

# 笔记整理

赵丰

November 7, 2017

## Contents

1 第二周第二次课	1
2 第三周第一次课	4
3 第四周第一次课	9
4 第四周第二次课	12
5 第五周第一次课	14
6 第五周第二次课	17
7 第六周第一次课	21
8 第六周第二次课	23
9 第七周第一次课	28
10 第七周第二次课	32
11 第八周第一次课	36

## 1 第二周第二次课

### 迹线

某一流体质点的运动轨迹, 其轨迹方程为常微分方程组  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$ ,  $\vec{x}$  为流体质点在  $t$  时刻的位置, 同时也依赖于初始位置  $\vec{x}_0$  (常微分方程组初值);  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  为速度场, 每个分量都是空间位置和时间  $t$  的函数, 常微分方程组写成分量的形式为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

如对于如下的速度场

$$(u, v, w) = \left( \frac{x}{1+t}, y, z \right) \quad (1.2)$$

$t = 0$  时初值条件为  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ , 可直接求出上述常微分方程 (ODE) 有唯一解:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = e^t \\ z = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

这是关于  $t$  的参数曲线, 可以通过消元得到  $y = e^{x-1}, z = 1$ , 这是用空间两个曲面的交线表示曲线的方法。

### 流线

数学定义为

$$\frac{d\vec{x}(s)}{ds} \times \vec{v} = \vec{0} \quad (1.4)$$

上述定义在给定速度场后描述了空间这样一族曲线, 每条曲线每点的切线方向与该点的速度场方向一致。使用向量外积的定义得到等价的定义形式

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (1.5)$$

这里时间  $t$  是常数。上述方程如取  $x$  为自变量, 可得到关于  $(y(x), z(x))$  的常微分方程组。比如对  $t = 0$  时刻(1.2)式给出的速度场为  $(u, v, w) = (x, y, z)$ , 求过  $(1, 1, 1)$  点的流线即解 ODE:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \end{cases} \quad (1.6)$$

初值条件是  $y(1) = 1, z(1) = 1$ , 从而有唯一解  $y = x, z = x$ 。可以看出, 对同一个流场, 流线和迹线是不同的。

但对于定常流, 即  $\vec{v}$  不随时间变化, 流线簇和迹线簇重合。比如考虑平面流场  $(u, v) = (ax, -ay)$ , (1.1)给出曲线簇  $x = c_1 e^{at}, y = c_2 e^{-at}$ , (1.5)给出曲线簇  $xy = c$ , 它们表示同一曲线簇。

其他概念:

脉线、时间线、流管、流体线、流体面

### 流体微团

考虑一流体微团 (系统) 研究其变形规律: 由图1可以看到,  $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B'} =$

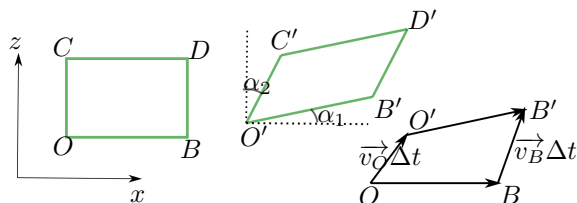


Figure 1: xz 平面矩形的变形

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}$ , 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'B'} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{OO'} \\ &= \Delta x \vec{i} + \vec{v}_B \Delta t - \vec{v}_O \Delta t\end{aligned}\quad (1.7)$$

又

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}(x + \Delta x, y, z, t) \\ \vec{v}_O &= \vec{v}(x, y, z, t)\end{aligned}$$

所以(1.7)式化为:

$$\overrightarrow{O'B'} = \Delta x \vec{i} + \Delta x \Delta t \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \quad (1.8)$$

进一步设速度场  $\vec{v} = (u, v, w)$ , 则上式在直角坐标系下为:

$$\overrightarrow{O'B'} = [(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t) \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta t \vec{k}] \Delta x \quad (1.9)$$

同样的方法可求出  $\overrightarrow{C'D'}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'D'} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{CC'} \\ &= \Delta x \vec{i} + [\vec{v}(x + \Delta x, y, z + \Delta z, t) - \vec{v}(x, y, z + \Delta z, t)] \Delta t \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta x \Delta t \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{C'D'}\end{aligned}$$

所以正六面体流体微团的微小变形后仍是平行六面体, 其变形后的体积可用平行六面体体积公式求得。

设变形前正六面体由自  $O'$  出发的向量  $\overrightarrow{O'A} = \Delta y \vec{j}, \overrightarrow{O'B} = \Delta x \vec{i}, \overrightarrow{O'C} = \Delta z \vec{k}$  张成, 变形后的六面体由自  $O'$  出发的向量  $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}$  张成, 对  $xy, yz$  两个表面类似的分析可以得到与(1.9)类似的式子:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'C'} &= [\frac{\partial u}{\partial z} \Delta t \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta t \vec{j} + (1 + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t) \vec{k}] \Delta z \\ \overrightarrow{O'A'} &= [\frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \vec{i} + (1 + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta t) \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta t \vec{k}] \Delta y\end{aligned}$$

变形前正六面体体积  $\Delta\tau(t) = \Delta x \Delta y \Delta z$ , 经过  $\Delta t$  时间变形后六面体体积使用混合积公式 [1] 并略去高阶小为:

$$\Delta\tau(t + \Delta t) = [1 + (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) \Delta t] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.10)$$

定义流体微团的瞬时**体膨胀率**为单位体积变化的速率, 即

$$\Delta\tau'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau(t + \Delta t) - \Delta\tau(t)}{\Delta\tau(t) \Delta t} \quad (1.11)$$

于是可以得到体膨胀率为  $\nabla \cdot \vec{v}$ , 为速度场的散度。当速度场的散度处处为 0 时, 流体为不可压缩流体, 变形前后体积不变。

类似的有**线变形率**的定义, 对于  $x$  方向为:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{O'B'}| - |\vec{OB}|}{|\vec{OB}| \Delta t} \quad (1.12)$$

其中使用 Taylor 近似从(1.9)式出发有:  $|\vec{O'B'}| \approx (1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t) \Delta x$  于是可以求得  $x$  方向的线变形率为  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , 进而得到体膨胀率为三个方向线变形率之和的结论。

#### 流体的旋转角度

对于流体绕  $y$  轴的旋转角度定义为  $\vec{O'B'}$  相对于  $\vec{OB}$  转过的角度与  $\vec{O'C'}$  相对于  $\vec{OC}$  转过的角度的平均值。由于转角  $\alpha$  很小, 有近似  $\tan \alpha \approx \alpha$ , 所以由(1.9)式

$$\begin{aligned} \angle \langle \vec{O'B'}, \vec{OB} \rangle &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \Delta t}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t} \\ &\approx \frac{\partial w}{\partial x} \Delta t (1 - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t) \end{aligned}$$

略去二阶小  $(\Delta t)^2$  即得到图中的  $\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$ , 因为顺时针方向为负, 所以转角为  $-\alpha_1$ 。同理求出图中的  $\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}$  所以流体绕  $y$  轴的旋转角度为

$$\begin{aligned} \omega_y &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

#### 流体的角变形率

对于流体在  $xz$  平面的角变形率:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

## 2 第三周第一次课

### 流动运动学常用物理量的张量表示

变形率张量  $\mathbf{S} = [s_{ij}] = \frac{1}{2} (\Delta \vec{v} + (\Delta \vec{v})^T)$ , 类似弹性力学中的应变张量, 为二阶对称张量。反称张量  $\mathbf{\Omega} = [\Omega_{ij}] = [\epsilon_{ijk} \omega_k]$ , 其中  $\omega = \frac{1}{2} \Delta \times \mathbf{v}$  并且我们有:

$$\nabla \vec{v} = \mathbf{S} - \mathbf{\Omega} [2] \quad (2.1)$$

其中速度梯度张量  $\nabla \vec{v} = [v_{ij}] = [\frac{\partial v_i}{\partial x_j}]$ <sup>1</sup>

#### 运动分析

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{\Omega}$  前是减号不是加号

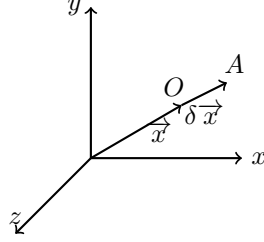


Figure 2: 流体质点从  $O$  点经  $\Delta t$  时间运动到  $A$  点

Helmholz 速度分解定理, 参考图2, 有:

$$\vec{v}_A = v_j(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) \vec{e}_j^T \quad (2.2)$$

$$= [v_j(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta x_i] \vec{e}_j^T \quad (2.3)$$

$$= [v_j(\vec{x}, t) + s_{ij}(\vec{x}, t) \delta x_i + \Omega_{ij}((\vec{x}, t)) \delta x_i] \vec{e}_j^T \quad (2.4)$$

$$= \vec{v}_O + \delta x \cdot \vec{S}_O + \vec{\omega}_O \times \delta \vec{x} \quad (2.5)$$

其中最后一式用到了  $\Omega$  和  $\vec{\omega}$  的关系式:

$$\Omega \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x} [3] \quad (2.6)$$

### 涡量

定义为:  $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$ , 其散度为零。

对于有相同流线方程的流场, 其涡量场可以不同。比如流场

$$\begin{cases} u = -y \\ v = x \end{cases} \quad (a) \quad \begin{cases} u = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ v = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad (b) \quad (2.7)$$

二者的流线簇均为  $x^2 + y^2 = c$ , 但 (a) 中涡量为  $2\vec{k}$  (b) 中速度场在极坐标下为  $\frac{\vec{e}_\theta}{r}$ , 对于非原点处, 由极坐标系散度公式 [4] 得其散度为  $\frac{\partial 1/r}{\partial \theta} = 0$ , 由极坐标系旋度公式 [5] 得涡量为  $\vec{0}$ 。在原点处, 由格林公式, 速度的环量 (环量积分) 等于涡通量:

$$\Gamma_l = \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{x} \quad (2.8)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r} \cdot \vec{e}_\theta r d\theta \quad (2.9)$$

$$= 2\pi \quad (2.10)$$

另外不难验证  $\arctan \frac{y}{x}$  是后一个流场的势函数, 在极坐标下其表示为  $\theta$ 。

其他概念:

涡线、涡面、涡管

---

<sup>2</sup>  $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  是  $v_{ji}$ , 与(2.1)不矛盾。

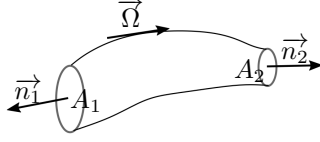


Figure 3: 涡通量的守恒性质

参考图3, 对于涡管的任一两个横截面  $A_1, A_2$ , 有

$$\iint_{A_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dA = \iint_{A_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dA \quad (2.11)$$

即沿涡管各截面涡通量大小相等。

#### 给定流场的散度与涡量求速度场

已知区域  $D$  内的速度场  $\vec{v}$  在区域内满足如下的偏微分方程 (PDE):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = \theta(\vec{x}) \\ \nabla \times \vec{v} = \vec{\Omega}(\vec{x}) \end{cases} \quad (2.12)$$

在边界上给出法向速度的大小:  $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_{bn}(\vec{x})$  则由 Poisson 方程在 Neumann 边界条件下解的性质可以得到速度场是唯一确定的。

首先运用 PDE 的叠加原理将原问题分解为求如下三个 PDE:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v}_E = \theta(\vec{x}) \\ \nabla \times \vec{v}_E = \vec{0} \end{cases} (a) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{v}_V = 0 \\ \nabla \times \vec{v}_V = \vec{\Omega}(\vec{x}) \end{cases} (b) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \nabla \times \vec{u} = \vec{0} \end{cases} (c) \quad (2.13)$$

其中 (2.13.c) 式附加第二类边界条件  $\vec{u} \cdot \vec{n} = v_{bn}(\vec{x}) - \vec{v}_E \cdot \vec{n} - \vec{v}_V \cdot \vec{n}$

对于 (2.13.a), 由无旋条件可知存在势场  $\Phi_E$  使得  $\vec{v}_E = \nabla \Phi_E$ , 于是得到  $\Phi_E$  在求解区域内满足 Poisson 方程:

$$\nabla^2 \Phi_E(\vec{x}) = \theta(\vec{x}) \quad (2.14)$$

该方程可由三维 Laplace 方程的基本解  $\frac{1}{|\vec{x}|}$  与  $\theta(\vec{x})$  做卷积得到 [6], 写成分量的形式即为:

$$\Phi_E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\theta(\xi, \eta, \zeta)}{R(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.15)$$

这里

$$R(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = |\vec{R}((x, y, z; \xi, \eta, \zeta))| \quad (2.16)$$

$$\vec{R}((x, y, z; \xi, \eta, \zeta)) = (x - \xi) \vec{i} + (y - \eta) \vec{j} + (z - \zeta) \vec{k} \quad (2.17)$$

直接计算得到:  $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ , 其中梯度算子是关于  $(x, y, z)$  的。所以我们有:

$$\vec{v}_E = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\theta(\xi, \eta, \zeta) \vec{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.18)$$

比如散度场  $\theta$  为  $\delta$  函数, 可以得到点源诱导的速度场为:

$$\vec{v}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.19)$$

这与万有引力场和点电荷诱导的静电场形式相同。

对于 (2.13.b), 难以得到一般条件下的闭式解, 因此对涡量  $\Omega$  在求解域的边界上附加条件

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.20)$$

为此, 我们先用张量分析的  $\epsilon - \delta$  恒等式  $\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijm} = \delta_{jl}\delta_{mn} - \delta_{mj}\delta_{ln}$  证明如下  
的等式:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{A}) \quad (2.21)$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \vec{e}_i) \\ &= \epsilon_{nmi} \frac{\partial(\epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j})}{\partial x_m} \vec{e}_n \\ &= (\delta_{nj}\delta_{mk} - \delta_{nk}\delta_{mj}) \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j^2} \vec{e}_n^3 \\ &= (\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_n^2} \vec{e}_n) - (\frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j^2} \vec{e}_j) \\ &= (\frac{\partial}{\partial x_n} (\frac{\partial A_k}{\partial x_n} \vec{e}_n)) - (\frac{\partial}{\partial x_k} (\frac{\partial A_n}{\partial x_j} \vec{e}_n \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k) \\ &= (\frac{\partial}{\partial x_n} (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{e}_n) - (\frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \vec{A}) \cdot \vec{e}_j) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{A}) \end{aligned}$$

□

运用上面的等式, 我们推导 **Biot-Savart 定律**:

首先假设 (2.13.b) 中  $\vec{v}_V$  可以写成  $\vec{v}_V = \nabla \times \vec{A}$ , 则 (2.13.b) 中第一式自然满足, 而第二式由(2.21)式可化为:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{A}) = \vec{\Omega} \quad (2.22)$$

---

<sup>3</sup>  $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j^2} \vec{e}_n$  是对  $A$  的各个分量求 Laplace, 相当于对矢量  $A$  先求梯度再求散度。

下面我们证明对于区域  $D$ ，不考虑边界条件,(2.22)的一个解为:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)}{R(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.23)$$

*Proof.* 首先证明  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , 记  $\nabla$  是关于  $(x, y, z)$  求梯度, 而  $\nabla'$  是关于  $\xi, \eta, \zeta$  求梯度, 于是有:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_D \vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{\Omega}}{R} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}}{R} dS \\ &= 0 \quad (\text{由式(2.20)}) \end{aligned}$$

另一方面, 与(2.15)式类似, 由基本解与  $\Omega$  做卷积得到:

$$-\nabla \cdot (\nabla \vec{A}) = \vec{\Omega} \quad (2.24)$$

从而我们得到了(2.22)式的一个特解。  $\square$

因此对于无散有旋的情形 (2.13.b), 我们得到速度场为:

$$\vec{v}_V = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{\Omega} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{\Omega} \times \vec{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.26)$$

以**直线涡诱导的速度场**为例, 考虑一空间涡量场为:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = \begin{cases} \infty, & (0, 0, z) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.27)$$

其余两个方向分量为零, 并且涡通量为常数  $\Gamma$ , 即对于区域  $A_\epsilon(k) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 < \epsilon, z = k\}$ , 有

$$\iint_{A_\epsilon(k)} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \Gamma \quad (2.28)$$



可以求出上述直线涡产生的速度场沿  $z$  轴方向不变, 对于其  $x, y$  平面内的速度场, 与式 (2.7.b) 描述的相同。下面用(2.26)式直接求该速度场, 这里  $D = \mathbb{R}^3$ , 代表全空间:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_V &= \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{\Omega} \times \vec{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta, \text{ 化为累次积分, 先算 } \xi, \eta \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \iint_{A_\epsilon(\zeta)} \frac{\vec{\Omega} \times \vec{R}}{R^3} d\xi d\eta \right) d\zeta, \epsilon \text{ 可任意小} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\Gamma \vec{k} \times \vec{R}'}{R'^3} \right) d\zeta, R' = R(x, y, z; 0, 0, \zeta) \\
 &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{x \vec{j} - y \vec{i}}{(x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) d\zeta \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-y \vec{i} + x \vec{j}}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

### 3 第四周第一次课

针对式 (2.13.c), 结合附加的第二类边界条件, 由无旋条件, 我们设  $\vec{u} = \nabla \phi$ , 则  $\phi$  满足 Neumann 边界条件的 PDE:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}|_{bn} = v_{bn}(\vec{x}) - \vec{v}_E \cdot \vec{n} - \vec{v}_N \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $\vec{v}_E, \vec{v}_N$  是 (2.13.a), (2.13.b) 的特解。方程(3.1)可以使用格林函数法求解 [7],

#### 流体动力学积分型方程

**质量体**的边界是随时间变化的, 而**控制体**的边界是不变的。**Reynolds 输运定理**是联系质量体和控制体的桥梁, 可以把关于质量体的守恒定律轻松转化为关于控制体的守恒定律。它的陈述为: 某一质量体的某一物理量在某时刻的随体导数等于该时刻相同体积相同形状的控制体该物理量的局部导数与该物理量的通过该控制体的表面输运量。

下面设物理量为  $Q$ , 时刻为  $t_0$ , 用  $D^*(t)$  表示质量体, 而用  $D$  表示  $D^*(t_0)$ ,  $\Sigma$  表示  $D$  的边界曲面,  $\vec{v}$  是流体速度场,  $d\tau$  表示体积微元。则有

$$\frac{D}{Dt} \left[ \iiint_{D^*(t)} Q d\tau \right]_{t=t_0} = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} Q \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (3.2)$$

下面给出两种推导，

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left[ \iiint_{D^*(t)} Q(\vec{x}, t) d\tau \right] &= \iiint_{D^*(t)} \frac{D}{Dt} [Q(\vec{x}, t) d\tau] \\
&= \iiint_{D^*(t)} \left[ \frac{DQ}{Dt} d\tau + Q \frac{D(d\tau)}{Dt} \right] \\
&= \iiint_{D^*(t)} \left[ \frac{DQ}{Dt} + Q \nabla \cdot \vec{v} \right] d\tau, \text{ 体膨胀率的定义} \\
&= \iiint_{D^*(t)} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla Q + Q \nabla \cdot \vec{v} \right] d\tau \\
&= \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial t} d\tau + \iiint_{D^*(t)} \nabla \cdot (Q \vec{v}) d\tau \\
&= \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} Q \vec{v} \cdot \vec{n} dA, \text{ Gauss 公式}
\end{aligned}$$

另一个推导要结合图示和一些几何直观, 如图4所示:

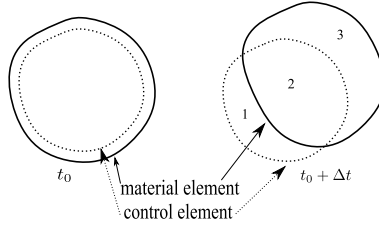


Figure 4: 雷诺输运方程推导图示

首先由随体导数的定义:

$$\frac{D}{Dt} \left[ \iiint_{D^*(t)} Q d\tau \right]_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\iiint_{D^*(t_0 + \Delta t)} Q(\vec{x}, t_0 + \Delta t) d\tau - \iiint_{D^*(t_0)} Q(\vec{x}, t_0) d\tau}{\Delta t} \right] \quad (3.3)$$

积分区域  $D^*(t_0 + \Delta t)$  可以写成  $(1 + 2) + (3 - 1)$ , 数字所代表的区域如图4所示,

注意到 (1+2) 仍表示控制体描述的区域, 与  $t_0$  时刻相同, 所以我们进一步有:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left[ \iiint_{D^*(t)} Q d\tau \right]_{t=t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\iiint_{D^*(t_0)} Q(\vec{x}, t_0 + \Delta t) d\tau - \iiint_{D^*(t_0)} Q(\vec{x}, t_0) d\tau}{\Delta t} \right] \\
&+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\iiint_{D_3^*(t_0+\Delta t)} Q(\vec{x}, t_0 + \Delta t) d\tau - \iiint_{D_1^*(t_0+\Delta t)} Q(\vec{x}, t_0 + \Delta t) d\tau}{\Delta t} \right] \\
&= \iiint_{D^*(t_0)} \frac{\partial Q}{\partial t} d\tau + \oiint_{\Sigma} Q \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (3.4)
\end{aligned}$$

式(3.4)中第一项由于控制体的体积形状不变, 所以对时间求导数可以挪到积分号里面; 第二项根据问题的几何性质, 从 1 到 3 的体积变化由表面的流量引起, 所以可以将体积的瞬时变化率转换为面积分的形式。

Reynolds 输运公式中取  $Q$  为不同的物理量, 可以将 Lagrange 观点下的守恒方程 (关于质量体) 转化为 Euler 观点下的守恒方程 (关于控制体)。

**质量守恒积分方程:** 令  $Q =$  密度  $\rho$ , 该守恒方程对任意坐标系均成立, 对于质量体有:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{D^*(t)} \rho d\tau = 0 \quad (3.5)$$

应用 Reynolds 输运公式得到, 对于控制体的质量守恒方程为

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \oiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (3.6)$$

即控制体内质量的变化等于从控制体表面流过的质量。

我们把质量守恒定律应用于定常流, 即  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , 从而得到

$$\oiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (3.7)$$

对于流管, 其侧面密度流量为零, 如下图所示:

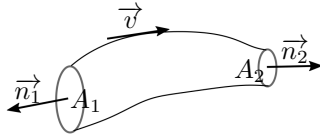


Figure 5: 定常流流管流量守恒的性质

我们有

$$\iint_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_1 dA = - \iint_{A_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_2 dA \quad (3.8)$$

若流动是均匀的, 则有  $\rho_1 v_{1n} A_1 = \rho_2 v_{2n} A_2$ , 其中  $v_{in}$  表示面  $A_i$  法向的速度分量。

**动量守恒积分方程:** 令  $Q = \rho \vec{v}$  (矢量), 对于质量体, 我们有

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{D^*(t)} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{D^*(t)} \rho \vec{f} d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \rho \vec{T}_n dA \quad (3.9)$$

应用 Reynolds 输运公式得到, 对于控制体的动量守恒方程为

$$\iiint_D \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau = - \oint_{\Sigma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho \vec{v} dA + \iiint_{D^*(t)} \rho \vec{f} d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \rho \vec{T}_n dA \quad (3.10)$$

**动量矩守恒积分方程:** 令  $Q = \rho(\vec{r} \times \vec{v})$  (矢量), 对于质量体, 我们有

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{D^*(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{v}) d\tau = \iiint_{D^*(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{f}) d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{T}_n) dA \quad (3.11)$$

应用 Reynolds 输运公式得到, 对于控制体的动量矩守恒方程为

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r} \times \vec{v}) d\tau = - \oint_{\Sigma^*(t)} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{r} \times \vec{v} dA + \iiint_{D^*(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{f}) d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \rho(\vec{r} \times \vec{T}_n) dA \quad (3.12)$$

**能量守恒积分方程:** 令  $Q = \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2)$ ,  $e$  是单位质量流体的内能

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{D^*(t)} \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) d\tau = \iiint_{D^*(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \vec{T}_n \cdot \vec{v} dA + \iiint_{D^*(t)} \rho(\dot{q} + q_R) d\tau + \oint_{\Sigma^*(t)} \lambda \vec{n} \cdot \nabla T dA \quad (3.13)$$

应用 Reynolds 输运公式即可将上述方程改写为控制体的形式, 这里略去。

## 4 第四周第二次课

下面我们针对两组假设条件下的能量守恒积分方程进行化简: 第一组假设

- 理想流体, 表面力  $T_n = -p \vec{n}$
- 有势场, 存在标量函数  $\Pi$ , 使得  $\vec{f} = -\nabla \Pi$
- 绝热

- 定常流，流体任意物理量  $Q$  只与空间坐标有关，与时间无关

在第一组假设下，能量守恒积分方程可化为

$$\oint_{\Sigma} \rho \left( e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \iiint_D \rho (\nabla \Pi) \cdot \vec{v} d\tau + \oint_{\Sigma} p \vec{n} \cdot \vec{v} dA = 0 \quad (4.1)$$

我们尝试把上式第二项的体积分化为面积分，为此用到：

$$\begin{aligned} \rho (\nabla \Pi) \cdot \vec{v} &= \nabla \cdot (\Pi \rho \vec{v}) - \Pi \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ &= \nabla \cdot (\Pi \rho \vec{v}) \quad \text{定常流的连续性方程} \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\oint_{\Sigma} \rho \left[ \Pi + \frac{p}{\rho} + e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (4.2)$$

上式中第一项  $\Pi$  表示体积势的贡献，第二项和第三项之和表示焓（内能与压力势之和），最后一项表示动能。

如果我们取  $D$  是一个流管，如图4所示，侧面积分为零，因此我们有

$$\oint_{A_1} \rho \left[ \Pi + \frac{p}{\rho} + e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = - \oint_{A_2} \rho \left[ \Pi + \frac{p}{\rho} + e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (4.3)$$

假设面积  $A_1, A_2$  很小流动可以看作均匀的，从而

$$\rho \left[ \Pi_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{1}{2} |\vec{v}_1|^2 \right] (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) A_1 = - \rho \left[ \Pi_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{1}{2} |\vec{v}_2|^2 \right] (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) A_2 \quad (4.4)$$

代入微元流管的连续性方程  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{n})A_1 = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{n})A_2$ ，我们得到

$$\Pi_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{1}{2} |\vec{v}_1|^2 = \Pi_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{1}{2} |\vec{v}_2|^2 \quad (4.5)$$

因此沿流线，我们得到第一组假设下的 Bernoulli 方程

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = c \quad (4.6)$$

第二组假设

- 理想流体
- 有势场
- 不可压缩条件，流体微团体积不随时间变化，满足  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$
- 定常流

在第二组假设下，由于体膨胀做功的部分为零，由热力学第一定律，内能的变化只与热交换有关，因此在能量守恒方程中我们可以将内能与热交换项分离出来，从而得到(4.1)式，但此时  $e = 0$ ，类似的化简得到在第二组假设下的 Bernoulli 方程

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 = c \quad (4.7)$$

进一步假设有势场是重力场，即  $\Pi = gz, z$  代表高度方向坐标，则得到 Bernoulli 方程的常用形式：

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 = c \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

## 5 第五周第一次课

积分型守恒方程应用的两个例子

### 1. 流体对水平弯管的作用力

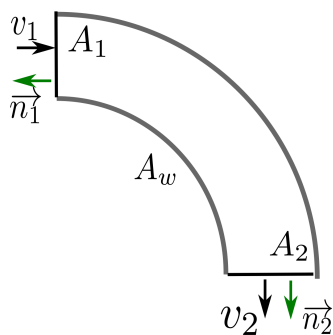


Figure 6: 水平弯管

如上图所示，已知管的入口横截面和出口横截面面积分别为  $A_1, A_2$ 。进水口速度为  $v_1$ ，压强为  $p_1$ ，流体假设为理想不可压定常流，密度为  $\rho$ ，求流体对水平弯管的作用力。

解：坐标系选为地面系，控制体选为水平弯管，由连续性方程有：

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (5.1)$$

由 Bernoulli 方程有：

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (5.2)$$

由动量守恒积分方程

$$\oint_{\Sigma} \vec{T}_n dA + \iiint_{\tau} \rho \vec{f} \tau - \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

上式中  $T_n$  是表面力, 在  $A_i$  面上 ( $i = 1, 2$ ), 由于  $T_n = -p_i \vec{n}_i$ , 而在  $A_w$  面上, 设所求的作用力为  $\vec{F}$  则弯管对流体的作用力为  $-\vec{F}$ , 因此第一项简化为  $-\vec{F} - p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2$ 。上式第二项为体积力的贡献, 即为重力势  $\rho \vec{g} \tau$ , 其中  $\tau$  为管内流体体积。上式第三项为动量的输运项, 考虑到  $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{n}_1, \vec{v}_2 = v_2 \vec{n}_2$ , 可得到第三项 (不带前面负号) 为  $\rho v_1^2 A_1 \vec{n}_1 + \rho v_2^2 A_2 \vec{n}_2$ , 因此动量守恒方程最终化为

$$\vec{F} = \rho g \tau - p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2 - \rho v_1^2 A_1 \vec{n}_1 - \rho v_2^2 A_2 \vec{n}_2 \quad (5.3)$$

从式(5.1)和式(5.2)中解出  $v_2, p_2$  代入式(5.3)中得到流体对水平弯管的作用力为:

$$\vec{F} = \rho \vec{g} \tau - p_1 A_1 \vec{n}_1 - \left( \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_1^2 A_1^2}{2 A_2^2} + p_1 \right) A_2 \vec{n}_2 - \rho v_1^2 A_1 \vec{n}_1 - \rho \frac{v_1^2 A_1^2}{A_2^2} A_2 \vec{n}_2 \quad (5.4)$$

若  $A_1 = A_2$ , 则可推出  $v_1 = v_2, p_1 = p_2$ , 作用力化简为:

$$\vec{F} = \rho \vec{g} \tau - (p_1 + \rho v_1^2) (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \quad (5.5)$$

由于  $\vec{g}$  与水平弯管平面垂直, 当  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ , 即管是直的, 作用力达到最小, 这对消防员灭火时使用喷水管的方法具有一定指导意义。

## 2. 叶轮机械的功率

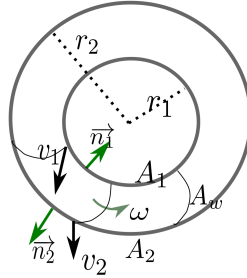


Figure 7: 叶轮机械示意图

叶轮机械的简化模型如上图所示, 转动角速度为常数  $\vec{\omega}$ , 纵向  $\vec{e}_z$  设为单位长度, 流体假设为理想不可压定常流, 且速度分布均匀, 我们取旋转中的叶轮机为参考系, 以叶轮机为控制体。由于我们选的参考系是非惯性系, 需要考虑惯性力项, 为此首选考虑速度的分解, 设  $\vec{u}$  是叶轮机上某位置对地速度,  $\vec{w}$  是该位置流体微团相对叶轮机的速度,  $\vec{v}$  是该位置流体微团对地速度, 速度分解关系如下图所示: 且满足  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ , 其中  $\beta$  被称为安装角,  $\alpha$  为进气 (出气) 角。该位置流体微团对地的加速度

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{w} \quad (5.6)$$

化简可得:

$$-\vec{a} = \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{w} \quad (5.7)$$

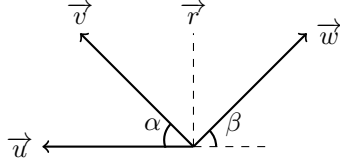


Figure 8: 速度分解关系示意图

由动量矩守恒积分方程有：

$$\underbrace{\iiint_D \rho(\vec{r} \times (\vec{f} - \vec{a})) d\tau}_{I_1} + \underbrace{\oint_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{T}_n) dA}_{I_2} - \underbrace{\oint_{\Sigma} (\vec{r} \times \rho \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) dA}_{I_3} = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_D \rho(\vec{r} \times (-\vec{a})) d\tau, \vec{f} = \vec{g} \text{ 与叶轮机平面垂直} \\ &= \iiint_D \rho(\vec{r} \times (\omega^2 \vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{\omega})) d\tau, \text{ 代入(5.7)} \\ &= 2 \iiint_D \rho((\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{w} - (\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{\omega}) d\tau, A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \\ &= -2 \iiint_D \rho(\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{\omega} d\tau \\ &= -2 \left( \int_{r_1}^{r_2} r dr \right) \left( \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r} \cdot \vec{w}) d\theta \right) \vec{\omega}, \text{ 按柱坐标积分} \\ &= -Q_m(\omega r_2^2 - \omega r_1^2) \vec{e}_z, \text{ 质量流量的定义 } Q_m = \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r} \cdot \vec{w}) d\theta \\ &= -Q_m(u_2 r_2 - u_1 r_1) \vec{e}_z, \text{ 入口和出口处牵连速度为圆周运动线速度} \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.10)

由于相对速度  $\vec{w}$  沿侧面切线方向，与  $\vec{n}$  点积为零，侧面积分为零， $I_3$  中面积分只需考虑  $A_1 \cup A_2$ ，由连续性方程： $Q_m = -\rho_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{n}_1 A_1 = \rho_2 \vec{w}_2 \cdot \vec{n}_2 A_2$ 。同样由图8的几何关系，在  $A_1$  面上有  $\vec{r} \times \vec{w} = -r_1 w_1 \cos \beta_1 \vec{e}_z$ ，因此对  $A_1$  上的面积分我们有

$$\oint_{A_1} (\vec{r} \times \rho \vec{w})(\vec{w} \cdot \vec{n}) dA = Q_m r_1 w_1 \cos \beta_1 \vec{e}_z \quad (5.11)$$

同理可求出  $A_2$  上的面积分为  $-Q_m r_2 w_2 \cos \beta_2 \vec{e}_z$ ，进而得到

$$I_3 = Q_m(r_1 w_1 \cos \beta_1 - r_2 w_2 \cos \beta_2) \vec{e}_z \quad (5.12)$$



$I_2$  包含叶片侧面对流体的力矩, 通过式(5.8)可以求出该力矩。由于是理想流体,  $\vec{T}_n = -p\vec{n}$  与  $\vec{r}$  平行, 因此进出口面  $A_1, A_2$  无力矩, 于是我们得到:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= I_2 \\ &= -I_1 + I_3 \\ &= Q_m(u_2 r_2 - u_1 r_1)\vec{e}_z + Q_m(r_1 w_1 \cos \beta_1 - r_2 w_2 \cos \beta_2)\vec{e}_z, \text{ 式(5.9)和(5.12)} \\ &= Q_m[r_2(u_2 - w_2 \cos \beta_2) - r_1(u_1 - w_1 \cos \beta_1)]\vec{e}_z \\ &= Q_m(r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1)\vec{e}_z, \text{ 图8中几何关系}\end{aligned}$$

进一步我们可求出叶轮机的功率  $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ 。

## 6 第五周第二次课

流体动力学微分型方程的建立

微分型方程在流场内部是逐点满足的, 附加上流场的边界条件和初始条件, 即可通过求解 PDE 的方法得到流场的各个参量。

微分型方程可以通过积分型方程中将面积分通过 Gauss 公式化为体积分, 利用积分区域的任意性得到被积函数逐点成立。

1. 连续方程, 由(3.6)式可得到

$$\iiint_D \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) d\tau = 0 \quad (6.1)$$

从而得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.2)$$

或者写成

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (6.3)$$

即密度增长率与体膨胀率之和为零。

1. 动量方程, 由(3.10)式可得到

$$\iiint_D \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau = - \oint_{\Sigma} (\rho \vec{v} \vec{v}) \cdot \vec{n} dA + \iiint_D \rho \vec{f} d\tau + \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA \quad (6.4)$$

上式中  $\vec{v} \vec{v}$  是并矢的写法,  $\mathbf{T}$  是应力张量, 因此我们有

$$\iiint_D \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau = \iiint_D \left( \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right) d\tau \quad (6.5)$$

从而得到

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \quad (6.6)$$

利用  $\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ <sup>5</sup>, 可以进一步将上式化简为

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{by eqn (6.2)}} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (6.7)$$

或写成

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (6.8)$$

由式(3.13)得到关于控制体的能量方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) d\tau &= \iiint_D \rho \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau + \oint_{\Sigma} \vec{T}_n \cdot \vec{v} dA + \iiint_D \rho(\dot{q} + q_R) d\tau \\ &+ \oint_{\Sigma} \lambda \vec{n} \cdot \nabla T dA - \oint_{\Sigma} \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2)(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \end{aligned} \quad (6.9)$$

面积分化为体积分得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) d\tau &= \iiint_D \rho \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau + \iiint_D \nabla \cdot (\vec{T}_n \cdot \vec{v}) d\tau + \iiint_D \rho(\dot{q} + q_R) d\tau \\ &+ \iiint_D \nabla \cdot (\lambda \vec{n} \cdot \nabla T) d\tau - \iiint_D \nabla \cdot (\rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) \vec{v}) d\tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

因此有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\vec{T}_n \cdot \vec{v}) + \rho(\dot{q} + q_R) + \nabla \cdot (\lambda \vec{n} \cdot \nabla T) - \nabla \cdot (\rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) \vec{v}) \quad (6.11)$$

利用连续性方程(6.2)进一步化简为:

$$\rho \frac{D(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2)}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{v}) + \rho(\dot{q} + q_R) + \nabla \cdot (\lambda \vec{n} \cdot \nabla T) \quad (6.12)$$

角动量守恒方程可以推出应力张量  $\mathbf{T}$  是对称张量, 因此对于  $\mathbf{T}$ , 未知量只有 6 个。

上面方程 (6.2, 6.7, 6.12) 只有 5 个方程, 但未知量有应力张量  $\mathbf{T}$ , 速度场  $\vec{v}$ , 温度场  $\theta$ , 内能  $e$ , 密度  $\rho$  共 12 个未知量, 因此需要补充物理方程才能达到定解条件。对于牛顿流体, 物理方程指出应力张量与应变张量之间是线性关系: 满足如下方程:

$$T_{ij} = (-p + (\mu' - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v})\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (6.13)$$

---

<sup>5</sup>LHS =  $(\frac{\partial}{\partial x_i}) \vec{e}_i \cdot [\rho v_j v_k \vec{e}_j \vec{e}_k] = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_k) \vec{e}_k = \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} v_k \vec{e}_k + (\rho v_i) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \vec{e}_k = \text{RHS}$

其中  $\mathbf{S}$  是应变率张量,  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ,  $\mu$  是流体的动力黏性系数 (viscosity), 而  $\mu'$  是第二黏性系数。

上面补充了 6 个方程, 但引入了一个新的变量, 压强  $p$ , 为此再补充两个热力学方程:

$$e = C_v \theta \quad (6.14)$$

$$p = \rho R \theta, \text{ 对液体通常满足不可压条件, 即 } \rho = \text{Const} \quad (6.15)$$

这样方程与未知数的个数相等, 在适当的边界条件下可以求解 PDE。实际上对于一些特定的假设, 可以适当减少方程和未知量的个数, 下面针对均质不可压流做进一步化简。

由于流体不可压,  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , 所以(6.13)式化简为  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$ , 下面化简  $\nabla \cdot \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= (\frac{\partial}{\partial x_k} \vec{e}_k) \cdot (T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \vec{e}_j \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (-p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}) \vec{e}_j \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} \vec{e}_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \vec{e}_j \\ &= -\nabla p + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \vec{e}_j, \text{ 利用 } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (6.16)$$

将其代入动量方程 (6.7) 式, 并设外力场为重力场, 得到均质不可压流的 N-S 方程:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (6.18)$$

下面推导其在柱坐标系下的表达式, 此时

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.19)$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.20)$$

并利用  $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$  和  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$  于是可得

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{v} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z) \\
&= (\nabla^2 v_r) \vec{e}_r + (\nabla^2 v_\theta) \vec{e}_\theta + (\nabla^2 v_z) \vec{e}_z + v_\theta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \vec{e}_\theta + v_r \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \vec{e}_r \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \\
&= (\nabla^2 v_r) \vec{e}_r + (\nabla^2 v_\theta) \vec{e}_\theta + (\nabla^2 v_z) \vec{e}_z - \frac{v_\theta}{r^2} \vec{e}_\theta - \frac{v_r}{r^2} \vec{e}_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z) \cdot \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z) \\
&= \vec{v} \cdot (\nabla v_r) \vec{e}_r + \vec{v} \cdot (\nabla v_\theta) \vec{e}_\theta + \vec{v} \cdot (\nabla v_z) \vec{e}_z + \vec{v} \cdot \frac{\vec{e}_\theta}{r} \left( v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \right) \\
&= \vec{v} \cdot (\nabla v_r) \vec{e}_r + \vec{v} \cdot (\nabla v_\theta) \vec{e}_\theta + \vec{v} \cdot (\nabla v_z) \vec{e}_z + \frac{v_\theta}{r} (v_r \vec{e}_\theta - v_\theta \vec{e}_r)
\end{aligned}$$

因此不可压的 N-S 方程在柱坐标下可以表示为

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla v_r) - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (6.21)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla v_\theta) + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (6.22)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla v_z) \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \quad (6.23)$$

下面给一个应用  $\vec{e}_r$  方向的动量守恒方程解题的例子，考虑一截面为边长为  $s$  的正方形的圆环通道，中心线半径为  $R$ ，如图9所示。已知通道内外压差为  $\Delta p$ ，且通道内速度场的分布为  $\vec{v} = \frac{A}{r} \vec{e}_\theta$ ， $A$  待定，求体积流量  $Q$ 。

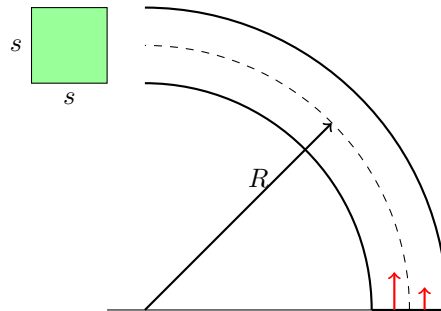


Figure 9: 圆环通道

由体积流量的定义有

$$Q = \int_0^s dz \int_{R-\frac{s}{2}}^{R+\frac{s}{2}} v_\theta dr \quad (6.24)$$

$$= As \ln \frac{R + \frac{s}{2}}{R - \frac{s}{2}} \quad (6.25)$$

由式(6.21)得

$$\rho \left( -\frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.26)$$

沿径向积分得：

$$\Delta p = \frac{\rho A^2}{2} \left( \frac{1}{(R - \frac{s}{2})^2} - \frac{1}{(R + \frac{s}{2})^2} \right) \quad (6.27)$$

由上式解出  $A$  代入式(6.25)即可。

## 7 第六周第一次课

运用微元控制体推导流体动力学微分型方程的一个例子：

使用柱坐标系下的微元控制体推导连续性方程，如图10

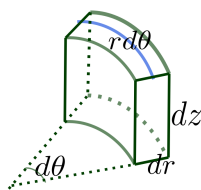


Figure 10: 柱坐标微元控制体

对于该微元质量体， $\Delta t$  时间内质量变化为

$$\Delta m = \frac{\partial}{\partial t} (\rho(r d\theta) dr dz) \Delta t \quad (7.1)$$

分别考虑微元质量体六个面的流量， $dr dz$  确定的两个面分别是左面（可见）与右面。

左面  $\Delta t$  时间流入量：

$$\begin{aligned} Q_l &= \rho(v_{\theta - \frac{d\theta}{2}} dr dz) \Delta t \\ &= (\rho v_\theta dr dz - \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta dr dz) \frac{d\theta}{2}) \Delta t \end{aligned} \quad (7.2)$$

同理得微元体右面  $\Delta t$  时间流出量

$$Q_r = (\rho v_\theta dr dz + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta dr dz) \frac{d\theta}{2}) \Delta t \quad (7.3)$$

因此微元体左右两个面的净流出量为:

$$Q_r - Q_l = \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta dr dz) d\theta \Delta t \quad (7.4)$$

微元体  $r d\theta, dz$  确定的前面 (可见) 和后面的净流出量为:

$$\begin{aligned} Q_b - Q_f &= \rho(v_{r+\frac{dr}{2}}(r + \frac{dr}{2}) d\theta dz) \Delta t - \rho(v_{r-\frac{dr}{2}}(r - \frac{dr}{2}) d\theta dz) \Delta t \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r d\theta dz) \Delta t \end{aligned} \quad (7.5)$$

同理微元体  $r d\theta, dr$  确定的上面 (可见) 和下面的净流出量为:

$$Q_u - Q_d = \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_r r d\theta dr) \Delta t \quad (7.6)$$

根据微元控制体质量守恒, 可以得到:

$$-\Delta m = (Q_r - Q_l) + (Q_b - Q_f) + (Q_u - Q_d) \quad (7.7)$$

代入 (7.1, 7.4, 7.5, 7.6) 四个式子得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}(\rho r) &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z r) \\ \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

(7.8)式也可直接从(6.2)中利用  $\nabla$  算子的柱坐标的表达式(6.20)式直接求出。

流体的静力学考虑  $\vec{v} = \vec{0}$ , 由于流体静止, 应变率为零, 因此应力张量  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , 由(6.7)式可以得到流体的静力平衡方程为:

$$\nabla p = \rho \vec{f} \quad (7.9)$$

上式两边求旋度得到(7.9)式成立的必要条件:

$$\nabla \times (\rho \vec{f}) = \vec{0} \quad (7.10)$$

若  $\rho = \rho(p)$ , 即密度只与压力有关, 那么称流体为正压流体, 对于正压流体, 定义压力函数  $\mathbb{P}$  为:

$$\mathbb{P} = \int \frac{1}{\rho(p)} dp \quad (7.11)$$

则容易求出压力函数  $\mathbb{P}$  的梯度为

$$\nabla \mathbb{P} = \frac{d\mathbb{P}}{dp} \nabla p = \frac{\nabla p}{\rho} \quad (7.12)$$

即对于正压流体,  $\frac{\nabla p}{\rho}$  有势。

在这种情况下  $\nabla \rho = \frac{d\rho}{dp} \nabla p$ , 因此(7.10)式化简为:

$$\nabla \rho \times \vec{f} + \rho \nabla \times \vec{f} = \vec{0} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\rho}{dp} \nabla p \times \frac{\nabla p}{\rho} + \rho \nabla \times \vec{f} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \nabla \times \vec{f} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (7.14)$$

即对于处于静止状态的正压流体, 体积力是有势场。我们可以说明(7.14)式也是正压流体的充分条件, 即在静力平衡方程的基础上, 如果有(7.14)式成立, 那么  $\rho$  与  $p$  存在单值映射关系。

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p &= \vec{0} \end{aligned} \quad (7.15)$$

由(7.15)可得到关于  $\nabla \frac{1}{\rho}$  各阶分量的一阶 PDE, 附加适当的边界条件可以得到  $\frac{1}{\rho}$  关于  $\nabla p$  和边界条件的解。因此  $\frac{1}{\rho}$  与  $p$  的地位在(7.15)式是对等的, 所以我们可以得到  $\rho$  与  $p$  存在单值映射关系。

对于一般的情形, 若流体静止, 对(7.13)式两边点乘  $\vec{f}$ , (7.13)式左边第一项得零, 因此我们得到流体静止体积力的一个必要条件为

$$\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0 \quad (7.16)$$

若外力场是重力场,  $\vec{f} = -g \vec{k}$ , 对于密度为常量的液体, 可以得到

$$p = -\rho g z + p_{z=0} \quad (7.17)$$

如果我们考虑一具有恒定水平加速度  $\vec{a} = a \vec{i}$  的非惯性系, 并且取坐标原点在自由液面上, 则

$$p = -\rho(gz + ax) + p_a \quad (7.18)$$

$p_a$  代表大气压, 同时由上式可以得到自由液面的形状在惯性系中具有  $gz + ax = 0$  这种倾斜的直线的形状。

## 8 第六周第二次课

理想流体运动的基本方程

理想流体应力张量  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , 因此动量方程(6.7)式化为:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \quad (8.1)$$

(8.1)式即欧拉方程，相应的(6.12)化为

$$\frac{D(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2)}{Dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{v}) + (\dot{q} + q_R) \quad (8.2)$$

综合连续性方程(6.2)式,(8.1),(6.12) 共 5 个方程，但未知数有  $\vec{v}, e, p, \rho$  6 个，因此需补充热力学方程才能使方程组封闭。

实际上，我们可以通过动量方程(8.1)式得到动能的变化率：

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla p \quad (8.3)$$

将(8.2)式与(8.3)作差得：

$$\begin{aligned} \frac{De}{Dt} &= -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} + \dot{q} + q_R, \text{ by (6.3)} \\ &= \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \dot{q} + q_R \\ &= -p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \dot{q} + q_R \end{aligned} \quad (8.4)$$

定义  $i = e + \frac{p}{\rho}$  为气体的焓，则可以得到

$$\frac{Di}{Dt} = \dot{q} + q_R + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (8.5)$$

对于绝热状态下的理想常比热完全气体，我们有

$$\begin{aligned} \frac{De}{Dt} &= C_V \frac{DT}{Dt}, e = C_V T \\ &= \frac{C_V}{R} \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right), p = \rho R T \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right), C_P - C_V = R, \frac{C_P}{C_V} = \gamma \end{aligned} \quad (8.6)$$

将(8.4)式去掉产热项，与(8.6)式结合可以得到

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (8.7)$$

(8.7)式即为对于气体补充的  $\rho$  和  $p$  的关系的热力学方程。

对于匀质不可压缩的液体，补充  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  的方程，此时(6.2)式恒成立，动力学方程与热力学方程解耦，因此我们可以联立求解：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (8.8)$$



得到  $\vec{v}, p$  再代入能量方程求其他参量。

下面考虑理想流体动力学偏微分方程的边界条件。一般的，对于不可穿透的壁面，流体的法向速度与壁面运动的法向速度相等，即满足：

$$(\vec{v}_L \cdot \vec{n})_\Sigma = (\vec{v}_B \cdot \vec{n})_\Sigma \quad (8.9)$$

若  $\Sigma$  有曲面方程  $F(x, y, z, t) = 0$ ，则流体边界速度满足

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}_L \cdot \nabla F = 0 \quad (8.10)$$

此即**不可穿透条件**的一种提法；此外，我们还有无穷远条件等。

比如考虑一半轴长分别为  $a, b, c$  的实心椭球，以速度  $U \vec{i}$  在流体中运动，则在椭球面上流体的边界条件可根据椭球面方程求出。在固结在椭球中心的运动参考系中  $(O'x'y'z')$  中，椭球面方程为

$$F' : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (8.11)$$

$F'$  不随时间变化，由(8.10)式得到在  $(O'x'y'z')$  中速度的边界条件为

$$\frac{u'x'}{a^2} + \frac{v'y'}{b^2} + \frac{w'z'}{c^2} = 0 \quad (8.12)$$

若考虑静止参考系  $(Oxyz)$ ，则

$$F : \frac{(x - Ut)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (8.13)$$

$F$  随时间变化，可得在  $(Oxyz)$  中速度的边界条件为

$$\frac{-U(x - Ut)}{a^2} + \frac{u(x - Ut)}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2} = 0 \quad (8.14)$$

下面应用理想流体动力学方程组(8.8)式求解一个球对称问题：考虑无限大的液体中有一匀质圆球均匀地向外膨胀，半径  $R$  随时间变化规律为  $R = R_b(t)$ ，已知初始时刻  $t = 0$  时液体静止，求解  $t$  时刻液体压强的分布。

首先由球对称性可以得到  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r$  对于球坐标，基矢量随坐标变量的变化规律为 [8]：

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \sin \theta \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \cos \theta \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta) \quad (8.17)$$

球坐标系下的梯度算子表示为：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (8.18)$$

因此球坐标系下对于矢量  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$  的散度为:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right) \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi) = \\
& \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \left( v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + v_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta} \\
& = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \frac{1}{r \sin \theta} \\
& = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cos \theta}{r \sin \theta}
\end{aligned}$$

所以

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.19)$$

由上式以及(8.8)式中的不可压缩方程, 我们得到

$$\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} = 0 \quad (8.20)$$

结合  $r = R$  时  $v_r = \dot{R}_b(t)$  于是得到

$$v_r = \frac{R_b(t)^2}{r^2} \dot{R}_b(t) \quad (8.21)$$

对于(8.8)式中的动量方程,  $\vec{v} \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r}$ , 因此动量方程化为

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8.22)$$

代入(8.21)式到(8.22)式中, 得到

$$p = p_\infty + \frac{\rho R_b}{2r^4} ((4r^3 - R_b^3) \dot{R}_b^2 + 2r^3 R_b \ddot{R}_b) \quad (8.23)$$

令  $r = R_b$  得到球外表面压力分布为

$$p_{ext} = p_\infty + \rho(R_b \dot{R}_b^2 + \frac{3}{2} \ddot{R}_b^2) \quad (8.24)$$

对液体表面薄层受力分析可得到内外压关系 (假设圆球内是压强分布均匀的气体) 为

$$p_{int} = p_{ext} + \frac{2\gamma}{R} \quad (8.25)$$

其中  $\gamma$  是液体的表面张力系数, 如已知  $p_{int}$ , 解上式 ODE 可得  $R = R(t)$  即界面随时间变化规律。

理想流体在势力场中运动的主要性质: Kelvin 定理, 也称环量不变定理, 指出若下列 4 个条件同时成立, 则速度场沿流线的环量积分不变:

- 流场连续
- 流体是正压流体
- 流体是理想流体
- 质量力有势

Kelvin 定理的数学表述为:

$$\frac{D}{Dt} \left( \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{x} \right) = 0 \quad (8.26)$$

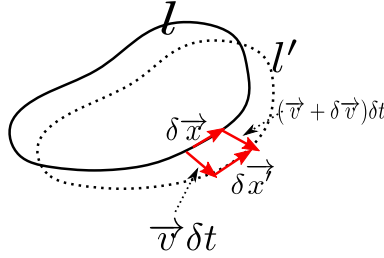


Figure 11: Kelvin 定理推导图示

推导(8.26)式可按如下步骤:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{x} \right) &= \oint_l \frac{D}{Dt} (\vec{v} \cdot d\vec{x}) \\ &= \oint_l \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{x} + \oint_l \vec{v} \cdot \frac{D(d\vec{x})}{Dt} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

对于  $I_2$ , 由图11, 假设  $\delta t$  时间流线  $l$  变到了  $l'$ , 流线上的微元质量体  $\delta \vec{x}$  变到了  $\delta \vec{x}'$ , 则有矢量关系  $\delta \vec{x} + (\vec{v} + \delta \vec{v})\delta t = \vec{v}\delta t + \delta \vec{x}'$  成立, 即  $\delta \vec{x}' - \delta \vec{x} = \delta \vec{v}\delta t$ , 从而  $d\vec{x}$  的随体导数为  $d\vec{v}$ , 注意到  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2)$ , 而动量的环量积分为零。因此  $I_2 = 0$ 。

对于  $I_1$ , 由(8.8)式中的动量方程  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}$ , 根据假设流体是正压流体, 因此由(7.12)式得存在压力函数  $\mathbb{P}$  使得  $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \mathbb{P}$ , 又因为质量力有势, 所以又存在势力场  $\Pi$  使得  $\vec{f} = -\nabla \Pi$ , 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_l \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{x} \\ &= - \oint_l \nabla(\Pi + \mathbb{P}) \cdot d\vec{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此,(8.26)式成立。

由Kelvin 定理可直接导出 Lagrange 定理, 也称涡量不生不灭定理, 即在Kelvin 定理成立的条件下, 流场若一开始有旋则始终有旋, 一开始无旋则始终无旋。只需利用 Stokes 公式即可说明。

由 Lagrange 定理的逆否可以得到旋涡产生或消失的条件是Kelvin 定理的四个条件至少有一个不能满足。

## 9 第七周第一次课

涡量方程: (6.18)式给出了不可压流的 N-S 方程, 对于一般情形, 在(6.16)式中代入(6.13)式 (取  $\mu' = 0$ ) 于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \delta_{ij} \right) \vec{e}_j, \text{eq(6.17) invalid} \quad (9.1)$$

$$= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (9.2)$$

因此我们得到一般形式的 N-S 方程:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right) \quad (9.3)$$

通过对上式两边取旋度可以得到涡量方程, 为此, 首先推导:

$$2 \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) + 2 (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \vec{e}_j + 2(\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_i) \times \vec{v} \\ &= \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \vec{e}_j + 2(\epsilon_{min} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_n) \vec{e}_m \\ &= 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_j - 2((\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_n) \vec{e}_m \\ &= 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_j - 2(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_k) \vec{e}_j + 2(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_j) \vec{e}_k \\ &= 2(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_j) \vec{e}_k \\ &= \text{LHS} \end{aligned}$$

再推导

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \nabla \times (\epsilon_{ijk} A_j B_k \vec{e}_i) \\
&= \epsilon_{mni} \epsilon_{ijk} \frac{\partial(A_j B_k)}{\partial x_n} \vec{e}_m \\
&= (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) (B_k \frac{\partial A_j}{\partial x_n} + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_n}) \vec{e}_m \\
&= (B_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_k}) \vec{e}_j - (B_k \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_j}) \vec{e}_k \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

因此, 由(9.3)式我们有:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \text{LHS} &= \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{v}) + \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) \\
&= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla \times \left( \nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \vec{w} \times \vec{v} \right) \\
&= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\nabla \cdot \vec{w}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v}, \nabla \cdot \vec{w} = 0 \\
&= \frac{D \vec{w}}{Dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v}
\end{aligned}$$

而上式右端:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \text{LHS} &= \nabla \times \left( \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right) \right) \\
&= \nabla \times \vec{f} - \nabla \times \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla^2 \vec{v} + \nabla \times \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \times \left( \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right)
\end{aligned}$$

因此我们由不可压的 N-S 方程得到了涡量方程的一般形式:

$$\frac{D \vec{w}}{Dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \times \vec{f} - \nabla \times \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla^2 \vec{v} + \nabla \times \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \times \left( \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right) \quad (9.6)$$

从上面的涡量方程可以看出, 对于理想正压流体, 若质量力有势, 方程右端项为零。由连续性方程(6.3)式左端可化简为

$$\frac{1}{\rho} \frac{D \vec{w}}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \vec{w} - \left( \frac{\vec{w}}{\rho} \right) \cdot \nabla \vec{v} = 0 \quad (9.7)$$

即整理为

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{w}}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{w}}{\rho} \right) \cdot \nabla \vec{v} \quad (9.8)$$

Lamb 型方程：考虑对理想气体，由欧拉方程(8.1)式和(9.4)式得到

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) - \vec{v} \times \vec{\Omega} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \quad (9.9)$$

其中  $\vec{v} \times \vec{\Omega}$  被称为 Lamb 矢量，若考虑质量力有势的正压定常流体，上式沿流线或涡线积分即可得到 Bernoulli 守恒方程：

$$\int_l \vec{s} \cdot (\nabla(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2) - \vec{v} \times \vec{\Omega}) ds = \int_l \vec{s} \cdot (-\nabla \Pi - \nabla \mathbb{P}) ds \quad (9.10)$$

注意到  $\vec{s}$  与  $\vec{v}$  或  $\vec{\Omega}$  平行，因此  $\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{\Omega}) = 0$ ，于是得到

$$\frac{1}{2}v^2 + \mathbb{P} + \Pi = C \quad (9.11)$$

针对(9.9)式，如考虑用常比热完全气体的等熵过程 ( $\frac{p}{\rho^\gamma} = c$ ) 代替正压的条件，则压力势项可改写为

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \int \frac{dp}{\rho} \\ &= \int c \frac{d\rho^\gamma}{\rho} \\ &= \int c\gamma d\rho^{\gamma-2} d\rho \\ &= \int c \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

因此对常比热完全气体的等熵过程，Bernoulli 方程为

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \Pi = C \quad (9.12)$$

同理可推出对完全气体的等温过程

$$\frac{1}{2}v^2 + RT \ln p + \Pi = C \quad (9.13)$$

下面考虑流体相对等转速坐标系  $O'x'y'$  下的 Bernoulli 方程，转动坐标系相对静止坐标系的关系如下图所示：这里，我们去掉正压流体的假设，而附加绝热条件，于是(8.5)式焓的随体导数可简化为：

$$\begin{aligned} \frac{Di}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \\ \Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla i &= \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla p \end{aligned}$$

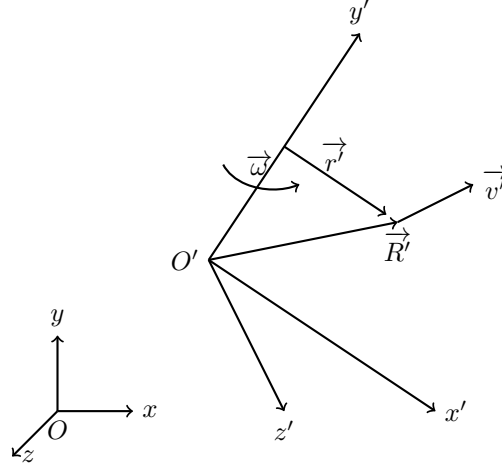


Figure 12: 等转速坐标系下的 Bernoulli 方程推导示意

最后一式用到了定常流的条件, 由于  $\vec{v}$  的任意性, 所以  $\nabla i = \frac{\nabla p}{\rho}$ , 即  $\frac{\nabla p}{\rho}$  有势函数  $i$ 。

从(9.9)式出发, 由于是在转动坐标系中, 我们对  $\vec{f}$  有加速加项的修正, 即以  $\vec{f} - \vec{a}$  代替(9.9)式中的  $\vec{f}$ 。 $\vec{a}$  的表达式由(9.14)式给出

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (9.14)$$

注意到  $\vec{a}$  的第二项  $\vec{v}'$  含  $\vec{v}'$ , 如沿相对流线积分, 同样由  $\vec{s}'$  与  $\vec{v}'$  平行的性质得其积分为零, 因此, 只需考虑  $\vec{a}$  的第一项

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = (\vec{\omega} \cdot \vec{R}')\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{R}' \quad (9.15)$$

我们这里设  $\vec{\omega}$  沿  $y'$  轴, 即  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{y'}$ , 考虑  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{R}'$  在  $\vec{e}_{y'}$  方向的投影为  $\omega^2(\vec{R}' \cdot \vec{e}_{y'})$ , 而  $(\vec{\omega} \cdot \vec{R}')\vec{\omega} = \omega^2(\vec{R}' \cdot \vec{e}_{y'})\vec{e}_{y'}$ , 因此(9.15)式可化简为  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{R}'$  在  $O'x'z'$  平面上的投影长度的相反数:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = -\omega^2 \vec{r}' \quad (9.16)$$

其中  $\vec{r}'$  为  $\vec{R}'$  在  $O'x'z'$  平面上的投影向量, 并假设转动角速度  $\omega$  为常数, 则

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = -\nabla' \left( \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \right) \quad (9.17)$$

这里  $\nabla'$  表示相对转运坐标系的梯度算子, 所以  $\vec{a}$  项在沿相对流线积分得到  $\frac{1}{2} \omega^2 r'^2$ 。综合上面的结果, 我们得到等转速坐标系下的 Bernoulli 方程为:

$$\frac{1}{2} v'^2 + \Pi + i - \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 = c \quad (9.18)$$

$$(9.19)$$

$$(9.20)$$

## 10 第七周第二次课

上节我们从 Lamb 型方程(9.9)式出发推导了 Bernoulli 方程的各种变形, 如果我们将定常流的条件而附加流场无旋的条件, 那么(9.9)式中 Lamb 矢量为零, 由于流体无旋, 存在速度势函数  $\varphi$ , 使得  $\vec{v} = \nabla\varphi$ 。积分(9.9)式得到 Cauchy-Lagrange 积分方程 (CL 方程):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \mathbb{P} + \Pi = C(t) \quad (10.1)$$

下面是一个应用 CL 方程的一个例子:

考虑一个长为  $2l$  的 L 型两端开口直管, 下端封闭, 上端与大气接触, 里面充满理想均质不可压的液体, 如图 (13.a) 所示:

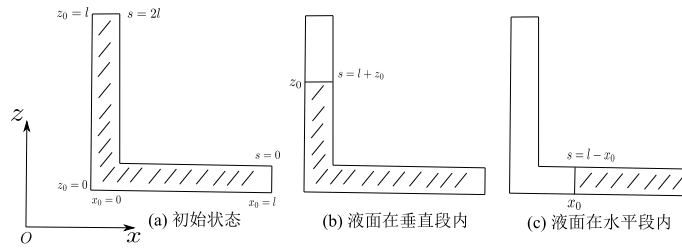


Figure 13: L 型直管

当释放直管的下端使液体流出时, 管内压强和出口处的速度会发生突变。我们先来求出口处的速度。为此, 取类似于弧长坐标系的一维局部坐标  $s$  表示离出口处的液柱长度为  $s, 0 \leq s \leq 2l$ , 则  $\vec{v}(t) = -v\vec{e}_s$ , 因为流体不可压, 所以  $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ , 即  $v = v(t)$ , 又因为速度场有势, 所以存在势函数  $\varphi(s, t)$ , 使得  $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -v(t)$ , 如取  $s = 0$  时速度势为零, 则  $\varphi(t, s) = -v(t)s$ , 所以 (10.1) 式化为:

$$-v'(t)s + \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{p}{\rho} + \Pi = C(t) \quad (10.2)$$

当直管的下端释放时, 分别考虑  $s = 0$  和  $s = 2l$  两端,  $p = p_a$ , 均为大气压, 速度均为 0,  $\Pi(2l) = gl$ , 由上式求出:

$$v'(0) = \frac{1}{2}g, C(0) = \frac{p_a}{\rho} \quad (10.3)$$

如果考虑任意截面  $s$  处, 则有

$$-v'(0)s + \frac{p}{\rho} + \Pi(s) = \frac{p_a}{\rho} \quad (10.4)$$

于是得任意截面  $s$  处初始时刻压强的分布为:

$$p(s) = p_a + \frac{1}{2}\rho gs - \rho\Pi(s) \quad (10.5)$$



而  $\Pi(s)$  可写成分段函数的形式:

$$\Pi(s) = \begin{cases} g(s-l) & l \leq s \leq 2l \\ 0 & 0 \leq s < l \end{cases} \quad (10.6)$$

下面我们考虑液体完全流出时管口的流速, 由 CL 方程(10.2)式得到液面  $s = z_0$  处和出口处  $s = 0$  时的平衡方程为

$$v'(t)(l + z_0) = \Pi(z_0) \quad (10.7)$$

由于  $\Pi$  是  $f$  的分段函数, 为此, 分两阶段考虑: 当液面在垂直段内时, 如图 (13.b) 所示, 此时取  $z_0$  坐标研究问题比较方便: 设  $z_0 = z_0(t)$ ,  $z_0$  随时间减小,  $\Pi(z_0) = gz_0$ ,  $v = -\frac{dz_0}{dt}$ , 代入到(10.7)式中有:

$$-\frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{gz_0}{l + z_0} \quad (10.8)$$

上式是标准的 Newton 运动学方程, 可用能量方法先求出液面降到  $f$  时液面处速度  $v_{z_0=f}$  为:

$$\frac{1}{2}v_{z_0=f}^2 = \int_f^l \frac{gz_0}{l + z_0} dz_0 \quad (10.9)$$

解得:

$$\frac{1}{2}v_{z_0=f}^2 = g(l - f) + gl \ln \left( \frac{l + f}{2l} \right) \quad (10.10)$$

由此求得  $f = 0$  时的速度为:  $v_{z_0=0} = \sqrt{2gl(1 - \ln 2)}$  由  $v = -\frac{dz_0}{dt}$  上式可化为:

$$-\frac{dz_0}{\sqrt{2g(l - z_0) + 2gl \ln(l + z_0) - 2gl \ln(2l)}} = dt \quad (10.11)$$

当  $z_0$  从  $l$  到  $0$  时, 时间从  $0$  到液面  $z_0$  下降到  $0$  的时间  $T_1$ , 因此分别对上式两边积分:

$$\int_0^l \frac{dz_0}{\sqrt{2g(l - z_0) + 2gl \ln(l + z_0) - 2gl \ln(2l)}} = T_1 \quad (10.12)$$

变量替换:

$$T_1 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^1 \frac{dz_0}{\sqrt{(1 - z_0) + \ln(1 + z_0) - \ln 2}} = T_1 \quad (10.13)$$

数值积分得:  $T_1 = 2.13\sqrt{\frac{l}{g}}$

当液面在水平段内时, 如图 (13.c) 所示, 此时由于  $\Pi$  不随位置变化, 由(10.7)式可知速度也不随时间变化。因此液体将以  $v_{z_0=0}$  的速度匀速流过长为  $l$  的水平段, 用时  $T_2 = \frac{l}{v_{z_0=0}} = 1.28\sqrt{\frac{l}{g}}$  将  $T_1$  和  $T_2$  求和即得到液体全部流出的总的时间。

CL 积分方程中若速度势  $\phi$  用动坐标系下的坐标表示,  $\nabla$  与坐标表示无关, 直接改写为  $\nabla'$ , 但局部导数项  $\frac{\partial}{\partial t}$  需做相应变换。考虑到随体导数与坐标表示无关, 即

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{D'\phi}{Dt} \quad (10.14)$$

两边展开得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \vec{v} = \frac{\partial'\phi}{\partial t} + \nabla'\phi \cdot \vec{v}' \quad (10.15)$$

对于  $\nabla\phi$  和  $\nabla'\phi$ , 均表示绝对速度  $\vec{v}$ , 只不过一个在绝对坐标系中表示, 一个在相对坐标系中。而  $\vec{v}'$  表示相对速度而不是绝对速度在动坐标系下的表示。

因此我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial'\phi}{\partial t} + (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\partial'\phi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (10.16)$$

从而由(10.1)式得到速度势在相对坐标系下表示的 CL 积分方程为:

$$\frac{\partial'\phi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla'\phi + \frac{1}{2}|\nabla'\phi|^2 + \mathbb{P} + \Pi = C(t) \quad (10.17)$$

下面是(10.17)式应用的一个例子:

一半径为  $a$  的圆球在无限大的理想正压无旋不可压流体中以  $\vec{v}_o(t)$  的速度做变速直线运动, 求流体表面的压力与流体作用在圆球上的合力  $\vec{F}$ 。

以  $\vec{v}_o(t)$  的反方向为  $z$  轴建立空间直角坐标系, 则  $\vec{v}_o = -v_0\vec{e}_z$ 。同时选取固结在圆球圆心的球坐标系作为动坐标系, 在动坐标系中界面边界的法方向为  $\vec{e}_{R'}$ , 因此在动坐标系中界面边界方程为:  $\vec{v}' \cdot \vec{e}_{R'} = 0$ , 换到绝对坐标系中有

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_{R'} = \vec{v}_o \cdot \vec{e}_{R'} \quad (10.18)$$

参考 [8] 中的公式

$$\vec{e}_{R'} = \sin\theta'(\cos\epsilon'\vec{e}_x + \sin\epsilon'\vec{e}_y) + \cos\theta'\vec{e}_z \quad (10.19)$$

我们有

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_{R'} = -v_0(t)\cos\theta' \quad (10.20)$$

由于流体无旋, 存在速度势函数  $\phi$ , 使得  $\vec{v} = \nabla\phi$ , 由(8.18)式, 上式进一步化为:

$$\frac{\partial'\phi}{\partial R'}|_{R'=a} = -v_0(t)\cos\theta' \quad (10.21)$$

另外, 我们还有无穷远的边界条件 (速度为零):

$$\nabla'\phi|_{R=\infty} = \vec{0} \quad (10.22)$$

由问题的球对称性,  $\phi$  与  $\epsilon'$  无关, 因此上式化为

$$\frac{\partial'\phi}{\partial R'}|_{R' \rightarrow \infty} = 0, \frac{1}{R'} \frac{\partial'\phi}{\partial \theta'}|_{R' \rightarrow \infty} = 0 \quad (10.23)$$

由于流体不可压,  $\varphi$  满足 Laplace 方程:

$$\nabla'^2 \varphi = 0 \quad (10.24)$$

参考 [8] 中的公式, 在球坐标系下展开得:

$$\frac{1}{R'^2} \frac{\partial'}{\partial R'} \left( R'^2 \frac{\partial' \varphi}{\partial R'} \right) + \frac{1}{R'^2 \sin \theta'} \frac{\partial'}{\partial \theta'} \left( \sin \theta' \frac{\partial' \varphi}{\partial \theta'} \right) = 0 \quad (10.25)$$

我们采用分离变量法求解, 对给定的时刻  $t$ , 假设上述方程有形如  $\varphi(R', \theta') = f(R')g(\theta')$  的解, 代入有

$$\frac{\partial'}{\partial R'} \left( R'^2 \frac{\partial' f(R')}{\partial R'} \right) g(\theta') + \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial'}{\partial \theta'} \left( \sin \theta' \frac{\partial' g(\theta')}{\partial \theta'} \right) f(R') = 0 \quad (10.26)$$

因此

$$\frac{1}{f(R')} \frac{\partial'}{\partial R'} \left( R'^2 \frac{\partial' f(R')}{\partial R'} \right) = - \frac{1}{\sin \theta' g(\theta')} \frac{\partial'}{\partial \theta'} \left( \sin \theta' \frac{\partial' g(\theta')}{\partial \theta'} \right) \quad (10.27)$$

上式左边与  $\theta'$  无关, 右边与  $R'$  无关, 因此与  $R', \theta'$  均无关, 可令

$$\begin{cases} \frac{1}{f(R')} \frac{\partial'}{\partial R'} \left( R'^2 \frac{\partial' f(R')}{\partial R'} \right) = C(t) \\ \frac{1}{\sin \theta' g(\theta')} \frac{\partial'}{\partial \theta'} \left( \sin \theta' \frac{\partial' g(\theta')}{\partial \theta'} \right) = -C(t) \end{cases} \quad (10.28)$$

先考虑(10.28)的第 2 式, 考虑到(10.21)式, 因此设  $g(\theta') = \cos(\theta')$  代入上式有  $C(t) = 2$  再解(10.28)的第 1 式

$$R'^2 f''(R') + 2Rf'(R') - 2f(R') = 0 \quad (10.29)$$

根据 Cauchy-Euler 方程的解法 ([9]), 通过设  $f(R') = R'^m$  解得  $m = 1$  或  $m = -2$ , 由无穷远边界条件(10.23)式只能取  $m = -2$

$$\varphi(R', \theta', t) = A(t)R'^{-2} \cos \theta' \quad (10.30)$$

于是(10.23)式自然满足, 代入(10.21)式中求得  $A(t) = \frac{1}{2}a^3 v_0(t)$  在动坐标系下, 根据上式和求梯度算子的(8.18)式, 我们有

$$\nabla' \varphi|_{R'=a} = -v_0(t)(\cos \theta' \vec{e}_{R'} + \frac{1}{2} \sin \theta' \vec{e}_{\theta'}) \quad (10.31)$$

于是由(10.17)式, 我们根据在球表面和无穷远处列方程得到:

$$\frac{a}{2} \dot{v}_0(t) \cos \theta' + v_0(t) \vec{e}_z \cdot \nabla' \varphi + \frac{1}{2} |\nabla' \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \quad (10.32)$$

参考 [8],  $\vec{e}_z = \cos \theta' \vec{e}_{R'} - \sin \theta' \vec{e}_{\theta'}$ , 由上式解出球面压力  $p$  为

$$p(\theta', t) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \frac{1}{2} \rho \dot{v}_0 a \cos \theta' - \frac{9}{8} v_0^2 \sin^2 \theta' \quad (10.33)$$

流体作用在圆球上的合力为：

$$\vec{F} = - \oint_{\Sigma} p \vec{n} dA \quad (10.34)$$

这里  $\vec{n} = \vec{e}_{R'}$ , 是圆球的外法向方向。结合(10.19)式我们得到：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \iint_{\substack{0 \leq \theta' \leq \pi \\ 0 \leq \epsilon' \leq 2\pi}} p(\sin \theta' (\cos \epsilon' \vec{e}_x + \sin \epsilon' \vec{e}_y) + \cos \theta' \vec{e}_z) a^2 \sin \theta' d\theta' d\epsilon' \\ &= - \vec{e}_z \iint_{\substack{0 \leq \theta' \leq \pi \\ 0 \leq \epsilon' \leq 2\pi}} p a^2 \sin \theta' \cos \theta' d\theta' d\epsilon' \\ &= \vec{e}_z \iint_{\substack{0 \leq \theta' \leq \pi \\ 0 \leq \epsilon' \leq 2\pi}} \frac{1}{2} \rho \dot{v}_o a^3 \sin \theta' \cos^2 \theta' d\theta' d\epsilon', \sin^3 \theta' \cos \theta' \text{ 关于 } \frac{\pi}{2} \text{ 对称, 在 } [0, \pi] \text{ 区间积分为零} \\ &= \pi \rho \dot{v}_o a^3 \vec{e}_z \int_0^\pi \sin \theta' \cos^2 \theta' d\theta' \\ &= \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \dot{v}_o \vec{e}_z \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$(10.36)$$

## 11 第八周第一次课

理想不可压缩无旋流动方程

对于理想不可压缩无旋流动, 存在速度势函数  $\varphi$ , 并且  $\varphi$  在域内满足 Laplace 方程, 附加一定的边界条件即可由下面的式子先求出速度势：

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla F &= 0, \text{ 壁面条件} \\ \nabla \varphi|_{R=\infty} &= \vec{v}_\infty, \text{ 无穷远条件} \end{aligned} \quad (11.1)$$

解出  $\varphi$  后, 求梯度得速度场, 再代入 CL 方程(10.1)式中求压强  $p$  即可。

单连域速度场的唯一性定理

如果求解域  $D$  是单连通的, 采用设速度作差法我们可以得到速度差函数 (仍

记为  $\vec{v}$ ) 也满足(11.1)式。为说明  $\vec{v} = \vec{0}$ , 考虑动能积分:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}\rho \int_D |\vec{v}|^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{2}\rho \int_D \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi d\tau \\
 &= \frac{1}{2}\rho \int_D \nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) d\tau, \nabla^2\varphi = 0 \\
 &= \frac{1}{2}\rho \int_A (\vec{n} \cdot \nabla\varphi) \varphi dA \\
 &= \frac{1}{2}\rho \int_A \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA
 \end{aligned}$$

因此, 如果在  $D$  的边界  $A$  中逐点指定  $\varphi$  的值或者  $\varphi$  沿着边界面的法向导数的值, 那么速度差函数在边界  $A$  中逐点有  $\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ , 因此上式中动能为零, 从而推出  $\vec{v} = \vec{0}$ , 即我们得到了单连通域解的唯一性的条件为如下三类:

- (Dirichlet 边界条件) 在  $A$  上指定  $\varphi$
- (Neumann 边界条件) 在  $A$  上指定  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$
- (混合边界条件) 在  $A_1$  上指定  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ , 在  $A_2$  上指定  $\varphi$ , 并且  $A$  可以分成  $A_1$  和  $A_2$  的不交并。

速度势函数的极值原理:

- 速度势函数  $\varphi$  不能在域内达到极大值或极小值。可以用反证法, 假设在某点  $\varphi$  取到极大值, 那么以该点为球心取一个半径很小的球, 有面积分  $\oint_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA < 0$ , 但由 Gauss 公式等式左边可化为  $\int_D \nabla \cdot \vec{v} d\tau = 0$ , 矛盾。
- 在重力场中, 压强不能在域内达到极小值。对(10.1)式作用 Laplace 算子, 得到  $\Delta p = -\frac{1}{2}\Delta|\vec{v}|^2$

$$\begin{aligned}
 \Delta \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 &= \frac{1}{2}\nabla \cdot (\nabla|\vec{v}|^2) \\
 &= \nabla \cdot (\nabla\vec{v} \cdot \vec{v}) \\
 &= \Delta\vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}
 \end{aligned}$$

$\Delta\vec{v} = \nabla \cdot (\nabla\nabla\varphi) = \nabla(\nabla \cdot (\nabla\varphi)) = \vec{0}$  所以  $\Delta p = -\nabla\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} \leq 0$ , 对任一域内点的邻域球有:

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial n} dA = \oint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \nabla p dA = \iiint_D \Delta p d\tau \leq 0 \quad (11.2)$$

所以该点不可能取到极小值。

理想无旋不可压流场势函数三类基本解:

1. 对于均匀流场  $\varphi = u_{\infty}x + v_{\infty}y + w_{\infty}z + c$

2. 对于点源诱导的流场, 首先推导速度场, 由球对称性有  $\vec{v} = v(R)\vec{e}_R$ , 考虑通过半径为  $R$  的球的流量有:  $2\pi Rv(R) = Q$ , 因此  $v(R) = \frac{Q}{4\pi R^2}$ , 由  $\frac{\partial\varphi}{\partial R} = v(R)$  积分得  $\varphi(R) = -\frac{Q}{4\pi R} + c$ , 称  $Q > 0$  为点源, 若  $Q < 0$  则称为点汇
3. 偶极子, 考虑两个相互靠的很近的源和汇, 并定义  $m = \lim_{\delta l \rightarrow 0} (Q\delta l) > 0$ , 由叠加原理, 两个源和汇在空间中产生的速度场为 (假设  $-Q$  在原点,  $+Q$  在  $(\delta l, 0, 0)$ ):

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{-Q}{4\pi\sqrt{(x-\delta l)^2+y^2+z^2}} \\ &= \frac{-mx}{4\pi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\end{aligned}\quad (11.3)$$

下面举一个应用基本解待定系数求解的例子, 考虑圆球 (圆心在原点, 半径为  $a$ ) 绕流问题, 无穷远处来流为  $\vec{v}_\infty = U_\infty \vec{i}$ , 考虑速度势函数有  $\varphi = U_\infty x - \frac{q}{R^2}$  的解, 其中  $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 这相当于均匀流场的基本解与偶极子的基本解的叠加, 由于  $\varphi$  的奇点在球心, 属于流场之外, 且流场为单边域, 故只需通过壁面条件确定系数  $q$ , 为此, 采用球坐标系, 并设  $\theta$  为空间一点  $\vec{r}$  与  $\vec{i}$  的夹角 (与一般球坐标  $\theta$  定义不同)。则  $x = R \cos \theta$ , 所以

$$\varphi = \cos \theta (U_\infty R - \frac{q}{R^2}) \quad (11.4)$$

由壁面不可穿透性条件:  $\frac{\partial\varphi}{\partial R}|_{R=a} = 0$  解出  $q = -\frac{1}{2}a^3U_\infty$ , 所以

$$\begin{aligned}\varphi &= U_\infty R (1 + \frac{a^3}{2R^3}) \cos \theta \\ v_R &= \frac{\partial\varphi}{\partial R} = U_\infty (1 - \frac{a^3}{R^3}) \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} = -U_\infty (1 + \frac{a^3}{R^3}) \sin \theta\end{aligned}$$

由 Bernoulli 方程(9.11)式 (不考虑有势力) 可进一步解出  $p$  如果考虑壁面  $R = a$  的速度和压力分布,  $v_R = 0, v_\theta = -\frac{3}{2}U_\infty \sin \theta, p = p_\infty - \frac{\rho}{2}U_\infty^2 (\frac{9}{4}\sin^2 \theta - 1)$  当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时  $v_\theta = 0$ , 此时速度为零, 分别对应着后驻点和前驻点, 压强为  $p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$  当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (或  $\frac{3\pi}{2}$ ) 时, 此时速度达到最大, 大小为  $\frac{3}{2}v_\infty$ , 压强达到最小,  $p_{\min} = p_\infty - \frac{5}{8}\rho U_\infty^2$ 。

针对平面不可压流, 可引入流函数  $\psi$  的概念, 有了流函数, 速度场可写成:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (11.5)$$

于是有  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , 即不可压条件自动满足。若已知速度场  $(u, v)$ , 可对  $udy - vdx$  做路径积分, 由 Green 公式, 上面的微分形式环路积分为:

$$\oint_l udy - vdx = \iint_A (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy = 0 \quad (11.6)$$

因此对不可压平面流场，流函数总是存在的，可写成

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (udy - vdx) \quad (11.7)$$

流函数具有如下的性质：

- 平面流线是流函数的等值线，因为  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow udy - vdx = 0 \Leftrightarrow d\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = c$
- 通过某截曲线  $\widehat{M_0 M}$  的体积流量等于  $\psi(M) - \psi(M_0)$ ，因为  $\int_{M_0}^M (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int_{M_0}^M (\vec{v} \cdot (dy, -dx)) = \int_{M_0}^M (udy - vdx)$ ，于是由(11.7)式可知。
- 若等势线（速度势函数的等值线）存在，则流线与等势线正交。因为前者的法方向为  $(-v, u)$ ，后者的法方向为  $(u, v)$ 。

对于平面对称流动，由  $\nabla \times \vec{v} = 0$  可推出  $\psi$  适合平面 Laplace 方程，附加适当的边界条件，对于单连域， $\psi$  满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= (u_\infty, -v_\infty), \text{ 来流条件} \\ \psi &= c, \text{ 物面不可穿透条件} \end{aligned} \quad (11.8)$$

平面流场流函数三类基本解：我们考虑满足  $\Delta\psi = 0$ ,

1. 对于均匀流场  $\psi = u_\infty y - v_\infty x + c$
2. 对于点源诱导的流场，首先推导速度场，类似中的推导我们有  $2\pi Rv(R) = Q$ ,  $\vec{v} = v(R)\vec{e}_R$ ，在极坐标系中， $v(R) = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ，所以  $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + c$ ，变换到直角坐标系中即为

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} + c \quad (11.9)$$

3. 偶极子，类似(11.3)式的推导，对  $\arctan \frac{y}{x}$  对  $x$  求导得到偶极子诱导的势函数为

$$\psi = \frac{-m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + c \quad (11.10)$$

$$(11.11)$$

$$(11.12)$$

## References

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_product](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product)
- [2] <http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html>
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Angular\\_velocity#Angular\\_velocity\\_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor)
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Curl\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics))
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_solution](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution)
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s\\_function#Green.27s\\_functions\\_for\\_the\\_Laplacian](https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian)
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Del\\_in\\_cylindrical\\_and\\_spherical\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates)
- [9] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation)

## Glossary

**Kelvin 定理** 若下列 4 个条件同时成立, 则速度场沿流线的环量积分不变:

- 流场连续
- 流体是正压流体
- 流体是理想流体
- 质量力有势

. 26–28

**不可压缩条件** 流体微团体积不随时间变化, 满足  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ . 13

**定常流** 流体任意物理量  $Q$  只与空间坐标有关, 与时间无关. 13

**有势场** 存在标量函数  $\Pi$ , 使得  $\vec{f} = -\nabla\Pi$ . 12, 13

**正压流体**  $\rho = \rho(p)$ , 即密度只与压力有关. 22, 27

**流线** 曲线上每点的切线方向与该点的速度场方向一致. 2

**涡量** 速度场的旋量. 5

**理想流体** 表面力  $T_n = -p\vec{n}$ . 12, 13

**迹线** 某一流体质点的运动轨迹. 1