笔记整理

赵丰

October 2, 2017

1 第二周第二次课

迹线

某一流体质点的运动轨迹, 其轨迹方程为常微分方程组 $\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{x}$ 为流体质点在 t 时刻的位置，同时也依赖于初始位置 $\overrightarrow{x_0}$(常微分方程组初值);$\overrightarrow{v} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}$ 为速度场，每个分量都是空间位置和时间 t 的函数，常微分方程组写成分量的形式为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & u(x,y,z,t) \\ \frac{dy}{dt} = & v(x,y,z,t) \\ \frac{dz}{dt} = & w(x,y,z,t) \end{cases} \tag{1}$$

如对于如下的速度场

$$(u,v,w) = (\frac{x}{1+t}, y, z) \tag{2}$$

$t = 0$ 时初值条件为 $(x,y,z) = (1,1,1)$，可直接求出上述常微分方程 (ODE) 有唯一解:

$$\begin{cases} x = & 1+t \\ y = & e^t \\ z = & 1 \end{cases} \tag{3}$$

这是关于 t 的参数曲线，可以通过消元得到 $y = e^{x-1}, z = 1$, 这是用空间两个曲面的交线表示曲线的方法。

流线

数学定义为

$$\frac{d\overrightarrow{x}(s)}{ds} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \tag{4}$$

上述定义在给定速度场后描述了空间这样一簇曲线，每条曲线每点的切线方向与该点的速度场方向一致。使用向量外积的定义得到等价的定义形式

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \tag{5}$$

这里时间 t 是常数。上述方程如取 x 为自变量, 可得到关于 $(y(x), z(x))$ 的常微分方程组。比如对 $t = 0$ 时刻(2)式给出的速度场为 $(u,v,w) = (x,y,z)$, 求过

$(1,1,1)$ 点的流线即解 ODE：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = & \frac{y}{x} \\ \frac{dz}{dx} = & \frac{z}{x} \end{cases} \tag{6}$$

初值条件是 $y(1)=1, z(1)=1$，从而有唯一解 $y=x, z=x$。可以看出，对同一个流场，流线和迹线是不同的。

但对于定常流，即 $\boldsymbol{v}$ 不随时间变化，流线簇和迹线簇重合。比如考虑平面流场 $(u,v)=(ax,-ay)$, (1)给出曲线簇 $x=c_1e^{at}, y=c_2e^{-at}$,(5)给出曲线簇 $xy=c$, 它们表示同一曲线簇。

其他概念:

脉线、时间线、流管、流体线、流体面

流体微团

考虑一流体微团（系统）研究其变形规律：由图1可以看到，$\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B'}=$

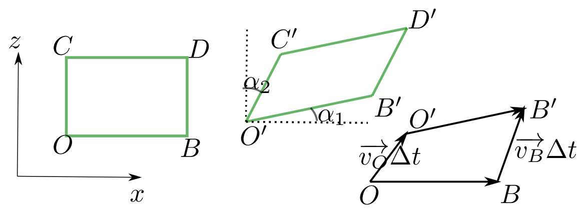

Figure 1: xz 平面矩形的变形

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB'}$, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'B'} =& \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{OO'} \\ =& \Delta x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{v_B}\Delta t-\overrightarrow{v_O}\Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

又

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_B} =& \overrightarrow{v}(x+\Delta x, y, z, t) \\ \overrightarrow{v_O} =& \overrightarrow{v}(x, y, z, t) \end{aligned}$$

所以(7)式化为：

$$\overrightarrow{O'B'} = \Delta x\overrightarrow{i}+\Delta x\Delta t\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial x} \tag{8}$$

进一步设速度场 $\overrightarrow{v}=(u,v,w)$, 则上式在直角坐标系下为:

$$\overrightarrow{O'B'} = [(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t)\overrightarrow{i}+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t\overrightarrow{j}+\frac{\partial w}{\partial x}\Delta t\overrightarrow{k}]\Delta x \tag{9}$$

同样的方法可求出 $\overrightarrow{C'D'}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'D'} =&\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{CC'}\\ =&\Delta x\overrightarrow{i}+[\overrightarrow{v}(x+\Delta x,y,z+\Delta z,t)-\overrightarrow{v}(x,y,z+\Delta z,t)]\Delta t\\ =&\Delta x\overrightarrow{i}+\Delta x\Delta t\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial x}\\ \Rightarrow&\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{C'D'}\end{aligned}$$

所以正六面体流体微团的微小变形后仍是平行六面体，其变形后的体积可用平行六面体体积公式求得。

设变形前正六面体由自 O' 出发的向量 $\overrightarrow{OA}=\Delta y\overrightarrow{j},\overrightarrow{OB}=\Delta x\overrightarrow{i},\overrightarrow{OC}=\Delta z\overrightarrow{k}$ 张成，变形后的六面体由自 O' 出发的向量 $\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'},\overrightarrow{O'C'}$ 张成，对 xy,yz 两个表面类似的分析可以得到与(9)类似的式子：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'C'} =&[\frac{\partial u}{\partial z}\Delta t\overrightarrow{i}+\frac{\partial v}{\partial z}\Delta t\overrightarrow{j}+(1+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta t\overrightarrow{k})]\Delta z\\ \overrightarrow{O'A'} =&[\frac{\partial u}{\partial y}\Delta t\overrightarrow{i}+(1+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta t\overrightarrow{j})+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta t\overrightarrow{k}]\Delta y\end{aligned}$$

变形前正六面体体积 $\Delta\tau(t)=\Delta x\Delta y\Delta z$, 经过 Δt 时间变形后六面体体积使用混合积公式 [1] 并略去高阶小为：

$$\Delta\tau(t+\Delta t)=[1+(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overrightarrow{w}}{\partial z})\Delta t]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{10}$$

定义流体微团的瞬时**体膨胀率**为单位体积变化的速率，即

$$\Delta\tau'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau(t+\Delta t)-\Delta\tau(t)}{\Delta\tau(t)\Delta t} \tag{11}$$

于是可以得到体膨胀率为 $\nabla\cdot\overrightarrow{v}$, 为速度场的散度。当速度场的散度处处为 0 时，流体为不可压缩流体，变形前后体积不变。

类似的有**线变形率**的定义，对于 x 方向为：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overrightarrow{O'B'}|-|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OB}|\Delta t} \tag{12}$$

其中使用 Taylor 近似从(9)式出发有:$|\overrightarrow{O'B'}|\approx(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t)\Delta x$ 于是可以求得 x 方向的线变形率为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，进而得到体膨胀率为三个方向线变形率之和的结论。

流体的旋转角度

对于流体绕 y 轴的旋转角度定义为 $\overrightarrow{O'B'}$ 相对于 $\overrightarrow{OB}$ 转过的角度与 $\overrightarrow{O'C'}$ 相对于 $\overrightarrow{OC}$ 转过的角度的平均值。由于转角 α 很小，有近似 $\tan\alpha\approx\alpha$, 所以由(9)式

$$\begin{aligned}\measuredangle\left\langle\overrightarrow{O'B'},\overrightarrow{OB}\right\rangle =&\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\Delta t}{1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t}\\ \approx&\frac{\partial w}{\partial x}\Delta t(1-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t)\end{aligned}$$

略去二阶小 $(\Delta t)^2$ 即得到图中的 $\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$, 因为顺时针方向为负，所以转角为 $-\alpha_1$。同理求出图中的 $\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}$ 所以流体绕 y 轴的旋转角度为

$$\begin{aligned}\omega_y =& \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\Delta t} \\ =& \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\end{aligned} \tag{13}$$

流体的角变形率

对于流体在 xz 平面的角变形率:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xz} =& \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2\Delta t} \\ =& \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\end{aligned} \tag{14}$$

2 第三周第一次课

流动运动学常用物理量的张量表示

变形率张量 $\boldsymbol{S} = [s_{ij}] = \frac{1}{2}\left(\Delta \overrightarrow{v} + (\Delta \overrightarrow{v})^{\mathrm{T}}\right)$, 类似弹性力学中的应变张量，为二阶对称张量。反称张量 $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_{ij}] = [\epsilon_{ijk}\omega_k]$, 其中 $\omega = \frac{1}{2}\Delta \times \boldsymbol{v}$ 并且我们有:

$$\nabla \overrightarrow{v} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Omega}[2] \tag{15}$$

其中速度梯度张量 $\nabla \overrightarrow{v} = [v_{ij}] = [\frac{\partial v_i}{\partial x_j}]$ [1]

运动分析

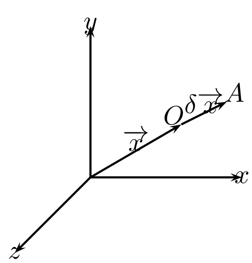

Figure 2: 流体质点从 O 点经 Δt 时间运动到 A 点

[1] $\boldsymbol{\Omega}$ 前是减号不是加号

Helmholz 速度分解定理, 参考图2, 有：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_A} =& v_j(\overrightarrow{x}+\delta\overrightarrow{x},t)\overrightarrow{e_j} && (16)\\ =&[v_j(\overrightarrow{x},t)+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\delta x_i]\overrightarrow{e_j} && (17)\\ =&[v_j(\overrightarrow{x},t)+s_{ij}(\overrightarrow{x},t)\delta x_i+\Omega_{ij}((\overrightarrow{x},t))\delta x_i]\overrightarrow{e_j}\,^{2} && (18)\\ =&\overrightarrow{v_O}+\delta x\cdot\overrightarrow{S_0}+\overrightarrow{\omega_O}\times\delta\overrightarrow{x} && (19)\end{aligned}$$

其中最后一式用到了 $\mathbf{\Omega}$ 和 $\overrightarrow{\omega}$ 的关系式:

$$\mathbf{\Omega}\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{x}[3] \tag{20}$$

涡量 (vortex)

定义为:$\overrightarrow{\Omega}=\nabla\times\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{\omega}$，其散度为零。

对于有相同流线方程的流场，其涡量场可以不同。比如流场

$$\begin{cases}u=-y\\ v=x\end{cases}\quad(a)\begin{cases}u=-\frac{y}{x^2+y^2}\\ v=\frac{x}{x^2+y^2}\end{cases}\quad(b) \tag{21}$$

二者的流线簇均为 $x^2+y^2=c$, 但 (a) 中涡量为 $2\overrightarrow{k}$ (b) 中速度场在极坐标下为 $\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}$, 对于非原点处，由极坐标系散度公式 [4] 得其散度为 $\frac{\partial 1/r}{\partial\theta}=0$, 由极坐标系旋度公式 [5] 得涡量为 $\overrightarrow{0}$。在原点处，由格林公式，速度的环量（环量积分）等于涡通量：

$$\begin{aligned}\Gamma_l=&\oint_l\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{x} && (22)\\ =&\int_0^{2\pi}\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\cdot\overrightarrow{e_\theta}rd\theta && (23)\\ =&2\pi && (24)\end{aligned}$$

另外不难验证 $\arctan\frac{y}{x}$ 是后一个流场的势函数，在极坐标下其表示为 θ。

其他概念:

涡线、涡面、涡管

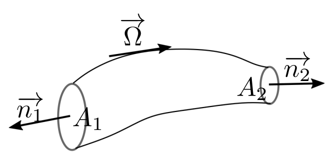

Figure 3: 涡通量的守恒性质

[2] $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ 是 v_{ji}, 与(15)不矛盾。

参考图3, 对于涡管的任一两个横截面 A_1, A_2, 有

$$\iint\limits_{A_1} \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{n_1} dA = \iint\limits_{A_2} \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{n_2} dA \tag{25}$$

即沿涡管各截面涡通量大小相等。

给定流场的散度与涡量求速度场

已知区域 D 内的速度场 $\overrightarrow{v}$ 在区域内满足如下的偏微分方程 (PDE)：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{v} & = \theta(\overrightarrow{x}) \\ \nabla \times \overrightarrow{v} & = \overrightarrow{\Omega}(\overrightarrow{x}) \end{cases} \tag{26}$$

在边界上给出法向速度的大小：$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = v_{bn}(\overrightarrow{x})$ 则由 Poisson 方程在 Neumann 边界条件下解的性质可以得到速度场是唯一确定的。

首先运用 PDE 的叠加原理将原问题分解为求如下三个 PDE:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{v_E} & = \theta(\overrightarrow{x}) \\ \nabla \times \overrightarrow{v_E} & = \overrightarrow{0} \end{cases} (a) \begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{v_V} & = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{v_V} & = \overrightarrow{\Omega}(\overrightarrow{x}) \end{cases} (b) \begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{u} & = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{u} & = \overrightarrow{0} \end{cases} (c) \tag{27}$$

其中 (27.c) 式附加第二类边界条件 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = v_{bn}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{v_E} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{v_N} \cdot \overrightarrow{n}$

对于 (27.a), 由无旋条件可知存在势场 Φ_E 使得 $\overrightarrow{v_E} = \nabla\Phi_E$, 于是得到 Φ_E 在求解区域内满足 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \Phi_E(\overrightarrow{x}) = \theta(\overrightarrow{x}) \tag{28}$$

该方程可由三维 Laplace 方程的基本解 $\frac{1}{|\overrightarrow{x}|}$ 与 $\theta(\overrightarrow{x})$ 做卷积得到 [6], 写成分量的形式即为:

$$\Phi_E(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\theta(\xi,\eta,\zeta)}{R(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)} d\xi d\eta d\zeta \tag{29}$$

这里

$$R(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = |\overrightarrow{R}((x,y,z;\xi,\eta,\zeta))| \tag{30}$$

$$\overrightarrow{R}((x,y,z;\xi,\eta,\zeta)) = (x-\xi)\overrightarrow{i} + (y-\eta)\overrightarrow{j} + (z-\zeta)\overrightarrow{k} \tag{31}$$

直接计算得到：$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\overrightarrow{R}}{R^3}$，其中梯度算子是关于 (x,y,z) 的。所以我们有:

$$\overrightarrow{v_E} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\theta(\xi,\eta,\zeta)\overrightarrow{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta \tag{32}$$

比如散度场 θ 为 δ 函数，可以得到点源诱导的速度场为:

$$\overrightarrow{v_E} = \frac{1}{4\pi} \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{33}$$

这与万有引力场和点电荷诱导的静电场形式相同。

对于 (27.b), 难以得到一般条件下的闭式解，因此对涡量 Ω 在求解域的边界上附加条件

$$\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{n}=0 \tag{34}$$

为此，我们先用张量分析的 $\epsilon-\delta$ 恒等式 $\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijm}=\delta_{jl}\delta_{mn}-\delta_{mj}\delta_{ln}$ 证明如下的等式:

$$\nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{A})=\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A})-\nabla\cdot(\nabla\overrightarrow{A}) \tag{35}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{A}) =&\nabla(\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\overrightarrow{e_i})\\
=&\epsilon_{nmi}\frac{\partial(\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j})}{\partial x_m}\overrightarrow{e_n}\\
=&(\delta_{nj}\delta_{mk}-\delta nk\delta_{mj})\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j^2}\overrightarrow{e_n}^{3}\\
=&(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_n^2}\overrightarrow{e_n})-(\frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j^2}\overrightarrow{e_n})\\
=&(\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial A_k}{\partial x_n})\overrightarrow{e_n})-(\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial A_n}{\partial x_j}\overrightarrow{e_n}\overrightarrow{e_j})\cdot\overrightarrow{e_k})\\
=&(\frac{\partial}{\partial x_n}(\nabla\cdot\overrightarrow{A})\overrightarrow{e_n})-(\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{e_j})\\
=&\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A})-\nabla\cdot(\nabla\overrightarrow{A})
\end{aligned}$$

□

运用上面的等式，我们推导 **Biot-Savart 定律**:

首先假设 (27.b) 中 $\overrightarrow{v_V}$ 可以写成 $\overrightarrow{v_V}=\nabla\times\overrightarrow{A}$, 则 (27.b) 中第一式自然满足，而第二式由(35)式可化为：

$$\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A})-\nabla\cdot(\nabla\overrightarrow{A})=\overrightarrow{\Omega} \tag{36}$$

下面我们证明对于区域 D，不考虑边界条件,(36)的一个解为:

$$\overrightarrow{A}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\frac{\overrightarrow{\Omega}(\xi,\eta,\zeta)}{R(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta \tag{37}$$

Proof. 首先证明 $\nabla\cdot\overrightarrow{A}=0$, 记 ∇ 是关于 (x,y,z) 求梯度，而 ∇' 是关于 ξ,η,ζ

[3] $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j^2}\overrightarrow{e_n}$ 是对 A 的各个分量求 Laplace，相当于对矢量 A 先求梯度再求散度。

求梯度，于是有：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\overrightarrow{A} =&\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\overrightarrow{\Omega}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\nabla(\frac{1}{R})d\xi d\eta d\zeta\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\overrightarrow{\Omega}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\nabla'(\frac{1}{R})d\xi d\eta d\zeta\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\nabla'\cdot(\frac{\overrightarrow{\Omega}}{R})d\xi d\eta d\zeta^{4}\\
=&-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D}\frac{\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{n}}{R}dS\\
=&0\ (\text{由式}(34))
\end{aligned}$$

另一方面，与(29)式类似，由基本解与 Ω 做卷积得到:

$$-\nabla\cdot(\nabla\overrightarrow{A})=\overrightarrow{\Omega} \tag{38}$$

从而我们得到了(36)式的一个特解。 □

因此对于无散有旋的情形 (27.b), 我们得到速度场为：

$$\overrightarrow{v_V}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\nabla(\frac{1}{R})\times\overrightarrow{\Omega}d\xi d\eta d\zeta \tag{39}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{\overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{R}}{R^3}d\xi d\eta d\zeta \tag{40}$$

以**直线涡诱导的速度场**为例，考虑一空间涡量场为:

$$\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{k}=\begin{cases}\infty, & (0,0,z)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{41}$$

其余两个方向分量为零,并且涡通量为常数 Γ, 即对于区域 $A_\epsilon(k)=\{(x,y,z)|x^2+y^2<\epsilon,z=k\}$, 有

$$\iint\limits_{A_\epsilon(k)}\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{n}dS=\Gamma \tag{42}$$

可以求出上述直线涡产生的速度场沿 z 轴方向不变，对于其 x,y 平面内的速度场，与式 (21.b) 描述的相同。下面用(40)式直接求该速度场，这里 $D=\mathbb{R}^3$, 代

表全空间：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_V} =& \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{\overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{R}}{R^3}d\xi d\eta d\zeta，\text{化为累次积分，先算}\xi,\eta \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}(\iint\limits_{A_\epsilon(\zeta)}\frac{\overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{R}}{R^3}d\xi d\eta)d\zeta，\epsilon\text{ 可任意小} \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\Gamma\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{R'}}{R'^3}\right)d\zeta, R' = R(x,y,z;0,0,\zeta) \\
=& \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{x\overrightarrow{j}-y\overrightarrow{i}}{(x^2+y^2+(z-\zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)d\zeta \\
=& \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{-y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution