信号检测理论

赵丰

2018 年 4 月 17 日

1. Bayes 准则

   定义似然比为 $\lambda(z) \triangleq \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}$

   $$\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_B(z) \triangleq \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})} \tag{1}$$

   其中 $C_{ij} = P(D_i, H_j)$

2. 极大极小准则（先验概率 $\xi = P(H_0)$ 未知），满足极大极小化方程：

   $$C_{00}P(D_0|H_0) + C_{10}P(D_1|H_0) = C_{01}P(D_0|H_1) + C_{11}P(D_1|H_1) \tag{2}$$

   解出 ξ_{MM}，根据

   $$\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{MM} \triangleq \frac{\xi_{MM}(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi_{MM})(C_{01}-C_{11})} \tag{3}$$

   设计接收机。

3. Neyman Pearson 准则：给定 $P_F = \alpha$，使得 P_D 最大。

   $$\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{NP} \tag{4}$$

   其中 λ_{NP} 满足方程

   $$P_F = \int_{z\in Z_1} p(z|H_0)dz = \alpha \tag{5}$$

4. ROC 曲线：将由 Neyman Pearson 准则计算出的 (P_F, P_D) 曲线。

5. 在理想白高斯信道中信号的检测

考虑高斯带限白噪声，即

$$S_N(f)=\begin{cases}0 & \text{if}|f|>B\\ \frac{N_0}{2} & \text{if}|f|<B\end{cases} \tag{6}$$

可以证明 $S_N(f)$ 对应的相关函数是 $R_N(\tau)=\frac{N_0\sin(2B\pi\tau)}{2\pi\tau}$

证明. 首先已知 $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(t))=\mathrm{rect}(f)$ 其中

$$\mathrm{rect}(f)=\begin{cases}0 & \text{if } |f|>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \text{if } |f|=\frac{1}{2}\\ 1 & \text{if } |f|<\frac{1}{2}.\end{cases}\qquad \mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

根据 Fourier 变换的性质：若 $\mathcal{F}f(x)=\hat{f}(\lambda)$, 则 $\mathcal{F}f(ax)=\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$ 因此 $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(2Bt))=\frac{1}{2B}\mathrm{rect}(\frac{f}{2B})$, 等式两边同时乘以 N_0B 得 $\mathcal{F}(N_0B\,\mathrm{sinc}(2Bt))=\frac{N_0}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2B})$ □

由相关函数的性质 $R_N(0)=N_0B$ 为高斯分布的方差。

可以证明，若 $n(t)$ 是高斯带限白噪声随机过程，在 $[0,T]$ 时间内，关于 $z_i(t)=s_i(t)+n(t), i=0,1$ 的信号检测似然函数为：

$$\lambda(z(t))=\exp\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T(s_1(t)-s_0(t))z(t)dt-\frac{1}{N_0}(\int_0^T(s_1^2(t)-s_0^2(t))dt)\right) \tag{7}$$

接收机工作性能

设随机变量 $v=\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]z(t)dt$，根据最小平均错误概率准则

$$v\underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}}v_T \tag{8}$$

其中 $v_T=\frac{N_0}{2}\ln\mathscr{L}_T+\frac{1}{2}(E_1-E_0)$, 而 $\mathscr{L}_T=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}, E_i=\int_0^T s_i^2(t)dt$ 为已知量。为计算虚警概率 P_F 和漏警概率 P_M，首先求 v 的分布。设信号平均能量 $E=\frac{1}{2}(E_0+E_1)$, 互相关系数 $\rho=\frac{1}{E}\int_0^T s_1(t)s_0(t)dt$。因

为高斯过程的积分也是高斯分布，

$$\begin{aligned}v|H_0 &= \int_0^T [s_1(t)-s_0(t)]s_0(t)dt + \int_0^T [s_1(t)-s_0(t)]n(t)dt \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[v|H_0] = \rho E - E_0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Var}[v|H_0] = \frac{N_0}{2}\int_0^T (s_1(t)-s_0(t))^2 dt = N_0E(1-\rho)\end{aligned}$$

同理可求出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v|H_1] =& E_1 - \rho E \\ \mathrm{Var}[v|H_1] =& N_0E(1-\rho)\end{aligned}$$

因此虚警概率 P_F 为

$$\begin{aligned}P_F =& \int_{v_T}^{\infty} p(v|H_0)dv \\ =& 1-\Phi(y_T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_T =& \frac{v_T - (\rho E - E_0)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}} \\ =& \frac{\frac{N_0}{2}\mathscr{L}_T + E(1-\rho)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}}\end{aligned}$$

漏警概率 P_M 为

$$\begin{aligned}P_M =& \int_{-\infty}^{v_T} p(v|H_1)dv \\ =& \Phi(y_T')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_T' =& \frac{v_T - (E_1 - \rho E)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}} \\ =& \frac{\frac{N_0}{2}\mathscr{L}_T - E(1-\rho)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}}\end{aligned}$$

在等先验概率的情况下，$\mathscr{L}_T = 0 \Rightarrow y_T = y_T' \Rightarrow$

$$P_F = P_M = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}}) \tag{9}$$

当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 一定时，$\rho\downarrow\Rightarrow P_F\downarrow$

雷达系统检测是否有信号，其中 $s_0(t)=0\Rightarrow\rho=0,E_0=0$，采用 Neyman-Pearson 准则，门限 υ_{NP} 根据下式确定：

$$P_F=1-\Phi(\frac{\upsilon_{\mathrm{NP}}}{\sqrt{N_0E_1/2}})=\alpha$$

求出 υ_{NP} 后，代入计算 P_D，

$$P_D=1-P_M=1-\Phi(\frac{\upsilon_{\mathrm{NP}}-E_1}{\sqrt{N_0E_1/2}})$$

于是可作出 ROC 曲线。当信噪比 $\frac{E_1}{N_0}$ 增加时, 对相同的 α,P_D 增大，ROC 曲线向左上方倾斜。

6. 多元假设检验

考虑 “M 元择一” 的情况，平均代价可计算出为：

$$\bar{R}=\sum_{i=0}^{M-1}C_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{\mathcal{Z}_i}I_i(z)dz$$

其中

$$I_i(z)=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}(C_{ij}-C_{jj})P(H_j)p(z|H_j)$$

使得 $\bar{R}$ 最小的空间划分方式为：

$$\mathcal{Z}_i=\{z|I_i(z)=\min\{I_k(z)|k=0,\dots,M-1\}\}$$

最小平均错误准则取 $C_{ij}=1-\delta_{ij}$，此时 $I_i(z)$ 为

$$I_i(z)=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}P(H_j)p(z|H_j) \tag{10}$$

$$=p(z)-p(z)P(H_i|z) \tag{11}$$

故 $I_i(z)$ 取最小值等效于 $P(H_i|z)$ 取最大值（MAP 准则）。

在等先验概率的情况下 $p(z)P(H_i|z)=p(z|H_i)P$，可以用最大似然准则。

举例：考虑 H_i : 接收信号 $\sim N(m_i,\sigma^2)$, 其中 $m_1=1,m_2=2,m_3=-1$。若考虑等先验概率下的最小平均错误概率准则，且有 n 次观测样本 $z_1,\dots,z_n$。

首先可以知道 $z = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ 是充分统计量，分布为 $N(m_i, \frac{1}{n}\sigma^2)$。
根据最大似然准则，分别作出三种假设下 z 的概率密度函数曲线如图 1所示。由图可见，三条概率密度函数曲线将实轴分为三段 $(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \infty)$，分别记为 I_3, I_1, I_2。每段中分别有一条曲线达到最高。

当样本值落在区间 I_i 时判定假设 H_i 成立。

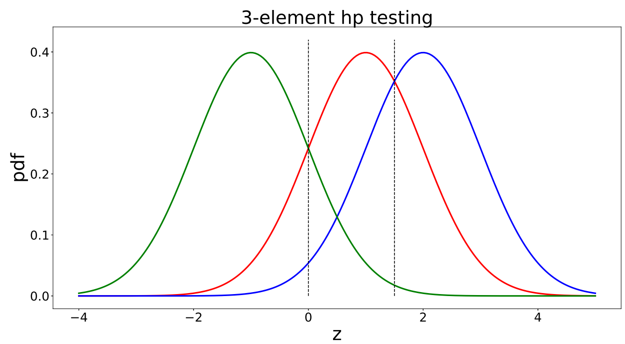

图 1: 三元假设问题

7. 复合假设检验：参量是随机变量

 (a) 若参量的概率分布已知，可将条件似然函数对参量的分布取平均，按简单假设检验求解。比如假设

$$H_0 : s_0(t) = 0$$
$$H_1 : s_1(t) = A, \text{where} : A \sim N(0, \sigma_A^2)$$

信道是高斯信道，观测 $z(t) = s(t) + n(t)$, $n(t) \sim N(0, \sigma_N^2)$，且 A 与 $n(t)$ 相互独立。设只有 1 次观测，$z|H_0 \sim N(0, \sigma_N^2)$ 而

$$p(z|H_1) = \int_{\mathbb{R}} p(z|H_1, A)p(A)dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)}} \exp(-\frac{z^2}{2(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)})$$

$\Rightarrow z|H_1 \sim N(0, \sigma_N^2 + \sigma_A^2)$ 再通过似然比检验得到双边检验的形式：

$$z^2 \mathop{\gtrless}_{z\in\mathcal{Z}_0}^{z\in\mathcal{Z}_1} \frac{2\sigma_N^2(\sigma_A^2 + \sigma_N^2)}{\sigma_A^2}\left[\ln\lambda_B + \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_N^2})\right]$$

(b) 随机相位信号的检测

$H_0: z(t) = n(t), 0 \le t \le T, n(t)$是均值为 0，谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声

$H_1: z(t) = \sqrt{\dfrac{2E_s}{T}}\sin(\omega_c t + \theta) + n(t), \mathrm{where}:$

$A \sim N(0, \sigma_A^2), \theta$是随机变量，$E_s$ 是该信号的能量

若 θ 给定，假定 T 是 $\frac{2\pi}{\omega_c}$ 的整数倍, 可求出条件似然比为:

$$\lambda(z(t)|\theta) = \exp\left(\frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}}(y_c\sin\theta + y_s\cos\theta) - \frac{E_s}{N_0}\right) \tag{12}$$

其中:

$$y_c = \int_0^T z(t)\cos\omega_c t dt \tag{13}$$

$$y_s = \int_0^T z(t)\sin\omega_c t dt \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

进一步假定随机相位 θ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上是均匀分布（最不利分布），则平均似然比为

$$\lambda(z(t)) = \mathbb{E}_\theta[\lambda(z(t)|\theta)] \tag{16}$$

$$= \exp(-\frac{E_s}{N_0})I_0(\frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sqrt{y_c^2 + y_s^2}) \tag{17}$$

其中

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\phi)d\phi$$

称为零阶修正的 Bessel 函数。设 $y = \sqrt{y_c^2 + y_s^2}$，由似然比判决规则可以得到

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} y_T$$

可以计算出 y 的概率密度函数为:

$$p(y|H_1) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 + \frac{E_sT}{2}\right]\right) \cdot I_0\left(\frac{y}{\sigma^2}\sqrt{\frac{E_sT}{2}}\right) \tag{18}$$

$$p(y|H_0) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \tag{19}$$

其中 $y>0, \sigma^2=\frac{N_0 T}{4}$,$y|H_0$ 服从 Rayleigh 分布，是假设 H_1 下信号能量为 0 的特殊情况。

从而求出虚警概率 P_F 和检测概率 P_D:

$$P_F=\int_{y_T}^{\infty} p(y|H_0)dy=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y_T^2}{\sigma^2}\right) \tag{20}$$

$$P_D=\int_{y_T}^{\infty} p(y|H_1)dy=Q\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{E_s T}{2}}, \frac{y_T}{\sigma}\right) \tag{21}$$

其中

$$Q(a,b)=\int_{b}^{\infty} u\exp\left(-\frac{u^2+a^2}{2}\right) I_0(au)du$$

称为 Marcum 函数。

采用 Neyman-Pearson 准则,由 $P_F=\alpha$ 得到 $P_D=Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \sqrt{-2\ln\alpha})$。信噪比 $r=\frac{2E_s}{N_0}$，于是可作出接收机的 ROC 曲线以及当 α 一定时检测概率与信噪比的关系曲线如图 2所示。

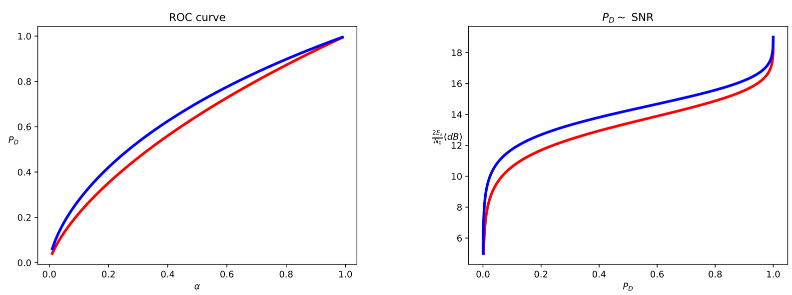

图 2

(c) 随机幅度和相位信号的检测

$$H_0: z(t)=n(t), 0\le t\le T$$
$$H_1: z(t)=A\sin(\omega_c t+\theta)+n(t), 0\le t\le T$$

A 服从 Rayleigh 分布:

$$p(A)=\frac{A}{\sigma_A^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right), A\ge 0$$

此时似然比为

$$\lambda(z(t))=\int_0^{\infty}\lambda(z(t)|A)p(A)dA$$

其中 $\lambda(z(t)|A)$ 可由 (17)得到为

$$\lambda(z(t)|A) = \exp\left(-\frac{A^2T}{2N_0}\right) \cdot I_0(\frac{2}{N_0}Ay)$$

利用 Marcum 函数的性质可得

$$\lambda(z(t)) = \frac{N_0}{\sigma_A^2 T + N_0} \exp\left(\frac{2\sigma_A^2}{N_0(\sigma_A^2 T + N_0)} y^2\right)$$

再根据似然比检验的准则得到最佳接收机。

在随机相位、随机幅度的情况下，虚警概率 P_F 的计算与之前相同，而检测概率 P_D 则为(21)对 $p(A)$ 的平均（将 $E_s = \frac{A^2T}{2}$ 代入该式）。可得：

$$P_D = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_T}{2}\right)^2\left(1+\frac{\bar{E}_s}{N_0}\right)^{-1}\right) \tag{22}$$

其中 $\bar{E}_s = \sigma_A^2 T$ 表示平均能量，$\bar{r} = \frac{\bar{E}_s}{N_0}$ 表示平均信噪比。若令 $P_F = \alpha$, 则 $P_D = \alpha^{1/(1+\bar{r})}$

8. 色高斯信道

考虑一般的情形，噪声仍为高斯过程，但相关函数不再是 $\delta\tau$ 而是一般的 $R_n(t_1, t_2)$，可能是时变的。处理这一问题可以用 Karhunen-Loeve 正交展开或者白化滤波器的方法。不同于白高斯信道中平均错误概率只与信号能量有关，在一般的色高斯信道中与信号波形有关。

(a) 正交展开

把 $z(t)$ 在基函数 $\{g_k(t)\}$ 上展开：

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k g_k(t), \text{where } z_k = \int_0^T z(t) g_k(t) dt \tag{23}$$

展开的目的是希望选择基函数使得展开系数 $\{z_k\}$ 相互独立，因为 z_k 是高斯变量，所以只需使 $\{z_k\}$ 互不相关即可，其协方差函数满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(z_k, z_l) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T n(t_1)n(t_2)g_k(t_1)g_k(t_2)dt_1dt_2\right] \\ &= \int_0^T\int_0^T R_n(t_1,t_2)g_k(t_1)g_k(t_2)dt_1dt_2 \end{aligned} \tag{24}$$

若

$$\int_0^T R_n(t_1,t_2)g_k(t_2) = \lambda_k g_k(t_1) \tag{25}$$

且 $\{g_k(t)\}$ 是归一化的正交函数集：

$$\int_0^T g_k(t)g_l(t) = \delta_{kl}$$

则 $\mathrm{Cov}(z_k,z_l) = \lambda_k\delta_{kl}$

似然比计算及判决规则：我们以接收信号 $K-L$ 展开式的前 N 个系数来建立“等效”的观测向量：$\boldsymbol{z}_N = (z_1,\ldots,z_N)$。似然比函数为

$$\lambda(\boldsymbol{z}_N) = \frac{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\exp\left(-\frac{(z_k-s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\exp\left(-\frac{(z_k-s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right)}$$

其中

$$s_{ik} = \int_0^T s_i(t)g_k(t)dt, i=1,2 \tag{26}$$

是 z_k 的均值。上式取对数并整理得：

$$\ln\lambda(\boldsymbol{z}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}z_k(s_{1k}-s_{0k}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k}(s_{1k}^2 - s_{0k}^2)$$

令 $N\to\infty$ 并将(23)代入上式的第一项，(26)取一个代入上式第二项，得到：

$$\begin{aligned}\ln\lambda(z(t)) &= \int_0^T z(t)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k}(s_{1k}-s_{0k})g_k(t)dt - \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t)\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\lambda_k}s_{1k}g_k(t)dt - \int_0^T s_1(t)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k}s_{0k}g_k(t)dt\right]\\ &= \left[\int_0^T z(t)h_1(t)dt - \int_0^T z(t)h_0(t)dt\right] - \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t)h_1(t)dt - \int_0^T s_0(t)h_0(t)dt\right]\end{aligned}$$

其中 $h_i(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k}s_{ik}g_k(t)$ 易验证，$h_i(t)$ 是积分方程 $\int_0^T R_n(t,\tau)h_i(\tau)d\tau = s_i(t)$ 的解。根据似然比检验准则有：

$$\int_0^T z(t)h_1(t)dt - \int_0^T z(t)h_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} v_T, \text{where } v_T = \ln\lambda_T + \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t)h_1(t)dt - \int_0^T s_0(t)h_0(t)dt\right] \tag{27}$$

(b) 白化滤波器

将接收信号 $z(t)$ 通过一个滤波器 $h_w(t,\tau)$，设输出信号为 $z_w(t)$，则：

$$z_w(t) = \int_0^T h_w(t,\tau)z(\tau)d\tau|H_i = s_{wi}(t) + n_w(t) \tag{28}$$

其中

$$
\begin{aligned}
s_{wi}(t) &= \int_0^T h_w(t,\tau)s_i(\tau)d\tau \\
n_w(t) &= \int_0^T h_w(t,\tau)n(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

若输出噪声 $n_w(t)$ 是白噪声，则可以根据(8)的判决准则设计接收机。

假设 $h_w(t,\tau)$ 可以展开为:

$$h_w(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t) g_k(\tau)$$

于是可得:

$$
\begin{aligned}
R_{n_w}(t,\tau) &= \mathbb{E}[n_w(t)n_w(\tau)] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T h_w(t,s)h_w(\tau,u)n(s)n(u)dsdu\right] \\
&= \int_0^T\int_0^T h_w(t,s)h_w(\tau,u)R_n(s,u)dsdu \\
&= \int_0^T\int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t)g_k(s)\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty} h_l g_l(\tau)g_l(u)\right] R_n(s,u)dsdu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^T h_k g_k(t)g_k(s)h_l g_l(\tau)\lambda_l g_l(s)ds \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} h_k g_k(t)h_l g_l(\tau)\lambda_l \delta_l k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k^2 g_k(t)g_k(\tau)
\end{aligned}
$$

另一方面

$$\delta(t-\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)g_k(\tau)$$

比较系数得:

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Rightarrow h_w(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g_k(t)g_k(\tau) \tag{29}$$

9. 练习题

(1) 试推导如下情况的似然比。

$$H_0 : z \sim N(m_0, \sigma_0^2)$$
$$H_1 : z \sim N(m_1, \sigma_1^2)$$

并求判决域和错误概率。

解.

$$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \tag{30}$$
$$= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp(-\frac{(z-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-m_0)^2}{2\sigma_0^2}) \tag{31}$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{z|\lambda(z) < \lambda_B\}$$
$$= \{z|(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)z^2 - 2(m_0\sigma_1^2 - m_1\sigma_0^2 + m_0^2\sigma_1^2 - m_1^2\sigma_0^2 < 2\sigma_0^2\sigma_1^2(\ln\lambda_B - \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}))\}$$
$$\mathcal{Z}_1 = \{z|\lambda(z) > \lambda_B\}$$

$$P_F = P(D_1, H_0) = \int_{z\in\mathcal{Z}_1} p(z|H_0)dz$$
$$P_M = P(D_0, H_1) = \int_{z\in\mathcal{Z}_0} p(z|H_1)dz$$

Discuss $\sigma_1 \gtreqless \sigma_0, m_1 \gtreqless m_0$. □

(2) 考虑一二元对称信道，ϵ 是交叉概率（假定 $\epsilon < \frac{1}{2}$），即信道输入为 0（或 1）时，输出为 b（或 a）的概率。若先验概率相等，试导出保证平均错误概率最小的判决准则，并求最小平均错误概率。

解. 考虑一次观测 z，

$$H_0 : \theta = 0$$
$$H_1 : \theta = 1$$

条件概率 $z|\theta$ 已知：$p_{z|\theta=0}(a) = 1-\epsilon, p_{z|\theta=0}(b) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(a) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(b) = 1-\epsilon$ 由似然比检验，$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \Rightarrow \lambda(a) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} <$

$1, \lambda(b) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} > 1$ 因为先验概率相等，所以 $\lambda_B = 1$，因此判决准则为 $z = b \Rightarrow \theta = 1; z = a \Rightarrow \theta = 0$。平均错误概率为

$$
\begin{aligned}
P_{\theta,z}(0,b) + P_{\theta,z}(1,a) =& P_\theta(0)P_{z|\theta=0}(b) + P_\theta(1)P_{z|\theta=1}(a) \\
=& \epsilon
\end{aligned}
$$

或比较四类判决的错误概率，分别为 $\epsilon, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\epsilon$。 □

(3) 请使用最小错误概率准则，设计一个在如下两种假设间作出选择的接收机（假定两种假设的先验概率相等）：

$$
\begin{aligned}
H_0 &: z(t) = s_0(t) + n(t) \\
H_1 &: z(t) = s_1(t) + n(t)
\end{aligned}
$$

其中：信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 如图 3所示：噪声 $n(t)$ 是高斯型随机变量，均值为零，谱密度为 $\frac{N_0}{2}$。并画出平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系（E 为信号的平均能量）。

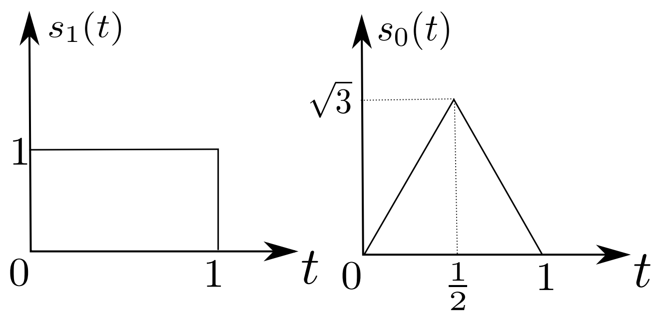

图 3: 信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$

解. 首先计算信号的能量 $E_1 = 1, E_2 = 1, \mathscr{L}_T = 1 \Rightarrow v_T = 0$，根据(8)式可得到最小错误概率的判决准则。$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相关系数 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由(9)式可得到平均错误概率为

$$
\bar{R} = \frac{1}{2}(P_F + P_M) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\right)
$$

平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系如图 4所示

□

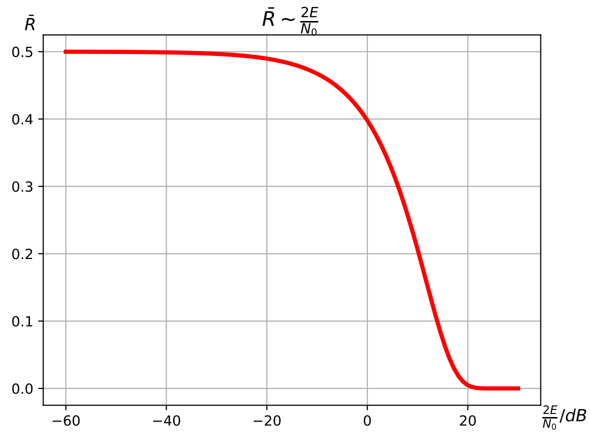

图 4

(4) 已知 K 个独立的观测值

$\begin{cases} H_1: & z_k = n_k \\ H_0: & z_k = 1 + n_k \end{cases}$ 其中：n_k 是均值为零、方差为 2 的高斯随机变量，$k = 1, 2, \ldots, K$。

(a) 设计似然比检验，并求 P_F 和 P_M。

(b) 画出 $K = 1$ 时的接收机工作特性。

(c) 假定 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = 2, c_{10} = 1, P(H_0) = 0.7$, 试求最小 N 值，使得 $K = N$ 时的风险不大于 $K = 1$ 时风险的 $\frac{1}{2}$。

解. (a) 设 $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_K], \lambda(\boldsymbol{z}) = \frac{p(\boldsymbol{z}|H_1)}{p(\boldsymbol{z}|H_0)}$

$$\lambda(\boldsymbol{z}) \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} \lambda_B \Rightarrow z \mathop{\gtrless}_{H_1}^{H_0} \frac{1}{2} - \frac{2}{K} \ln \lambda_B$$

其中 $z = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} z_i, z|H_0 \sim N(1, \frac{2}{K}), z|H_1 \sim N(0, \frac{2}{K})$

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2} - \frac{2}{K}\ln\lambda_B} p(z|H_0) dz \\ &= \Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4} + \frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \\ P_M &= \Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4} - \frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \end{aligned}$$

(b) 当 $K=1$ 时，以 λ_B 作为曲线参数，作出 (P_F, P_D) 的曲线如图 5 所示。

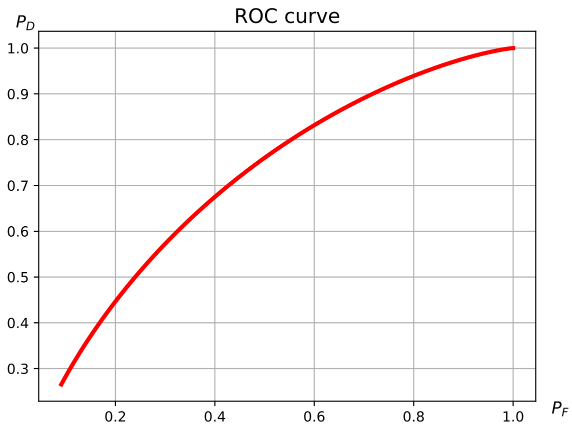

图 5

(c)

$$
\begin{aligned}
\bar{R} =& C_{01}P(D_0, H_1) + C_{10}P(D_1, H_0) \\
=& 2P(H_1)P(D_0|H_1) + P(H_0)P(D_1|H_0) \\
=& 0.6P_M + 0.7P_F
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\lambda_B = \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})} = \frac{7}{6}
$$

根据 (a) $\bar{R}(K=1)=0.47, \bar{R}(K=6)=0.25, \bar{R}(K=7)=0.23 < \frac{1}{2}\bar{R}(K=1) \Rightarrow N=7$

$\square$

(5) 对于二元通信系统，其假设为：

$$
\begin{cases} H_1: & z(t) = A\cos\omega_1 t + B\cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \\ H_0: & z(t) = B\cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \end{cases} \quad \text{其中:} \quad \begin{array}{c} 0 \le t \le T \\ A, B, \omega_1, \omega_2, \phi \text{ are known constant} \end{array}
$$

假定：$\int_0^T \cos\omega_1 t\cos\omega_2 t dt = \int_0^T \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t dt = 0, n(t)$ 是谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。试画出其最佳接收机模型，并分析其误

码率是否和 $A\cos\omega_1 t$ 及 $B\cos(\omega_2 t+\phi)$ 有关。计算误码率以证明你的分析结论。

解. 假定等先验概率，由(9)得

$$P_e = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}})$$

而

$$\begin{aligned} E(1-\rho) =& \frac{1}{2}\int_0^T (s_1(t)-s_0(t))^2 dt \\ =& \frac{1}{2}\int_0^T (A\cos\omega_1 t)^2 dt \end{aligned}$$

因此误码率与 $A\cos\omega_1 t$ 有关而和 $B\cos(\omega_2 t+\phi)$ 无关。 □