统计信号处理参数估计仿真大作业

赵丰

2018 年 5 月 3 日

1 离散情形下的仿真

1.1 模型

设观测模型为 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}$, 其中 θ 与 n 相互独立均服从高斯分布。且已知 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的均值为：$\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbb{E}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{0}$, 协方差矩阵为 $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}$ 从而可求出 $\boldsymbol{z}$ 的均值和方差：$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{V}_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{C}\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{C}^T + \mathbf{V}_{\boldsymbol{n}}$.

1.2 估值方法

我们使用以下三种方法对模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 进行**无偏**估值：

1. Bayes 后验平均：$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ms}} = \mathbb{E}_{p(\boldsymbol{\theta}|z)}[\theta] = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu}_z)$ 估值是 $\boldsymbol{z}$ 的线性函数，所以在这种情况下 Bayes 后验平均也是 MAP 估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{map}}$，也是线性最小均方估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{lms}}$。
2. 最大似然估值：假定 θ 的先验信息未知，仅利用 $\boldsymbol{C}$ 和 $\mathbf{V}_{\boldsymbol{z}}$ 的信息。$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}} = (\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{n}}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{n}}^{-1}\boldsymbol{z}$
3. 最小二乘估值：进一步假定对方差的统计信息也未知，仅利用 $\boldsymbol{C}$ 和观测数据，我们有 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}} = (\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{z}$

1.3 估值误差

对于上一小节给出的三种估值方法，我们简单分析一下它们各自的理论误差：

1. 根据线性最小均方估值的理论误差公式：$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{lms}}] = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{C}\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}$

2. 最大似然法估值的方差矩阵是 $\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}] = (\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{n}}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}$

3. 最小二乘法的方差矩阵是 $\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}] = (\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^T\mathbf{V}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})$

理论结果表明：$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{lms}}] \leq \mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}] \leq \mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}]$

1.4 实验

我们取参数 θ 和 z 为 2 维进行实验，探究不同信噪比条件下不同估值方法的理论误差和 C-R 界的差距。

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & -0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{\boldsymbol{n}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.03 \\ 0.03 & 0.05 \end{bmatrix}$$

利用二维正态分布产生 1000 个观测,得到三种估值方法的实验结果如表 1所示。

表 1: 离散估值实验结果

SNR		bayes	ml	ls
8.75E+00	mean error	1.71E-02	1.92E-02	1.92E-02
	theoretical variance	2.88E-02	4.32E-02	4.32E-02
	experimental variance	2.85E-02	4.33E-02	4.33E-02
-1.12E+01	mean error	3.68E-03	6.51E-02	6.51E-02
	theoretical variance	1.41E-01	4.32E+00	4.32E+00
	experimental variance	1.46E-01	4.27E+00	4.27E+00
-3.12E+01	mean error	3.83E-04	5.54E-01	5.54E-01
	theoretical variance	1.50E-01	4.32E+02	4.32E+02
	experimental variance	1.58E-01	4.17E+02	4.17E+02

从上表可以看到：

1. 当信噪比较高时，三种估值方法的误差在同一数量级，实验均值接近零；

2. 当信噪比比较低时，Bayes 后验估值由于利用了先验信息，估值方差趋近于 $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}} = 0.15$，估值仍较为准确，但其他两种方法虽然理论上是无偏的，但由于方差较大，对于 1000 次观测无法准确估计 $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$。

3. $\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}] = \mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}]$，这是因为 $\boldsymbol{C}$ 是可逆的方阵。

2 连续情形下的仿真

2.1 模型

设观测信号 $z(t) = Ag(\omega t + \theta) + n(t), 0 \le t \le T$, A 是未知的非随机参量 (信号幅度的估值)，$n(t)$ 是谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。采用最大似然法进行估值，有

$$\hat{A}_{\mathrm{ML}} = \frac{\int_0^T z(t)s(t)dt}{\int_0^T s^2(t)dt} \tag{1}$$

其中 $s(t) = g(\omega t + \theta)$。

2.2 估值误差

信号幅度的估值式(1)是有效估值，方差为 $N_0/\left(2\int_0^T s^2(t)dt\right)$。

2.3 实验

设 $T = [0, 2\pi]$。我们分别取正弦波、方波和三角波作为信道的输入信号，待估计的信号幅值为 $A = 1.5$。$g(\omega t + \theta)$, 周期为 2π,

$$g_{\mathrm{sine}}(t) = \sin(t);\ g_{\mathrm{square}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & \pi \le t < 2\pi \end{cases};\ g_{\mathrm{sawtooth}}(t) = \frac{t}{\pi} - 1$$

对信号采用等间隔采样（采样点个数为 1000），在每个采样点附加方差为 $N_0/\ 2\Delta t$ 的噪声，其中 Δt 是采样间隔。之所以采用采样间隔修正，是因为计算机不能产生连续域的 Δ 函数，直接用离散采样的方法，如果每个采样点高斯噪声的方差相同，那么根据大数定律 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ML}}$ 的方差趋近于零，与 C-R 界非零矛盾。

仿真实验表明噪声方差取为方差为 $N_0/\ 2\Delta t$ 使得表 2的结果与观测采样点数无关（实验次数足够多，比如 200 次）:

从表 2可以看到:

1. 当信噪比较高时，估值方差较小，实验均值接近零；
2. 估值方差只和信号能量有关，和信号波形无关，我们通过仿真可以验证这一点。

表 2: 连续估值实验结果

	SNR	bias	var(t)	var(ep)
sine	1.80E+01	-2.45E-05	1.37E-02	1.59E-02
sawtooth	1.62E+01	1.59E-02	2.39E-02	2.38E-02
square	2.10E+01	-4.63E-03	8.47E-03	7.96E-03
sine	1.50E+01	1.15E-02	3.00E-02	3.19E-02
sawtooth	1.32E+01	-1.28E-03	4.53E-02	4.76E-02
square	1.80E+01	-5.37E-03	1.48E-02	1.59E-02
sine	-3.36E+00	-2.77E-02	1.76E+00	2.17E+00
sawtooth	-5.10E+00	2.61E-02	3.21E+00	3.24E+00
square	-3.43E-01	-3.01E-02	1.21E+00	1.08E+00