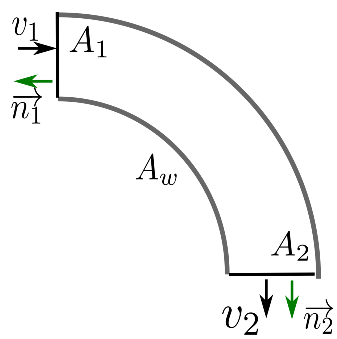

Figure 1: 水平弯管

如上图所示，已知管的入口横截面和出口横截面面积分别为 A_1,A_2。进水口速度为 v_1, 压强为 p_1, 流体假设为理想不可压定常流，密度为 ρ, 求流体对水平弯管的作用力。

解: 坐标系选为地面系，控制体选为水平弯管，由连续性方程有：

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{1}$$

由 Bernoulli 方程有：

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \tag{2}$$

由动量守恒积分方程

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{T_n} dA + \iiint_{\tau} \rho \overrightarrow{f} \tau - \oiint_{\Sigma} \rho \overrightarrow{v} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}) dA = 0$$

上式中 T_n 是表面力，在 A_i 面上 $(i=1,2)$，由于 $T_n=-p_i\overrightarrow{n_i}$, 而在 A_w 面上，设所求的作用力为 $\overrightarrow{F}$ 则弯管对流体的作用力为 $-\overrightarrow{F}$, 因此第一项化简为 $-\overrightarrow{F}-p_1A_1\overrightarrow{n_1}-p_2A_2\overrightarrow{n_2}$。上式第二项为体积力的贡献，即为重力势 $\rho\overrightarrow{g}\tau$, 其中 τ 为管内流体体积。上式第三项为动量的输运项，考虑到 $\overrightarrow{v_1}=-v_1\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{v_2}=v_2\overrightarrow{n_2}$, 可得到第三项（不带前面负号）为 $\rho v_1^2A_1\overrightarrow{n_1}+\rho v_2^2A_2\overrightarrow{n_2}$, 因此动量守恒方程最终化为

$$\overrightarrow{F}=\rho g\tau-p_1A_1\overrightarrow{n_1}-p_2A_2\overrightarrow{n_2}-\rho v_1^2A_1\overrightarrow{n_1}-\rho v_2^2A_2\overrightarrow{n_2} \tag{3}$$

从式(1)和式(2)中解出 v_2,p_2 代入式(3)中得到流体对水平弯管的作用力为:

$$\overrightarrow{F}=\rho\overrightarrow{g}\tau-p_1A_1\overrightarrow{n_1}-(\frac{\rho v_1^2}{2}-\frac{\rho v_1^2A_1^2}{2A_2^2}+p_1)A_2\overrightarrow{n_2}-\rho v_1^2A_1\overrightarrow{n_1}-\rho\frac{v_1^2A_1^2}{A_2^2}A_2\overrightarrow{n_2} \tag{4}$$

若 $A_1=A_2$, 则可推出 $v_1=v_2,p_1=p_2$, 作用力化简为：

$$\overrightarrow{F}=\rho\overrightarrow{g}\tau-(p_1+\rho v_1^2)(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}) \tag{5}$$

由于 $\overrightarrow{g}$ 与水平弯管平面垂直，当 $\overrightarrow{n_1}=-\overrightarrow{n_2}$，即管是直的，作用力达到最小，这对消防员灭火时使用喷水管的方法具有一定指导意义。

2. 叶轮机械的功率

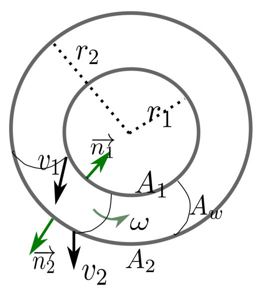

Figure 2: 叶轮机械示意图

叶轮机械的简化模型如上图所示，转动角速度为常数 $\overrightarrow{\omega}$, 纵向 $\overrightarrow{e_z}$ 设为单位长度，流体假设为理想不可压定常流，且速度分布均匀，我们取旋转中的叶轮机为参考系，以叶轮机为控制体。由于我们选的参考系是非惯性系，需要考虑惯性力项，为此首选考虑速度的分解，设 $\overrightarrow{u}$ 是叶轮机上某位置对地速度，$\overrightarrow{w}$ 是该位置流体微团相对叶轮机的速度，$\overrightarrow{v}$ 是该位置流体微团对地速度，速度分解关系如下图所示：且满足 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}$, 其中 β 被称为安装角，α 为进气（出气）角。该位置流体微团对地的加速度

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r})+2\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{w} \tag{6}$$

化简可得:

$$-\overrightarrow{a}=\omega^2\overrightarrow{r}+2\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{\omega} \tag{7}$$

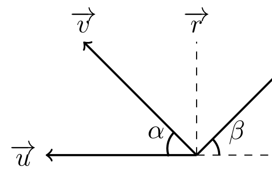

Figure 3: 速度分解关系示意图

由动量矩守恒积分方程有：

$$\underbrace{\iiint\limits_{D} \rho(\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{a}))d\tau}_{I_1} + \underbrace{\oiint\limits_{\Sigma}(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{T_n})dA}_{I_2} - \underbrace{\oiint\limits_{\Sigma}(\overrightarrow{r} \times \rho\overrightarrow{w})(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n})dA}_{I_3} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iiint\limits_{D} \rho(\overrightarrow{r} \times (-\overrightarrow{a}))d\tau, \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}\text{与叶轮机平面垂直} \\
&= \iiint\limits_{D} \rho(\overrightarrow{r} \times (\omega^2\overrightarrow{r} + 2\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{\omega}))d\tau, \text{代入(7)} \\
&=2 \iiint\limits_{D} \rho((\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\omega})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{\omega})d\tau, A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \\
&= -2 \iiint\limits_{D} \rho(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{\omega} d\tau \\
&= -2 \left(\int_{r_1}^{r_2} r dr\right) \left(\int_0^{2\pi} \rho(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{w})d\theta\right) \overrightarrow{\omega}, \text{按柱坐标积分} \\
&= -Q_m(\omega r_2^2 - \omega r_1^2)\overrightarrow{e_z}, \text{质量流量的定义} Q_m = \int_0^{2\pi} \rho(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{w})d\theta \\
&= -Q_m(u_2 r_2 - u_1 r_1)\overrightarrow{e_z}, \text{入口和出口处牵连速度为圆周运动线速度} && (9) \\
& && (10)
\end{aligned}$$

由于相对速度 $\overrightarrow{u}$ 沿侧面切线方向，与 $\overrightarrow{n}$ 点积为零，侧面积分为零，I_3 中面积分只需考虑 $A_1 \cup A_2$, 由连续性方程:$Q_m = -\rho_1\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{n_1}A_1 = \rho_2\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{n_2}A_2$, 同样由图3的几何关系, 在 A_1 面上有 $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{w} = -r_1 w_1 \cos\beta_1\overrightarrow{e_z}$ 因此对 A_1 上的面积分我们有

$$\oiint\limits_{A_1}(\overrightarrow{r} \times \rho\overrightarrow{w})(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n})dA = Q_m r_1 w_1 \cos\beta_1\overrightarrow{e_z} \quad (11)$$

同理可求出 A_2 上的面积分为 $-Q_m r_2 w_2 \cos\beta_2\overrightarrow{e_z}$, 进而得到

$$I_3 = Q_m(r_1 w_1 \cos\beta_1 - r_2 w_2 \cos\beta_2)\overrightarrow{e_z} \quad (12)$$

I_2 包含叶片侧面对流体的力矩，通过式(8)可以求出该力矩。由于是理想流体,$\overrightarrow{T_n} = -p\overrightarrow{n}$ 与 $\overrightarrow{r}$ 平行，因此进出口面 A_1, A_2 无力矩，于是我们得到：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M} =& I_2 \\
=& -I_1 + I_3 \\
=& Q_m(u_2r_2 - u_1r_1)\overrightarrow{e_z} + Q_m(r_1w_1\cos\beta_1 - r_2w_2\cos\beta_2)\overrightarrow{e_z}, \text{式(9)和(12)} \\
=& Q_m[r_2(u_2 - w_2\cos\beta_2) - r_1(u_1 - w_1\cos\beta_1)]\overrightarrow{e_z} \\
=& Q_m(r_2v_2\cos\alpha_2 - r_1v_1\cos\alpha_1)\overrightarrow{e_z}, \text{图3中几何关系}
\end{aligned}
$$

进一步我们可求出 $\overrightarrow{M}$ 求出叶轮机的功率 $N = \overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\omega}$。

(13)

(14)

(15)

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian