笔记整理

赵丰

October 27, 2017

1 草稿

理想流体运动的基本方程理想流体应力张量 $T_{ij} = -p\delta_{ij}$，因此动量方程(**??**)式化为:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \tag{1}$$

(1)式即欧拉方程，相应的(**??**)化为

$$\frac{D(e + \frac{1}{2}|\overrightarrow{v}|^2)}{Dt} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\overrightarrow{v}) + (\dot{q} + q_R) \tag{2}$$

综合连续性方程(**??**)式,(1),(**??**) 共 5 个方程，但未知数有 $\overrightarrow{v}, e, p, \rho$ 6 个，因此需补充热力学方程才能使方程组封闭。

实际上，我们可以通过动量方程(1)式得到动能的变化率:

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}|\overrightarrow{v}|^2) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{v} \cdot \nabla p \tag{3}$$

将(2)式与(3)作差得:

$$\begin{aligned} \frac{De}{Dt} =& -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \overrightarrow{v} + \dot{q} + q_R, \text{by } (\textbf{??}) \\ =& \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \dot{q} + q_R \\ =& -p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \dot{q} + q_R \end{aligned} \tag{4}$$

定义 $i = e + \frac{p}{\rho}$ 为气体的焓，则可以得到

$$\frac{Di}{Dt} = \dot{q} + q_R + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \tag{5}$$

对于绝热状态下的理想常比热完全气体，我们有

$$\begin{aligned}\frac{De}{Dt} =& C_V\frac{DT}{Dt}, e = C_VT \\ =& \frac{C_V}{R}\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right), p = \rho RT \\ =& \frac{1}{\gamma-1}\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right), C_P - C_V = R, \frac{C_P}{C_V} = \gamma\end{aligned} \tag{6}$$

将(4)式去掉产热项，与(6)式结合可以得到

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{7}$$

(7)式即为对于气体补充的 ρ 和 p 的关系的热力学方程。

对于匀质不可压缩的液体，补充 $\nabla\cdot\overrightarrow{v} = 0$ 的方程，此时(**??**)式恒成立，动力学方程与热力学方程解耦，因此我们可以联立求解:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\overrightarrow{v} =& 0 \\ \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\nabla\overrightarrow{v} =& \overrightarrow{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p\end{aligned} \tag{8}$$

得到 $\overrightarrow{v}, p$ 再代入能量方程求其他参量。

下面考虑理想流体动力学偏微分方程的边界条件。一般的，对于不可穿透的壁面，流体的法向速度与壁面运动的法向速度相等，即满足:

$$(\overrightarrow{v}_L\cdot\overrightarrow{n})_\Sigma = (\overrightarrow{v}_B\cdot\overrightarrow{n})_\Sigma \tag{9}$$

若 Σ 有曲面方程 $F(x, y, z, t) = 0$，则流体边界速度满足

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \overrightarrow{v_L}\cdot\nabla F = 0 \tag{10}$$

此即**不可穿透条件**的一种提法; 此外，我们还有无穷远条件等。

比如考虑一半轴长分别为 a, b, c 的实心椭球，以速度 $U\overrightarrow{i}$ 在流体中运动，则在椭球面上流体的边界条件可根据椭球面方程求出。在固结在椭球中心的运动参考系中 $(O'x'y'z')$ 中，椭球面方程为

$$F' : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{11}$$

F' 不随时间变化，由(10)式得到在 $(O'x'y'z')$ 中速度的边界条件为

$$\frac{u'x'}{a^2} + \frac{v'y'}{b^2} + \frac{w'z'}{c^2} = 0 \tag{12}$$

若考虑静止参考系 $(Oxyz)$，则

$$F : \frac{(x-Ut)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{13}$$

F 随时间变化，可得在 $(Oxyz)$ 中速度的边界条件为

$$\frac{-U(x-Ut)}{a^2}+\frac{u(x-Ut)}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}=0 \tag{14}$$

下面应用理想流体动力学方程组(8)式求解一个球对称问题: 考虑无限大的液体中有一匀质圆球均匀地向外膨胀，半径 R 随时间变化规律为 $R=R_b(t)$，已知初始时刻 $t=0$ 时液体静止，求解 t 时刻液体压强的分布。

首先由球对称性可以得到 $\overrightarrow{v}=v_r\overrightarrow{e_r}$ 对于球坐标，基矢量随坐标变量的变化规律为 [?]:

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}=\overrightarrow{e_\theta},\ \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}=\overrightarrow{e_\varphi}\sin\theta \tag{15}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\theta}=-\overrightarrow{e_r},\ \frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\varphi}=\overrightarrow{e_\varphi}\cos\theta \tag{16}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\varphi}=-\left(\overrightarrow{e_r}\sin\theta+\overrightarrow{e_\theta}\cos\theta\right) \tag{17}$$

球坐标系下的梯度算子表示为:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \tag{18}$$

因此球坐标系下对于矢量 $\overrightarrow{v}=v_r\overrightarrow{e_r}+v_\theta\overrightarrow{e_\theta}+v_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$ 的散度为:

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi})\cdot(v_r\overrightarrow{e_r}+v_\theta\overrightarrow{e_\theta}+v_\varphi\overrightarrow{e_\varphi})=\\
&\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta}+(v_r\frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}+v_\theta\frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\varphi}+v_\varphi\frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\varphi})\cdot\frac{\overrightarrow{e_\varphi}}{r\sin\theta}\\
&=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}+(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\frac{1}{r\sin\theta}\\
&=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cos\theta}{r\sin\theta}
\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \tag{19}$$

由上式以及(8)式中的不可压缩方程，我们得到

$$\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}=0 \tag{20}$$

结合 $r=R$ 时 $v_r=\dot{R}_b(t)$ 于是得到

$$v_r=\frac{R_b(t)^2}{r^2}\dot{R}_b(t) \tag{21}$$

对于(8)式中的动量方程，$\overrightarrow{v}\cdot\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r}$, 因此动量方程化为

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{22}$$

代入(21)式到(22)式中，得到

$$p=p_\infty+\frac{\rho R_b}{2r^4}((4r^3-R_b^3)\dot{R}_b^2+2r^3R_b\ddot{R}_b) \tag{23}$$

令 $r=R_b$ 得到球外表面压力分布为

$$p_{ext}=p_\infty+\rho(R_b\dot{R}_b^2+\frac{3}{2}\dot{R}_b^2) \tag{24}$$

对液体表面薄层受力分析可得到内外压关系（假设圆球内是压强分布均匀的气体）为

$$p_{int}=p_{ext}+\frac{2\gamma}{R} \tag{25}$$

其中 γ 是液体的表面张力系数，如已知 p_{int}，解上式 ODE 可得 $R=R(t)$ 即界面随时间变化规律。

理想流体在势力场中运动的主要性质：

Kelvin 定理，也称环量不变定理，指出若下列 4 个条件同时成立，则速度场沿流线的环量积分不变:

- 流场连续
- 流体是正压流体
- 流体是理想流体
- 质量力有势

Kelvin 定理的数学表述为:

$$\frac{D}{Dt}\left(\oint_l\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{x}\right)=0 \tag{26}$$

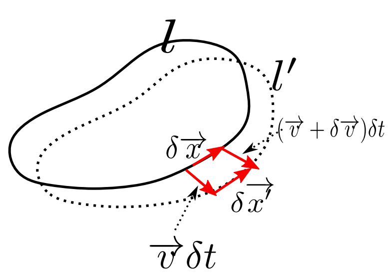

Figure 1: Kelvin 定理推导图示

推导(26)式可按如下步骤:

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\left(\oint_l \overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{x}\right) =& \oint_l \frac{D}{Dt}(\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{x}) \\
=& \oint_l \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot d\overrightarrow{x} + \oint_l \overrightarrow{v}\cdot\frac{D(d\overrightarrow{x})}{Dt} \\
=& I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

对于 I_2, 由图1, 假设 δt 时间流线 l 变到了 l'，流线上的微元质量体 $\delta\overrightarrow{x}$ 变到了 $\delta\overrightarrow{x'}$, 则有矢量关系 $\delta\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v}+\delta\overrightarrow{v})\delta t = \overrightarrow{v}\delta t + \delta\overrightarrow{x'}$ 成立，即 $\delta\overrightarrow{x'} - \delta\overrightarrow{x} = \delta\overrightarrow{v}\delta t$，从而 $d\overrightarrow{x}$ 的随体导数为 $d\overrightarrow{v}$, 注意到 $\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{v} = d(\frac{1}{2}|\overrightarrow{v}|^2)$, 而动量的环量积分为零。因此 $I_2 = 0$。

对于 I_1, 由(8)式中的动量方程 $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{f} - \frac{\nabla p}{\rho}$, 根据假设流体是正压流体，因此由(**??**)式得存在压力函数 $\mathbb{P}$ 使得 $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\mathbb{P}$，又因为质量力有势，所以又存在势力场 Π 使得 $\overrightarrow{f} = -\nabla\Pi$, 于是

$$
\begin{aligned}
I_1 =& \oint_l \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot d\overrightarrow{x} \\
=& -\oint_l (\Pi + \mathbb{P})\cdot d\overrightarrow{x} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

因此,(26)式成立。

由 Kelvin 定理可直接导出 Lagrange 定理，也称涡量不生不灭定理，即在 Kelvin 定理成立的条件下，流场若一开始有旋则始终有旋，一开始无旋则始终无旋。只需利用 Stokes 公式即可说明。

由 Lagrange 定理的逆否可以得到旋涡产生或消失的条件是 Kelvin 定理的四个条件至少有一个不能满足。

References

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product

[2] http://www.continuummechanics.org/velocitygradient.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity#Angular_velocity_tensor

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence#Cylindrical_coordinates

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_solution

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_function#Green.27s_functions_for_the_Laplacian

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates