清华大学深圳研究生院

统计信号处理

2018 年春季学期

课后习题 1

赵丰 2018 年 4 月 1 日

1.1. 试推导如下情况的似然比。

$$H_0 : z \sim N(m_0, \sigma_0^2)$$
$$H_1 : z \sim N(m_1, \sigma_1^2)$$

并求判决域和错误概率。

解.

$$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \tag{1}$$
$$= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \tag{2}$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{z|\lambda(z) < \lambda_B\}$$
$$\mathcal{Z}_1 = \{z|\lambda(z) > \lambda_B\}$$

$$P_F = P(D_1, H_0) = \int_{z\in\mathcal{Z}_1} p(z|H_0)dz$$
$$P_M = P(D_0, H_1) = \int_{z\in\mathcal{Z}_0} p(z|H_1)dz$$

1.2. 考虑一二元对称信道，ϵ 是交叉概率（假定 $\epsilon < \frac{1}{2}$），即信道输入为 0（或 1）时，输出为 b（或 a）的概率。若先验概率相等，试导出保证平均错误概率最小的判决准则，并求最小平均错误概率。

解. 考虑一次观测 z，

$$H_0 : \theta = 0$$
$$H_1 : \theta = 1$$

条件概率 $z|\theta$ 已知：
$p_{z|\theta=0}(a)=1-\epsilon, p_{z|\theta=0}(b)=\epsilon, p_{z|\theta=1}(a)=\epsilon, p_{z|\theta=1}(b)=1-\epsilon$ 由似然比检验，$\lambda(z)=\frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}\Rightarrow\lambda(a)=\frac{\epsilon}{1-\epsilon}<1,\lambda(b)=\frac{\epsilon}{1-\epsilon}>1$ 因为先验概率相等，所以 $\lambda_B=1$，因此判决准则为
$z=b\Rightarrow\theta=1; z=a\Rightarrow\theta=0$。平均错误概率为

$$\begin{aligned}P_{\theta,z}(0,b)+P_{\theta,z}(1,a)=&P_\theta(0)P_{z|\theta=0}(b)+P_\theta(1)P_{z|\theta=1}(a)\\=&\epsilon\end{aligned}$$

1.3. 请使用最小错误概率准则，设计一个在如下两种假设间作出选择的接收机（假定两种假设的先验概率相等）：

$$\begin{aligned}H_0&:z(t)=s_0(t)+n(t)\\H_1&:z(t)=s_1(t)+n(t)\end{aligned}$$

其中：信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 如图 1所示：噪声 $n(t)$ 是高斯型随机变量，均值为零，谱密度为 $\frac{N_0}{2}$。并画出平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系（E 为信号的平均能量）。

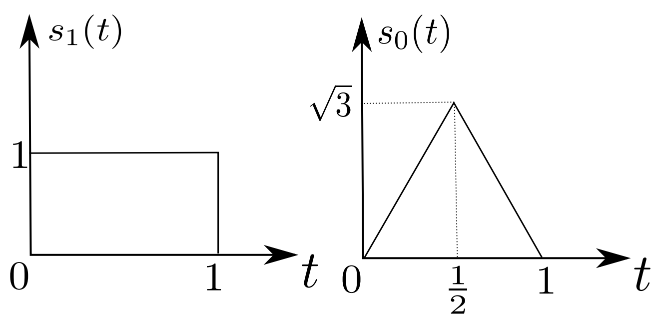

图 1: 信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$

解. 首先计算信号的能量 $E_1=1,E_2=1,\mathscr{L}_T=1\Rightarrow v_T=0$，根据

$$v\underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}}v_T \tag{3}$$

可得到最小错误概率的判决准则。$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相关系数 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由

$$P_F = P_M = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}}) \tag{4}$$

可得到平均错误概率为

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(P_F + P_M) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\right)$$

平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系如图 2所示

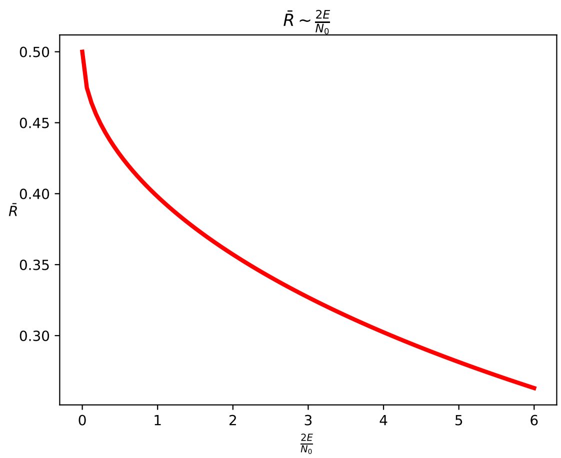

图 2

1.4. 已知 K 个独立的观测值

$$\begin{cases} H_1: & z_k = n_k \\ H_0: & z_k = 1 + n_k \end{cases}$$

其中：n_k 是均值为零、方差为 2 的高斯随机变量，$k = 1, 2, \ldots, K$。

(a) 设计似然比检验，并求 P_F 和 P_M。

(b) 画出 $K = 1$ 时的接收机工作特性。

(c) 假定 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = 2, c_{10} = 1, P(H_0) = 0.7$, 试求最小 N 值，使得 $K = N$ 时的风险不大于 $K = 1$ 时风险的 $\frac{1}{2}$。

解. (a) 设 $\boldsymbol{z}=[z_1,\ldots,z_K], \lambda(\boldsymbol{z})=\frac{p(\boldsymbol{z}|H_1)}{p(\boldsymbol{z}|H_0)}$

$$\lambda(\boldsymbol{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_B \Rightarrow z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2}-\frac{2}{K}\ln\lambda_B$$

其中 $z=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} z_i, z|H_0 \sim N(1,\frac{2}{K}), z|H_1 \sim N(0,\frac{2}{K})$

$$\begin{aligned} P_F =& \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\ln\lambda_B} p(z|H_0)dz \\ =&\Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4}+\frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \\ P_M =&\Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4}-\frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \end{aligned}$$

(b) 当 $K=1$ 时，以 λ_B 作为曲线参数，作出 (P_F,P_D) 的曲线如图 3 所示。

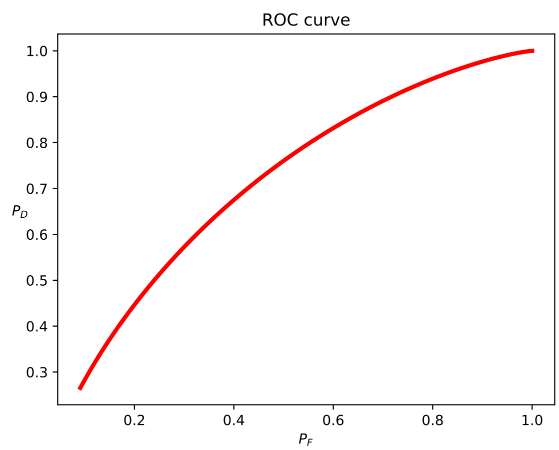

图 3

(c)

$$\begin{aligned} \bar{R} =& C_{01}P(D_0,H_1)+C_{10}P(D_1,H_0) \\ =& 2P(H_1)P(D_0|H_1)+P(H_0)P(D_1|H_0) \\ =& 0.6P_M+0.7P_F \end{aligned}$$

另一方面，

$$\lambda_B = \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})} = \frac{7}{6}$$

根据 (a) $\bar{R}(K=1)=0.47, \bar{R}(K=6)=0.25, \bar{R}(K=7)=0.23 < \frac{1}{2}\bar{R}(K=1) \Rightarrow N=7$

1.5. 对于二元通信系统，其假设为：

$$\begin{cases} H_1: & z(t) = A\cos\omega_1 t + B\cos(\omega_2 t+\phi) + n(t) \\ H_0: & z(t) = B\cos(\omega_2 t+\phi) + n(t) \end{cases} \text{其中：}$$

$$0 \le t \le T$$

$A, B, \omega_1, \omega_2, \phi$ are known constant

假定：$\int_0^T \cos\omega_1 t\cos\omega_2 t dt = \int_0^T \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t dt = 0, n(t)$ 是谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。试画出其最佳接收机模型，并分析其误码率是否和 $A\cos\omega_1 t$ 及 $B\cos(\omega_2 t+\phi)$ 有关。计算误码率以证明你的分析结论。

解. 假定等先验概率，由(4)式得

$$P_e = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}})$$

而

$$\begin{aligned} E(1-\rho) =& \frac{1}{2}\int_0^T (s_1(t)-s_0(t))^2 dt \\ =& \frac{1}{2}\int_0^T (A\cos\omega_1 t)^2 dt \end{aligned}$$

因此误码率与 $A\cos\omega_1 t$ 有关而和 $B\cos(\omega_2 t+\phi)$ 无关。