笔记整理

赵丰

November 9, 2017

1 草稿

复势

引入复变函数的方法研究平面流动问题，若以速度势 φ 为实部，流函数 ψ 为虚部，则组成的复函数 $w = \varphi + i\psi$ 称为复势函数，由 φ, ψ 的定义，Cauchy-Riemann 方程得到满足：

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = & \frac{\partial \psi}{\partial y}\ (= u) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = & -\frac{\partial \psi}{\partial x}\ (= v) \end{cases} \tag{1}$$

所以 $w(z)$ 是解析函数，φ 和 ψ 为一对共轭调和函数。

一般地，由 (x, y) 到 (z, z^*) 的线性变换关系

$$\begin{cases} x = & \frac{z+z^*}{2} \\ y = & \frac{z-z^*}{2i} \end{cases} \tag{2}$$

可知 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = w(z, z^*)$, 可以从下面的推导说明(1)式是 $\frac{\partial w}{\partial z^*} = 0$ 的充要条件，即 w 只与 z 有关。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z^*} =& \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} \\ =& \frac{1}{2}(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}) - \frac{1}{2i}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ =& \frac{1}{2}(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \end{aligned}$$

对于复势 $w(z)$, 其导数与求导方向无关，即 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (iy)} = \frac{dw}{dz}$, 由(1)式容易得到复速度的表达式：

$$V = u + iv = \left(\frac{dw}{dz}\right)^* \tag{3}$$

平面绕流问题的提法：

考虑无穷远的均匀来流通过一截面 S 的流动规律 (如图1)，注意到求解域在平面内是双连域，即绕 S 的流线是不可边缘地缩成一个点。一般情况下这类问题流函数和势函数不具有唯一性，假设有环量条件 $\Gamma = \oint_L \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{x}$, 则 $\varphi = \varphi_p + n\Gamma$ 均是速度势，其中 n 表示绕 S 转了 n 圈。

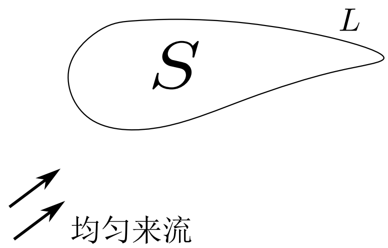

Figure 1: 平面绕流问题图示

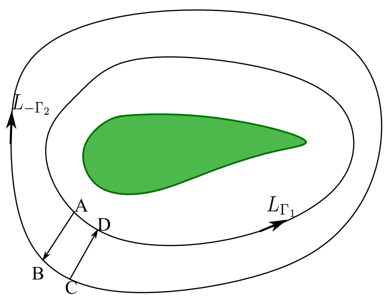

Figure 2: 速度环量相等推导图示

虽然势函数和流函数具有多值性，但速度场是唯一的。事实上，对于双连域中的无旋流场，可以说明任意不可缩周线上的速度环量相等。

如图2所示,对于任取的两条周线 $L_{\Gamma_1}, L_{\Gamma_2}$, 我们取一个很小的隔面 ABCD, 其中 AD,BC 无限靠近,考虑周线,$\overrightarrow{AB}, L_{-\Gamma_2}, \overrightarrow{CD}, L_{\Gamma_1}$, 该周线可以连续地缩为一个点,因此其上的速度环量积分为 0,又因为 AD,BC 无限靠近,有 $\int_{AB+CD} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{x} = 0$, 所以有

$$\oint_{L_{\Gamma_1}} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{x} = \oint_{L_{\Gamma_2}} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{x} \tag{4}$$

因此 Γ 对给定的流场是常数，不会出现在 $\nabla\varphi$ 中。

求解平面绕流问题，如果我们取复势 $w(z)$ 作为未知函数，由于 $w(z)$ 的实部和虚部分别满足 Laplace 方程，因此只需要寻找 $w(z)$ 满足一定的边界条件，即适合以下三类约束：

- 无穷远处：$\frac{dw}{dz}_{|z\to\infty} = u_\infty - iv_\infty$
- 物面上：$\mathrm{Im}(w(z))|_L = \psi_{|L} = 0$
- 任意不可缩周线 L：$\mathrm{Re}(\oint_L \frac{dw}{dz} dz) = \Gamma$

根据流函数的性质，我们可以得到 $\frac{dw}{dz}$ 的环量积分虚部是流量，即有:

$$\oint_L \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + iQ \tag{5}$$

用复势求解平面无旋流动问题对于简单的情形可采用奇点叠加法，为此给出下面几类基本解的形式：

	$w(z)$	等 φ 线	等 ψ 线	周线环量	周线流量
均匀流	$(u_\infty - iv_\infty)z$	$u_\infty x + v_\infty y = c$	$u_\infty y - v_\infty x = c'$	0	0
点源（汇）	$\frac{Q}{2\pi}\ln(z-z_0)$	$\|z-z_0\| = c$	$\arg(z-z_0) = c'$	0	Q
点涡	$\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0)$	$\arg(z-z_0) = c$	$\|z-z_0\| = c'$	Γ	0
平面偶极子	$\frac{-M}{2\pi}\frac{1}{z-z_0}$	过 z_0，圆心在直线 $t: z_0 + tM$ 上的圆簇	过 z_0，圆心在直线 $t: z_0 + tMi$ 上的圆簇	0	0

Table 1: 四类基本解基本性质

对于每一类基本解，再给出 $w(z)$ 后，令其实部等于 c 得等 φ 线，虚部等于 c' 得等 ψ 线，利用(5)式可得周线环量和周线流量。

这里比较特殊的是平面偶极子的复势 w, 仍采用定义 $m = \lim\limits_{\delta l \to 0}(Q\delta l)$, 这里 m 是正实数，假设 z_0 处有点汇 $-Q$，z_0' 处有一点源 Q，定义偶极距为 $M = z_0' - z_0 = me^{i\beta}$, 利用叠加原理：

$$
\begin{aligned}
w(z) = &\lim_{\substack{\delta l \to 0 \\ Q\delta l \to m}} \left[\frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0') - \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0) \right] \\
= &\frac{-me^{i\beta}}{2\pi}\frac{1}{z - z_0} \\
= &\frac{-M}{2\pi}\frac{1}{z - z_0}
\end{aligned}
$$

我们简记 $\sigma = |z - z_0|$,α' =arg$(z - z_0)$, 则 $w(z) = \frac{m}{2\pi\sigma}e^{\pi+\beta-\alpha'}$，令 Re$w(z)$ 为常数得到 $\sigma = c\cos(\beta - \alpha')$, 在平面极坐标系下，由图3可知该方程表示一个过 z_0 的圆，圆心在过 z_0, 方向与 M 相同的直线上（c 可以为负数）。对于平面偶极子诱导的复速度，由(5)式和留数定理可知

$$
\Gamma_l + iQ_l = \oint_l \frac{M}{2\pi}(z - z_0)^2 = 0 \tag{6}
$$

表1中给出的四类基本解的等 φ 线和等 ψ 线的形状在图4中表示出来。

基本解的速度场采用公式(3)式可以求出，

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

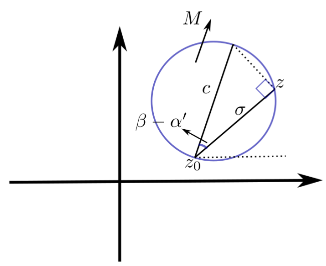

Figure 3: 平面极坐标系下圆的方程

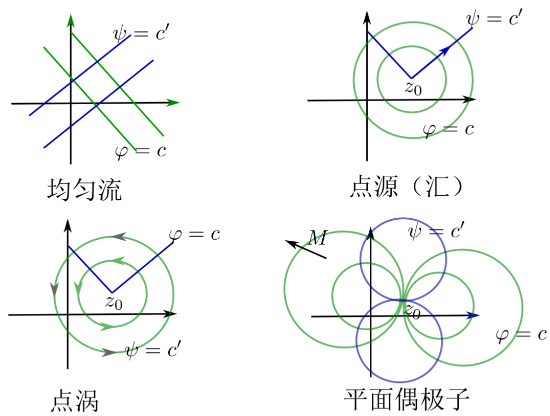

Figure 4: 四类基本解等 φ 线和等 ψ 线的形状

	复速度	模长	幅角
均匀流	$u_\infty + iv_\infty$	$\lvert V_\infty \rvert$	α_∞
点源（汇）	$\frac{Q}{2\pi\sigma}e^{i\alpha'}$	$\frac{\lvert Q \rvert}{2\pi\sigma}$	$\begin{cases} \alpha' & Q > 0 \\ \alpha' + \pi & Q < 0 \end{cases}$
点涡	$\frac{\Gamma}{2\pi\sigma}e^{i(\alpha' + \frac{\pi}{2})}$	$\frac{\lvert \Gamma \rvert}{2\pi\sigma}$	$\begin{cases} \alpha' + \frac{\pi}{2} & \Gamma > 0 \\ \alpha' - \frac{\pi}{2} & \Gamma < 0 \end{cases}$

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation