讨论

数 33 赵丰

March 1, 2017

已知一个节点的先验分布是二维高斯分布 (X, Y)，X,Y 方向的均值均为 0，方差为 σ^2, 相关系数 r=0, 如果用极坐标表示，那么该节点到原点的距离为参数为 σ 的 Rayleigh 分布，而幅角为均匀分布。考虑在 x 轴上较远的一点 $(l_0, 0)$ 上有一个观测站，求节点到观测站的距离的分布。

距离 $L = \sqrt{(X - l_0)^2 + Y^2}$, Y^2/σ^2 是自由度为 1 的卡方分布,$(X - L_0)^2$ 的分布由定义可求出为：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} exp(-\frac{t + l_0^2}{2\sigma^2}) \cosh(\frac{l_0\sqrt{t}}{\sigma^2}) \tag{1}$$

注意 $(X - L_0)^2$ 和 $(X + L_0)^2$ 有相同的分布，由于反函数不存在，不可以直接对 pdf 做变量替换求出上式。因为 $(X - l_0)^2$ 与 Y^2 独立，所以 L^2 的 pdf 为 $(X - l_0)^2$ 与 Y^2pdf 的卷积。化简有:

$$f_{L^2}(y) = \frac{exp(-\frac{y+l_0^2}{2\sigma^2})}{2\pi\sigma^2} \int_0^y \frac{\cosh(\frac{l_0\sqrt{t}}{\sigma^2})}{\sqrt{t}\sqrt{y-t}} dt \tag{2}$$

对上式做 $u = \sqrt{t/y}$ 的变量替换：

$$f_{L^2}(y) = \frac{exp(-\frac{y+l_0^2}{2\sigma^2})}{\pi\sigma^2} \int_0^1 \frac{\cosh(\frac{l_0\sqrt{y}u}{\sigma^2})}{\sqrt{1-u^2}} du \tag{3}$$

设 $k = \frac{l_0\sqrt{y}}{\sigma^2}$ 因为

$$\cosh(ku) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ku)^{2n}}{(2n)!} \tag{4}$$

代入 (3), 注意到:

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{5}$$

因此

$$f_{L^2}(y) = \frac{exp(-\frac{y+l_0^2}{2\sigma^2})}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(l_0^2 y/\sigma^2)^n}{((2n)!!)^2} \tag{6}$$

进一步求出

$$f_L(y) = \frac{yexp(-\frac{y^2+l_0^2}{2\sigma^2})}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(l_0^2 y^2/\sigma^2)^n}{((2n)!!)^2} \tag{7}$$

与 $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为 $f_R(y) = \frac{y}{\sigma^2} exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2})$