笔记整理

赵丰

November 7, 2017

1 草稿

理想不可压缩无旋流动方程

对于理想不可压缩无旋流动，存在速度势函数 φ, 并且 φ 在域内满足 Laplace 方程，附加一定的边界条件即可由下面的式子先求出速度势：

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi =&0 \\
\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\varphi\cdot\nabla F =&0, \text{壁面条件} \\
\nabla\varphi_{|R=\infty} =&\overrightarrow{v_\infty}, \text{无穷远条件}
\end{aligned} \tag{1}
$$

解出 φ 后，求梯度得速度场，再代入 CL 方程(**??**)式中求压强 p 即可。

单连域速度场的唯一性定理

如果求解域 D 是单连通的，采用设速度作差法我们可以得到速度差函数 (仍记为 $\overrightarrow{v}$) 也满足(1)式。为说明 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，考虑动能积分:

$$
\begin{aligned}
T =&\frac{1}{2}\rho\int_D|\overrightarrow{v}|^2d\tau \\
=&\frac{1}{2}\rho\int_D\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi d\tau \\
=&\frac{1}{2}\rho\int_D\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)d\tau, \nabla^2\varphi=0 \\
=&\frac{1}{2}\rho\int_A(\overrightarrow{n}\cdot\nabla\varphi)\varphi dA \\
=&\frac{1}{2}\rho\int_A\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dA
\end{aligned}
$$

因此，如果在 D 的边界 A 中逐点指定 φ 的值或者 φ 沿着边界面的法向导数的值，那么速度差函数在边界 A 中逐点有 $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，因此上式中动能为零，从而推出 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，即我们得到了单连通域解的唯一性的条件为如下三类：

- (Dirichlet 边界条件) 在 A 上指定 φ
- (Neumann 边界条件) 在 A 上指定 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

- (混合边界条件) 在 A_1 上指定 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, 在 A_2 上指定 φ, 并且 A 可以分成 A_1 和 A_2 的不交并。

速度势函数的极值原理：

- 速度势函数 φ 不能在域内达到极大值或极小值。可以用反证法，假设在某点 φ 取到极大值，那么以该点为球心取一个半径很小的球，有面积分 $\oiint_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}dA<0$，但由 Gauss 公式等式左边可化为 $\int_D \nabla\cdot\overrightarrow{v}d\tau=0$, 矛盾。

- 在重力场中，压强不能在域内达到极小值。对(??)式作用 Laplace 算子，得到 $\Delta p=-\frac{1}{2}\Delta|\overrightarrow{v}|^2$

$$
\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{2}|\overrightarrow{v}|^2 =& \frac{1}{2}\nabla\cdot(\nabla|\overrightarrow{v}|^2)\\
=&\nabla\cdot(\nabla\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})\\
=&\Delta\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}+\nabla\overrightarrow{v}\cdot\nabla\overrightarrow{v}
\end{aligned}
$$

  $\Delta\overrightarrow{v}=\nabla\cdot(\nabla\nabla\varphi)=\nabla(\nabla\cdot(\nabla\varphi))=\overrightarrow{0}$ 所以 $\Delta p=-\nabla\overrightarrow{v}\cdot\nabla\overrightarrow{v}\le 0$，对任一域内点的邻域球有:

$$
\oiint_\Sigma \frac{\partial p}{\partial n}dA=\oiint_\Sigma \overrightarrow{n}\cdot\nabla p dA=\iiint_D \Delta p d\tau\le 0 \tag{2}
$$

  所以该点不可能取到极小值。

理想无旋不可压流场势函数三类基本解：

1. 对于均匀流场 $\varphi=u_\infty x+v_\infty y+w_\infty z+c$

2. 对于点源诱导的流场，首先推导速度场，由球对称性有 $\overrightarrow{v}=v(R)\overrightarrow{e_R}$, 考虑通过半径为 R 的球的流量有：$2\pi Rv(R)=Q$，因此 $v(R)=\frac{Q}{4\pi R^2}$, 由 $\frac{\partial\varphi}{\partial R}=v(R)$ 积分得 $\varphi(R)=-\frac{Q}{4\pi R}+c$，称 $Q>0$ 为点源，若 $Q<0$ 则称为点汇

3. 偶极子，考虑两个相互靠的很近的源和汇，并定义 $m=\lim_{\delta l\to 0}(Q\delta l)>0$, 由叠加原理, 两个源和汇在空间中产生的速度场为（假设 $-Q$ 在原点，$+Q$ 在 $(\delta l,0,0)$：

$$
\begin{aligned}
\varphi=&\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{-Q}{4\pi\sqrt{(x-\delta l)^2+y^2+z^2}}\\
=&\frac{-mx}{4\pi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

下面举一个应用基本解待定系数求解的例子，考虑圆球（圆心在原点，半径为 a）绕流问题，无穷远处来流为 $\overrightarrow{v_\infty}=U_\infty\overrightarrow{i}$, 考虑速度势函数有 $\varphi=U_\infty x-\frac{qx}{R^3}$ 的解，其中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 这相当于均匀流场的基本解与偶极子的基本解的叠加，由于 φ 的奇点在球心，属于流场之外，且流场为单边域，故只需通过

壁面条件确定系数 q，为此，采用球坐标系，并设 θ 为空间一点 $\overrightarrow{r}$ 与 $\overrightarrow{i}$ 的夹角（与一般球坐标 θ 定义不同）。则 $x = R\cos\theta$，所以

$$\varphi = \cos\theta(U_\infty R - \frac{q}{R^2}) \tag{4}$$

由壁面不可穿透性条件:$\frac{\partial\varphi}{\partial R}_{|R=a} = 0$ 解出 $q = -\frac{1}{2}a^3 U_\infty$，所以

$$\begin{aligned}\varphi =& U_\infty R(1 + \frac{a^3}{2R^3})\cos\theta \\ v_R =& \frac{\partial\varphi}{\partial R} = U_\infty(1 - \frac{a^3}{R^3})\cos\theta \\ v_\theta =& \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty(1 + \frac{a^3}{R^3})\sin\theta\end{aligned}$$

由 Bernoulli 方程(**??**)式（不考虑有势力）可进一步解出 p 如果考虑壁面 $R = a$ 的速度和压力分布，$v_R = 0$,$v_\theta = -\frac{3}{2}U_\infty\sin\theta$, $p = p_\infty - \frac{\rho}{2}U_\infty^2(\frac{9}{4}\sin^2\theta - 1)$ 当 $\theta = 0$ 或 π 时 $v_\theta = 0$，此时速度为零，分别对应着后驻点和前驻点，压强为 $p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$（或 $\frac{3\pi}{2}$）时，此时速度达到最大，大小为 $\frac{3}{2}v_\infty$，压强达到最小，$p_{\min} = p_\infty - \frac{5}{8}\rho U_\infty^2$。

针对平面不可压流，可引入流函数 ψ 的概念，有了流函数，速度场可写成:

$$\begin{cases} u = & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = & -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \tag{5}$$

于是有 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$，即不可压条件自动满足。若已知速度场 (u, v)，可对 $udy - vdx$ 做路径积分，由 Green 公式，上面的微分形式环路积分为:

$$\oint_l udy - vdx = \iint_A (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})dxdy = 0 \tag{6}$$

因此对不可压平面流场，流函数总是存在的，可写成

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (udy - vdx) \tag{7}$$

流函数具有如下的性质：

- 平面流线是流函数的等值线, 因为 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow udy - vdx = 0 \Leftrightarrow d\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = c$
- 通过某截曲线$\overparen{M_0M}$的体积流量等于 $\psi(M) - \psi(M_0)$, 因为 $\int_{M_0}^{M}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})ds = \int_{M_0}^{M}(\overrightarrow{v} \cdot (dy, -dx)) = \int_{M_0}^{M}(udy - vdx)$, 于是由(7)式可知。
- 若等势线（速度势函数的等值线）存在，则流线与等势线正交。因为前者的法方向为:$(-v, u)$，后者的法方向为 (u, v)。

对于平面无旋流动，由 $\nabla\times\overrightarrow{v}=0$ 可推出 ψ 适合平面 Laplace 方程, 附加适当的边界条件，对于单连域,ψ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=&0\\(\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial x})=&(u_\infty,-v_\infty),\text{来流条件}\\\psi=&c,\text{物面不可穿透条件}\end{aligned}\tag{8}$$

平面流场流函数三类基本解: 我们考虑满足 $\Delta\psi=0$,

1. 对于均匀流场 $\psi=u_\infty y-v_\infty x+c$
2. 对于点源诱导的流场，首先推导速度场，类似中的推导我们有 $2\pi Rv(R)=Q,\overrightarrow{v}=v(R)\overrightarrow{e_R}$，在极坐标系中, $v(R)=\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$，所以 $\psi=\frac{Q}{2\pi}\theta+c$，变换到直角坐标系中即为
$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}+c\tag{9}$$
3. 偶极子，类似(3)式的推导，对 $\arctan\frac{y}{x}$ 对 x 求导得到偶极子诱导的势函数为
$$\psi=\frac{-m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}+c\tag{10}$$

$$\tag{11}$$

$$\tag{12}$$

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation